第七章　常微分方程

习题 7—1　一阶微分方程的常见类型及其解法

1.求下列微分方程的通解：

（**1**）$2xy^2\dfrac{dy}{dx}-x^3\dfrac{dy}{dx}=2y^3$；

〖解〗转化：原方程可化为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2y^3}{2xy^2-x^3}$，

识别：齐次方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2(\frac{y}{x})^3}{2(\frac{y}{x})^2-1},\cdots\cdots①\quad 或\quad \frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}-\frac{1}{2}(\frac{x}{y})^3\cdots\cdots②$$

解法：法 **1**（$y=y(x)$）

作未知函数换元 $u=\dfrac{y}{x}$，则 $y=xu,\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$，代入可将①化为

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{2u^3}{2u^2-1}\text{（可分离变量方程），}\cdots\cdots③$$

• 分离变量：$(2u-\dfrac{1}{u})du=\dfrac{dx}{x}$；

• 积分：$u^2-\ln u=\ln x-\ln c$，即②的通解为 $xu=Ce^{u^2}$，

故原方程通解为 $y=Ce^{\frac{y^2}{x^2}}$。

法 **2**（$x=x(y)$）

作未知函数换元 $v=\dfrac{x}{y}$，则 $x=yv,\dfrac{dx}{dy}=v+y\dfrac{dv}{dy}$，代入可将②化为

$$y\frac{dv}{dy}=-\frac{1}{2}v^3\text{（可分离变量方程）}\cdots\cdots④$$

• 分离变量：$\dfrac{dv}{v^3}=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{dy}{y}$；

• 积分：$-\dfrac{1}{2v^2}=-\dfrac{1}{2}\ln y+\dfrac{1}{2}\ln C$，即 $y=Ce^{\frac{1}{v^2}}$。

回代 $v=\dfrac{x}{y}$ 可得原方程通解为 $y=Ce^{\frac{y^2}{x^2}}$ 。■

（**2**）$(y+x^2e^{-x})dx-xdy=0$。

〖解〗原方程可化为 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{y}{x}=xe^{-x}$，一阶线性非齐次微分方程。

解法：常数变易法。

由常数变易法可得原方程通解为 $y=e^{-\int(-\frac{1}{x})dx}(\int xe^{-x}e^{\int(-\frac{1}{x})dx}dx+C)$，即

$$y=Cx-xe^{-x}\text{。}■$$

2. 若连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\int_0^{2x}f(\frac{t}{2})dt+\ln 2$，求 $f(x)$。

〖解〗积分方程一般可经求导化为微分方程，注意可能含有初始条件。

（**1**）积分方程转化为微分方程，注意获取初始条件（如果有的话）：

方程两边对 x 求导：$f'(x)=2f(x)$；　　　　……①

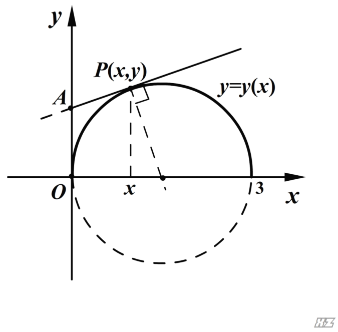
初始条件：$f(0)=\ln 2$。　　　　……②

（**2**）解微分初始值问题：

显然，①的通解为 $f(x)=Ce^{2x}$。

由②可得：$C=\ln 2$，故 $f(x)=\ln 2\cdot e^{2x}$。■

3. 设曲线 L 位于 xOy 平面的第一象限，L 上任一点 P 处的切线与 y 轴总相交，交点记为 A．已知 $\left|\overline{PA}\right|=\left|\overline{OA}\right|$，且 L 过点 $(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$，求 L 的方程.



〖解〗(1) 列方程。

设曲线方程为 $y=y(x)$，$P(x,y)$ 为其上任一点，则

曲线在 $P(x,y)$ 处的切线方程为

$$Y-y=y'(X-x),$$

其中 (X,Y) 为切线上任意点坐标。

取 $X=0$ 可得切线在 y 轴上的截距为 $X=y-xy'$，即 $A(0,y-xy')$。

$\because |PA|^2=x^2+x^2y'^2, |OA|^2=(y-xy')^2=y^2-2xyy'+x^2y'^2$，

$\therefore$ 由 $|PA|=|OA|$ 可得：$x^2=y^2-2xyy'$。

于是，有一阶微分方程初始值问题：

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}, \cdots\cdots①\qquad y|_{x=\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}。\cdots\cdots②$$

（2）解方程。

①是齐次方程，作未知函数换元 $u = \frac{y}{x}$，则①可化为

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}(u - \frac{1}{u}), \cdots\cdots③[可分离变量方程]$$

分离变量 $\frac{2udu}{1+u^2} = -\frac{dx}{x}$，积分可得③的通解为：$\ln(1+u^2) = -\ln x + \ln C$，即 $1+u^2 = \frac{C}{x}$。

回代 $u = \frac{y}{x}$ 可得①的通解为：$1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{C}{x}$，即 $x^2 + y^2 = Cx$。

由 $y|_{x=\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$ 可得：$C = 3$，故所求曲线方程为 $y = \sqrt{3x - x^2}$（$0 < x < 3$）。■

习题 7—2 二阶线性微分方程的理论及其解法

1. 求微分方程 $y'' + 2y' + y = xe^x$ 的通解。

〖解〗二阶线性常系数非齐次微分方程。

（1）求对应齐次方程通解 $Y(x)$：特征值法。

∵特征方程为 $r^2 + 2r + 1 = 0$，特征值为 $r_1 = r_2 = -1$，

∴ $Y(x) = e^{-x}(C_1 + C_2 x)$。

（2）求原非齐次方程的特解 y^*：待定系数法。

∵ $f(x) = xe^x$ 属于“$P_m(x)e^{\lambda x}$”类型：$\lambda = 1$ 不是特征值，$m = 1$，

∴应设 $y^* = (Ax + B)e^x$，则 $y^{*\prime} = (Ax + B + A)e^x$，$y^{*\prime\prime} = (Ax + B + 2A)e^x$，代入原方程，整理可得：$Ax + 2A + B + 2(Ax + B + A) + Ax + B \equiv x$，

比较同次幂系数可得 $\begin{cases} 4A = 1, \\ 4A + 4B = 0, \end{cases}$ 解得 $A = -B = \frac{1}{4}$，故 $y^* = \frac{1}{4}(x-1)e^x$。

于是，由二阶线性微分方程通解结构定理可得原方程通解为

$$y(x)=e^{-x}(C_1+C_2x)+\frac{1}{4}(x-1)e^x \text{。} \blacksquare$$

〖评注〗本题是考试典型题，通过复习应掌握

①会用特征值法解二阶线性常系数齐次方程，主要考填空题：

例如，$y''+2y'+y=0$ 的通解为____________。

还可这样考（逆向思维）

以 $y(x)=e^{-x}(C_1+C_2x)$ 为通解的二阶线性常系数齐次方程为____________。

②会用待定系数法求二阶线性常系数非齐次方程的特解，考试中主要考填空题和选择题：例如，

微分方程 $y''+2y'+y=xe^x$ 的特解形式为 $y^*=$ ____________。

还可这样考

微分方程 $y''+2y'+y=xe^x$ 的特解形式为

（A）　　（B）　　（C）　　（D）

③全面掌握二阶线性常系数微分方程解的理论。

例如，4. 设 y_1,y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y'+P(x)\cdot y=Q(x)$ 的两个特解，若常数 λ,μ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解，$\lambda y_1-\mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解，求 λ 与 μ.

④注意微分方程和平面曲线积分与路径无关、多元微分学、级数等的综合。

2. 设函数 $f(x)$ 二阶可导，$f'(x)$ 是 $f'(x)+2f(x)+e^x$ 的一个原函数，且 $f(0)=0,$ $f'(0)=1$，求 $f(x)$。

〖解〗（1）观察、转化条件：

∵ $f'(x)$ 是 $f'(x)+2f(x)+e^x$ 的一个原函数，

∴由原函数概念可得 $f''(x)=f'(x)+2f(x)+e^x$。

（2）解二阶线性常系数非齐次微分方程初始值问题

$f''(x)-f'(x)-2f(x)=e^x$，　　　……①

$f(0)=0,\ \ f'(0)=1$.　　　……②

• 特征值法：

∵①对应齐次方程的特征方程为 $r^2-r-2=0$，即 $(r+1)(r-2)=0$，

∴①对应齐次方程的通解为 $Y(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$。

• 待定系数法或观察法：①的一个特解为 $y^* = -\frac{1}{2}e^x$。

• ①的通解为 $y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} - \frac{1}{2}e^x$。 $y'(x) = -C_1e^{-x} + 2C_2e^{2x} - \frac{1}{2}e^x$。

• 由初始条件②确定 C_1, C_2：

$\begin{cases} C_1 + C_2 - \frac{1}{2} = 0, \\ -C_1 + 2C_2 - \frac{1}{2} = 1, \end{cases}$ 解得 $C_1 = -\frac{1}{6}, C_2 = \frac{2}{3}$, 故 $y(x) = -\frac{1}{6}e^{-x} + \frac{2}{3}e^{2x} - \frac{1}{2}e^x$。■

〖评注〗“$f'(x)$ 是 $f'(x) + 2f(x) + e^x$ 的一个原函数”可以改为“曲线积分

$$\int_L yf''(x)dx + [f'(x) + 2f(x) + e^x]dy$$

与路径无关”。

习题 7—3 其它类型微分方程的解法

1. 求微分方程 $yy'' = 2y'^2$ 的通解。

〖解〗法 **1**（分离变量法）

原方程可化为 $\frac{y''}{y'} = 2\frac{y'}{y}$（可能丢失 $y' = 0$，即 $y = C$ 的解），积分 $\ln y' = 2\ln y + \ln C_1$，

即 $y' = C_1y^2$，也即 $\frac{y'}{y^2} = C_1$。

再积分可得通解为 $-\frac{1}{y} = C_1x + C_2$，即 $y = -\frac{1}{C_1x + C_2}$。

显然，$y = C$ 可含于 $y = -\frac{1}{C_1x + C_2}$ 中（$C_1 = 0, C = -\frac{1}{C_2}$）。

因此，原方程通解为 $y = -\frac{1}{C_1x + C_2}$。

法 **2**（降阶法）不显含 x 的可降阶方程。

作未知函数换元 $p = y'$，则 $y'' = p\frac{dp}{dy}$，原方程化为 $yp\frac{dp}{dy} = 2p^2$，即

$p(y\frac{dp}{dy} - 2p) = 0$。于是，① $p = 0$：$y' = 0$，$y = C$；

② $y\dfrac{dp}{dy}-2p=0$：$\dfrac{dp}{p}=2\dfrac{dy}{y}$，$\ln p=2\ln y-\ln C_1$，$p=C_1y^2$，即 $\dfrac{dy}{dx}=C_1y^2$，

$\dfrac{dy}{y^2}=C_1dx$，积分可得通解 $-\dfrac{1}{y}=C_1x+C_2$，即 $y=-\dfrac{1}{C_1x+C_2}$。■

2.解初始值问题 $\begin{cases}(1+x^2)y''=2xy',\\ y(0)=1,y'(0)=3.\end{cases}$

〖解〗原方程可化为 $\dfrac{y''}{y'}=\dfrac{2x}{1+x^2}$，积分可得：$\ln y'=\ln(1+x^2)+C_1$。

由 $y'(0)=3$ 可得 $C_1=\ln 3$，故 $y'=3(1+x^2)$。

再积分可得：$y=3x+x^3+C_2$。

由 $y(0)=1$ 可得：$C_2=1$。

于是，$y=3x+x^3+1$。■

注：原方程也可按“不显含 y 的可降阶方程”来解，也可求出通解再由初始条件同时确定两个积分常数的值，但均不如上述解法简单。

【练习】设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，而 $z=f(e^x\sin y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=ze^{2x}$，求 $f(x)$.

〖分析〗多元复合函数求导法则，偏微分方程转化为常微分方程。

〖解〗（1）由复合函数求导法则可得

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot e^x\sin y$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''\cdot(e^x\sin y)^2+f'\cdot e^x\sin y$，

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'\cdot e^x\cos y$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''\cdot(e^x\cos y)^2-f'\cdot e^x\sin y$。

（2）偏微分方程转化为常微分方程

$\because \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=ze^{2x}$，

$\therefore f''\cdot e^{2x}=f\cdot e^{2x}$，即：$f''=f$。[二阶线性常系数齐次微分方程]

于是，$f(x)=C_1e^{-x}+C_2e^x$。■

————————————————————————————————

第八章 向量代数与空间解析几何

习题 8—1 向量及其线性运算

1.已知两点 $B(2,2,\sqrt{2})$ 和 $A(1,3,0)$。

（**1**）求 $\overrightarrow{AB}$ 在 x 轴上的投影；（**2**）求 $\overrightarrow{AB}$ 在 x 轴上的分向量；（**3**）求 $\overrightarrow{AB}$ 的模；

（**4**）求与 $\overrightarrow{AB}$ 平行的单位向量；（**5**）求 $\overrightarrow{AB}$ 的方向角。

〖解〗∵ $\overrightarrow{AB}=\{1,-1,\sqrt{2}\}$，∴（**1**）$prj_x\overrightarrow{AB}=1$；（**2**）$\vec{i}$；

（**3**）$|\overrightarrow{AB}|=2$；（**4**）$\vec{e}=\pm\frac{1}{|\overrightarrow{AB}|}\overrightarrow{AB}=\pm\frac{1}{2}\{-1,1,\sqrt{2}\}$；

（**5**）∵ $\cos\alpha=\frac{1}{2},\cos\beta=-\frac{1}{2},\cos\gamma=\frac{\sqrt{2}}{2}$，∴ $\alpha=\frac{\pi}{3},\beta=\frac{2\pi}{3},\gamma=\frac{\pi}{4}$。■

2.已知向量 $\vec{a}$ 的两个方向余弦为 $\cos\alpha=\frac{2}{7}$，$\cos\beta=\frac{3}{7}$，且 $\vec{a}$ 与 z 轴的方向角为钝角，求 $\cos\gamma$。

〖解〗∵ $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，

∴ $\cos^2\gamma=1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta=1-\frac{4}{49}-\frac{9}{49}=\frac{36}{49}$，即 $\cos\gamma=\pm\frac{6}{7}$。

∵ $\vec{a}$ 与 z 轴的方向角 γ 为钝角，∴ $\cos\gamma=-\frac{6}{7}$。■

3.已知 $\vec{\alpha}=x\vec{i}+5\vec{j}-\vec{k}$，$\vec{\beta}=3\vec{i}+\vec{j}+z\vec{k}$，且 $\vec{\alpha}\ /\!/\ \vec{\beta}$，求 x,z。

〖解〗∵ $\vec{\alpha}/\!/\vec{\beta}\Leftrightarrow\frac{x}{3}=\frac{5}{1}=\frac{-1}{z}$，∴ $x=15,z=-\frac{1}{5}$。■

习题 8—2 向量的乘积

1.设 $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$，求

（**1**）$\vec{a}\cdot\vec{b}$ 及 $\vec{a}\times\vec{b}$；（**2**）$(-2\vec{a})\cdot(3\vec{b})$ 及 $\vec{a}\times2\vec{b}$；（**3**）$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角和余弦；

（**4**）以 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 为邻边的平行四边形面积；（**5**）既垂直于 $\vec{a}$ 又垂直于 $\vec{b}$ 的一个向量；

（**6**）$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{a})$。

〖解〗（1）$\vec{a}\cdot\vec{b}=3-2+2=3$，$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & -2\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=\{5,1,7\}$；

（2）$(-2\vec{a})\cdot(3\vec{b})=-6\vec{a}\cdot\vec{b}=-18$，$\vec{a}\times(2\vec{b})=2\vec{a}\times\vec{b}=\{10,2,14\}$；

（3）$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{3}{\sqrt{14}\sqrt{6}}=\sqrt{\dfrac{3}{28}}$；

（4）$S_{\diamond}=|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{25+1+49}=5\sqrt{3}$；

（5）$\vec{a}\times\vec{b}=\{5,1,7\}$；

（6）$\because\ \vec{b}\times\vec{a}\perp\vec{a}$，$\therefore\ \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{a})=0$。■

2.设 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 均为单位向量，且满足 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，求 $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$。

〖解〗法 **1**

$\because\ \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，

$\therefore$ 分别用 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 点乘上式可得：

$$\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{0}=0,$$

$$\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{0}=0,$$

$$\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{0}=0,$$

三式相加，注意到 $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{b}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{c}=1$，可得：$3+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})=0$，故

$$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=-\frac{3}{2}。$$

法 **2**

$\because\ \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，

$\therefore$

$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})=3+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})=0,$$

