数 字 逻 辑

丁 贤 庆

ahhfdxq@163.com

第 二 章

逻辑代数与硬件描述语言基础

2.2 .2 最小项与最小项表达式

1. 最小项的定义和性质

n个变量$X_{1,}X_{2,}\ldots, X_n$的最小项是n个因子的乘积，每个变量都以它的原变量或非变量的形式在乘积项中出现，且仅出现一次。一般n个变量的最小项应有2^n个。

例如，A、B、C三个逻辑变量的最小项有（2^3＝）8个，即

$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 、$\bar{A}\bar{B}C$ 、$\bar{A}B\bar{C}$、$\bar{A}BC$、$A\bar{B}\bar{C}$ 、$A\bar{B}C$、 $AB\bar{C}$ 、ABC

$\bar{A}B$ 、 $A\bar{B}C\bar{A}$、$A(B+C)$等则不是最小项。

2、最小项的性质　三个变量的所有最小项的真值表

A	B	C	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}C$	$\bar{A}B\bar{C}$	$\bar{A}BC$	$A\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}C$	$AB\bar{C}$	ABC
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

- 对于任意一个最小项，只有一组变量取值使得它的值为1；
- 任意两个最小项的乘积为0；
- 全体最小项之和为1。

3、最小项的编号

三个变量的所有最小项的真值表

			m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7
A	B	C	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{A}\,\overline{B}C$	$\overline{A}B\overline{C}$	$\overline{A}BC$	$A\overline{B}\,\overline{C}$	$A\overline{B}C$	$AB\overline{C}$	ABC
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

最小项的表示：通常用m_i表示最小项，m 表示最小项, 下标i为最小项号。（1---对应原变量。0---对应反变量）

2.2.2 最大项与最大项表达式

1. 最大项的定义和性质

n个变量$X_{1}, X_{2}, \ldots, X_{n}$的最大项是$n$个因子或相，每个变量都以它的原变量或非变量的形式在或项中出现，且仅出现一次。一般n个变量的最大项应有2^n个。

例如，A、B、C三个逻辑变量的最大项有（2^3＝）8个，即

$$(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})、(\overline{A}+\overline{B}+C)、(\overline{A}+B+\overline{C})、(\overline{A}+B+C)、$$

$$(A+\overline{B}+\overline{C})、(A+\overline{B}+C)、(A+B+\overline{C})、(A+B+C)$$

1. 最大项的定义和性质

最大项的表示：通常用M_j表示最大项，M 表示最大项, 下标j为最大项号。（1---对应反变量。0---对应原变量）

最大项的性质：

- 对于任意一个最大项，只有一组变量取值使得它的值为0；
- 任意两个最大项的之和为1；
- 全体最大项之积为0。

2. 最小项和最大项的关系

两者之间为互补关系：$m_i = \overline{M_i}$，或者$M_i = \overline{m_i}$

例：逻辑电路的真值表如右，写出最小项和最大项表达式。

最小项表达式：

将L=1的各个最小项相加

$$L(A,B,C)=m_3+m_5+m_6$$

$$=\sum m(3,5,6)$$

$$=\overline{A}\cdot B\cdot C+A\cdot\overline{B}\cdot C+A\cdot B\cdot\overline{C}$$

最大项表达式：

将L=0的各个最大项相乘

$$L(A,B,C)=M_0\cdot M_1\cdot M_2\cdot M_4\cdot M_7$$

$$=\prod M(0,1,2,4,7)$$

$$=(A+B+C)\cdot(A+B+\overline{C})\cdot(A+\overline{B}+C)\cdot(\overline{A}+B+C)\cdot(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

A	B	C	L	
0	0	0	0	M_0
0	0	1	0	M_1
0	1	0	0	M_2
0	1	1	$1\rightarrow m_3$	
1	0	0	0	M_4
1	0	1	$1\rightarrow m_5$	
1	1	0	$1\rightarrow m_6$	
1	1	1	0	M_7

2.3.2 逻辑函数的代数化简法

1、逻辑函数的化简

化简的主要方法：

1．公式法（代数法）

2．图解法（卡诺图法）

代数化简法：

运用逻辑代数的基本定律和恒等式进行化简的方法。

并项法：$A+\overline{A}=1$

$$L=\overline{A}\,\overline{B}\,C+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\quad=\overline{A}\,\overline{B}(C+\overline{C})=\overline{A}\,\overline{B}$$

2、逻辑函数形式的变化

通常在一片集成电路芯片中只有一种门电路，为了减少门电路的种类，需要对逻辑函数表达式进行变换。

例：已知 $L = AB\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D} + ABD + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}\,\overline{B}CD$

（1）求最简的与-或式，并画出相应的逻辑图；

（2）画出仅用与非门实现的电路。

解：$L = AB(\overline{D} + D) + \overline{A}\overline{B}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}D(\overline{C} + C)$

