计算方法

第一章 插值方法

胡 敏
合肥工业大学 计算机与信息学院
jsjxhumin@hfut.edu.cn
uhnim@163.com
2015年2月

不可公布

第 1 章　插值方法

1.1 问题的提出

描述事物数值之间的关系：

- 两种情况：

当x为特殊值时，方便计算

表格——离散数据表示函数关系

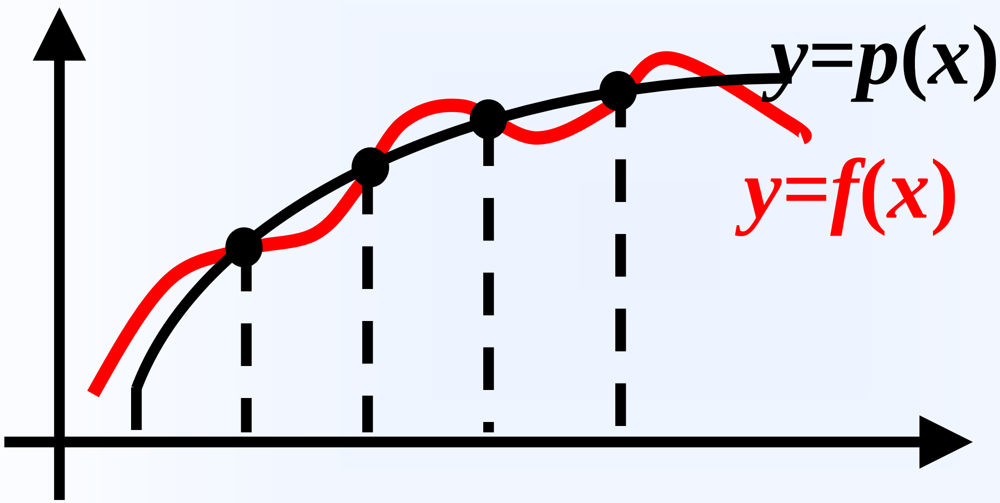
表达式——明显的表达式表示函数关系，但很复杂，不便于研究和使用。

实际问题：

- 函数解析式未知,通过实验观测得到的一组数据, 即在某个区间[a, b]上给出一系列点的函数值 $y_i= f(x_i)$
- 或者给出函数表

1.1 问题的提出

x	x_0	x_1	x_2	……	x_n
y	y_0	y_1	y_2	……	y_n



插值方法的应用：

f(x)只是一个数学概念意义下的函数。

（比如：图像的方法处理，天气预报，机床加工等方面）

1.1　问题的提法

- 从实际问题需要出发：

1、允许有一定误差

2、可用近似表达式代替函数关系，简化问题

一般情况：构造某种简单函数p(x)作为原函数f(x)的近似函数

插值函数：

当精确函数$y=f(x)$非常复杂或未知时，

在一系列节点处$x_0, x_1, \ldots x_n$处测得函数值

$$y_0=f(x_0), \ldots, y_n=f(x_n),$$

由此构造一个简单易算的函数：

$$p(x) \approx f(x)$$

满足条件：

$$p(x_i)=f(x_i), (i=0, \ldots n) \qquad (0)$$

则，$p(x)$就称为$f(x)$的插值函数。 $f(x)$为被插函数， 点xi为插值节点， 称(0) **式为插值条件.**在其它点x就用 $p(x)$ 的值作为$f(x)$ 的近似值。这一过程称为**插值**，

最常用的插值函数：

代数多项式

代数插值

插值法的基本原理

- 插值就是根据被插函数给出的函数表“插出”所要点的函数值。

- 希望p(x)能较好地逼近f(x),而且还希望它计算简单 。由于代数多项式具有数值计算和理论分析方便的优点。所以本章主要介绍代数插值。即求一个次数不超过**n**次的多项式。

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

本节课主要内容

- 1. 泰勒插值
- 2. 拉格朗日插值
  - 线性插值
  - 抛物插值
  - 一般情形
- 3. 插值余项

1.泰勒插值

■ 泰勒展开式---一种插值方法

函数 $f(x)$ 的泰勒级数展开

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dots\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

泰勒多项式：

$$p_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dots\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (1)$$

与 $f(x)$ 在点 x_0 具有相同的导数值

$$p_n^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0), \quad k=0,1,\dots,n$$

因此，$p_n(x)$ 在点 x_0 邻近处，会很好的逼近 $f(x)$。

泰勒插值余项

定理 1（泰勒余项定理） 假设 f（x）在含有点 x_0的区间［a，b］内有直到 n +1阶导数，则当 x∈［a，b］时，对于由式（1）给出的 p_n（x），成立

$$f(x)-p_n(x)=\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

式中 ξ界于 x_0与 x之间，因而 ξ∈［a，b］.

所谓泰勒插值是指下述插值问题：

问题 1：　求作 n 次多项式 $p_n(x)$，使满足条件

$p_n^{(k)}(x_0)=y_0^{(k)}$，　$k=0,1,\ldots,n$

这里 $y_0^{(k)}(k=0,1,\ldots,n)$为一组已给定的数据。

容易看出，对于给定的函数 $f(x)$，若导数 $f^{(k)}(x_0)=y_0^{(k)},(k=0,1,2,\ldots,n)$已给，则上述泰勒插值问题的解就是泰勒多项式（1）。

泰勒插值

例1：求作 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $x_0=100$ 的一次和二次泰勒多项式，利用它们计算 $\sqrt{115}$ 的近似值并估计误差。

解：由于 $x_0=100$，而

$$f(x)=\sqrt{x},\quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad f''(x)=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

$$f(x_0)=10,\quad f'(x_0)=\frac{1}{20},\quad f''(x_0)=-\frac{1}{4000}$$

$f(x)$ 在 x_0 的一次泰勒多项式是

$$p_1(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=5+0.05x$$

用 $p_1(x)$ 作为 $f(x)$ 的近似表达式，容易求出当 $x_1=115$ 时

$$\sqrt{115}=f(x_1)\approx p_1(x_1)=10.75$$

泰勒插值

据定理 1 可估算出误差

$$0 > f(x_1) - p_1(x_1) = \frac{f''(\xi)}{2}(x_1 - x_0)^2 > \frac{f''(x_0)}{2}(x_1 - x_0)^2 = -0.028125$$