即
$$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=-\frac{3}{2}。■$$

习题 8—3　空间曲面

1.求以点 $A(3,2,1)$ 为球心，且与平面 $\pi: x+2y-3z=18$ 相切的球面方程。

〖解〗显然，球半径就是点 A 到平面 π 的距离：

$$R=\frac{|3+2\times 2-3\times 1-18|}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}}=\sqrt{14},$$

故所求球面方程为 $(x-3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=14$。■

2.一平面过原点且平行于向量 $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{k}$ 和 $\vec{b}=3\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$，求此平面方程。

〖解〗法 **1**（点法式）

可取平面法向量为

$$\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 2\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}=\{2,5,-1\},$$

故由点法式得所求平面方程为 $2x+5y-z=0$。

法 **2**（一般式）

因所求平面过原点，故可设其方程为 $Ax+By+Cz=0$，其法向量为 $\vec{n}=\{A,B,C\}$。

又平面平行于向量 $\vec{a}=\{1,0,2\},\vec{b}=\{3,-1,1\}$，故 $\vec{n}\perp\vec{a},\vec{n}\perp\vec{b}$，即 $\vec{n}\cdot\vec{a}=0,\vec{n}\cdot\vec{b}=0,$

也即 $\begin{cases}A+2C=0\\ 3A-B+C=0\end{cases}$，解得：$A=-2C,B=-5C$，代入方程即得所求平面方程为

$$2x+5y-z=0。■$$

3.求平面 π：$2x-2y+z+5=0$ 与各坐标面间夹角的余弦。

〖解〗∵平面 π 的法向量 $\vec{n}=\{2,-2,1\}$，而坐标面 xoy,yoz,zox 的法向量分别为单位向量 $\vec{k},\vec{i},\vec{j}$，

∴ π 与 xoy,yoz,zox 夹角的余弦分别为

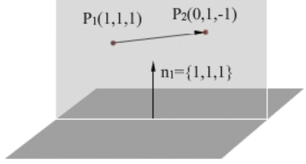
$$\cos(\vec{n},\vec{k})=\frac{\vec{n}\cdot\vec{k}}{|\vec{n}|}=\frac{1}{3},\quad \cos(\vec{n},\vec{i})=\frac{\vec{n}\cdot\vec{i}}{|\vec{n}|}=\frac{2}{3},\quad \cos(\vec{n},\vec{j})=\frac{\vec{n}\cdot\vec{j}}{|\vec{n}|}=-\frac{2}{3}。■$$

〖注〗也可加绝对值。

4.一平面过两点 $P_1(1,1,1)$ 和 $P_2(0,1,-1)$ 且垂直于平面 $x+y+z=0$，求它的方程。

〖解〗法 **1**（点法式）可取所求平面法向量为

$$\vec{n}=\vec{n}_1\times\overrightarrow{P_1P_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -2\end{vmatrix}=\{-2,1,1\},$$



故由点法式可得所求平面方程为 $2(x-1)-(y-1)-(z-1)=0$，即

$$\pi: 2x-y-z=0 。$$

法 **2**（一般式）设所求平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，则有

$$\begin{cases} A+B+C+D=0 & (P_1) \\ B-C+D=0 & (P_2) \\ A+B+C=0 & (\vec{n}\perp\vec{n}_1) \end{cases},$$

解得：$D=0, B=C, A=-2C$，故所求平面方程为

$$\pi: -2x+y+z=0 。$$

法 **3**（混合积）

设 $P(x,y,z)$ 为所求平面上任意点，则由题意可知

$$\overrightarrow{P_1P}=\{x-1,y-1,z-1\}, \overrightarrow{P_1P_2}=\{-1,0,-2\}, \vec{n}_1=\{1,1,1\}$$

共面，故其混合积为零，即 $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$，故 $\pi: 2x-y-z=0$。

法 **4**（平面束）

∵过两点 $P_1(1,1,1)$ 和 $P_2(0,1,-1)$ 的直线方程为 $L: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z+1}{2}$，

∴过 L 的平面束方程为 $\pi_\lambda: 2x-z-1+\lambda(y-1)=0$，其法向量为 $\vec{n}_\lambda=\{2,\lambda,-1\}$。

由所求平面与已知平面垂直可得：$\vec{n}_\lambda=\{2,\lambda,-1\}\perp\vec{n}_1=\{1,1,1\}$，即有

$$\vec{n}_\lambda\cdot\vec{n}_1=2+\lambda-1=0,$$

即 $\lambda=-1$。于是，所求平面方程为 $\pi_{-1}: 2x-y-z=0$。■

习题 8—4 空间曲线

1.求过点 $(1,1,1)$ 且平行于直线 $\begin{cases} x-4z=3, \\ 2x-y-5z=1 \end{cases}$ 的直线方程。

〖解〗法 **1**（对称式）

已知直线的方向向量为

$$\vec{s}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -4\\ 2 & -1 & -5\end{vmatrix}=\{-4,-3,-1\},$$

故由对称式得所求直线方程为

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{1}。$$

法 **2**（一般式）

思路：分别平行于两已知平面且均过点 $(1,1,1)$ 的两平面的交线就是所求直线。

设与 $\pi_1: x-4z=3$ 平行的平面方程为 $\pi_3: x-4z+D_3=0$，则由 $(1,1,1)\in\pi_3$ 得 $D_3=3$，故 $\pi_3: x-4z+3=0$。

同理，设 $\pi_2: 2x-y-5z=1$ 平行的平面方程为 $\pi_4: 2x-y-5z+D_4=0$，由 $(1,1,1)\in\pi_4$ 可得：$D_4=4$，故 $\pi_4: 2x-y-5z+4=0$。

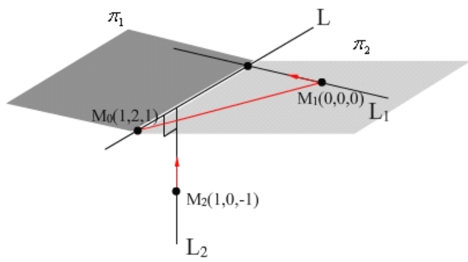
于是，所求直线方程为 $L:\begin{cases} x-4z+3=0\\ 2x-y-5z+4=0\end{cases}$。■

2. 一直线过点 $(1,2,1)$，又与直线 $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=-z$ 相交且垂直于直线 $\frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$，求它的方程。

〖解〗已知

$$L_1: \frac{x}{2}=\frac{y}{1}=-z \to \vec{s}_1=\{2,1,-1\}, M_1(0,0,0)\in L_1,\cdots;$$
$$L_2: \frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1} \to \vec{s}_2=\{3,2,1\}, M_2(1,0,-1)\in L_2,\cdots$$

设所求直线为 L, 且 $M_0(1,2,1)\in L$。



方法 **1**（一般式）

(1)求由点 $M_0(1,2,1)$ 且与直线 L_1 所确定的平面，也即 $M_0(1,2,1)$，$M_1(0,0,0)$，$M_3(-2,-1,1)$ 所确定的平面 π_1：由三点式得其方程为

$$[\overrightarrow{M_1M},\overrightarrow{M_1M_0},\overrightarrow{M_1M_3}]=\begin{vmatrix} x & y & z\\ 1 & 2 & 1\\ -2 & -1 & 1\end{vmatrix}=0,$$

即 $\pi_1: x-y+z=0$；

⑵求过点 $M_0(1,2,1)$ 且与直线 L_2 垂直的平面 π_2：由点法式得其方程为

$$\pi_2: 3(x-1)+2(y-2)+(z-1)=0，$$

即 $\pi_2: 3x+2y+z-8=0$。

⑶由一般式得所求直线方程为：$L:\begin{cases} x-y+z=0 \\ 3x+2y+z-8=0 \end{cases}$。

方法 2（对称式）

• 确定所求直线大方向向量：

法 **1**　设所求直线 L 与已知直线 L_1 的交点为 $M(x,y,z)$，则 L 的方向向量为

$$\vec{s}_L=\overrightarrow{M_0M}=\{x-1,y-2,z-1\}。$$

由 $\vec{s}_L \perp \vec{s}_2, M\in L_1$ 可得：$\begin{cases} 3(x-1)+2(y-2)+(z-1)=0 \\ \dfrac{x}{2}=y=-z \end{cases}$，解得 $M(\frac{16}{7},\frac{8}{7},-\frac{8}{7})$。

于是，$\vec{s}_L=\overrightarrow{M_0M}=\frac{3}{7}\{3,-2,-5\}$。

法 **2**　从几何角度，可取 $\vec{s}_L=(\overrightarrow{M_1M_0}\times\vec{s}_1)\times\vec{s}_2=3\{3,-2,5\}$。

• 由对称式得所求直线方程为

$$L:\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-1}{-5}。■$$

3.求直线 L：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 π：$x-y+2z-1=0$ 上的投影直线方程。

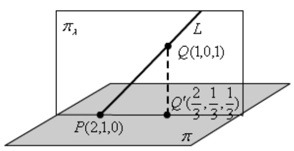
〖解〗法 **1**（平面束）

∵ 过直线 L 的平面束方程为 $\pi_\lambda: x-y-1+\lambda(z+y-1)=0$，其法向量为 $\vec{n}_\lambda=\{1,\lambda-1,\lambda\}$，

而已知平面 π 的法向量为 $\vec{n}=\{1,-1,2\}$，

∴由 $\pi_\lambda\perp\pi$ 可得：$\vec{n}_\lambda\cdot\vec{n}=1-(\lambda-1)+2\lambda=0$，即 $\lambda=-2$，从而，投影柱面（平面）方程为 $\pi_{-2}: x-3y-2z+1=0$。

于是，所求投影直线方程为 $L':\begin{cases} x-3y-2z+1=0 \\ x-y+2z-1=0 \end{cases}$。



法 **2**（两点式）

思路：任取直线 L 上两点 P,Q，求其在已知平面（投影平面）上的投影点 P',Q'，再

由两点式写出投影直线方程。

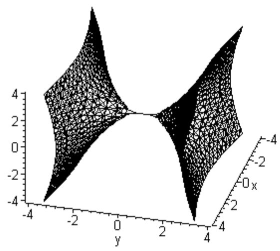
取 $P(2,1,0),Q(1,0,1)$，则易知：$P\in\pi$，$Q\notin\pi$。

过 Q 且垂至于平面 π 的直线方程为 $\pi_P:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$，与 $\pi:x-y+2z-1=0$ 联立可解得其交点为 $Q'(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3})$，故由 $P(P'),Q'$ 写出投影直线方程为

$$L':\frac{x-2}{2-\frac{2}{3}}=\frac{y-1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{z}{-\frac{1}{3}}\text{，即 }L':\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}\text{。}■$$

4.已知曲线 $\begin{cases}y^2=2z,\\x=0,\end{cases}$ 求此曲线分别绕 y 轴、z 轴旋转而成的旋转曲面方程。

〖解〗绕 y 轴：$\Sigma_y:y^2=\pm2\sqrt{x^2+z^2}$，

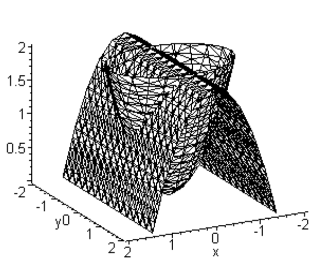


即 $y^4=4(x^2+z^2)$；

绕 z 轴：$\Sigma_z:x^2+y^2=2z$。■

5.求曲面 $z=x^2+2y^2$ 和 $z=2-x^2$ 的交线在 xOy 面上投影柱面和投影曲线的方程。

〖解〗方程联立消去 z 得投影柱面方程为



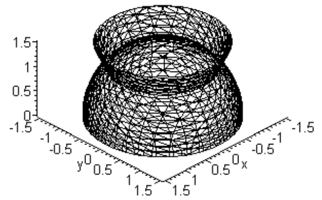
$$H:x^2+y^2=1,$$

故投影曲线为 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\z=0\end{cases}$。■

6.求两曲面 $x^2+y^2+z^2=2$ 和 $z=x^2+y^2$ 的交线在 xOy 面的投影曲线的方程，并作图。

〖解〗方程联立消去 z 得投影柱面方程为

$$H:x^2+y^2=1,$$



故投影曲线为 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\z=0\end{cases}$。■

——

第九章 多元函数微分学

习题 9—1 二元函数的极限与连续

1.已知 $f(x,y)=\ln(x-\sqrt{x^2-y^2})$（$x>y>0$），试求 $f(x+y,x-y)$，并把它表成 $\sqrt{x},\sqrt{y}$ 的表达式。

〖解〗 $f(x+y,x-yy)=\ln(x+y-\sqrt{(x+y)^2-(x-y)^2})$

$=\ln(x+y-\sqrt{4xy})=2\ln(\sqrt{x}-\sqrt{y})$。■

2.求下列函数的极限：

（**1**）$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x+y}{\sqrt{x+y+1}-1}$；（**2**）$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to a}}(1+x)^{\frac{1}{\tan(xy)}}$ $(a\neq0)$。

〖解〗（**1**）原式 $\overset{\text{分母}}{\underset{\text{有理化}}{=}}\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(\sqrt{x+y+1}+1)\overset{\text{连续性}}{=}2$。

（**2**）原式 $=\exp\{\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to a}}\dfrac{\ln(1+x)}{\tan(xy)}\}=\exp\{\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to a}}\dfrac{x}{xy}\}=\exp\{\dfrac{1}{a}\}=e^{\frac{1}{a}}$.■

3. 验证下列极限不存在：

（1）$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$；（**2**）$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2+y^2}{x^2y^2+(2x+y)^2}$。

〖解〗（**1**）取两不同路径，其相应极限值不等。

$$\because \lim_{\substack{x\to0\\y=0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\cdot0}{x^4+0^2}=0，\quad \lim_{\substack{x\to0\\y=x}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^4}{2x^4}=\frac{1}{2}\neq0，$$

$$\therefore \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}\text{ 不存在。}$$

（**2**）

$$\because \lim_{\substack{x\to0\\y=0}}\frac{x^2+y^2}{x^2y^2+(2x+y)^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+0^2}{x^2\cdot0^2+(2x+0)^2}=\frac{1}{4}，$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=x}}\frac{x^2+x^2}{x^2\cdot x^2+(2x+x)^2}=\lim_{x\to0}\frac{2x^2}{x^4+9x^2}=\frac{2}{9}\neq\frac{1}{4}，$$

$$\therefore \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2+y^2}{x^2y^2+(2x+y)^2}\text{ 不存在。}$$ ■

4.下列函数在何处间断：

（1）$z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$；（2）$z=\dfrac{1}{y^2-2x}$.