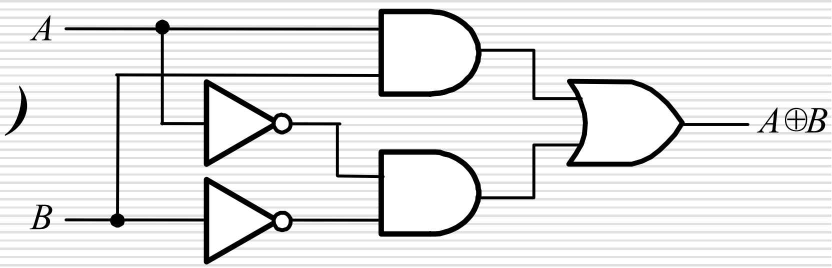
$= AB + \overline{A}\overline{B}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}D$

$= AB + \overline{A}\overline{B}(D + \overline{D})$

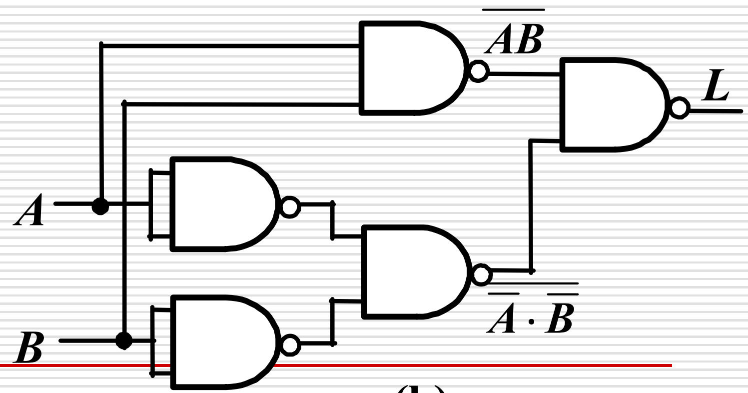
$= AB + \overline{A}\overline{B}$

$= \overline{\overline{AB + \overline{A}\overline{B}}}$

$= \overline{\overline{AB} \cdot \overline{\overline{A}\overline{B}}}$



(a)



(b)

2.2.3 用卡诺图表示逻辑函数

1、卡诺图的引出

卡诺图：将n变量的全部最小项都用小方块表示，并使具有逻辑相邻的最小项在几何位置上也相邻地排列起来，这样，所得到的图形叫n变量的卡诺图。

逻辑相邻的最小项：如果两个最小项只有一个变量互为反变量，那么，就称这两个最小项在逻辑上相邻。

如最小项 $m_6=AB\overline{C}$、与 $m_7=ABC$ 在逻辑上相邻

m_6	m_7

两变量卡诺图

A \ B	0	1
0	$\bar{A}\bar{B}$	$\bar{A}B$
1	$A\bar{B}$	AB

三变量卡诺图

A \ BC	00	01	11	10
0	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}C$	$\bar{A}BC$	$\bar{A}B\bar{C}$
1	$A\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}C$	ABC	$AB\bar{C}$

四变量卡诺图

AB \ CD	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

2、卡诺图的特点:各小方格对应于各变量不同的组合，而且上下左右在几何上相邻的方格内只有一个因子有差别，这个重要特点成为卡诺图化简逻辑函数的主要依据。

两变量卡诺图

A \ B	0	1
0	m_0	m_1
1	m_2	m_3

四变量卡诺图

AB \ CD	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

三变量卡诺图

A \ BC	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

2、卡诺图的特点:各小方格对应于各变量不同的组合，而且上下左右在几何上相邻的方格内只有一个因子有差别，这个重要特点成为卡诺图化简逻辑函数的主要依据。

3. 已知逻辑函数画卡诺图

当逻辑函数为最小项表达式时，在卡诺图中找出和表达式中最小项对应的小方格填上1，其余的小方格填上0（有时也可用空格表示），就可以得到相应的卡诺图。任何逻辑函数都等于其卡诺图中为1的方格所对应的最小项之和。

例1：画出逻辑函数

$L(A, B, C, D)=\sum m\,(0, 1, 2, 3, 4, 8, 10, 11, 14, 15)$的卡诺图

L AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	0	0	0
11	0	0	1	1
10	1	0	1	1

例2 画出下式的卡诺图

$$L(A,B,C,D)=(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D})(\overline{A}+\overline{B}+C+\overline{D})(\overline{A}+B+\overline{C}+D)$$
$$(A+\overline{B}+\overline{C}+D)(A+B+C+D)$$

解　1. 将逻辑函数化为最小项表达式

$$\overline{L}=ABCD+AB\overline{C}D+A\overline{B}C\overline{D}+\overline{A}BC\overline{D}+\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$$

$$=\sum m(0,6,10,13,15)$$

2. 填写卡诺图

L　AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	1	1	1	0
11	1	0	0	1
10	1	1	1	0

