频率域图像增强

傅里叶变换和频率域介绍

傅里叶变换：非周期函数可以用正弦和/或余弦乘以加权函数的积分来表示。

傅里叶反变换：函数特征可以通过反变换来重建，不丢失任何信息。

- 一维傅里叶变换及其反变换
- 二维DFT及其反变换
- 频率域滤波
- 空间域滤波和频率域滤波之间的对应关系

傅里叶变换

为什么要在频率域研究图像增强？

可以利用频率成分和图像外表之间的对应关系。一些在空间域表述困难的增强任务，在频率域中变得非常普通

滤波在频率域更为直观，它可以解释空间域滤波的某些性质

可以在频率域指定滤波器，做反变换，然后在空间域使用结果滤波器作为空间域滤波器的指导

一旦通过频率域试验选择了空间滤波，通常实施都在空间域进行

一维傅里叶变换及其反变换

设 x：空间变量（实变量）

f(x)：实变量x的连续函数

u：频率变量（实变量）

F(u)：频率函数（有实部和虚部）

傅里叶正变换为：

$$F(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi ux}dx$$

若已知F(u)，则利用傅里叶反变换，可求得f(x)

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{j2\pi u x}du \qquad j=\sqrt{-1}$$

离散形式：

$$\mathrm{F}(u)=\frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1} f(x)\,e^{-j2\pi u x/M} \qquad u=0,1,2,\cdots,M-1$$

$$f(x)=\sum_{u=0}^{M-1} F(u)\,e^{j2\pi u x/M} \qquad x=0,1,2,\cdots,M-1$$

一个实函数的傅里叶变换通常是复数，即

$$F(u) = R(u) + jI(u)$$

极坐标表示： $$F(u) = |F(u)| e^{-j\varphi(u)}$$

幅度或频率谱： $$|F(u)| = \left[R^2(u) + I^2(u)\right]^{1/2}$$

相角或相位谱： $$\varphi(u) = \tan^{-1}\left[\frac{I(u)}{R(u)}\right]$$

功率谱： $$P(u) = |F(u)|^2 = R^2(u) + I^2(u)$$

二维DFT及其反变换（2D FT）

定义：若f(x, y)是连续图像函数

正变换：

$$F(u,v)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy$$

反变换：

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}F(u,v)\,e^{j2\pi(ux+vy)}dudv$$

变换对：

$$f(x,y)\Leftrightarrow F(u,v)$$

定义：若f(x, y)是离散图像函数（尺寸M*N）

正变换：

$$F(u,v)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\,e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

$$u=0,1,\cdots,M-1$$

$$v=0,1,\cdots,N-1$$

反变换：

$$f(x,y)=\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)\,e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

$$x=0,1,\cdots,M-1$$

$$y=0,1,\cdots,N-1$$

一般F(u, v)是复函数, 即:

$$F(u,v)=R(u,v)+jI(u,v)=\left|F(u,v)\right|e^{j\phi(u,v)}$$

幅度谱: $$\left|F(u,v)\right|=\sqrt{R^2(u,v)+I^2(u,v)}$$

相位谱: $$\phi(u,v)=tg^{-1}\left[\frac{I(u,v)}{R(u,v)}\right]$$

功率谱: $$P(u,v)=R^2(u,v)+I^2(u,v)$$

二维DFT及其反变换

通常在进行傅里叶变换之前用 $(-1)^{x+y}$ 乘以输入图像：

$$\Im\left[f(x,y)(-1)^{x+y}\right]=F(u-M/2,v-N/2)$$

原点为频率坐标下 $(M/2,N/2)$

M,N 为偶数

二维DFT及其反变换

$$F(u,v)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\,e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

