计算方法

第2章 数值积分

胡 敏
合肥工业大学 计算机与信息学院
jsjxhumin@hfut.edu.cn
uhnim@163.com

第 2 章　数值积分

2.5 数值微分

- 数值微分的概念
- 数值微分的计算方法
  - 原始概念近似:中点法及外推法
  - 函数近似:插值型的求导公式
- 数值微分的误差分析
  - 泰勒展开式估计
  - 事后误差估计
  - 基本关系转化

引 言

- **例:已知自变量和函数值如下，求各点的导数值。**

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$f(x)$	0.48	0.38	0.31	0.33	0.36	0.41	0.51	0.43	0.35	0.29	0.28

1. 函数f(x)以离散点列给出时，而要求我们给出导数值，
2. 函数f(x)过于复杂

这两种情况都要求我们用数值的方法求函数的导数值

微积分中，关于导数的定义如下：

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x-h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

当h足够小，作为近似的导数值.

自然，而又简单的方法就是，取极限的近似值，即差商.

根据离散点上的函数值求取某点导数近似值的方法。

1）差商代替导数

2)插值型数值求导

数值微分就是**用函数值的线性组合近似函数在某点的导数值.**

一、差商公式

由导数定义，得

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$ **向前差商**

$$f'(a) \approx \frac{f(a)-f(a-h)}{h}$$ **向后差商**

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$$ **中心差商**

用弦AB的斜率近似代替f（x）在a点的导数

用弦AC的斜率

近似代替f（x）

在a点的导数

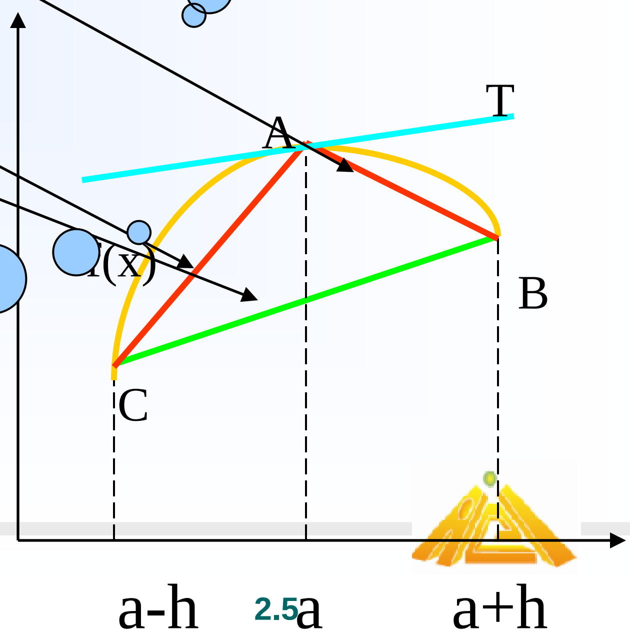
用弦BC的斜率

近似代替f（x）

在a点的导数

显然，BC的斜率更接近a点切线AT的斜率，因此，中点方法更为可取。

$$G(h) \approx \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} \quad (41)$$



■差商型求导公式的误差分析

分别将 $f(a\pm h)$在 $x=a$ 处做Taylor展开有

$$f(a\pm h)=f(a)\pm hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)\pm\frac{h^3}{3!}f'''(a)+\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(a)\pm\frac{h^5}{5!}f^{(5)}(a)+\cdots \qquad (5)$$

代入$G(h)$得
$$G(h)=f'(a)+\frac{h^2}{3!}f'''(a)+\frac{h^4}{5!}f^{(5)}(a)+\cdots \qquad (42)$$

所以截断误差
$$\boxed{G(h)-f'(a)=\frac{h^2}{3!}f'''(a)+\frac{h^4}{5!}f^{(5)}(a)+\cdots}$$

从截断误差的角度来看，步长h越小，计算结果越准确。且

$$\boxed{|f'(a)-G(h)|\le\frac{h^2}{6}M,}\text{其中}\quad M\ge\max_{|x-a|\le h}|f'''(x)| \qquad (6)$$

但从计算角度看，h 越小，$f(a+h)$与$f(a-h)$ 越接近，直接相减会造成有效数字的严重损失。因此，从舍入误差的角度来看，步长 h 不宜太小。

几点说明

✓ 理论上, 步长h越小, 数值微分的精度越高;

✓ 实际使用时，若h太小, 则 $f'(x) \approx \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 的误差就会增加.

