计算方法

第2章 数值积分

胡 敏

合肥工业大学 计算机与信息学院

jsjxhumin@hfut.edu.cn

uhnim@163.com

第 2 章　数值积分

1．教学内容：

- 代数精度概念及其与插值公式的关系
- 梯形公式、辛普公式及其余项
- 复化梯形公式和复化辛普生公式及应用
- 龙贝格公式及应用
- 梯形公式递推化算法流程及程序实现
- 数值微分的中点方法及应用

2．重点难点：

代数精度的概念、插值型的求积公式、牛顿-柯特斯公式、数值积分的误差估计。

引　言

$$F'(x) = f(x)$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

牛顿-莱伯尼兹公式

(1) 被积函数f(x)并不一定能够找到用初等函数的有限形式表示的原函数F(x)，例如：

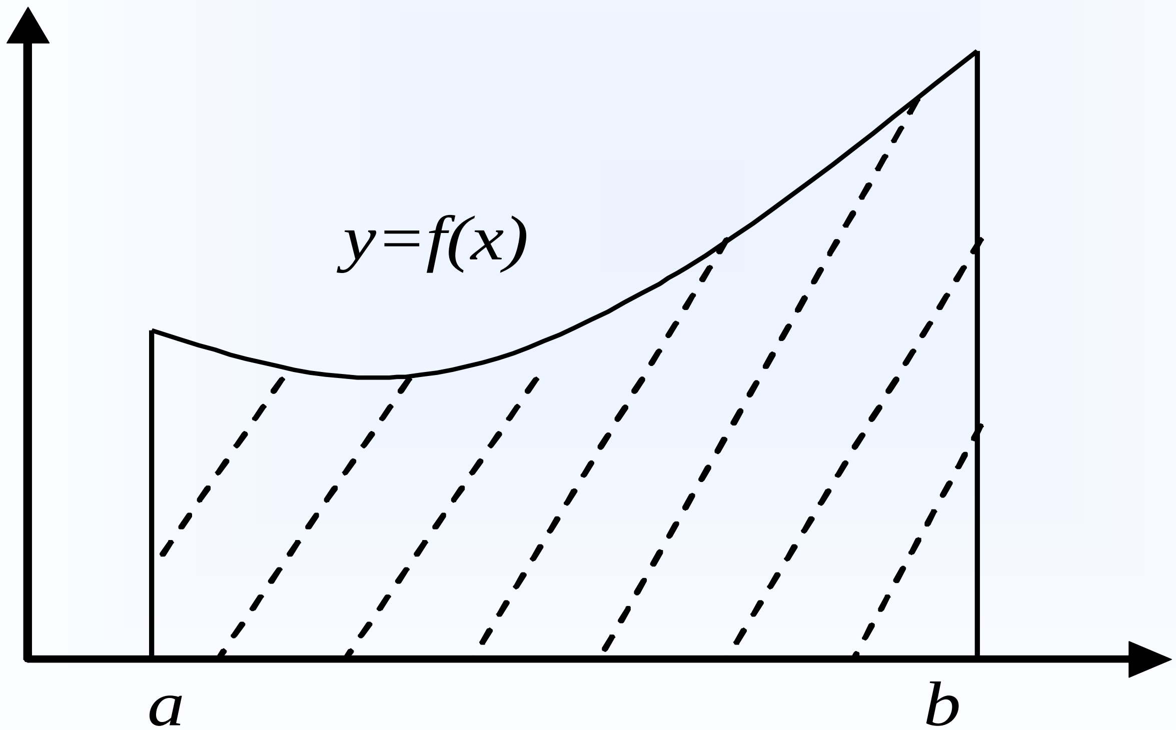
$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \quad 和 \quad \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

(2) 还有被积函数f(x)的原函数能用初等函数表示，但表达式太复杂，例如函数 $f(x) = x^2\sqrt{2x^2+3}$

其原函数F(x)为：

$$F(x) = \frac{1}{4}x^3\sqrt{2x^2+3} + \frac{3}{16}x\sqrt{2x^2+3} - \frac{9}{16\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}x + \sqrt{2x^2+3}) + C$$

(3) 被积函数f(x)没有具体的解析表达式, 其函数关系由表格或图形表示.



引 言

为克服上述许多缺点，定积分计算的数值求解能弥补上述不足，并可带来满意的结果。

积分数值算法的思想是，首先求被积函数 $f(x)$ 的一个逼近函数 $p(x)$，即 $f(x)=p(x)+r(x)$，这里 $r(x)$ 为误差函数，于是

引 言

- 由定积分定义

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta x\|\to 0}\sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

(1)分割 $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n =_i b$

(2)近似 $\Delta s_i = f(\xi)\Delta x_i \qquad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

(3)求和 $S_n = \sum_{i=0}^{n}\Delta s_i = \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

引 言

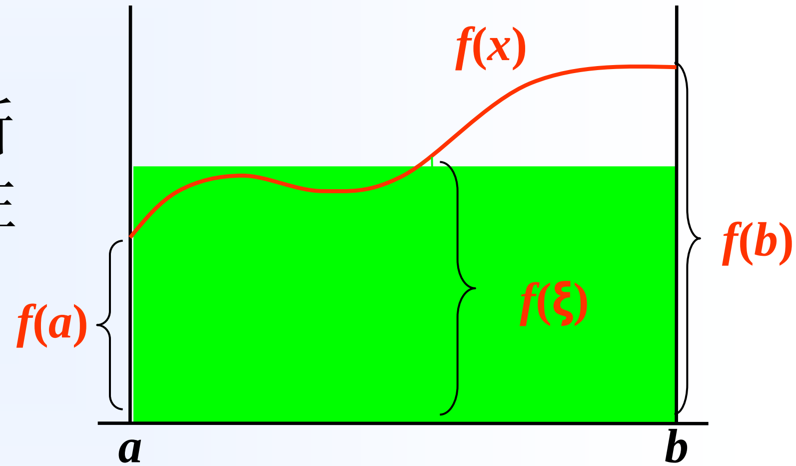
(4)求极限$\|\Delta x\| = \max\limits_{1\le i\le n}\{|\Delta x_i|\}$

$$\lim_{\|\Delta x\|\to 0} S_n = \lim_{\|\Delta x\|\to 0}\sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