2.4.2 用卡诺图化简逻辑函数

1、化简的依据

AB \ CD	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}CD = \bar{A}\bar{B}D$$

$$\bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}BCD = \bar{A}BD$$

$$\bar{A}\bar{B}D + \bar{A}BD = \bar{A}D$$

$$A\bar{B}D + ABD = AD$$

$$\bar{A}D + AD = D$$

2、化简的步骤

用卡诺图化简逻辑函数的步骤如下：

(1) 将逻辑函数写成最小项表达式

(2) 按最小项表达式填卡诺图，凡式中包含了的最小项，其对应方格填1，其余方格填0。

(3) 合并最小项，即将相邻的1方格圈成一组(包围圈)，每一组含2^n个方格，对应每个包围圈写成一个新的乘积项。本书中包围圈用虚线框表示。

(4) 将所有包围圈对应的乘积项相加。

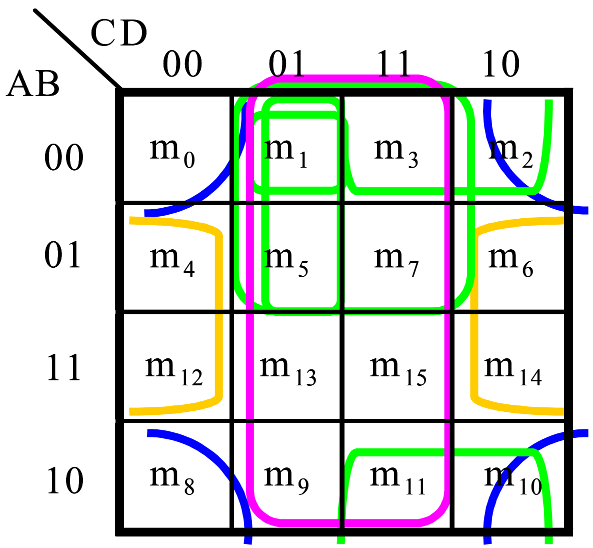
画包围圈时应遵循的原则：

（1）包围圈内的方格数一定是2^n个，且包围圈必须呈矩形。

（2）循环相邻特性包括上下底相邻，左右边相邻和四角相邻。

（3）同一方格可以被不同的包围圈重复包围多次，但新增的包围圈中一定要有原有包围圈未曾包围的方格。

（4） 一个包围圈的方格数要尽可能多，包围圈的数目要可能少。



三变量卡诺图

		$\overline{B}$		B	
A \ **BC**		00	01	11	10
$\overline{A}$	0	0	1	3	2
A	1	4	5	7	6
		$\overline{C}$	C	C	$\overline{C}$

四变量卡诺图

		$\overline{C}$		C		
AB \ **CD**		00	01	11	10	
$\overline{A}$	00	0	1	3	2	$\overline{B}$
$\overline{A}$	01	4	5	7	6	B
A	11	12	13	15	14	B
A	10	8	9	11	10	$\overline{B}$
		$\overline{D}$	D	D	$\overline{D}$	

卡诺图中小方块的相邻

- **小方块的相邻**
  (可以是大块相邻)