〖解〗由初等函数及间断点概念可知：

（1）间断点 $(0,0)$；（2）间断线 $y^2=2x$。■

习题 9－2　偏导数与全微分

1.求下列函数的偏导数：

（1）$z=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$；（2）$u=\arctan(x-y)^z$。

〖解〗显函数求偏导。

（1）$\dfrac{\partial z}{\partial x}=1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=1-\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$（对称性）。

（2）$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{1+[(x-y)^z]^2}\cdot z(x-y)^{z-1}\cdot 1$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{1+[(x-y)^z]^2}\cdot z(x-y)^{z-1}\cdot(-1)$，

$\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{1}{1+[(x-y)^z]^2}\cdot(x-y)^z\cdot\ln(x-y)$。■

2.已知 $f(x,y)=y^2+(x-2)\arccos\sqrt{\dfrac{y}{x}}$，求 $f_y(2,y)$。

〖解〗定义法求导。

$\because f(2,y)=y^2$，$\therefore f_y(2,y)=\dfrac{d}{dy}[f(2,y)]=2y$。■

3.设 $z=y^{\ln x}$，求 z''_{xx}，z''_{xy}。

〖解〗$\because z'_x=y^{\ln x}\ln y\cdot\dfrac{1}{x}$，

$\therefore z''_{xx}=y^{\ln x}\ln^2 y\cdot\dfrac{1}{x^2}+y^{\ln x}\ln y\cdot(-\dfrac{1}{x^2})$，$z''_{xy}=\ln x\cdot y^{\ln x-1}\ln y\cdot\dfrac{1}{x}+y^{\ln x}\cdot\dfrac{1}{xy}$。■

4.验证函数 $z=xy+xe^{\frac{y}{x}}$ 满足 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy+z$。

〖解〗法 **1**（偏导数法）

$\because \dfrac{\partial z}{\partial x}=y+e^{\frac{y}{x}}+xe^{\frac{y}{x}}\cdot(-\dfrac{y}{x^2})$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x+xe^{\frac{y}{x}}\cdot\dfrac{1}{x}$，

$$\therefore x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+xe^{\frac{y}{x}}-ye^{\frac{y}{x}}+xy+ye^{\frac{y}{x}}=xy+z.$$

法 **2**（全微分法）

$$\because dz=ydx+xdy+e^{\frac{y}{x}}dx+xe^{\frac{y}{x}}\cdot\frac{xdy-ydx}{x^2},$$

$$\therefore x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=dz|_{\substack{dx=x\\dy=y}}=xy+z。\blacksquare$$

5.求下列函数的全微分：

（**1**）$z=\arctan\dfrac{x+y}{x-y}$；

〖解〗法 **1**（直接全微分法）

$$dz=\frac{1}{1+(\frac{x+y}{x-y})^2}\cdot\frac{(dx+dy)(x-y)-(x+y)(dx-dy}{(x-y)^2}=\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}。$$

法 **2**（偏导数迭加法）此略。$\blacksquare$

（**2**）$u=\ln(x^2-y^2+e^z)$

〖解〗法 **1**（全微分法）$du=\dfrac{1}{x^2-y^2+e^z}(2xdx-2ydy+e^zdz)$。$\blacksquare$

习题 9—3　多元复合函数的求导法则

1.设 $z=\sin(2u+3v),u=xy,v=x^2+y^2$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

〖解〗法 **1**（连锁规则法）

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\cos(2u+3v)\cdot 2\cdot y+\cos(2u+3v)\cdot 3\cdot 2x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\cos(2u+3v)\cdot 2\cdot x+\cos(2u+3v)\cdot 3\cdot 2y。$$

法 **2**（代入法）

$$\because z=\sin[2xy+3(x^2+y^2)],$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=\cos[2xy+3(x^2+y^2)]\cdot(2y+6x),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\cos[2xy+3(x^2+y^2)]\cdot(2x+6y)。$$

法 3（全微分法）

$\because dz=\cos(2u+3v)(2du+3dv)$

$$=\cos(2u+3v)[2(ydx+xdy)+3(2xdx+2ydy)]=\otimes dx+\oplus dy,$$

$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=\otimes, \frac{\partial z}{\partial y}=\oplus$。■

2. 设 $u=x^kF(\frac{z}{x},\frac{y}{x})$，$k$ 为常数，F 具有一阶连续偏导数，证明：

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=ku。$$

〖证〗法 **1**（全微分法）

$\because du=kx^{k-1}Fdx+x^k[F_1\cdot\frac{xdz-zdx}{x^2}+F_2\cdot\frac{xdy-ydx}{x^2}]$，

$\therefore x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=du|_{\substack{dx=x\\dy=y\\dz=z}}=kx^kF=ku$。

法 **2**（偏导数法）此略。■

3.设 $z=f(xy,\frac{x}{y})+g(\frac{y}{x})$，其中，$g$ 具有二阶连续导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

〖解〗$\because \frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+\frac{1}{y}f_2'-\frac{y}{x^2}g'$，

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y(yf_{11}''+\frac{1}{y}f_{12}'')+\frac{1}{y}(yf_{21}''+\frac{1}{y}f_{22}'')+\frac{2y}{x^3}g'+\frac{y^2}{x^4}g''$$

$$=y^2f_{11}''+f_{12}''+f_{21}''+\frac{1}{y^2}f_{22}''+\frac{2y}{x^3}g'+\frac{y^2}{x^4}g''$$

$$=y^2f_{11}''+2f_{12}''+\frac{1}{y^2}f_{22}''+\frac{2y}{x^3}g'+\frac{y^2}{x^4}g''.$$

注：“f 具有二阶连续偏导数”可得 $f_{21}''=f_{12}''$。■

4.设 $z=\frac{y}{f(x^2-y^2)}$，其中 f 可微，求 $\frac{1}{x}z_x'+\frac{1}{y}z_y'$。

〖解〗法 **1**（全微分法）

$\because dz=\frac{fdy-f'\cdot(2xdx-2ydy)}{f^2}$，

$$\therefore \frac{1}{x}z'_x+\frac{1}{y}z'_y=dz\big|_{\substack{dx=1/x\\dy=1/y}}=\frac{1}{yf}=\frac{z}{y^2}\text{。}$$

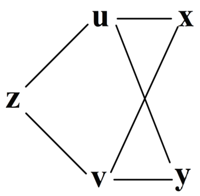
法 2（偏导数法）此略。■

5.设变换 $\begin{cases}u=x-2y,\\v=x+ay\end{cases}$ 可将方程 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 化为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，其中 z 具有二阶连续偏导数，求常数 a。

〖解〗二元换元法。

$$\because \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v},\qquad \to\frac{\partial\otimes}{\partial x}=\frac{\partial\otimes}{\partial u}+\frac{\partial\otimes}{\partial v}\quad\cdots①$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=-2\frac{\partial z}{\partial u}+a\frac{\partial z}{\partial v},\qquad \to\frac{\partial\oplus}{\partial y}=-2\frac{\partial\oplus}{\partial u}+a\frac{\partial\oplus}{\partial v}\quad\cdots②$$



$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)\quad\leftarrow①：\otimes=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\right)+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2};$$

$$\leftarrow\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)+a\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)\quad\leftarrow②：\oplus=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$=-2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\right)+a\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)=-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(a-2)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2};$$

$$\leftarrow\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2\frac{\partial}{\partial u}\left(-2\frac{\partial z}{\partial u}+a\frac{\partial z}{\partial v}\right)+a\frac{\partial}{\partial v}\left(-2\frac{\partial z}{\partial u}+a\frac{\partial z}{\partial v}\right)\quad\leftarrow②：\oplus=\frac{\partial z}{\partial y}=-2\frac{\partial z}{\partial u}+a\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$=\left(4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2a\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\right)+\left(-2a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-4a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\text{。}$$

于是，原方程可化为

$$6\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(a-2)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$-(4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-4a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2})=0,$$

即

$$(10+5a)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(6+a-a^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0。$$

由题意可知 $\begin{cases}10+5a\neq 0,\\ 6+a-a^2=0\end{cases}$，即 $a=3,-2$（舍去 -2，因为这使得 $10+5a=0$），故 $a=3$。■

习题 9—4 隐函数的微分法

1. 设 z 是由方程 $x+y-z=e^z$ 所确定的 x,y 的隐函数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

〖解〗微分所给方程可得

$$dx+dy-dz=e^z dz,$$

即

$$dz=\frac{dx+dy}{e^z+1},$$

故 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{e^z+1},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{e^z+1}$。

于是，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{e^z+1})=-\frac{1}{(e^z+1)^2}\cdot e^z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{e^z}{(e^z+1)^3}$。■

2. 设 F 是任意可微函数，证明：由方程 $ax+by+cz=F(x^2+y^2+z^2)$ 所确定的隐函数满足等式 $(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay$。

〖证〗法 **1**（偏导数法）

设 $G=ax+by+cz-F(x^2+y^2+z^2)$，则

$$G_x=a-2xF',G_y=b-2yF',G_z=c-2zF',$$

故由隐函数求导法可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{G_x}{G_z}=-\frac{a-2xF'}{c-2zF'},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{G_y}{G_z}=-\frac{b-2yF'}{c-2zF'}。$$

从而，$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=-(cy-bz)\frac{a-2xF'}{c-2zF'}-(az-cx)\frac{b-2yF'}{c-2zF'}$

$=bx-ay$。

法 **2**（全微分法）

微分所给方程的得：$adx+bdy+cdz=2F'\cdot(xdx+ydy+zdz)$，……①

取 $dx=cy-bz,dy=az-cx$，则一方面有

$$dz=(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}\text{；……②}$$

另一方面由①可得：$a(cy-bz)+b(az-cx)+cdz=2F'[x(cy-bz)+y(az-cx)+zdz]$，

整理即得 $dz=bx-cy$……③

于是，由②③可得：$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-cy$。■

3.设 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 是由方程组 $\begin{cases}u^2-v+x=0,\\u+v^2-y=0\end{cases}$ 确定的 x,y 的隐函数，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial v}{\partial y}$。

〖解〗在所给方程组中

• 对 x 求导，视 $y=c$，$u=u(x,y),v=v(x,y)$：$\begin{cases}2u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial x}=-1,\\\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}=0\end{cases}$，

解得 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}-1&-1\\0&2v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2u&-1\\1&2v\end{vmatrix}}=-\frac{2v}{4uv+1}\text{。}$$

• 对 y 求导，视 $x=c$，$u=u(x,y),v=v(x,y)$：$\begin{cases}2u\cdot\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}=0,\\\frac{\partial u}{\partial y}+2v\frac{\partial v}{\partial y}=1\end{cases}$，

解得 $$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\begin{vmatrix}2u&0\\1&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2u&-1\\1&2v\end{vmatrix}}=\frac{2u}{4uv+1}\text{。■}$$

4.设 $z=\varphi(u,v)$，φ 具有一阶连续偏导数，且 u,v 是由方程组 $\begin{cases} x=e^u\cos v, \\ y=e^u\sin v \end{cases}$ 确定的 x,y 的函数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$。

〖解〗法 **1**（偏导数法）

由复合函数求导法则可得：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\varphi_u'\dfrac{\partial u}{\partial x}+\varphi_v'\dfrac{\partial v}{\partial x}$。　　　……①

对 x 求导、$y=c$、u,v 均为 x,y 的函数：

$$\begin{cases} 1=e^u\cos v\dfrac{\partial u}{\partial x}-e^u\sin v\dfrac{\partial v}{\partial x}, \\ 0=e^u\sin v\dfrac{\partial u}{\partial x}+e^u\cos v\dfrac{\partial v}{\partial x}, \end{cases} \qquad \cdots\cdots②$$

由②解得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -e^u\sin v \\ 0 & e^u\cos v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^u\cos v & -e^u\sin v \\ e^u\sin v & e^u\cos v \end{vmatrix}}=\frac{\cos v}{e^u},\ \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix} e^u\cos v & 1 \\ e^u\sin v & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^u\cos v & -e^u\sin v \\ e^u\sin v & e^u\cos v \end{vmatrix}}=-\frac{\sin v}{e^u},$$

代入①可得：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\varphi_u'\cos v-\varphi_v'\sin v}{e^u}$。

法 **2**（全微分法）方法较繁，有不必要的计算量，此略。■

5.设 $y=g(x,z)$，而 z 是由方程 $f(x-z,xy)=0$ 所确定的 x,y 的函数，其中 g,f 具有一阶连续偏导数，$f_1'-xf_2'g_2'\neq 0$，求 $\dfrac{dz}{dx}$。

〖解〗微分所给函数及方程可得

$$dy=g_1'dx+g_2'dz, \qquad \cdots\cdots①$$

$$f_1'\cdot(dx-dz)+f_2'\cdot(ydx+xdy)=0, \qquad \cdots\cdots②$$

①代入②消去 dy：$f_1'\cdot(dx-dz)+f_2'\cdot[ydx+x(g_1'dx+g_2'dz)]=0$，

即
$$(f_1'+yf_2'+xf_2'g_1')dx+(xf_2'g_2'-f_1')dz=0$$

解得
$$\frac{dz}{dx}=\frac{f_1'+yf_2'+xf_2'g_1'}{f_1'-xf_2'g_2'}。■$$

习题 9—5　方向导数和梯度

1.求 $z=xe^{xy}$ 在点 $M_0(-2,0)$ 处沿 M_0 到 $M_1(-1,3)$ 方向的方向导数。

〖解〗可微函数：公式法。

• 梯度：$gradz(-2,0)=\{\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial x}\}|_{(-2,0)}=\{e^{xy}+xye^{xy},x^2e^{xy}\}|_{(-2,0)}=\{1,4\}$。

• 单位方向向量：

$\because \vec{l}=\overrightarrow{M_0M_1}=\{1,3\}$，$\therefore \vec{l}^{\,0}=\{\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}}\}$。

• 数量积：$\frac{\partial z}{\partial l}=gradz\cdot\vec{l}^{\,0}=\frac{13}{\sqrt{10}}$。■

2.设 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(2,0)$ 处可微，且在该点处指向 $P_1(2,-2)$ 的方向导数为 1，指向原点的方向导数为 -3，求指向 $P_2(2,1)$ 的方向导数。

〖解〗$\because \vec{l}_1^{\,0}=\overrightarrow{P_0P_1}^{\,0}=\{0,-1\}$，$\vec{l}_0^{\,0}=\overrightarrow{P_0O}^{\,0}=\{-1,0\}$，$\vec{l}_2^{\,0}=\overrightarrow{P_0P_2}=\{0,1\}$，

$\frac{\partial z}{\partial l_1}=-f_y'(2,0)=1$，$\frac{\partial z}{\partial l_0}=-f_y'(2,0)=-3$，

$\therefore f_y'(2,0)=-1$，$f_y'(2,0)=3$。

于是，$\frac{\partial z}{\partial l_2}=f_y'(2,0)=-1$。■

3.求函数 $f(x,y)=e^{\frac{y}{x}}$ 在 $M_0(1,2)$ 处的梯度。

〖解〗由梯度定义可得

$$gradf(1,2)=\{f_x,f_y\}|_{(1,2)}=\{-\frac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}},\frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}\}|_{(1,2)}=\{-2e^2,e^2\}。■$$

4.问 $u(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ 在点 (x,y,z) 处朝什么方向的方向导数最大，并求该方向的方向导数。

〖解〗由方向导数与梯度关系可知：$u(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ 在点 (x,y,z) 处沿梯度方向的方向导数最大，且方向导数为梯度的模。

$\because \vec{l}=gradu=\{\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{b^2},\frac{2z}{c^2}\}$，

$\therefore \frac{\partial u}{\partial l}=2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}$。■

习题 9—6　多元函数的极值

1.求函数 $z=e^{2x}(x+y^2+2y)$ 的极值。

〖解〗可微函数。

• 求一、二阶偏导数：

$z_x=e^{2x}(1+2x+2y^2+4y)$，$z_y=e^{2x}(2y+2)$，

$z_{xx}=e^{2x}(4+4x+4y^2+8y)=A$，$z_{xy}=e^{2x}(4y+4)=B$，$z_{yy}=2e^{2x}=C$。

• 求驻点：

由 $\begin{cases} z_x=0, \\ z_y=0 \end{cases}$ 解得驻点 $(\frac{1}{2},-1)$。

• 判定：

$\because \Delta(\frac{1}{2},-1)=AC-B^2=4e^2>0, C(\frac{1}{2},-1)=2e>0$，

$\therefore z_{\min}=z(\frac{1}{2},-1)=-\frac{e}{2}$。■

注：这里用 C 取代 A 判定极值。

2.求函数 $z=xy(4-x-y)$ 在 $x=0, y=0, x+y=6$ 所围区域 D 上的最大值与最小值。

〖解〗可微函数。

• D 内可能极值：驻点处函数值。

$\because z_x=y(4-x-y)-xy=y(4-2x-y)$，

$z_y=x(4-x-2y)$（对称性），

$\therefore$ 由 $\begin{cases} z_x=0, \\ z_y=0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} y(4-2x-y)=0, \\ x(4-x-2y)=0 \end{cases}$ 可解得函数在 D 内的驻点为 $M_1(\frac{4}{3},\frac{4}{3})$，且 $z(\frac{4}{3},\frac{4}{3})=\frac{64}{27}$。

• D 的边界上可能条件极值：

在 $OA: y=0(0\le x\le 6)$ 上，$z(x,0)=0$；

在 $OB: x=0(0\le y\le 6)$ 上，$z(0,y)=0$；

在 $AB: y=6-x(0\le x\le 6)$ 上，$z(x,6-x)=-2x(6-x)$，

$$z(0,6)=z(6,0)=0，\quad z(3,3)=-18。$$

• 比较选择：

$$M=\max\{\frac{64}{27},0,-18\}=\frac{64}{27}，\quad m=\min\{\frac{64}{27},0,-18\}=-18。■$$

3.从斜边为l的直角三角形中求有最大周长的直角三角形。

〖解〗法 **1**（一元函数最值问题）

•选择自变量，建立目标函数：

设一条直角边长为x，则由勾股定理、周长公式可得：三角形周长为

$$L=l+x+\sqrt{l^2-x^2}\quad(0<x<l)。$$

•求最大值：

$\because L'(x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{l^2-x^2}}\overset{令}{=}0$，驻点 $x=\dfrac{l}{\sqrt{2}}$，

$\therefore$由实际意义可知：等腰直角三角形周长最大。

法 **2**（二元函数条件极值）

设两直角边长分别为x,y，则三角形周长为$L=l+x+y$，约束条件为$x^2+y^2=l^2$。

由拉格朗日乘数法：

设$F=l+x+y+\lambda(x^2+y^2-l^2)$，解方程组

$$\begin{cases}F_x=1+2\lambda x=0,\\F_y=1+2\lambda y=0,\\x^2+y^2=l^2\end{cases}$$

可得可能条件极值点为$(\dfrac{l}{\sqrt{2}},\dfrac{l}{\sqrt{2}})$。

由实际意义可知：等腰直角三角形周长最大。■

4.作一个容积为$\dfrac{9}{2}m^3$的长方体的箱子，其盖及侧面造价为每平方米 **8** 元，箱底造价每平方米 **1** 元，试求造价最低的箱子尺寸。

