计算方法

第4章 方程求根的迭代法

胡 敏
合肥工业大学 计算机与信息学院
jsjxhumin@hfut.edu.cn
uhnim@163.com

第 4 章 方程求根的迭代法

4.1 迭代过程的收敛性

4.2 迭代过程的加速

4.3 牛顿法

4.4 弦截法

第 4 章 方程求根的迭代法

1. 教学内容：

二分法、迭代法的一般原理 、NEWTON迭代法

2. 重点难点：

重点：牛顿迭代法及局部收敛性

难点：迭代法及收敛性定理

3. 教学目标：

掌握迭代法的一般原理、对给出的方程求根问题，能利用一般迭代法或者牛顿迭代法进行数值求解

引 言

非线性方程的根

求 $f(x)=0$ 的根

高次方程，5次以上的方程无求根公式

- 代数方程： $f(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$

  超越方程： $f(x)$ 含超越函数，如 $\sin(x)$, e^x, $\ln x$ 等

  $f(x)=x^2-1$ ， $f(x)=x^{30}+x^{25}+7x^2+1$ ， $f(x)=\sin x+e^x$
- 实根与复根
- 根的重数

  $f(x)=(x-x^*)^m\cdot g(x)$ 且 $g(x^*)\neq 0$, 则 x^* 为 $f(x)$ 的 m 重根
- 有根区间：$[a, b]$ 上存在 $f(x)=0$ 的一个实根

研究内容：　在有根的前提下求出方程的近似根。

引 言

问题： 设 $f(x)$ 是实系数多项式或是任意实函数，求 $f(x)=0$ 的根 x^*，其中 $x^* \in [a,b]$.

引论中曾介绍过求解函数方程

$$f(x)=0$$

的二分法。这是电子计算机上的一种常用算法,其基本思想是逐步收缩有根区间，最后得出所求的根。

本章的主要内容就是介绍方程求根的迭代法。

4.1 迭代过程的收敛性

迭代法是一种逐次逼近法，这种方法使用某个固定公式—所谓迭代公式反复校正根的近似值，使之逐步精确化，直至满足精度要求的结果。

迭代法的求根过程分成两步，第一步先提供根的某个猜测值，即所谓迭代初值，然后将迭代初值逐步加工成满足精度要求的根。

迭代函数

迭代法的设计思想是：

$$f(x)=0 \xleftrightarrow{\text{等价变换}} x=\varphi(x)$$

$f(x)$ 的零点 x^* $\Longleftrightarrow$ $\varphi(x)$ 的不动点 x^*

$$\boxed{x_{k+1}=\varphi(x_k)}$$

不动点迭代

1. 迭代过程的设计思想

定义 按照一定规则（某个固定的计算公式 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$），把解的近似值逐步精确化，直到满足实际问题的精度要求. ———————— 迭代法

其基本思想如下：① 将方程 $f(x)=0$ 转化为等价方程

$$x=\varphi(x) \qquad (3)$$

迭代函数，隐式方程

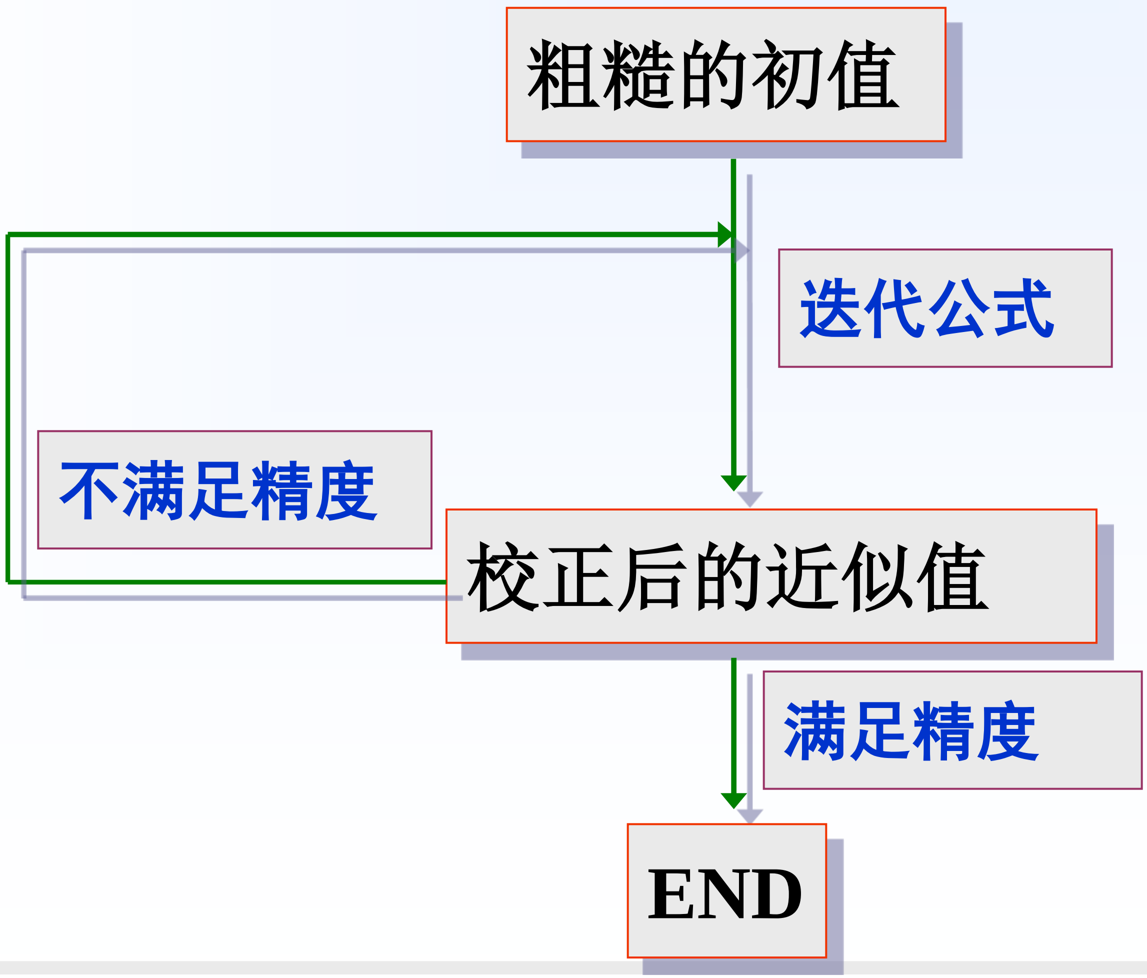
② 取初值 x_0 ，用显示公式 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 计算得数列 $\{x_k\}$

③若 $|x_{k+1}-x_k|\le\varepsilon$ ，则计算停止，否则继续迭代.

迭代法的设计思想的实质:逐次逼近

是将隐式方程 $x=\varphi(x)$ 归结为计算一组显式公式 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$，是一个逐步显式化的过程.