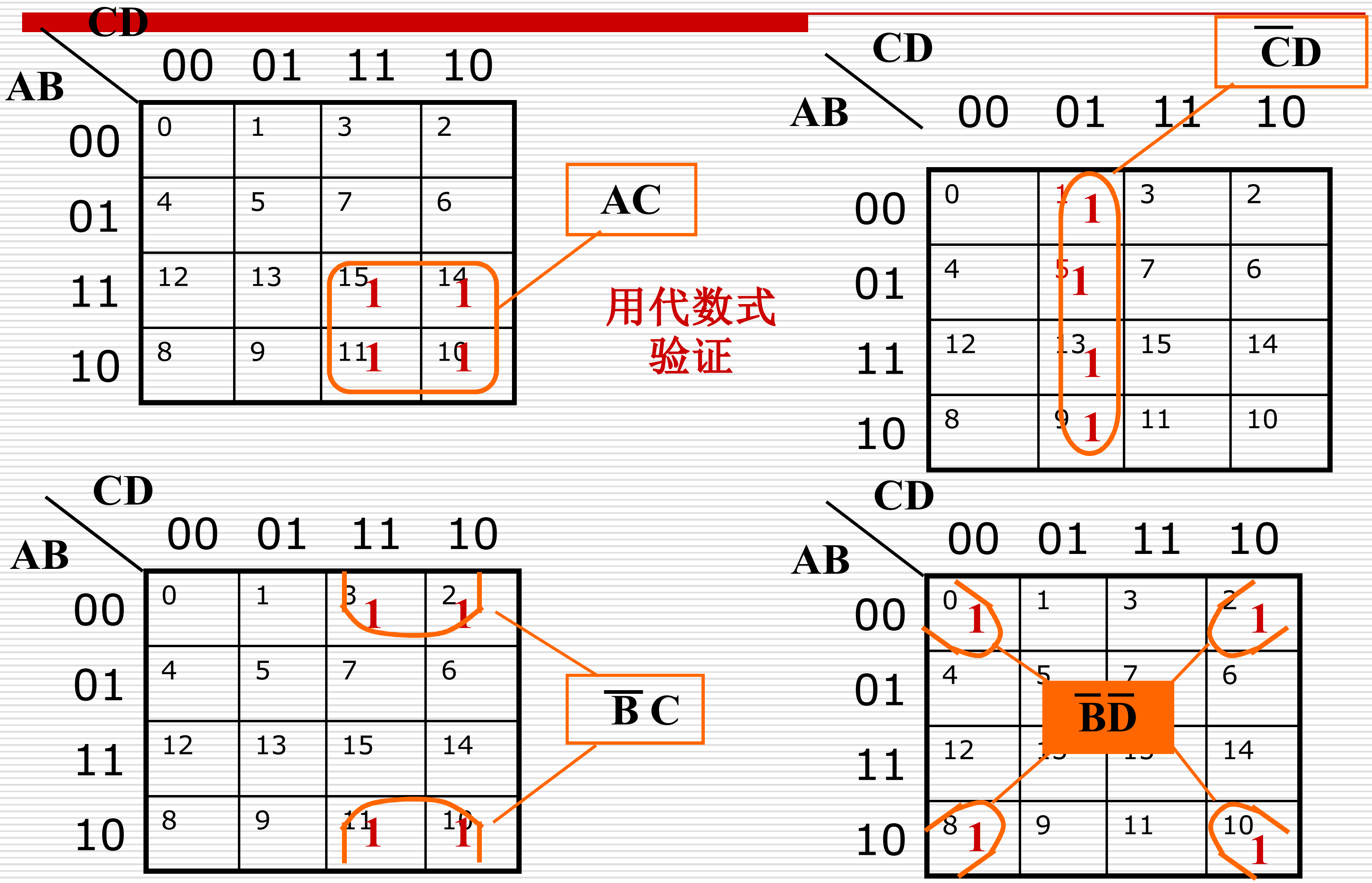
相邻 – 有共同的边界

相对 – 同行(或列)两端

以上相邻的小方块只有一个变量不同的最小项，称为逻辑相邻。对于n个变量函数，每个小方块有n个相邻的小方块。

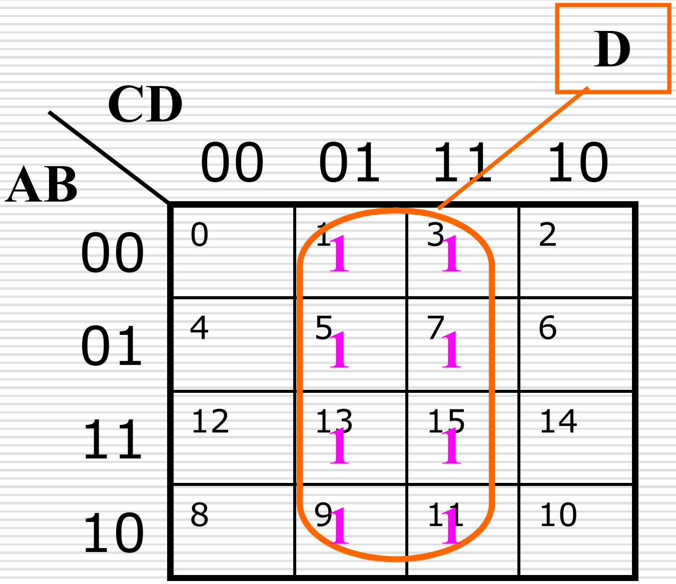
* 四个相邻小方格合并

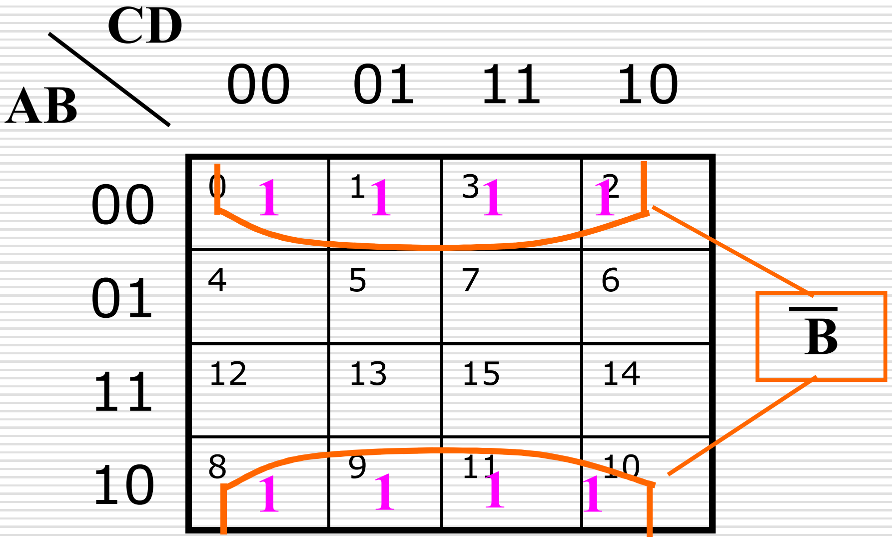
最小项为1的四个小方格合并成一项，就可消去两个变量。



* 八个相邻小方格合并

最小项为1的八个小方格合并成一项，就可消去三个变量。

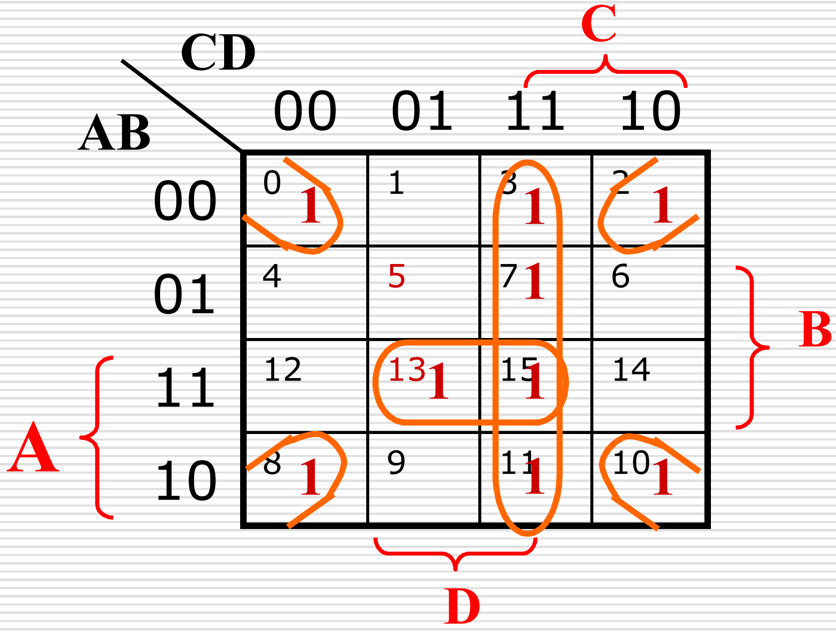




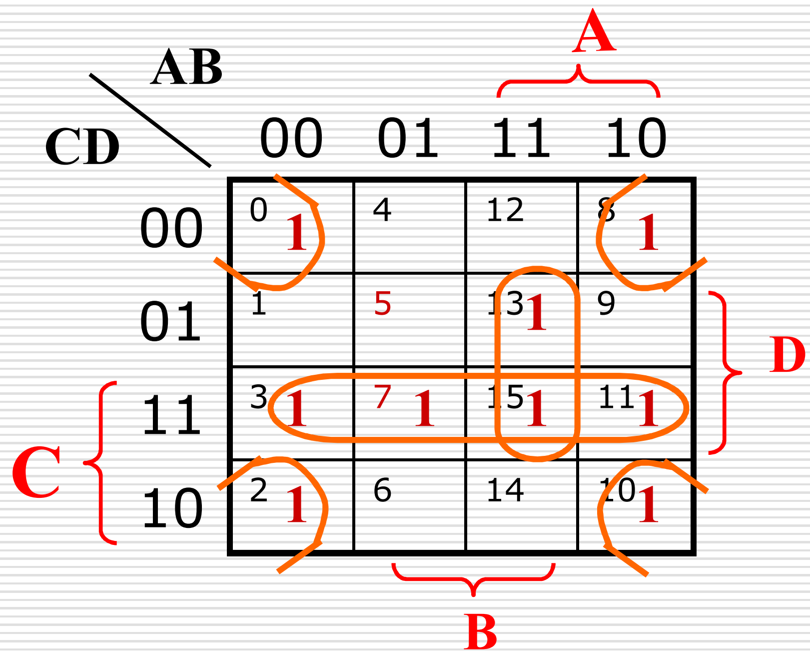
例

试用卡诺图化简法求逻辑表达式

