

合肥工业大学 试卷 (A)

2012~2013 学年第 2 学期 课程代码 1110052B 课程名称 离散数学 学分 2 课程性质:必修 ☐ 选修 ☐ 限修 ☐ 考试形式:开卷、闭卷

专业班级 (教学班) 2011 信管专业 考试日期 2013 年 4 月 29 日 命题教师 杨爱峰 系 (所或教研室) 主任 审批签名 _____

一、单项选择题 (每小题 2 分, 合计 40 分)

1. 下列命题中, () 是复合命题。
 A 长江与黄河都流经安徽境内 B 美丽的黄山地处安徽
 C 安徽与河南相邻 D 合肥是包公故里

2. 下列命题公式为重言式的是 ()。
 A $(p \vee \neg p) \rightarrow q$ B $p \rightarrow (p \vee q)$ C $q \wedge \neg q$ D $(p \rightarrow \neg p) \rightarrow q$

3. 设 p : 天下大雨, q : 小王乘公共汽车上班, 命题“除非天下大雨, 小王才乘公共汽车上班”的符号化形式为 ()。
 A $p \rightarrow q$ B $q \rightarrow p$ C $p \rightarrow \neg q$ D $\neg p \rightarrow q$

4. 命题“如果时间倒流, 那么我们将长生不老。”的否定可表示为 ()。
 A 如果我们长生不老, 那么时间将倒流 B 如果时间不倒流, 那么我们将不会长生不老
 C 时间不倒流或者我们将长生不老 D 时间倒流并且我们将不会长生不老

5. 在论域 $\{2, 3\}$ 中, () 与 $\exists x \forall y P(x, y)$ 等价。
 A $(P(2, 2) \wedge P(2, 3)) \vee (P(3, 2) \wedge P(3, 3))$ B $(P(2, 2) \vee P(2, 3)) \wedge (P(3, 2) \vee P(3, 3))$
 C $P(2, 2) \vee P(2, 3) \vee P(3, 2) \vee P(3, 3)$ D $P(2, 2) \wedge P(2, 3) \wedge P(3, 2) \wedge P(3, 3)$

6. 设 $C(x)$: x 是国家级运动员, $G(x)$: x 是健壮的, 则命题“没有一个国家级运动员不是健壮的”可符号化为 ()。
 A $\neg \exists x (C(x) \wedge \neg G(x))$ B $\neg \forall x (C(x) \wedge \neg G(x))$
 C $\forall x (C(x) \rightarrow G(x))$ D $\forall x (C(x) \wedge G(x))$

7. 设论域为非负整数集, 下列谓词公式中, () 的真值为真。
 A $\forall x \exists y (xy = 1)$ B $\forall x \exists y (xy = 0)$
 C $\exists x \forall y (xy = 2)$ D $\forall x \forall y \exists z (x - y = z)$

8. 下列蕴涵式中, () 不成立。
 A $\forall x \exists y P(x, y, 6) \Rightarrow \exists y P(6, y, 6)$ B $\exists x \exists y P(x, y, 6) \Rightarrow \exists y P(6, y, 6)$
 C $\forall x \exists y P(x, y, 6) \Rightarrow \exists y P(x, y, 6)$ D $\forall x \exists y P(x, y, 6) \Rightarrow \exists z \forall x \exists y P(x, y, z)$

9. 谓词公式 $\forall x P(x, y) \rightarrow (\exists z Q(x, z) \wedge \forall y R(x, y))$ 中变元 x ()。
 A 既是自由变元又不是约束变元 B 是约束变元但不是自由变元
 C 既不是自由变元也不是约束变元 D 既是自由变元又是约束变元

10. 设 $A = \emptyset$, $B = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, 则 $B - A$ 是 ()。
 A $\{\{\emptyset\}\}$ B $\{\emptyset\}$ C $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ D \emptyset

11. 下列关系中能构成函数的是 ()。
 A $\{ \langle x, y \rangle \mid (x, y \in \text{自然数集}) \wedge (x + y < 10) \}$ B $\{ \langle x, y \rangle \mid (x, y \in \text{实数集}) \wedge (y = |x|) \}$
 C $\{ \langle x, y \rangle \mid (x, y \in \text{实数集}) \wedge (y^2 = x) \}$ D $\{ \langle x, y \rangle \mid (x, y \in \text{整数集}) \wedge (x = y \bmod 3) \}$

