

第二章 数字图像基础

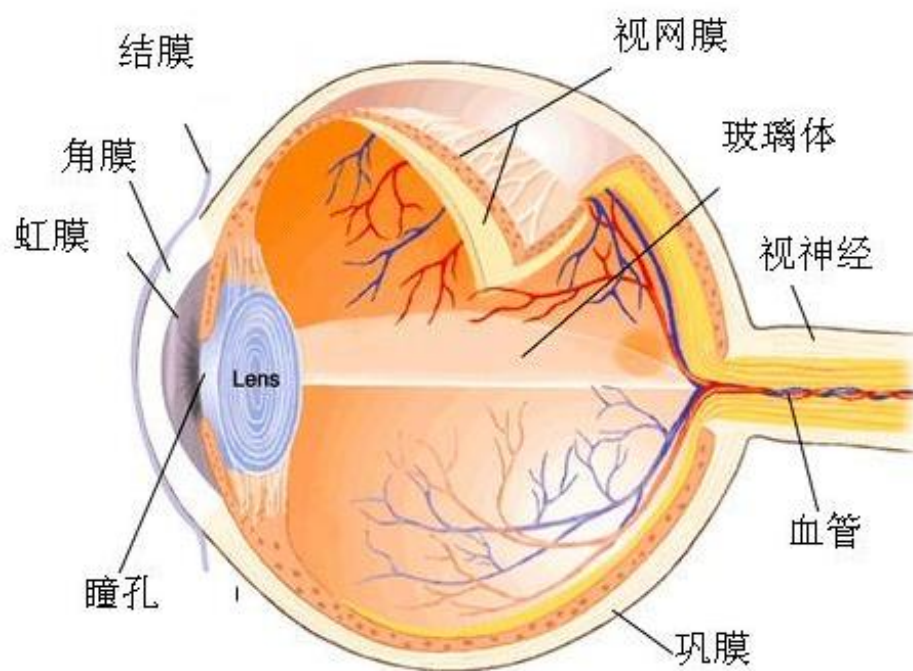
- 图像的获取和感知;
- 图像的数字化的;
- 数字图像的描述;

人类的视觉感知系统

- 视觉是人类最高级的感知器官，所以，毫无疑问图像在人类感知中扮演着重要角色。
- 然而人类感知只限于电磁波谱的视觉波段，成像机器则可以覆盖几乎全部电磁波谱。
- 研究图像处理首先要了解人类的视觉感知系统。