$\sqrt{115}$ 的精确值为 10.723805…，与精确值相比较，近似值 10.75 的误差大约等于 -0.026，因而它有 3 位有效数字。

修正 $p_1(x)$ 可进一步得出二次泰勒多项式

$$p_2(x) = p_1(x) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

据此可得到新的近似值

$$\sqrt{115} = f(x_1) \approx p_2(x_1) = 10.75 - 0.02812 = 10.721875$$

这个结果有 4 位有效数字。

2.拉格朗日插值

上述泰勒插值要求提供f(x)在 x_0 处各阶导数值，这项要求很苛刻。

问题2 求作次数 $\le n$ 多项式 $p_n(x)$ 使满足条件

$$p_n(x_i)=y_i,\quad i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n \qquad (2)$$

这就是所谓的**拉格朗日（Lagrange）插值**。点 x_i（它们互不相同）称为插值节点。

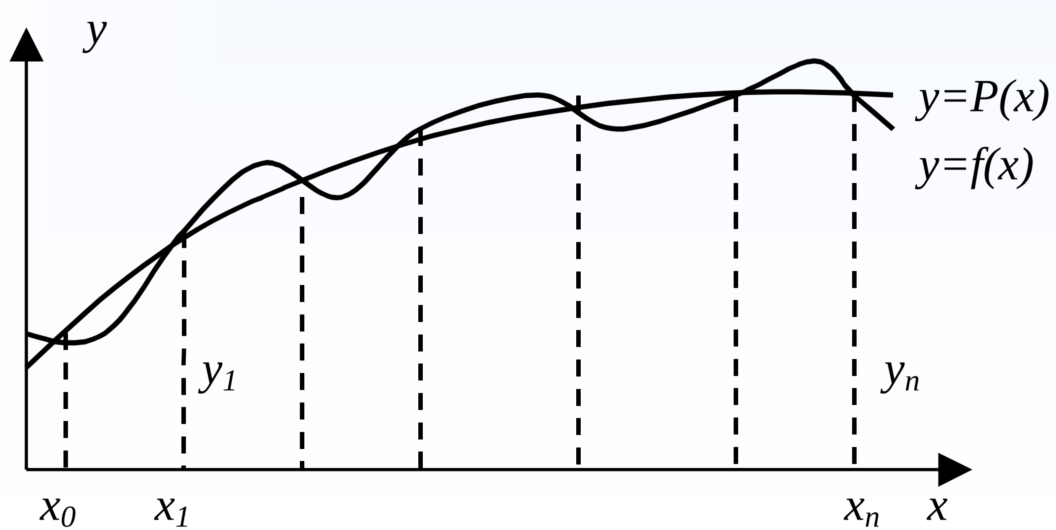
用几何语言来描述，就是，通过曲线y=f(x)上给定的n+1个点 $(x_i,\ y_i)(i=0,1,2,\ldots,n)$，求作一条n次代数曲线 $y=p_n(x)$ 作为Y=f(x)的近似。

2.拉格朗日插值

即求一个次数不超过n次的多项式。

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

满足 $P(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0,1,2,\cdots,n)$



插值多项式的存在唯一性

◆**定理2(多项式插值定理)n次代数插值问题的解是存在且惟一的**

证明：设n次多项式

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

是函数 $y=f(x)$**在区间[a, b]上的n+1个互异的节点** x_i (i=0, 1, 2, ..., n)**上的插值多项式, 则求插值多项式P(x)的问题就归结为求它的系数** a_i (i=0, 1, 2, ..., n)。

由插值条件： $p(x_i)=f(x_i)$ (i=0, 1, 2, ..., n), **可得**

$$\begin{cases} a_nx_0^n+a_{n-1}x_0^{n-1}+\cdots+a_1x_0+a_0=f(x_0) \\ a_nx_1^n+a_{n-1}x_1^{n-1}+\cdots+a_1x_1+a_0=f(x_1) \\ \cdots \\ a_nx_n^n+a_{n-1}x_n^{n-1}+\cdots+a_1x_n+a_0=f(x_n) \end{cases}$$

惟一性说明，不论用何种方法来构造，也不论用何种形式来表示插值多项式, 只要满足插值条件(2), 其结果都是相互恒等的。

克莱姆法则

$$\boldsymbol{x_i} = \frac{|\boldsymbol{D_i}|}{|\boldsymbol{D}|}$$

$$V = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{i-1}(x_i - x_j)$$

称为Vandermonde（范德蒙）行列式，因$\mathbf{x_i}\neq\mathbf{x_j}$（当i≠j），故V≠0。根据解线性方程组的克莱姆（Gramer）法则，方程组的解 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ **存在惟一，从而P(x)被惟一确定。**

克拉默法则

如果线性方程组的系数行列式不等于零，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

那么方程(4) 有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中 D_j ($j = 1,2,\ldots,n$) 是把系数行列式中第 j 列的元素用方程右端的自由项代替后所得到的 n 阶行列式.

多项式插值问题

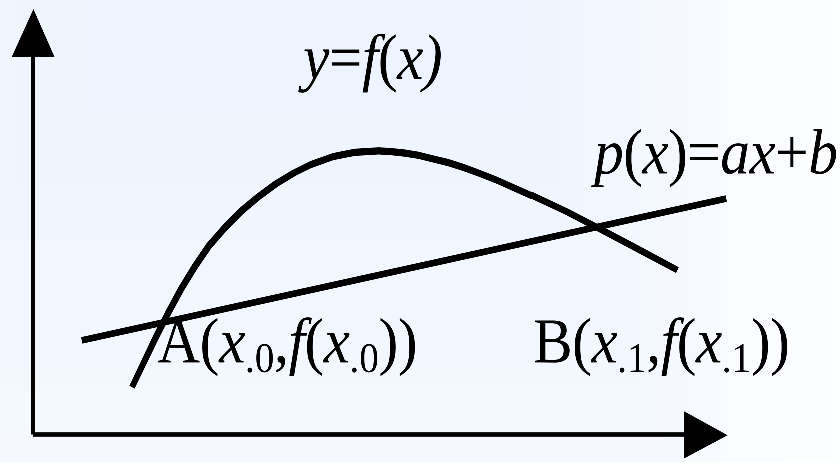
以上关于插值问题可解性的论证是构造型的，通过求解线性方程组即可确定插值函数 $p_n(x)$。

问题在于这种算法的计算量大，不便于实际应用。

插值多项式的构造能否回避求解线性方程组呢？回答是肯定的。

1.2 Lagrange插值公式

1.线性插值



线性插值是代数插值的最简单形式。假设给定了函数**f(x)**在两个互异的点的值，x_0，x_1

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1)$$

现要求用线性函数 $p(x) = ax + b$ 近似地代替**f(x)**。选择参数**a**和**b**，使 $p(x_i) = f(x_i)(i = 0,1)$。

称这样的线性函数**P(x)**为**f(x)**的线性插值函数。

Lagrange
法1736-1813

线性插值

问题3 求作一次式$p_1(x)$，使满足条件

$$p_1(x_0)=y_0,\ p_1(x_1)=y_1$$

从几何图形上看，$y=p_1(x)$ 表示过两点$(x_0,y_0),(x_1,y_1)$ 的直线.