12. 设 $A = \{1, 2, 3\}$, A 上二元关系 $S = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$, 则 S 是

2012~2013 学年第 2 学期 课程代码 1110052B 课程名称 离散数学 学分 2 课程性质:必修 ☐ 选修 ☐ 限修 ☐ 考试形式:开卷、闭卷

专业班级 (教学班) 2011 信管专业 考试日期 2013 年 4 月 29 日 命题教师 杨爱峰 系 (所或教研室) 主任

审批签名 _____

请勿私自出售和带进考场

() 17. 设 R 为实数集, 定义 $*$ 运算如下: $a*b=|a+b+ab|$, 则 $*$ 运算满足 ()。

A 自反关系 B 传递关系 C 对称关系 D 反自反关系 A 结合律 B 幂等律 C 有么元 D 交换律

13. 设 $A=\{a,b,c,d\}$, A 上的等价关系 $R=\{\langle a,b \rangle, \langle b,a \rangle, \langle c,d \rangle, \langle d,c \rangle\} \cup I_A$, 则对应于 R () 运算关于整数集不构成半群。

的 A 的划分是 () A $\{\{a\}, \{b,c\}, \{d\}\}$ B $\{\{a,b\}, \{c\}, \{d\}\}$ C $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$ D $\{\{a,b\}, \{c\}, \{d\}\}$ A $a*b=\max(a,b)$ B $a*b=b$ C $a*b=2ab$ D $a*b=|a-b|$

14. 设 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, 下列关系中 () 不是 A 上的相容关系。

A $\{\langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \langle 3,2 \rangle\} \cup I_A$ B $\{\langle 2,5 \rangle, \langle 2,6 \rangle, \langle 4,2 \rangle, \langle 4,6 \rangle, \langle 6,2 \rangle, \langle 6,4 \rangle\} \cup I_A$ C $\{\langle 1,3 \rangle, \langle 1,5 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \langle 3,5 \rangle, \langle 5,1 \rangle, \langle 5,3 \rangle\} \cup I_A$ D $\{\langle 2,3 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 4,5 \rangle, \langle 5,4 \rangle, \langle 5,6 \rangle, \langle 6,5 \rangle\} \cup I_A$ A $\{0,2,4\}$ B $\{0,1,5\}$ C $\{0,3\}$ D $\{0,1,2,3,4,5\}$

20. 设 $\langle \{a,b,c\}, * \rangle$ 为代数系统, $*$ 运算如下: 则零元为 ()。

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	c	c

C c D 没有

15. 设 R 为实数集, 关系 $h=\{\langle x,y \rangle | x,y \in R, y=2x\}$, 关系 $g=\{\langle x,y \rangle | x,y \in R, y=3x\}$, 复合关系 $h^{-1} \circ g$ 的值为 ()。

A $\{\langle x,y \rangle | x,y \in R, y=6x\}$ B $\{\{\langle x,y \rangle | x,y \in R, y=5x\}\}$

C $\{\langle x,y \rangle | x,y \in R, y=\frac{x}{6}\}$ D $\{\{\langle x,y \rangle | x,y \in R, y=4x\}\}$

16. 设 $A=\{1,2,3,4,5\}$, 双射 $f=\{\langle 1,5 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \langle 4,4 \rangle, \langle 5,2 \rangle\}$, 则 f^{2013} 的值为 ()。

A $\{\langle 1,3 \rangle, \langle 2,5 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 4,4 \rangle, \langle 5,1 \rangle\}$ B $\{\langle 1,5 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \langle 4,4 \rangle, \langle 5,2 \rangle\}$

C $\{\langle 1,5 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \langle 4,4 \rangle, \langle 5,2 \rangle\}$ D $\{\langle 1,3 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 4,4 \rangle, \langle 5,2 \rangle\}$

二、(10 分) 如果我离散数学考试没通过, 那么我很伤心。如果我很伤心, 我要么哭泣, 要么不想说话。而我现在笑容满面, 并且很想找人聊天。因此说明我的离散数学考试通过了。