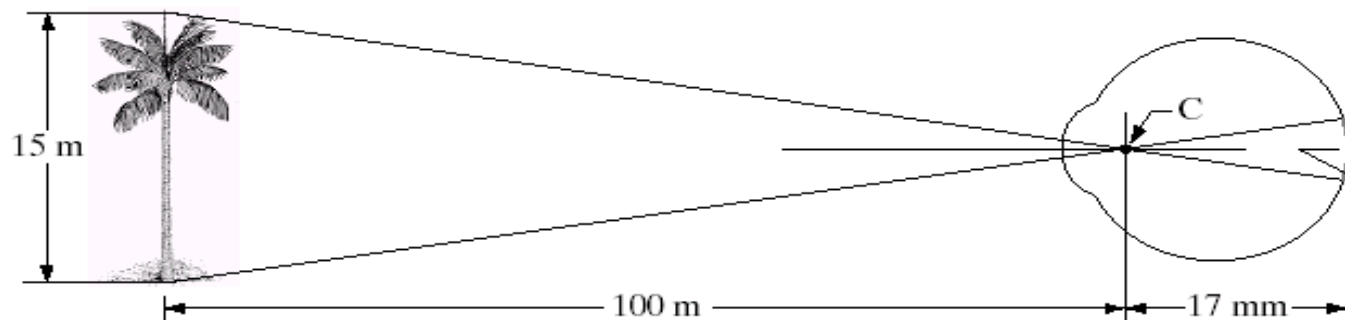
视觉系统的基本构造

基本构造



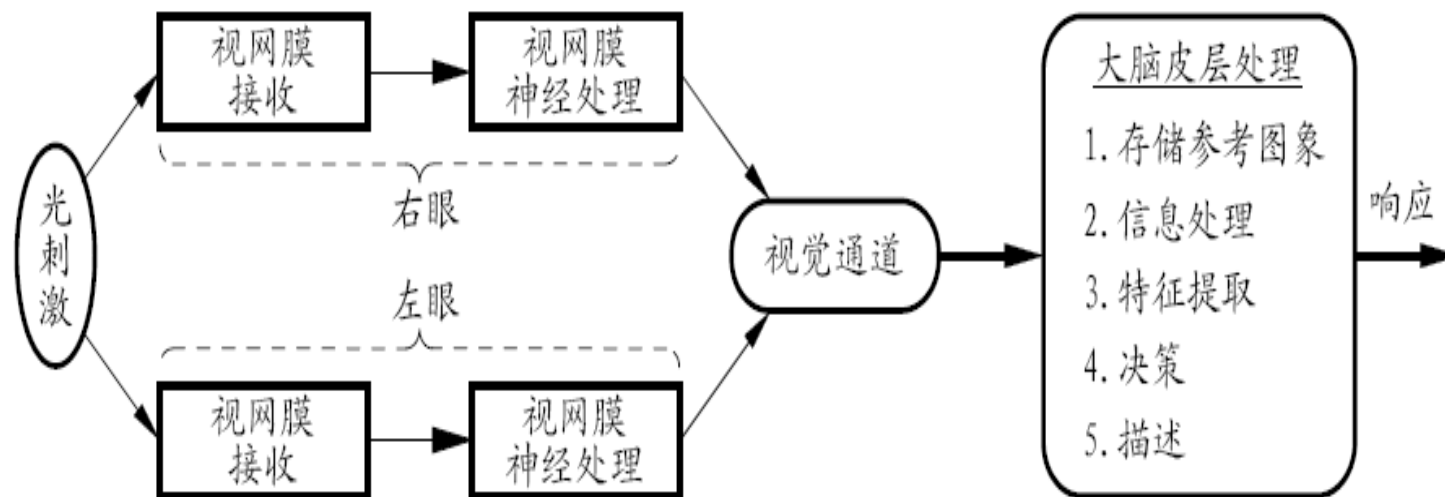
人眼横截面简图

■ 眼睛中图像的形成



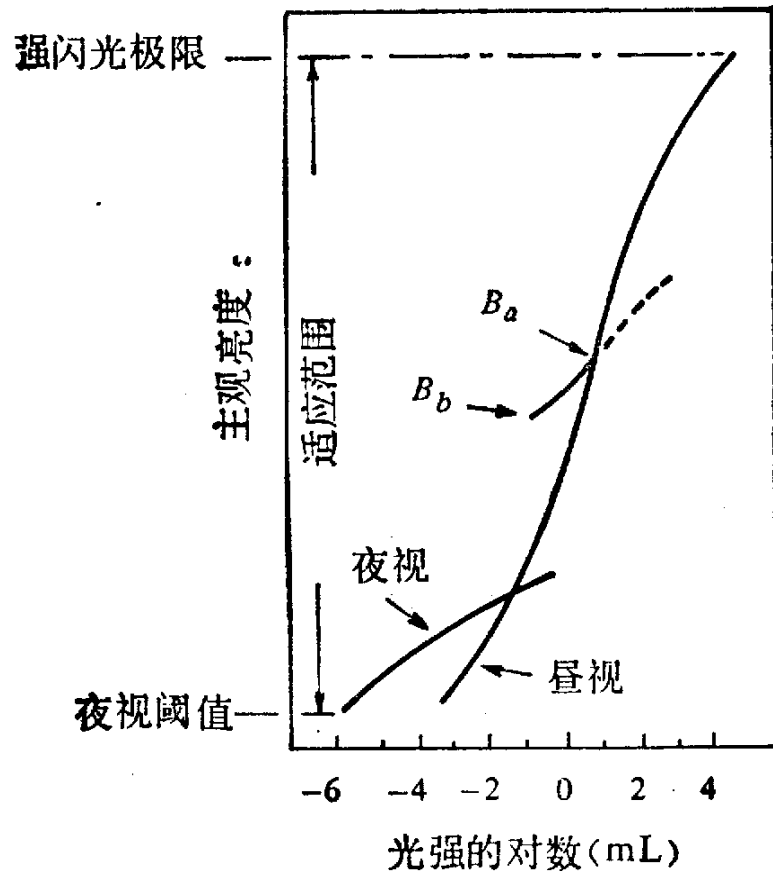
图像形成示意图

视觉过程

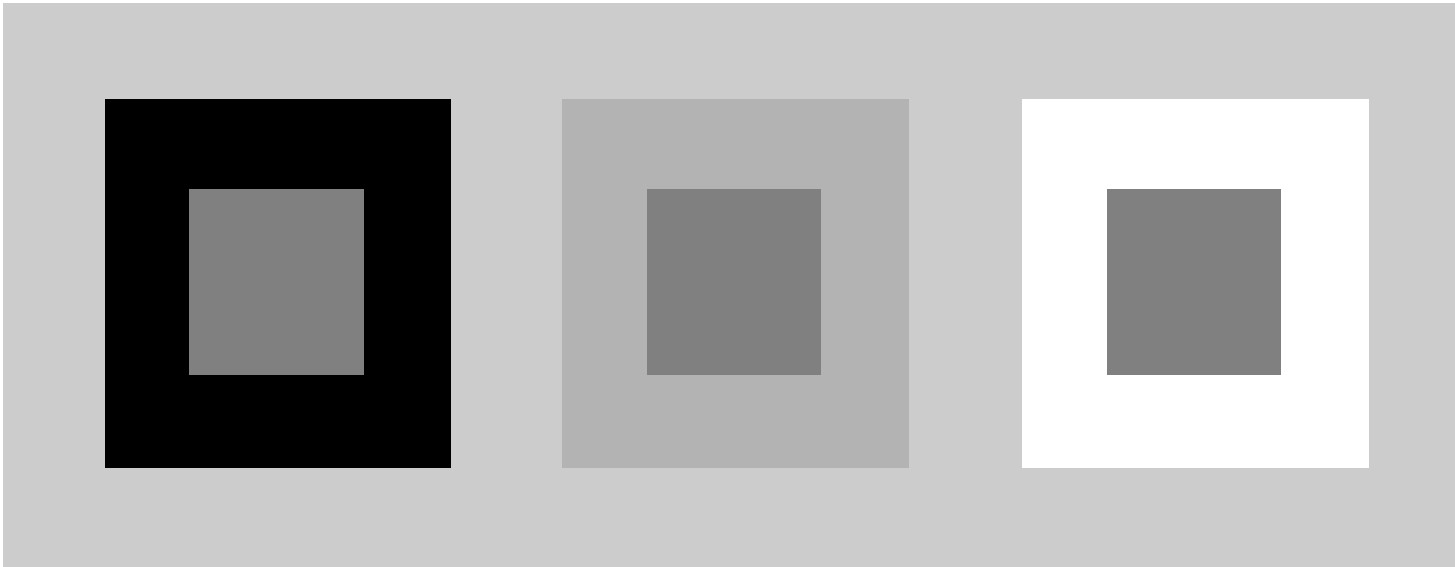


人的视觉过程的流图

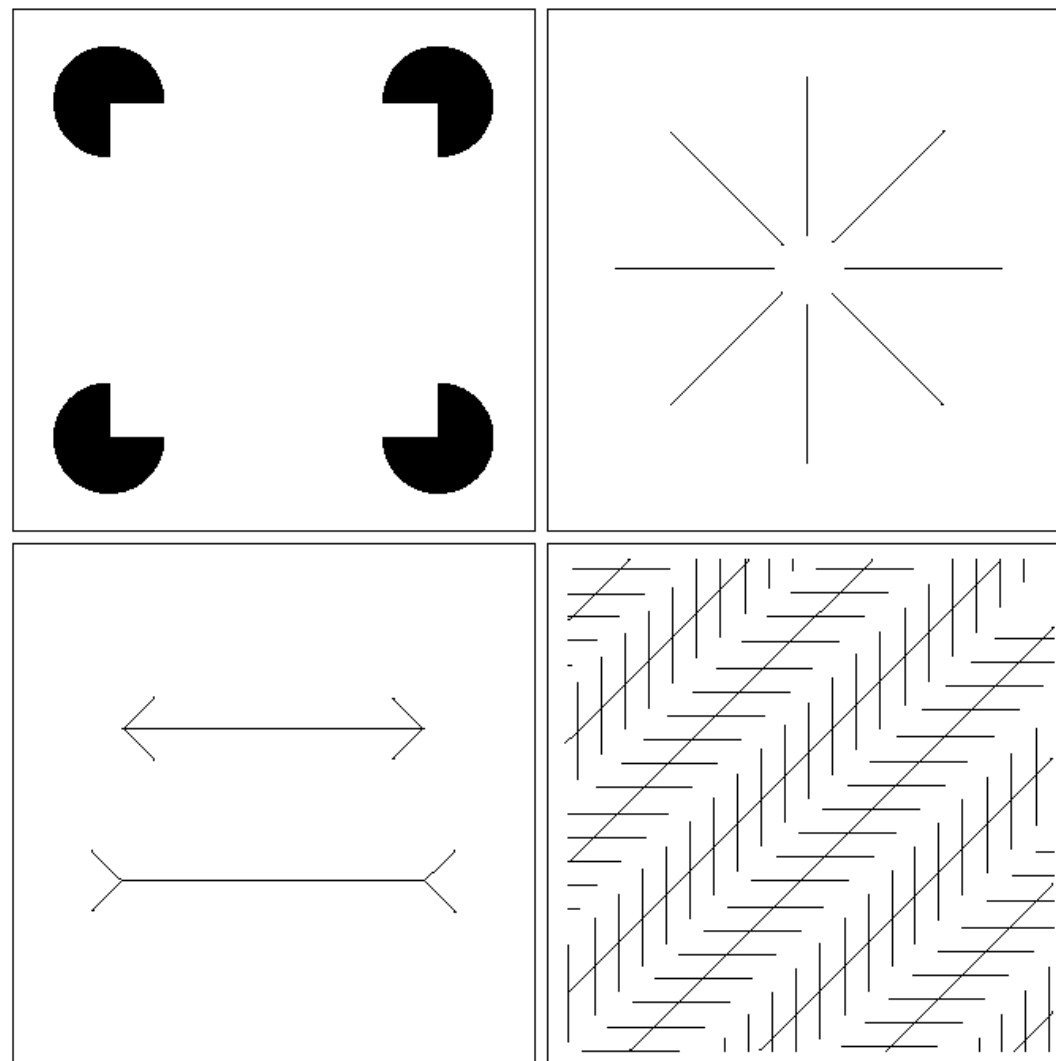
亮度适应和鉴别



光强度与主观亮度的关系曲线

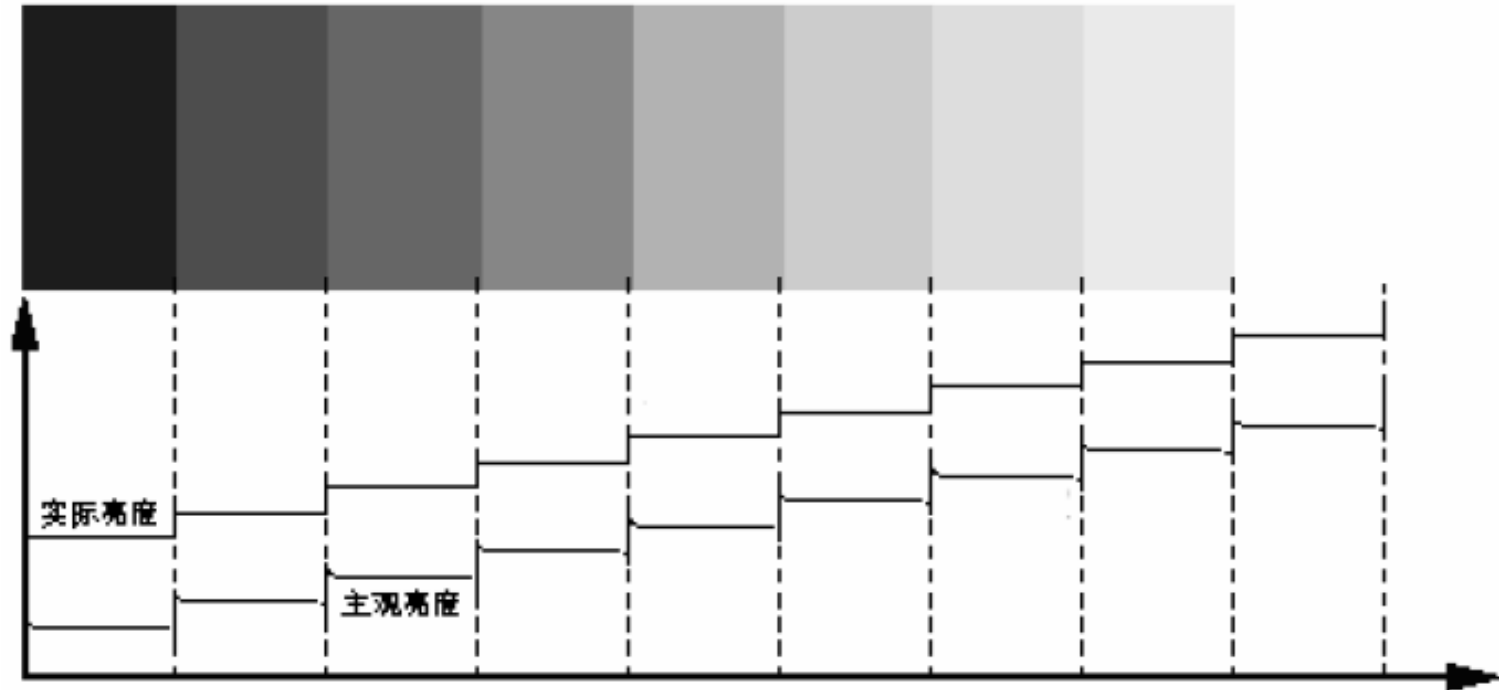


同时对比现象示意图

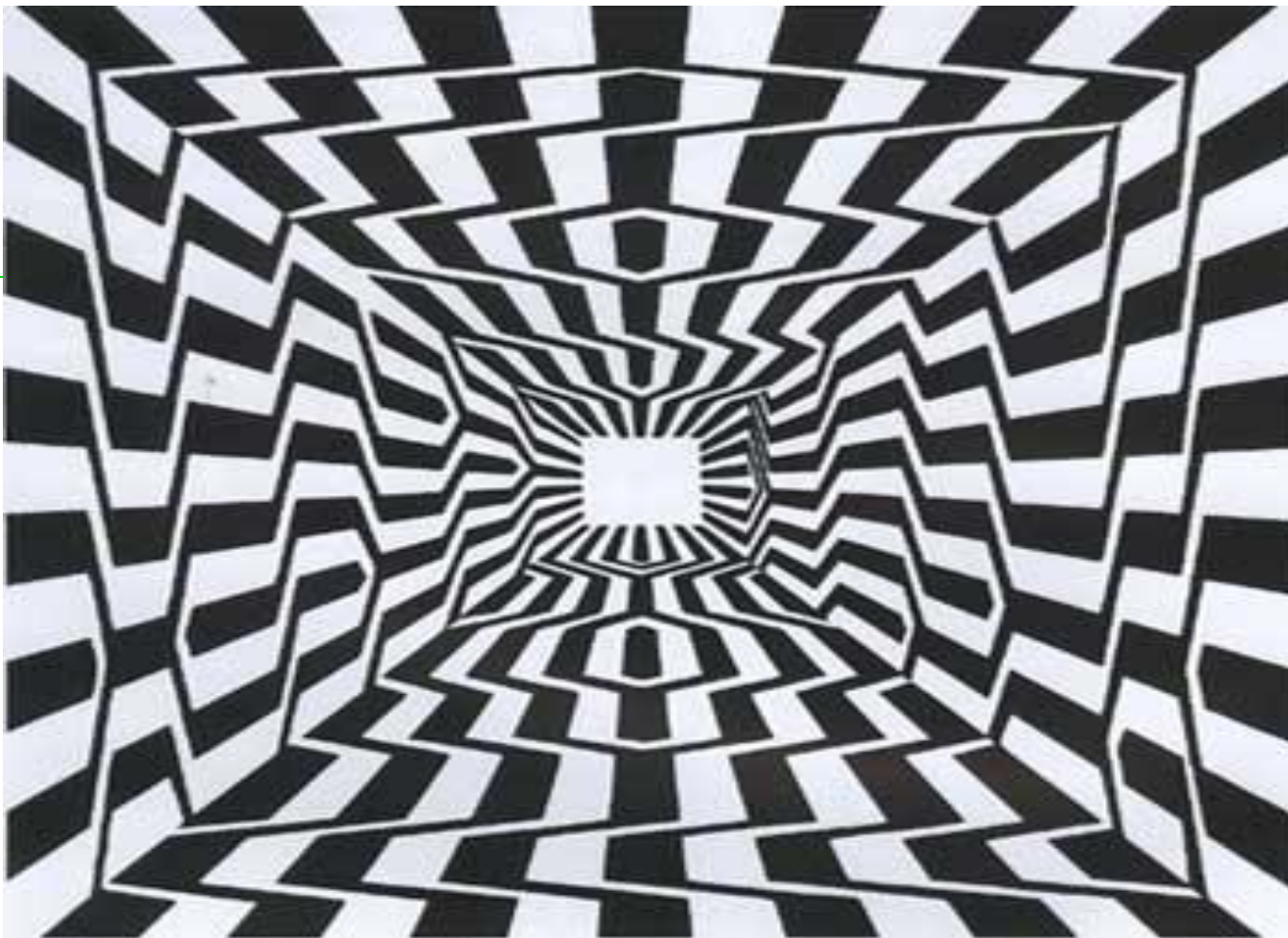


视觉错觉图例(a)