$$F(0,0)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)$$

f(x, y)的平均值，也称为频率谱的直流成分。

二维DFT及其反变换

如果f(x, y)是实函数，它的傅里叶变换必然是对称的。

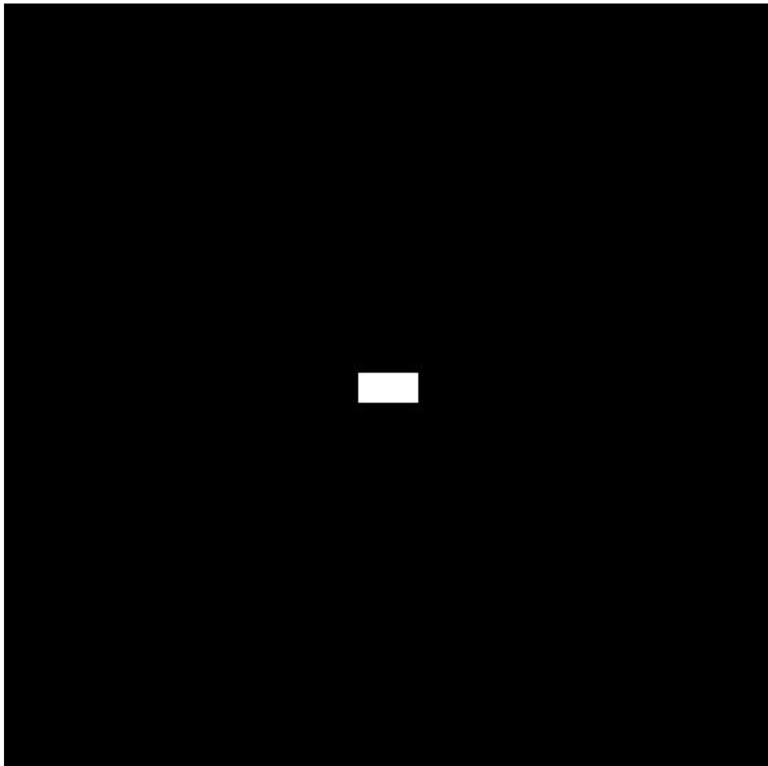
$$F(u,v) = F^*(-u,-v)$$

$$\left|F(u,v)\right| = \left|F(-u,-v)\right|$$

空间域和频率域采样点之间的关系如下：

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta x} \qquad \Delta v = \frac{1}{N\Delta y}$$