〖解〗设箱子三度分别为x,y,z，则总造价为$L=8(xy+2yz+2xz)+xy$，约束条件为$xyz=\dfrac{9}{2}$。

拉格朗日乘数法：作

$$F=9xy+16(yz+xz)+\lambda(xyz-\frac{9}{2}),$$

解方程组

$$\begin{cases}F_x=9y+16z+\lambda yz=0,\\F_y=9x+16z+\lambda xz=0,\\F_z=16(x+y)+\lambda xy=0,\\xyz=\dfrac{9}{2}\end{cases}$$

可得 $x=y=2, z=\dfrac{9}{8}$。

由实际意义可知：箱子底面为边长为 2 米的正方形、高为 $\dfrac{9}{8}$ 米，造价最低。■

5. 抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一椭圆，求原点到这椭圆的最长及最短距离。

〖解〗设椭圆上任意点为 $M(x,y,z)$，则 OM 的长度为

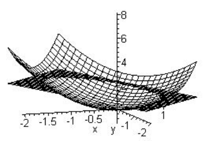
$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

约束条件为 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=1$。

拉格朗日乘数法：

作　$F=x^2+y^2+z^2+\lambda_1(x^2+y^2-z)+\lambda_2(x+y+z-1)$，

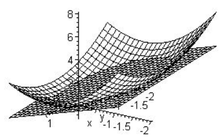
解　$\begin{cases} F_x=2x+2\lambda_1 x+\lambda_2=0, \\ F_y=2y+2\lambda_1 y+\lambda_2=0, \\ F_z=2z-\lambda_1+\lambda_2=0, \\ z=x^2+y^2, \\ x+y+z=1 \end{cases}$



可得可能极值点为 $M_1(-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},2+\sqrt{3})$，$M_2(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2},\dfrac{\sqrt{3}-1}{2},2-\sqrt{3})$。

经计算可得

$$d_{\max}=OM_1=\sqrt{(2+\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}=\sqrt{9+5\sqrt{3}},$$



$$d_{\min}=OM_2=\sqrt{(2-\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}=\sqrt{9-5\sqrt{3}}.$$ ■

注：记上述方程组中各方程为①②③④⑤。

• ①②：$\dfrac{x(2+2\lambda_1)}{y(2+2\lambda_1)}=\dfrac{-\lambda_2}{-\lambda_2}=1$，$x=y$；

• 将 $x=y$ 代入③④：$\begin{cases} z=2x^2, \\ 2x+z=1 \end{cases}$ 可得 $2x^2+2x-1=0$，$x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+8}}{4}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$，

$z=1-2\cdot\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}=1-(-1\pm\sqrt{3})=2\mp\sqrt{3}$，故可能极值点为

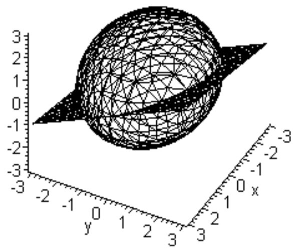
$$M_1(-\frac{1+\sqrt{3}}{2},-\frac{1+\sqrt{3}}{2},2+\sqrt{3}),\quad M_2(\frac{\sqrt{3}-1}{2},\frac{\sqrt{3}-1}{2},2-\sqrt{3})。$$

• $d=\sqrt{2x^2+(2x^2)^2}=\sqrt{z(1+z)}$

习题 9—7　偏导数的几何意义

1.求曲线 $\begin{cases} 2x^2+3y^2+4z^2=18, \\ x+2y-4z=1 \end{cases}$ 在点 $(1,2,1)$ 处的切线及法平面方程。

〖解〗（**1**）求切向量：$\vec{t}=\{1,y'(1),z'(1)\}$



隐函数求导：方程组对 x 求导，视 $y=y(x),z=z(x)$

$$\begin{cases} 4x+6yy'+8zz'=0, \\ 1+2y'-4z'=0, \end{cases}$$

代入 $x=1,y=2,z=1$ 可得

$$\begin{cases} 3y'(1)+2z'(1)=-1, \\ 2y'(1)-4z'(1)=-1, \end{cases}$$

解得 $y'(1)=-\dfrac{3}{8},z'(1)=\dfrac{1}{16}$，故可取切向量为 $\vec{t}=\{16,-6,1\}$。

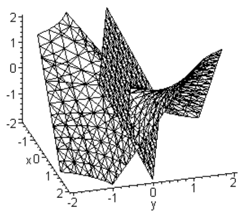
（**2**）由对称式写切线方程，点法式写法平面方程：

所求切线方程为 $\dfrac{x-1}{16}=\dfrac{y-2}{-6}=\dfrac{z-1}{1}$，

法平面方程为 $16(x-1)-6(y-2)+(z-1)=0$。■

2.在曲面 $\Sigma: z=xy$ 上求一点，使得该点处的法线垂直于平面 $\pi_1: x+3y+z=0$，并写出这法线的方程。

〖解〗设切点 $M(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$，则该点处的法向量为



$$\vec{n}=\{z_x,z_y,-1\}=\{y_0,x_0,-1\}。$$

∵法线垂直于 π_1，

∴ $\vec{n}\,//\,\vec{n}_1=\{1,3,1\} \Leftrightarrow \dfrac{y_0}{1}=\dfrac{x_0}{3}=\dfrac{-1}{1}$，即 $x_0=-3,y_0=-1$，从而，$z_0=3$。

于是，所求点为 $(-3,-1,3)$，法线方程为 $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-3}{1}$。■

3.证明：曲面 $xyz=a^3\,(a>0)$ 上任意点处的切平面与三个坐标轴所围成的四面体的体积为一个定值。

〖解〗设切点为 $M(x_0,y_0,z_0)$，则法向量为

$$\vec{n}=\{F_x,F_y,F_z\}=\{y_0z_0,x_0z_0,x_0y_0\}=a^3\{\frac{1}{x_0},\frac{1}{y_0},\frac{1}{z_0}\}。$$

切平面方程为 $\frac{x-x_0}{x_0}+\frac{y-y_0}{y_0}+\frac{z-z_0}{z_0}=0$，即 $\frac{x}{x_0}+\frac{y}{y_0}+\frac{z}{z_0}=3$，它在三坐标轴上的截距分别为 $3x_0,3y_0,3z_0$。

所指四面体体积为 $V=\frac{1}{6}|3x_0|\cdot|3y_0|\cdot|3z_0|=\frac{9}{2}a^3$。■

4. 设直线 $L:\begin{cases}x+y+b=0,\\x+ay-z-3=0\end{cases}$ 在平面 π 上，而平面 π 与曲面 $\Sigma:z=x^2+y^2$ 相切于点 $(1,-2,5)$，求 a,b 之值。

〖解〗法 **1**（线在面上）

（**1**）求切平面方程：

曲面 $\Sigma:z=x^2+y^2$ 在点 $(1,-2,5)$ 处的法向量为

$$\vec{n}=\{2x,2y,-1\}|_{(1,-2,5)}=\{2,-4,-1\},$$

故切平面方程为

$$\pi:2(x-1)-4(y+2)-(z-5)=0,$$

即

$$\pi:2x-4y-z=5。$$

（**2**）确定 a,b 之值：

$\because L\subset\pi$，

$\therefore$ 在直线 L 上任意取两点，例如，$P(-b,0,-b-3),Q(-b-1,1,a-b-4)$，它们都在 π 上，即有 $\begin{cases}-b+3=5,\\-b-2-a=5,\end{cases}$ 故 $a=-5,b=-2$。

法 **2**（平面束）

过 L 的平面束方程为

$$\pi_\lambda:x+ay-z-3+\lambda(x+y+b)=0,$$

即

$$\pi_\lambda:(1+\lambda)x+(1+a)y-z+\lambda b-3=0。\qquad\cdots\cdots①$$

而曲面 $\Sigma:z=x^2+y^2$ 在点 $(1,-2,5)$ 处的切平面方程为

$$\pi:2x-4y-z=5。\qquad\cdots\cdots②$$

由①②可得$\begin{cases}1+\lambda=2,\\1+a=-4,\\3-\lambda b=5,\end{cases}$解得 $a=-5,b=-2$。

法 **3**（线性方程组）

由题意可得$\begin{cases}x+y+b=0,\\x+ay-z-3=0,\\2x-4y-z=5\end{cases}$有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A)=r(A,\vec{b})<3$，故

$$0=\begin{vmatrix}1&1&0\\1&a&-1\\2&-4&-1\end{vmatrix}=-a-5，\quad 0=\begin{vmatrix}1&0&-b\\1&-1&3\\2&-1&5\end{vmatrix}=-b-2，$$

即 $a=-5,b=-2$。■

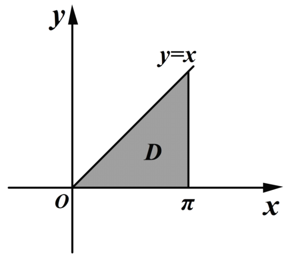
——

第十章 重积分

习题 10—1 利用直角三重积分的计算

1.计算下列二重积分：

（**1**） $\iint\limits_D \sin(x+y)dxdy$， $D: y=0, y=x, x=\pi$ 。



习题10−1.1.（1） 何先枝

〖解〗• 画域：如图；

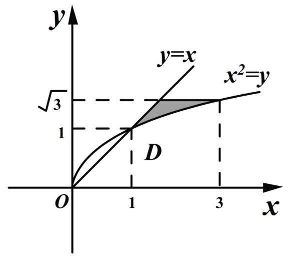
• 选系：直角坐标；

• 化为二次积分（定序，定限）

$$I=\int_0^{\pi}dx\int_0^{x}\sin(x+y)dy=-\int_0^{\pi}\cos(x+y)\big|_{y=0}^{x}\,dx$$

$$=\int_0^{\pi}(\cos x-\cos 2x)dx=0\text{。}\blacksquare$$

（**2**） $\iint\limits_D \frac{y}{x^2+y^2}dxdy$， $D: y^2=x, y=x, y=\sqrt{3}$ 。



习题10−1.1.（2） 何先枝

〖解〗法 **1**（ $Y-$区域）

$$I=\int_1^{\sqrt{3}}ydy\int_y^{y^2}\frac{1}{x^2+y^2}dx=\int_1^{\sqrt{3}}\arctan\frac{x}{y}\Big|_{x=y}^{y^2}dy$$

$$=\int_1^{\sqrt{3}}(\arctan y-\frac{\pi}{4})dy=\int_1^{\sqrt{3}}\arctan y dy-\frac{\pi}{4}(\sqrt{3}-1)$$

$$=(y\arctan y)\big|_1^{\sqrt{3}}-\int_1^{\sqrt{3}}\frac{y}{1+y^2}dy-\frac{\pi}{4}(\sqrt{3}-1)$$

$$=\sqrt{3}\arctan\sqrt{3}-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(1+y^2)\big|_1^{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{4}(\sqrt{3}-1)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{4}\pi-\frac{1}{2}\ln 2=\frac{\sqrt{3}}{12}\pi-\frac{1}{2}\ln 2\text{。}$$

法 **2**（ $X-$区域）需要分割积分区域。

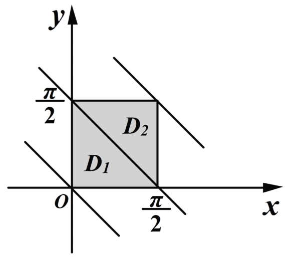
$$I=\int_1^{\sqrt{3}}dx\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{y}{x^2+y^2}dy+\int_{\sqrt{3}}^{3}dx\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{3}}\frac{y}{x^2+y^2}dy\text{（略）。}$$

法 **3**（极坐标）

$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta d\theta\int_{\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}}^{\frac{\sqrt{3}}{\sin\theta}}dr=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(\sqrt{3}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta})d\theta=(\sqrt{3}\theta-\ln\sin\theta)\big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{12}\pi-\frac{1}{2}\ln 2\text{。}\blacksquare$$

〖注〗积分区域是所给三条曲线共同围成的部分！

（3）$\iint\limits_D |\cos(x+y)|\,dxdy$，$D: 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}.$



习题10－1.1.（3） 何先枝

〖解〗典型题：分段函数的二重积分。

用使绝对值为零的曲线 $\cos(x+y)=0$，即 $x+y=\dfrac{\pi}{2}$ 分割积分区域 D 为两部分 D_1, D_2（如图）。

$$|\cos(x+y)| = \begin{cases} \cos(x+y), & 0 \le x+y \le \dfrac{\pi}{2}, \\ -\cos(x+y), & \dfrac{\pi}{2} \le x+y \le \pi, \end{cases}$$

故 $$I = \iint\limits_{D_1} \cos(x+y)\,dxdy - \iint\limits_{D_2} \cos(x+y)\,dxdy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \cos(x+y)\,dy - \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y)\,dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin(x+y)|_{y=0}^{\frac{\pi}{2}-x} - \sin(x+y)|_{y=\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}}]\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{1 - \sin x - [\sin(x+\frac{\pi}{2}) - 1]\}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 - \sin x - \cos x)\,dx = \pi - 2$$。■

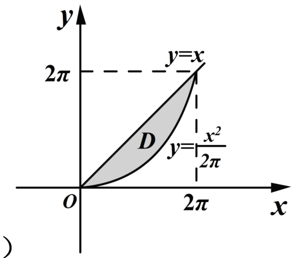
2.计算下列二重积分，必要时交换积分次序：

（1）$\int_0^{2\pi} dy \int_y^{\sqrt{2\pi y}} \dfrac{\sin x}{x}\,dx$。

〖解〗• 观察，反应：$\int \dfrac{\sin x}{x}\,dx$"积不出来"。因此，交换积分顺序是自然的！

• 由二次积分还原积分区域：如图；

• 交换积分顺序可得



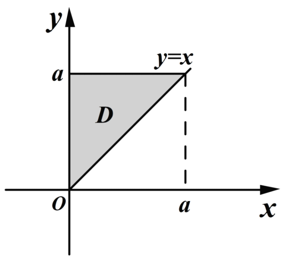
习题10－1.2(1) 何先枝

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx \int_{\frac{x^2}{2\pi}}^{x} dy = \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}(x - \frac{x^2}{2\pi})\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin x(1 - \frac{x}{2\pi})\,dx = \int_0^{2\pi} (\frac{x}{2\pi} - 1)\,d\cos x$$（分部积分）

$$= [(\frac{x}{2\pi} - 1)\cos x]|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos x\,dx = 1$$。■

（2）$\int_0^a dx \int_x^a e^{y^2}\,dy$。



习题10－1. 2.（2） 何先枝

〖解〗• 观察，反应：$\int e^{y^2}\,dy$"积不出来"。

• 由二次积分还原积分区域：如图；

• 交换积分顺序可得

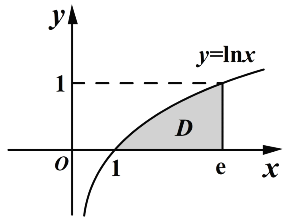
$$I=\int_0^a e^{y^2}dy\int_0^y dx=\int_0^a ye^{y^2}dy=\frac{1}{2}e^{y^2}\Big|_0^a=\frac{1}{2}(e^{a^2}-1)。\blacksquare$$

3．交换下列积分顺序：

（**1**）$\int_1^e dx\int_0^{\ln x}f(x,y)dy$。

〖解〗积分区域如图，交换积分顺序可得

$$I=\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e}f(x,y)dx。\blacksquare$$



习题10—1. 3.（1）　何先枝

（**2**）$\int_{-6}^{2}dx\int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x}f(x,y)dy$。

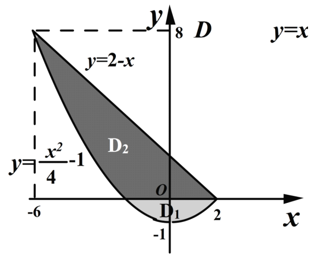
〖解〗积分区域如图，按 $Y-$ 型区域，分割成两部分：

$$D_1:-1\le y\le 0,-2\sqrt{y+1}\le x\le 2\sqrt{y+1};$$

$$D_2:0\le y\le 8,-2\sqrt{y+1}\le x\le 2-y.\mathbf{2}$$

于是，

$$I=\int_{-1}^{0}dy\int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}}f(x,y)dx+\int_0^8 dy\int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y}f(x,y)dx。\blacksquare$$



习题10—1. 3.（2）　何先枝

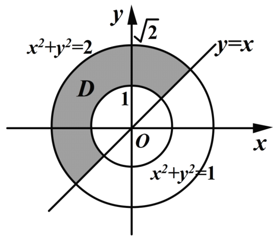
习题 10—2　利用极坐标计算二重积分

1.利用极坐标计算下列二重积分：

（**1**）$\iint\limits_D \frac{xy}{x^2+y^2}dxdy$，$D:y\ge x,1\le x^2+y^2\le 2$.