马赫带 (Mach Band) 效应



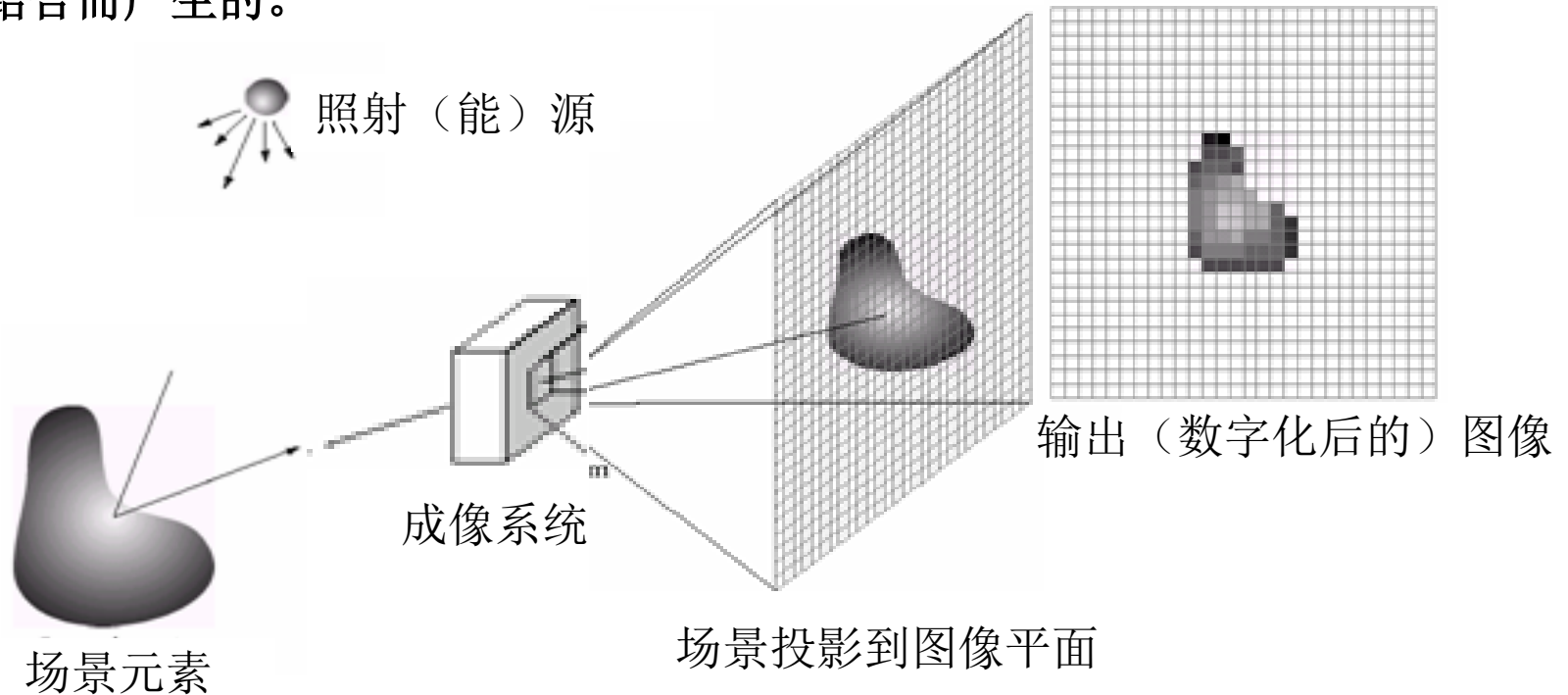
马赫带效应的出现，是因为人眼对于图像中不同空间频率具有不同的灵敏度，而在空间频率突变处就出现了“欠调”或“过调”。



视觉错觉图例(c)

图像的获取和感知

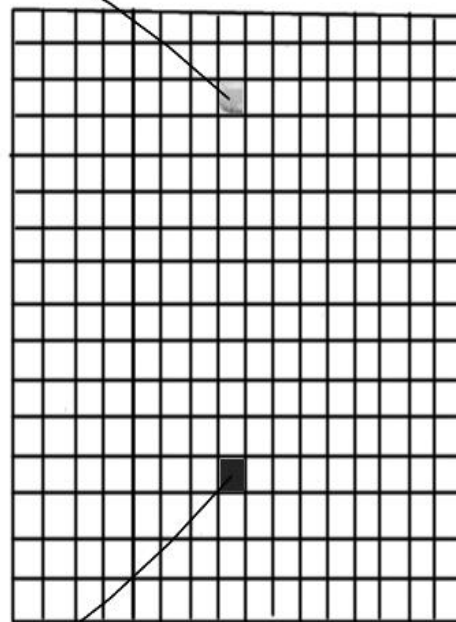
各类图像都是由“照射”源和形成图像的“场景”元素对光能的反射或吸收相结合而产生的。



数字图像获取过程



物理图象



数字图象

简单的图像形成模型

当用数学方法描述图像信息时，通常着重考虑它的点的性质。例如一副图像可以被看作是空间各个坐标点的结合。它的最普通的数学表达式为：

$$I = f(x, y, z, \lambda, t) \quad (2-1)$$

其中 (x, y, z) 是空间坐标， λ 是波长， t 是时间， I 是图像强度。这样一个表达式可以代表一副活动的、彩色的、立体图像。

简单的图像形成模型

当研究的是静止图像时，则式（2-1）与时间 t 无关，当研究的是单色图像时，显然与波长 λ 无关，对于平面图像则与坐标 z 无关。因此，对于静止的平面的、单色的图像来说其数学表达式可简化为：

$$I = f(x, y) \quad (2-2)$$

简单的图像形成模型

式（2-2）说明，一副平面图像可以用二维亮度函数来表示，当一副图像从物理过程产生时，它的值正比于物理源的辐射能量，因此， $f(x,y)$ 一定是非零和有限的，即：

$$0 < f(x, y) < \infty \quad (2-3)$$

简单的图像形成模型

人们所感受到的图像一般都是由物体反射的光组成的。函数 $f(x,y)$ 可由两个分量来表示：

- (1) 入射到观察场景的光源总量；
- (2) 场景中物体反射光的总量。

简单的图像形成模型

这两个分量分别称为入射分量和反射分量，如果用 $i(x,y)$ 表示入射分量，用 $r(x,y)$ 表示反射分量，两个函数合并形成 $f(x,y)$ ，即：

$$I = f(x, y) = i(x, y)r(x, y) \quad (2-4)$$

其中

$$0 < i(x, y) < \infty \quad (2-5)$$

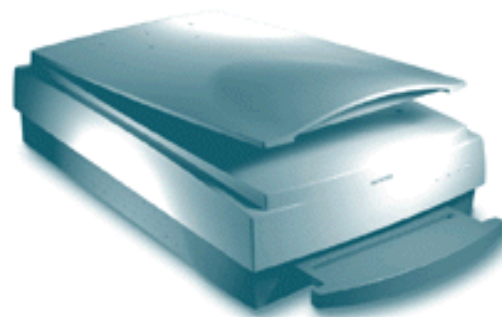
$$0 < r(x, y) < 1 \quad (2-6)$$

式(2-5)指出反射分量限制在0（全吸收）和1（全反射）之间， $i(x,y)$ 的性质取决于照射源，而 $r(x,y)$ 取决于成像物体的特性。

在晴朗的白天，太阳在地球表面产生的照度超过 $90000\text{lm}/\text{m}^2$ 在有云的情况下，这个数值下降到 $1000\text{lm}/\text{m}^2$ 。在晴朗的夜晚，满月情况下大约为 $0.1\text{lm}/\text{m}^2$ 的照度。类似的， $r(x,y)$ 的某些典型值：黑天鹅绒为0.01，不锈钢为0.65，白色墙为0.80。

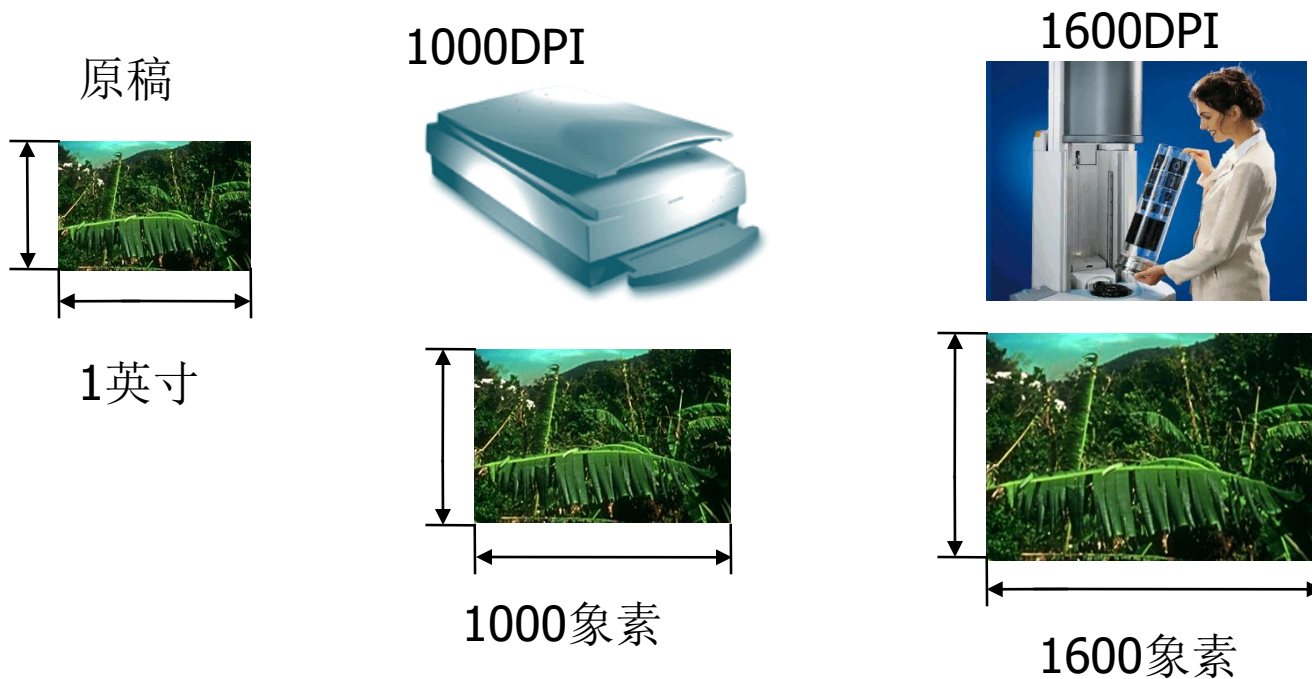
2.1 图像的输入：图象输入设备

- 基于CCD光电耦合器件的输入设备
 - 摄像机、数字摄像机
 - 数字相机
 - 平板扫描仪
- 基于光电倍增管的输入设备
 - 滚筒扫描仪



2.1 图像的输入：图象输入设备

- 扫描仪分辨率与扫描图象的大小
 - 分辨率：单位长度上采样的像素个数：DPI(dot/inch)