$F(A,B,C,D)=\sum(0,2,3,7,8,10,11,13,15)$ 的最简与或表达式。



$$F = ABD + CD + \overline{B}\,\overline{D}$$



$$F = ABD + CD + \overline{B}\,\overline{D}$$

说明：左图中AB在下方。右图中AB在上方。注意每个变量的区域。
两张卡诺图中，变量放置位置不同，但是化简结果是相同的。

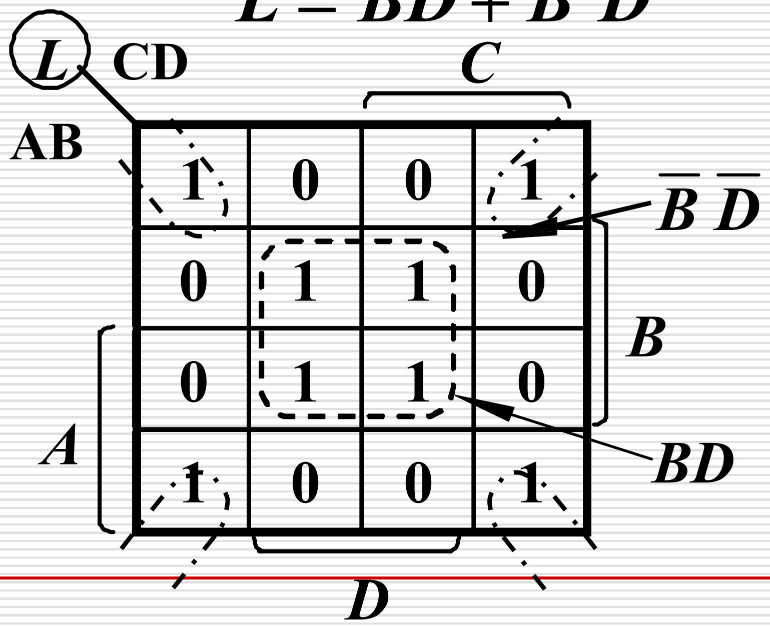
例 :用卡诺图法化简下列逻辑函数

$$L(A,B,C,D)=\sum m(0,2,5,7,8,10,13,15)$$

解：(1) 由L 画出卡诺图

（2）画包围圈合并最小项，得最简与-或表达式

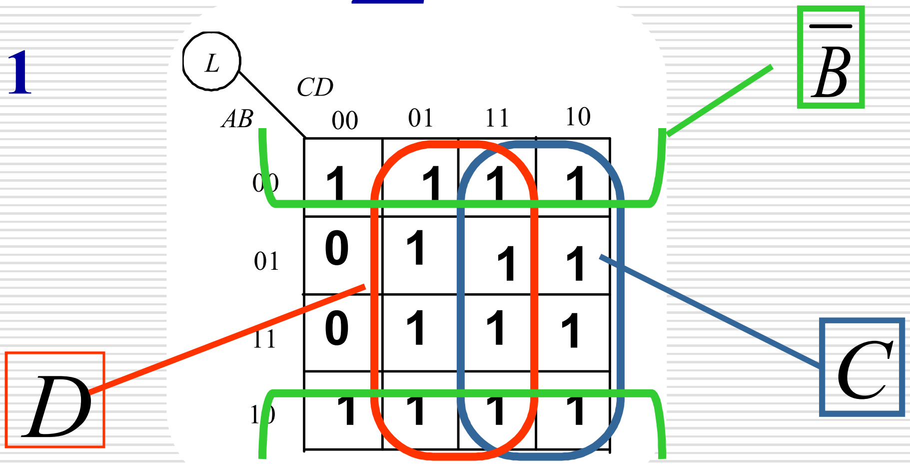
