合肥工业大学期中试卷（A）

2016~2017 学年第 一 学期 课程代码 1400211B 1400231B 课程名称 高等数学 A(上) 高等数学 B(上) 学分 6 课程性质:必修☑、选修□、限修□ 考试形式:开卷□、闭卷☑

专业班级（教学班）＿＿＿＿ 考试日期 2016 年 11 月 12 日 命题教师 集体 系（所或教研室）主任审批签名＿＿＿＿

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1、$\lim\limits_{x\to\infty}(x\sin\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sin x)=$＿＿＿＿.

2、设 $e^{x+y}+xy=1$，则 $dy|_{x=0}=$＿＿＿＿.

3、曲线 $\begin{cases}x=\cos^3 t,\\ y=\sin^3 t\end{cases}$ 上对应于 $t=\frac{\pi}{6}$ 处法线方程为 $y=$＿＿＿＿.

4、函数 $y=\frac{|x|}{\sin x}$ 的第一类间断点是＿＿＿＿.

5、设函数 $f(x)=\frac{1}{1-x}$，则 $f^{(n)}(0)=$＿＿＿＿.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、设函数 $f(x)=\frac{|x|}{x}$，则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=$（　　）.

（A）-1　（B）1　（C）±1　（D）不存在

2、当 $x\to0$ 时，下列结论不正确的是（　　）.

（A）$\ln\cos x\sim x$　（B）$\ln\sqrt{1+2x}\sim x$　（C）$1-e^{-x}\sim x$　（D）$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\sim x$

3、设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$，则下列结论正确的为（　　）.

（A）$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=\infty$　（B）$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=0$

（C）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=\infty$　（D）$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$

4、已知函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$（　　）.

（A）$-2f'(0)$　（B）$-f'(0)$　（C）$f'(0)$　（D）0

5、设当 $x\to0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\sin x^n$ 是比 $(e^{x^2}-1)$ 高阶的无穷小，则正整数 n 等于（　　）.

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

三、计算下列各题（每小题 6 分，共 30 分）

1、求 $\lim\limits_{x\to0}(1+e^x\sin^2x)^{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-1}}$.

2、求 $\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})$.

3、设 $\begin{cases}x=t^2+1,\\ y=t-t^3\end{cases}$ 确定了 $y=y(x)$，计算 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1}$.

4、求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\sin n}{1+n^2}$.

5、设函数 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-100)$，求 $f'(50)$.

四、（本题满分 10 分）讨论方程 $\sqrt{x}=\cos x$ 实根的个数.

五、（本题满分 10 分）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x>0,\\ ax+b, & x\le0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导.

(1) 确定常数 a,b 的值；　(2) 求 $f'(x)$，并讨论 $f'(x)$ 的连续性.

六、（本题满分 10 分）设 $x_1=2$, $x_{n+1}=\frac{x_n^2}{1+x_n}$, $n=1,2,\cdots$. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

七、（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上可导，且 $f(-1)=1$, $f(0)=-1$, $f(1)=0$.

(1) 证明存在 $\xi\in(-1,0)$，使 $f(\xi)=0$；(2) 证明存在 $\eta\in(-1,1)$，使 $f'(\eta)=f(\eta)$.

合肥工业大学期中试卷(A)

2016—2017 第1学期(2016年11月12日)

一、填空题

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(x\sin\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sin x)=$ 1

2. 设 $e^{x+y}+xy=1$，则 $dy|_{x=0}=$ $-1dx$

3. 曲线 $\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}$，上对应于 $t=\frac{\pi}{6}$ 处法线方程为 $y=\sqrt{3}x-1$

4. 函数 $y=\frac{|x|}{\sin x}$ 的第一类间断点是 $x=0$

5. 设函数 $f(x)=\frac{1}{1-x}$，则 $f^{(n)}(0)=n!$

二、选择题

1. 设函数 $f(x)=\frac{|x|}{x}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$ (D)

A. -1 B. 1 C. ±1 D. 不存在

2. 当 $x\to0$ 时，下列结论不正确的是 (A)

A. $\ln\cos x\sim x$ B. $\ln\sqrt{1+2x}\sim x$ C. $1-e^{-x}\sim x$ D. $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\sim x$

3. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$，则下列结论正确的为 (C)

A. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=\infty$ B. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=0$

C. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=\infty$ D. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$

4. 已知函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$ (B)

A. $-2f'(0)$ B. $-f'(0)$ C. $f'(0)$ D. 0

5. 设当 $x\to0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\sin x^n$ 是比 $(e^{x^2}-1)$ 高阶的无穷小，则正整数 n 等于 (C)

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

三、计算下列各题

1. 求 $\lim\limits_{x\to0}(1+e^x\sin^2x)^{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-1}}$

2. 求 $\lim$ [illegible]

4. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n\sin n}{1+n^2}$.

5. 设函数 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-100)$，求 $f'(50)$.

四、(本题满分10分) 讨论方程 $\sqrt{x}=\cos x$ 实根的个数

五、已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x>0\\ ax+b, & x\le0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导.

(1) 确定常数 a,b 的值. (2) 求 $f'(x)$，并讨论 $f'(x)$ 的连续性.

六、设 $x_1=2$，$x_{n+1}=\frac{x_n^2}{1+x_n}$，$n=1,2,\cdots$

证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

七、设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上可导，且 $f(-1)=1$，$f(0)=-1$，$f(1)=0$

(1) 证明存在 $\xi\in(-1,0)$，使 $f(\xi)=0$.