要求: (1) 翻译上述命题;

合肥工业大学 试卷 (A)

2012~2013 学年第 2 学期 课程代码 1110052B 课程名称 离散数学 学分 2 课程性质: 必修 ☐ 选修 ☐ 限修 ☐ 考试形式: 开卷、闭卷

专业班级 (教学班) 2011 信管专业 考试日期 2013 年 4 月 29 日 命题教师 杨爱峰 系 (所或教研室) 主任

审批签名 _____

请勿私自出售和带进考场

(2) 用命题逻辑理论证明上述结论成立。

六、(10 分) 设 R 为实数集, $+$ 为普通加法, \bullet 为普通乘法, $\langle R, + \rangle$ 是一个代数系统, $*$ 是 R 上的一个二元运算, 使得 $\forall x, y \in R$, 都有 $x*y = x+y+x*y$ 。

请勿私自出售和带进考场

三、(10 分) 已知命题公式 $(P \vee Q) \rightarrow R$ 。

要求: (1) 证明 $\langle R, + \rangle$ 是独异点;

要求: (1) 用等值演算方法求上述命题公式的主合取范式和主析取范式; (2) 写出群的定义, $\langle R, + \rangle$ 是否是群? 为什么?

(2) 用真值表方法求上述命题公式的主合取范式和主析取范式。

请勿私自出售和带进考场

四、(10 分) 设集合 $A = \{a, b, c, d\}$ 上的关系 $R = \{\langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle\}$ 。

要求: (1) 写出 R 的关系矩阵;

(2) 画出 R 的关系图;

(3) 求出 R 的自反闭包 $r(R)$ 、对称闭包 $s(R)$ 、传递闭包 $t(R)$ 。

请勿私自出售和带进考场

请勿私自出售和带进考场

五、(20 分) 设 $S = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$, “ \leq ”为 S 上整除关系。

要求: (1) 写出偏序的定义;

(2) 写出盖住关系 $\text{cov}(S)$;

(3) 画出偏序集 $\langle S, \leq \rangle$ 的哈斯图;

(4) 写出偏序集 $\langle S, \leq \rangle$ 的极小元、最小元、极大元、最大元;

(5) 写出 $B = \{2, 4, 6\}$ 的最大元、最小元、上界、下界、上确界、下确界。

请勿私自出售和带进考场

离散习题+14年真题

一、填空题

1. 设集合 A, B , 其中 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2\}$, 则 $A - B =$ _____; $\rho(A) - \rho(B) =$ _____.
2. 设有限集合 $A, |A| = n$, 则 $|\rho(A \times A)| =$ _____.
3. 设集合 $A = \{a, b\}, B = \{1, 2\}$, 则从 A 到 B 的所有映射是 _____, 其中双射的是 _____.
4. 已知命题公式 $G = \neg(P \rightarrow Q) \wedge R$, 则 G 的主析取范式是 _____.
5. 设 G 是完全二叉树, G 有 7 个点, 其中 4 个叶点, 则 G 的总度数为 _____, 分枝点数为 _____.
6. 设 A, B 为两个集合, $A = \{1, 2, 4\}, B = \{3, 4\}$, 则从 $A \cap B =$ _____; $A \cup B =$ _____.
7. 设 R 是集合 A 上的等价关系, 则 R 所具有的关系的三个特性是 _____.
8. 设命题公式 $G = \neg(P \rightarrow (Q \wedge R))$, 则使公式 G 为真的解释有 _____.
9. 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, A 上的关系 $R_1 = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2)\}, R_2 = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$, 则 $R_1 \circ R_2 =$ _____, $R_2 \circ R_1 =$ _____, $R_1^2 =$ _____, $R_2^2 =$ _____.
10. 设有限集 $A, B, |A| = m, |B| = n$, 则 $|\rho(A \times B)| =$ _____.
11. 设 A, B, R 是三个集合, 其中 R 是实数集, $A = \{x \mid -1 \leq x \leq 1, x \in R\}, B = \{x \mid 0 \leq x < 2, x \in R\}$, 则 $A - B =$ _____, $B - A =$ _____, $A \cap B =$ _____.
12. 设集合 $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, R 是 A 上的整除, 则 R 以集合形式(列举法)记为 _____.
13. 设一阶逻辑公式 $G = \forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$, 则 G 的前束范式是 _____.
14. 设 G 是具有 8 个顶点的树, 则 G 中增加 _____ 条边才能把 G 变成完全图.
15. 设谓词的定义域为 $\{a, b\}$, 将表达式 $\forall x R(x) \rightarrow \exists x S(x)$ 中量词消除, 写成与之对应的命题公式是 _____.
16. 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, A 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}, S = \{(1, 3), (2, 3), (3, 2)\}$. 则 $R \circ S =$ _____.

