2013-2014 学年第一学期《线性代数》(宣城)卷(A2)

一．填空题（每小题 4分，共 20分）

1.α,β,γ 为三维列向量，已知三阶行列式 $|4\gamma-\alpha,\beta-2\gamma,2\alpha|=40$，则行列式 $|\alpha,\beta,\gamma|=$ <u>－5</u>．

2. 设 $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}=$ <u>$\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$</u>．

3. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2ax_2x_3$ 正定 则 a 的取值范围为 <u>$-1<a<1$</u>．

4.设 n 阶行列式 $|A|=0$，其伴随阵 $A^*\neq O$，则 $R(A^*)=$ <u>1</u>．

5.设 A 为 n 阶矩阵，$A^T=A^{-1}$，$|A|<0$ 则 $|A+E|=$ <u>0</u>．

二．选择题（每小题 4分，共 20分）

1.设 A 为 3 阶方阵，将 A 的第 2 行加到第 3 行得 B，再把 B 的第 1 行与第 2 行交换得 C，则满足 $PA=C$ 的可逆矩阵 P 等于（ C ）.

(A) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

2.设 A、B 为 n 阶方阵，且 $R(A)=R(B)$，则（ D ）.

(A)$R(A-B)=0$， (B)$R(A+B)=2R(A)$，

(C)$R(A,B)=2R(A)$， (D)$R(A,B)\le R(A)+R(B)$

3.设矩阵 $A\sim B$ 则下列说法正确的是（ B ）.

(A) A、B 有相同的行最简型 (B) A、B 有相同的标准型

(C) A、B 的行向量组等价 (D) A、B 的列向量组等价

4.设 A 为 $m\times n$ 阶实矩阵，则存在 $n\times s$ 阶非零矩阵 B，使 $AB=O$ 的充要条件是（ A ）.

（A）$R(A)<n$ （B）$R(A)=n$ （C）$R(A)<m$ （D）$R(A)=m$

5.设 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,(m<n)$ 线性无关，则 n 维向量 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关的充要条件为（ D ）.

(A)向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性表示；

(B)向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示；

(C)向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 与向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 等价；

(D)矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ 与矩阵 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$ 等价.

三、(10 分) 计算行列式 $|A|,|B|,D=\begin{vmatrix}O&A\\B&O\end{vmatrix}$，

其中 $A=\begin{vmatrix}1&2&\cdots&n-1&n+x\\1&2&\cdots&n-1+x&n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&2+x&\cdots&n-1&n\\1+x&2&\cdots&n-1&n\end{vmatrix}$，$B=\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0&0\\0&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&n-1&0\\0&0&\cdots&0&n\end{vmatrix}$.

四、（10 **分）设矩阵** $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&-2&4\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$ **且** $B(2X-A)=X$ **，求矩阵** X

五、（10 **分）已知向量组** $\alpha_1=(1,-2,-2,1)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(3,-1,-3,-2)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(5,0,-4,-5)^{\mathrm{T}},\alpha_4=(2,1,-1,-3)^{\mathrm{T}}$ **，**

(1)求该向量组的秩及其一个极大线性无关组；

(2)当 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ **线性相关时，将其余向量用该极大无关组线性表示.**

六、（12 **分）** $\alpha_1=(1,2,0)^T,\alpha_2=(1,a+2,-3a)^T,\alpha_3=(-1,-b-2,2b)^T$ **，** $\beta=(1,3,-3)^T$**，试讨论** a,b **为何值时**

（1）β **不能用** $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ **线性表示；**

（2）β **可由** $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ **唯一地表示，并求出表达式；**

（3）β **可由** $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ **表示，但表达式不唯一，并求出表达式 .**

七、（12 **分）设二次型** $f(x_1,x_2,x_3)=(2x_1-x_2+x_3)^2$ **，**

(1)**写出二次型** f **的矩阵** A **；**

(2)**求一正交变换** $x=Q\ y$ **，化二次型** f **为标准型 .**

八、（6 **分）设** A**、**B **均为** n **阶方阵 ,且** $A^2=A$**，** $B^2=B$**，** $AB+BA=O$ **，证明：** $AB=O$ **.**