(2) 证明存在 $\eta\in(-1,1)$，使 $f'(\eta)=f(\eta)$

高数期中宣城校区B

一、填空题（每小题3分，共15分）

1、$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+1}{3x-1}\sin\dfrac{1}{x}=$ __$\dfrac{5}{3}$__。

2、曲线 $y=\dfrac{x+4\cos x}{3x-2\sin x}$ 的水平渐近线方程为 __$y=\dfrac{1}{3}$__。

3、设函数 $y=\dfrac{1}{2x+3}$，则：$y^{(n)}(0)=$ __$(-1)^n n!\dfrac{2^n}{3^{n+1}}$__。

4、若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的增量为 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=2x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2$，则

$f(x)$ 在点 x_0 处的微分 $dy\big|_{x=x_0}=$ __$2x_0^2dx$__，$f'(x_0)=$ __$2x_0^2$__。

5、若函数 $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$，则 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=1}=$ __$(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n(n+1)}$__。

二、选择题（每小题3分，共15分）

1、设当 $x\to0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\sin x^n$ 是比 $(e^{x^2}-1)$ 高阶的无穷小，则正整数 n 等于（ C ）。

A. 0　B. 1　C. 2　D. 3

2、设 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x} & x\neq0\\ f(0) & x=0\end{cases}$ 其中 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$f'(0)\neq0$ 且 $f(0)=0$，则

$x=0$ 是 $F(x)$ 的（ C ）

A. 导数存在的点　B. 连续点　C. 第一类间断点　D. 第二类间断点

3、设 $f(x)$ 在点 x_0 处左可导且右可导，则 $f(x)$ 在点 x_0 处（ A ）。

A. 连续　B. 不连续　C. 可导　D. 不可导

4、“$f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处有定义”是“$x\to x_0$ 时，$f(x)$ 有极限”的（ D ）。

A. 必要条件　B. 充分条件　C. 充分必要条件　D. 既非充分也非必要

5、设 $f(x)=\ln^2x$，$g(x)=\sqrt{x}$，$h(x)=e^{\frac{x}{2}}$，则当 x 充分大时，有（ D ）。

A. $h(x)<g(x)<f(x)$　B. $g(x)<f(x)<h(x)$

C. $f(x)<h(x)<g(x)$　D. $f(x)<g(x)<h(x)$

三、计算题（每小题8分，共40分）

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

解：$\because\ \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$

2、$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln(1+\dfrac{1}{x})\right]$

解：

$$\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})\right]=\lim_{x\to\infty}x^2\left[\frac{1}{x}-\ln(1+\frac{1}{x})\right]$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{1}{t^2}[t-\ln(1+t)]$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}$$
$$=\frac{1}{2}$$

3、$\lim\limits_{x\to0}(\cos x+\sin^2x)^{\frac{1}{x^2\cos x}}$

解：

$$\lim_{x\to0}(\cos x+\sin^2x)^{\frac{1}{x^2\cos x}}=\exp(\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x+\sin^2x)}{x^2\cos x})$$
$$=\exp(\lim_{x\to0}\frac{\cos x+\sin^2x-1}{x^2})$$
$$=\exp(\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{x^2}-\frac{1-\cos x}{x^2})$$
$$=\exp(-\frac{1}{2})$$

合 肥 工 业 大 学 试 卷（A）

2012~2013 学年第 一 学期 课程代码________ 课程名称 高等数学A(1) 学分____ 课程性质:必修☑、选修□、限修□ 考试形式:开卷□、闭卷☑ 共 4 页第 1 页

专业班级（教学班）__________ 考试日期 2012.11.20 命题教师 高等数学课程组 系（所或教研室） 主任审批签名 刘 植

一、填空题（每小题4分，共20分）：

1. 设 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，则 $\mathrm{d}y\big|_{x=1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}dx$.

2. 曲线 $\begin{cases}x=t-\sin t,\\ y=1-\cos t\end{cases}$ 在 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切线斜率为1.

3. 若 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 存在，且 $f(x)=x^{\frac{1}{x-1}}+2\lim\limits_{x\to1}f(x)$，则 $f(x)=x^{\frac{1}{x-1}}-2e$.

4. 若 $f'(x_0)=1$，则 $\lim\limits_{u\to0}\dfrac{f(x_0+2u)-f(x_0-u)}{\arctan u}=3$.

5. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，则 $a=\ln 2$.

二、选择题（每小题4分，共20分）：

1. 设 $f(x)=2^x+3^x-2$，则当 $x\to0$ 时（ D ）.

(A) $f(x)$ 与 x 是等价无穷小量 (B) $f(x)$ 是比 x 较低阶的无穷小量

(C) $f(x)$ 是比 x 较高阶的无穷小量 (D) $f(x)$ 与 x 是同阶但非等价无穷小量

2. 若函数 $f(x)$ 在 x_0 点存在左、右导数，则 $f(x)$ 在点 x_0（ A ）.

(A) 连续 (B) 可导 (C) 不可导 (D) 不连续

3. 当 $x\to1$ 时，$\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限（ C ）.

(A) 等于2 (B) 等于0 (C) 不存在但不为 ∞ (D) 为 ∞

4. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，讨论 $f(x)$ 的间断点，其结论为（ A ）.

(A) 存在间断点 $x=1$ (B) 存在间断点 $x=-1$

(C) 存在间断点 $x=0$ (D) 不存在间断点

5. 设对任意的 x，总有 $\varphi(x)\le f(x)\le\psi(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[\psi(x)-\varphi(x)]=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$（ C ）.