2、1　机械求积

1、数值求积的基本思想

积分 $I=\int_a^b f(x)dx$ 在几何上



可解释为由 x=a，x=b，y=0，y=f(x) 所围成的曲边梯形的面积。积分的困难在于其中有一边是由曲线 y=f(x) 构成的。

积分中值定理

设函数 f(x) 在[a，b]上连续，则在[a，b]内存在一点ξ，成立

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\xi)$$

称 f(ξ) 为区间[a，b]上的平均高度。由于 ξ 难以确定，因此，f(ξ)的值就无法计算。

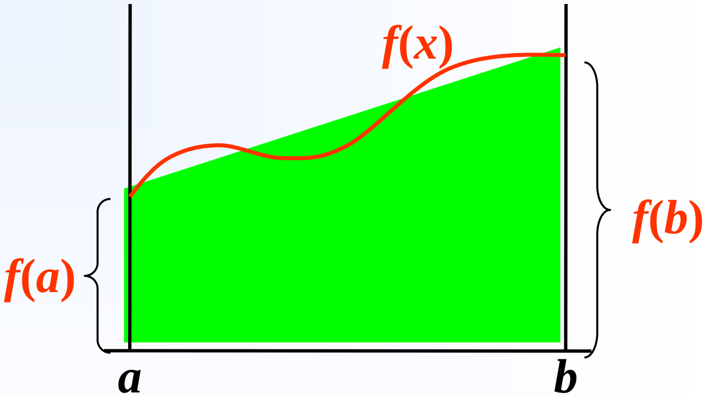
如果能够为 f(ξ) 提供一种数值算法，可以近似地计算 f(ξ)的值，就可以得到一种数值求积方法。

按照这种思想，人们便得到了一些近似的积分计算公式。

①梯形公式

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

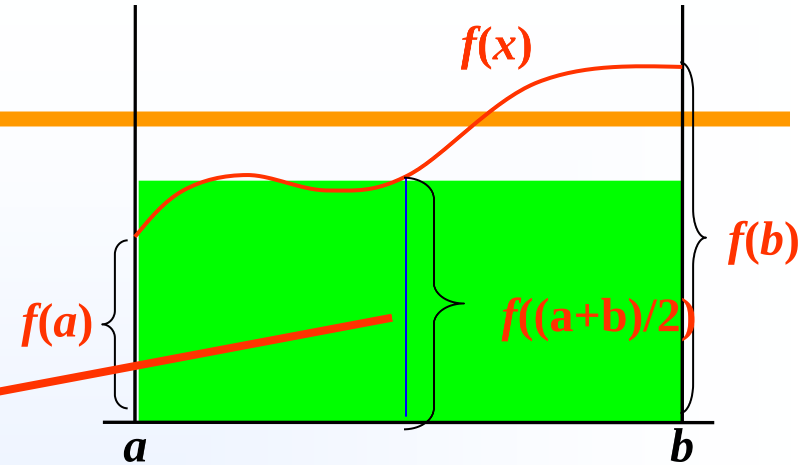
$$f(\xi) \cong \frac{f(a)+f(b)}{2}$$



② 中矩形公式

$$\int_a^b f(x)dx \cong (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

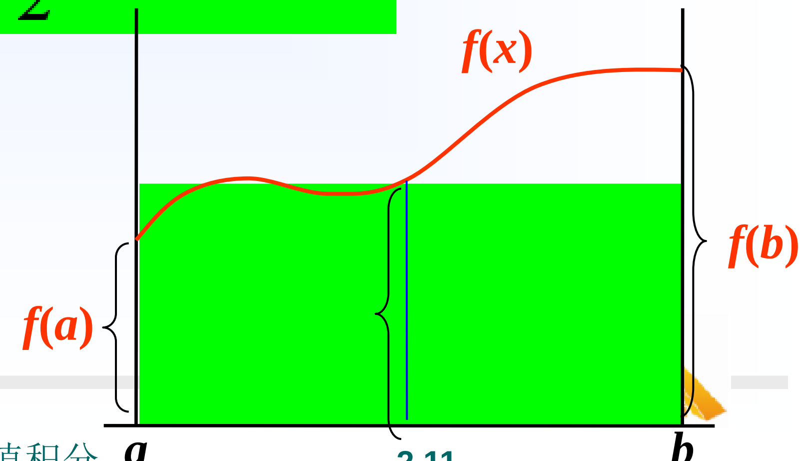
$$f(\xi) \cong f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$



③辛甫生Simpson公式

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{(b-a)}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

$$f(\xi) \cong \frac{f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)}{6}$$



一般地，设 f(x) 在区间[a，b]上连续，取[a，b]内若干

1．求积系数及节点如何确定？
2．公式的计算精度如何判断？提高计算精度？
3．此公式与Lagrange插值多项式有何关系？

通过加权平均

求积系数
权系数

求积节点

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \qquad (4)$$

x_k：**求积节点**

A_k：**求积系数**

由节点决定

$A_k:$

与函数形式无关

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$ 有

称上述求积方法为机械求积法。其特点是直接利用某些节点上的函数值计算积分，而将积分求值问题归结为函数值的计算。

例1　设积分区间[a, b]为[0, 2]，分别用梯形和Simpson公式

$$\int_0^2 f(x)dx \approx f(0)+f(2) \qquad \int_0^2 f(x)dx \approx \frac{1}{3}[f(0)+4f(1)+f(2)]$$

计算 $f(x)=1, x, x^2, x^3, x^4, e^x$ 时积分结果并与准确值进行比较.

解:梯形公式和Simpson公式的计算结果与准确值比较如下表所示

$f(x)$	1	x	x^2	x^3	x^4	e^x
准确值	2	2	2.67	4	6.40	6.389
梯形公式	2	2	4	8	16	8.389
辛甫生公式	2	2	2.67	4	6.67	6.421

2、代数精度的概念

数值求积方法是近似方法，为保证精度，自然希望所提供求积公式对于“尽可能多”的函数是准确的。

问题： 对于不同 A_k 的求积方法的精度如何呢？

定义： 如果某个求积公式，对于任何次数不超过m的代数多项式都准确成立，但对于m+1次代数多项式不一定准确成立，则称该求积公式具有m次代数精度。

等价定义 设求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 对于 $1, x, x^2, \cdots, x^m$ 是准确的，而对于 x^{m+1} 是不准确的，则称该求积公式具有m阶代数精度

容易验证，梯形、中矩形公式有1次代数精度。

例2 求梯形公式和Simpson公式的代数精度.

解：1. 梯形公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$

当f(x)=1时，$左=\int_a^b 1dx = b-a$，$右=\frac{b-a}{2}(1+1)=b-a$ ，左=右；

当f(x)=x时，

$左=\int_a^b xdx=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$，$右=\frac{b-a}{2}(a+b)=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$ ，左=右；

当f(x)=x^2 时，

$左=\int_a^b x^2dx=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$，$右=\frac{b-a}{2}(a^2+b^2)=\frac{1}{2}(a^2+b^2)(b-a)$

左 $\neq$ 右 .

