计算方法

第5章 线性方程组的解法

胡 敏
合肥工业大学 计算机与信息学院
jsjxhumin@hfut.edu.cn
uhnim@163.com

第 5 章　线性方程组的解法

5.1 迭代公式的建立

5.2 向量和矩阵的范数

5.3 迭代过程的收敛性

5.2 向量和矩阵的范数

1 向量的范数

为了研究迭代过程的收敛性，需要对向量的“大小”引进某种度量。我们知道，向量的长度可以用来度量其大小，对于$\vec{x}=[x_1,\ldots,x_n]^{\mathrm{T}}\in R^n$，其长度记作 $\|x\|_2$

$$\|x\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}=\sqrt{x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2}$$

借助于长度可以刻画向量序列的收敛性，设向量序列

$X^{(k)}=\{x_1^{(k)},x_2^{(k)},\ldots,x_n^{(k)}\}^T$ 和 $X^*=(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*)^T$，则

$\lim\limits_{k\to\infty}X^k=X^*$ 即 $\lim\limits_{k\to\infty}x_i^k=x_i^*\quad(i=1,2,\ldots,n)$ 的充要条件是

$$\lim_{k\to\infty}\|X^k-X^*\|_2=0$$

5.2 向量和矩阵的范数

除了长度以外，还有什么度量可用来刻画 向量序列的收敛性？这些度量应当具备哪些基本属性？

任给向量 $\vec{x}=[x_1,\ldots,x_n]^{\mathrm{T}}\in R^n$ ，其范数记为 $\|\vec{x}\|$ ，且满足下列三个条件：

1. $\|\vec{x}\|\geq 0,\quad$ 且$\|\vec{x}\|=0$当且仅当$\vec{x}=0$; (正定性positivity)

2. $\|\lambda\vec{x}\|=|\lambda|\,\|\vec{x}\|,\quad$ λ为任意实数；（齐次性homogeneit y）

3. $\|\vec{x}+\vec{y}\|\leq\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|$, 对任意的$\vec{x},\vec{y}\in R^n$，(三角不等式，triangle inequality）

向量范数是一种度量，用来衡量一个向量的长度或它到原点（即零向量）的距离。

常用范数： $\vec{x}=[x_1,\ldots,x_n]^{\mathrm{T}}\in R^n$

（1）1—范数： $\|\vec{x}\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$

（2）2—范数（长度）： $\|\vec{x}\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}$

（3）∞—范数： $\|\vec{x}\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|$

（4）p—范数： $\|\vec{x}\|_p=\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p}$

注：前三种范数都是p—范数的特殊情况。

$$\lim_{p\to\infty}\|\vec{x}\|_p=\max_{1\le i\le n}|x_i|$$

定理1 对于任意 $\vec{x}=[x_1,\ldots,x_n]^{\mathrm{T}}\in R^n$

$$\lim_{p\to\infty}\|\vec{x}\|_p=\|\vec{x}\|_\infty$$

$$\|\vec{x}\|_p=\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p}$$

证明

$$\|\vec{x}\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|$$

因为 $$(\max_{1\le i\le n}|x_i|^p)^{1/p}\le(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{\frac{1}{p}}\le(n\max_{1\le i\le n}|x_i|^p)^{1/p}$$

所以

$$\lim_{p\to\infty}\|\vec{x}\|_p=|x_k|=\max_i|x_i|=\|\vec{x}\|_\infty$$

范数等价性

按照不同方式规定的范数，其值一般不相同，但在各种范数下考虑向量序列的收敛性时，却表现出明显的 一致性，即向量范数的等价性。

对于两个向量范数 $\|\cdot\|_p$与$\|\cdot\|_q$ **，如果存在常数c_1和c_2**

$(0 < c_1 \le c_2)$ **使得** $c_1\|x\|_p \le \|x\|_q \le c_2\|x\|_p$

则称范数 $\|\cdot\|_p$与$\|\cdot\|_q$ **等价**

定理2 任意两个p-范数等价。

向量范数的等价性表明：按不同向量范数定义的向量的收敛性具有一致性。

定理3 在空间$\mathbf{R}^n$中，向量序列$\{X^{(k)}\}$收敛于向量X 的充要条件是对X 的任意范数$\|\bullet\|$，有：

$$\lim_{k\to\infty}\| X^{(k)} - X^* \|_p \to 0$$

2.矩阵范数

矩阵范数：设A是n×n 阶矩阵，$A \in R^{n\times n}$

$X \in R^n$，$\|X\|$为R^n中的某范数，称

$$\|A\| = \max_{\substack{X\in R^n \\ \|X\|\neq 0}} \frac{\|AX\|}{\|X\|} = \max_{\|X\|=1, X\in R^n} \|AX\|$$

为矩阵A的从属于该向量范数的范数，或称为矩阵A的范数，记为$\|A\|$。

矩阵范数的性质：

（1）对任意$A \in R^{n\times n}$,有$||A|| \geq 0$，当且仅当$A=0$时，

$$||A||=0.$$

正定性

（2）$||\lambda A||=|\lambda| \, ||A||$（$\lambda$为任意实数）

齐次性

（3）对于任意A、B $\in R^{n\times n}$，恒有

$$||A+B|| \leq ||A||+||B||.$$

三角不等式

（4）对于矩阵$A \in R^{n\times n}$，$X \in R^{n}$，恒有：

$$||AX|| \leq ||A|| \bullet ||X||.$$

相容性

（5）对于任意A、B $\in R^{n\times n}$ 恒有 $||AB|| \leq ||A|| \bullet ||B||$

证明略

根据常用的向量1-范数，2-范数及 ∞ -范数得到相应的矩阵算子范数

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$ 列范数

$$\|A\|_2 = \left[\lambda_{\max}(A^T A)\right]^{\frac{1}{2}}$$ 2-范数 谱范数

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$ 行范数

$$F-范数: \|A\|_F = \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

谱范数使用起来不方便，但它却有一些特殊的性质，在理论推导中非常重要。

5.3 迭代法的收敛性

线性方程组迭代法收敛条件

定理4 设G的某种范数满足$||G||<1$，则$x^{(k+1)}= Gx^{(k)} + d$存在唯一解$x^*= Gx^* + d$，且对任意初值$x^{(0)}$，迭代序列

$$x^{(k+1)}= Gx^{(k)} + d$$

收敛于x^*。

定理6 若A按行严格对角占优（$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$），则解Ax=b的Jacobi迭代和Gauss-Seidel迭代均收敛。

迭代法收敛的判别条件

例2　设$AX=b$的系数矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 10 & -2 & -1 \\ -2 & 10 & -1 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

判断解$AX=b$的J法和$G-S$法的收敛性。

迭代法收敛的判别条件

解：因为 $|a_{11}|=10>|-2|+|-1|$，$|a_{22}|=10>|-2|+|-1|$，

$$|a_{33}|=15>|-1|+|-2|$$

即 A 是严格对角占优矩阵，故J法和$G-S$法收敛。