(A) 存在且等于0 (B) 存在但不一定等于0

(C) 不一定存在 (D) 一定不存在

合 肥 工 业 大 学 试 卷（A）

2012~2013 学年第 一 学期 课程代码＿＿＿＿ 课程名称 高等数学A(1) 学分＿＿ 课程性质：必修☑、选修□、限修□ 考试形式：开卷□、闭卷☑

专业班级（教学班）＿＿＿＿＿ 考试日期 2012.11.20 命题教师 高等数学课程组 系（所或教研室） 主任审批签名 ＿＿＿

三、计算题（本题共 4 题，共计 24 分）：

1.（5 分）设 $\tan y = x + y$，求 dy；

解：$d(\tan y) = d(x+y)$

$\sec^2 y dy = dx + dy$

$dy = \dfrac{1}{\sec^2 y - 1} dx$

2.（6 分）求极限：$\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2+100}+x\right)$；

解：$\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2+100}+x\right)$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{100x}{\sqrt{x^2+100}-x}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-100}{\sqrt{1+\dfrac{100}{x^2}}+1}$

$= -50$

3.（6 分）求极限：$\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\left(1-\cos\sqrt{x}\right)}$；

解：$\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\cdot(\frac{1}{2}x)}$

$= \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{2(1-\cos x)}{x^2\cdot(1+\sqrt{\cos x})}$

$= \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x^2}{2x^2}$

$= \dfrac{1}{2}$

4.（7 分）设 $y = f(\cos^2 x)$，且 f 二阶可导，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解：$\dfrac{dy}{dx} = f'(\cos^2 x)\cdot 2\cos x(-\sin x) = -\sin 2x f'(\cos^2 x)$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = -2\cos 2x f'(\cos^2 x) - \sin 2x f''(\cos^2 x)(-\sin 2x) = -2\cos 2x f'(\cos^2 x) + \sin^2 2x f''(\cos^2 x)$

命题教师注意事项：1、主考教师必须于考试一周前将“试卷 A”、“试卷 B”经教研室主任审批签字后送教务科印刷。 2、请命题教师用黑色水笔工整地书写题目或用 A4 纸横式打印贴在试卷版芯中。

高数期中宣城校区A.

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}[x\sin\frac{2}{x}+(\frac{x}{x+1})^x]=$ ________.

2. 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $2^{xy}-x-y=0$ 所确定，则曲线 $y=y(x)$ 在点 $x=0$ 处的切线方程为 ________.

3. 函数 $y=\frac{x}{\sin x}$ 的间断点是 $x=0, x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 它们的类型分别是 第一类(可去)间断点，第二类（无穷）间断点.

4. $[(2x-3)^7(7x+1)^5(5x+6)^8]^{(20)}=$ ________

5. 设函数 $y=f(x)$ 在 $x=3$ 处可导,已知 $\Delta y=f(3+0.001)-f(3)$ 的线性主部为 0.1 ,则 $f'(3)=$ 100 .

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}$，讨论函数 $f(x)$ 的间断点，其结论为（ ）

A. 不存在间断点　　B. 存在间断点 $x=1$

C. 存在间断点 $x=0$　　D. 存在间断点 $x=-1$

2. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内有定义，则 $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在是 $f(x)$ 在 $x=a$ 可导的（ ）

A. 充分条件而非必要条件　　B. 必要条件而非充分条件

C. 充分条件且必要条件　　D. 既非充分条件又非必要条件

3. 设 $f(x)$ 在点 x_0 处左可导且右可导，则 $f(x)$ 在点 x_0 处（ ）。

A. 可导　　B. 不可导　　C. 连续　　D. 不连续

4. 设当 $x\to0$ 时, $\ln(1+x^2)(1-\cos\sqrt{x})$ 是 $x\sin^2 x$ 的（ ）

A. 高阶无穷小　　B. 同阶无穷小　　C. 等价无穷小　　D. 低阶无穷小 .

5. 下列结论正确的是（ ）

A. 一切初等函数在其定义域内连续　　B. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=A$

C. 若 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}$，则 $\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{y''}{(y')^2}$

D. 若 x_0 是 $f(x)$ 的驻点，则 x_0 一定不是 $f(x)$ 的间断点

三、计算下列各题（每小题 6 分，共 36 分）

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n})$　　2. 求 $\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})$

3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$　　4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}$

5. $y=\frac{1}{x^2+5x+6}$, 求 $y^{(100)}$　　6. 设 $y=\frac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x}$, 求 y'

解：1. ∵ ________ ________ ________

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}\le\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\le\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}=\frac{1}{2}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\frac{1}{2}$

所以由夹逼准则知：$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n})=\frac{1}{2}$

2. 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$

3. 原式 $=\lim\limits_{x\to0}(\frac{3\sin x}{2x}+\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{x})=\frac{3}{2}+0=\frac{3}{2}$

4. 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-\sin x-1}{\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to0}(e^x+\sin x)=1$

5. 解：$y=\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}$

$$y^{(100)}=\left(\frac{1}{x+2}\right)^{(100)}-\left(\frac{1}{x+3}\right)^{(100)}=\frac{(-1)^{100}100!}{(x+2)^{101}}-\frac{(-1)^{100}100!}{(x+3)^{101}}$$

$$=100!\left[\frac{1}{(x+2)^{101}}-\frac{1}{(x+3)^{101}}\right]$$

6. 解：等式两边取对数得 $\ln y=\ln(x+1)+\frac{1}{3}\ln(x-1)-2\ln(x+4)-x$

上式两边对 x 求导，得 $\frac{y'}{y}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{x+4}-1$

$$\therefore y'=\frac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x}[\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{x+4}-1]$$

四、（本题满分 8 分）设 $\begin{cases}x=a\cos^3t\\y=a\sin^3t\end{cases}$，求 y_x''

合 肥 工 业 大 学 试 卷（宣城）A 卷

2013～2014 学年第 一 学期 课程代码________ 课程名称 高等数学A(1) 学分____ 课程性质:必修☑、选修□、限修□ 考试形式:开卷□、闭卷☑