➤ 例. 计算f(x)=e^x的导数f'(1.15)——取8位有效数字

h	x	f(x)	向前差商D_+	中心差商D	$\lvert f'(1.15)-D_+\rvert$	$\lvert f'(1.15)-D\rvert$
	1.14	3.1267684				
0.01	1.15	3.1581929	3.17404	3.158245	1.5847E-02	5.2100E-05
	1.16	3.1899333				
	1.149	3.1550363				
0.001	1.150	3.1581929	3.1598	3.1582	1.6071E-03	7.1000E-06
	1.151	3.1613527				
	1.1499	3.1578771				
0.0001	1.1500	3.1581929	3.158	3.158	1.9290E-04	1.9290E-04
	1.1501	3.1585087				
	1.149999	3.1581897				
1.00E-06	1.150000	3.1581929	3.2	3.2	4.1807E-02	4.1807E-02
	1.150001	3.1581961				

可以看出, 当步长h缩小到10^{-6}时, 计算误差出现增加;

所以，在实际计算时，通常采用二分步长及误差事后估计法，在变步长的过程中实现步长的自动选择，在保证截断误差满足的精度要求的前提下选取尽可能大的步长。

例5 用变步长的中点方法求 e^x在x=1处的导数值,设取h= 0.8起算。

解 这里采用的计算公式是

$$G(h)=\frac{e^{1+h}-e^{1-h}}{2h}$$

计算结果见表2.5，表中 k 代表二分的次数，步长$h=\dfrac{0.8}{2^k}$。二分 9 次得结果 G=2.71828，它的每一数字都是有效数字(所求导数的准确值为e=2.7182818…)。

表2.5 计算结果

k	$G(h)$
0	3.01765
1	2.79135
2	2.73644
3	2.72281
⋮	…
9	2.71828
10	2.71828

$$\left.\begin{aligned} G(h)-f'(x_0)&\approx\alpha_1 h^2\\ G(\frac{h}{2})-f'(x_0)&\approx\frac{1}{4}\alpha_1 h^2\end{aligned}\right\}\qquad \frac{G(h)-f'(x_0)}{G(\frac{h}{2})-f'(x_0)}\approx 4$$

事后误差估计

$$f'(x_0)-G(h)\approx\frac{4}{3}(G(\frac{h}{2})-G(h))$$

二、中点方法的加速

我们看到，中点公式具有如下形式

$$G(h)=f'(a)+\alpha_1 h^2+\alpha_2 h^4+\alpha_3 h^6+\cdots \qquad (43)$$

式中的系数均与步长无关。若将步长二分，则有

$$G(\frac{h}{2})=f'(a)+\frac{1}{4}\alpha_1 h^2+\frac{1}{16}\alpha_2 h^4+\frac{1}{64}\alpha_3 h^6+\cdots \qquad (44)$$

取(43)与(44)加权平均 $$G_1(h)=\frac{4}{3}G(\frac{h}{2})-\frac{1}{3}G(h) \qquad (45)$$

则可消去误差主项$\frac{1}{4}\alpha_1 h^2$，得 $$G_1(h)=f'(a)+\beta_1 h^4+\beta_2 h^6+\cdots$$

若令 $$G_2(h)=\frac{16}{15}G_1(\frac{h}{2})-\frac{1}{15}G_1(h) \qquad (46)$$

则进一步消去误差主项$\beta_1 h^4$，有 $$G_2(h)=f'(a)+\gamma_1 h^6+\cdots$$

重复同样的手续，再导出下列加速公式

$$G_3(h)=\frac{64}{63}G_2(\frac{h}{2})-\frac{1}{63}G_2(h) \qquad (47)$$

这种加速过程还可继续下去。这种加速方法通常称作**Richardson（李查逊）外推加速法**。

例6 运用加速公式加工例5的结果。

解 计算结果见表2-6。这里，加速的效果同样是相当显著的。

表2-6 Richardson外推加速法计算结果

h	$G(h)$	$G_1(h)$	$G_2(h)$	$G_3(h)$
0.8	3.01765	2.715917	2.718285	2.71828
0.4	2.79135	2.718137	2.718276	
0.2	2.73644	2.718267		
0.1	2.72281			

注: 中心公式及其加速方法适合用表达式表示的函数。对于列表函数，则宜使用插值方法等导出数值求导公式。

三、插值型的求导公式

对于列表函数 $y=f(x)$:

x	x_0	x_1	x_2	…	x_n
y	y_0	y_1	y_2	…	y_n

插值多项式 $y=P_n(x)$ 作为它的近似, 我们取 $P_n'(x)$ 作为 $f'(x)$ 的近似值，建立的数值公式

$$\boxed{f'(x)\approx P_n'(x)} \qquad (48)$$

统称插值型的求导公式.

$$f(x)-p_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)$$

依据插值余项定理，求导公式(48)的余项为

$$f'(x)-P_n'(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}'(x)+\frac{\omega_{n+1}(x)}{(n+1)!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^{(n+1)}(\xi)$$

式中 $\omega_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$.