〖解〗法 **1**（计算）

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\cos\theta\sin\theta d\theta\int_1^{\sqrt{2}}rdr=\frac{1}{2}\sin^2\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\cdot\frac{1}{2}r^2\Big|_1^{\sqrt{2}}=0.$$



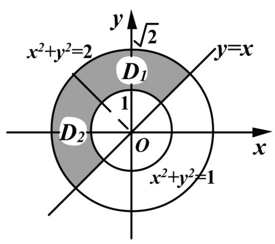
习题10—2. 1 (1)　何先枝

法 2（对称性）

将积分区域 D 分为 D_1,D_2（如图），

$\because$ D_1 关于 y 轴对称，且 $\frac{xy}{x^2+y^2}$ 关于 x 为奇函数，

$$\therefore \iint\limits_{D_1}\frac{xy}{x^2+y^2}dxdy=0。$$



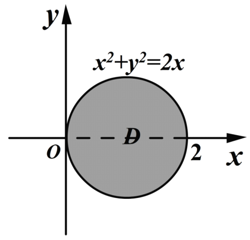
习题10—2. 1 (1)　何先枝

$\because$ D_2 关于 x 轴对称，且 $\frac{xy}{x^2+y^2}$ 关于为 y 奇函数，

$$\therefore \iint\limits_{D_2}\frac{xy}{x^2+y^2}dxdy=0。$$

由可加性可得：$I=\iint\limits_{D_1}\frac{xy}{x^2+y^2}dxdy+\iint\limits_{D_2}\frac{xy}{x^2+y^2}dxdy=0$。■

（2） $\iint\limits_{D}|xy|\,dxdy$，$D: x^2+y^2\le 2x$。



习题10－2. 1 (2)　何先枝

〖解〗∵ D 关于 x 轴对称，$|xy|$ 关于 y 为偶函数，

∴由对称性可得 $I=2\iint\limits_{D_1}xydxdy$，

其中 D_1 是 D 在 x 轴上方区域。

法 **1**　由极坐标可得

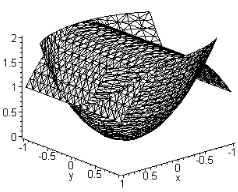
$$I=2\iint\limits_{D_1}xydxdy=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta d\theta\int_0^{2\cos\theta}r^3dr$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta(2\cos\theta)^4d\theta=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\sin\theta d\theta=-\frac{8}{6}\cos^6\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3}。$$

法 2　由直坐标可得

$$I=2\iint\limits_{D_1}xydxdy=2\int_0^2xdx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}ydy=\int_0^2x(2x-x^2)dx=\frac{4}{3}。■$$

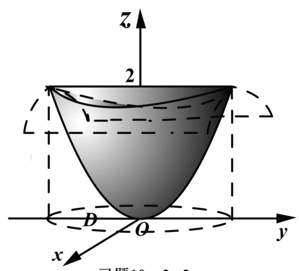
2. 求由曲面 $z=2-x^2, z=x^2+2y^2$ 所为的立体的体积。



〖解〗（1）求空间曲线 $\Gamma:\begin{cases}z=2-x^2,\\ z=x^2+2y^2\end{cases}$ 在坐标面 xy 上的投影，

由此确定立体在 xy 上的投影区域 D，它就是二重积分的积分区域。

消去 z 可得投影柱面方程为 $x^2+y^2=1$，故 $D: x^2+y^2\le 1$。



习题10－2. 2　何先枝

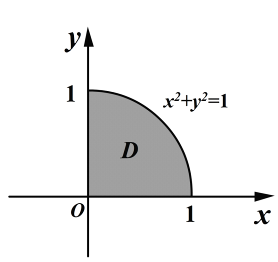
（2）由二重积分的集合意义可得所求体积为

$$V=\iint\limits_{D}[(2-x^2)-(x^2+2y^2)]dxdy=2\iint\limits_{D}(1-x^2-y^2)dxdy$$

$$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(1-r^2)rdr=2\cdot 2\pi\cdot(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})=\pi。■$$

3.选择适当的坐标系计算下列积分：

（1） $\iint\limits_{D}xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$，$D: x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0$。



习题10－2. 3 (1)　何先枝

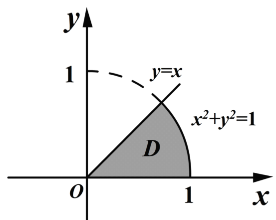
〖解〗由极坐标可得

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta d\theta\int_0^1r^3\sqrt{1-r^2}dr=\frac{1}{2}\sin^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\int_0^1r^3\sqrt{1-r^2}dr$$

$$\overset{r=\sin t}{=}\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\cos^2 t dt=\frac{1}{2}(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 t dt)$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{2!!}{3!!}-\frac{4!!}{5!!})=\frac{1}{15}。■$$

（2）$\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}dxdy$，$D:0\le y\le x,x^2+y^2\le 1$。



习题10－2.3 (2)　何先枝

〖解〗由极坐标可得

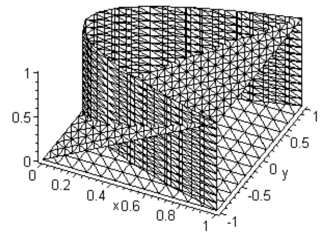
$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta d\theta\int_0^1 rdr=\frac{1}{2}\theta^2\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1}{2}r^2\Big|_0^1=\frac{\pi^2}{64}。■$$

习题 10－3　三重积分的计算

1、计算下列三重积分：

（1）$\iiint\limits_\Omega yzdv$，$\Omega:z=0,z=x,x=1,y^2=x$。

〖解〗法 **1**（直坐标－三次积分）



$$I=\int_{-1}^1 ydy\int_{y^2}^1 dx\int_0^x zdz$$

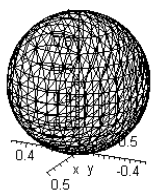
$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 ydy\int_{y^2}^1 x^2dx=\frac{1}{6}\int_{-1}^1 y(1-y^6)dy=0。$$

法 **2**（对称性）

因为积分区域Ω关于xOz面对称，且被积函数yz关于y为奇函数，故$I=0$。■

（2）$\iiint\limits_\Omega\sqrt{x^2+y^2+z^2}dv$，$\Omega:x^2+y^2+z^2\le z$。

〖解〗球坐标。



$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{\cos\varphi}r^3dr=2\pi\cdot\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^4\varphi d\varphi$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot(-\frac{1}{5}\cos^5\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{10}。$$

注：球面的直坐标方程$x^2+y^2+z^2=z$转化为球坐标方程$r=\cos\varphi$。■

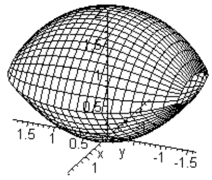
(3) $\iiint\limits_\Omega zdv$，其中Ω是由球面$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$与旋转抛物面$z=\dfrac{x^2+y^2}{3}$所围的立体区域。

〖解〗**法 1（投影法）**

• 画域：如图。

• 描述：$\Gamma:\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2}, \\ z=(x^2+y^2)/3 \end{cases}$（$\Omega$）在 xy 面上的投影（区域）为

$$D: x^2+y^2\le 3\text{。}$$



• 投影法：

$$I=\iint_D dxdy\int_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} zdz=\frac{1}{2}\iint_D z^2\Big|_{z=\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}}\ dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D[(4-x^2-y^2)-(\frac{x^2+y^2}{3})^2]dxdy$$

$$\overset{\text{极坐标}}{=}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}[(4-r^2)-\frac{r^4}{9}]rdr$$

$$=\pi(2r^2-\frac{1}{4}r^4-\frac{1}{54}r^6)\Big|_0^{\sqrt{3}}=\frac{13}{4}\pi\text{。}$$

练习：直接写出三次积分 $I=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}dx\int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}}dy\int_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}}zdz$。

法 2（直坐标一截面法）

注意到被积函数仅是 z（的函数），且曲线 $\Gamma:\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2}, \\ z=(x^2+y^2)/3 \end{cases}$ 在平面 $z=1$ 上（因为在 D 的边界上，各点坐标满足 $x^2+y^2=3$，代入上述两曲面均有 $z=1$），且对任意 $z\in[0,2]$，平行于 xOy 面的截面区域面积为

$$A(z)=\begin{cases} \pi\cdot 3z, & 0\le z\le 1, \\ \pi\cdot(4-z^2), & 1\le z\le 2, \end{cases}$$

故　$$I=\int_0^1 z\cdot 3\pi zdz+\int_1^2 z\cdot(4-z^2)dz=\pi[z^3\Big|_0^1+(2z^2-\frac{z^4}{4})\Big|_1^2]=\frac{13}{4}\pi\text{。}$$

法 3（柱坐标）$D: x^2+y^2\le 3$

用柱坐标描述积分区域： $\Omega: 0\le\theta\le 2\pi, 0\le r\le\sqrt{3}, \frac{r^2}{3}\le z\le\sqrt{4-r^2}$，

故　$$I=\iiint_\Omega zdv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}rdr\int_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}}zdz=2\pi\int_0^{\sqrt{3}}r\cdot\frac{1}{2}z^2\Big|_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}}\ dr$$

$$=\pi\int_0^{\sqrt{3}} r(4-r^2-\frac{r^4}{9})dr=\pi(2r^2-\frac{r^4}{4}-\frac{r^6}{54})|_0^{\sqrt{3}}=\frac{13}{4}\pi$$ 。

法 4（球坐标）需分割区域

Ω =“球顶锥体”+“锥顶旋转抛物面底的立体”。

$$I=\iiint\limits_{\Omega_1}+\iiint\limits_{\Omega_2}$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int_0^2 r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi dr+\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{3\cos\varphi}{\sin^2\varphi}}r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi dr$$

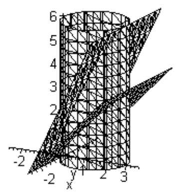
$$=2\pi[\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\varphi\sin\varphi\cdot\frac{1}{4}\cdot 2^4d\varphi+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi\cdot\frac{1}{4}\cdot(\frac{3\cos\varphi}{\sin^2\varphi})^4d\varphi]$$

$$=2\pi[4\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi+\frac{81}{4}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^5\varphi}{\sin^7\varphi}d\varphi]$$

$$=2\pi[2\sin^2\frac{\pi}{3}+\frac{81}{4}(-\frac{1}{6}\cot^6\varphi)|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}]=2\pi[2(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{81}{4}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}^6}]=\frac{13}{4}\pi$$. ■

2、求曲面 $x^2+y^2=2ax, z=\alpha x, z=\beta x$（$a>0,\alpha>\beta>0$）所围立体的体积。

〖解〗柱坐标。



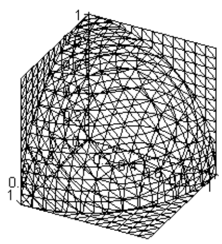
$$V=\iiint\limits_{\Omega}dv=\iint\limits_{D}(\alpha-\beta)xd\sigma=2(\alpha-\beta)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^2dr$$

$$=\frac{2}{3}(\alpha-\beta)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta(2a\cos\theta)^3d\theta=\frac{16}{3}(\alpha-\beta)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta$$

$$=\frac{16}{3}(\alpha-\beta)a^3\cdot\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2}=\pi(\alpha-\beta)a^3$$ 。■

3、设物体占有的空间区域为 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$，点 (x,y,z) 处的体密度为 $\rho(x,y,z)=xyz$，求该物体的质量。

〖解〗柱坐标。

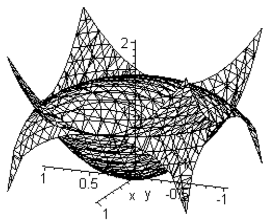


$$M=\iiint\limits_{\Omega}xyzdv=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cdot\sin\theta d\theta\int_0^1 r^3dr\int_0^{\sqrt{1-r^2}}zdz$$

$$=\frac{1}{2}\sin^2\theta|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 r^3(1-r^2)dr=\frac{1}{48}$$ 。■

习题 10—4 重积分的应用

1、求由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$， $z=x^2+y^2$ 所围成立体的表面积。



〖解〗曲面面积。

$\because \Sigma_1: x^2+y^2+z^2=2$（$D: x^2+y^2\le 1$），

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-x^2-y^2}}dxdy;$$

$\Sigma_2: z=x^2+y^2$（$D: x^2+y^2\le 1$），

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\sqrt{1+4(x^2+y^2)}dxdy,$$

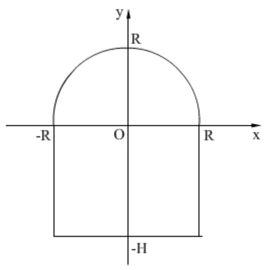
$$\therefore S=\iint_D\left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-x^2-y^2}}+\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\right]dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-r^2}}+\sqrt{1+4r^2}\right)rdr=2\pi\left[-\sqrt{2}\sqrt{2-r^2}+\frac{1}{6}(\sqrt{1+4r^2})^3\right]\Big|_0^1$$

$$=2\pi[(2-\sqrt{2})+\frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)]。■$$

2、在半径为 R 的半圆的直径边上接一个边长为 $2R$ 的矩形，求矩形另一边长，使得形心落在圆心上。

〖解〗平面薄片重心（质心）。



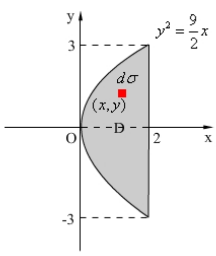
以半圆的直径为 x 轴、圆心为原点建立坐标系，设添加的矩形的高度为 H（如图）。

由对称性与题意知：整个薄板的质心坐标 $\bar{x}=0,\bar{y}=0$。

只需：$\iint_D ydxdy=\int_{-R}^{R}dx\int_{-H}^{0}ydy+\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{R}r^2dr=\frac{2}{3}R^3-RH^2=0$，

故 $H=\sqrt{\frac{2}{3}}R$。■

3、求由均匀薄片 $D: y^2=\frac{9}{2}x, x=2$ 关于 x 轴、y 轴的转动惯量。



〖解〗任取面积元素 $d\sigma\subset D$，质量元为 $\rho d\sigma$，

它位于点 (x,y) 处，关于 x 轴的转动惯量元素为

$y^2\rho d\sigma$，故关于 x 轴的转动惯量为

$$I_x=\rho\iint_D y^2dxdy\overset{\text{对称性}}{=}2\rho\int_0^3 y^2dy\int_{\frac{2y^2}{9}}^2 dx=2\rho\int_0^3 y^2(2-\frac{2y^2}{9})dy$$

$$=\frac{4}{9}\rho\int_0^3 y^2(9-y^2)dy=\frac{4}{9}\rho(3y^3-\frac{1}{5}y^5)|_0^3=\frac{72}{5}\rho。$$

同理可得，

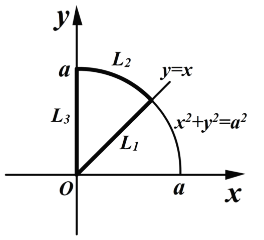
$$I_y=\rho\iint_D x^2dxdy=\rho\int_{-3}^3 dy\int_{\frac{2y^2}{9}}^2 x^2dx=\frac{\rho}{3}\int_{-3}^3(8-\frac{8y^6}{9^3})dy=\frac{96}{7}\rho。■$$

———————————————————————————————————————

第十一章　曲线积分

习题 11—1　对弧长的曲线积分

1、计算 $\oint_L \cos\sqrt{x^2+y^2}\,ds$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$、直线 $y=x$ 与 y 轴在第一象限内围成的图形的边界。



习题11－1.1

〖解〗∵ $L=L_1+L_2+L_3$，

$$L_1: y=x, 0\le x\le \frac{a}{\sqrt{2}}, ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{2}dx,$$

$$L_2: r=a, \frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}, ds=\sqrt{r^2+r_\theta'^2}\,dx=ad\theta,$$

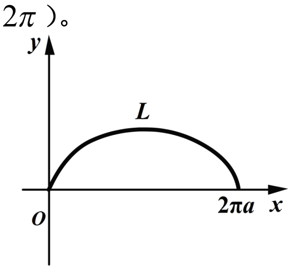
$$L_3: x=0, 0\le y\le a, ds=\sqrt{1+x_y'^2}\,dy=dy,$$

∴由可加性和“一代二换三定限”化为定积分可得

$$I=\int_{L_1}+\int_{L_2}+\int_{L_3}=\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\cos\sqrt{2}x\cdot\sqrt{2}dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos a\cdot ad\theta+\int_0^a\cos ydy$$

$$=2\sin a+\frac{\pi}{4}a\cos a.\ ■$$

2. 求 $\int_L\sqrt{2y}ds$，其中 $L: x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ （$0\le t\le 2\pi$ ）。