1. 迭代过程的设计思想



1. 迭代过程的设计思想

迭代公式

$$x_{k+1}=\varphi(x_k),\mathrm{k}=0,1,2,\cdots \qquad (4)$$

如果迭代值x_k有限，则称**迭代收敛**，这时极限值 $x^*=\lim\limits_{k\to\infty}x_k$

显然就是方程(3)亦即原方程f(x)=0的根。

将方程f(x)=0等价转化为隐式方程 $x=\varphi(x)$，其实质就是求$y=x$与$y=\varphi(x)$的交点p^*，即$p=\varphi(p)$,如果p^*是f(x)=0的根，即$f(p^*)=0$,

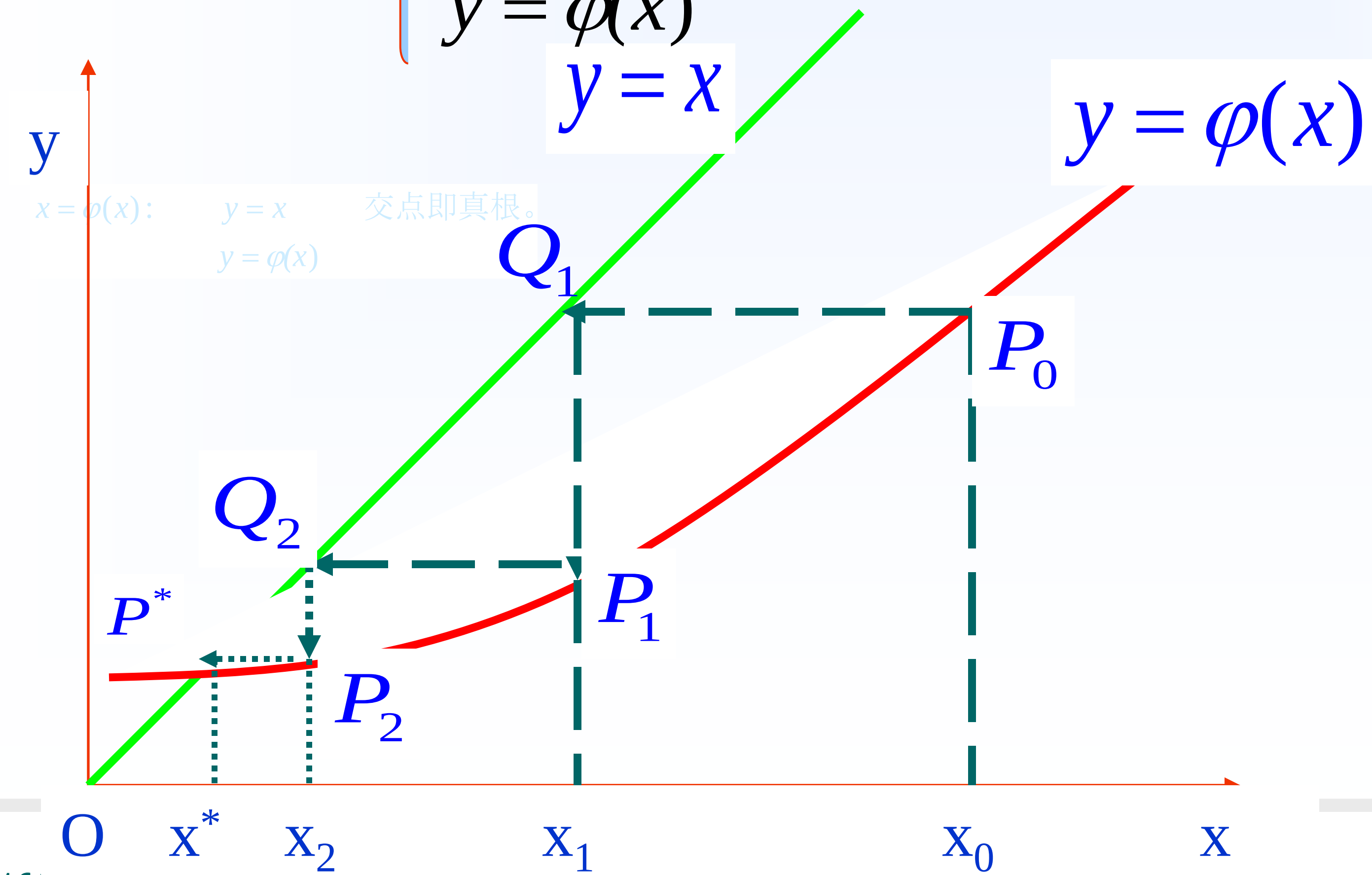
如果p^*是 $y=x$与$y=\varphi(x)$的交点p^*那末，p^*一定是方程f(x)=0的根，反之亦然。由此可知，迭代公式（4）也称**定点迭代公式或不动点迭代法公式**。

迭代过程的几何表示

迭代法的几何含义： **求曲线 $y=\varphi(x)$ 与直线 $y=x$ 的交点**

$$x=\varphi(x):\quad \begin{cases} y=x \\ y=\varphi(x) \end{cases}$$

交点即真根。



例 用迭代法求方程 $x^3 - x - 1 = 0$，取 $\varepsilon = 10^{-4}$，在x=1.5附近的一个根

由 $x_{k+1} = \sqrt[3]{x_k + 1}$ 得表一：

k	0	1	2	3	4	5	6
x_k	1.5	1.37521	1.33068	1.32585	1.32493	1.32475	1.32473

由表一

而由

k
x_k

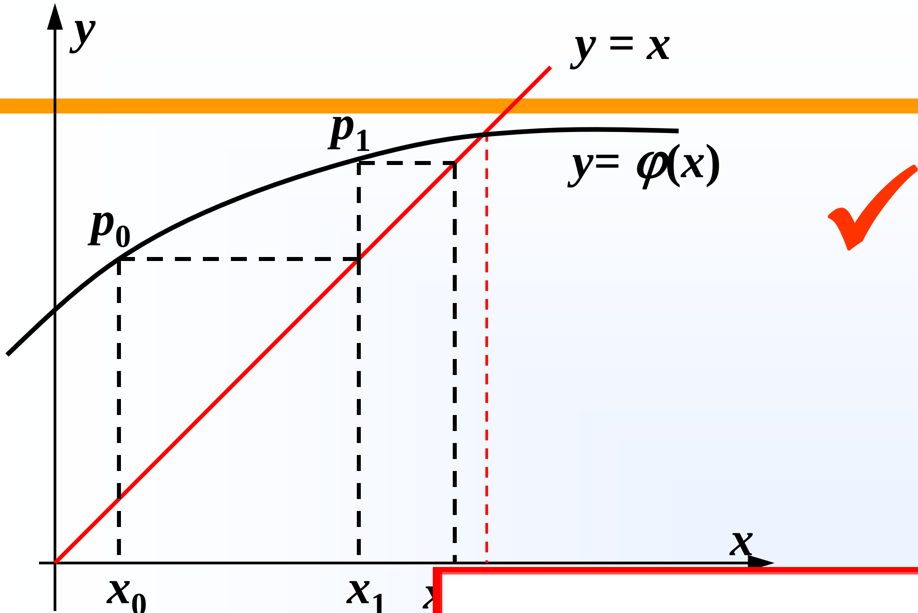
由表二知迭代 $x_{k+1} = \varphi_2(x_k)$ 是发散的.