我们限定:求某个节点 x_k 上的导数值，上面的第二项变为零，这时有余项公式

$$f'(x_k)-P_n'(x_k)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}'(x_k) \qquad (49)$$

下面我们仅仅考察节点处的导数值. 为简化讨论, 假定所给的节点是等距的.

1. 两点公式

已给两节点 x_0, x_1 上的函数值 $f(x_0), f(x_1)$，做线性插值

$$P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

记 $x_1 - x_0 = h$，对上式两端求导，有 $P_1'(x) = \frac{1}{h}[-f(x_0) + f(x_1)]$

于是有下列求导公式：

$$P_1'(x_0) = \frac{1}{h}[f(x_1) - f(x_0)] \qquad P_1'(x_1) = \frac{1}{h}[f(x_1) - f(x_0)]$$

而利用余项公式知，带余项的两点公式是：

$$\boxed{\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{1}{h}[f(x_1) - f(x_0)] - \frac{h}{2} f''(\xi) \\ f'(x_1) &= \frac{1}{h}[f(x_1) - f(x_0)] + \frac{h}{2} f''(\xi) \end{aligned}}$$

2. 三点公式

设已给出三节点x_0, $x_1=x_0+h$, $x_2=x_0+2h$上的函数值,做二次插值

$$P_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

令 $x = x_0+th$, 则

$$\begin{aligned} P_2(x_0+th)&=\frac{1}{2}(t-1)(t-2)f(x_0)-t(t-2)f(x_1)+\frac{1}{2}t(t-1)f(x_2)\\ P_2'(x_0+th)&=\frac{1}{2h}\left[(2t-3)f(x_0)-(4t-4)f(x_1)+(2t-1)f(x_2)\right] \end{aligned} \tag{50}$$

上式分别取 $t = 0,1,2$, 得到三种三点公式:

2. 三点公式

$$P_2'(x_0)=\frac{1}{2h}\left[-3f(x_0)+4f(x_1)-f(x_2)\right];$$
$$P_2'(x_1)=\frac{1}{2h}\left[-f(x_0)+f(x_2)\right];$$
$$P_2'(x_2)=\frac{1}{2h}\left[f(x_0)-4f(x_1)+3f(x_2)\right].$$

而带余项的三点求导公式如下：

$$f'(x_0)=\frac{1}{2h}\left[-3f(x_0)+4f(x_1)-f(x_2)\right]+\frac{h^2}{3}f'''(\xi); \quad (51)$$
$$f'(x_1)=\frac{1}{2h}\left[-f(x_0)+f(x_2)\right]-\frac{h^2}{6}f'''(\xi); \quad (52)$$
$$f'(x_2)=\frac{1}{2h}\left[f(x_0)-4f(x_1)+3f(x_2)\right]+\frac{h^2}{3}f'''(\xi). \quad (53)$$

公式(52)是我们所熟悉的中点公式．在三点公式中，它由于少用了一个函数值 $f(x_1)$ 而引人注目．

用插值多项式$P_n(x)$作为$f(x)$的近似函数，还可以建立高阶数值微分公式：

$$f^{(k)}(x) \approx P_m^{(k)}(x), \qquad k = 1, 2, \cdots$$

例如，将式(50)再对t求导一次，有

$$P_2''(x_0 + th) = \frac{1}{h^2}\left[f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)\right]$$

于是有
$$P_2''(x_1) = \frac{1}{h^2}\left[f(x_1 - h) - 2f(x_1) + f(x_1 + h)\right]$$

于是带余项的二阶三点公式如下：

$$f''(x_1) = \frac{1}{h^2}\left[f(x_1 - h) - 2f(x_1) + f(x_1 + h)\right] - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi) \qquad (54)$$

$$f''(x) - P_n''(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}''(x) + \frac{2\omega_{n+1}'(x)}{(n+1)!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{(n+1)}(\xi) + \frac{\omega_{n+1}(x)}{(n+1)!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f^{(n+1)}(\xi)$$

例 已知函数$y= e^x$ 的下列数值:

x	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9
y	12.1825	13.4637	14.8797	16.4446	18.1741

试用二点、三点微分公式计算x=2.7处的一阶、二阶导数值.