- $p_1(x)$表示为点斜式：

$$p_1(x)=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0) \qquad (3)$$

- $p_1(x)$ 也可表为如下对称形式：

$$p_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1 \qquad (4)$$

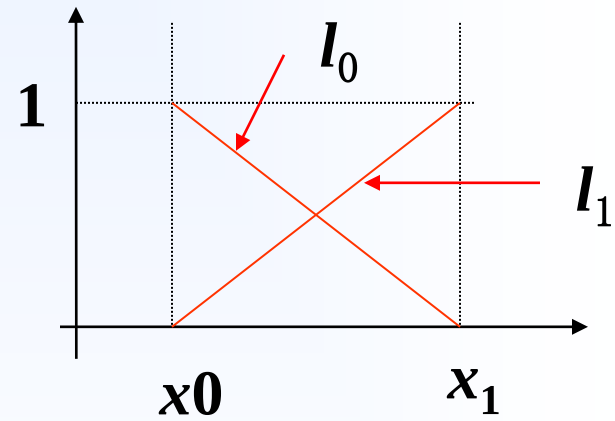
为了便于推广，记 $l_0(x)=\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}$， $l_1(x)=\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}$

■性质

$$l_0(x_0)=1,\quad l_0(x_1)=0$$

$$l_1(x_0)=0,\quad l_1(x_1)=1$$

$$l_0(x)+l_1(x)=1$$



$$l_k(x_i)=\delta_{ki}=\begin{cases}1 & (i=k)\\ 0 & (i\neq k)\end{cases}$$

$l_0(x)$ 与 $l_1(x)$ 称为**线性插值基函数**。且有

$$l_k(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{1}\frac{x-x_j}{x_k-x_j},\qquad k=0,1$$

于是线性插值函数可以表示为基函数的线性组合

$$p_1(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1$$

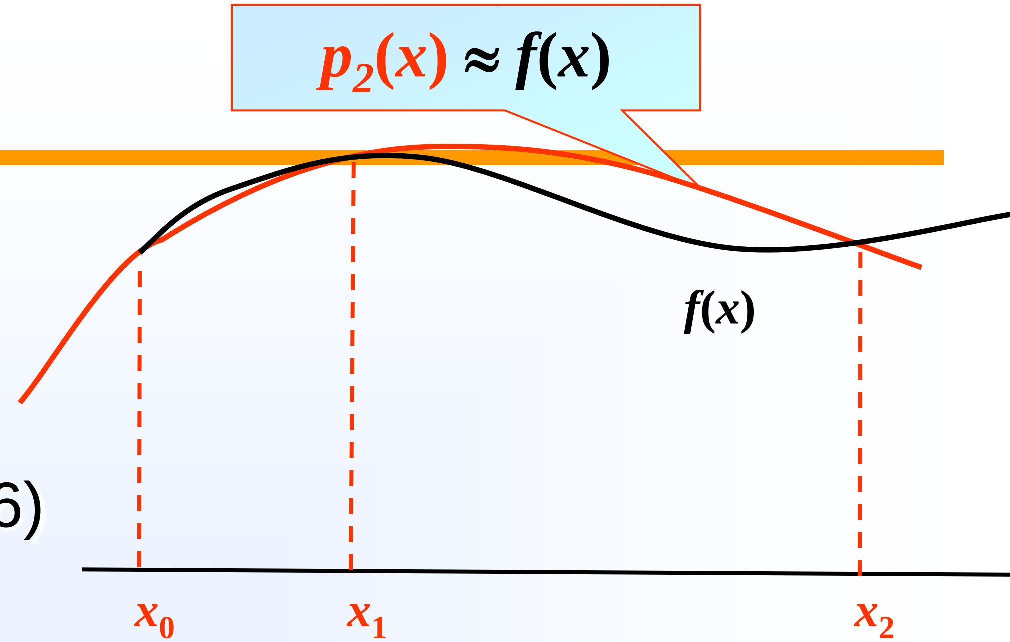
例2.1 已知 $\sqrt{100} = 10$ **，** $\sqrt{121} = 11$ **，** **求** $y = \sqrt{115}$

解：这里x_0**=100，**y_0**=10，**x_1**=121，**y_1**=11, 利用线性插值**

$$p(x) = \frac{x-121}{100-121} \times 10 + \frac{x-100}{121-100} \times 11$$

$$y = \sqrt{115} \approx p(115) = 10.714$$

2. 抛物插值



问题4 **求二次式** $p_2(x)$，
使其满足条件：

$$p_2(x_0) = y_0,\quad p_2(x_1) = y_1,\quad p_2(x_2) = y_2 \quad (6)$$

二次插值的几何解释是用通过三个点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 的抛物线 $y = p_2(x)$来近似考察曲线 $y = f(x)$，故称为抛物插值。

为了与下一节的Lagrange插值公式比较, 仿线性插值, 用基函数的方法求解方程组。先考察一个特殊的二次插值问题.

类似于线性插值，令

$$l_0(x_0)=1,\quad l_0(x_1)=0,\quad l_0(x_2)=0 \qquad (7)$$

这个问题容易求解。由上式的后两个条件知：

x_1, x_2 **是** $l_0(x)$ **的两个零点。于是 类似地可以构造出：**

$$l_0(x)=c(x-x_1)(x-x_2)$$

再由另一条件 $l_0(x_0)=1$ **确定系数** $c=\dfrac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$

