

2014~2015 学年第 一 学期 课程代码 1400011B 课程名称 高等数学 A(1) 学分 5 课程性质:必修☑、选修□、限修□ 考试形式:开卷□、闭卷☑  
专业班级 (教学班) 考试日期 2015. 1. 14 命题教师 集体 系 (所或教研室) 主任审批签名

一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

- 1、极限  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{2}{\sin x}} =$  .
- 2、设  $y = x \arctan(x^2)$ , 则  $y'$  .
- 3、设  $f(x)$  的一个原函数为  $e^{-x^2}$ , 则  $\int x f'(x) dx =$  .
- 4、曲线  $y = e^x$  过原点的切线方程为 .
- 5、曲线  $r = e^{2\theta}$  从  $\theta = 0$  至  $\theta = \frac{\pi}{2}$  的一段弧长  $l =$  .

二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

- 1、当  $x \rightarrow -1$  时,  $x^3 + 1$  与  $3(x+1)$  为 ( )  
(A) 高阶无穷小 (B) 低阶无穷小  
(C) 等价无穷小 (D) 同阶但不等价无穷小
- 2、若  $f(x)$  的导函数为  $\sin x$ , 则  $f(x)$  的一个原函数是 ( )  
(A)  $1 + \sin x$  (B)  $1 - \sin x$  (C)  $1 + \cos x$  (D)  $1 - \cos x$
- 3、设  $f(x)$  在  $x=0$  处连续, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = 1$ , 则在点  $x=0$  处 ( )  
(A)  $f'(0)$  不存在 (B)  $f'(0)=0$ , 且  $f(0)$  为  $f(x)$  的极小值  
(C)  $f'(0)$  存在, 且  $f'(0) \neq 0$  (D)  $f'(0)=0$ , 且  $f(0)$  为  $f(x)$  的极大值
- 4、下列广义积分发散的是 ( )  
(A)  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$  (B)  $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sin x} dx$  (C)  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$  (D)  $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx$
- 5、曲线  $y = \frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$  ( )  
(A) 没有渐近线 (B) 仅有水平渐近线  
(C) 仅有铅直渐近线 (D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线

三、计算下列各题 (每小题 6 分, 共 36 分)

- 1、 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{1}{n^2 + \pi} + \frac{1}{n^2 + 2\pi} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n\pi} \right)$ .
- 2、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - x^2 \cos \frac{1}{x}}{(e^{-x} - 1)(1 + \cos x)}$ .
- 3、求  $y = x^{\sin x} (x > 0)$  的导数  $y'(x)$ .
- 4、已知  $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = \arctan t \end{cases}$ , 求  $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ .
- 5、 $\int \frac{\arctan x}{x^2} dx$ .
- 6、设  $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x) & x \geq 0 \\ \frac{1}{1+x^2} & x < 0 \end{cases}$ , 求  $\int_0^2 f(t) dt$ .

四、(本题满分 10 分) 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2}(1 - \cos x), & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ \frac{1}{x} \int_0^x \cos t^2 dt, & x > 0, \end{cases}$  讨论  $f(x)$  在  $x=0$  处的连续性和可导性.

五、(本题满分 10 分) 设曲线  $y = e^{\frac{x}{2}}$ , 切线  $y = \frac{e}{2}x$  及  $y$  轴围成的平面图形为  $D$ , 求  $D$  绕  $y$  轴旋转一周所得旋转体体积  $V$ .

六、(本题满分 8 分) 证明不等式:  $x > 0$  时, 有  $\ln x + \frac{1}{x} \geq 1$ .

七、(本题满分 6 分) 设函数  $f(x)$  在  $[0,1]$  上连续, 在  $(0,1)$  内可导,  $f(x) \neq 0$  ( $0 < x < 1$ ), 且  $f(0) = f(1) = 0$ ,  
证明: 在  $(0,1)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使  $f'(\xi) = 2015 f(\xi)$ .