本题没有明确指出用哪些点处的函数值来求 $f'(2.7)$ 和$f''(2.7)$.因此，随着步长h不同,导数值有可能不同. 另外, 用两点函数值时，只能求一阶导数值.

解: 方法1：取h=0.1时，两点公式有两种取法当 x_0=2.6，x_1＝2.7时，

$$f'(2.7) \approx \frac{1}{0.1}[f(2.7)-f(2.6)]=\frac{1}{0.6}[14.8797-13.4637]$$

$$=14.1600$$

当x_0= 2.7，x_1= 2. 8时，

$$f'(2.7)\approx\frac{1}{0.1}[f(2.8)-f(2.7)]=15.6490.$$

三点公式取x_0= 2.6，x_1=2.7，x_2=2.8，得

$$f'(2.7)\approx\frac{1}{2\times0.1}[f(2.8)-f(2.6)]=14.9045.$$

$$f''(2.7)\approx\frac{1}{0.1^2}[f(2.8)-2f(2.7)+f(2.6)]=14.8900.$$

方法2：取h=0.2时，两点公式有两种取法当 x_0=2.5，x_1＝2.7时，

$$f'(2.7)\approx\frac{1}{0.2}[f(2.7)-f(2.5)]=13.4860$$

当 x_0=2.7，x_1＝2.9时，

$$f'(2.7)\approx\frac{1}{0.2}[f(2.9)-f(2.7)]=16.4720$$

三点公式取x_0= 2.5，x_1=2.7，x_2=2.9，得

$$f'(2.7)\approx\frac{1}{2\times0.2}[f(2.9)-f(2.5)]=14.9790.$$

$$f''(2.7)\approx\frac{1}{0.2^2}[f(2.9)-2f(2.7)+f(2.5)]=14.9300.$$

注：$f'(2.7)$和 $f''(2.7)$的真值都是 14.87973…，上面的计算表明：

1）当使用两点公式时．应取步长较小的函数值；

2）一般情况下，同样步长的两点公式没有三点公式准确，步长越小越精确,但如果高阶导数无界或舍入误差超过截断误差时,这个结论就不一定对了．

附注：与积分相比，数值微分比较困难。

积分描述了一个函数的整体或宏观性质，而微分则描述一个函数在一点处的斜率，这是函数的微观性质。因此积分对函数的形状在小范围内的改变不敏感。而微分却很敏感。一个函数小的变化，容易产生相邻点的斜率的大的改变。

由于微分这个固有的困难，所以应尽可能避免数值微分，特别是对实验获得的数据进行微分。在这种情况下，最好用最小二乘曲线拟合这种数据，然后对所得到的多项式进行微分。或用另一种方法，对该数据进行三次样条拟合，然后寻找该样条函数的微分；等等。一般是先拟合（或逼近），再微分。

例题选讲2.1 机械求积

例：试检验下列求积公式的代数精度 $\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{2}{3}f(\frac{1}{4})-\frac{1}{3}f(\frac{1}{2})+\frac{2}{3}f(\frac{3}{4})$

$$令f(x)=1,左边=\int_0^1 1dx = x\Big|_0^1 = 1,右边=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$$

$$令f(x)=x,左边=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}(1^2-0^2)=\frac{1}{2},右边=\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$令f(x)=x^2,左边=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{1}{3}(1^3-0^3)=\frac{1}{3},右边=\frac{2}{3}\times\frac{1}{16}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\times\frac{9}{16}=\frac{1}{24}-\frac{2}{24}+\frac{9}{24}=\frac{1}{3}$$

$$令f(x)=x^3,左边=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{4}x^4\Big|_0^1=\frac{1}{4}(1^3-0^3)=\frac{1}{4}$$

$$右边=\frac{2}{3}\times\frac{1}{64}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{8}+\frac{2}{3}\times\frac{27}{64}=\frac{1}{96}-\frac{4}{96}+\frac{27}{96}=\frac{24}{96}=\frac{1}{4}$$

$$令f(x)=x^4,左边=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{5}x^5\Big|_0^1=\frac{1}{5}(1^3-0^3)=\frac{1}{5}$$

$$右边=\frac{2}{3}\times\frac{1}{256}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{16}+\frac{2}{3}\times\frac{81}{256}=\frac{1}{384}-\frac{8}{384}+\frac{81}{384}=\frac{74}{384}\neq\frac{1}{5}$$