习题11－1.2

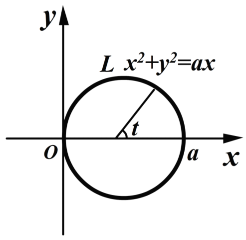
〖解〗∵ $L: x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$， $0\le t\le 2\pi$ ，

$$ds=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt$$

$$=a\sqrt{2(1-\cos t)}dt，\ \sqrt{2y}=\sqrt{2a(1-\cos t)}，$$

$$∴ I=2a\sqrt{a}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)dt=4\pi a\sqrt{a}\ 。■$$

3.计算 $\int_L\sqrt{x^2+y^2}ds$，其中 $L: x^2+y^2=ax\,(a>0)$。



习题11－1－3

〖解〗∵积分曲线的参数方程为

$$L:\begin{cases}x=\dfrac{a}{2}(1+\cos t),\\ y=\dfrac{a}{2}\sin t,\end{cases}（0\le t\le 2\pi ），$$

$$ds=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt=\frac{a}{2}dt,$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{a}{2}\sqrt{(1+\cos t)^2+\sin^2 t}=\frac{a}{2}\sqrt{2(1+\cos t)}=\frac{a}{2}\sqrt{4\cos^2\frac{t}{2}}=a|\cos\frac{t}{2}|,$$

$$\therefore I=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt\overset{u=\frac{t}{2}}{=}a^2\int_0^{\pi}|\cos u|\,du=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos u\,du=2a^2。■$$

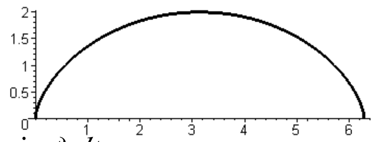
习题 11—2　对坐标的曲线积分

1．计算下列对坐标的曲线积分

（**1**）$\int\limits_L(2a-y)dx+xdy$，$L:x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)$ 从点 $(0,0)$ 到 $(2\pi a,0)$。

〖解〗∵ $L:x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)$，$t:0\to 2\pi$

$$x'=a(1-\cos t),y'=a\sin t,$$



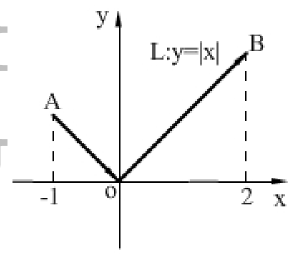
∴“代入定限”化为定积分

$$I=\int_0^{2\pi}\{[2a-a(1-\cos t)]a(1-\cos t)+a(t-\sin t)a\sin t\}dt$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}t\sin t\,dt=-2\pi a^2。■$$

（**2**）$\int\limits_L(x^2+y^2)dx+(x^2-y)dy$，$L:y=|x|$ 从点 $(-1,1)$ 到点 $(2,2)$。

〖解〗∵ $L=L_1+L_2$，



hexianzhi

$L_1:y=-x,x:-1\to 0,dy=-dx$，

$L_2:y=x,x:0\to 2,dy=dx$，

∴由可加性和“代入定限”化为定积分可得

$$I=\int\limits_{L_1}+\int\limits_{L_2}=\int_{-1}^{0}\{[x^2+(-x)^2]+[x^2-(-x)](-1)\}dx+\int_0^2[(x^2+x^2)+(x^2-x)]dx$$

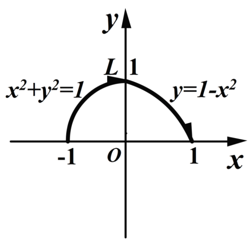
$$=\int_{-1}^{0}(x^2-x)dx+\int_0^2(3x^2-x)dx=\frac{41}{6}。■$$

（**3**）$\int\limits_L xdy-ydx$，L：从 $A(-1,0)$ 经 $x^2+y^2=1$ 上半圆到 $B(0,1)$，再经 $y=1-x^2$ 到 $C(1,0)$。

〖解〗∵ $L=AB+BC$，

$AB:x=\cos t,y=\sin t$，$t:\pi\to\frac{\pi}{2}$；

$BC:y=1-x^2,dy=-2xdx,x:0\to 1$，



习题11—2—1（3）　何先枝

∴由可加性及“代入定限”化为定积分可得

$$I=\int\limits_{AB}+\int\limits_{BC}=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 t+\sin^2 t)dt+\int_0^1[x(-2x)-(1-x^2)]dx=-\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}。■$$

2.在曲线 $x=a\cos t,y=b\sin t$ 上任意点 M 受力 F 的大小等于该点到椭圆中心的距离、方

向指向椭圆中心。试计算

（1）质点沿椭圆位于第一象限从点 $A(a,0)$ 移动到点 $B(0,b)$ 时力 F 所做的功；

（2）质点沿椭圆正向绕行一周力 F 所做的功。

〖解〗由题意可得：$\vec{F}=-\{x,y\}$，故功为 $w=-\int_L xdx+ydy=-\int_L d(\frac{x^2+y^2}{2})$。

（1）$w_1=-\int_{L_1} xdx+ydy=-\frac{x^2+y^2}{2}\Big|_{(a,0)}^{(0,b)}=-\frac{b^2-a^2}{2}$。

（2）$w_2=-\int_{L_2} xdx+ydy=-\frac{x^2+y^2}{2}\Big|_{(a,0)}^{(a,0)}=0$。■

〖评注〗本平面曲线积分与路径无关。

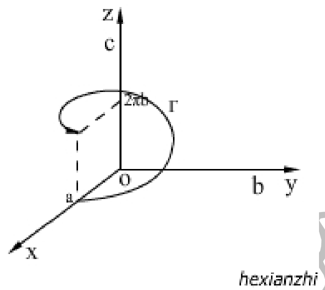
3. 计算 $\int_\Gamma ydx+zdy+xdz$，$\Gamma: x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt$ 从 $t=0$ 到 $t=2\pi$。

〖解〗∵ $\Gamma: x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt$，$t:0\to 2\pi$，

∴按“代入定限”化为定积分可得

$$I=\int_0^{2\pi}[a\sin t\cdot(-a\sin t)+bt\cdot a\cos t+a\cos t\cdot b]dt$$

$$=\int_0^{2\pi}(-a^2\sin^2 t+abt\cos t+ab\cos t)dt=-\pi a^2。■$$



习题 11—3　格林公式

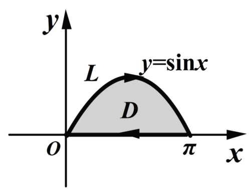
1. 利用格林公式计算下列曲线积分

（1）$\oint_L e^x(1-\cos y)dx+e^x(1+\sin y)dy$，其中 L 是区域 $D: 0\le y\le \sin x, 0\le x\le \pi$ 正向边界曲线。

〖解〗闭曲线情形。

∵ $P=e^x(1-\cos y), Q=e^x(1+\sin y)$，

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=e^x(1+\sin y), \frac{\partial P}{\partial y}=e^x\sin y,$$



习题11—3— 1(1)　何先枝

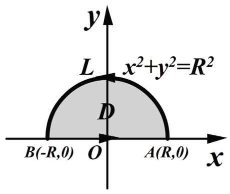
∴由格林公式可得

$$I=\iint_D e^x dxdy=\int_0^\pi e^x dx\int_0^{\sin x}dy=\int_0^\pi e^x\sin x dx=\frac{e^\pi+1}{2}.■$$

（2）$\int_L \frac{y^2}{\sqrt{R^2+x^2}}dx+[4x+2y\ln(x+\sqrt{R^2+x^2})]dy$，其中 L 是从 $(R,0)$ 到 $(-R,0)$ 上半圆周 $y=\sqrt{R^2-x^2}$。

〖解〉非闭曲线情形。

添加“ $BA: y=0, x: R\to -R$ ”与 L 围成区域 D，



习题11－3－1(2) 何先枝

$\because P=\dfrac{y^2}{\sqrt{R^2-x^2}}, Q=4x+2y\ln(x+\sqrt{R^2-x^2})$，

$\therefore \dfrac{\partial Q}{\partial x}=4+\dfrac{2y}{\sqrt{R^2+x^2}}\ \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{2y}{\sqrt{R^2+x^2}}.$

由格林公式可得

$$\oint_{L+BA}=\iint_D 4dxdy=4\cdot\frac{\pi}{2}R^2=2\pi R^2\text{。}$$

而 $$\int_{BA}\overset{\text{垂直性}}{=}\int_{BA}\frac{y^2}{\sqrt{R^2+x^2}}dx=\int_R^{-R}\frac{0^2}{\sqrt{R^2+x^2}}dx=0\text{，}$$

故 $I=\oint_{L+BA}-\int_{BA}=2\pi a^2$ 。■

（3）$\int_L (e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-mx)dy$，其中 L 为由点 $A(a,0)$ 到 $O(0,0)$ 的任意有向曲线。

〖解〗法 1（格林公式）非闭曲线情形。

添加“ $OA: y=0, x: 0\to a$ ”与 L 围成区域 D，则由格林公式可得

$$\oint_{L+OA}=\iint_D 0dxdy=0\text{。}$$

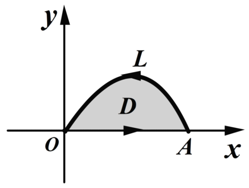
而 $I=-\int_{OA}=-\int_{OA}(e^x\sin y-my)dx=-\int_0^a(e^x\sin 0-m\cdot 0)dx=0$ 。

〖评注〗利用格林公式将“任意”曲线 L 上的积分转化为“具体”的曲线 OA 上的积分。

法 2（与路径去关）

$\because P=e^x\sin y-my, Q=e^x\cos y-mx$，

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=e^x\cos y-m=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ （$(x,y)\in R^2$），



习题11－3－1(3) 何先枝

$\therefore$曲线在全平面内与路径无关。

因此，取新路径 $AO: y=0, x: a\to 0$ 可得

$$I=\int_{AO}=\int_{AO}(e^x\sin y-my)dx=\int_0^a(e^x\sin 0-m\cdot 0)dx=0\text{。}$$

法 3（原函数）

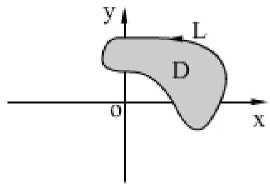
$\because (e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-mx)dy$

$$=(e^x \sin y dx + e^x \cos y dy) - m(y dx + x dy) = d(e^x \sin y - mxy),$$

$$\therefore I = \int_{(a,0)}^{(0,0)} (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - mx)dy$$

$$= (e^x \sin y - mxy)\Big|_{(a,0)}^{(0,0)} = 0。■$$

2. 计算 $\int_L \dfrac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}$，其中 L 是平面上任意一条不经过原点的正向简单闭曲线。

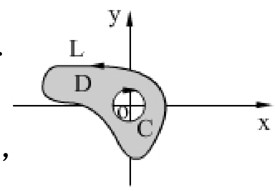


〖解〗$\because P = \dfrac{x-y}{x^2+y^2}, Q = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$，

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-(x+y)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}\quad（x^2+y^2 \neq 0），$$

$\therefore$(1) 当 L 不环绕原点时，由格林公式可得 $I=0$；

(2) 当 L 不环绕原点时，此时原点是奇点，需“挖奇点”．为此，作闭曲线



$C: x^2+y^2=a^2$（$a>0$ 足够小以使 C 含于 L 内），顺时针方向，

与 L 围成区域 D（复连域），由格林公式可得 $\oint_{L+C} = 0$，从而

$$I = \oint_{C_{逆}} = \int_0^{2\pi} \frac{a(\cos t - \sin t)(-a\sin t) + a(\cos t + \sin t)a\cos t}{a^2} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi。■$$

习题 11－4　平面曲线积分与路径无关的条件

1、证明：平面曲线积分 $I = \int_L \dfrac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 在右半平面 $G: x>0$ 内与路径无关，并计算

$$J = \int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}。$$

〖证〗(1) 判定曲线积分 I 与路径无关：

$$\because P = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, Q = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{xy}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} = \frac{\partial P}{\partial y}\quad（(x,y)\in G: x>0），$$

$\therefore$ 平面曲线积分 $I = \int_L \dfrac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 在右半平面 $G: x>0$ 内与路径无关。

(2) 求曲线积分 J：

法 1（凑微分+原函数法）

$$\because \frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{d(x^2+y^2)}{2\sqrt{x^2+y^2}}=d\sqrt{x^2+y^2}\text{，}$$

$$\therefore J=\int_{(1,0)}^{(6,8)}\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{x^2+y^2}\,\Big|_{(1,0)}^{(6,8)}=10-1=9\text{。}$$

法 2（选择新路径计算）

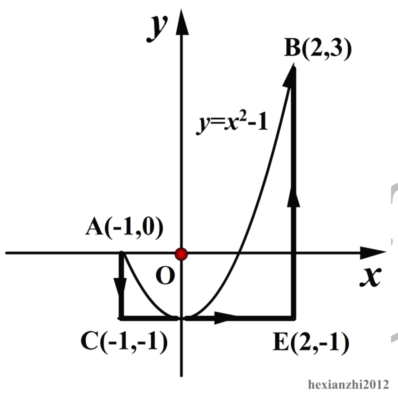
取积分路径为折线 $A(1,0)\to B(6,0)\to C(6,8)$ 可得

$$J=\int_{(1,0)}^{(6,8)}\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\int_1^6 dx+\int_0^8\frac{ydy}{\sqrt{6^2+y^2}}=5+\sqrt{6^2+y^2}\,\Big|_0^8=9\text{。}\blacksquare$$

2. 计算 $I=\int\limits_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中 L 是从点 $A(-1,0)$ 沿抛物线 $y=x^2-1$ 到点 $B(2,3)$ 的曲线弧。

〖解〗**典型题**

（1）判无关：



$$\because P=\frac{-y}{x^2+y^2},Q=\frac{x}{x^2+y^2}\text{，}$$

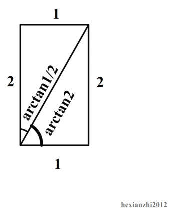
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{x^2+y^2-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}\text{，}$$

$\therefore$ 曲线积分 $I=\int\limits_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ 在不含原点的单连域内（例如，剪去正半 y 轴所得单连域 G）与积分路径无关。

（2）选路径：

选取新积分路径为折线 $AC+CE+EB$（如图），由可加性、垂直性和“代入定限”化为定积分可得：

$$I=\int\limits_{AC}+\int\limits_{CE}+\int\limits_{EB}=\int_0^{-1}\frac{-1}{(-1)^2+y^2}dy+\int_{-1}^{2}\frac{-(-1)}{x^2+(-1)^2}dx+\int_{-1}^{3}\frac{2}{2^2+y^2}dy$$



$$=-\arctan y\,\Big|_0^{-1}+\arctan x\,\Big|_{-1}^{2}+\arctan\frac{y}{2}\,\Big|_{-1}^{3}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\arctan 2+\frac{\pi}{4}+\arctan\frac{3}{2}+\arctan\frac{1}{2}=\pi+\arctan\frac{3}{2}\text{。}\blacksquare$$

〖注〗• $\arctan 2+\arctan\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}$（如图）。

• 新路径选取原则：与原路径共处于同一个单连域内；与原路径合围不环绕奇点；较原路径易于计算。

3. 已知平面曲线积分

$$I=\int_L [y-5ye^{-2x}f(x)]dx+e^{-2x}f(x)dy$$

在全平面内与积分路径无关，且 $f(0)=\frac{6}{5}$，求 $f(x)$，计算

$$J=\int_{(1,0)}^{(2,3)}[y-5ye^{-2x}f(x)]dx+e^{-2x}f(x)dy。$$

〖解〗**典型题**

（1）平面曲线积分与路径无关转化为微分方程初始值问题：

∵平面曲线积分在全平面内与积分路径无关，

∴ $\frac{\partial}{\partial y}[y-5ye^{-2x}f(x)]=\frac{\partial}{\partial x}[e^{-2x}f(x)]$（$(x,y)\in R^2$），即

$$1-5e^{-2x}f(x)=e^{-2x}[f'(x)-2f(x)],$$

也即，$f'(x)+3f(x)=e^{2x}$。

（2）解微分方程初始值问题：

$$f'(x)+3f(x)=e^{2x}, \qquad \cdots\cdots①$$

$$f(0)=\frac{6}{5}。 \qquad \cdots\cdots②$$

法 1（一阶线性非齐次微分方程）由常数变易法可得①的通解为

$$f(x)=e^{-\int 3dx}(\int e^{2x}e^{\int 3dx}dx+C)=e^{-3x}(\frac{1}{5}e^{5x}+C)=Ce^{-3x}+\frac{1}{5}e^{2x},$$