$$L=BD+\overline{B}\,\overline{D}$$



例： 用卡诺图化简

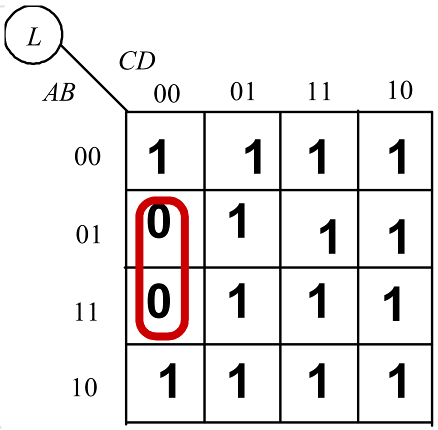
$$L(A,B,C,D)=\sum m(0\sim3,5\sim7,8\sim11,13\sim15)$$

圈1



$$L=D+C+\overline{B}$$

圈0



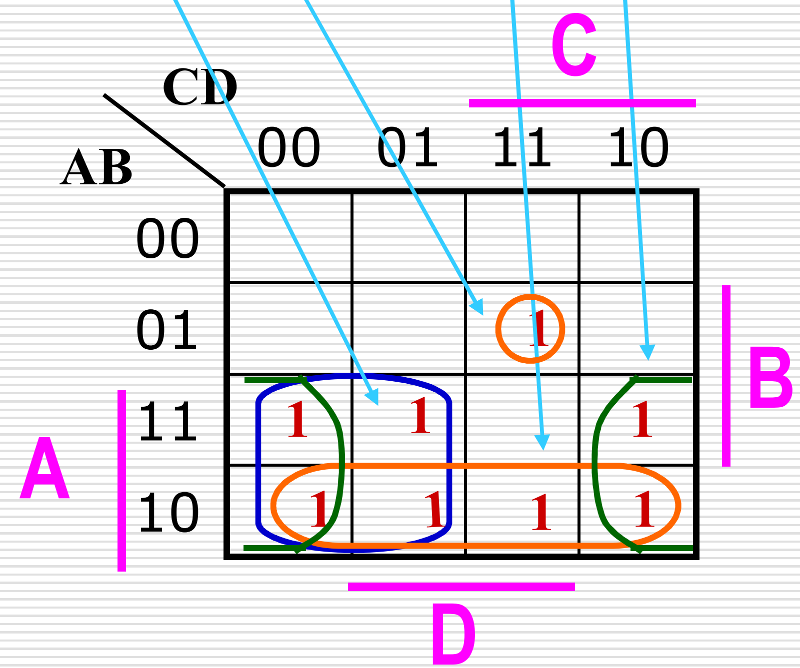
$$\overline{L}=B\overline{C}\,\overline{D}$$

$$L=D+C+\overline{B}$$

例---试用卡诺图化简法求逻辑表达式

$$F(A,B,C,D)=ABC\overline{C}D+\overline{A}BCD+A\overline{B}+A\overline{D}$$ 的**最简**与或表达式。