2013－2014 学年第二学期《线性代数》试卷(A)参考答案

一、 1．$\underline{-5}$；2．$\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$；3．$\underline{-1<a<1}$；4．$\underline{1}$；5．$\underline{0}$ ．

二、 1．C；2．D； 3．B； 4．A；5．D．

三、（10 分）解： $|A|=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(\frac{n(n+1)}{2}+x)x^{n-1}$，$|B|=n!$，

$D=(-1)^{n^2}|A||B|=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+n^2}(\frac{n(n+1)}{2}+x)n!x^{n-1}$ ．

四、（10 分）解： $(2B-E)X=BA$，因为 $2B-E$ 可逆，

所以 $X=(2B-E)^{-1}BA=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

五、（10 分）解：(1) $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & -5 & -3 \end{pmatrix}\overset{行}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$r(A)=2$ ，

α_1,α_2 为其一个极大无关组；

（2） $\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$ ，$\alpha_4=-\alpha_1+\alpha_2$ ．

六、（12 分）解 问题转化为求方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ 2x_1+(a+2)x_2-(b+2)x_3=3 \\ -3ax_2+2bx_3=-3 \end{cases}$，的解，

增广矩阵 $B=(A\,|\,\beta)=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & a+2 & -b-2 & 3 \\ 0 & -3a & 2b & -3 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & b & 0 \end{array}\right)$，

（1） $a=0$ 时，(若 $b=0$，则 $R(A)=1\neq R(B)=2$；若 $b\neq 0$，则 $R(A)=2\neq R(B)=3$)方程组无解，即 β 不能用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示．

（2） 当 $a\neq 0,b\neq 0$ 时，$R(A)=R(B)=3$，方程组有唯一解，即 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一地表示，求表达式．

$B\sim\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & b & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1-1/a \\ 0 & 1 & 0 & 1/a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow \beta=(1-\frac{1}{a})\alpha_1+\frac{1}{a}\alpha_2$

（3）当 $a\neq 0,b=0$ 时，$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B})=2$，$\beta$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 表示，但表示式不唯一，求表示式．

$$\boldsymbol{B}:\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&a&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}1&0&0&1-1/a\\0&1&0&1/a\\0&0&0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1-1/a\\1/a\\0\end{pmatrix},$$

$\Rightarrow \beta=(1-\dfrac{1}{a})\alpha_1+\dfrac{1}{a}\alpha_2+k\alpha_3$，其中 k 为任意常数．

七、（12分）解：(1)由题意 $A=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-2&2\\-2&1&-1\\2&-1&1\end{pmatrix}$

（2）A 的特征方程为 $\begin{vmatrix}4-\lambda&-2&2\\-2&1-\lambda&-1\\2&-1&1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^2(\lambda-6)=0$，

所求特征值为 $\lambda_1=6$，$\lambda_2=\lambda_3=0$，

当 $\lambda_1=6$ 时，$\begin{pmatrix}-2&-2&2\\-2&-5&-1\\2&-1&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，得对应的特征向量 $\xi_1=(2,-1,1)^T$，

当 $\lambda_2=\lambda_3=0$ 时，$\begin{pmatrix}4&-2&2\\-2&1&-1\\2&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，得特征向量 $\xi_2=(0,1,1)^T,\xi_3=(1,1,-1)^T$，

由于 ξ_1,ξ_2,ξ_3 已正交，再单位化得，$\boldsymbol{q}_1=\dfrac{\xi_1}{\|\xi_1\|}=\begin{pmatrix}2/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\end{pmatrix},\boldsymbol{q}_2=\dfrac{\xi_2}{\|\xi_2\|}=\begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix},\boldsymbol{q}_3=\dfrac{\xi_3}{\|\xi_3\|}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$，取

正交阵 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\boldsymbol{q}_3)=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{6}}&0&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，得 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\ \boldsymbol{y}$，所以 $f=6y_1^2$．

八、（6 分）证：因为 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$，所以

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{AB}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$，又 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=-2\boldsymbol{E}$，所以

$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 可逆，从而 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$．