由初始条件②可得 $C=1$，故所求 $f(x)=e^{-3x}+\frac{1}{5}e^{2x}$。

法 2（一阶线性常数非齐次微分方程）

特征值法：

∵特征方程为 $r+3=0$，特征值为 $r=-3$，

∴对应齐次方程通解为 $F(x)=Ce^{-3x}$。

待定系数法：

∵右端项 e^{2x} 中 $\lambda=2$ 不是特征值，可设特解形式为 $f^*=Ae^{2x}$，代入①可得

$$2A+3A=1，\ A=\frac{1}{5},$$

∴ $f^*=\frac{1}{5}e^{2x}$。

于是，由线性微分方程解的结构定理可得①的通解为 $f(x)=e^{-3x}+\frac{1}{5}e^{2x}$。

由初始条件②可得 $C=1$，故所求 $f(x)=e^{-3x}+\frac{1}{5}e^{2x}$。■

4. 选择常数 a,b 使得 $(2ax^3y^3-3y^2+5)dx+(3x^4y^2-2bxy-4)dy$ 是某个二元函数

$u(x,y)$ 在全平面内的全微分，并求 $u(x,y)$ 。

〖解〗（1）定系数：

$\because P=2ax^3y^3-3y^2+5, Q=3x^4y^2-2bxy-4$，

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=12x^3y^2-2by, \dfrac{\partial P}{\partial y}=6ax^3y^2-6y$ ，

$\therefore 12x^3y^2-2by=6ax^3y^2-6y$，比较系数可得 $\begin{cases}12=6a,\\-2b=-6,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=2,\\b=3.\end{cases}$

（2）求原函数：

法 1（凑微分法）求全微分的逆向思维

$\because (4x^3y^3-3y^2+5)dx+(3x^4y^2-6xy-4)dy$

$=(4x^3y^3dx+3x^4y^2dy)-(3y^2dx+6xydy)+5dx-4dy$（分组法）

$=(y^3dx^4+x^4dy^3)-3(y^2dx+xdy^2)+5dx-4dy$

$=d(x^4y^3)-3d(xy^2)+d(5x-4y)$

$=d(x^4y^3-3xy^2+5x-4y)$，

$\therefore u(x,y)=x^4y^3-3xy^2+5x-4y=C$。

法 2（偏积分法）

法 3（求积公式法）

5.判别下列中哪些是全微分方程，并求全微分方程的通解。

（1）$(x\cos y+\cos x)y'-y\sin x+\sin y=0$；

（2）$(x^2+y^2)dx+xydy=0$ 。

〖解〗（1）原方程可化为 $(x\cos y+\cos x)dy+(-y\sin x+\sin y)dx=0$，

$\because P=-y\sin x+\sin y, Q=x\cos y+\cos x$，

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\cos y-\sin x=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ （$(x,y)\in R^2$），

$\therefore$原方程是全微分方程。

经分组凑微分可得

$(x\cos ydy+\sin ydx)+(\cos xdy-y\sin xdx)$

$=d(x\sin y+y\cos x)$，

故原方程通解为 $x\sin y + y\cos x = C$。■

注：也可利用偏积分法或求积公式法求得原函数。

（2）$\because P = x^2 + y^2, Q = xy$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x} = y \neq 2y = \dfrac{\partial P}{\partial y}$，

$\therefore$该方程不是全微分方程。■

习题 11—5　曲线积分的应用

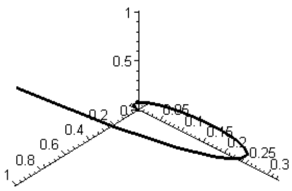
1．求曲线 $x = e^{-t}\cos t, y = e^{-t}\sin t, z = e^{-t}$（$0 < t < +\infty$）的长度。

〖解〗$\because \Gamma: x = e^{-t}\cos t, y = e^{-t}\sin t, z = e^{-t}$（$0 < t < +\infty$），

$$x' = -e^{-t}(\sin t + \cos t), y = e^{-t}(\cos t - \sin t), z = -e^{-t},$$

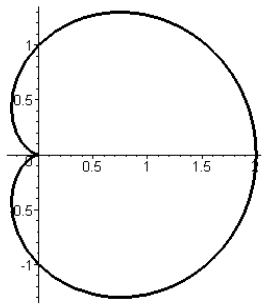
$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = e^{-2t}[(\sin t + \cos t)^2 + (\cos t - \sin t)^2 + 1] = 3e^{-2t},$$

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt = \sqrt{3}e^{-t}dt,$$



$$\therefore s = \int_\Gamma ds = \sqrt{3}\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = -\sqrt{3}e^{-t}|_0^{+\infty} = \sqrt{3}.$$ ■

2. 求质量均匀心脏线 $r = a(1+\cos\theta)$（$0 \le \theta \le 2\pi$）的质心。



〖解〗设质心坐标为 $(\bar{x}, \bar{y})$，由对称性可知：$\bar{y} = 0$。

$\because L: r = a(1+\cos\theta)$（$0 \le \theta \le 2\pi$）

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\theta = \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$= a\sqrt{2(1+\cos\theta)}\,d\theta = 2a\sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta = 2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta$$（不要丢了绝对值符号！）

$$\therefore s = \oint_L ds = 2a\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta = 4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta = 8a\sin\frac{\theta}{2}|_0^{\pi} = 8a,$$

$$M_y = \oint_L xds \overset{\text{对称性}}{=} 2\int_{L_上} xds = 2\int_0^{\pi} a(1+\cos\theta)\cos\theta\cdot 2a\cos\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$= 4a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}d\theta = 8a^2\int_0^{\pi}2\cos^2\frac{\theta}{2}(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1)\cos\frac{\theta}{2}d(\frac{\theta}{2})$$

$$= 16a^2(2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 tdt - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 tdt) = 16a^2(2\cdot\frac{4!!}{5!!} - \frac{2!!}{3!!}) = 16a^2(\frac{16}{15} - \frac{2}{3}) = \frac{96}{15}a^2,$$

从而，$\bar{x}=\dfrac{M_y}{s}=\dfrac{96}{15}a^2/8a=\dfrac{12}{15}a=\dfrac{4}{5}a$，即质心为$(\dfrac{4}{5}a,0)$。■

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

第十二章　曲面积分

习题 12—1　对面积的曲面积分

1．计算 $\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$，其中 Σ 为圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1$ 所围圆锥体的整个边界曲面。

〖解〗$\because \Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$，

$$\Sigma_1: z=1,(x,y)\in D: x^2+y^2\le 1, dS=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy=dxdy,$$

$$\Sigma_2: z=\sqrt{x^2+y^2},(x,y)\in D: x^2+y^2\le 1, dS=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy=\sqrt{2}dxdy,$$

$\therefore$ 由可加性和“一代二换三投影”化为二重积分可得

$$I=\iint\limits_{\Sigma_1}+\iint\limits_{\Sigma_2}=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)dxdy+\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\sqrt{2}dxdy$$

$$=(1+\sqrt{2})\iint\limits_{D}(x^2+y^2)dxdy\overset{\text{极坐标}}{=}(1+\sqrt{2})\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr$$

$$=(1+\sqrt{2})\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2})。$$

〖思考〗

• Σ_1 只能向 xOy 投影，其投影区域面积非零，因此，$\iint\limits_{\Sigma_1}$ 只能化为 x,y 的二重积分；

• Σ_2

若向 xOy 投影，则不需要分割，且投影区域 D 上二重积分易算，因此，上述选择化为 x,y 的二重积分是比较简单的；

若向 yOz 或 zOx 投影，则需要分割，计算较为繁琐些。大家可以练习一下，对比体会。

• 被积函数改为

$f=x^2+y^2+x$ →利用对称性可得：$\iint\limits_{\Sigma}xdS=0$；

$f=x^2+y^2-z^2$ →利用积分曲面方程代入简化可得：$\iint\limits_{\Sigma_2}(x^2+y^2-z^2)dS=0$；

• 从不同角的解释积分意义：

密度函数为 $\rho(x,y,z)=x^2+y^2$ 的圆锥体外壳的质量；

均匀（$\rho=1$）的圆锥体外壳关于 z 轴的转动惯量，等等。■

2. 求 $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}dS$，其中 Σ 为圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 介于 $z=0$ 与 $z=H$ 之间的部分。

〖解〗显然，积分曲面不能向 xOy 投影。

（1）利用对称性简化

$\because$ Σ 关于 xOz 面对称，且被积函数关于 y 为偶函数，

$$\therefore I = 2\iint_{\Sigma_1} \frac{dS}{x^2+y^2+z^2}。$$

（2）化为二重积分

$\because$ $\Sigma_1: y=\sqrt{R^2-x^2}, (x,z)\in D: -R\le x\le R, 0\le z\le H,$

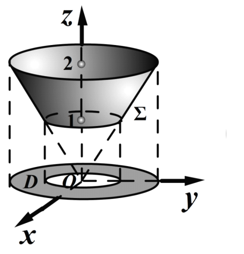
$$dS=\sqrt{1+y_x'^2+y_z'^2}\,dxdz=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dxdz,$$

$$\therefore I=2\iint_D \frac{1}{R^2+z^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dxdz=2\int_{-R}^{R}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx\int_0^H\frac{1}{R^2+z^2}dz$$

$$=4R\arcsin\frac{x}{R}\Big|_0^R\cdot\frac{1}{R}\arctan\frac{z}{R}\Big|_0^H=2\pi\arctan\frac{H}{R}。$$

注：若没利用对称性，则向 xOz 面（yOz）投影化为二重积分时，需要分割积分曲面。■

3. 求 $\iint_\Sigma \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dS$，其中 $\Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}$（$1\le z\le 2$）。



习题12—1—3

〖解〗$\because$ $\Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}$，$(x,y)\in D: 1\le x^2+y^2\le 2$，

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\sqrt{2}\,dxdy,$$

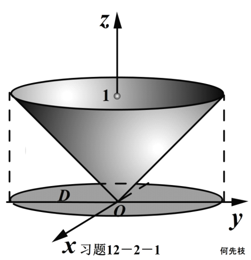
$$\therefore I \overset{\text{一代二换}}{\underset{\text{三投影}}{=}} \iint_D \frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\sqrt{2}\,dxdy \overset{\text{极坐标}}{=} \sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2 e^r dr$$

$$=2\sqrt{2}\pi(e^2-e)。■$$

习题 12—2 对面积的曲面积分

1．计算 $\iint_\Sigma (x^2+y^2)dzdx+zdxdy$，其中 $\Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}$（$0\le z\le 1$）的下侧。

〖解〗典型题。



习题12—2—1

法 1（分面积分法）直接化为二重积分

• $\iint_\Sigma (x^2+y^2)dzdx$：

$\because$ 需分割积分曲面：$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$，

$\Sigma_1: y=\sqrt{z^2-x^2},(x,z)\in D: 0\le z\le 1,-z\le x\le z$，右侧；

$\Sigma_2: y=-\sqrt{z^2-x^2},(x,z)\in D: 0\le z\le 1,-z\le x\le z$，左侧，

∴由可加性与“一代二投三定号”化为二重积分可得

$$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)dzdx=\iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2)dzdx+\iint_{\Sigma_2}(x^2+y^2)dzdx$$

$$=+\iint_D z^2dzdx-\iint_D z^2dzdx=0\text{。}$$

• $\iint_{\Sigma} zdxdy$：

∵ $\Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}$，$(x,y)\in D: x^2+y^2\le 1$，下侧，

$$\therefore \iint_{\Sigma} zdxdy=-\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy \overset{\text{极坐标}}{=} -\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2dr=-\frac{2}{3}\pi\text{。}$$

于是，$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)dzdx+zdxdy=-\frac{2}{3}\pi$。

法 2（转换投影面法）

∵ $\Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}$（$(x,y)\in D: x^2+y^2\le 1$）上任意点 $M(x,y,z)$ 处的向下法向量为

$$\vec{n}=\{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},-1\},$$

$\therefore dzdx=\dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma}dxdy=-\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$，于是，

$$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)dzdx+zdxdy=\iint_{\Sigma}[(x^2+y^2)(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})+z]dxdy$$

$$\overset{\substack{\text{一代二投}\\ \text{三定号}}}{=} -\iint_D(-y\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2})dxdy \overset{\text{对称性}}{=} -\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=-\frac{2}{3}\pi\text{。}$$

法 3（高斯公式法）非闭曲面。

添加平面片“$\Sigma_1: z=1,(x,y)\in D: x^2+y^2\le 1,$ 上侧”与 Σ 围成 Ω，由高斯公式可得

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}=+\iiint_{\Omega}[\frac{\partial}{\partial x}(0)+\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)+\frac{\partial}{\partial z}(z)]dv=\iiint_{\Omega}(2y+1)dv$$

$$=2\iiint_{\Omega}ydv+\iiint_{\Omega}dv=0+\frac{1}{3}\pi=\frac{1}{3}\pi\text{（对称性，几何意义）。}$$

而

$$\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2+y^2)dzdx+zdxdy \overset{\text{垂直性}}{=} \iint\limits_{\Sigma_1} zdxdy \underset{\text{三定号}}{\overset{\text{一代二投}}{=}} +\iint\limits_{D} 1dxdy=\pi,$$

故 $I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=\frac{1}{3}\pi-\pi=-\frac{2}{3}\pi.$ ■

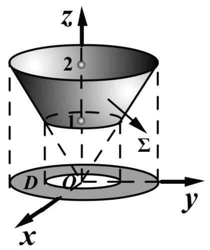
〖评注〗高斯公式是首选最简单的方法。

2. 将对坐标的曲面积分

$$\iint\limits_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy$$

化为对面积的曲面积分，再计算其值，其中 $\Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}\ (1\le z\le 2)$ 下侧。

〖解〗关键：积分曲面指定侧任意点处的单位法向量。



习题12－2－2　　何先枝

$\because \Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}\ (1\le z\le 2)$ 上任意点 $M(x,y,z)$ 处

向下的法向量为 $\vec{n}=\{x,y,-z\}$，单位化得单位法向量为

$$\vec{n}^0=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\{x,y,-z\}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\},$$

$\therefore$ 由两类曲面积分之间关系可得

$$\iint\limits_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy=\iint\limits_{\Sigma}\frac{x^2+y^2-z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dS \underset{\text{方程代入}}{\overset{\text{积分曲面}}{=}} 0.$$ ■

习题 12—3 高斯公式及其应用

1. 计算 $\oiint\limits_{\Sigma} 4zxdydz-2zdzdx+(1-z^2)dxdy$，其中 Σ 是平面 $z=2$ 与曲面 $z=\frac{x^2+y^2}{2}$ 所围立体的表面外侧。

〖解〗闭曲面。

由高斯公式可得

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(4z+0-2z)dv=2\iiint\limits_{\Omega}zdv \overset{\text{截面法}}{=} 2\int_0^2 z\cdot\pi\cdot 2zdz=\frac{32}{3}\pi.$$ ■

2. 计算 $\iint\limits_{\Sigma} xzdydz+yzdzdx+x^2dxdy$，其中 Σ 是上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的内侧。

〖解〗典型题。非闭曲面。

添加“$\Sigma': z=0,(x,y)\in D: x^2+y^2\le a^2$, 上侧”与 Σ 围成 Ω。

由高斯公式可得

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma'}=\iiint\limits_{\Omega}(z+z+0)dv=-2\iiint\limits_{\Omega}zdv \overset{\text{截面法}}{=} -2\int_0^a z\cdot\pi(a^2-z^2)dz=-\frac{\pi}{2}a^4.$$

而 $\iint\limits_{\Sigma'} xzdydz + yzdzdx + x^2 dxdy \overset{\text{垂直性}}{=} \iint\limits_{\Sigma'} x^2 dxdy \underset{\text{三定号}}{\overset{\text{一代二投}}{=}} \iint\limits_{D} x^2 dxdy$

$\underset{\text{对称性}}{\overset{\text{轮换}}{=}} \dfrac{1}{2}\iint\limits_{D}(x^2+y^2)dxdy \overset{\text{极坐标}}{=} \dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^3 dr = \dfrac{\pi}{4}a^4$，

故 $I = \oiint\limits_{\Sigma+\Sigma'} - \iint\limits_{\Sigma'} = -\dfrac{\pi}{2}a^4 - \dfrac{\pi}{4}a^4 = -\dfrac{3\pi}{4}a^4$。■

3.计算 $\iint\limits_{\Sigma} \dfrac{xz^2dydz + (x^2y - z^3)dzdx = (2xy + y^2 z)dxdy}{x^2+y^2+z^2}$，$\Sigma$：$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 外侧。

〖解〗（**1**）利用积分曲面方程简化

$$I = \frac{1}{a^2}\iint\limits_{\Sigma} xz^2dydz + (x^2y - z^3)dzdx = (2xy + y^2 z)dxdy。$$