从而导出

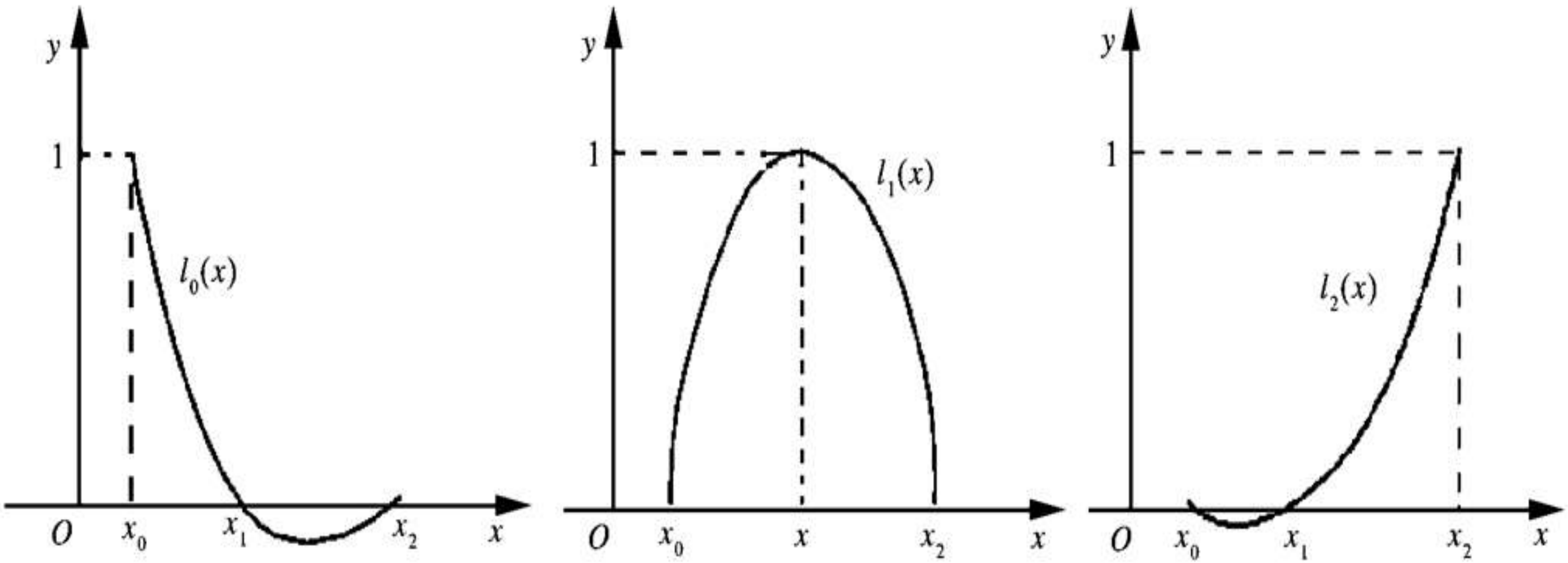
$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

类似导出

$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$p_2(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1+l_2(x)y_2 \quad (8)$$



y
1
$l_0(x)$
O
x_0
x_1
x_2
x
y
1
$l_1(x)$
O
x_0
x
x_2
x
y
1
$l_2(x)$
O
x_0
x_1
x_2
x

例3：利用100，121，144的开方值求 $\sqrt{115}$

解：用抛物插值

已知：$x_0=100, y_0=10$, $x_1=121, y_1=11$,

$x_2=144, y_2=12$, $x=115$

代入抛物插值公式得：

$$\sqrt{115} \approx \frac{(115-121)(115-144)}{(100-121)(100-144)} \times 10 + \frac{(115-100)(115-144)}{(121-100)(121-144)} \times 11 + \frac{(115-100)(115-121)}{(144-100)(144-121)} \times 12 \approx 10.7228$$

3 拉格朗日插值多项式一般形式

运用基函数法求拉格朗日问题

基函数的一般形式

$$p_n(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + \cdots + l_n(x)y_n$$

满足初始条件：

$$p_n(x_n) = y_n$$

要求

$$l_k(x_j) = \delta_{kj} = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k \end{cases} \qquad (9)$$

基函数表

$$
\begin{array}{ccccc}
x & x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\
l_0(x) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
l_1(x) & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
l_n(x) & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}
$$

构造基函数

由已知条件，假设

$$l_0(x) = c(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$$

又因为 $l_0(x_0) = 1$

则

$$c = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\cdots(x_0 - x_n)}$$

基函数的一般形式

即

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}=\prod_{1\le j\le n}\frac{x-x_j}{x_0-x_j}$$

$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}=\prod_{\substack{0\le j\le n\\ j\ne 1}}\frac{x-x_j}{x_1-x_j}$$

$$l_n(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})}=\prod_{1\le j\le n-1}\frac{x-x_j}{x_n-x_j}$$