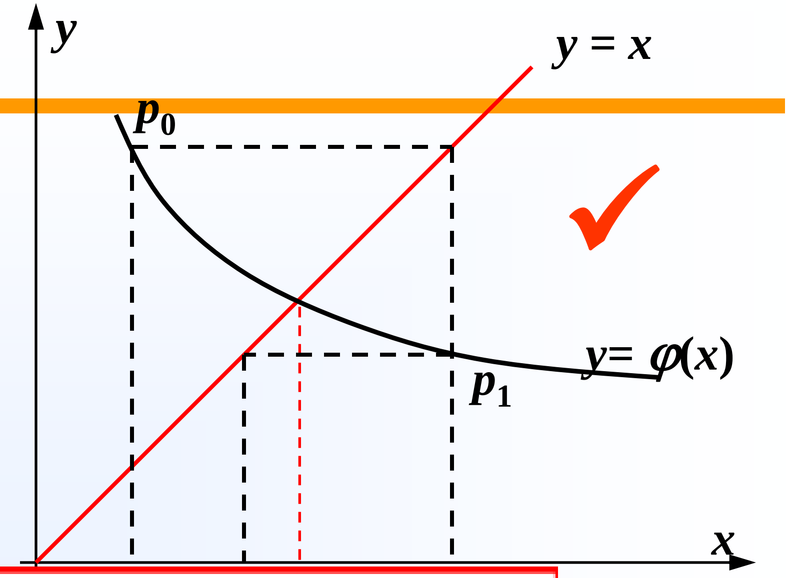
1.根的存在性。方程有没有根？如果有根，有几个根？
2.这些根大致在哪里？如何把根隔离开来？
3.迭代函数如何构造？怎样保证迭代收敛？
4. 误差估计（迭代结束的条件）
5、怎样加速迭代收敛

2. 线性迭代函数的启示

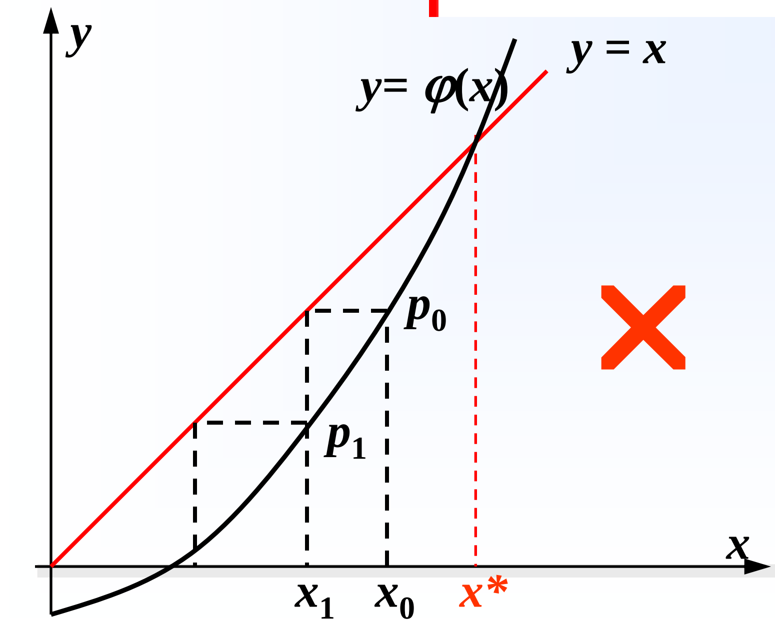
为了使迭代有效，必须保证它的收敛性。一个发散（即不收敛）的迭代过程，即使进行千百次迭代，其结果也毫无可用价值。

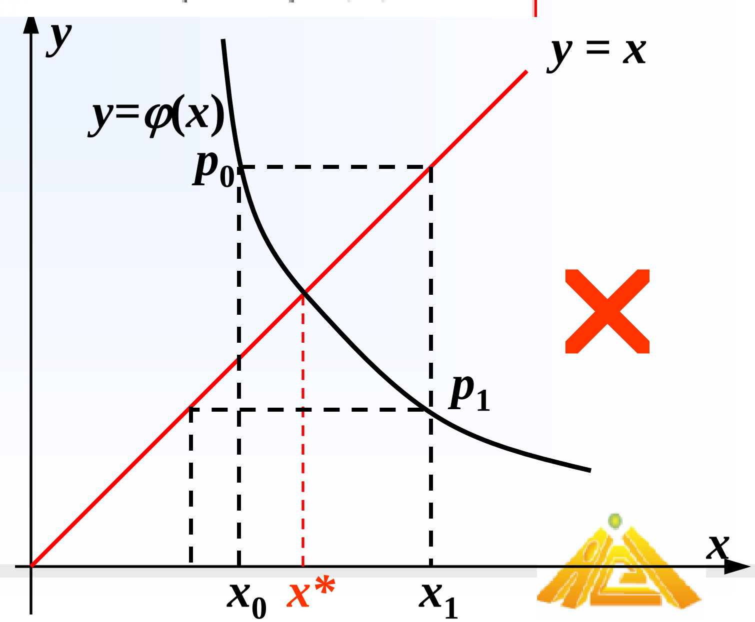
为了保证迭代过程的收敛性，迭代函数 $\varphi(x)$ 的构造十分关键。以最简单的线性迭代函数 $\varphi(x)=kx+d$ 为例可以容易验证 $|\varphi'(x)|=|k|<1$ 时，$x=\varphi(x)$ 的迭代才是收敛的，即 $-1<k<1$ 是保证迭代收敛的线性迭代函数的基本特性（由作图法很容易验证这一特性）。





保证迭代收敛的充分必要条件是 $|\varphi'(x)| = |k| < 1$





3.压缩映像原理

对于迭代函数$\varphi(x)$的一般情形，设x^*为方程$x=\varphi(x)$的根，则由微分中值定理有

$$x^*-x_{k+1}=\varphi(x^*)-\varphi(x_k)=\varphi'(\xi)(x^*-x_k)$$

式中ξ是x^*与x_k之间的某一点，即$\xi\in(x,x_k)$。由此可知，如果存在$0\le L<1$，使得对于任意$x\in[a,b]$成立：

$$|\varphi'(x)|\le L$$

$$|x^*-x_{k+1}|\le L|x^*-x_k| \qquad （5）$$

$$e_k=|x^*-x_k| \text{有}\ e_k\le L^k e_0$$

因而$\lim\limits_{k\to\infty}e_k=0$，即迭代收敛。需要指出的是，在上述

$x\in[a,b]$，总有 $\varphi(x)\in[a,b]$

综上所述有如下<u>**压缩映像原理**</u>：

3.压缩映像原理

定理4. 1：**(压缩映像原理，不动点原理)**　　证明（略）

如果$\varphi(x)$满足下列条件

（1）当$x\in[a, b]$时，$\varphi(x)\in[a, b]$　　**封闭性**

（2）当任意$x\in[a, b]$，存在$0< L< 1$，使　　**压缩性**

$$|\varphi'(x)| \le L < 1 \qquad (6)$$

则方程$x = \varphi(x)$在$[a, b]$上有唯一的根x^*, 且对任意初值$x_0\in[a, b]$时，迭代序列$x_{k+1}=\varphi(x_k)$ $(k = 0, 1, \ldots)$收敛于x^*。

且有下列误差估计

后验估计:

$$|x^* - x_k| \le \frac{1}{1-L}|x_{k+1} - x_k| \qquad (7)$$

可用$|x_{k+1}-x_k|$来控制收敛精 度,

先验估计:

$$|x^* - x_k| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0| \qquad (8)$$

L 越小收敛越快.