（**2**）高斯公式

添加“$\Sigma': z = 0, (x, y) \in D: x^2 + y^2 \le a^2$, 下侧”与 Σ 围成 Ω。

由高斯公式可得

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma'} = \iiint\limits_{\Omega}(z^2+x^2+y^2)dv \overset{\text{球坐标}}{=} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi \int_0^a r^4 dr = \frac{2}{5}\pi a^5。$$

而 $\iint\limits_{\Sigma'} xz^2dydz + (x^2y - z^3)dzdx + (2xy + y^2 z)dxdy = \iint\limits_{\Sigma'}(2xy + y^2 z)dxdy$

$$= -2\iint\limits_{D} xydxdy = 0，$$

故 $I = \dfrac{1}{a^2}\cdot\dfrac{2}{5}\pi a^5 = \dfrac{2}{5}\pi a^3$。■

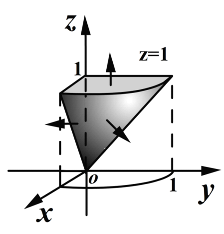
4. 已知流体的流速 $\vec{v} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$，求由平面 $z = 1, x = 0, y = 0$ 和锥面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 所围的立体 Ω 向外流出的流量（设流体密度为 **1**）。

〖解〗设立体 Ω 的外表面为 Σ，则所求流量为

$\Phi = \oiint\limits_{\Sigma} xydydz + yzdzdx + zxdxdy$（高斯公式）

$= \iiint\limits_{\Omega}(y+z+x)dv$（轮换对称：$\iiint\limits_{\Omega} xdv = \iiint\limits_{\Omega} y$）

$= 2\iiint\limits_{\Omega} xdv + \iiint\limits_{\Omega} zdv$。



习题12-3-4 何先枝

由柱面坐标可得：

$$\iiint\limits_{\Omega} xdv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta \int_0^1 r^2 dr \int_r^1 dz = 1\cdot\int_0^1 r^2(1-r)dr = \frac{1}{12}，$$

由截面法可得：

$$\iiint\limits_{\Omega} z dv = \int_0^1 dz \iint\limits_{D_z} dxdy = \int_0^1 z \cdot \frac{\pi}{4} z^2 dz = \frac{\pi}{16}。$$

于是，$\Phi = \frac{1}{6} + \frac{\pi}{16}$。■

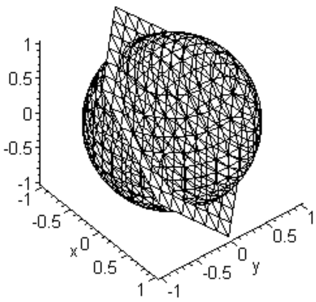
习题 12—4 斯托克斯公式及其应用

---

1. 利用斯托克斯公式计算 $\oint\limits_{\Gamma} ydx + zdy + xdz$，其中 $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 从 z 轴正向看 Γ 沿逆时针方向。

〖解〗取有向曲面 $\Sigma: z = -x - y,$ 上侧，由斯托克斯公式可得

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint\limits_{\Sigma} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} dS$$



$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint\limits_{\Sigma} [(0-1) - (1-0) + (0-1)] dS$$

$$= -\sqrt{3} \iint\limits_{\Sigma} dS \overset{\text{几何意义}}{=} -\sqrt{3}\pi a^2。$$

〖注〗如直接化为定积分，需要先将积分曲线的参数方程写出来，而这比较困难。■

2. 设数量函数 $u = u(x, y, z)$ 具有二阶连续偏导数，求

（1） $gradu$；（2） $div(gradu)$；（3） $rot(gradu)$。

〖解〗（1） $gradu = \{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\}$；

（2） $div(gradu) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$；

（3） $rot(gradu) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} = \{0,0,0\} = \vec{0}$。■

第十三章　无穷级数

习题 13—1 常数项级数的概念与性质

1. 判断下列级数的敛散性：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+3^n}{n^2\cdot 3^n}$；

〖解〗重要级数+级数性质。

观察：通项 $\dfrac{n^2+3^n}{n^2\cdot 3^n}=\dfrac{1}{3^n}+\dfrac{1}{n^2}$。

$\because \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$ 是收敛的几何级数（$q=\dfrac{1}{3}$），$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 是收敛的 $p-$级数（$p=2>1$），

$\therefore$ 由收敛级数性质可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+3^n}{n^2\cdot 3^n}$ 收敛。■

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}$；

〖解〗法 1（定义法）

$\because \dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{3n-1}-\dfrac{1}{3n+2})$，

$\therefore S_n=\dfrac{1}{3}[(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5})+(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{8})+\cdots+(\dfrac{1}{3n-1}-\dfrac{1}{3n+2})]$

$=\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3n+2})\to\dfrac{1}{6}$（$n\to\infty$），即原级数收敛，且和为 $\dfrac{1}{6}$。

法 2（比较法—不等式）

$\because \dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}\le\dfrac{1}{9n^2}$（$n\ge 1$），且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，

$\therefore$ 由比较法可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}$ 收敛。

法 3（比较法—极限）

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}}{\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{1}{9}$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，

$\therefore$ 由比较法可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}$ 收敛。■

（3） $\sum_{n=1}^{\infty} n\tan\frac{\pi}{n}$。

〖解〗∵ $\lim_{n\to\infty} n\tan\frac{\pi}{n} = \pi \neq 0$，

∴由级数收敛必要条件可得：$\sum_{n=1}^{\infty} n\tan\frac{\pi}{n}$ 发散。■

2. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(a_{n+1}-a_n)$ 收敛。

〖证〗设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列为 S_n， $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(a_{n+1}-a_n)$ 的部分和数列为 T_n，则

∵ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛， $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$， ∴ $\lim_{n\to\infty} S_n = s$。

∵ $T_n = 2(a_2-a_1)+3(a_3-a_2)+\cdots+(n+1)(a_{n+1}-a_n) = -a_1 - S_n + (n+1)a_{n+1}$，

∴ $\lim_{n\to\infty} T_n = -a_1 - s$，即 $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(a_{n+1}-a_n)$ 收敛，且和为 $-s-a_1$。■

习题 13—2 正项级数及其审敛法

1. 利用比较法判定下列级数的敛散性：

（1） $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{2}{n})$；

〖解〗观察：想起 $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$（$x\to 0$）。

∵ $1-\cos\frac{2}{n} \sim \frac{1}{2}(\frac{2}{n})^2 = \frac{2}{n^2}$（$n\to\infty$），且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，

∴由比较法（极限形式）可得：原级数收敛。■

（2） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)n^3}}$。

〖解〗观察：想起 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4/3}}$ 收敛的 $p-$级数（$p=\frac{4}{3}>1$）。

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt[3]{(n+1)n^3}}}{\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^4}}}=1$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{4/3}}$ 收敛，

$\therefore$ 由比较法（极限形式）可得：原级数收敛。■

注：由比较法（不等式形式）也可以。

2. 利用比值法或根值法判定下列级数的敛散性：

（1） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{(2n)!}$，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(2n)!}$。

〖解〗$\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\cdot\dfrac{(2n)!}{[2(n+1)]!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2(2n+1)}(1+\dfrac{1}{n})^n=0\cdot e=0<1$，

$\therefore$ 由比值法可得：原级数收敛，从而有级数收敛的必要条件可得：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(2n)!}=0$。■

（2） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln n)^n}$。

〖解〗$\because \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln n}=0<1$，由根值法可得：原级数收敛。■

习题 13—3 绝对收敛与条件收敛

1. 判别下列级数是绝对收敛、条件收敛还是发散：

（1） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$；

〖解〗$\because$ 绝对值级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$ 是发散的 $p-$ 级数（$p=\dfrac{1}{3}<1$），

而由莱布尼兹判别法可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ 收敛，

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ 条件收敛。■

（2） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{3}-1}{n^2}$；

〖解〗原级数的绝对值级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\sin\frac{n\pi}{3}}{n^2}$，

$\because \frac{1-\sin\frac{n\pi}{3}}{n^2}\le\frac{2}{n^2}$（$n\ge1$），且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，

$\therefore$ 由比较法可得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\sin\frac{n\pi}{3}}{n^2}$ 收敛，从而，原级数绝对收敛。■

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n n!}{n^n}$；

〖解〗原级数的绝对值级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$，

$\because \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{2^{n+1}(n+1)!}{2^n n!}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{2}{e}<1$（$n\to\infty$），

$\therefore$ 由比值法可得：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$ 收敛，从而，原级数绝对收敛. ■

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{\sqrt{n(n+1)}}$。

〖解〗$\because \cos n\pi=(-1)^n$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 发散（比较法），但由莱布尼兹判别法可得

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{\sqrt{n(n+1)}}$ 收敛，

$\therefore$ 原级数条件收敛。■

习题 13—4 幂级数

1. 求下列幂级数的收敛半径和收敛域：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n\cdot5^n}$；

〖解〗收敛半径为

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 5^{n+1}}{n\cdot 5^n}=5。$$

当 $x-2=-5$，即 $x=-3$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛；

当 $x-2=5$，即 $x=7$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，

于是，原幂级数的收敛域为 $[-3,7)$。■

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})2^n x^{2n}$；　　　　……①

〖解〗法 1（换元）作 $t=x^2$，幂级数①化为 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})2^n t^n$。　　……②

②的收敛半径为

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})2^n}{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})2^{n+1}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{2},$$

当 $t=-1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})2^n(-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ 发散（通项极限不存在），

当 $t=1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})2^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ 发散（通项极限不存在），故②的收敛域为 $-\frac{1}{2}<t<\frac{1}{2}$。

从而，由 $-\frac{1}{2}<x^2<\frac{1}{2}$ 可得幂级数①的收敛域为 $(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$。

法 2（比值法）

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})2^{n+1}x^{2(n+1)}}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})2^n x^{2n}}$$

$$=2x^2\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}=2x^2\begin{cases}<1, & \text{幂级数绝对收敛，}\\ >1, & \text{幂级数发散，}\end{cases}$$

即当 $|x|<\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，幂级数绝对收敛；当 $|x|>\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，幂级数发散，故收敛半径为

$R=\frac{1}{\sqrt{2}}$。

当 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，级数均发散。于是，原幂级数的收敛域为 $(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$。■

2. 求下列幂级数的和函数：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}2nx^{2n-1}$；

〖解〗设和函数为 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2nx^{2n-1}$，则逐项积分可得

$$\int_0^x S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\frac{x^2}{1-x^2}\ （-1<x<1）。$$

注意，当 $x=\pm1$ 时，级数 $\pm\sum_{n=1}^{\infty}2n$ 发散，故收敛域为 $(-1,1)$。

求导可得

$$S(x)=(\frac{x^2}{1-x^2})'=\frac{2x}{(1-x^2)^2}\ （-1<x<1）。■$$

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{3}}{(2n+1)3^{n+1}}$ 的和。

〖解〗设和函数 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$，则逐项求导可得

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{-x^2}{1+x^2}\ （-1<x<1）。$$

积分可得

$$S(x)=-\int_0^x\frac{x^2}{1+x^2}dx+S(0)=\arctan x-x\ （-1<x<1）。$$

注意到当 $x=\pm1$ 时，$\pm\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$ 均收敛（莱布尼兹判别法），$\arctan x-x$ 也单侧连续，故

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\arctan x-x\ （-1\le x\le 1）。$$

取 $x=\frac{1}{\sqrt{3}}\in[-1,1]$ 可得：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{3}}{(2n+1)3^{n+1}}=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{\sqrt{3}}$。■

习题 13—5 函数的幂级数展开

1. 将函数 $f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$ 展成 x 的幂级数。

〖解〗间接法。

$$\because f(x)=\frac{1}{4}[\ln(1+x)-\ln(1-x)]+\frac{1}{2}\arctan x-x,$$

$$f'(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}-1$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}-1=\frac{1}{1-x^4}-1=\frac{x^4}{1-x^4}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{4(n+1)}\quad(-1<x<1),$$

$\therefore$ 逐项积分可得 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+5}}{4n+5}$（$-1<x<1$）。

注意，$f(x)$ 在 $x=\pm1$ 处无定义，故它们不是幂级数的收敛点。■

2. 将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}$ 展成关于 $x-1$ 的幂级数。

〖解〗间接法。

$$f(x)=\frac{1}{(x+1)(x+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2+(x-1)}-\frac{1}{4+(x-1)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{4}}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-1}{2}\right)^n-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-1}{4}\right)^n\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^{2n+1}}\right)(x-1)^n\quad(|x-1|<2)。■$$

习题 13—6 傅立叶级数

1. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，且

$$f(x)=\begin{cases}x, & -\pi<x<0,\\ 0, & 0\le x\le\pi,\end{cases}$$

将 $f(x)$ 展成以 2π 为周期的傅立叶级数，分别画出 $f(x)$ 与和函数 $S(x)$ 的图形，并指出其

异同点。

〖解〗（1）计算傅立叶系数

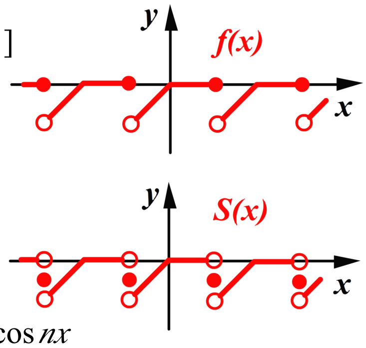
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\cos nx dx=\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{0}x d\sin nx \quad （\to a_0 \text{需单独算！}）$$

$$=\frac{1}{\pi n}[(x\sin nx)|_{-\pi}^{0}-\int_{-\pi}^{0}\sin nx dx]=\frac{1}{\pi n^2}[0+\cos nx|_{-\pi}^{0}]$$

$$=\frac{1-\cos n\pi}{\pi n^2}=\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi n^2}, & n=1,3,5,\cdots,\\ 0, & n=2,4,6,\cdots,\end{cases}$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x dx=\frac{1}{2\pi}x^2|_{-\pi}^{0}=-\frac{\pi}{2},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\sin nx dx=-\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{0}x d\cos nx$$



习题13－6－1　　何先枝

$$=-\frac{1}{\pi n}[(x\cos nx)|_{-\pi}^{0}-\int_{-\pi}^{0}\cos nx dx]=-\frac{1}{n}\cos n\pi=\frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

（2）运用收敛定理，写出傅立叶展开式

$$f(x)=-\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx] \quad （x\in R，\ x\neq\pm\pi,\pm3\pi,\cdots）。$$

注：$S(x)=\begin{cases}f(x), & x\neq(2k+1)\pi,\\ -\dfrac{\pi}{2}, & x=(2k+1)\pi,\end{cases}$ （$k\in Z$）。■

2. 将函数 $f(x)=|x|+2$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展成以 2π 为周期的傅立叶级数。

〖解〗∵ $f(x)$ 为偶函数，∴ $f(x)$ 的傅立叶级数是余弦级数。

$$\because a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}(x+2)\cos nx dx=\frac{2}{n\pi}\int_{0}^{\pi}(x+2)d\sin nx$$

$$=\frac{2}{n\pi}[(x+2)\sin nx|_{0}^{\pi}-\int_{0}^{\pi}\sin nx dx]=$$

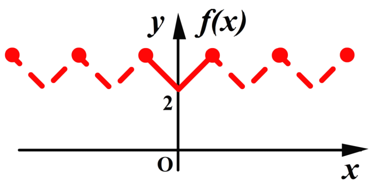
$$=\frac{2}{n^2\pi}\cos nx|_{0}^{\pi}=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]=\begin{cases}-\dfrac{4}{n^2\pi}, & n=1,3,5,\cdots,\\ 0, & n=2,4,6,\cdots,\end{cases}$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}(x+2)dx=\frac{1}{\pi}(x^2+4x)|_{0}^{\pi}=\frac{\pi^2+4\pi}{\pi}=\pi+4,$$

∴由收敛定理可得

$$f(x)=2+\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x \quad （-\pi\le x\le\pi）。■$$

注：取 $x=0$ 可得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$。



习题13－6－2　　何先枝

3. 将函数 $f(x)=x-1\ (0\le x\le 2)$ 展成以 4 为周期的余弦级数。

〖解〗所给函数定义在半周期上，为此，作偶延拓，展成余弦级数。

$$\because\ a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\int_0^2(x-1)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{2}{n\pi}\int_0^2(x-1)d\sin\frac{n\pi x}{2}$$

$$=\frac{2}{n\pi}[(x-1)\sin\frac{n\pi x}{2}|_0^2-\int_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}dx]=\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}|_0^2$$

$$=\frac{4}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]=\begin{cases}-\dfrac{8}{n^2\pi^2}, & n=1,3,5,\cdots,\\ 0, & n=2,4,6,\cdots,\end{cases}$$

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx=\int_0^2(x-1)dx=\frac{(x-1)^2}{2}|_0^2=0\text{，}$$

∴由收敛定理可得

$$f(x)=-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}\text{（}0\le x\le 2\text{）。}■$$