$R^2 =$ _____.

二、选择题

1. 设集合 $A = \{2, \{a\}, 3, 4\}$, $B = \{\{a\}, 3, 4, 1\}$, E 为全集, 则下列命题正确的是().
(A) $\{2\} \in A$ (B) $\{a\} \subseteq A$ (C) $\emptyset \subseteq \{\{a\}\} \subseteq B \subseteq E$ (D) $\{\{a\}, 1, 3, 4\} \subseteq B$.
2. 设集合 $A = \{1, 2, 3\}$, A 上的关系 $R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$, 则 R 不具备().
(A) 自反性 (B) 传递性 (C) 对称性 (D) 反对称性
3. 设半序集 (A, \leq) 关系 \leq 的哈斯图如下所示, 若 A 的子集 $B = \{2, 3, 4, 5\}$, 则元素 6 为 B 的().
(A) 下界 (B) 上界 (C) 最小上界 (D) 以上答案都不对



4. 下列语句中, () 是命题.
(A) 请把门关上 (B) 地球外的星球上也有人
(C) $x + 5 > 6$ (D) 下午会有会吗?
5. 设 I 是如下一个解释: $D = \{a, b\}$, $\begin{matrix} P(a, a) & P(a, b) & P(b, a) & P(b, b) \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$, 则在解释 I 下取真值为 1 的公式是().
(A) $\exists x \forall y P(x, y)$ (B) $\forall x \forall y P(x, y)$ (C) $\forall x P(x, x)$ (D) $\forall x \exists y P(x, y)$.

6. 若供选择答案中的数值表示一个简单图中各个顶点的度, 能画出图的是().
(A) $(1, 2, 2, 3, 4, 5)$ (B) $(1, 2, 3, 4, 5, 5)$ (C) $(1, 1, 1, 2, 3)$ (D) $(2, 3, 3, 4, 5, 6)$.
7. 设 G, H 是一阶逻辑公式, P 是一个谓词, $G = \exists x P(x)$, $H = \forall x P(x)$, 则一阶逻辑公式 $G \rightarrow H$ 是().
(A) 恒真的 (B) 恒假的 (C) 可满足的 (D) 前束范式.
8. 设命题公式 $G = \neg(P \rightarrow Q)$, $H = P \rightarrow (Q \rightarrow \neg P)$, 则 G 与 H 的关系是().
(A) $G \Rightarrow H$ (B) $H \Rightarrow G$ (C) $G = H$ (D) 以上都不是.

9. 设 A, B 为集合, 当() 时 $A - B = B$.
(A) $A = B$ (B) $A \subseteq B$ (C) $B \subseteq A$ (D) $A = B = \emptyset$.
10. 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, A 上的关系 $R = \{(1, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$, 则 R 具有().
(A) 自反性 (B) 传递性 (C) 对称性 (D) 以上答案都不对
11. 下列关于集合的表示中正确的为().
(A) $\{a\} \in \{a, b, c\}$ (B) $\{a\} \subseteq \{a, b, c\}$ (C) $\emptyset \in \{a, b, c\}$ (D) $\{a, b\} \in \{a, b, c\}$

12. 命题 $\forall x G(x)$ 取真值 1 的充分必要条件是().
(A) 对任意 x , $G(x)$ 都取真值 1. (B) 有一个 x_0 , 使 $G(x_0)$ 取真值 1.
(C) 有某些 x , 使 $G(x_0)$ 取真值 1. (D) 以上答案都不对.