例2 求方程 $x^3 - x - 1 = 0$ 的唯一正根。

解： 因为*f*(1)=-1，*f*(2)=5，所以区间[1,2]含有所求的根。为使用迭代，将所给方程改写为：$x = (x+1)^{\frac{1}{3}}$ 这时迭代函数 $\varphi(x) = (x+1)^{\frac{1}{3}}$

而 $\varphi'(x) = \frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}$，在[1,2]上恒有 $|\varphi'(x)| < \frac{1}{3}$ ，由定理**4.1**可知，迭代公式 $x = (x+1)^{\frac{1}{3}}$ 对任意初值 $x \in [1,2]$ 均收敛。取初值x_0=1.5，迭代结果如表4.1所示。

表4.1 迭代结果

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_k	1.5	1.35721	1.33086	1.32588	1.32494	1.32476	1.32473	1.32472	1.32472

4. 迭代过程的局部收敛性

在实际应用迭代法时，通常首先在根 x^* 的邻近考察。称一种迭代过程在根 x^* 邻近收敛，如果存在邻域 $\Delta:\left|x-x^*\right|\le\delta$ ，使迭代过程对于任意初值 $x_0\in\Delta$ 均收敛，这种在根的邻近所具有的收敛性被称为**局部收敛性**。

定理4.2 设 $\varphi(x)$ 在 $x=\varphi(x)$ 的根 x^* 邻近有连续导数，且成立

$$\left|\varphi'\left(x^*\right)\right|<1$$

则迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 在 x^* 邻近具有局部收敛性。

具有局部收敛性的迭代计算上不一定收敛，它是否收敛还要看初值是否取的恰当；
而不具有局部收敛性的迭代对任何初值都不可能收敛。

例3：求方程 $x^3-3x+1=0$ 在[0, 0.5]内的根，精确到10^{-5}。

解： 将方程变形 $x=\frac{1}{3}(x^3+1)=\varphi(x)$

因为，在[0, 0.5]内 $\varphi'(x)=x^2>0$ 为增函数，所以

$$L=\max|\varphi'(x)|=0.5^2=0.25<1$$

满足收敛条件，取$x_0=0.25$，算得

$x_1=\varphi(0.25)=0.3385416$　　$x_2=\varphi(x_1)=0.3462668$

$x_3=\varphi(x_2)=0.3471725$　　$x_4=\varphi(x_3)=0.3472814$

$x_5=\varphi(x_4)=0.3472945$　　$x_6=\varphi(x_5)=0.3472961$

$x_7=\varphi(x_6)=0.3472963$

因为 $|x_7-x_6|=|0.3472963-0.3472961|\le 10^{-6}$

取近似根为$x^*=0.347296$

5、迭代过程的收敛速度

一种迭代法要具有实用价值，不仅需要肯定它是收敛的，而且还要求它收敛快。所谓收敛速度是指在接近收敛时迭代误差的下降速度。

定义： 设迭代 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 收敛到 $\varphi(x)$ 的不动点 x^*。记 绝对误差 $e_k = x_k - x^*$，若

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^{\ p}} = C \neq 0 \quad (C\text{为常数})$$

则称该迭代为 p 阶收敛。

(1) 当 $p=1$ 时称为线性收敛，此时 $|C| < 1$；

(2) 当 $p=2$ 时称为二次收敛，或平方收敛；

(3) 当 $p>1$ 时称为超线性收敛。

p 阶收敛

定理 4.3 设迭代 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$，若 $\varphi^{(p)}(x)$ 在 x^* 的某邻域内连续，则该迭代法具有 p 阶收敛的充要条件是

$$\varphi(x^*)=x^*,$$

$$\varphi'(x^*)=\varphi''(x^*)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0,$$

$$\varphi^{(p)}(x^*)\neq 0$$

并且有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k^p}=\frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(x^*)$$

证明：充分性. 根据泰勒展开有

$$x_{k+1}=\varphi(x_k)=\varphi(x^*)+\varphi'(x^*)(x_k-x^*)+\ldots+\frac{\varphi^{(p)}(\xi_k)}{p!}(x_k-x^*)^p$$

$$\Rightarrow\; x_{k+1}-x^*=\frac{\varphi^{(p)}(\xi_k)}{p!}(x_k-x^*)^p \;\Rightarrow\; \lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k^p}=\frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(x^*)$$

4.2 迭代过程的加速

设 x_k 是根 x^* 的某个近似值，用迭代公式校正一次得

$$\bar{x}_{k+1} = \varphi(x_k)$$

假设 $\varphi'(x)$ 在所考察的范围内改变不大，其估计值为L，则有

$$x^* - \bar{x}_{k+1} \approx L(x^* - x_k)$$

$$x^* = \frac{1}{1-L}\bar{x}_{k+1} - \frac{L}{1-L}x_k \quad (9)$$

据此可导出如下加速公式：

$$x_{k+1} = \frac{1}{1-L}\bar{x}_{k+1} - \frac{L}{1-L}x_k$$

其一步分为两个环节：

迭代: $\bar{x}_{k+1} = \varphi(x_k)$

改进: $x_{k+1} = \frac{1}{1-L}\bar{x}_{k+1} - \frac{L}{1-L}x_k$

$$x_{k+1} = \frac{1}{1-L}[\varphi(x_k) - Lx_k] \quad (10)$$

例4用迭代法和加速迭代法求方程 $x=e^{-x}$在$x=0.5$附近的一个根p，要求精度为10^{-5}。

解： 设迭代函数为$\varphi(x)=e^{-x},\varphi'(x)=-e^{-x}$ 由于$\varphi'(p)\approx\varphi'(0.5)\approx-0.6$，即$|\varphi'(x)|<1$所以迭代方程$x_{k+1}=e^{-x_k}$是收敛的。

(1)书中例2使用非加速迭代时，经过18次迭代即得到满足精度要求的根0.567141（准确值为0.56713）

k	0	1	2	3	4	5	6	7
x_k	0.500000	0.606531	0.545239	0.579703	0.560065	0.571172	0.564863	0.568438
k	8	9	10	11	12	13	14	15
x_k	0.566409	0.567560	0.566907	0.567277	0.567067	0.567186	0.567119	0.567157
k	16	17	18					
x_k	0.567135	0.567148	0.567141					

(2)使用加速迭代公式(10)时，

$$\varphi'(x) = -e^{-x} \text{而} \ \varphi'(0.5) = -e^{-0.5} = -0.6$$

故取L=-0.6，此时加速迭代公式为：

$$x_{k+1} = \frac{1}{1-L}\left[\varphi(x_k) - Lx_k\right] = \frac{1}{1.6}\left(e^{-x_k} + 0.6x_k\right)$$

计算结果如下：

$$x_0 = 0.5, \quad x_1 = 0.56658, \quad x_2 = 0.56712, \quad x_3 = 0.56714$$

即只要迭代3次即可得到满足精度要求的结果，显然加速的效果显著的。

2.埃特金算法

前面加速方案有个缺点是其中含有导数 $\varphi'(x)$ 的有关信息而不便于实际应用。

设将迭代值 $\bar{x}_{k+1}$ 再迭代一次，可得

$$\tilde{x}_{k+1}=\varphi(\bar{x}_{k+1})$$

由微分中值定理得

$$x^*-\tilde{x}_{k+1}=\varphi(x^*)-\varphi(\bar{x}_{k+1})\approx L(x^*-\bar{x}_{k+1})$$

利用式(9): $$x^*-\bar{x}_{k+1}\approx L(x^*-x_k)$$

联立消去*L*得

$$\frac{x^*-\bar{x}_{k+1}}{x^*-\tilde{x}_{k+1}}\approx\frac{x^*-x_k}{x^*-\bar{x}_{k+1}}$$

$$x^*\approx\tilde{x}_{k+1}-\frac{(\tilde{x}_{k+1}-\bar{x}_{k+1})^2}{\tilde{x}_{k+1}-2\bar{x}_{k+1}+x_k}$$

2.埃特金算法

据此构造出不含导数信息的加速公式:

迭代: $\bar{x}_{k+1} = \varphi(x_k)$

迭代: $\tilde{x}_{k+1} = \varphi(\bar{x}_{k+1})$

改进: $x_{k+1} = \tilde{x}_{k+1} - (\tilde{x}_{k+1} - \bar{x}_{k+1})^2 / (\tilde{x}_{k+1} - 2\bar{x}_{k+1} + x_k)$

这一加速方法称为**埃特金(Aitken) 加速算法**。

2.埃特金算法

例5 求方程 $x = e^{-x}$ 在 $x=0.5$ 附近的根.