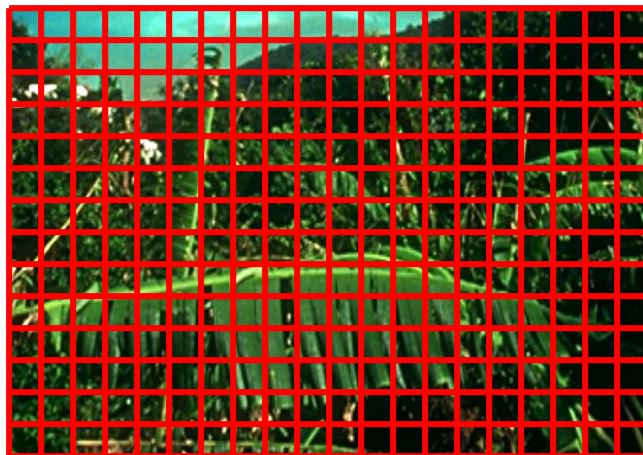


2.1 图像的数字化的：统一的采样和量化

为了计算机处理，图像函数 $f(x,y)$ 在空间和取值上必须数字化

- 图像的采样
 - 空间坐标 (x, y) 的数字化被称为图像采样
 - 确定水平和垂直方向上的像素个数 N 、 M

M

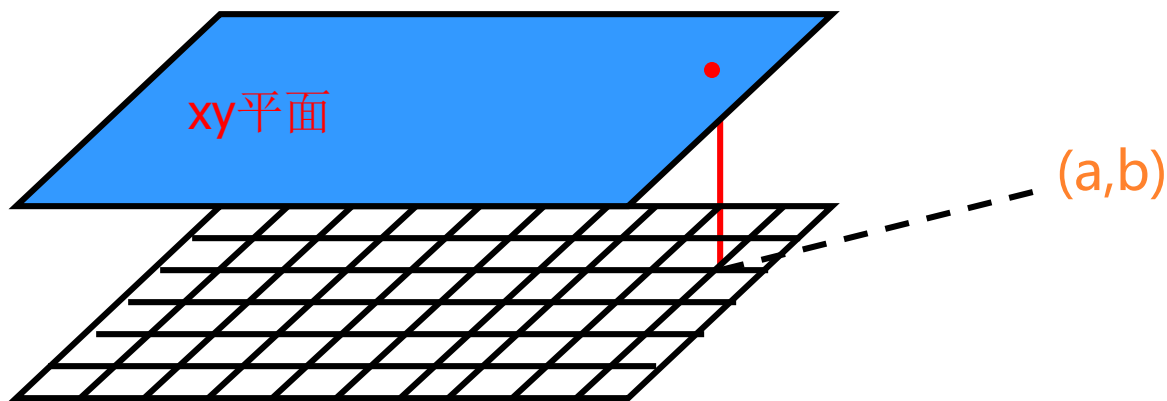


N

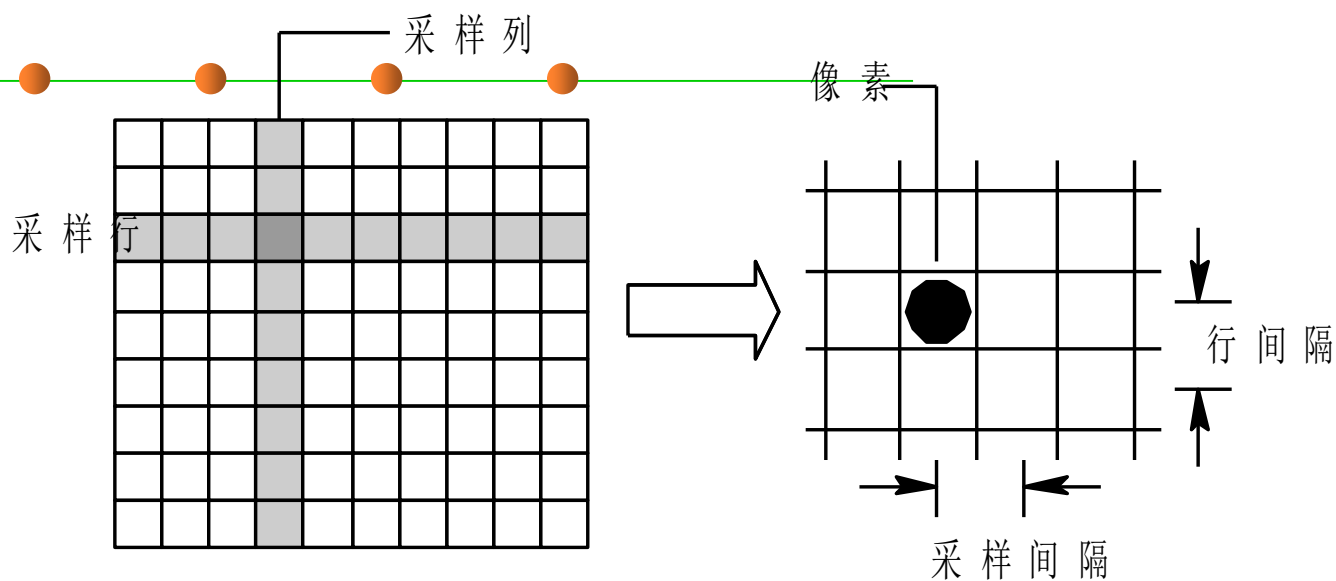
2.1 图像的数字化的：统一的采样和量化

- 图像采样的形式化定义

- 设 Z 表示整数集合
- **采样处理**：将 xy 平面分配到一个网格上，且每一个网格中心的坐标是一个笛卡儿乘积 $Z \times Z$ 的元素对，即所有有序元素对 (a,b) 的集合，其中 a 和 b 属于整数集合 Z



- 采样（**Sampling**）：是对图像空间坐标的离散化，它决定了图像的空间分辨率。
- 用一个网格把待处理的图像覆盖，然后把每一小格上模拟图像的各个亮度取平均值，作为该小方格中点的值。



图像的采样

➤对一幅图像采样时，若每行（即横向）像素为N个，每列（即纵向）像素为M个，则图像大小为M×N个像素，从而f(x,y)构成一个M×N实数矩阵：

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) & \dots & f(0,N-1) \\ f(1,0) & f(1,1) & \dots & f(1,N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(M-1,0) & & & f(M-1,N-1) \end{bmatrix}$$

➤ 每个元素为图像f(x,y)的离散采样值，称之为像元或像素。

2.1 图像的数字化：统一的采样和量化

- 图像的采样与数字图象的质量



265x180



133x90



66x45



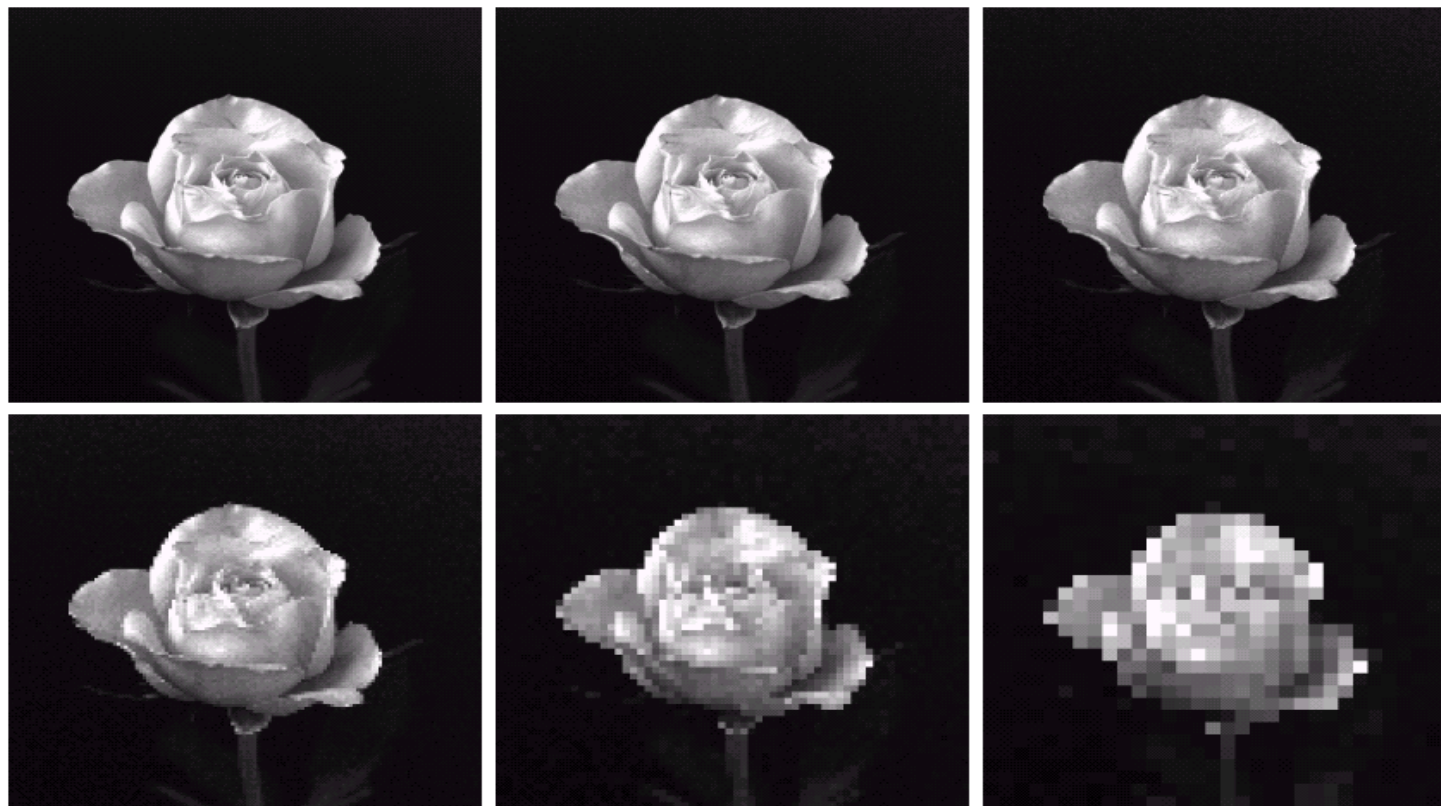
33x22₂₄

图像的采样与数字图像的质量



FIGURE 2.19 A 1024×1024 , 8-bit image subsampled down to size 32×32 pixels. The number of allowable gray levels was kept at 256.

图像的采样与数字图像的质量



a	b	c
d	e	f

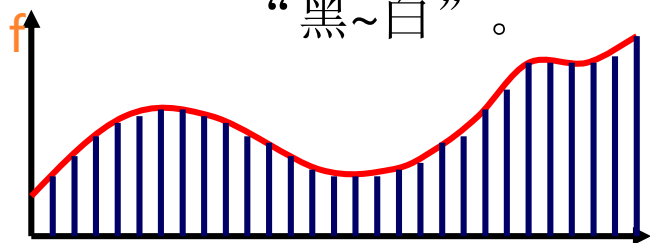
FIGURE 2.20 (a) 1024×1024 , 8-bit image. (b) 512×512 image resampled into 1024×1024 pixels by row and column duplication. (c) through (f) 256×256 , 128×128 , 64×64 , and 32×32 images resampled into 1024×1024 pixels.