例一、二维函数的傅里叶变换

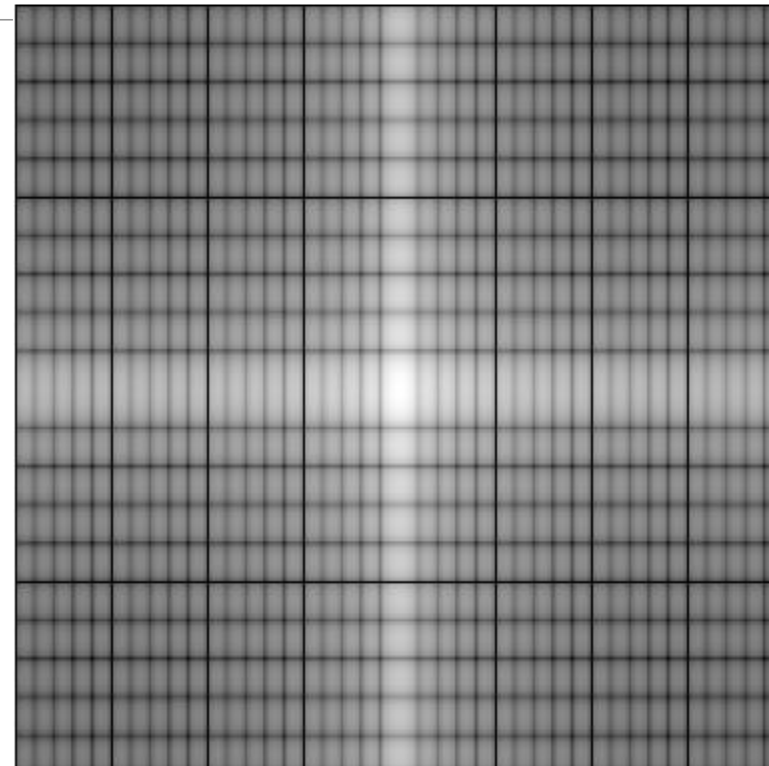


v

x

512 X 512 黑色背景中加
入20 X 40的白色矩形

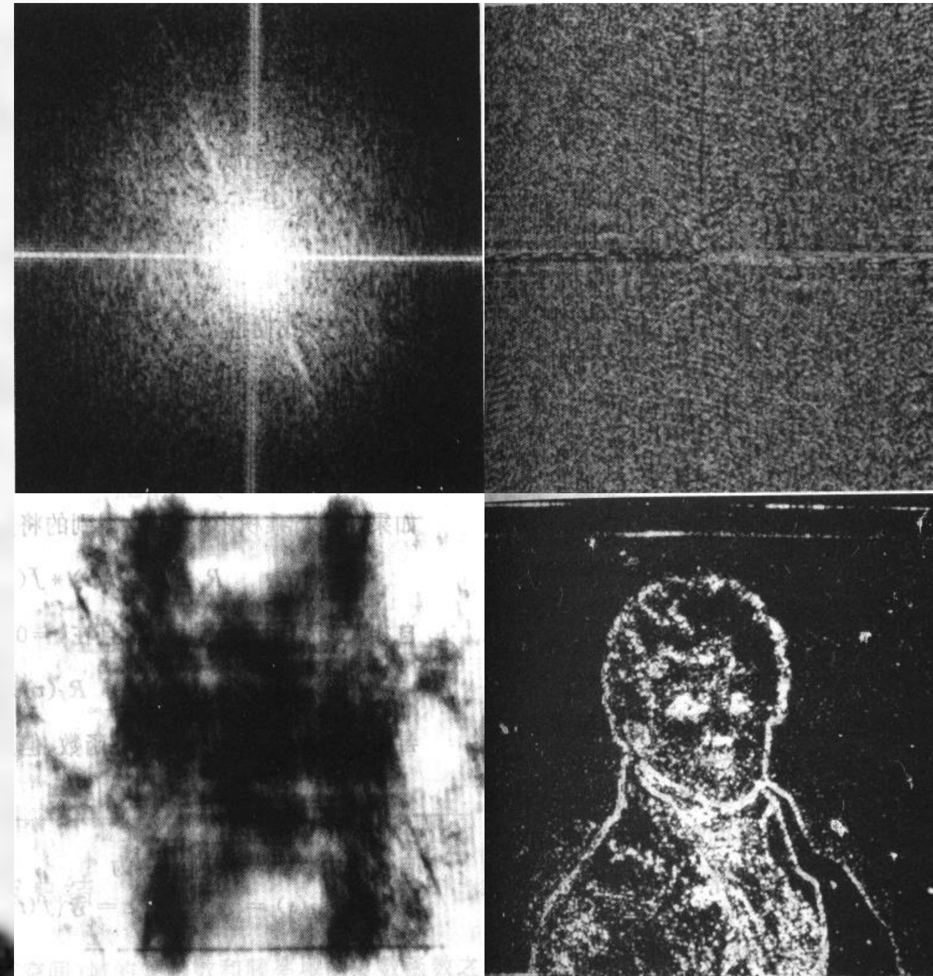
$$0.5\times\log_{10}(1+|F(u,v)|)$$



V

u

u方向谱的零点间隔恰好
是v方向零点间隔的两倍



- 幅值重构图像
- 相位重构图像

- 幅值谱
- 相位谱

傅里叶变换性质

1. 平移性质
2. 分配律
3. 尺度变换（缩放）
4. 旋转性
5. 周期性和共轭对称性
6. 平均值
7. 可分性
8. 卷积
9. 相关性

二维傅里叶变换的性质 1. 平移性

空间域平移(x_0, y_0):

$$f(x-x_0, y-y_0) \Leftrightarrow F(u, v)\, e^{-j2\pi\left(ux_0/M+vy_0/N\right)}$$

频域中平移 (u_0, v_0):

$$f(x,y)e^{j2\pi(u_0x/M+v_0y/N)} \Leftrightarrow F(u-u_0, v-v_0)$$

当$u_0 = M/2$
$v_0 = N/2$

$$e^{j2\pi(u_0x/M+v_0y/N)} = e^{j\pi(x+y)} = \left(-1\right)^{x+y}$$

移中性：

$$f(x,y)(-1)^{(x+y)} \Leftrightarrow F(u-\frac{M}{2}, v-\frac{N}{2})$$

$$f(x-\frac{M}{2}, y-\frac{N}{2}) \Leftrightarrow F(u,v)(-1)^{(u+v)}$$

二维傅里叶变换的性质　　2. 分配性

加法分配性：

$$\Im\left[f_1(x,y)+f_2(x,y)\right]=\Im\left[f_1(x,y)\right]+\Im\left[f_2(x,y)\right]$$

不具有乘法分配性：

$$\Im\left[f_1(x,y)\cdot f_2(x,y)\right]\neq\Im\left[f_1(x,y)\right]\cdot\Im\left[f_2(x,y)\right]$$