专业班级（教学班）________ 考试日期 2013.11.06 命题教师 高等数学课程组 系（所或教研室） 主任审批签名________

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{3a\sin^2 t\cdot\cos t}{-3a\cos^2 t\cdot\sin t}=-\tan t$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\cdot\sin t}=\frac{1}{3a\cos^4 t\cdot\sin t}$$

五.（本题满分10分）证明：当 $x>0$ 时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

证：令 $f(x)=\ln(1+x)$ 则 $f(x)$ 在 $[0,x]$ 上满足拉格朗日定理的条件

所以 至少 $\exists\xi\in(0,x)$ 使 $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ [illegible] $\dfrac{\ln(1+x)-\ln 1}{x}$

又 $0<\xi<x$，所以 $\dfrac{1}{1+x}<\dfrac{1}{1+\xi}<1$

所以 $\dfrac{1}{1+x}<\dfrac{\ln(1+x)-\ln 1}{x}<1$ [illegible] $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

六、（本题满分 [illegible]）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{1+x^2}, & x\le 1\\ ax+b, & x>1\end{cases}$，求常数 a,b，使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，并求 $f'(x)$ [illegible]

解，要使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，必须 $f(x)$ 在 $x=1$ 可导，则必须 $f(x)$ 在 $x=1$ 连续

所以 $1=f(1)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(ax+b)=a+b$，

$$f'_-(1)=\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{\frac{2}{1+(1+\Delta x)^2}-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{-2-\Delta x}{1+(1+\Delta x)^2}=-1,$$

$$f'_+(1)=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{a\cdot\Delta x+a+b-1}{\Delta x}=a$$

由 $f'_+(1)=f'_-(1)$ 得 $a=-1$，从而得 $b=2$

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{4x}{(1+x^2)^2}, & x\le 1\\ -1, & x>1\end{cases}$$

七、（本题满分6分）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上可微，对于 $[0,1]$ 上每一个 x，函数 $f(x)$ 的值在开区间 $(0,1)$ 内，且 $f'(x)\ne1$。证明：在开区间 $(0,1)$ 内有且仅有一个 ξ，使 $f(\xi)=\xi$

证：1、先证存在性，令 $F(x)=f(x)-x$，因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，所以 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续。

且 $F(0)=f(0)-0>0; F(1)=f(1)-1<0$。

由零点定理知：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\xi$。

2、再证唯一性，假设在开区间 $(0,1)$ 内存在两点 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，使得 $f(x_1)=x_1; f(x_2)=x_2$，在 $[x_1,x_2]$ 上对 $f(x)$ 用 Lagrange 定理得：至少存在一点 $\eta\in(x_1,x_2)$

使得 $f'(\eta)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{x_2-x_1}{x_2-x_1}=1$ [illegible] $f'(x)\ne1$ 矛盾。所以在开区间 $(0,1)$ 内有且仅有一个 ξ，使 $f(\xi)=\xi$。

合 肥 工 业 大 学 试 卷（A）

2012~2013 学年第 一 学期 课程代码______ 课程名称 高等数学A(1) 学分____ 课程性质：必修☑、选修☐、限修☐ 考试形式：开卷☐、闭卷☑

专业班级（教学班）________ 考试日期 2012.11.20 命题教师 高等数学课程组 系（所或教研室） 主任审批签名 封 植

$\therefore$ $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

又 $\because$ $f'(x)$ 在 $x\neq 0$ 处由连续函数的运算性质知 $f'(x)$ 连续。

所以 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续。

五、（12 分）设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶导数，且 $g''(x)\neq 0$，$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$，

证明：(1) 对任意 $x\in(a,b)$，$g(x)\neq 0$；

(2) 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

证明：(1) 反证法：

假设存在一点 $x_0\in(a,b)$ 满足 $g(x_0)=0$，则在区间 $[a,x_0]$ 上，$g(x)$ 满足 Rolle 中值定理条件，由 **Rolle** 中值定理得，存在一点 $\xi_1\in(a,x_0)\subset(a,b)$，使得 $g'(\xi_1)=0$；同理，存在一点 $\xi_2\in(x_0,b)\subset(a,b)$，使得 $g'(\xi_2)=0$。

由于 $g'(x)$ 在区间 $[\xi_1,\xi_2]\subset(a,b)$ 上仍然满足 Rolle 定理的条件，再由 **Rolle** 中值定理得：存在一点 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得 $g''(\xi)=0$，这就与条件 $g''(x)\neq 0$ 矛盾。

(2) 令 $F(x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$，

显然 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导，且 $F(a)=F(b)=0$。由 **Rolle** 中值定理得，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $F'(\xi)=0$，即有：

$$f'(x)g'(x)+f(x)g''(x)-f''(x)g(x)-f'(x)g'(x)\big|_{x=\xi}=f(\xi)g''(\xi)-f''(\xi)g(\xi)=0,$$

结合 $g(x)\neq 0$ 与 $g''(x)\neq 0$ 可得：

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$$

命题教师注意事项：1、主考教师必须于考试一周前将"试卷 A"、"试卷 B"经教研室主任审批签字后送教务科印刷。 2、请命题教师用黑色水笔工整地书写题目或用 A4 纸横式打印贴在试卷版芯中。

合肥工业大学试卷（A）

2015~2016 学年第 一 学期　课程代码 1400012B　课程名称 高等数学(期中)　时间 90分钟　课程性质:必修☑、选修□、限修□　考试形式:开卷□、闭卷☑