2.1 图像的数字化的：统一的采样和量化

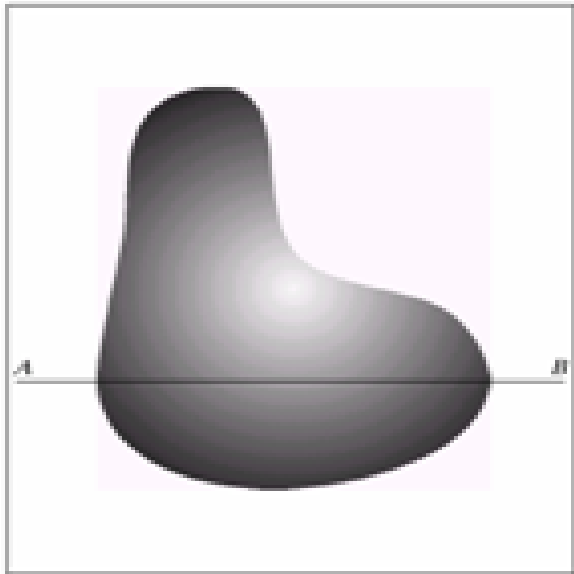
- 图像的量化
 - 取值的数字化被称为图像灰度级量化
 - 量化处理：将 f 映射到 Z 的处理
 - Z 的最大取值，确定像素的灰度级数 $G = 2^m$ ， 如256

- 量化

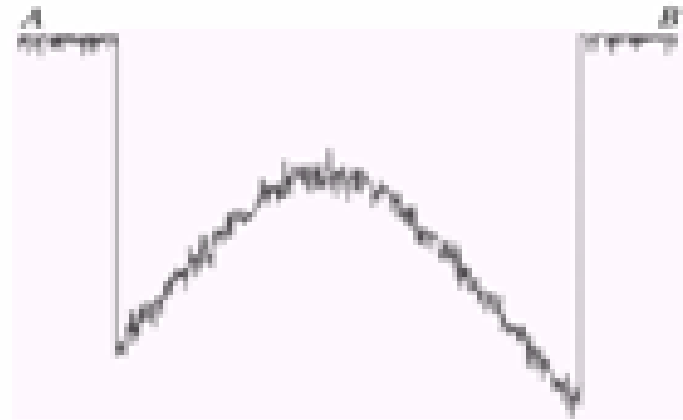
是将各个像素所含的明暗信息离散化后，用数字来表示称为图像的量化，一般的量化值用整数来表示。充分考虑到人眼的识别能力之后，目前非特殊用途的图像均为8bit量化，即用0~255描述“黑~白”。