解 取 $x_0=0.5$, 迭代格式

$$x_{k+1} = e^{-x_k}$$

得 $x_{25}=x_{26}=0.5671433$

若对此格式用埃特金法, 则

$$\bar{x}_{k+1} = e^{-x_k} \qquad \tilde{x}_{k+1} = e^{-\bar{x}_{k+1}}$$

$$x_{k+1} = e^{-\tilde{x}_{k+1}} - \frac{(e^{-\tilde{x}_{k+1}} - e^{-\bar{x}_{k+1}})^2}{e^{-\tilde{x}_{k+1}} - 2e^{-\bar{x}_{k+1}} + x_k}$$

2.埃特金算法

取 x_0=0.5 , 得

$$\bar{x}_1 = 0.6065307 \quad \tilde{x}_1 = 0.5452392 \quad x_1 = 0.5676279$$

$$\bar{x}_2 = 0.5668708 \quad \tilde{x}_2 = 0.5672979 \quad x_2 = 0.5671433$$

$$\bar{x}_3 = 0.5671433 \quad \tilde{x}_3 = 0.5671433 \quad x_3 = 0.5671433$$

由此可见, 埃特金法加速收敛效果是相当显著的.

4.3 牛顿法

1.牛顿迭代公式的导出

对于方程 $f(x)=0$ ，设已知它的近似根 x_k ，则函数 $f(x)$ 在点 x_k 附近可用一阶泰勒多项式 $p(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)$ 来近似，若取 $p(x)=0$ 的根作为 $f(x)=0$ 新的近似根，记 x_{k+1} ，则有如下著名的**牛顿公式**：

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

牛顿(Newton)迭代公式

基本思想是将非线性函数*f* (x)=0逐步线性化，从而将非线性方程*f* (x)=0近似地转化为线性方程的求解。

相应的迭代函数是：

迭代函数

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

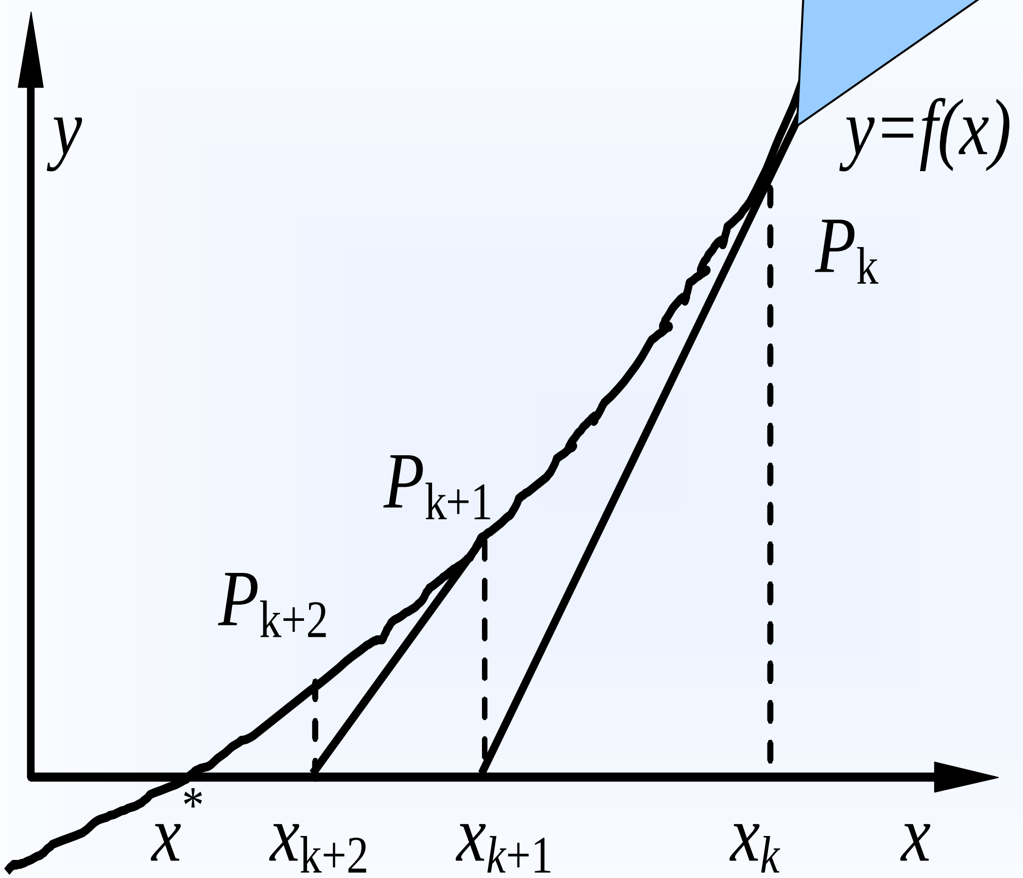
1. 是否收敛于方程的根或什么条件下收敛？

2. 迭代函数有什么特性？

牛顿迭代法的几何解释

切线方程

$$p_k(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$



Newton法又称为Newton切线法或切线法

例6 用牛顿迭代法求方程$x=e^{-x}$在$x=0.5$附近的根.

解 将原方程化为$x-e^{-x}=0$，则

$$f(x)=x-e^{-x},\quad f'(x)=1+e^{-x},$$

牛顿迭代公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k-e^{-x_k}}{1+e^{-x_k}}$$

取 $x_0=0.5$，迭代得

$x_1=0.566311$, $x_2=0.5671431$, $x_3=0.5671433$.

牛顿迭代法的收敛性

牛顿迭代法的迭代函数为

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

设x^*是$f(x)$的一个单根，即$f(x^*)=0$，$f'(x^*)\neq 0$, 有

$$\varphi'(x^*)=\frac{f(x^*)f''(x^*)}{[f'(x^*)]^2}=0,$$

$$\varphi''(x^*)=\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}\neq 0.$$

又

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^2}=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{2!}\varphi''(\xi)(x_k-x^*)^2}{(x_k-x^*)^2}=\frac{1}{2!}\varphi''(x^*)=\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}\neq 0.$$

牛顿法的收敛性

定理4: 设$f(x)$在[a, b]上存在二阶连续导数且满足下列条件：

（1）$f(a)\cdot f(b)<0$；

（2）$f'(x)\neq 0$；

（3）$f''(x)$ 在区间[a, b]上不变号；

（4）取$x_0\in[a,b]$，使得$f''(x)\cdot f(x_0)>0$

则牛顿迭代序列$\{x_k\}$二阶收敛于$f(x)$在[a, b]上的唯一单根x^*。

即有下面的局部收敛性定理.

定理(局部收敛性) 设$f\in C^2[a, b]$, 若x^*为$f(x)$在$[a, b]$上的根，且$f'(x^*)\neq 0$，则存在x^*的邻域U，使得任取初值$x_0\in U$，牛顿法产生的序列$\{x_k\}$收敛到x^*，且满足

$$\lim_{k\leftarrow\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^2}=\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}.$$

由此得到，当x^*为**单根**时，牛顿迭代法在根x^*的邻近是**二阶(平方)收敛**的.