所以梯形公式只有1阶代数精度.

2. Simpson公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{6}(b-a)\left[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b) \right]$$

当$f(x)=1$时，左 $=\int_a^b 1dx = b-a$，右 $=\frac{b-a}{6}(1+4+1)=b-a$，左=右；

当$f(x)=x$时，左 $=\int_a^b xdx = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$，

右 $=\frac{b-a}{6}(a+4\frac{a+b}{2}+b)=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$， 左=右；

当$f(x)=x^2$时，左 $=\int_a^b x^2dx = \frac{1}{3}(b^3-a^3)$，

右 $=\frac{b-a}{6}(a^2+4(\frac{a+b}{2})^2+b^2)=\frac{b-a}{6}(2a^2+2ab+2b^2)=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$，左=右；

当$f(x)=x^3$时，左 $=\int_a^b x^3dx=\frac{1}{4}(b^4-a^4)$，

$$右=\frac{b-a}{6}(a^3+4(\frac{a+b}{2})^3+b^3)=\frac{b-a}{6}(a^3+\frac{1}{2}(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)+b^3)$$

$$=\frac{b-a}{6}\frac{3}{2}(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=\frac{1}{4}(b^4-a^4)$$ ，左=右；

当$f(x)=x^4$时，　　左 $=\int_a^b x^4dx=\frac{b^5-a^5}{5}$，

$$右=\frac{b-a}{6}(a^4+4(\frac{a+b}{2})^4+b^4)=\frac{b-a}{6}(\frac{5}{4}a^4+\frac{3}{2}a^2b^2+a^3b+ab^3+\frac{5}{4}b^4)\neq\frac{b^5-a^5}{5},$$

左 $\neq$ 右 .

所以辛普生公式具有三阶代数精度.

例3 若对于给定的一组求积节点 $x_k(k=0,1,2,\cdots,n)$

相应的求积公式 $$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

至少具有 n 次代数精度，试确定其求积系数.

解 由已知对于 $f(x)=1,x,x^2,\cdots,x^n$，求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

均成立等式，得:

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + \cdots + A_n = 1 \\ x_0 A_0 + x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n = \dfrac{b+a}{2} \\ \qquad\qquad \cdots \\ x_0^n A_0 + x_1^n A_1 + \cdots + x_n^n A_n = \dfrac{1}{b-a} \dfrac{b^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1)!} \end{cases}$$

其系数矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i) \ne 0$$

当 $x_k\ (k = 0,1,\cdots,n)$ **互异时非奇异，故** A_k**有唯一解.**

3、插值型的求积公式

由插值法知道，无论多么复杂的函数或用表格形式给出的函数 f(x)，都可以用一个简单的插值多项式 $p_n(x)$ 去近似。故可以用插值多项式代替被积函数进行近似的积分计算。

设已给 $f(x)$ 在节点 $x_k(k=0,1,\cdots,n)$ 的函数值，作插值多项式

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x)$$

其中

$$l_k(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

由于多项式的求积是容易的，令

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)dx \qquad (7)$$

这样得到的求积公式称为**插值型**的求积公式，其求积系数为

$$A_k = \int_a^b l_k(x)\,dx \qquad (8)$$

则可得到形如

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \qquad (4)$$

的求积公式

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{n} l_k(x) f(x_k)\,dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \int_a^b l_k(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

定理1 机械求积公式至少有 n 次代数精度的充分必要条件是它是插值型的。

证： 对于任意次数 ≤ n的多项式f(x)，其插值多项式 $p_n(x)$ 就是它自身，即：$f(x)=p_n(x)$

因此，求积公式

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b p_n(x)dx$$

对任意次数不超过 n的多项式都准确成立，故至少具有n 次代数精度。

反之，如果机械求积公式至少有 n 次代数精度，则它对于插值基函数是准确成立的，即有：

$$\int_a^b l_k(x)dx=\sum_{j=0}^{n}A_j l_k(x_j)$$

因为 $l_k(x_j)=\delta_{kj}=\begin{cases}1 & k=j\\ 0 & k\neq j\end{cases}$

所以有 $A_k=\int_a^b l_k(x)dx$

由线性方程组

$$\begin{cases}A_0+A_1+\cdots+A_n=b-a\\ A_0x_0+A_1x_1+\cdots+A_nx_n=\dfrac{b^2-a^2}{2}\\ \cdots\\ A_0x_0^n+A_1x_1^n+\cdots+A_nx_n^n=\dfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}\end{cases}$$

可知 A_k 有唯一解

故求积公式（4）必为插值型的

定理　n+1个节点的求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

为插值型求积公式的充要条件是此公式至少具有n次代数精度.

4、一点注记

为简化处理手续，可引进变换

$$x=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t$$

将求积区间 $[a,b]$ 变到 $[-1,1]$ ，这时积分

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t)dt$$

当求积节点 x_k 给出后，求积系数 A_k 的确定有两种选择：

1、求解线性方程组（6）；

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + \cdots + A_n = b - a \\ A_0 x_0 + A_1 x_1 + \cdots + A_n x_n = \dfrac{b^2 - a^2}{2} \\ \cdots \\ A_0 x_0^n + A_1 x_1^n + \cdots + A_n x_n^n = \dfrac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \end{cases}$$

2、计算积分（8）

$$A_k = \int_a^b l_k(x)dx$$

2.2 牛顿—柯特斯(Newton-Cotes)公式

❑ 插值型求积公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{\mathrm{k}=0}^{n} \mathrm{A_k} f(x_\mathrm{k}) \quad \text{其中} \quad \mathrm{A_k} = \int_a^b l_\mathrm{k}(x)\mathrm{d}x$$

为便于上机计算，通常在求积公式中取等距节点，即将积分区间$[a,b]$ n等分，步长 $h=(b-a)/n$，且记$x_0=a,x_n=b$，则节点为$x_k = x_0 + kh(k=0,1,\ldots,n)$，作变换:$t=(x-x_0)/h$，代入求积系数公式：

$$A_k = \int_a^b l_k(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \prod_{j\neq k} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}\mathrm{d}x = \int_0^n \prod_{j\neq k} \frac{t-j}{k-j}\cdot h\mathrm{d}t$$

$$= \frac{(b-a)(-1)^{n-k}}{n\,k!(n-k)!}\int_0^n \prod_{k\neq j}(t-j)dt$$

2.2 牛顿—柯特斯(Newton-Cotes)公式

$$A_k = \frac{(b-a)(-1)^{n-k}}{n\,k!(n-k)!}\int_0^n \prod_{k\neq j}(t-j)dt$$

科特斯(Cotes)系数

$$C_k^{(n)}$$

注：Cotes 系数仅取决于 n 和 k，可通过查表得到。与被积函数 $f(x)$ 及积分区间 $[a, b]$ 均无关

- 等距节点的插值型求积公式称为牛顿–科特斯公式：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx (b-a)\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)} f(x_k)$$