图像的数字化

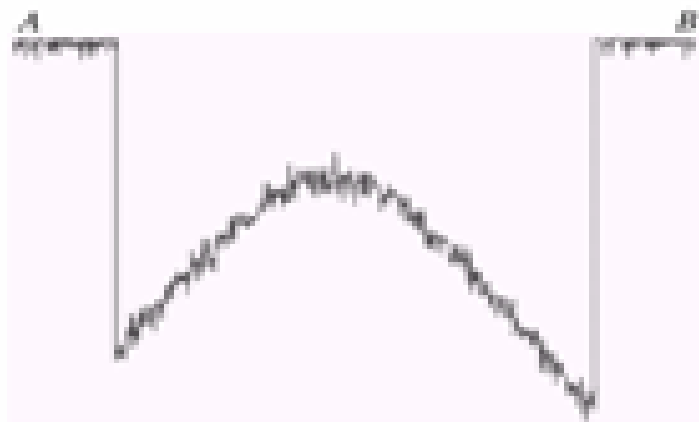


连续图像

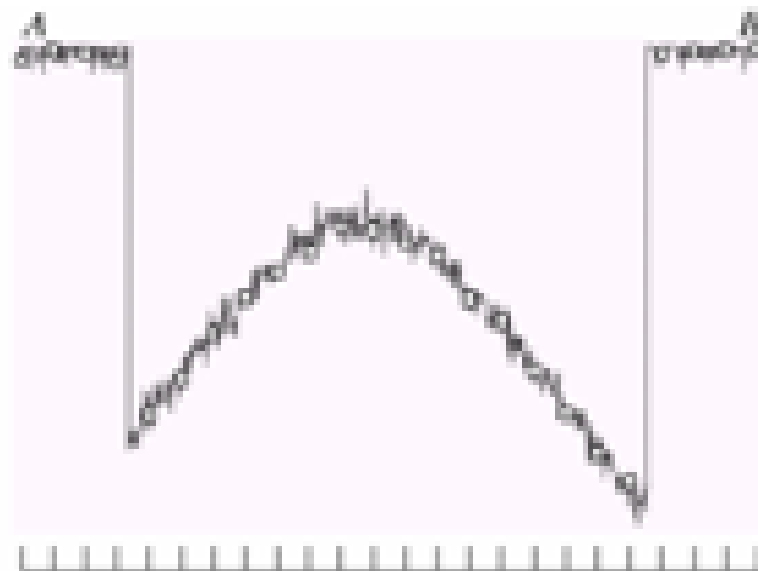


沿从A到B的直线的扫描线

图像的数字化

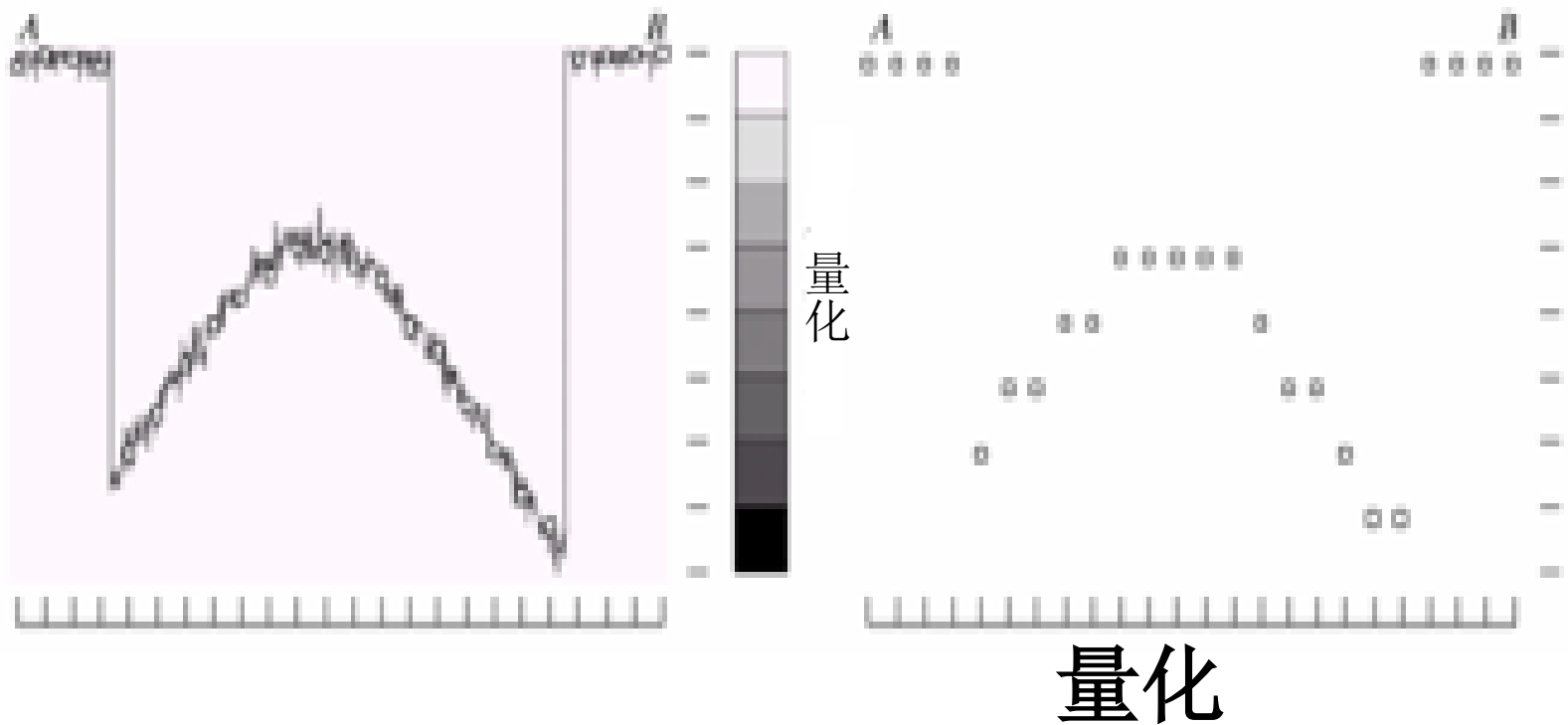


沿从A到B的直线的扫描线



取样

图像的数字化



灰度量化层次

256个层次的图像



64个层次的图像

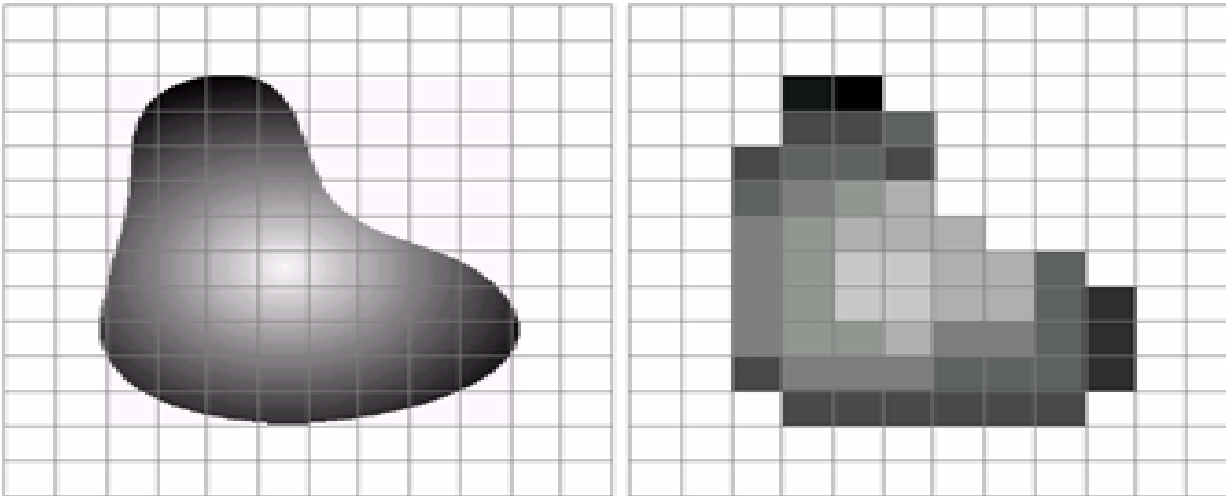


16个层次的图像



图像的数字化

- 从图像的顶点逐行执行着一过程，则会产生一副二维数字图像。



数字图像的质量在很多程度上取决于取样和量化中所用的取样数和灰度级数。

2.1 图像的数字化：统一的采样和量化

- 图像的量化与数字图象的质量



256灰度级



16灰度级



8灰度级



4灰度级

图像的数字化

- 分辨率

分辨率：是指映射到图像平面上的单个像素的景物元素的尺寸。

单位：像素/英寸，像素/厘米

或者是指要精确测量和再现一定尺寸的图像所必需的像素个数。

单位：像素*像素



256×256



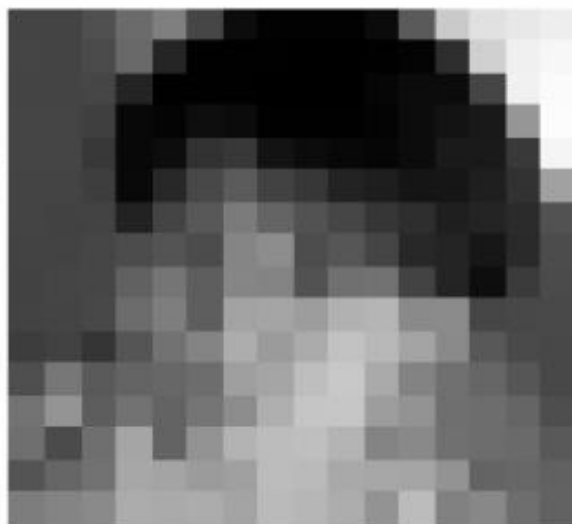
128×128



64×64



32×32



16×16



8×8

分辨率对图像质量的影响

图像的数字化的

- 空间和灰度级分辨率

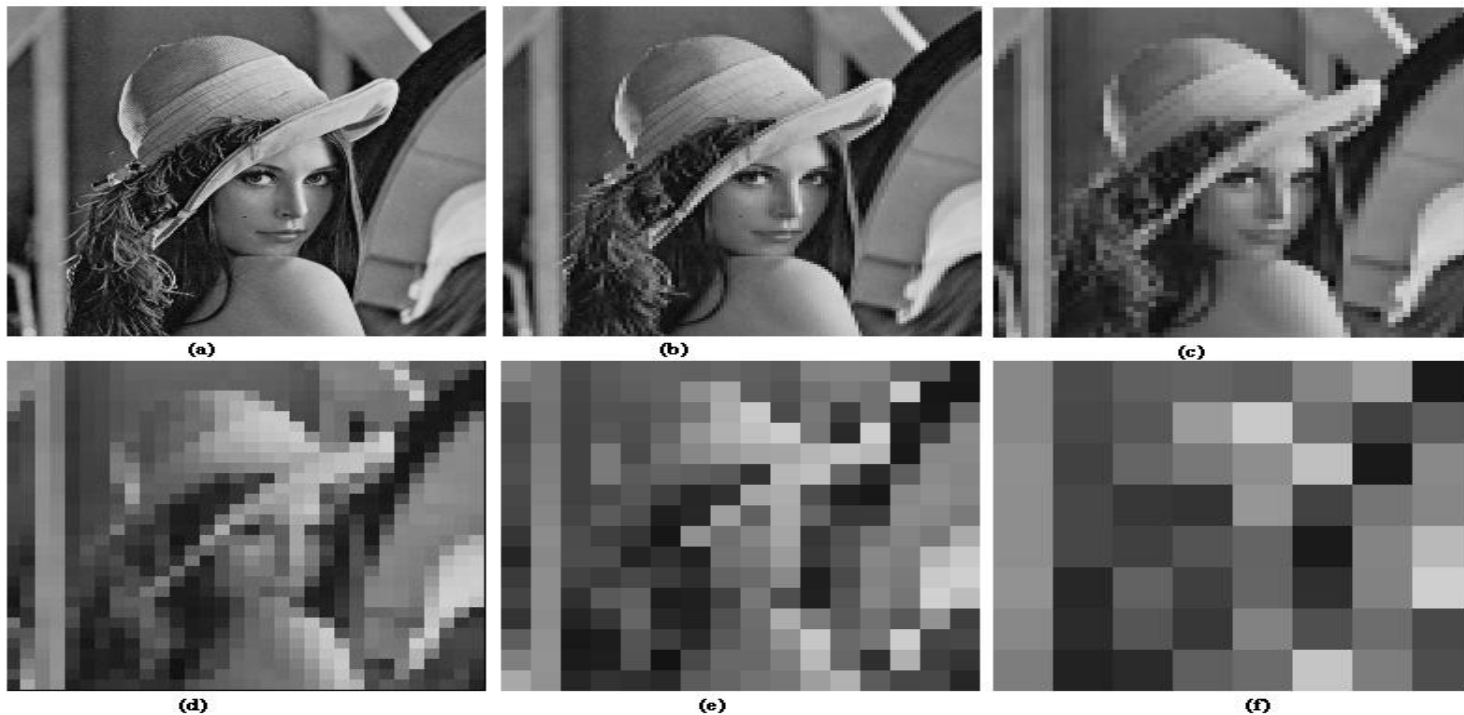
- 取样值是决定一副图像空间分辨率的主要参数，空间分辨率是图像中可辨别的最新细节。
- 灰度级分辨率是指在灰度级别中可分辨的最小变化，由于硬件方面的要求，灰度级数通常是2的整数幂。

图像的数字化

- 在取样时，若横向的像素数（列数）为 M ，纵向的像素数（行数）为 N ，则图像总像素数为 $M*N$ 个像素。
- 一般来说，采样间隔越大，所得图像像素数越少，空间分辨率低，质量差，严重时出现马赛克效应；
- 采样间隔越小，所得图像像素数越多，空间分辨率高，图像质量好，但数据量大。

图像的数字化

■ 图像的采样



图像的取样示例

图像的数字化

图像的量化



(a)



(b)



(c)



(e)



(f)

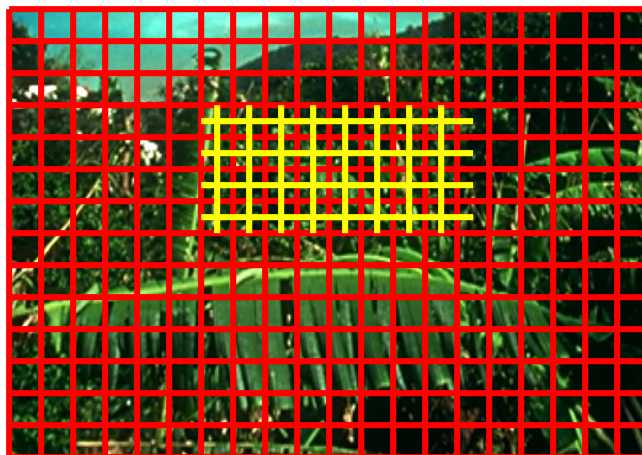


(g)

图像的量化示例

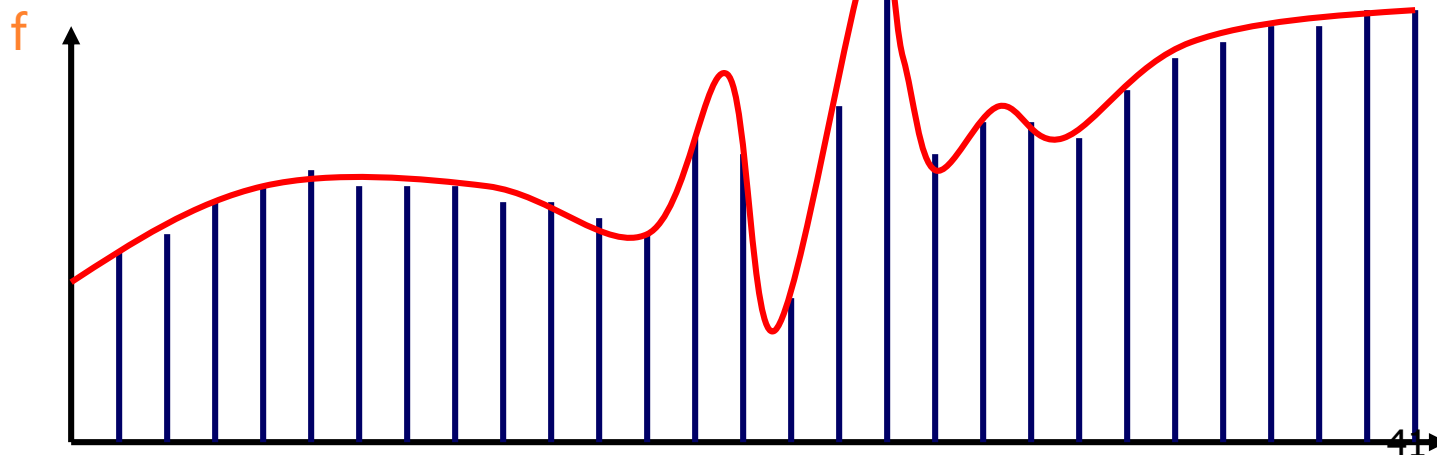
2.1 图像的采样：非统一的采样和量化

- 非统一的图像的采样
 - 在灰度级变化尖锐的区域，用细腻的采样，在灰度级比较平滑的区域，用粗糙的采样



2.1 图像的采样：非统一的采样和量化

- 非统一的图像的量化
 - 在边界附近使用较少的灰度级。剩余的灰度级可用于灰度级变化比较平滑的区域
 - 避免或减少由于量化的太粗糙，在灰度级变化比较平滑的区域出现假轮廓的现象



图像的数字化

- 量化等级越多，所得图像层次越丰富，灰度分辨率高，图像质量好，但数据量大；
- 量化等级越少，图像层次欠丰富，灰度分辨率低，会出现假轮廓现象，图像质量变差，但数据量小。

图像的数字化

- 一般，当限定数字图像的大小时，为了得到质量较好的图像可采用如下原则： ■
 - (1) 对缓变的图像，应该细量化，粗采样，以避免假轮廓。
 - (2) 对细节丰富的图像，应细采样，粗量化，以避免模糊（混叠）。 ■

灰度级对图像的影响



256 灰度级



128 灰度级



64 灰度级



32 灰度级



16 灰度级



8 灰度级



4 灰度级



2 灰度级

4. 图像质量与采样和量化

图像幅度分辨率

图像空间分辨率变化



图 2.4.2 图像空间分辨率变化所产生的效果



图 2.4.3 图像幅度分辨率变化所产生的效果



图 2.4.4 图像空间和幅度分辨率同时变化所产生的效果



数字图像

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) & \cdots & f(0,M-1) \\ f(1,0) & f(1,1) & \cdots & f(1,M-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(N-1,0) & f(N-1,1) & \cdots & f(N-1,M-1) \end{bmatrix}$$

图像（水平）尺寸 M : $M = 2^m$

图像（垂直）尺寸 N : $N = 2^n$

像素灰度级数 G (k -bit): $G = 2^k$

图像所需的位数 b : $b = M \times N \times k = N^2 k$

一幅数字化后的图像其总数据量是：

每行像素数（ M ） \times 每列像素数（ N ） \times 灰度量所占用位数（Bits）。几种常用的图像大小如下：

汉字：取决于字的大小，每个字可以从 16×16 到 256×256 像素；

显微镜图像： 256×256 或 512×512 像素；

电视图像： $500 \sim 700 \times 480$ 像素；

卫星图像：（单波段） 3240×2340 像素；

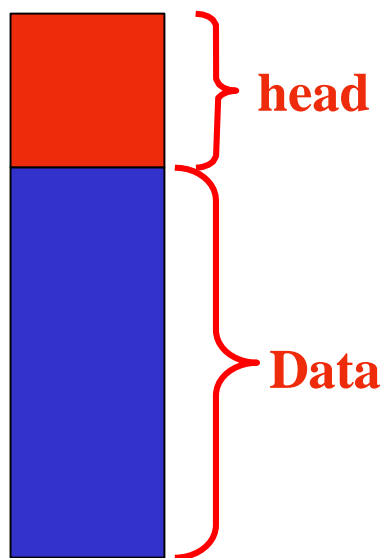
CRT显示器：一般 640×480 或 1024×1024 像素， 2048×2048 像素等