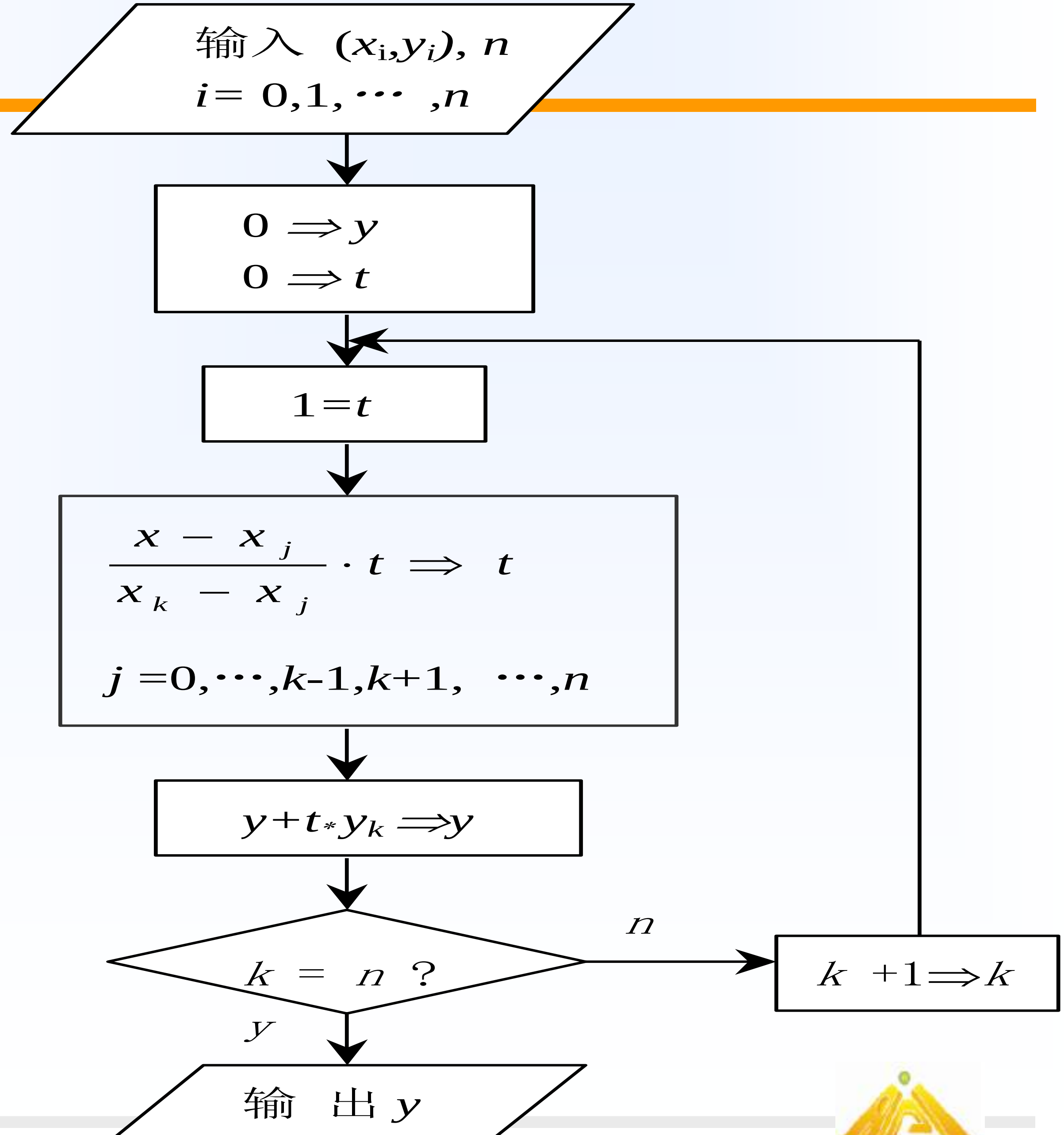
基函数插值的一般表达式

$$l_k(x)=\prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}l_k(x)y_k \qquad （10）$$

是次数不超过n次的多项式，称形如（10）式的插值多项式为n次拉格朗日插值多项式。

拉格朗日插值算法实现


输入 (x_i,y_i), n
$i=0,1,\cdots,n$
$0 \Rightarrow y$
$0 \Rightarrow t$
$1=t$
$\frac{x-x_j}{x_k-x_j}\cdot t \Rightarrow t$
$j=0,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n$
$y+t*y_k \Rightarrow y$
$k=n$?
n
$k+1 \Rightarrow k$
y
输出 y

注意：

(1) 对于插值节点,只要求它们互异,与大小次序无关;

(2) 插值基函数$l_i(x)$ 仅由插值节点x_i (i=0,1, … ,n)确定,与被插函数 $f(x)$无关;

(3) 插值基函数$l_i(x)$ 的顺序与插值节点x_i (i=0,1, … ,n)的顺序一致.

以 x_i (i=0,1,…,n)为插值节点, 函数 $f(x) \equiv 1$作插值多项式, 由插值多项式的唯一性即得基函数的一个性质

$$\sum_{i=0}^{n} l_i(x) \equiv 1$$

这是因为若取$f(x)=x^k$ $(k=0,1,\ldots,n)$,由插值多项式的唯一性有

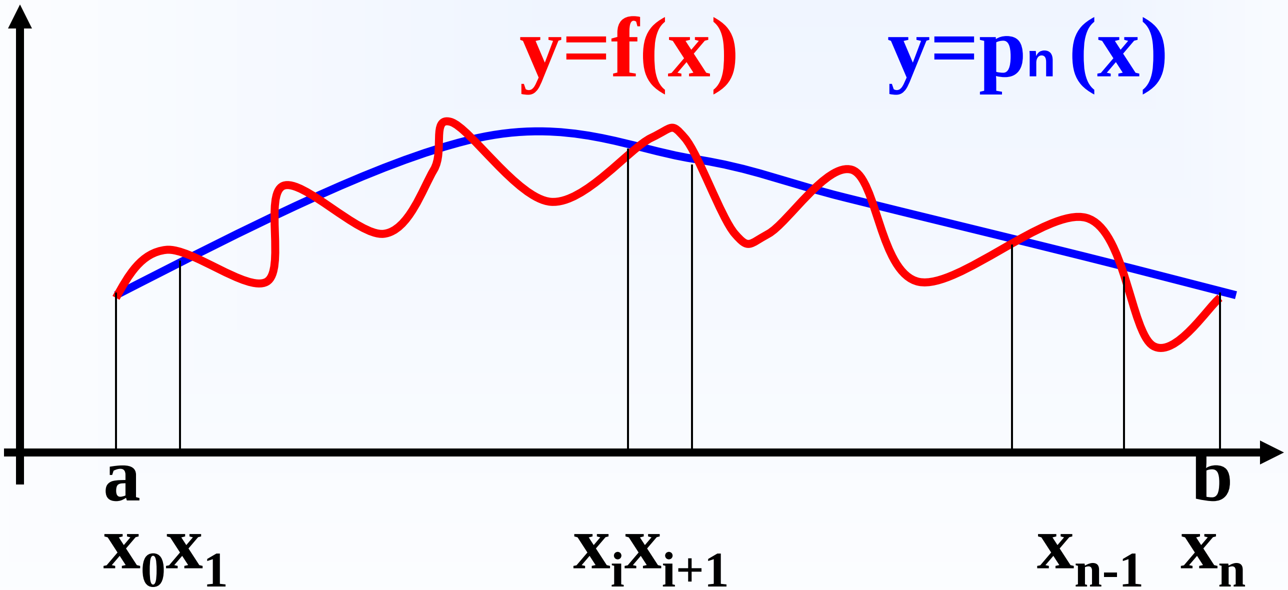
$$\sum_{i=0}^{n} l_i(x)x_i^k = x^k, \qquad k=0,1,\cdots,n$$

特别当k=0时, 就得到

$$\sum_{i=0}^{n} l_i(x) \equiv 1$$

1.3 插值余项

在插值区间[a, b]上用插值多项式p(x)近似代替f(x)，除了在插值节点x_i上没有误差外，在其它点上一般是存在误差的。



若记　$R(x) = f(x) - p_n(x)$

则 R(x) 就是用 p(x) 近似代替 f(x) 时的**截断误差**, 或称**插值余项**.我们可根据后面的定理来估计它的大小。

插值余项

1. 拉格朗日余项定理：

- 插值余项：$R(x)=f(x)-p_n(x)$

  也称截断误差。

- 定理3（拉格朗日余项定理）：设区间[a,b],含有节点$x_0,x_1,\ldots x_n$, 而f(x)在[a,b]内有连续的直到n+1阶导数，且$f(x_i)=y_i(i=0,1,\ldots,n)$已给，则当$x\in[a,b]$时，对于由式（10）给出的$P_n(x)$,成立

$$f(x)-p_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)$$

式中ξ是与x有关的点，它包含在由点$x_0,x_1,\ldots x_n$和x所界定的范围内，因而$\xi\in[a,b]$

证明：当$x=x_i$的时候，显然成立，下面假设x非插值节点

作辅助函数：$g(t)=p_n(t)+c\omega(t);\omega(t)=\prod_{k=0}^{n}(t-x_k)$

显见：x_i都是ω(t)的零点，所以 $g(x_i)=f(x_i)$

取$c=\dfrac{f(x)-p_n(x)}{\omega(x)}$,则有$g(x)=f(x)$

所以，误差函数R(t)=f(t)-g(t)至少有n+2个零点

应用罗尔定理证明。

罗尔定理：若函数f(x)满足下列条件：

1、 在闭区间[a,b]内连续；2、在开区间（a,b）内可导；

3、f(a)=f(b)