二维傅里叶变换的性质　　３．比例变换性

$$af(x,y) \Leftrightarrow aF(u,v)$$

$$f(ax,by) \Leftrightarrow \frac{1}{ab} F(u/a, v/b)$$

二维傅里叶变换的性质 4．旋转性

当变量x，y，u，v都用极坐标表示时，即：

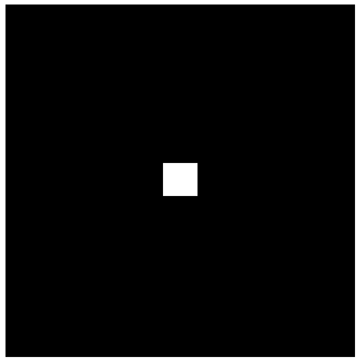
$$\begin{cases} x = \gamma\cos\theta \\ y = \gamma\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} u = \omega\cos\phi \\ v = \omega\sin\phi \end{cases}$$

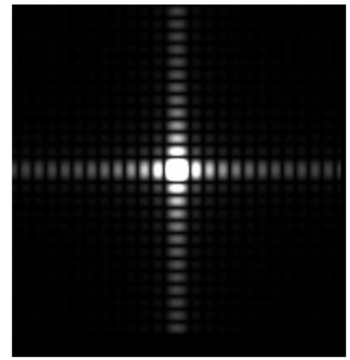
$$f(x,y) \rightarrow f(\gamma,\theta)$$
$$F(u,v) \rightarrow F(\omega,\phi)$$

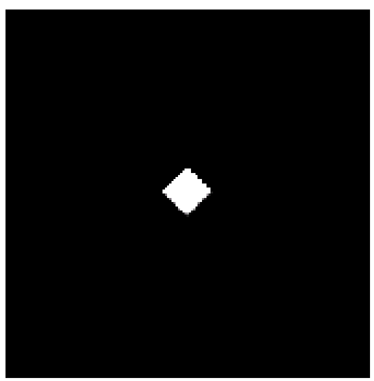
若：$f(\gamma,\theta) \Leftrightarrow F(\omega,\phi)$