数字图像表示

- 二维离散亮度函数—— $f(x, y)$
 - ✓ x, y 说明图像像素的空间坐标
 - ✓ 函数值 f 代表了在点 (x, y) 处像素的灰度值
- 二维矩阵—— $A[m, n]$
 - ✓ m, n 说明图像的宽和高。
 - ✓ 矩阵元素 $a(i, j)$ 的值，表示图像在第 i 行，第 j 列的像素的灰度值； i, j 表示几何位置

数字图像表示

- 图像描述信息
 - ✓ 如图像高度和宽度等信息
- 图像数据
 - ✓ 顺序存放的连续数据
- BMP格式
 1. 位图文件头
 2. 位图信息头
 3. 调色板
 4. 图像数据



图像模式

1. 灰度图像

可由黑白照片数字化得到，或从彩色图像进行去色处理得到（256灰度级）



18	17	19	17	21	29	45	59	65	59	58	66	67	61	69	60
22	20	20	17	19	25	51	65	82	90	84	74	73	78	57	56
27	23	23	18	17	21	42	47	66	90	97	90	84	86	58	61
28	25	24	21	19	21	24	24	30	50	77	95	93	84	79	77
26	24	24	23	22	23	26	38	37	28	43	77	93	88	102	91
24	20	20	21	22	23	40	68	75	47	29	48	80	97	109	97
23	16	15	17	19	19	36	55	73	68	44	33	58	92	108	103
23	14	11	13	15	15	16	12	36	69	64	35	42	77	108	110
18	21	20	19	16	7	8	14	31	60	63	30	32	79	106	118
19	18	13	13	18	17	5	11	23	48	57	38	45	84	122	128
21	18	10	13	28	35	29	42	51	53	46	40	63	104	140	137
22	24	15	18	35	46	58	77	82	60	35	42	90	140	152	140
21	27	19	21	35	44	46	53	52	38	36	72	131	172	164	146
20	26	24	31	46	54	28	14	13	31	70	128	174	187	180	156
20	26	36	60	88	101	74	55	63	99	138	178	196	186	190	163
22	28	50	91	133	152	149	140	160	189	197	201	198	182	192	165

图像模式

2. 二值图像

灰度图像经过二值化处理后的结果，两个灰度级， 只需用1bit表示。



0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	
0	0	0	0	0	1	
0	1	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0	
0	0	0	1	1	0	
0	0	0	0	0	0	

图像模式

3. 彩色图像

- 彩色图像的数据不仅包含亮度信息，还要包含颜色信息。彩色的表示方法是多样化的。
- 三基色模型：RGB（Red / Green / Blue，红绿蓝）
RGB三基色可以混合成任意颜色。

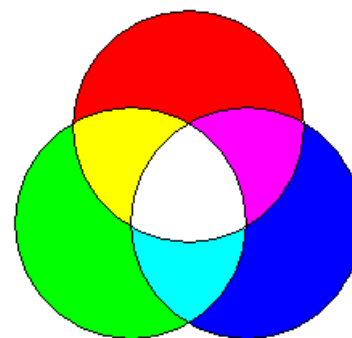


(207, 137, 130)	(220, 179, 163)	(215, 169, 161)	(210, 179, 172)	(210, 179, 172)
(207, 154, 146)	(217, 124, 121)	(226, 144, 133)	(226, 144, 133)	(224, 137, 124)
(227, 151, 136)	(227, 151, 136)	(226, 159, 142)	(227, 151, 136)	(230, 170, 154)
(231, 178, 163)	(231, 178, 163)	(231, 178, 163)	(236, 187, 171)	(236, 187, 171)
(239, 195, 176)	(239, 195, 176)	(240, 205, 187)	(239, 195, 176)	(231, 138, 123)
(217, 124, 121)	(215, 169, 161)	(216, 179, 170)	(216, 179, 170)	(207, 137, 120)
(159, 51, 71)	(189, 89, 101)	(216, 111, 110)	(217, 124, 121)	(227, 151, 136)
(227, 151, 136)	(226, 159, 142)	(226, 159, 142)	(237, 159, 135)	(237, 159, 135)
(231, 178, 163)	(236, 187, 171)	(231, 178, 163)	(236, 187, 171)	(236, 187, 171)
(236, 187, 171)	(239, 195, 176)	(239, 195, 176)	(236, 187, 171)	(227, 133, 118)
(213, 142, 135)	(216, 179, 170)	(221, 184, 170)	(190, 89, 89)	(204, 109, 113)
(204, 115, 118)	(189, 85, 97)	(159, 60, 78)	(136, 38, 65)	(160, 56, 75)

彩色空间

1) RGB彩色空间：面向硬件设备的彩色模型

- 三基色原理三基色指可以用来调配出其它颜色的红、绿、蓝 三种颜色。
- 彩色图像可由红、绿、蓝三基色图像叠加而成。



彩色空间

2) CMY彩色空间

自然界物体颜色光的形成方式将物体划分为两类——发光物体和不发光物体，发光物体称为有源物体，不发光物体称为无源物体。无源物体是不发出光波的物体，其颜色由该物体吸收或反射哪些光波来决定，因此采用CMY三基色相减模型和CMY彩色空间描述。

彩色空间

油墨和颜料的三基色是CMY（Cyan / Magenta / Yellow，青 / 洋红 / 黄）而不是RGB，CMY三基色的特点是油墨和颜料用的越多，颜色越暗（或越黑），所以将CMY称为三减色，而RGB称为三加色。



减法系统

彩色空间

3) HSI彩色空间

区分颜色常用的3种基本特性量：色调（Hue）、饱和度（Saturation）、强度（Intensity）。

- 色调Hue：与混合光谱中主要光波长相联系
- 饱和度Saturation：与一定色调的纯度有关
- 强度Intensity：与物体的反射率成正比

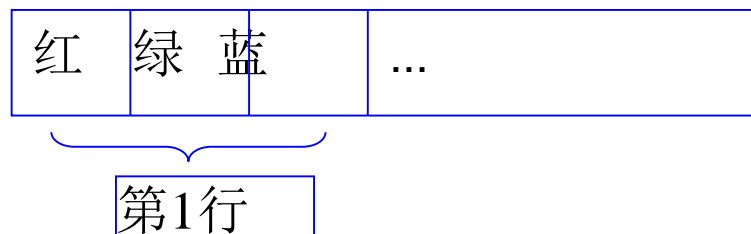
2.3 图像的存储：图像的存储体系

- 图像文件格式体系
 - 互联网用：GIF、JPG、PNG
 - 印刷用：TIF、JPG、TAG、PCX
 - 国际标准：TIF、JPG
- 图像存储体系
 - 内存存储：处理时使用
 - 硬盘存储：处理、备份时用（在线）
 - 备份存储：光盘、磁带（离线、近线）
 - 分级存储（HSM），网络存储（SAN/NAS）

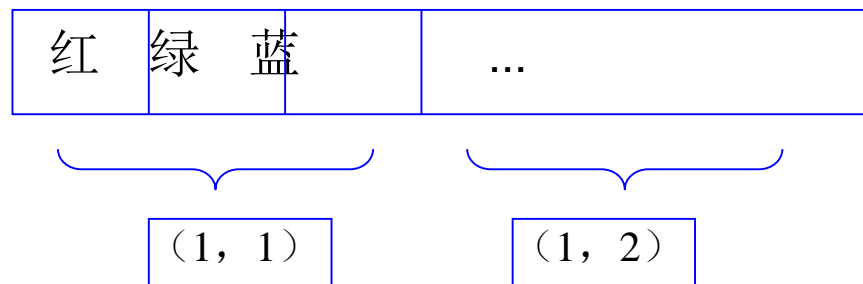
图像存储的数据结构

2. 多波段图像数据结合结构

1) 按扫描行存储

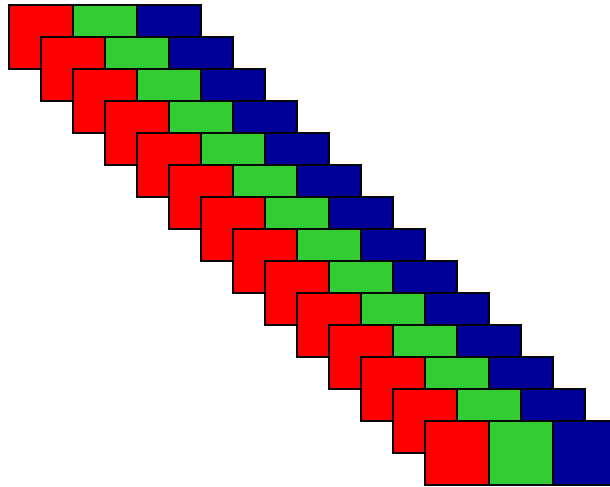


2) 按各个像素存储

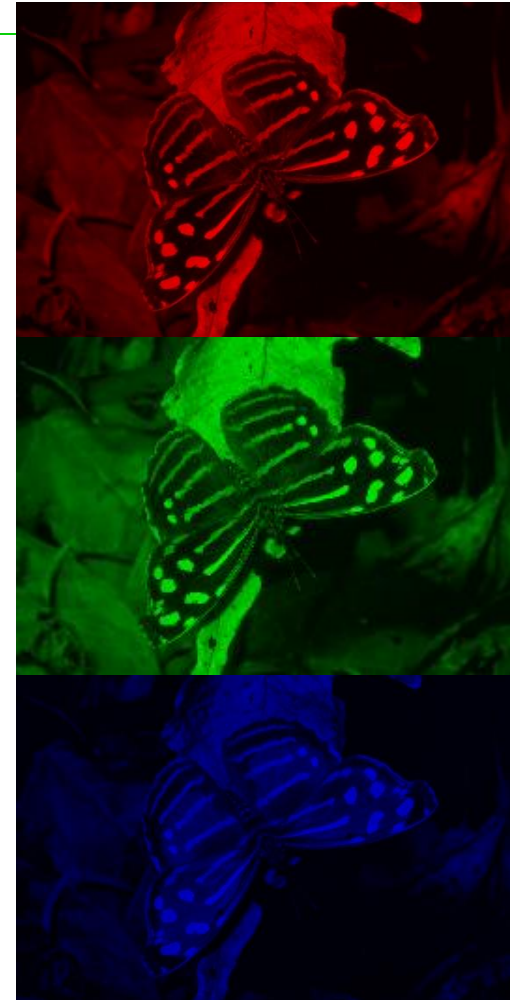


图像的存储：彩色图像的存储

- 按像素存储



- 按色面存储



图像文件格式

- 1 BMP文件格式
- 2 GIF文件格式
- 3 TIFF文件格式
- 4 JPEG文件格式
- 5 DICOM文件格式



1 BMP文件格式

不经过压缩直接按位存盘的文件格式，称为位图（**bitmap**）。

2 GIF文件格式

GIF（**graphic Interchange Format**）是由**CompuServe**公司设计和开发的文件存储格式，用于存储图形，也可以用来存储**256色**图像。扩展名为**gif**。