13. 设 G 是连通平面图, 有 5 个顶点, 6 个面, 则 G 的边数是().
(A) 9 条 (B) 5 条 (C) 6 条 (D) 11 条.
14. 设 G 是 5 个顶点的完全图, 则从 G 中删去() 条边可以得到树.
(A) 6 (B) 5 (C) 10 (D) 4.

15. 设图 G 的相邻矩阵为 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 则 G 的顶点数与边数分别为().
(A) 4, 5 (B) 5, 6 (C) 4, 10 (D) 5, 8.

三、计算证明题

1. 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12\}$, R 为整除关系.

(1) 画出半序集 (A, R) 的哈斯图;

(2) 写出 A 的子集 $B = \{3, 6, 9, 12\}$ 的上界, 下界, 最小上界, 最大下界;

(3) 写出 A 的最大元, 最小元, 极大元, 极小元。

2. 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, A 上的关系 $R = \{(x, y) | x, y \in A \text{ 且 } x \geq y\}$, 求

(1) 画出 R 的关系图;

(2) 写出 R 的关系矩阵。

3. 设 R 是实数集合, σ, τ, φ 是 R 上的三个映射, $\sigma(x) = x+3, \tau(x) = 2x, \varphi(x) = x/4$, 试求复合映射 $\sigma \circ \tau, \sigma \circ \sigma, \sigma \circ \varphi, \varphi \circ \tau, \sigma \circ \varphi \circ \tau$ 。

4. 设 I 是如下一个解释: $D = \{2, 3\}$,

a	b	$f(2)$	$f(3)$	$P(2, 2)$	$P(2, 3)$	$P(3, 2)$	$P(3, 3)$
3	2	3	2	0	0	1	1

试求 (1) $P(a, f(a)) \wedge P(b, f(b))$;

(2) $\forall x \exists y P(y, x)$ 。

5. 设集合 $A = \{1, 2, 4, 6, 8, 12\}$, R 为 A 上整除关系。

(1) 画出半序集 (A, R) 的哈斯图;

(2) 写出 A 的最大元, 最小元, 极大元, 极小元;

(3) 写出 A 的子集 $B = \{4, 6, 8, 12\}$ 的上界, 下界, 最小上界, 最大下界。

6. 设命题公式 $G = \neg(P \rightarrow Q) \vee (Q \wedge (\neg P \rightarrow R))$, 求 G 的主析取范式。

7. (9分) 设一阶逻辑公式: $G = (\forall x P(x) \vee \exists y Q(y)) \rightarrow \forall x R(x)$, 把 G 化成前束范式。

9. 设 R 是集合 $A = \{a, b, c, d\}$ 上的二元关系, $R = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, d)\}$,

(1) 求出 $r(R), s(R), t(R)$;

(2) 画出 $r(R), s(R), t(R)$ 的关系图。

11. 通过求主析取范式判断下列命题公式是否等价:

(1) $G = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$

(2) $H = (P \vee (Q \wedge R)) \wedge (Q \vee (\neg P \wedge R))$

13. 设 R 和 S 是集合 $A = \{a, b, c, d\}$ 上的关系, 其中 $R = \{(a, a), (a, c), (b, c), (c, d)\}$,

$S = \{(a, b), (b,$

$c), (b, d), (d, d)\}$ 。

(1) 试写出 R 和 S 的关系矩阵;

(2) 计算 $R \circ S, R \cup S, R^{-1}, S^{-1}, R^{-1} \circ S^{-1}$ 。

四、证明题

1. 利用形式演绎法证明: $\{P \rightarrow Q, R \rightarrow S, P \vee R\}$ 蕴涵 $Q \vee S$ 。

2. 设 A, B 为任意集合, 证明: $(A - B) - C = A - (B \cup C)$ 。

3. (本题 10 分) 利用形式演绎法证明: $\{\neg A \vee B, \neg C \rightarrow \neg B, C \rightarrow D\}$ 蕴涵 $A \rightarrow D$ 。