专业班级（教学班）__________　考试日期 2015年11月11日　命题教师 李华冰　系（所或教研室）主任审批签名 张 莉

一、填空题（每小题4分，共20分）

(1)设 $f(x)$ 为周期为 π 的奇函数，且当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f(x)=\sin x-\cos x+1$，则当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时 $f(x)=$________

(2)设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=9$，则常数 $a=$________

(3)已知 $f(x)=x(1-x)(2-x)\cdots(2005-x)$，则 $f'(0)=$________

(4)设 $f(x)=e^{\max\{x,x^2\}}(x>0)$，求 $f'(x)=$________

(5)函数 $\begin{cases}x=\ln\cos t,\\ y=\sin t-t\cos t,\end{cases}$ 求 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|$ ________

二、选择题（每小题4分，共20分）

(1) $x=1$ 是函数 $f(x)=\arctan\frac{1}{x-1}$ 的（　）

（A）连续点　（B）可去间断点　（C）跳跃间断点　（D）第二类间断点

(2)设 $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+x^2)}{\sin\sqrt{x}}, & x>0\\ g(x)x^2, & x\le 0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　）

(A)极限不存在　(B)极限存在但不连续　(C)连续但不可导　(D)可导

(3)设 $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\infty$，则有（　）

(A) $x_n<y_n$ 对任意的 n 都成立　(B) $y_n<z_n$ 对任意的 n 都成立

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}x_nz_n$ 不存在　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}y_nz_n$ 不存在

(4)已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某领域内有定义，且 $|f(x)|\le 1-\cos x$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　）

(A)极限不存在　(B)极限存在但不连续　(C)连续但不可导　(D)可导

(5)函数 $f(x)=(x^2+3x+2)|x^3-x|$ 的不可导点的个数（　）

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

三、计算下列各题（每小题8分，共32分）

(1) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3+1^2}+\frac{2^2}{n^3+2^2}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n^2}\right)$；

(2) 设数列 $\{x_n\}$ 中 $x_1=1$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n+6}$　$(n=1,2,\cdots)$，求证数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限；

(3) 已知 $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}$，求 $f^{(n)}(4)$；

(4) 已知 $y-\sin(x+y)=0$，确定了 $y=y(x)$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$。

四、（本题满分12分）试确定 A,B,C 的值，使得 $e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3)$，其中 $o(x^3)$ 是 $x\to 0$ 时比 x^3 高阶的无穷小量

五、（本题满分10分）已知 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+(2x)^n+x^{2n}}$，求 $f(x)$ 的表达式 $(x\ge 0)$，并讨论函数 $f(x)$ 的连续性。

六、（本题满分6分）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义，在区间 (a,b) 内可导，$b-a\ge 4$，求证：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)<1+f^2(\xi)$。

4、$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{2}{\pi}\arctan\frac{1}{x}-\frac{|x|}{x})$

解：∵ $\lim\limits_{x\to 0^+}(\frac{2}{\pi}\arctan\frac{1}{x}-\frac{|x|}{x})=1-1=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-}(\frac{2}{\pi}\arctan\frac{1}{x}-\frac{|x|}{x})=-1-(-1)=0$

∴ $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{2}{\pi}\arctan\frac{1}{x}-\frac{|x|}{x})=0$

5、$y=\arctan e^x-\ln\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$，求 $\frac{dy}{dx}|_{x=1}$。

解：$y=\arctan e^x-x+\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)$

$$y'=\frac{e^x}{e^{2x}+1}-1+\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}=\frac{e^x-1}{e^{2x}+1}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}|_{x=1}=\frac{e-1}{e^2+1}$$

6、求对数螺线 $\rho=e^\theta$ 在点 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 处的切线方程。

解：由 $\begin{cases}x=e^\theta\cos\theta\\ y=e^\theta\sin\theta\end{cases}$ 知：切线过点 $(0,\ e^{\frac{\pi}{2}})$

斜率为：$\frac{dy}{dx}|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\frac{e^\theta\sin\theta+e^\theta\cos\theta}{e^\theta\cos\theta-e^\theta\sin\theta}|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-1$

故：$x+y=e^{\frac{\pi}{2}}$

四、设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x & x\ge 0\\ ax+b & x<0\end{cases}$，其中 a,b 为常数，问：a,b 为何值时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，并求出 $f'(x)$。

解：在 $x=0$ 处可导必连续，得 $b=0$

在 $x=0$ 处用导数定义可得 $a=1$

$$f'(x)=\begin{cases}\cos x & x>0\\ 1 & x=0\\ 1 & x<0\end{cases}$$

五、求由方程 $\begin{cases}x=3t^2+2t+3\\ e^y\sin t-y+1=0\end{cases}$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$。

解：

由：$e^y\sin t-y+1=0$ 知：$\frac{dy}{dt}=\frac{e^y\cos t}{1-e^y\sin t}$

故：$\frac{dy}{dx}=\frac{e^y\cos t}{(1-e^y\sin t)(6t+2)}$

六、$x>1$ 时，证明：$e^x>ex$。

证明：对于 $f(t)=e^t-et$ 在 $[1,x]$ 上利用 Lagrange 中值定理：

$$f(x)-f(1)=f'(c)(x-1)=(e^c-e)(x-1)\quad(1<c<x)$$

于是，结论成立。

七、设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，且 $f(0)+f(1)=f(2)=0$，试证明：存在 $c\in(0,2)$，使 $f'(c)=0$。

证明：由 $f(0)+f(1)=f(2)=0$

1）若 $f(0)=f(1)=0$，则 $f(0)=f(2)=0$，则在[0,2]上利用 Rolle 定理，知结论成立。

2）若 $f(0)\cdot f(1)<0$，则由零点定理知：至少存在 $d\in(0,1)$，使 $f(d)=0$，在[d,2]上利用 Rolle 定理，知结论成立。