则：$f(\gamma,\theta+\theta_0) \Leftrightarrow F(\omega,\phi+\theta_0)$

旋转性







原图像旋转45°　　幅度谱图像也旋转45 °

二维傅里叶变换的性质5．周期性和对称性

傅里叶变换的周期性：

$$F(u,v)=F(u+M,v)=F(u,v+N)=F(u+M,v+N)$$

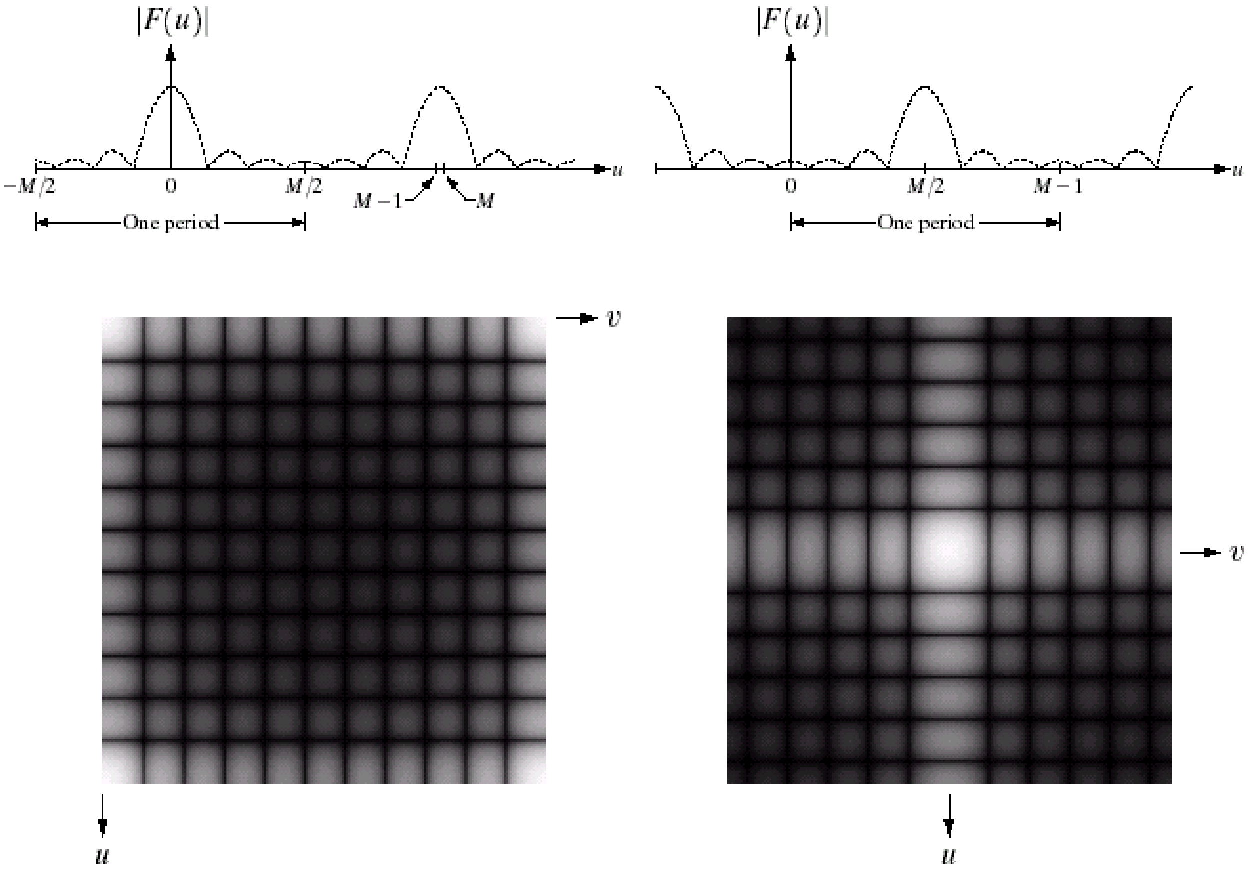
反变换也是周期的：

$$f(x,y)=f(x+M,y)=f(x,y+N)=f(x+M,y+N)$$

傅里叶变换的共轭对称： $F(u,v)=F^*(-u,-v)$

频谱的对称性： $|F(u,v)|=|F(-u,-v)|$

5．周期性和对称性



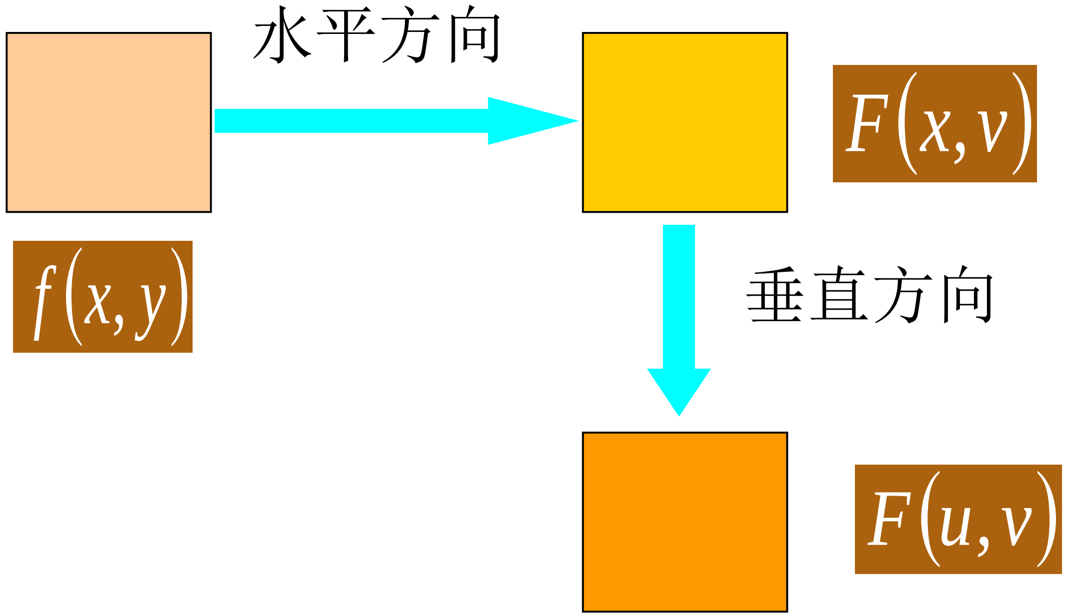
二维傅里叶变换的性质 6. 可分性

$$F(u,v)=\frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1}e^{-j2\pi ux/M}\ \frac{1}{N}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi vy/N}$$

$$=\frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1}F(x,v)e^{-j2\pi ux/M}$$

$$F(x,v)=\frac{1}{N}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi vy/N}$$