例 Leonardo于1225年研究了方程

$$x^3+2x^2+10x-20=0$$

并得出了 $x=1.368808107$ 是该方程的一个根，无人知道他用什么方法得出的，在当时这是一个非常有名的结果，试用牛顿法求出此结果。

解：记

$$f(x)=x^3+2x^2+10x-20$$

则

$$f'(x)=3x^2+4x+10=3(x+\frac{2}{3})^2+\frac{26}{3}$$

当 $x\in R$ 时， $f'(x)>0$ ，又 $f(1)=-7<0, f(2)=16>0$

所以 $f(x)=0$ 有唯一实根 $x^*\in(1,2)$ ，并改写

$$f(x)=\big((x+2)x+10\big)x-20,\qquad f'(x)=(3x+4)x+10$$

用牛顿迭代格式

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0,1,2,\cdots \\ x_0 = 1.5 \end{cases}$$

k	x_k	$f(x_k)$	$x_{k+1}^{(2)}$
0	1.5	2.875	22.75
1	1.373626373	0.101788669	21.15505372
2	1.368814819	0.000141580	21.09622130
3	1.368808107	-0.000000016	21.09613922
4	1.368808107		

所以，$x^* \approx 1.368808107$。

2. 开方公式

对于给定的正数，应用牛顿法解二次方程

$$x^2 - C = 0,$$

可导出求开方值$\sqrt{c}$的计算公式

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{C}{x_k}\right). \qquad (14)$$

定理5 这种迭代公式对于任意初值 $x_0 > 0$ 均为平方收敛.

事实上，对（14）式施行配方手续，易知

$$x_{k+1} - \sqrt{C} = \frac{1}{2x_k}(x_k - \sqrt{C})^2; \qquad (15)$$

$$x_{k+1} + \sqrt{C} = \frac{1}{2x_k}(x_k + \sqrt{C})^2.$$

例8　求$\sqrt{115}$.

解　取初值 $x_0 = 10$，对 $C = 115$ 按（14）式迭代3次便得到精度为 10^{-6} 的结果（见表4-4）.

由于公式（14）对任意初值 $x_0 > 0$ 均收敛，并且收敛的速度很快，因此可取确定的初值如 $x_0 = 1$ 编成通用程序.