几种低阶的牛顿-柯斯特公式

一、公式的导出

1．当 $n=1$ 时，$h=b-a$，节点为 $x_0=a, x_1=b$，此时求积公式为

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)(\lambda_0 f(a)+\lambda_1 f(b))$$

具有1阶代数精度，则由代数精度的定义知即为梯形公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$$

即梯形公式为1阶 *Newton—Cotes*

$$C_0 = \frac{(-1)^{1-0}}{1\times 0!\times(1-0)!}\int_0^1 (t-1)dt = \frac{-1}{1}\frac{(t-1)^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$C_1 = \frac{(-1)^{1-1}}{1\times 1!\times(1-1)!}\int_0^1 (t-0)dt = \frac{1}{1}\frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

2． $n=2$ ，$h=\dfrac{b-a}{2}$， $x_0=a, x_1=\dfrac{a+b}{2}, x_2=b$ ，此时求积公式为

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)(\lambda_0 f(a)+\lambda_1 f(\frac{a+b}{2})+\lambda_2 f(b))$$

$$C_0=\frac{(-1)^{2-0}}{2\times 0!\times(2-0)!}\int_0^2 (t-1)(t-2)dt$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^2 [(t-2)^2+(t-2)]dt$$

$$=\frac{1}{4}[\frac{1}{3}(t-2)^3+\frac{1}{2}(t-2)^2]\Big|_0^2=\frac{1}{6}$$

同理可得$C_1=\dfrac{4}{6}$， $C_2=\dfrac{1}{6}$

则

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b))$$

具有3阶精度，即二阶的 *Newton—Cotes* ---------**Simpson公式**

3. 柯特斯公式

当n=4时， $h=\dfrac{b-a}{4}$ ，$x_0=a\,,x_i=a+ih, i=1,2,3,4$

Newton-Cotes公式为

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{90}\left[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)\right]$$

称为**柯特斯公式**

其代数精度为5

柯特斯系数表

n	$C_i^{(n)}$								
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$							
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$						
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$					
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$				
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$			
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$		
7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{751}{17280}$	
8	$\frac{989}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-4540}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{989}{28350}$

例6 分别用梯形公式、辛甫生公式和柯特斯公式计算定积分 $\int_{0.5}^{1}\sqrt{x}\mathrm{d}x$ 的近似值（计算结果取5位有效数字）

（1） **用梯形公式计算**

$$\int_{0.5}^{1}\sqrt{x}\mathrm{d}x \approx \frac{1-0.5}{2}[f(0.5)+f(1)] = 0.25\times[0.70711+1] = 0.4267767$$

（2） **用辛甫生公式**

$$\int_{0.5}^{1}\sqrt{x}\mathrm{d}x \approx \frac{1-0.5}{6}[\sqrt{0.5}+4\times\sqrt{(0.5+1)/2}+\sqrt{1}]$$

$$=\frac{1}{12}\times[0.707\,11+4\times 0.866\,03+1] = 0.43093403$$

(3) 用柯特斯公式计算，系数为

$$\frac{7}{90},\frac{32}{90},\frac{12}{90},\frac{32}{90},\frac{7}{90}$$

$$\int_{0.5}^{1}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x \approx \frac{1-0.5}{90}[7\times\sqrt{0.5}+32\times\sqrt{0.625}+12\times\sqrt{0.75}+32\times\sqrt{0.875}+7\times\sqrt{1}]$$

$$=\frac{1}{180}\times[4.94975+25.29822+10.39223+29.93326+7]=0.43096407$$

积分的准确值为

0.4267767　　0.43093403

$$\int_{0.5}^{1}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_{0.5}^{1}=0.43096441$$

可见，三个求积公式的精度逐渐提高.

Newton—Cotes 公式的基本性质

(1) $\sum_{j=0}^{n} C_j = 1$

(2) $C_j, j = 0 \sim n$与 $f(x)$ ，a，b无关，只与等分数 n 及等分点有关；

(3) *Newton—Cotes* 系数可以用待定系数法求出；

(4) $C_{n-k} = C_k, k = 0 \sim n$

(5) **当 $n \geq 8$ 时，出现负数，稳定性得不到保证。而且当 n 较大时，由于Runge现象，收敛性也无法保证。**

(6) **当 $n \leq 7$ 时，牛顿-科特斯公式是稳定的。**

2、几种低阶求积公式的代数精度

例 利用牛顿—柯特斯公式计算积分

$$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$$

解 计算结果如下表(0. 9460831)

与五阶公式精度相当

与三阶公式精度相当

n	I_n	m	n		m
1	0.9270[illegible]4	1	4	0.9460[illegible]30	6
2	0.9461359	3	5	0.9460830	6
3	0.9461109	3			

n 为偶数阶的牛顿—柯特斯公式至少有 $n+1$ 次代数精度

2. 几种低阶求积公式的代数精度

n	l_k	m
1	$\frac{1}{2}\{1,1\}$	1
2	$\frac{1}{6}\{1,4,1\}$	3
3	$\frac{1}{8}\{1,3,3,1\}$	3
4	$\frac{1}{90}\{7,32,12,32,7\}$	5
5	$\frac{1}{288}\{19,75,50,50,75,19\}$	5
6	$\frac{1}{840}\{41,216,27,272,27,216,41\}$	7
7	$\frac{1}{17280}\{751,3577,1323,2989,2989,1323,3577,751\}$	7
8	$\frac{1}{28350}\{989,5888,-928,10496,-4540,10496,-928,5888,989\}$	9

在几种低阶的牛顿—柯特斯公式中，人们比较感兴趣的是：

梯形公式（最简单、最基本）

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

辛甫生

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{(b-a)}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$$

柯特斯公式

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{90}(7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4))$$

3、几种低阶求积公式的余项

- 利用线性插值的余项公式以及积分中值定理，我们可以得到**梯形公式**的余项：

$$R_T = \int_a^b (f(x) - L_1(x))\,dx = \int_a^b \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)\,dx$$

由于（x-a)(x-b)在[a,b]内保号，应用积分中值定理，

第一积分中值定理。若函数$f(x)$，$g(x)$在区间［a，b］上有界且可积，$f(x)$连续，$g(x)$在区间［a，b］内不变号，则在区间［a，b］内至少存在一个数$\xi(a<\xi<b)$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$$

$$R_T = \frac{f''(\eta)}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta)$$