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dy}{dt}}=\dfrac{3a\sin^2 t\cdot\cos t}{-3a\cos^2 t\cdot\sin t}=-\tan t$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\cdot\sin t}=\frac{1}{3a\cos^4 t\cdot\sin t}$$

五.(本题满分 10 分) 证明：当 $x>0$ 时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

证：令 $f(x)=\ln(1+x)$ 则 $f(x)$ 在 $[0,x]$ 上满足拉格朗日定理的条件

所以 至少 $\exists\xi\in(0,x)$ 使 $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ 即 $\dfrac{1}{1+\xi}=\dfrac{\ln(1+x)-\ln 1}{x}$

又 $0<\xi<x$，所以 $\dfrac{1}{1+x}<\dfrac{1}{1-\xi}<1$

所以 $\dfrac{1}{1+x}<\dfrac{\ln(1+x)-\ln 1}{x}<1$ 当 $x>0$ 时，即 $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

六、(本题满分 10 分) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{1+x^2}, & x\le 1\\ ax+b, & x>1\end{cases}$，求常数 a,b，使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，并求 $f'(x)$

解：要使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，必须 $f(x)$ 在 $x=1$ 可导，则必须 $f(x)$ 在 $x=1$ 连续.

所以 $1=f(1)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(ax+b)=a+b$，

$$f'_-(1)=\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{\frac{2}{1+(1+\Delta x)^2}-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{-2-\Delta x}{1+(1+\Delta x)^2}=-1.$$

$$f'_+(1)=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{a\cdot\Delta x+a+b-1}{\Delta x}=a$$

由 $f'_+(1)=f'_-(1)$ 得 $a=-1$，从而得 $b=2$

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{4x}{(1+x^2)^2}, & x\le1\\ -1, & x>1\end{cases}$$

七、(本题满分 6 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上可微，对于 $[0,1]$ 上每一个 x，函数 $f(x)$ 的值在开区间 $(0,1)$ 内，且 $f'(x)\ne1$。证明：在开区间 $(0,1)$ 内有且仅有一个 ξ，使 $f(\xi)=\xi$

证：1、先证存在性，令 $F(x)=f(x)-x$，因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，所以 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续。

且 $F(0)=f(0)-0>0; F(1)=f(1)-1<0$。

由零点定理知：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\xi$。

2、再证唯一性，假设在开区间 $(0,1)$ 内存在两点 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，使得 $f(x_1)=x_1; f(x_2)=x_2$，在 $[x_1,x_2]$ 上对 $f(x)$ 用 Lagrange 定理得：至少存在一点 $\eta\in(x_1,x_2)$ 使得 $f'(\eta)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{x_2-x_1}{x_2-x_1}=1$，这与题设 $f'(x)\ne1$ 矛盾。所以在开区间 $(0,1)$ 内有且仅有一个 ξ，使 $f(\xi)=\xi$

2012～2013 学年第 一 学期 课程代码________ 课程名称 高等数学A(1) 学分____ 课程性质：必修☑、选修□、限修□ 考试形式：开卷□、闭卷☑

专业班级（教学班）__________ 考试日期 2012.11.20 命题教师 高等数学课程组 系（所或教研室） 主任审批签名 ____

四、解答题（本题共 3 小题，共计 24 分）：

1.（6 分）设 $x_1=\sqrt{3}$，$x_{n+1}=\sqrt{3+2x_n}$，证明数列$\{x_n\}$的极限存在，并求其极限.

证 明：单调性： 当$n=1$时，$x_1=\sqrt{3}$，$x_2=\sqrt{3+\sqrt{3}}>x_1$，

假设当$n=k$时有$x_{k+1}>x_k$，则当$n=k+1$时仍然有，

$$x_{k+2}=\sqrt{3+2x_{k+1}}>\sqrt{3+2x_k}=x_{k+1}$$

即，数列$\{x_n\}$是单调增加数列。

有界性： 当$n=1$时，$x_1=\sqrt{3}<3$，

假设$n=k$时有$x_k<3$，则当$n=k+1$时仍然有，

$$x_{k+1}=\sqrt{3+2x_k}<\sqrt{3+6}=3$$

即，单调增加数列$\{x_n\}$有上界 3.

综上所述，数列$\{x_n\}$的极限存在，设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。在等式$x_{n+1}=\sqrt{3+2x_n}$两边分别求极限，得到 $a=\sqrt{3+2a}$，解出$a=3$。即，数列$\{x_n\}$的极限值为 3。

2.（8 分）若$x\to 0$时，$e^x-(ax^2+bx+1)$是比x^2高阶的无穷小，求a，b.

解： 由题意知：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-(ax^2+bx+1)}{x^2}=0$。

另一方面，由洛必达法则得到：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-(ax^2+bx+1)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-2ax-b}{2x}$，

则 $0=\lim\limits_{x\to 0}e^x-2ax-b=1-b$，

即有： $b=1$。

此时，再次用洛必达法则得

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-2ax-b}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-2ax-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-2a}{2}=\frac{1}{2}(1-2a)，$$

即有： $a=\dfrac{1}{2}$。

3.（10 分）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 其中$g(x)$有二阶连续导数，且$g(0)=g''(0)=1$，$g'(0)=-1$，

（1）求$f'(x)$；

（2）讨论$f'(x)$在$(-\infty,+\infty)$内的连续性.

解：（1）当$x\neq 0$时，$f'(x)=\dfrac{(g'(x)+e^{-x})\cdot x-(g(x)-e^{-x})}{x^2}$；

当$x=0$时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x^2}$.