4. (本题 10 分) A, B 为两个任意集合, 求证:

$$A - (A \cap B) = (A \cup B) - B.$$

参考答案

一、填空题

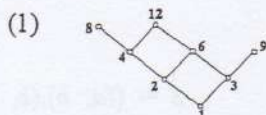
1. $\{3\}; \{\{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$
2. $2^{n^2}.$
3. $\alpha_1 = \{(a,1), (b,1)\}, \alpha_2 = \{(a,2), (b,2)\}, \alpha_3 = \{(a,1), (b,2)\}, \alpha_4 = \{(a,2), (b,1)\}; \alpha_3, \alpha_4.$
4. $(P \wedge \neg Q \wedge R).$
5. 12, 3.
6. $\{4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2\}.$
7. 自反性; 对称性; 传递性.
8. $(1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0).$
9. $\{(1,3), (2,2), (3,1)\}; \{(2,4), (3,3), (4,2)\}; \{(2,2), (3,3)\}.$
10. $2^{m \times n}.$
11. $\{x | -1 \leq x < 0, x \in \mathbb{R}\}; \{x | 1 < x < 2, x \in \mathbb{R}\}; \{x | 0 \leq x \leq 1, x \in \mathbb{R}\}.$
12. 12; 6.
13. $\{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}.$
14. $\exists x (\neg P(x) \vee Q(x)).$
15. 21.
16. $(R(a) \wedge R(b)) \rightarrow (S(a) \vee S(b)).$
17. $\{(1, 3), (2, 2)\}; \{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}.$

二、选择题

5. C. 2. D. 3. B. 4. B. 5. D.
6. C. 7. C. 8. A. 9. D. 10. B.
11. B. 12. C. 13. A. 14. A. 15. D

三、计算证明题

1.

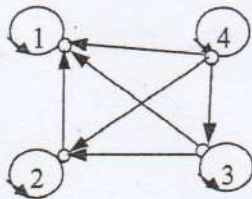


(2) B 无上界, 也无最小上界。下界 1, 3; 最大下界是 3.

(3) A 无最大元, 最小元是 1, 极大元 8, 12, 90; 极小元是 1.

2. $R = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\}.$

(1)



(2) $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$3. (1) \sigma \circ \tau = \sigma(\tau(x)) = \tau(x) + 3 = 2x + 3 = 2x + 3.$$

$$(2) \sigma \circ \sigma = \sigma(\sigma(x)) = \sigma(x) + 3 = (x + 3) + 3 = x + 6,$$

$$(3) \sigma \circ \varphi = \sigma(\varphi(x)) = \varphi(x) + 3 = x/4 + 3,$$

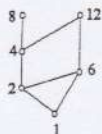
$$(4) \varphi \circ \tau = \varphi(\tau(x)) = \tau(x)/4 = 2x/4 = x/2,$$

$$(5) \sigma \circ \varphi \circ \tau = \sigma(\varphi \circ \tau) = \varphi \circ \tau + 3 = 2x/4 + 3 = x/2 + 3.$$

$$4. (1) P(a, f(a)) \wedge P(b, f(b)) = P(3, f(3)) \wedge P(2, f(2)) \\ = P(3, 2) \wedge P(2, 3) \\ = 1 \wedge 0 \\ = 0.$$

$$(2) \forall x \exists y P(y, x) = \forall x (P(2, x) \vee P(3, x)) \\ = (P(2, 2) \vee P(3, 2)) \wedge (P(2, 3) \vee P(3, 3)) \\ = (0 \vee 1) \wedge (0 \vee 1) \\ = 1 \wedge 1 \\ = 1.$$

5. (1)



(2) 无最大元, 最小元 1, 极大元 8, 12; 极小元是 1.

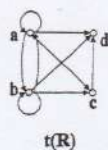
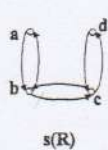
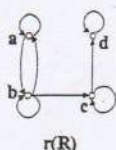
(3) B 无上界, 无最小上界. 下界 1, 2; 最大下界 2.