例题选讲2.2 求积公式的设计

- 主要方法：代数精度方法

- 要求：

  所设计的公式应具有“尽可能高”的代数精度

- 技巧：利用对称性

  利用对称性可以显著地减少待定参数的数目，某些具有对称性的结构的求积公式，其代数精度可能会获得额外的好处

题一：试设计求积公式$\int_0^1 f(x)dx \approx A_0 f(\frac{1}{4}) + A_1 f(\frac{1}{2}) + A_2 f(\frac{3}{4})$

解：令原式对于f=1,x,x²准确成立，可列出方程组:

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = 1 \\ \frac{1}{4}A_0 + \frac{1}{2}A_1 + \frac{3}{4}A_2 = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{16}A_0 + \frac{1}{4}A_1 + \frac{9}{16}A_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

用对称性

令$A_0=A_2$

$$\begin{cases} 2A_0 + A_1 = 1 \\ A_0 + \frac{1}{2}A_1 = \frac{1}{2} \\ \frac{5}{8}A_0 + \frac{1}{4}A_1 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

解得：$A_0 = A_2 = \frac{2}{3}, A_1 = -\frac{1}{3}$

构造的插值公式为：

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{2}{3}f(\frac{1}{4}) - \frac{1}{3}f(\frac{1}{2}) + \frac{2}{3}f(\frac{3}{4})$$

具有3次代数精度

题2设计求积公式：$\int_{-2h}^{2h} f(x)dx \approx h[A_{-1}f(-h)+A_0 f(0)+A_1 f(h)]$

解：令h=1,或者作变换x=ht,将原式化为：

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx \approx A_{-1}f(-1)+A_0 f(0)+A_1 f(1)]$$

用对称性
令$A_{-1}=A_1$

对奇函数f=x,x^3
自然准确成立，
令f=1,x^2准确成立

$$\begin{cases} 2A_1 + A_0 = 4 \\ 2A_1 = \dfrac{16}{3} \end{cases}$$

解得：$A_{-1} = A_1 = \dfrac{8}{3}, A_0 = -\dfrac{4}{3}$

构造的插值公式为：

$$\int_{-2h}^{2h} f(x)dx \approx h[\frac{8}{3}f(-h) - \frac{4}{3}f(0) + \frac{8}{3}f(h)$$

具有3次代数精度

题三：试设计求积公式$\int_0^1 f(x)dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(1) + B_0 f'(0)$

解：令原式对于f=1,x,x²准确成立，可列出方程组:

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 1 \\ A_0 + \dfrac{1}{2} B_0 = \dfrac{1}{2} \\ A_1 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

解得：$A_0 = \dfrac{2}{3} A_1 = \dfrac{1}{3}, B_0 = \dfrac{1}{6}$

构造的插值公式为:

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{2}{3} f(0) + \frac{1}{3} f(1) + \frac{1}{6} f'(0)$$

具有2次代数精度

题四：试设计求积公式

$$\int_0^h f(x)dx \approx h[a_0 f(0) + a_1 f(1)] + h^2[b_0 f'(0) + b_1 f'(1)]$$

解：令h=1,或者作变换x=ht,将原式化为：

$$\int_0^1 f(x)dx \approx a_0 f(0) + a_1 f(1) + b_0 f'(0) + b_1 f'(1)$$

令原式对于f=1,x,x^2,x^3准确成立，可列出方程组:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 = 1 \\ a_1 + b_0 + b_1 = \dfrac{1}{2} \\ a_1 + 2b_1 = \dfrac{1}{3} \\ a_1 + 3b_1 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

解得：$a_0 = a_1 = \dfrac{1}{2}, b_0 = -b_1 = \dfrac{1}{12}$

构造的插值公式为：

$$\int_0^h f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(0) + f(h)] + \frac{h^2}{12}[f'(0) - f'(h)]$$

具有3次代数精度

题五：试设计求积公式：$\int_a^b f(x)dx \approx$

$$A_0 f(a) + A_1 f(\frac{a+b}{2}) + A_2 f(b) + B_0 f'(a) + B_1 f'(\frac{a+b}{2}) + B_2 f'(b)$$