（连续用两次洛必达法则）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)-e^{-x}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(g''(0)-1)=0。$$

即有：$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{(g'(x)+e^{-x})\cdot x-(g(x)-e^{-x})}{x^2}, & x\neq 0.\\ 0 & x=0.\end{cases}$

（2）$\because$ $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(g'(x)+e^{-x})\cdot x-(g(x)-e^{-x})}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(g''(x)-e^{-x})\cdot x+g'(x)+e^{-x}-(g'(x)+e^{-x})}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(g''(x)-e^{-x})\cdot x}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}(g''(0)-1)=0.$$

$$=f'(0)$$

合 肥 工 业 大 学 试 卷（宣 城）A 卷

2013～2014 学年第__一__学期 课程代码________ 课程名称__高等数学 A(1)__ 学分____ 课程性质:必修☑、选修□、限修□ 考试形式:开卷□、闭卷☑

专业班级（教学班）__________ 考试日期__2013.11.06__ 命题教师__高等数学课程组__ 系（所或教研室） 主任审批签名________

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}[x\sin\frac{2}{x}+(\frac{x}{x+1})^x]=$ __$2+e^{-1}$__.

2. 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $2^{xy}-x-y=0$ 所确定，则曲线 $y=y(x)$ 在点 $x=0$ 处的切线方程为 __$y-1=(\ln 2-1)x$__.

3. 函数 $y=\frac{x}{\sin x}$ 的间断点是 __$x=0, x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$__ 它们的类型分别是 __第一类间断点，第二类间断点__.

4. $[(2x-3)^7(7x+1)^5(5x+6)^4]^{(16)}=$ __$16!\,2^7 7^5 5^4$__.

5. 设函数 $y=f(x)$ 在 $x=3$ 处可导，已知 $\Delta y=f(3+0.001)-f(3)$ 的线性主部为 0.1，则 $f'(3)=$ __10__.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}$，讨论函数 $f(x)$ 的间断点，其结论为（ B ）

A. 不存在间断点　　B. 存在间断点 $x=1$

C. 存在间断点 $x=0$　　D. [illegible] -1

2. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内有定义，则 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在是 $f(x)$ 在 $x=a$ 可导的（ C ）

A. 充分条件而非必要条件　　B. 必要条件而非充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既非充分条件又非必要条件

3. 设 $f(x)$ 在点 x_0 处左可导且右可导，则 $f(x)$ 在点 x_0 处（ C ）

A. 可导　　B. [illegible]　　C. [illegible]　　D. 不连续

4. [illegible] 0 时，$\ln(1+x^2)(1-\cos\sqrt{x})$ 是 $x\sin^2x$ 的（ B ）

A. 高阶无穷小　　B. 同阶无穷小　　C. 等价无穷小　　D. 低阶无穷小.

5. 下列结论正确的是（ D ）

A. 一切初等函数在其定义域内连续　　B. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=A$

C. 若 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}$，则 $\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{y''}{(y')^3}$

D. 若 x_0 是 $f(x)$ 的驻点，则 x_0 一定不是 $f(x)$ 的间断点

三、计算下列各题（每小题 6 分，共 36 分）

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n})$　　2. 求 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$　　4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}$

5. $y=\frac{1}{x^2+5x+6}$，求 $y^{(100)}$　　6. 设 $y=\frac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x}$，求 y'

解：1. $\because \frac{1}{n^2+n+n}\le\frac{1}{n^2+n+i}\le\frac{1}{n^2+n+1}$，

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}\le\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\le\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}=\frac{1}{2}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\frac{1}{2}$

所以由夹逼准则知：$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n})=\frac{1}{2}$

2. 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$

3. 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{3\sin x}{2x}+\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{x})=\frac{3}{2}+0=\frac{3}{2}$

4. 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-1}{\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(e^x+\sin x)=1$

5. 解：$y=\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}$

$$y^{(100)}=\left(\frac{1}{x+2}\right)^{(100)}-\left(\frac{1}{x+3}\right)^{(100)}=\frac{(-1)^{100}100!}{(x+2)^{101}}-\frac{(-1)^{100}100!}{(x+3)^{101}}$$

$$=100!\left[\frac{1}{(x+2)^{101}}-\frac{1}{(x+3)^{101}}\right]=100!\left[\frac{1}{(x+2)^{101}}-\frac{1}{(x+3)^{101}}\right]$$

6. 解：等式两边取对数得 $\ln y=\ln(x+1)+\frac{1}{3}\ln(x-1)-2\ln(x+4)-x$

上式两边对 x 求导，得 $\frac{y'}{y}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{x+4}-1$

$$\therefore y'=\frac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x}[\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{x+4}-1]$$

四、（本题满分 8 分）设 $\begin{cases}x=a\cos^3t\\ y=a\sin^3t\end{cases}$，求 y''_x

命题教师注意事项：1、主考教师必须于考试一周前将"试卷 A"、"试卷 B"经教研室主任审批签字后送教务科印刷。　2、请命题教师用黑色水笔工整地书写题目或用 A4 纸横式打印贴在试卷版芯中。

2013～2014 学年第 一 学期 课程代码________ 课程名称 高等数学A(1) 学分____ 课程性质:必修☑、选修☐、限修☐ 考试形式:开卷☐、闭卷☑

专业班级（教学班）__________ 考试日期 2013.11.06 命题教师 高等数学课程组 系（所或教研室） 主任审批签名 __________

解：

$$\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})\right]=\lim_{x\to\infty}x^2\left[\frac{1}{x}-\ln(1+\frac{1}{x})\right]$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1}{t^2}\left[t-\ln(1+t)\right]$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}$$

$$=\frac{1}{2}$$

4、求由方程 $\begin{cases}x=3t^2+2t+3\\ e^y\sin t-y+1=0\end{cases}$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$。