（14）

■ 利用埃尔米特插值的余项公式以及积分中值定理我们可以得到**辛甫生公式**的余项：

$$R_s = I - S = \int_a^b [f(x) - H(x)]dx$$

$$= \int_a^b \frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}(x-a)(x-\frac{b+a}{2})^2(x-b)dx$$

$$R_S = I - S = -\frac{b-a}{180}\left(\frac{b-a}{2}\right)^4 f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [a,b] \qquad （16）$$

■ **柯特斯公式**的积分余项：

$$R_C = I - C = -\frac{2(b-a)}{945}\left(\frac{b-a}{4}\right)^6 f^{(6)}(\xi), \quad \xi \in [a,b] \qquad （17）$$

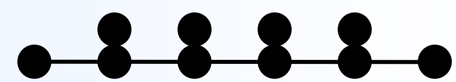
4、复化求积公式

在使用牛顿—柯特斯公式时，通过提高阶的途径并不总能取得满意的效果，为了改善求积公式的精度，一种行之有效的方法是复化求积。

将 $[a,b]$分为 n等份，步长 $h=\frac{b-a}{n}$ 分点 $x_k = a + kh,\ k=0,1,\cdots,n$

所谓复化求积公式，就是先用低阶的求积公式求得每个子段上的积分值 I_k，然后用 $\sum_{k=0}^{n-1} I_k$ 作为积分 I 的近似值。

复化梯形公式有如下形式：



$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{2}[f(x_k)+f(x_{k+1})] = \frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)+f(b)] \qquad (18)$$

$$=\frac{h}{2}[f(x_0)+2(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1}))+f(x_n)]$$

记子段$[x_k, x_{k+1}]$的中点$x_{k+\frac{1}{2}}$

复化辛甫生公式为

$x_k \qquad x_{k+\frac{1}{2}} \qquad x_{k+1}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{6}\left[f(x_k) + 4f(x_{k+\frac{1}{2}}) + f(x_{k+1})\right]$$

$$= \frac{h}{6}\left[f(a) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)\right] \tag{19}$$

如果每个子段 $[x_k, x_{k+1}]$ 四等分，

内分点依次记 $x_{k+\frac{1}{4}}, x_{k+\frac{1}{2}}, x_{k+\frac{3}{4}}$，

复化柯特斯公式为

$$C_n = \frac{h}{90}\Big[7f(a) + 32\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{4}}) + 12\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}})$$

$$32\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{4}}) + 14\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + 7f(b)\Big] \qquad (20)$$

复化梯形公式的余项为：

$$I-T_n\approx-\frac{h^2}{12}\left[f'(b)-f'(a)\right] \qquad (21)$$

复化辛甫生公式的余项为：

$$I-S_n=-\frac{1}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4\left[f'''(b)-f'''(a)\right] \qquad (22)$$

复化柯斯特公式的余项为：

$$I-C_n=-\frac{2}{945}\left(\frac{h}{4}\right)^6\left[f^{(5)}(b)-f^{(5)}(a)\right] \qquad (23)$$

例： 若用复化的Simpson公式计算 $I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ 需将[0,1]多少等分才能保证误差不超过 10^{-6} ？

解： 设 $f(x)=\frac{\sin x}{x}=\int_0^1 \cos(xt)dt$，则 $f^{(4)}(x)=\int_0^1 t^4\cos(xt)dt$

由 $R_S = I - S = -\frac{b-a}{180}\left(\frac{b-a}{2}\right)^4 f^{(4)}(\xi)$

得

$$|I-S_n| = \frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 |f^{(4)}(\eta)| \le \left(\frac{1}{2n}\right)^4 \frac{1}{180}\cdot\frac{1}{5} \le 10^{-6}$$

即

$$n \ge \frac{5}{3}\sqrt{3}$$

取n=3即可。

例2 依次用n=8的复化梯形公式、n=4的复化Simpson公式计算定积分

$$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

解:首先计算出所需各节点的函数值, n=8时, $h=\frac{1}{8}=0.125$

由复化梯形公式得

$$T_8=\frac{1}{16}\left[f(0)+2f(0.125)+2f(0.25)+2f(0.375)+2f(0.5)\right.$$

$$\left.+2f(0.625)+2f(0.75)+2f(0.875)+f(1)\right]$$

$$=0.9456909$$

x	f(x)	x	f(x)
0	1.0000000	5/8	0.9361556
1/8	0.9973978	¾	0.9088516
¼	0.9896158	7/8	0.8771925
3/8	0.9767267	1	0.8414709
1/2	0.9588510		