则至少存在一点ξ∈（a,b),使得f’`(ξ)=0

根据罗尔定理，　$R'(t)$在区间(a,b)上有至少$n+1$个零点

再由罗尔定理，　$R''(t)$在区间(a,b)上有至少n个零点

依此类推

在区间(a,b)内至少有一个点ξ，使得$R(t)$的$n+1$阶导数为零

$$R^{(n+1)}(\xi)=0$$

$$R^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-P_n^{(n+1)}(\xi)-c\omega_{n+1}^{(n+1)}(\xi)$$

$$=f^{(n+1)}(\xi)-c(n+1)!$$

$$c=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

所以 $$R_n(x)=c\omega(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x)$$

例4 已知x_0 =100, x_1 =121, 用线性插值估计 $f(x)=\sqrt{x}$

在x=115时的截断误差

解：由插值余项公式知 $R_1(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)\omega(x)$

因为 $f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$

$$R_1(x)=-\frac{1}{8}\xi^{-\frac{3}{2}}(x-x_0)(x-x_1)$$

$$R_1(115)=-\frac{1}{8}\xi^{-\frac{3}{2}}(115-100)(115-121)$$

$$\le\frac{1}{8}\times\left|(115-100)(115-121)\right|\times\max_{\xi\in[100,121]}\xi^{-\frac{3}{2}}$$

$$\le\frac{1}{8}\times10^{-3}\times\left|(115-100)(115-121)\right|$$

$$=\frac{1}{8}\times15\times6\times10^{-3}=0.01125$$

- 插值区间：

  由插值节点所界定的范围[min x_i,max x_i]

- 内插：

  插值点x位于插值区间内

- 外推：

  插值点x位于插值区间外

2、误差的事后估计

- 考察拉格朗日余项公式：

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)} \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)$$

解决办法：
事后误差估计法

- 误差估计：计算n+1阶导数

- 只给出了三个离散值，并未给出具体的分析式，若用余项公式求误差，将会十分复杂。

事后误差估计法:

- 考察3个节点x_0,x_1,x_2,对于给定的插值点x:

- 先用x_0与x_1,x_2进行线性插值，求出y=f(x)的一个近似值y_1；同样取x_0与 x_2,求出y_2。
- 按余项定理得:

$$y - y_1 = \frac{f''(\xi_1)}{2}(x - x_0)(x - x_1)$$

$$y - y_2 = \frac{f''(\xi_2)}{2}(x - x_0)(x - x_2)$$

- 将上面两个式子相除

假设$f''(x)$在插值区间内改变不大

则可消去近似相等的$f''(\xi_1)$和$f''(\xi_2)$，得到

$$\frac{y-y_1}{y-y_2} \approx \frac{x-x_1}{x-x_2}$$

据此可得：

$$y \approx \frac{x-x_2}{x_1-x_2}y_1 + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}y_2$$

$$\Rightarrow$$

$$y-y_1 \approx \frac{x-x_1}{x_2-x_1}(y_2-y_1)$$

由上式可看出：近似值y_1的误差$y-y_1$可以通过两个结果的偏差y_2-y_1来估计，这就是**事后误差估计法。**

例4：用事后误差法考察例2的误差。

先取$x_0=100, x_1=121$作节点，求得y_a,再用$x_0=100, x_2=144$作节点，求得y_b

$$y_a = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 = 10.71428$$

$$y_b = \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} y_0 + \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} y_1 = 10.68182$$

按事后误差估计法：

$$y - y_a \approx \frac{115 - 121}{144 - 121} \times (10.68182 - 10.71428) = 0.00847$$

可用这个误差值来修正结果y_a,得到新的近似值：

$y=10.71428+0.00847=10.7228$

与例3抛物插值结果相同

例题选讲1.1　拉格朗日插值基函数

例1：列出函数$f(x)=x^k(k=0,1,\ldots,n)$关于节点$x_i(i=0,1,\ldots n)$的拉格朗日插值公式

解：∵ $f(x)=x^k(k=0,1,\ldots,n)$，其拉格朗日插值多项式为

$$L_n(x)=\sum_{j=0}^{n} x_j^{\,k} l_j(x)$$

又∵ $f^{(n+1)}(x)\equiv 0$,所以其插值余项$E(x)=0$,

$$\therefore \sum_{j=0}^{n} x_j^{\,k} l_j(x)\equiv x^k$$

特别的,当$k=0$时，有$\displaystyle\sum_{j=0}^{n} l_j(x)=\sum_{i=0}^{n}\prod_{j\neq i}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\equiv 1$

当$k=1$时，有$\displaystyle\sum_{j=0}^{n} x_j l_j(x)=\sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{j\neq i}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right)x_i\equiv x$

例题选讲1.2　　插值余项

例1：设$f(x)$充分光滑，$f(a)=f(b)=0$,求证

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|\le\frac{(b-a)^2}{8}\max_{a\le x\le b}|f''(x)|$$

证：满足条件p(a)=p(b)=0的插值多项式p(x)=0,按拉格朗日余项定理有

$$f(x)=f(x)-p(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)$$

$$\because \max_{a\le x\le b}|(x-a)(x-b)|=\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|\le\frac{(b-a)^2}{8}\max_{a\le x\le b}|f''(x)|$$

例2:设$f(x)=x^4$,试利用拉格朗日余项定理给出f(x)以-1，0，1，2为节点的插值多项式p(x)

解：当$f(x)=x^4$时，$f^{(4)}(x)=4!$,据拉格朗日余项定理，有余项

$$\omega(x)=f(x)-p(x)=\frac{f^{(3+1)}(\xi)}{(3+1)!}\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)$$

$$=\frac{4!}{4!}\times\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)=(x+1)x(x-1)(x-2)$$

所求多项式:

$p(x)=f(x)-\omega(x)=x^4-x^4+2x^3+x^2-2x＝2x^3+x^2-2x$

拉格朗日插值的几点问题

问题：

•对于相同的插值公式，内插与外推哪一个的精度高。

•插值点越多得到插值公式的精度越高?