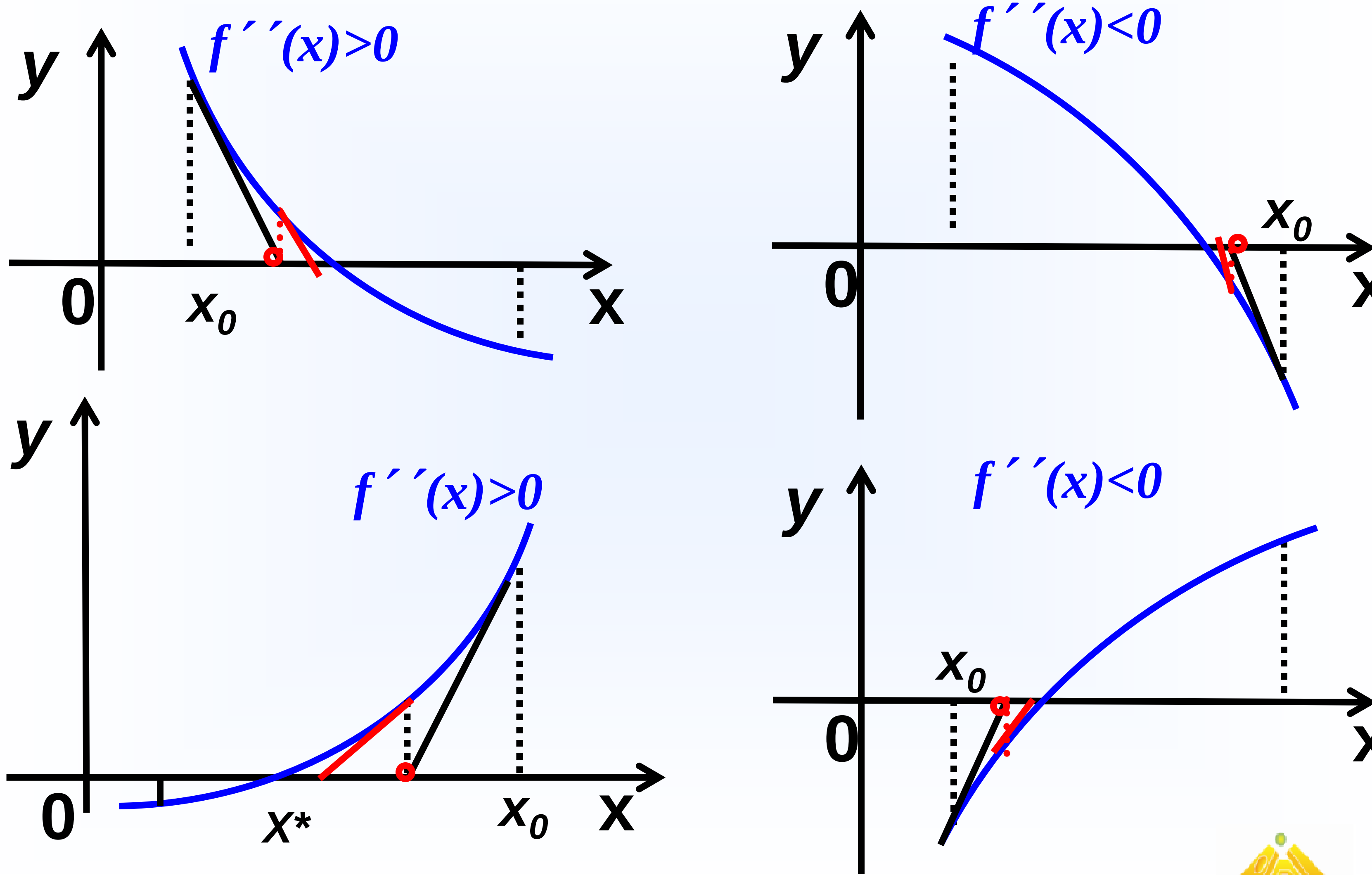
表4－4 计算结果

k	x_k
0	10
1	10.750000
2	10.723837
3	10.723805
4	10.723805

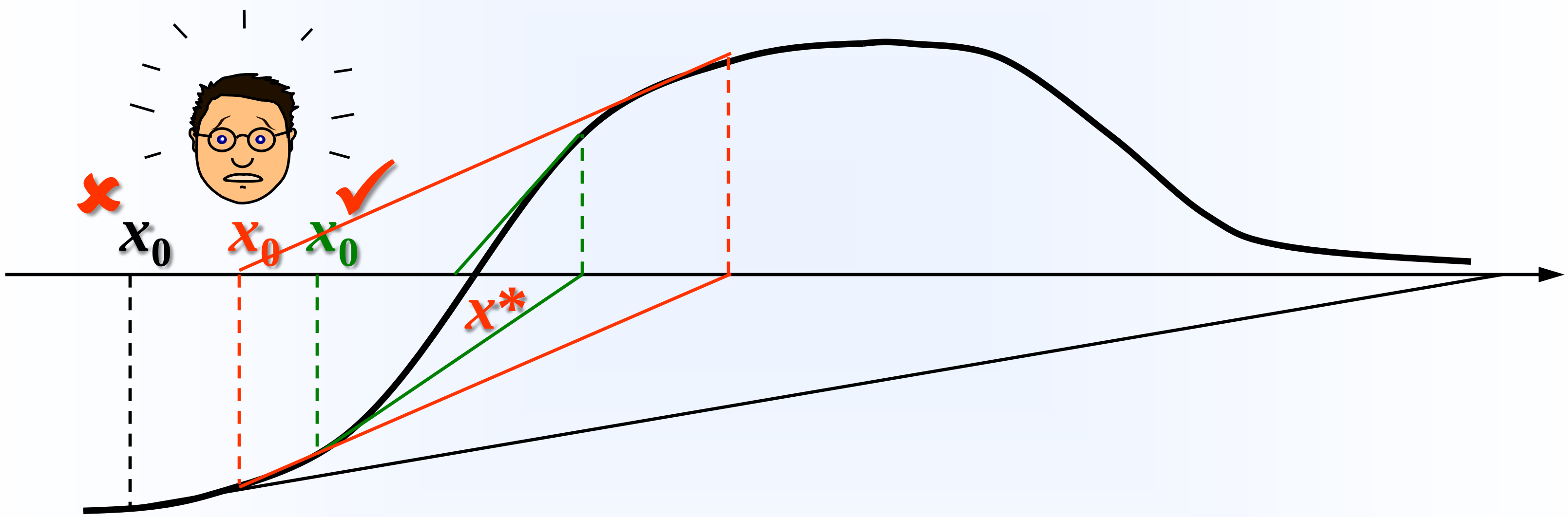
3　牛顿下山法

牛顿法的优点是收敛快，缺点:一是每步迭代要计算 $f(x_k)$ 及 $f'(x_k)$，计算量较大且有时 $f'(x_k)$ 计算较困难，二是初始近似 x_0 只在根 x^* 附近才能保证收敛，如 x_0 给的不合适可能不收敛.

从几何的角度探讨牛顿迭代法的收敛性

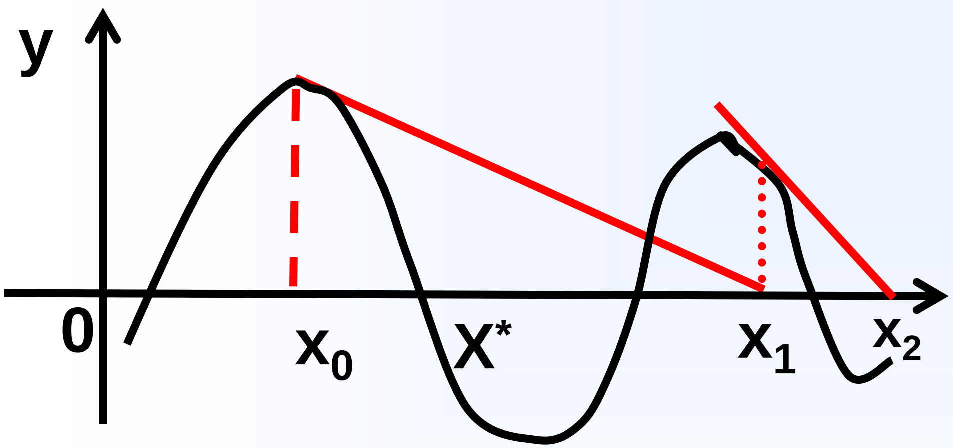


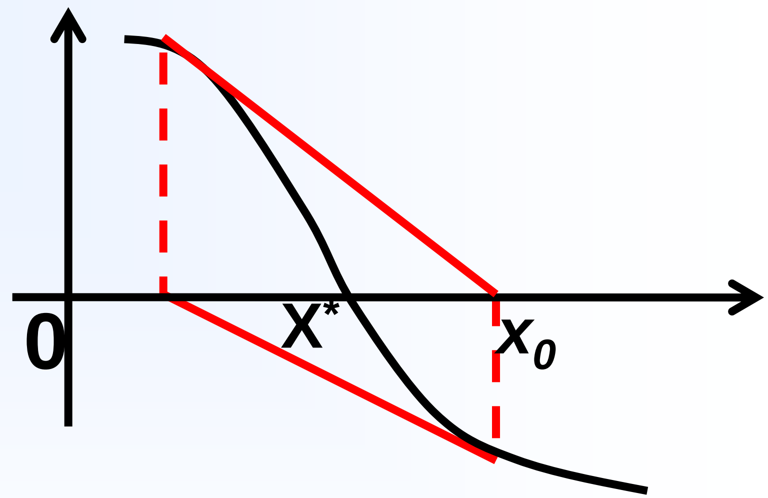
注：Newton法的收敛性依赖于x_0 的选取。



从几何角度探讨牛顿迭代法的收敛性

不满足迭代条件时，可能导致迭代值远离根的情况而找不到根或死循环的情况





为了防止迭代发散，对迭代过程再附加一项要求，即具有单调性：

$$|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|. \qquad (17)$$

满足这项要求的算法称**下山法**.

将牛顿法与下山法结合起来使用，即在下山法保证函数值稳定下降的前提下，用牛顿法加快收敛速度.

将牛顿法的计算结果

$$\bar{x}_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

与前一步的近似值 x_k 适当加权平均作为新的改进值

$$x_{k+1} = \lambda \bar{x}_{k+1} + (1-\lambda)x_k,$$

其中 $\lambda(0 < \lambda \leq 1)$ 称为下山因子

$$x_{k+1} = x_k - \lambda \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (k = 0,1,\cdots), \qquad (18)$$

(18)称为**牛顿下山法**.

下山因子λ的选择是个逐步探索的过程，从λ=1开始反复将因子λ的值减半进行计算，一旦单调性条件（17）成立，则称“下山成功”；否则，如果在上述过程中找不到使条件（17）成立的下山因子λ，则称“下山失败”，这时需要另选初值x_0重新计算。

4.4 弦截法

用牛顿法求方程根，每步除计算 $f(x_k)$ 外还要算 $f'(x_k)$，当函数 $f(x)$ 比较复杂时，计算 $f'(x)$ 往往较困难，为此可以利用已求函数值 $f(x_k), f(x_{k-1}), \cdots$ 来回避导数值 $f'(x_k)$ 的计算.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

弦截法

设 x_k, x_{k-1} 是 $f(x)=0$ 的近似根，利用 $f(x_k), f(x_{k-1})$ 构造一次插值多项式 $p_1(x)$，并用 $p_1(x)=0$ 的根作为新的近似根 x_{k+1}. 由于

$$p_1(x) = f(x_k) + \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x - x_k).$$

因此有

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k-x_{k-1}). \qquad (19)$$

（19）可以看做牛顿公式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

中的导数 $f'(x_k)$ 用差商 $\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$ 取代的结果.

几何意义.