解：



化简的原则：用尽可能少的极大圈将所有的“1”圈掉

1、先用极大圈覆盖尽可能多的“1” （即先合并大的圈）

2、圈的个数尽可能少。

$$F(A,B,C,D)=\overline{A}BCD+A\overline{B}+A\overline{D}+A\overline{C}$$

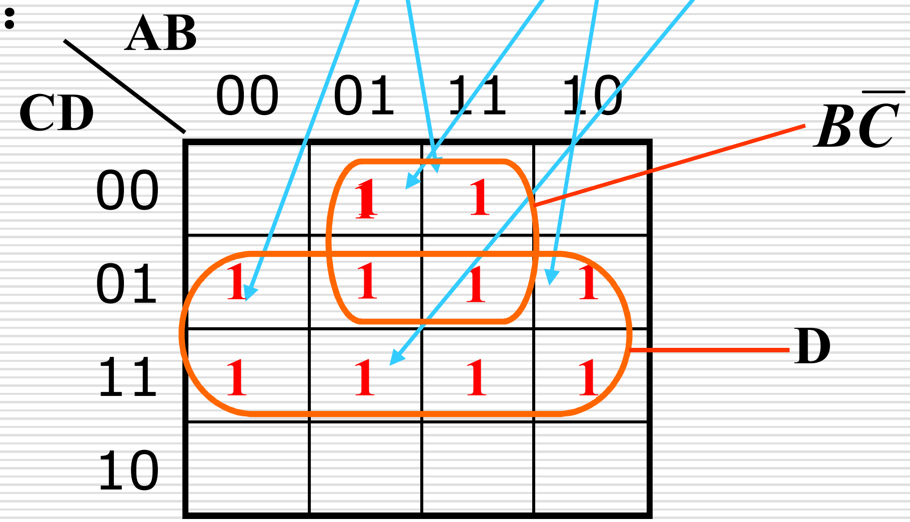
例 $F = B\bar{C}\cdot\bar{D} + \bar{A}\cdot\bar{B}D + AD + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BCD$

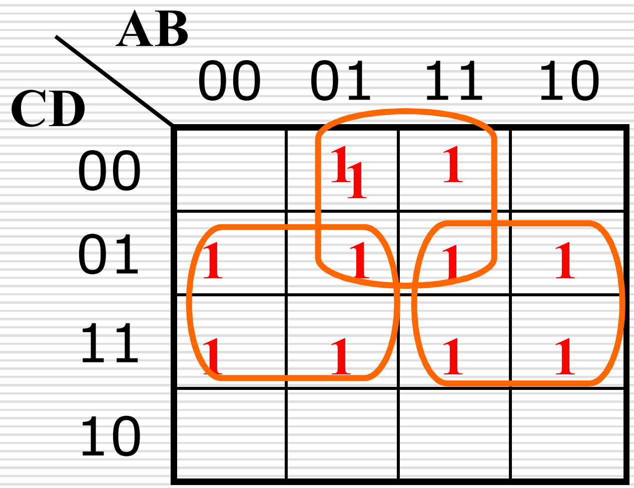
正确的最简与或表达式为___C___。

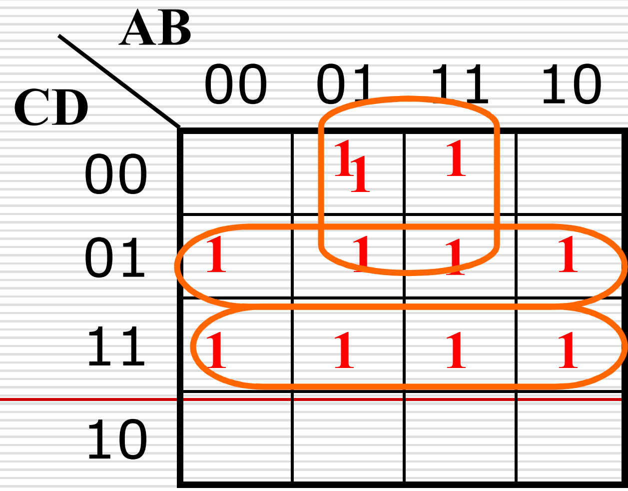
A、 $B\bar{C} + \bar{A}D + AD$　　　C、 $B\bar{C} + D$