$$6. G = \neg(P \rightarrow Q) \vee (Q \wedge (\neg P \rightarrow R)) \\ = \neg(\neg P \vee Q) \vee (Q \wedge (P \vee R)) \\ = (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge (P \vee R)) \\ = (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge P) \vee (Q \wedge R) \\ = (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \\ = (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \\ = m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 = \Sigma(3, 4, 5, 6, 7).$$

$$7. G = (\forall x P(x) \vee \exists y Q(y)) \rightarrow \forall x R(x) \\ = \neg(\forall x P(x) \vee \exists y Q(y)) \vee \forall x R(x) \\ = (\neg \forall x P(x) \wedge \neg \exists y Q(y)) \vee \forall x R(x) \\ = (\exists x \neg P(x) \wedge \forall y \neg Q(y)) \vee \forall x R(x) \\ = \exists x \forall y \forall z ((\neg P(x) \wedge \neg Q(y)) \vee R(z))$$

$$9. (1) r(R) = R \cup I_A = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, d), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}, \\ s(R) = R \cup R^{-1} = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (c, d), (d, c)\}, \\ t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (c, d)\};$$

(2) 关系图:



$$11. G = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$$

$$=(P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$$

$$=m_6 \vee m_7 \vee m_3$$

$$=\Sigma(3, 6, 7)$$

$$H = (P \vee (Q \wedge R)) \wedge (Q \vee (\neg P \wedge R))$$

$$=(P \wedge Q) \vee (Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$$

$$=(P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$$

$$=(P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$

$$=m_6 \vee m_3 \vee m_7$$

$$=\Sigma(3, 6, 7)$$

G, H 的主析取范式相同, 所以 $G = H$.

$$13. \quad (1) M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) R \circ S = \{(a, b), (c, d)\},$$

$$R \cup S = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, c), (b, d), (c, d), (d, d)\},$$

$$R^{-1} = \{(a, a), (c, a), (c, b), (d, c)\},$$

$$S^{-1} \circ R^{-1} = \{(b, a), (d, c)\}.$$

四 证明题

1. 证明: $\{P \rightarrow Q, R \rightarrow S, P \vee R\}$ 蕴涵 $Q \vee S$

$$(1) P \vee R \quad P$$

$$(2) \neg R \rightarrow P \quad Q(1)$$

$$(3) P \rightarrow Q \quad P$$

$$(4) \neg R \rightarrow Q \quad Q(2)(3)$$

$$(5) \neg Q \rightarrow R \quad Q(4)$$

$$(6) R \rightarrow S \quad P$$

$$(7) \neg Q \rightarrow S \quad Q(5)(6)$$

$$(8) Q \vee S \quad Q(7)$$

2. 证明: $(A - B) - C = (A \cap \neg B) \cap \neg C$

$$= A \cap (\neg B \cap \neg C)$$

$$= A \cap \neg(B \cup C)$$

$$= A - (B \cup C)$$

3. 证明: $\{\neg A \vee B, \neg C \rightarrow \neg B, C \rightarrow D\}$ 蕴涵 $A \rightarrow D$

$$(1) A \quad D(\text{附加})$$

$$(2) \neg A \vee B \quad P$$

$$(3) B \quad Q(1)(2)$$

$$(4) \neg C \rightarrow \neg B \quad P$$

$$(5) B \rightarrow C \quad Q(4)$$

$$(6) C \quad Q(3)(5)$$

$$(7) C \rightarrow D \quad P$$

$$(8) D \quad Q(6)(7)$$

$$(9) A \rightarrow D \quad D(1)(8)$$

所以 $\{\neg A \vee B, \neg C \rightarrow \neg B, C \rightarrow D\}$ 蕴涵 $A \rightarrow D$.

4. 证明: $A - (A \cap B)$

$$= A \cap \sim(A \cap B)$$

$$= A \cap (\sim A \cup \sim B)$$

$$= (A \cap \sim A) \cup (A \cap \sim B)$$

$$= \emptyset \cup (A \cap \sim B)$$

$$= (A \cap \sim B)$$

$$= A - B$$

而 $(A \cup B) - B$

$$= (A \cup B) \cap \sim B$$

$$= (A \cap \sim B) \cup (B \cap \sim B)$$

$$= (A \cap \sim B) \cup \emptyset$$

$$= A - B$$

所以: $A - (A \cap B) = (A \cup B) - B$

请勿私自出售和带进考场

请勿私自出售和带进考场

请勿私自出售和带进考场

请勿私自出售和带进考场

请勿私自出售和带进考场