二维离散傅里叶变换过程图示



用前向变换算法计算傅里叶反变换

$$\mathrm{F}(u)=\tfrac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1}f(x)e^{-j2\pi ux/M}$$

$$u=0,1,2,\cdots,M-1$$

$$f(x)=\sum_{u=0}^{M-1}F(u)e^{j2\pi ux/M}$$

$$x=0,1,2,\cdots,M-1$$

上式取复共轭，并用M同时除以两边

$$\frac{1}{M}f^{*}(x)=\frac{1}{M}\sum_{u=0}^{M-1}F^{*}(u)e^{-j2\pi ux/M}$$

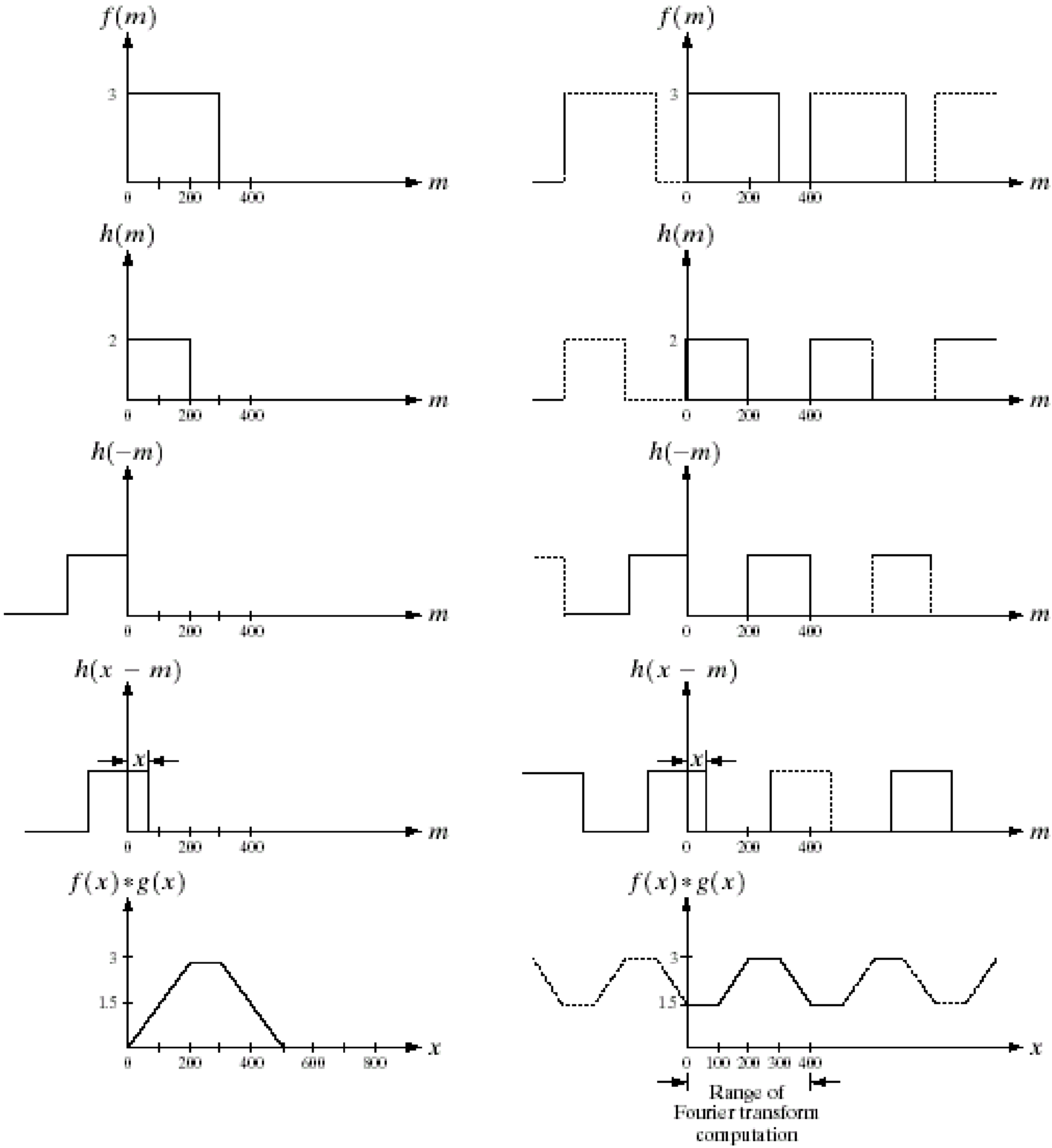
用前向变换算法计算傅里叶反变换

二维情况下：

$$\frac{1}{MN}f^*(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F^*(u,v)e^{-j2(\pi ux/M+vy/N)}$$