3 TIFF文件格式

TIFF（Tagged Image File Format）是相对经典、功能很强的图像文件存储格式，扩展名为**tif**或**tiff**。

4 JPEG文件格式

由（国际）联合图像专家组（**Joint Photographic Experts Group**）提出的静止图像压缩标准文件格式，是面向常规彩色图像及其它静止图像的一种压缩标准。扩展名为**jpg**或**jpeg**。

5 DICOM文件格式

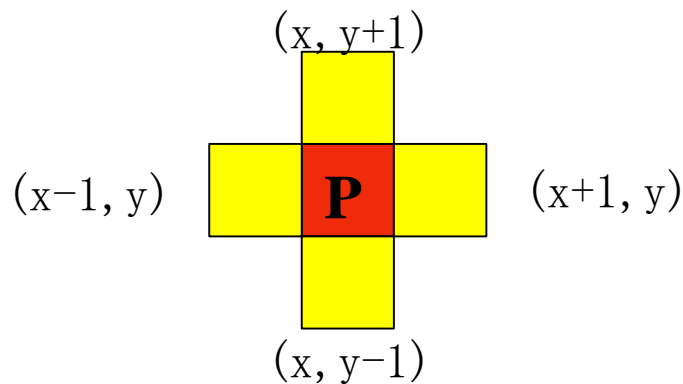
DICOM (Digital Imaging and Communications in Medicine) 是医学图像文件存储格式，为各类医学图像数据的存档、传输和共享而起草和颁布的。**DICOM**格式支持几乎所有的医学数字成像设备，例如**CT**、**MR**、**DR**、超声、内窥镜、电子显微镜等，成为现代医学图像存储传输技术和医学影像学的主要组成部分。**DICOM**文件的常见扩展名为**DCM**。

2.4 像素间的一些基本关系

- 相邻像素：
 - ✓ 4邻域
 - ✓ D邻域
 - ✓ 8邻域
- 连通性
 - ✓ 4连通
 - ✓ 8连通
 - ✓ m连通
- 距离

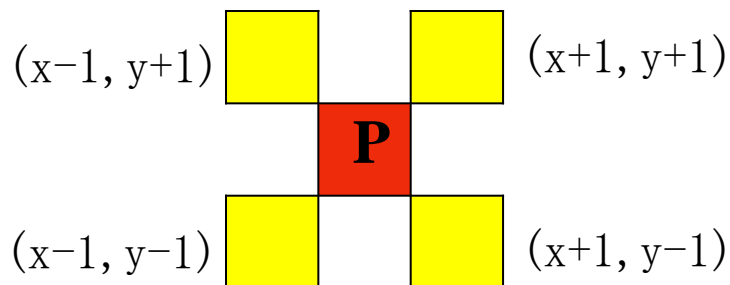
相邻像素--- 4邻域

- 4邻域：像素 $p(x, y)$ 的4邻域是： $(x+1, y)$ ； $(x-1, y)$ ； $(x, y+1)$ ； $(x, y-1)$
- 用 $N_4(p)$ 表示像素 p 的4邻域



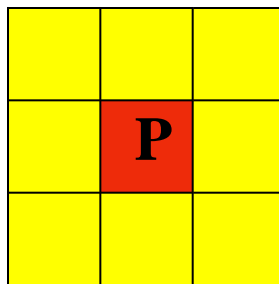
相邻像素---D邻域

- 10 • D邻域定义：像素 $p(x, y)$ 的D邻域是：
 - 对角上的点 $(x+1, y+1)$ ； $(x+1, y-1)$ ； $(x-1, y+1)$ ； $(x-1, y-1)$
- 10 • 用 $N_D(p)$ 表示像素 p 的D邻域



相邻像素--- 8邻域

- 8邻域定义：像素 $p(x, y)$ 的8邻域是： 4邻域的点 + D邻域的点
- 用 $N_8(p)$ 表示像素 p 的8邻域。 $N_8(p) = N_4(p) + N_D(p)$

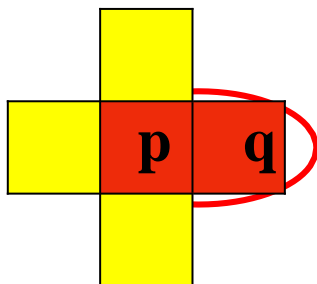


像素间的连通性

- ⑩ • 连通性是描述区域和边界的重要概念
- ⑩ • 两个像素连通的两个必要条件是：
 - ✓ 两个像素的位置是否相邻
 - ✓ 两个像素的灰度值是否满足特定的相似性准则（或者是否相等）
- 4连通、8连通、m连通的定义

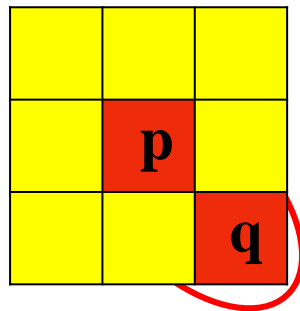
像素的连通性--- 4连通

- 对于具有值V的像素p和q，如果q在集合 $N_4(p)$ 中，则称这两个像素是4连通的



像素的连通性--- 8连通

- 对于具有值V的像素p和q，如果q在集合 $N_8(p)$ 中，则称这两个像素是8连通的



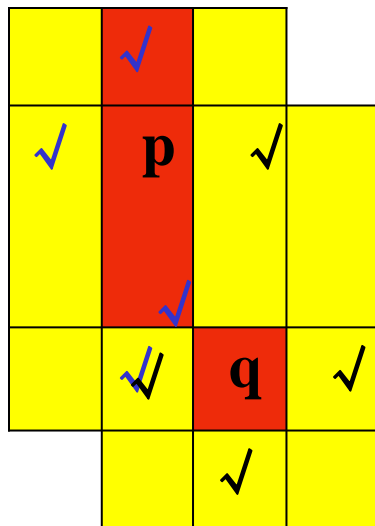
像素的连通性--- m连通

对于具有值 V 的像素 p 和 q ，如果：

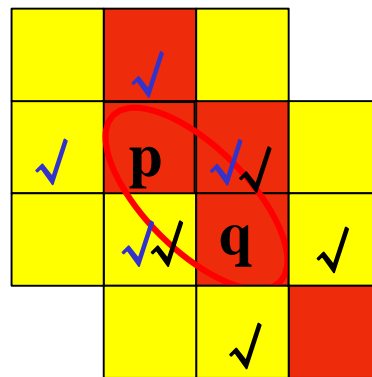
- I. q 在集合 $N_4(p)$ 中，或
- II. q 在集合 $N_D(p)$ 中，并且 $N_4(p)$ 与 $N_4(q)$ 的交集为空（没有值 V 的像素）则称这两个像素是 m 连通的，即 4 连通和 D 连通的混合连通。

像素的连通性--- m连通

是m连通



不是m连通



像素的连通性---通路

- 通路的定义

一条从具有坐标 (x, y) 的像素 p , 到具有坐标 (s, t) 的像素 q 的通路, 是具有坐标

$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ 的不同像素的序列

。

其中, $(x_0, y_0) = (x, y)$, $(x_n, y_n) = (s, t)$,

(x_i, y_i) 和 (x_{i-1}, y_{i-1}) 是邻接的, $1 \leq i \leq n$, n 是路径的长度。如果 $(x_0, y_0) = (x_n, y_n)$, 则该通路是闭合通路

像素的连通性---距离

- 像素之间距离的定义
- 欧氏距离定义
- D_4 距离（城市距离）定义
- D_8 距离（棋盘距离）定义

像素之间距离的定义

对于像素 p 、 q 和 z ，分别具有坐标 (x, y) ， (s, t) 和 (u, v) ，如果

(1) $D(p, q) \geq 0$ ($D(p, q)=0$ ，当且仅当 $p=q$)，

(2) $D(p, q) = D(q, p)$

(3) $D(p, z) \leq D(p, q) + D(q, z)$ 则称 D 是距离函数或度量

欧式距离定义

- 像素 $p(x, y)$ 和 $q(s, t)$ 间的欧式距离定义如下:

$$D_e(p, q) = \sqrt{(x-s)^2 + (y-t)^2}$$

- 对于这个距离计算法, 具有与 (x, y) 距离小于等于某个值 r 的像素是: 包含在以 (x, y) 为圆心, 以 r 为半径的圆平面

D_4 距离（城市距离）

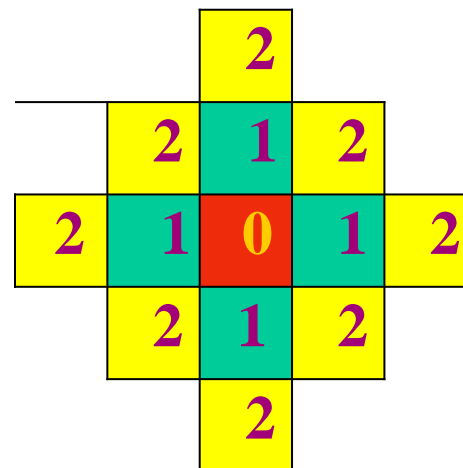
像素 $p(x, y)$ 和 $q(s, t)$ 之间的 D_4 距离定义为：

$$D_4(p, q) = |x - s| + |y - t|$$

D_4 距离举例

- 具有与 (x, y) 距离小于等于某个值 r 的那些像素形成一个菱形
- 例如，与点 (x, y) （中心点） D_4 距离小于等于 2 的像素，形成右边固定距离的轮廓

- 具有 $D_4 = 1$ 的像素是 (x, y) 的 4 邻域



D_8 距离（棋盘距离）

像素 $p(x, y)$ 和 $q(s, t)$ 之间的 D_8 距离定义为：

$$D_8(p, q) = \max(|x - s|, |y - t|)$$

D_8 距离举例

- 具有与 (x, y) 距离小于等于某个值 r 的那些像素形成一个正方形
- 例如，与点 (x, y) （中心点） D 距离小于等于2的像素，形成右边固定距离的轮廓

- 具有 $D_8 = 1$ 的像素是 (x, y) 的8邻域

2	2	2	2	2
2	1	1	1	2
2	1	0	1	2
2	1	1	1	2
2	2	2	2	2

图像镶嵌边框与去除边框

- 图像加边

- 在图像上下方向各扩展一行，在左右方向各扩展一列，即复制相邻的行与列

3	5	2	2
4	7	2	1
5	2	3	1

图像加边

3	3	5	2	2	2
3	3	5	2	2	2
4	4	7	2	1	1
5	5	2	3	1	1
5	5	2	3	1	1

图像去边

- 图像去边

- 在图像上下方向各去除一行，在左右方向各去除一列

BW =

1	1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0

L =

1	1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	2	2	0	0
1	1	1	0	2	2	0	0
1	1	1	0	0	0	3	0
1	1	1	0	0	0	3	0
1	1	1	0	0	0	3	0
1	1	1	0	0	3	3	0
1	1	1	0	0	0	0	0

L =

1	1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	2	2	0	0
1	1	1	0	2	2	0	0
1	1	1	0	0	0	2	0
1	1	1	0	0	0	2	0
1	1	1	0	0	0	2	0
1	1	1	0	0	2	2	0
1	1	1	0	0	0	0	0