解：由：$e^y\sin t-y+1=0$ 知：$\frac{dy}{dt}=\frac{e^y\cos t}{1-e^y\sin t}$

故：$\frac{dy}{dx}=\frac{e^y\cos t}{(1-e^y\sin t)(6t+2)}$

5、求对数螺线 $\rho=e^\theta$ 在点 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 处的切线方程。

解：由 $\begin{cases}x=e^\theta\cos\theta\\ y=e^\theta\sin\theta\end{cases}$

切线过点 $(0,e^{\frac{\pi}{2}})$

斜率为：$\frac{dy}{dx}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\frac{e^\theta\sin\theta+e^\theta\cos\theta}{e^\theta\cos\theta-e^\theta\sin\theta}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-1$

切线方程为：$x+y=e^{\frac{\pi}{2}}$

四、设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{e^{n(x-1)}+1}$，其中 a,b 为常数，问：a,b 为何值时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续可导，并求出 $f'(x)$。

$$f(x)=\begin{cases}ax+b & x<1\\ \frac{1}{2}(1+a+b) & x=1\\ x^2 & x>1\end{cases}$$

解：$a=2,b=-1$

$$f'(x)=\begin{cases}2 & x<1\\ 2 & x=1\\ 2x & x>1\end{cases}$$

五、设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=f(3)=0$，试证明：存在 $c\in(0,3)$，使 $f'(c)=0$。

证明：由介值定理知：存在 $d\in[0,2]$，使 $f(d)=0$

在 $[d,3]$ 上利用 Rolle 定理，知结论成立。

六、设函数 $f_n(x)=x+x^2+\cdots+x^n$，$n=2,3,\cdots$，证明：(1) 方程 $f_n(x)=1$ 在 $[0,1]$ 内有唯一实根 x_n；(2) 求极限 $\lim x_n$。

证明：1）利用零点定理说明在 $[0,1]$ 上方程 $f_n(x)-1=0$ 至少有一实根。

再注意到 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，知方程至多有一实根，

故结论成立。

2）A. 首先，注意到：$x\in[0,1]$，$f_n(x)<f_{n+1}(x)$，故：$f_{n+1}(x_{n+1})=f_n(x_n)<f_{n+1}(x_n)$，

再由 $f_{n+1}(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，知：$x_{n+1}<x_n$；

B. 其次：$0\le x_n\le x_2<1$；

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

$\because\ 1=f_n(x_n)=\frac{x_n}{1-x_n}(1-x_n^{n+1})$

C. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^{n+1}=0$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$

合肥工业大学试卷（宣城）B卷

2013～2014 学年第 一 学期 课程代码________ 课程名称 高等数学 A(1) 学分____ 课程性质:必修☑、选修□、限修□ 考试形式:开卷□、闭卷☑

专业班级（教学班）__________ 考试日期 2013.11.06 命题教师 高等数学课程组 系（所或教研室）主任审批签名________

一、填空题（每小题3分，共15分）

1、$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+1}{3x-1}\sin\dfrac{1}{x}=$ __$\dfrac{5}{3}$__.

2、曲线 $y=\dfrac{x+4\cos x}{3x-2\sin x}$ 的水平渐近线方程为 __$\dfrac{1}{3}$__.

3、设函数 $y=\dfrac{1}{2x+3}$，则：$y^{(n)}(0)=$ __$(-1)^n n!\dfrac{2^n}{3^{n+1}}$__.

4、若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的增量为 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=2x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2$，则 $f(x)$ 在点 x_0 处的微分 $dy|_{x=x_0}=$ __$2x_0^2dx$__，$f'(x_0)=$ __$2x_0^2$__.

5、若函数 $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$，则 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=1}=$ __$(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n(n+1)}$__.

二、选择题（每小题3分，共15分）

1、设当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\sin x^n$ 是比 $(e^{x^2}-1)$ 高阶的无穷小，则正整数 n 等于（ ）.

A. 0 C. 2

2、设 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0\\ f(0), & x=0\end{cases}$ 其中 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$f'(0)\neq 0$ 且 $f(0)=0$，则 $x=0$ 是 $F(x)$ 的（ ）.

A. 导数存在的点 B. 连续点 C. 第一类间断点 D. 第二类间断点

3、设 $f(x)$ 在点 x_0 处左可导且右可导，则 $f(x)$ 在点 x_0 处（ A ）.

A. 连续 B. 不连续 C. 可导 D. 不可导

4、"$f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处有定义" 是 "$x\to x_0$ 时，$f(x)$ 有极限" 的（ D ）.

A. 必要条件 B. 充分条件 C. 充分必要条件 D. 既非充分也非必要

5、设 $f(x)=\ln^3 x$，$g(x)=\sqrt{x}$，$h(x)=e^{\frac{x}{3}}$，则当 x 充分大时，有（ D ）.

A. $h(x)<g(x)<f(x)$ B. $g(x)<f(x)<h(x)$

C. $f(x)<h(x)<g(x)$ D. $f(x)<g(x)<h(x)$

三、计算题（每小题8分，共40分）

1、$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\pi+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\arctan\dfrac{1}{x}\right)$

解：$\because \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\pi+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\arctan\dfrac{1}{x}\right)=0+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{\pi+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\arctan\dfrac{1}{x}\right)=\pi-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\pi+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\arctan\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

2、$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\sin^2 x)^{\frac{1}{x^2\cos x}}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\sin^2 x)^{\frac{1}{x^2\cos x}}=\exp\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x+\sin^2 x)}{x^2\cos x}\right)$

$=\exp\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x+\sin^2 x-1}{x^2}\right)$

$=\exp\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}-\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right)$

$=\exp\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

3、$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$