B、 $B + D$　　　D、 $B\bar{C} + \bar{C}D + CD$

解：







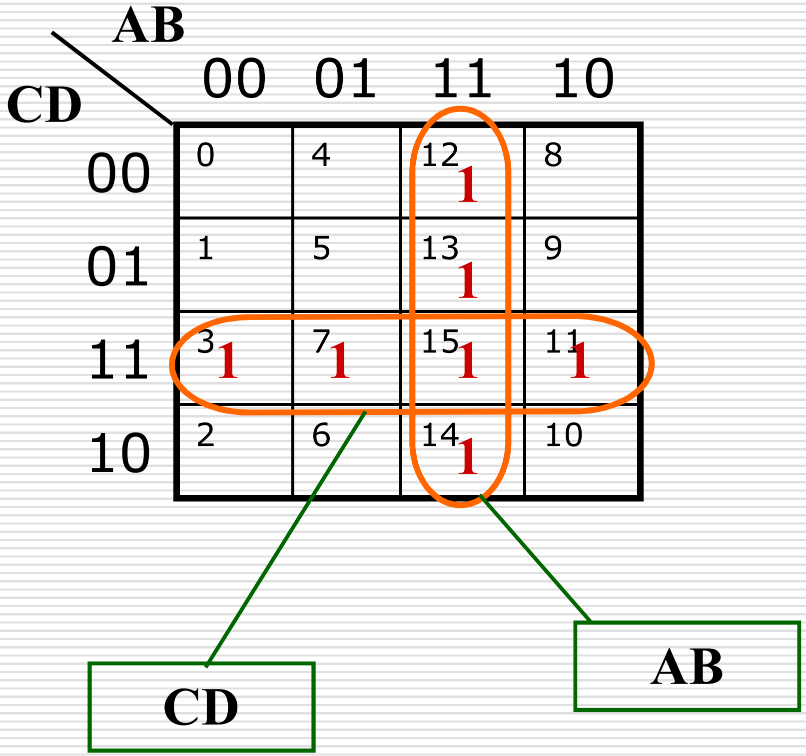
A和D也是正确的但不是最简。

说明：此图中AB在上方。注意每个变量的区域。

例 在函数 F=AB +CD 的真值表中，F=1的状态共有 <u>c</u> 个。

a、2　　b、4　　c、7　　d、16

解：



说明：此图中AB在上方。注意每个变量的区域。

例 已知某电路的真值表如下，该电路的逻辑表达式是 a ______。

a、F=AB+C　　b、F=A+B+C　　c、F=C　　d、$F=\overline{A}B+C$

解：

卡诺图化简

C \ AB	00	01	11	10
0	0	2	6 1	4
1	1 1	3 1	7 1	5 1

C　　AB

输入			输出
A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

布尔代数化简

$$F=\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}+ABC$$

$$=\overline{B}C+\overline{A}BC+AB$$

$$=C(\overline{A}+\overline{B})+AB$$

……

代数法化简逻辑函数需要一定的经验和技巧，不容易确定化简结果是否为最简。

说明：此图中AB在上方。注意每个变量的区域。

3、具有无关项的化简

（1）什么叫无关项：

在真值表内对应于变量的某些取值下，函数的值可以是任意的，或者这些变量的取值根本不会出现，这些变量取值所对应的最小项称为无关项或任意项。

在含有无关项逻辑函数的卡诺图化简中，它的值可以取0或取1，具体取什么值，可以根据使函数尽量得到简化而定。

例: 要求设计一个逻辑电路，能够判断一位十进制数是奇数还是偶数，当十进制数为奇数时，电路输出为1，当十进制数为偶数时，电路输出为0。

解:

(1)列出真值表

ABCD	L
0000	0
0001	1
0010	0
0011	1
0100	0
0101	1
0110	0
0111	1
1000	0
1001	1
1010	×
1011	×
1100	×
1101	×
1110	×
1111	×

(2)画出卡诺图

L CD AB *C* *B* *A* *D* *D*

0	1	1	0
0	1	1	0
×	×	×	×
0	1	×	×

(3) 卡诺图化简

$$L = D$$

具有无关项逻辑函数的化简

无关项

$$F(A,B,C,D)=\underbrace{\sum(1,2,7,8,11)}_{\text{F=1项}}+\underbrace{\sum\nolimits_{\varphi}(0,6,9,15)}_{\text{无关项}}$$

例 化简函数 $F(A,B,C,D)=\sum(3,5,7)$，且无关项为 $\sum\varphi(10,11,12,13,14,15)$

解：

CD \ AB	00	01	11	10
00			×	
01		1	×	
11	1	1	×	×
10			×	×

$$F(A,B,C,D)=CD+BD$$

说明：此图中AB在上方。注意每个变量的区域。

例 化简函数 $F(A,B,C,D)=\sum(0,7,13,14,15)$ 且无关项为 $\sum\varphi(1,2,3,9,10,11)$

解：

CD \ AB	00	01	11	10
00	1			
01	×		1	×
11	×	1	1	×
10	×		1	×

说明：此图中AB在上方。注意每个变量的区域。

$$F(A,B,C,D)=\overline{A}\,\overline{B}+CD+AD+AC$$

第二章 作业布置

本次（3月5号）作业要求：

每个同学自己从第二章的课后习题中选2题做到作业本中，至于做哪2题，每个同学自己选择。不作硬性规定。我在检查作业时，只看是否做了2题。（从你购买的课本上选题做就可以了。）

总之，每次课后大家自己从课后习题中选2题做到作业本就可以了。