曲线 $y=f(x)$ 上横坐标为 x_k, x_{k-1} 点分别记为 P_k, P_{k-1}

则弦线 $\overline{P_kP_{k-1}}$ 的斜率等于差商值 $\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$ 其方

程是

$$y = f(x_k) + \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x - x_k).$$

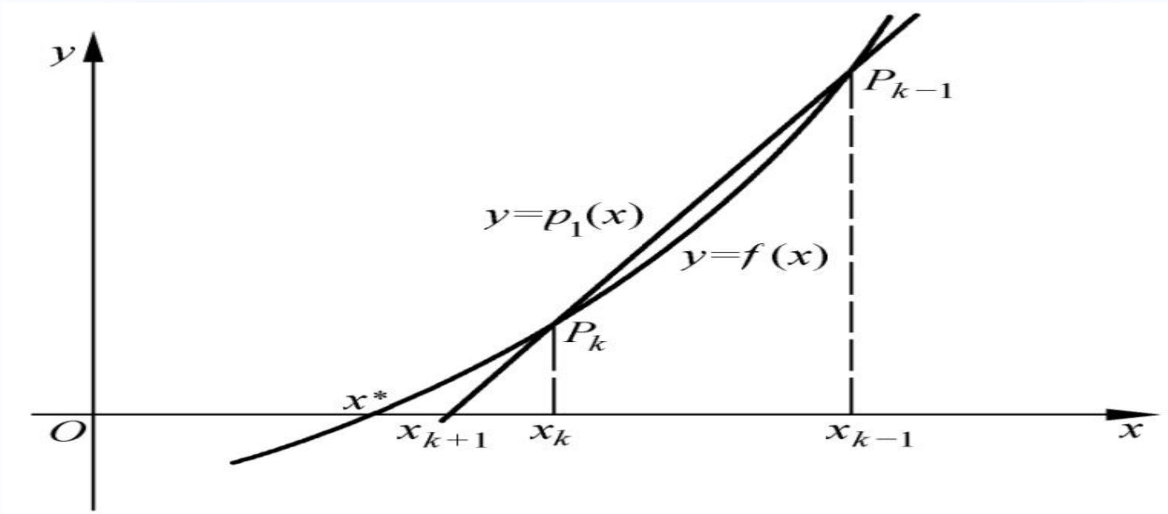


图4-5

因之，按（19)式求得的 x_{k+1} 实际上是弦线 $\overline{P_k P_{k-1}}$ 与 x 轴交点的横坐标. 这种算法因此而称为**快速弦截法，也称两步法.**

弦截法与切线法（牛顿法）都是线性化方法，但两者有本质的区别.

切线法在计算 x_{k+1} 时只用到前一步的值 x_k，而弦截法（20），在求 x_{k+1} 时要用到前面两步的结果 x_k, x_{k-1} ，因此使用这种方法必须先给出两个开始值 x_1, x_0.

例9 用弦截法解方程

$$f(x) = xe^x - 1 = 0.$$

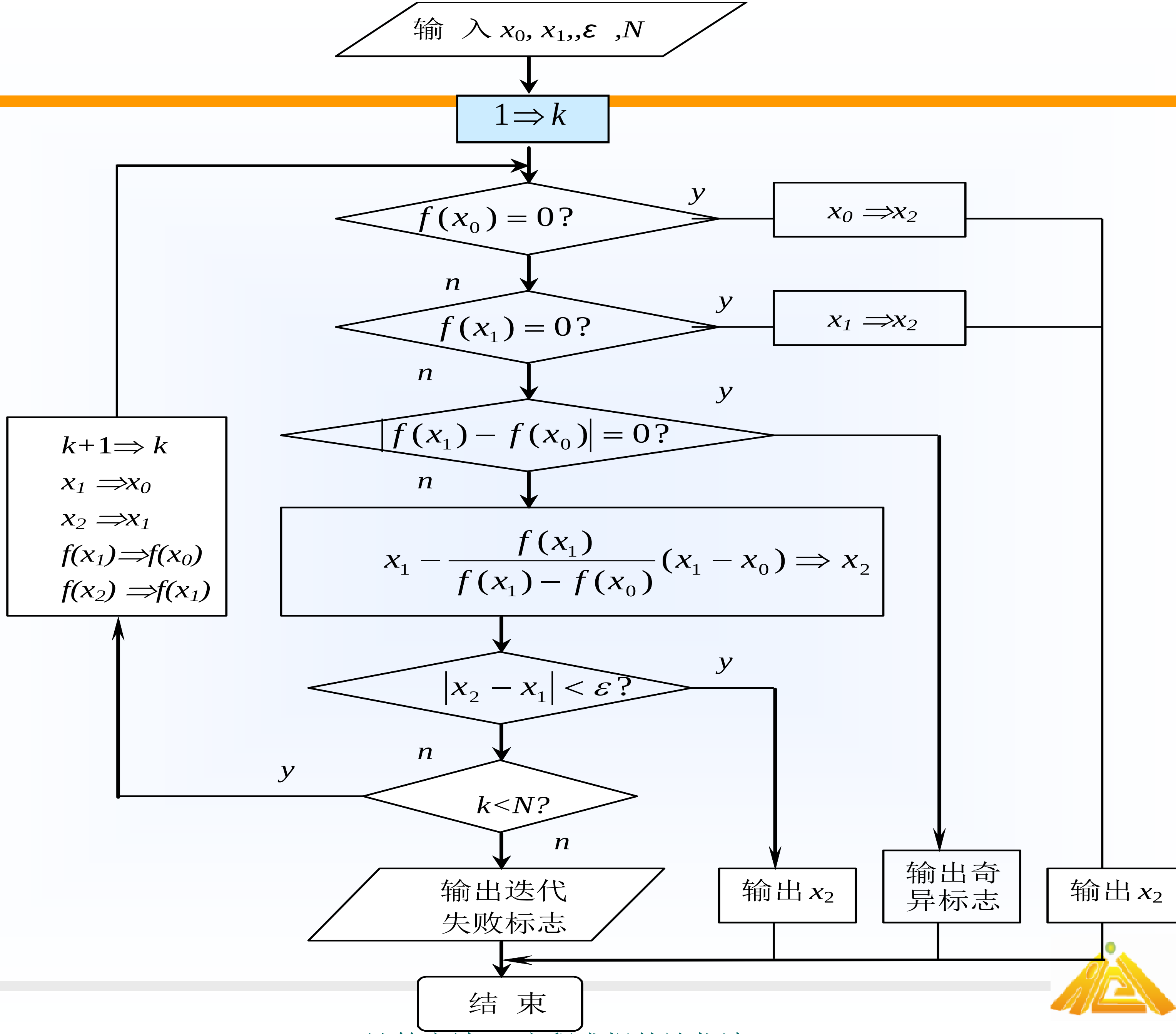
解 设取 $x_0 = 0.5, x_1 = 0.6$ 作为开始值，用弦截法求得的结果见表4-8，比较例6牛顿法的计算结果可以看出，弦截法的收敛速度也是相当快的.

实际上，弦截法具有超线性的收敛性.

表4-8

k	x_k	$x_k - x_{k-1}$
0	0.5	
1	0.6	0.1
2	0.56532	−0.03468
3	0.56709	0.00177
4	0.56714	0.00005

快速弦截法算法实现



输 入 $x_0, x_1,, \varepsilon$,N
$1 \Rightarrow k$
$f(x_0)=0?$
y
n
$x_0 \Rightarrow x_2$
$f(x_1)=0?$
y
n
$x_1 \Rightarrow x_2$
$|f(x_1)-f(x_0)|=0?$
y
n
$x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1)-f(x_0)}(x_1-x_0) \Rightarrow x_2$
$|x_2-x_1|<\varepsilon?$
y
n
$k<N?$
y
n
$k+1 \Rightarrow k$
$x_1 \Rightarrow x_0$
$x_2 \Rightarrow x_1$
$f(x_1) \Rightarrow f(x_0)$
$f(x_2) \Rightarrow f(x_1)$
输出迭代失败标志
输出 x_2
输出奇异标志
输出 x_2
结 束

例题选讲

略