由复化Simpson公式得

$$S_4 = \frac{1}{24}[f(0) + f(1) + 2(f(0.25) + f(0.5) + f(0.75))$$

$$+4(f(0.125) + f(0.375) + f(0.625) + f(0.875))]$$

$$= 0.9460832$$

（积分准确值I=0. 9460831）　$T_8 = 0.9456909$

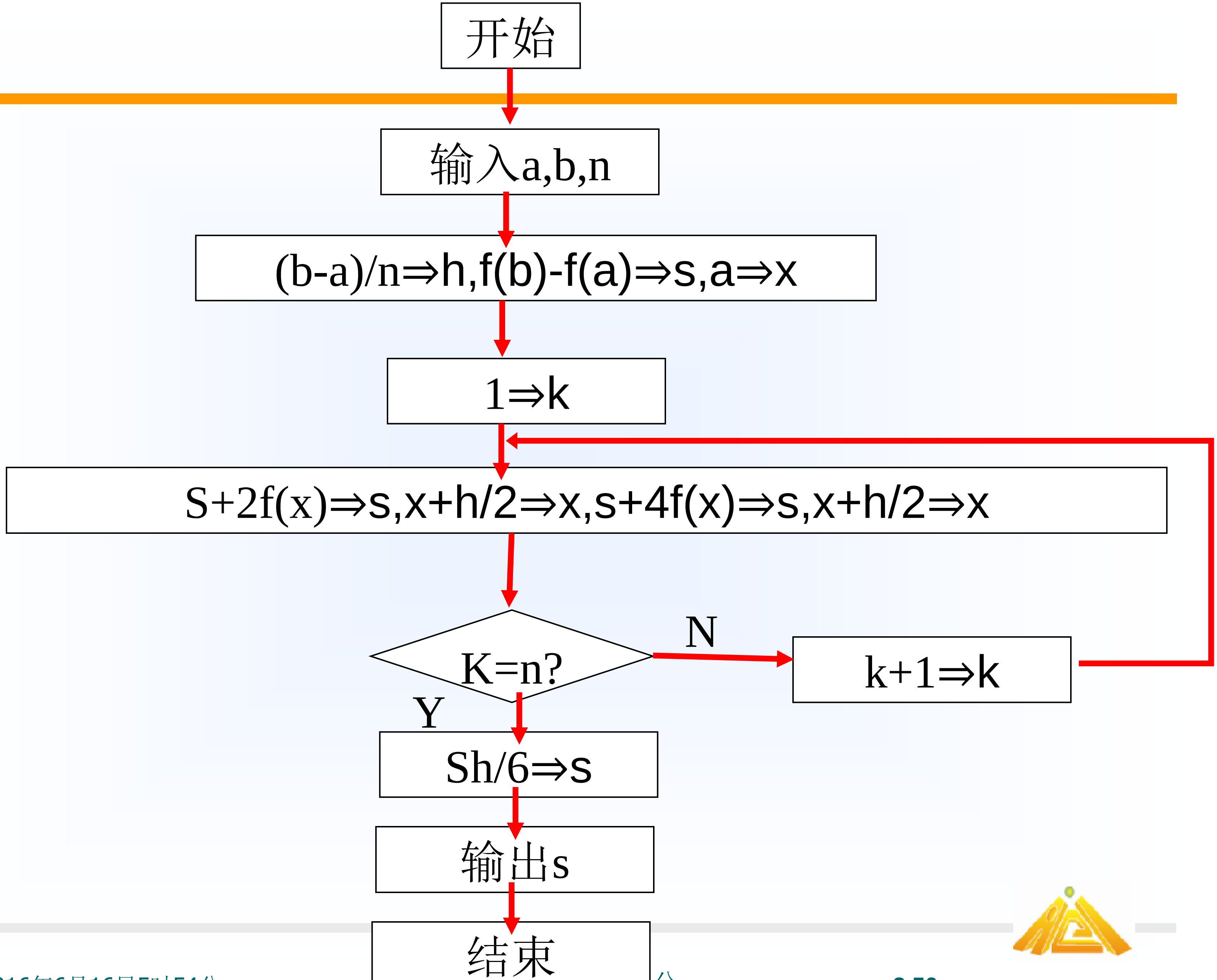
$T_1 = 0.9270354$　$S_1 = 0.9461359$

为了便于程序循环的设计，可将求积公式改写为：

$$S_n = \frac{h}{6}[f(a) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)]$$

$$= \frac{h}{6}[f(a) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) + 2\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) - f(b)]$$

$$= \frac{h}{6}[f(a) - f(b) + \sum_{k=0}^{n-1}[4f(x_{k+\frac{1}{2}}) + 2f(x_k)]]$$


开始
输入a,b,n
(b-a)/n⇒h,f(b)-f(a)⇒s,a⇒x
1⇒k
S+2f(x)⇒s,x+h/2⇒x,s+4f(x)⇒s,x+h/2⇒x
K=n?
N
k+1⇒k
Y
Sh/6⇒s
输出s
结束

2.3 龙贝格算法

实际计算中，由于要事先给出一个合适的步长往往很困难，所以我们往往采用变步长的计算方案，即在步长逐步分半的过程中，反复利用复化求积公式进行计算，直到所求得的积分值满足精度要求为止。

1、梯形法的递推化

设当前求积区间[a, b]分成n等分，则有n+1个节点 $x_k = a + kh$ ，$h = \dfrac{b-a}{n}$

按复化梯形公式有

$$T_n = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b) \right]$$

现将子区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 一分为二，增加的分点为

$$x_{k+\frac{1}{2}} = (x_k + x_{k+1})/2 = a + (k + \frac{1}{2})h = a + (2k+1)\frac{h}{2}$$

在区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上

二分前的积分： $$T_1 = \frac{h}{2}[f(x_k) + f(x_{k+1})]$$

二分后的积分： $$T_2 = \frac{\frac{h}{2}}{2}[f(x_k) + f(x_{k+\frac{1}{2}}) + f(x_{k+\frac{1}{2}}) + f(x_{k+1})]$$

