合 肥 工 业 大 学 试 卷（A）参 考 答 案

2016～2017 学年第 一 学期 课程代码 1400071B 课程名称 线性代数 学分 2.5 课程性质：必修þ、选修¨、限修¨ 考试形式 开卷¨、闭卷þ

专业班级（教学班）________ 考试日期________ 命题教师 集体 系（所或教研室）主任审批签名________

一、填空题（每小题 4分，共 20分）

1. -12； **2.** $3\cdot(-2)^n$； **3.** $\dfrac{2E-A}{5}$； **4.** 60； **5.** $-\dfrac{4}{5}<t<0$.

二、选择题（每小题 4分，共 20分）

1. B; **2.** B; **3.** C; **4.** C; **5.** A.

三、（本题满分 8分）

解：
$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & x_2 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & x_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1-\frac{1}{x_2}-\cdots-\frac{1}{x_n} & 1 & \cdots & 1\\ 0 & x_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & x_n\end{vmatrix}$$
$$=x_2x_3\cdots x_n\left(x_1-\frac{1}{x_2}-\cdots-\frac{1}{x_n}\right)=\prod_{i=2}^{n}x_i\cdot\left(x_1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{x_i}\right).$$

四、（本题满分 10分）

解：在等式 $A^{-1}BA=6A+BA$ 两端右边乘以 A^{-1}，得 $A^{-1}B=6E+B$， $(A^{-1}-E)B=6E$，从而
$$B=6\cdot(A^{-1}-E)^{-1}=6\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&6\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

五、（本题满分 12分）

解：（I）记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，则
$$|A|=\begin{vmatrix}1+a&2&3&4\\1&2+a&3&4\\1&2&3+a&4\\1&2&3&4+a\end{vmatrix}=(a+10)a^3.$$

于是，当 $a=0$ 或 $a=-10$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关；

（II）（1）当 $a=0$ 时，取 α_1 为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性无关组，且
$$\alpha_2=2\alpha_1,\quad \alpha_3=3\alpha_1,\quad \alpha_4=4\alpha_1；$$

（2）当 $a=-10$ 时，对 A 施以初等行变换，有
$$A=\begin{pmatrix}-9&2&3&4\\1&-8&3&4\\1&2&-7&4\\1&2&3&-6\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4).$$

由于 β_1,β_2,β_3 线性无关，且 $\beta_4=-\beta_1-\beta_2-\beta_3$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为一个极大线性无关组，并且
$$\alpha_4=-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3.$$

六、（本题满分 12分）

解：$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&2&0\\8&2-\lambda&a\\0&0&6-\lambda\end{vmatrix}=-(2+\lambda)(6-\lambda)^2=0$，得 $\lambda_1=\lambda_2=6,\lambda_3=-2$.

因为 A 可相似对角化，故对应单根 $\lambda_3=-2$ 可求出线性无关的特征向量恰有 1 个，而对应二重根 $\lambda_1=\lambda_2=6$ 应有 2 个线性无关的特征向量，即方程组 $(A-6E)\ x=0$ 有 2 个线性无关解，所以 $r(A-6E)=1$.

当 $\lambda=6$ 时，$A-6E=\begin{pmatrix}-4&2&0\\8&-4&a\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&0&a\\0&0&0\end{pmatrix}$，故 $a=0$.

七、（本题满分 14分）

解：（I） $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}0&2&-2\\2&4&4\\-2&4&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x^TAx$，

（II） $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&2&-2\\2&4-\lambda&4\\-2&4&-3-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda^2-36)=0$，得特征值为

$\lambda_1=1,\lambda_2=6,\lambda_3=-6$，

当 $\lambda=1$ 时，$A-E:\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，得基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$，单位化得 $\eta_1=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5}\\0\\-\frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}$，

当 $\lambda=6$ 时，$A-6E:\begin{pmatrix}1&0&-\frac12\\0&1&-\frac52\\0&0&0\end{pmatrix}$，得基础解系为 $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}$，单位化得 $\eta_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{30}}\\\frac{5}{\sqrt{30}}\\\frac{2}{\sqrt{30}}\end{pmatrix}$，

当 $\lambda=-6$ 时，$A+6E:\begin{pmatrix}1&0&-\frac12\\0&1&\frac12\\0&0&0\end{pmatrix}$，得基础解系为 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$，单位化得 $\eta_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$，从而令

$Q=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt{30}}&\frac{1}{\sqrt6}\\0&\frac{5}{\sqrt{30}}&-\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt{30}}&\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$，通过 $x=Qy$，化二次型为 $f=y_1^2+6y_2^2-6y_3^2$．

八、（本题满分 4分）

解：$A_{11}\neq0$，所以 A 存在一个 $n-1$ 阶子式不等于 0，又 $|A|=0$，故 $r(A)=n-1$，

又因为 $r(A^*)=\begin{cases}n\Leftrightarrow r(A)=n,\\1\Leftrightarrow r(A)=n-1,\\0\Leftrightarrow r(A)<n-1,\end{cases}$ 故 $r(A^*)=1$，$A^*A=AA^*=|A|E=O$，即 $A^*(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)=O$，

从而 $A^*\alpha_i=0\ (i=1,2,\cdots,n)$． A 的列向量均为 $A^*x=0$ 的解向量． 又 $A_{11}\neq0$ 故 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，从而 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n$ 为 $A^*x=0$ 的一个基础解系．从而 $A^*x=0$ 的通解为

$x=k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+\cdots k_n\alpha_n$，$(k_i\in R, i=2,3,\cdots,n)$．