•拉格朗日插值对于不同的初始函数，在相同点上的插值公式也不同。

•多项式插值是唯一的插值方式?

•基函数的形式只和插值点的**x**坐标相关，和**y**值无关。

•由**n**个点插值得到的基函数的次数必定是**n-1**次的多项式

1.5 牛顿插值公式

1、具有承袭性的插值公式

考察线性插值的插值公式：

$$p_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

将$p_0(x)=f(x_0)$看作是零次插值多项式，则有

$$p_1(x)=p_0(x)+c_1(x-x_0)$$

其中，修正的系数 $c_1 = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

进一步修正，令$p_2(x)=p_1(x)+c_2(x-x_0)(x-x_1)$,用$p_2(x_2)=f(x_2)$来确定$c_2$,

推

结果：$$c_2 = \frac{\dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} - \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_1}$$

记$c_0=f(x_0)$,于是有：

$$p_2(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)(x-x_1)$$

$$=f(x_0)+\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0)+$$

$$\frac{\dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}-\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_1}(x-x_0)(x-x_1)$$

以上表明：为了建立具有承袭性的插值公式，需要引进差商并研究其性质。

2、差商定义及性质

1.差商定义 $f[x_i,x_j]=\dfrac{f(x_j)-f(x_i)}{x_j-x_i},\ i\neq j$

称为 $f(x)$ 在 x_i, x_j 两点处的一阶差商.

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$$

为二阶差商.

$$f[x_0,x_1,\cdots x_n]=\frac{f[x_1,x_2,\cdots x_n]-f[x_0,x_1\cdots x_{n-1}]}{x_n-x_0}$$

为n阶差商.

特点：具有鲜明的承袭性

补充定义：$f(x_i)$为零阶差商

将差商用离散的函数值来表示：

$$f(x_0,x_1)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}+\frac{f(x_1)}{x_1-x_0}$$

$$f(x_0,x_1,x_2)=\frac{f(x_1,x_2)-f(x_0,x_1)}{x_2-x_0}$$

$$=\frac{1}{x_2-x_0}\left[\left(\frac{f(x_1)}{x_1-x_2}+\frac{f(x_2)}{x_2-x_1}\right)-\left(\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}+\frac{f(x_1)}{x_1-x_0}\right)\right]$$

$$=\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$f(x_0,x_1,\ldots,x_n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f(x_k)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(x_k-x_j)}$$

调换两个节点，不影响差商的值

即：差商具有对称性

差商的性质

(1) **k阶差商** $f[x_0,x_1,\cdots x_n]$ **是函数值** $f(x_0),f(x_1)\cdots f(x_n)$ **的线性组合.**

注:由性质看到,差商关于定义它的结点是对称的,即k阶差商 $f[x_0,x_1,\cdots x_n]$ **可以随意改变结点次序,而差商值不变.**

(2) 若$f(x)$在[a,b]内存在n阶导数,且结点 $x_0, x_1, \cdots x_n \in [a,b]$

则n阶差商与导数关系

$$f[x_0, x_1 \cdots x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \quad \xi \in [a,b]$$

(3)若 $f(x)$ 是一个m次代数多项式,则

$$f[x_0, x_1 \cdots x_n, x] = \begin{cases} m-n-1 \text{ 次多项式，} & n < m-1, \\ a_m, & n = m-1 \\ 0, & n > m-1 \end{cases}$$

其中 a_m 为$f(x)$的首项系数.

2、Newton插值公式

由差商定义 $\forall x\in[a,b]$

$$f(x)=f(x_0)+f[x_0,x](x-x_0)$$

$$f[x_0,x]=f[x_0,x_1]+f[x_0,x_1,x](x-x_1)$$

……

$$f[x_0,\cdots,x_{n-1},x]=f[x_0,x_1,\cdots x_n]+f[x_0,x_1,\cdots x_n,x](x-x_n)$$

把以上各式由后向前代入,可得

$$P_n(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+\cdots+f[x_0,x_1,\cdots x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)=f[x_0,x_1,\cdots,x_n,x](x-x_0)\cdots(x-x_n)$$

$$R_n(x_i)=0$$

差商表

x	$f(x)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
x_0	$f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$	$f(x_0,x_1)$		
x_2	$f(x_2)$	$f(x_1,x_2)$	$f(x_0,x_1,x_2)$	
x_3	$f(x_3)$	$f(x_2,x_3)$	$f(x_1,x_2,x_3)$	$f(x_0,x_1,x_2,x_3)$

例:已知

x	1	2	3	4
y	0	-5	-6	3

求满足以上插值条件的牛顿型插值多项式。

解:

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
1	0			
2	-5	-5		
3	-6	-1	2	
4	3	9	5	1

定理4：

在节点 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 所界定的范围 Δ：$[\min\limits_{0\le i\le n} x_i, \max\limits_{0\le i\le n} x_i]$ 内存在一点ξ，使成立：

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

证： 因为：

$$R(x_n) = f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1})$$

由拉格朗日余项定理知：必有 $\xi \in [\min\limits_{0\le i\le n} x_i, \max\limits_{0\le i\le n} x_i]$

使得：$$f(x_n) - p_{n-1}(x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(x_n - x_k)$$

所以 $$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1}) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(x_n - x_k)$$

故：$$f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

例： 设 $f(x)=x^7+5x^3+1$,求差商 $f[2^0,2^1], f[2^0,2^1,2^2]$

$f(2^0,2^1,\cdots,2^7), f(2^0,2^1,\cdots,2^7,2^8)$

解： f(1)=7，f(2)=169，f(4)=16705

$$f(2^0,2^1)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=169-7=162$$

$$f(2^1,2^2)=\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=\frac{16705-169}{2}=8268$$

$$f(2^0,2^1,2^2)=\frac{f(2^1,2^2)-f(2^0,2^1)}{2^2-2^0}=\frac{8268-162}{4-1}=2702$$

$$f(2^0,2^1,2^2,\cdots,2^7)=\frac{f^{(7)}(\xi)}{7!}=\frac{7!}{7!}=1$$

$$f(2^0,2^1,2^2,\cdots,2^8)=\frac{f^{(8)}(\xi)}{8!}=\frac{0}{8!}=0$$

三.拉格朗日插值与牛顿插值的比较

(1) $L_n(x)$ 与 $N_n(x)$均是n次多项式,且均满足插值条件:

$$L_n(x_k) = N_n(x_k) = f(x_k),\ \ k = 0,1,\cdots,n$$

由插值多项式的唯一性, $L_n(x) \equiv N_n(x)$,因而,两个公式的余项是相等的,即

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n, x]\omega_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(x)$$