$$= \frac{h}{4}[f(x_k) + 2f(x_{k+\frac{1}{2}}) + f(x_{k+1})]$$

区间$[x_k, x_{k+1}]$ k=0,1,…,n-1共n个，把该区间的 T_2 从0到n-1求和

得：

当k=0时

当k#0时

当k#n-1时

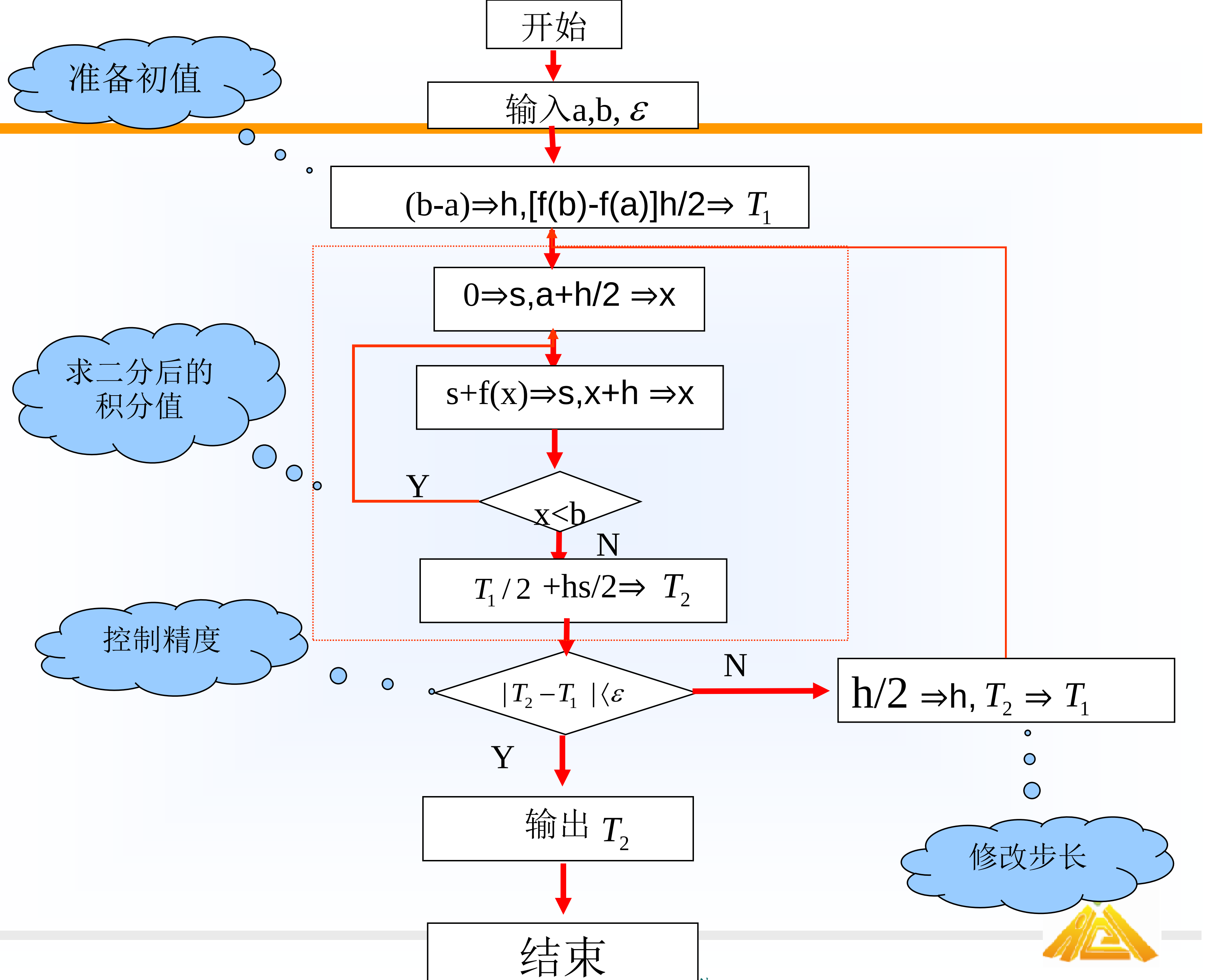
当k=n-1时

$$T_{2n}=\frac{h}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\left[f(x_k)+2f(x_{k+\frac{1}{2}})+f(x_{k+1})\right]$$

$$=\frac{h}{4}\left[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+2\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}})+f(b)\right]$$

$$=\frac{T_n}{2}+\frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}})$$

所以，步长折半后，只需求新增分点 $x_{k+\frac{1}{2}}$ 处的函数值 $f(x_{k+\frac{1}{2}})$ 之和。



开始
输入a,b, ε
准备初值
(b-a)⇒h,[f(b)-f(a)]h/2⇒ T_1
0⇒s,a+h/2 ⇒x
求二分后的积分值
s+f(x)⇒s,x+h ⇒x
Y
x<b
N
$T_1/2$ +hs/2⇒ T_2
控制精度
$|T_2-T_1|<\varepsilon$
N
h/2 ⇒h, T_2 ⇒ T_1
Y
输出 T_2
修改步长
结束

例 3 用变步长梯形法则计算积分 $I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$，并加速。

解　对区间$[0,1]$用梯形公式，$f(x)=\frac{\sin x}{x}$，$f(0)=1$，

$f(1)=0.8414710$。所以，$T_1=\frac{1}{2}[f(0)+f(1)]=0.9207355$

将区间二等分，$f(\frac{1}{2})=0.9588510$，$T_2=\frac{1}{2}T_1+\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})=0.9397933$

再将区间二等分，$f(1/4)=0.9896158$，$f(3/4)=0.9088516$

$$T_4=\frac{1}{2}T_2+\frac{1}{4}\left[f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)\right]=0.9445135$$，有 2 位有效数字。

再将区间二等分，$f(1/8)=0.9973979$，$f(3/8)=0.9767267$，

$f(5/8)=0.9361551$，$f(7/8)=0.8771926$

$$T_8=\frac{1}{2}T_4+\frac{1}{8}\left[f\left(\frac{1}{8}\right)+f\left(\frac{3}{8}\right)+f\left(\frac{5}{8}\right)+f\left(\frac{7}{8}\right)\right]=0.9456909$$，有 3 位有效数字。加速 $S_4=\frac{4}{3}T_8-\frac{1}{3}T_4=0.9460834$，已有 6 位有效数字。

2、龙贝格公式

梯形法的算法简单，但精度低，收敛的速度缓慢。如何提高收敛速度以节省计算量呢？

由复化梯形公式的截断误差公式

$$I - T_n \approx -\frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)]$$

二分后截断误差

$$I - T_{2n} \approx -\frac{(\frac{h}{2})^2}{12}[f'(b) - f'(a)] = -\frac{h^2}{4\times 12}[f'(b) - f'(a)]$$

所以 $$\frac{I - T_{2n}}{I - T_n} \approx \frac{1}{4}$$

$$4I - 4T_{2n} \approx I - T_n$$

$$3I - 3T_{2n} \approx T_{2n} - T_n$$

整理得：$$I - T_{2n} \approx \frac{1}{3}\left(T_{2n} - T_n\right) \qquad (25)$$

只要二分前后两个积分值 T_n, T_{2n} ，相当接近，就可以保证计算结果 T_{2n} 的误差很小。（**事后估计法**）

推测： **把（25）式的误差估计作为 T_{2n} 的补偿**

$$I \approx \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n$$

$$T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n) = \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n$$

应该比 $I \approx T_{2n}$ 有更好的近似程度。

考察例3，从计算结果表中可知：

$$T_4 = 0.9445135, \mathrm{T}_8 = 0.9456909$$

精确度很差，但如果按（26）式作线性组合，则有：

$$\bar{T} = \frac{4}{3}T_8 - \frac{1}{3}T_4 = 0.9460834$$

却有六位有效数字。**可以证明（26）式实际上就是逐次分半的复化辛甫生公式**

令 $$S_n = \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n \qquad (27)$$

按（22）式 $$I - S_n = -\frac{1}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 \left(f'''(b) - f'''(a)\right)$$

容易得出： $$\frac{I - S_{2n}}{I - S_n} \approx \frac{1}{16}$$

整理得： $$I - S_{2n} \approx \frac{1}{15}\left(S_{2n} - S_n\right)$$

$$I \approx \frac{16}{15}S_{2n} - \frac{1}{15}S_n$$

容易验证，上式右端其实就是 C_n

既是说，用**辛甫生法**二分前后的两个积分值 S_n, S_{2n}

按上式再作线性组合，结果得到柯特斯法的积分 C_n

即 $$C_n \approx \frac{16}{15} S_{2n} - \frac{1}{15} S_n$$

重复同样的手续，依据柯特斯法的误差公式

$$I - C_n = -\frac{2h}{945}\left(\frac{h}{4}\right)^6 f^{(6)}(\eta) \qquad （23）$$