解：引进变换x=（b+a)/2+(b-a)t/2,将原式化为：

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_0 f(-1) + A_1 f(0) + A_2 f(1) +$$

$$B_0 f'(-1) + B_1 f'(0) + B_2 f'(1)$$

利用对称性：

再令原式对于f=1,x^2，x^4准确成立，可列出方程组:

$$\begin{cases} 2A_0 + A_1 = 2 \\ 2A_0 - 4B_0 = \frac{2}{3} \\ 2A_0 - 8B_0 = \frac{2}{5} \end{cases}$$

解得：$A_0 = A_2 = \frac{7}{15}, A_1 = \frac{16}{15}, B_0 = -B_2 = \frac{1}{15}, B_1 = 0$

构造的插值公式为$\int_a^b f(x)dx \approx$

$$\frac{b-a}{30}[7f(a) + 16f(\frac{a+b}{2}) + 7f(b)] + \frac{(b-a)^2}{60}[f'(a) + -f'(b)]$$

具有5次代数精度

题6：试设计求积公式$\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx A_0 f(-h) + A_1 f(x_1)$

解：有一未知求积节点，令原式对于f=1,x,x²准确成立，可列出方程组:

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 2h \\ -hA_0 + x_1 A_1 = 0 \\ h^2 A_0 + x_1^2 A_1 = \frac{2}{3}h^3 \end{cases}$$

解得：$A_0 = \frac{h}{2}, A_1 = \frac{3}{2}h, x_1 = \frac{h}{3}$

构造的插值公式为：

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx \frac{h}{2} f(-h) + \frac{3}{2} hf(\frac{h}{3})$$

具有2次代数精度

题7：试设计求积公式$\int_0^1 f(x)dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(1)$

解：令原式对于f=1,x,x^2,x^3准确成立，可列出方程组:

$$\begin{cases} 2A_0 + A_1 = 1 \\ A_0 + \frac{1}{2}A_1 = \frac{1}{2} \\ A_0 + \frac{1}{4}A_1 = \frac{1}{3} \\ A_0 + \frac{1}{8}A_1 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

考虑求积公式的内在对称性，令

$x_1=1/2, A_0=A_2$

可列出方程组:

解得：$A_0 = A_2 = \frac{1}{6}, A_1 = \frac{2}{3}h$

构造的插值公式为：

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{6}[f(0) + 4f(\frac{1}{2}) + f(1)]$$

具有3次代数精度

题8：试设计求积公式$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A[f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)], x_0<x_1<x_2$

解：考虑求积公式的内在对称性，令$x_0=-x_2, x_1=0$,原式可化为:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A[f(x_0)+f(0)+f(-x_0)]$$

对于奇函数$f=x, x^3, x^5$均准确成立，再令$f=1$准确成立，可列出方程组:

$$3A=2$$

解得：$A=\frac{2}{3}$

再令$f=x^2$准确成立，有

$2/3（2x_0^2)=2/3$

解得：$x_2=-x_0=\frac{1}{\sqrt{2}}$

构造的插值公式为：

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{2}{3}[f(-\frac{1}{\sqrt{2}})+f(0)+f(\frac{1}{\sqrt{2}})]$$

具有3次代数精度

例题选讲2.5 数值微分

题1：证明下列数值微分公式具有4阶代数精度

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{12h}[f(x_0-2h)-8f(x_0-h)+8f(x_0+2h)-f(x_0+2h)]$$

证：设 $x_0=0, h=1$，或者作变换 $x=x_0+th$，

$$f'(0) \approx \frac{1}{12}[f(-2)-8f(-1)+8f(1)-f(2)]$$

由对称性：上式对于偶函数 $f=1, x^2, x^4$，准确成立

再用直接验证方法，验证对于 $f=x, x^3$，也准确成立，

但对于 $f=x^5$ 不成立，所以，上式具有4阶精度

题3: 验证数值微分公式: $f''(x_0) \approx \dfrac{1}{12h^2}[-f(x_0-2h)+16f(x_0-h)$
$-30f(x_0)+16f(x_0+h)-f(x_0+2h)]$具有5阶代数精度。

证: 令$x_0=0, h=1$,或作变换$x=x_0+th$,可得:

$$f''(0) \approx \frac{1}{12}[-f(-2)+16f(-1)-30f(0)+16f(1)-f(2)]$$

由对称性: 上式对于奇函数$f=x, x^3, x^5$,准确成立

再通过直接验证的方法知:

其对于$f=1, x^2, x^4$,准确成立, 但对于$f=x^6$不成立

$\Rightarrow$ 该式具有5阶代数精度

习题二

2.试判定下列求积公式的代数精度: $\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{3}{4}f(\frac{1}{3})+\frac{1}{4}f(1)$

解: 直接验证:

当$f=1$时, 左边$=1$, 右边$=1$, 准确成立

当$f=x$时, 左边$=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}$, 右边$=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times 1=\frac{1}{2}$, 准确成立

当$f=x^2$时, 左边$=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{1}{3}$, 右边$=\frac{3}{4}\times\frac{1}{9}+\frac{1}{4}\times 1=\frac{1}{3}$, 准确成立

当当$f=x^3$时, 左边$=\frac{1}{4}x^4\Big|_0^1=\frac{1}{4}$, 右边$=\frac{3}{4}\times\frac{1}{27}+\frac{1}{4}\times 1=\frac{5}{18}$, 不成立

$\therefore$ 具有2阶代数精度

练习： $(3)\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{4}f(0)+A_0 f(x_0)$

解：令原式对于 $f=1, x$ 准确成立，得

$$\begin{cases}\frac{1}{4}+A_0=1\\ A_0 x_0=\frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A_0=\frac{3}{4}\\ x_0=\frac{2}{3}\end{cases}$$

求积公式为: $\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{4}f(0)+\frac{3}{4}f(\frac{2}{3})$

当 $f=x^2$ 时，左边 $=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{1}{3}$，右边 $=\frac{3}{4}\times\frac{4}{9}=\frac{1}{3}$，准确成立

当 $f=x^3$ 时，左边 $=\frac{1}{4}x^4\Big|_0^1=\frac{1}{4}$，右边 $=\frac{3}{4}\times\frac{8}{27}=\frac{2}{9}$，不成立

$\therefore$ 具有2阶代数精度

18

4.下列求积公式称作辛甫生3/8公式：

$$\int_0^3 f(x)dx \approx \frac{3}{8}[f(0)+3f(1)+3f(2)+f(3)]$$

试判定这一求积公式的代数精度

解：当 $f=1$ 时，左边 $=3$，右边 $=\frac{3}{8}[1+3+3+1]=$ 左边，准确成立

当 $f=x$ 时，左边 $=\frac{9}{2}$，右边 $=\frac{3}{8}[0+3+6+3]=$ 左边，准确成立

当 $f=x^2$ 时，左边 $=9$，右边 $=\frac{3}{8}[0+3+12+9]=$ 左边，准确成立

当 $f=x^3$ 时，左边 $=\frac{81}{4}$，右边 $=\frac{3}{8}[0+3+24+27]=$ 左边，准确成立

当 $f=x^4$ 时，左边 $=\frac{243}{5}$，右边 $=\frac{3}{8}[0+3+48+81]=\frac{99}{2}\neq$ 左边，不成立

所以，原式具有3次代数精度

19

题5：证明上述3/8辛普森公式是插值型的

证：设以 $x=0,1,2,3$ 为节点构造拉格朗日插值多项式

$$p(x)=l_0(x)f(0)+l_1(x)f(1)+l_2(x)f(2)+l_3(x)f(3)$$

$$l_0(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)}=-\frac{1}{6}(x^3-6x^2+11x-6)$$

$$\int_0^3 l_0(x)=-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}x^4-2x^3+\frac{11}{2}x^2-6x\right)\Big|_0^3$$

$$=-\frac{1}{6}\left[\frac{81}{4}-54+\frac{99}{2}-18\right]=-\frac{1}{6}\times\left(-\frac{9}{4}\right)=\frac{3}{8}$$

同理：$\int_0^3 l_1(x)=\frac{9}{8},\int_0^3 l_2(x)=\frac{9}{8},\int_0^3 l_3(x)=\frac{3}{8}$

$\therefore$ 该公式是插值型的

本章要点：

- 1、掌握求积公式的设计方法
- 2、学会判断求积公式的代数精度
- 3、学会运用求积公式的对称性
- 4、熟练掌握梯形公式、辛普森公式、柯特斯公式
- 5、会使用复化求积法解决问题
- 6、掌握龙贝格算法

作业：

P94，2、3、8、10、16、25