则可知n 阶差商与导数的关系如下：

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},\quad \xi\in[a,b]$$

（2）当插值多项式从 $n-1$ 次增加到n 次时, 拉格朗日型插值必须重新计算所有的插值基函数;而对于牛顿型插值, 只需用表格再计算一个n 阶差商, 然后加上一项即可。

（3）牛顿型插值余项公式对是由离散点给出或导数不存在时均适用。

4、差分形式的插值公式(差分与等距结点插值)

在实际应用Newton插值多项式时，经常遇到插值节点是等距的，即n+1个插值节点：$x_i = x_0 + ih \ (i = 1,2,\dots,n)$

这里间距 h 为定数，称为**步长**，于是在差商中，分母部分将变得简单，计算量主要集中在分子（两节点处函数值的差）。

定义： 设函数f(x)在等距节点 $x_i = x_0 + ih \ (i = 1,2,\dots,n)$

上的值为： $f(x_i) = y_i \ (i = 1,2,\dots,n)$

则称： $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ 为 f(x)在 $x = x_i$ 处一阶差分

称： $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$ 为 f(x)在 $x = x_i$ 处二阶差分

称： $\Delta^n y_i = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i$ 为 f(x)在 $x = x_i$ 处n 阶差分

依据所给数据 y_i 可以逐步求出它的各阶差分，而生成如下形式的**差分表**：

x_i	y_i	一阶差分	二阶差分	三阶差分	…
x_0	y_0				
x_1	y_1	Δy_0			
x_2	y_2	Δy_1	$\Delta^2 y_0$		
x_3	y_3	Δy_2	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$	
…	…	…	…	…	…

在节点等距的情况下，差商可用差分来表示。

设步长 $h = x_{i+1} - x_i$

有 $f(x_i, x_{i+1}) = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \dfrac{1}{h}\Delta y_i$

$$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}) - f(x_i, x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i}$$

$$= \frac{1}{2h^2}(\Delta y_{i+1} - \Delta y_i) = \frac{1}{2h^2}\Delta^2 y_i$$

$$f(x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}) = \frac{1}{k!\, h^k}\Delta^k y_i$$

令： $x = x_0 + th$

则： $x - x_k = (t-k)h \quad k = 0,1,2,\ldots,n$

于是，牛顿插值公式中的一般项

$$f(x_0,x_1,\ldots,x_k)\prod_{j=0}^{k-1}(x-x_j) = \frac{\Delta^k y_0}{k!\,h^k}t(t-1)(t-2)\ldots(t-k+1)h^k$$

$$= \frac{\Delta^k y_0}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(t-j)$$

则 $p_n(x_0+th) = y_0 + \sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta^k y_0}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(t-j)$

称此公式为函数插值的**有限差分公式**

例： 已知函数 y=sin x 的如下函数值表，利用插值法计算Sin(0.42351) 的近似值。

x	0.4	0.5	0.6
Sin x	0.38942	0.47943	0.56464

解： 因为节点是等距分布的，可以使用牛顿插值公式

取 $x_0 = 0.4, h = 0.1, t = \dfrac{x - x_0}{h} = \dfrac{0.42351 - 0.4}{0.1} = 0.2351$

建立如下差分表

x	Sin(x)	一阶差分	二阶差分
0.4	0.38942		
0.5	0.47943	0.09001	
0.6	0.56464	0.08521	-0.00480

利用插值公式

$$p_2(x_0+th)=f(x_0)+\frac{\Delta f(x_0)}{1!}+\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!}t(t-1)$$

有：

$$\sin(0.42351)\approx p_2(0.42351)$$

$$=0.38942+0.09001\times 0.2351-\frac{0.00480}{2}\times 0.2351\times(0.2351-1)$$

$$=0.41101$$

差分的性质

(1) 各阶差分均可用函数值表示.

(2) 可用各阶差分表示函数值.

(3) **在等距结点情形有n阶差分与导数的关系:**

$$f^{(n)}(\xi)=\frac{\Delta^n f(x_k)}{h^n},\quad \xi\in[x_k,x_{k+n}]$$

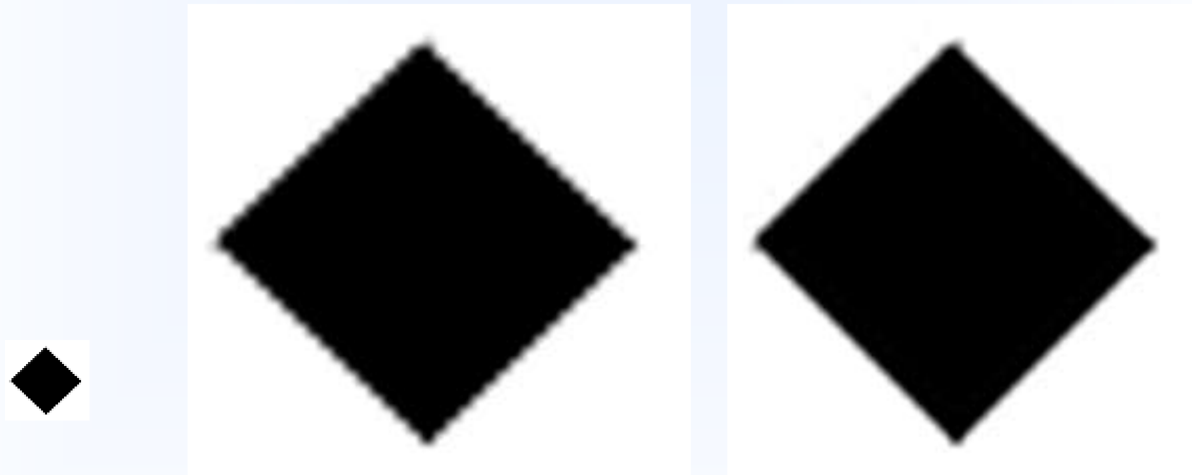
(4)**若** $f(x)$ **是一个m次代数多项式,则**

$$\Delta^k f=\begin{cases} m-k\ \text{次多项式}, & k<m, \\ \text{常数}, & k=m, \\ 0\ , & k>m, \end{cases}$$

实际应用例子：图像缩放、修复

实验结果对比

试验一：对均匀灰度图像进行放大处理



切触有理插值与双三次插值的灰度图像放大对比

执行时间：

放大倍数 方法	3	6
	执行时间(ms)	执行时间(ms)
双三次插值	31	125
自适应切触有理插值	32	141

试验二：对彩色图像进行放大处理

双三次插值方法

切触有理插值方法