又可进一步导出**龙贝格公式**

$$R_n = \frac{64}{63} C_{2n} - \frac{1}{63} C_n \qquad (28)$$

我们可以在步长逐步分半过程中将粗糙的积分值 T_n 逐步加工为 S_n, C_n, R_n 精度较高的积分值：

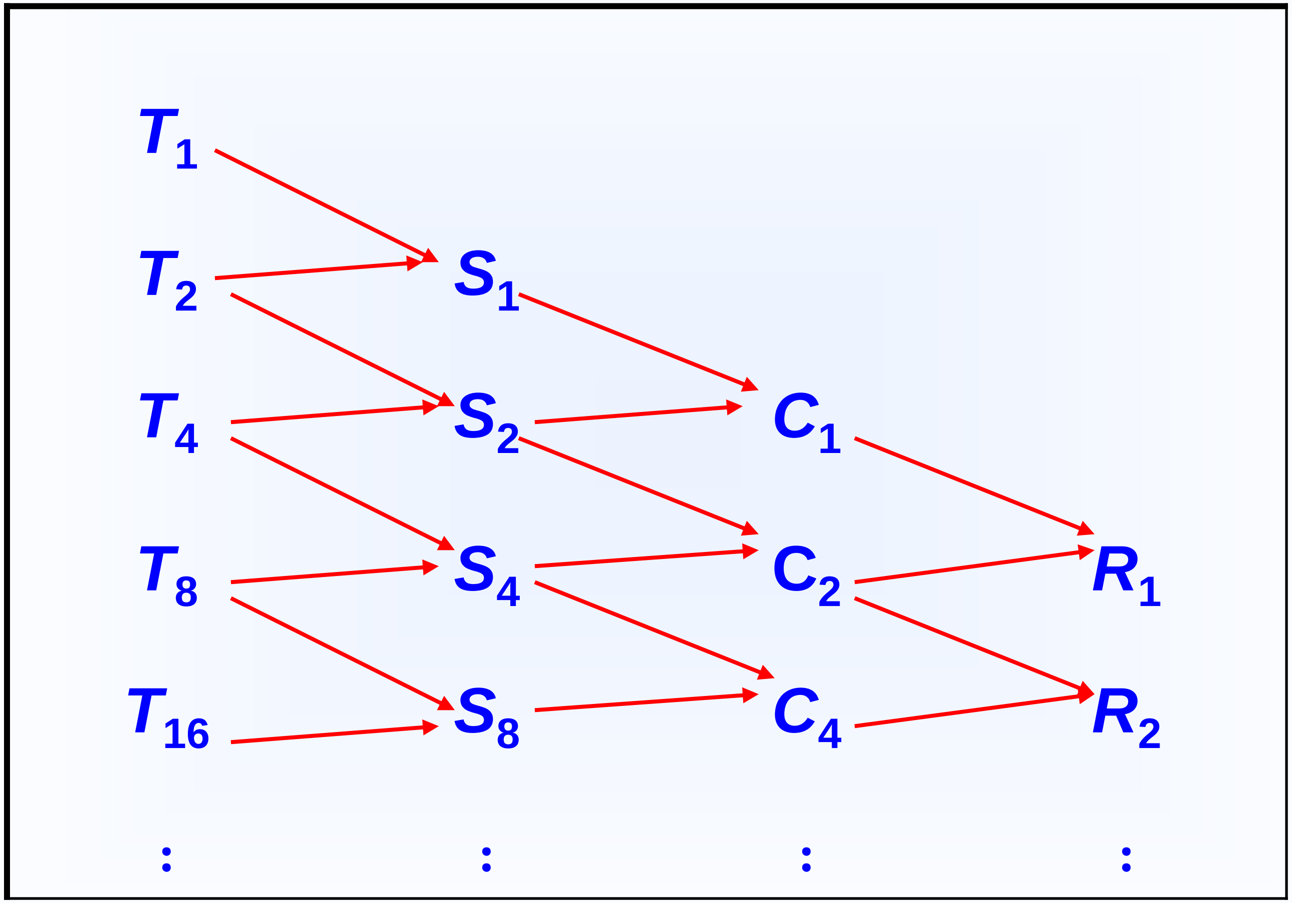
$$S_n = \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n$$

$$C_n = \frac{16}{15}S_{2n} - \frac{1}{15}S_n$$

$$R_n = \frac{64}{63}C_{2n} - \frac{1}{63}C_n$$

或者说将收敛缓慢的梯形值序列 T_n 加工成收敛迅速的积分值序列 S_n, C_n, R_n 这种加速方法称为**龙贝格算法**。

其加工流程图如下



例： 用龙贝格算法计算积分 $I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ ，要求误差不超过 $\varepsilon=10^{-7}$。

k	T_2^k	S_2^{k-1}	C_2^{k-2}	R_2^{k-3}
0	0.9207355			
1				
2				
3				9460831

结果：对分3次，涉及到8个点处的函数值，经过三次加速，增加的工作量很小，却得到了变步长梯形法要对分10次，涉及到1000多个点处的函数值才能得到的结果0.9460831

$$T_{2n}=\frac{T_n}{2}+\frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}})$$

$$S_n=\frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{3}T_n$$

$$C_n=\frac{16}{15}S_{2n}-\frac{1}{15}S_n$$

$$R_n=\frac{64}{63}C_{2n}-\frac{1}{63}C_n$$

练习：用龙贝格求积法计算积分 $I=\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx$ 的近似值.

解：$f(x)=\dfrac{4}{1+x^2}$

(1) $f(0)=4,\ f(1)=2$

$T_1=\frac{1}{2}[f(0)+f(1)]=3$

(2): $f(\frac{1}{2})=3.2$

$T_2=\frac{1}{2}T_1+\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})=3.1$

$S_1=\frac{4}{3}T_2-\frac{1}{3}T_1=3.13333$

(3): $f(\frac{1}{4})=3.76471,\ f(\frac{3}{4})=2.56$

$T_4=\frac{1}{2}T_2+\frac{1}{4}[f(\frac{1}{4})+f(\frac{3}{4})]=3.13118$

$S_2=\frac{4}{3}T_4-\frac{1}{3}T_2=3.14157$

$C_1=\frac{16}{15}S_2-\frac{1}{15}S_1=3.14212$

(4): $f(\frac{1}{8})=3.93846,\ f(\frac{3}{8})=3.50685$

$f(\frac{5}{8})=2.87640,\ f(\frac{7}{8})=2.26549$

$T_8=\frac{1}{2}T_4+\frac{1}{8}[f(\frac{1}{8})+f(\frac{3}{8})+$
$f(\frac{5}{8})+f(\frac{7}{8})]=3.13899$

$S_4=\frac{4}{3}T_8-\frac{1}{3}T_4=3.14159$

$C_2=\frac{16}{15}S_4-\frac{1}{15}S_2=3.14159$

$R_1=\frac{64}{63}C_2-\frac{1}{63}C_1=3.14158$