关于周期性的讨论

两个离散函数的卷积



考虑周期性

关于周期性的讨论

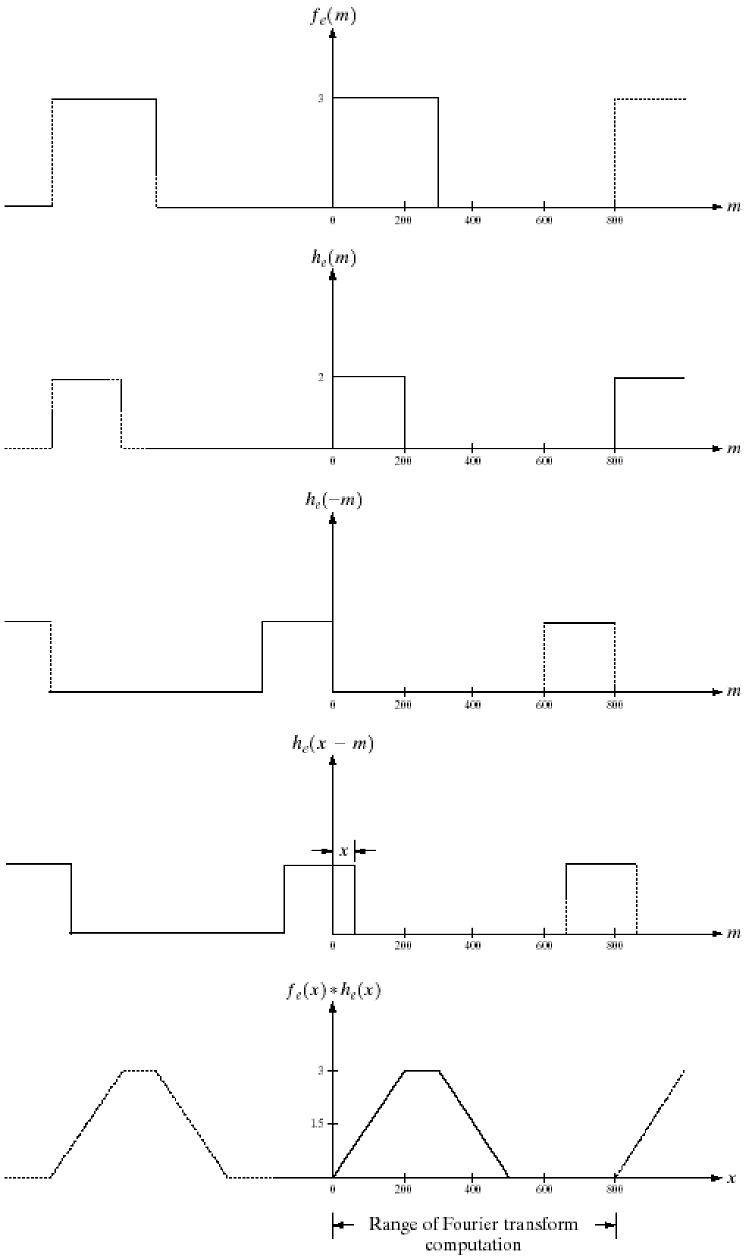
周期延拓：

$$f_e(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \le x \le A-1 \\ 0 & A \le x \le P \end{cases}$$

$$g_e(x) = \begin{cases} g(x) & 0 \le x \le B-1 \\ 0 & B \le x \le P \end{cases}$$

$$P \ge A+B-1$$

用扩展函数执行卷积的结果



a
b
c
d
e

FIGURE 4.37 Result of performing convolution with extended functions. Compare Figs. 4.37(e) and 4.36(e).

二维函数的周期延拓

假设有$f(x,y)$和$h(x,y)$两幅图像，大小分别为$A\times B$和$C\times D$

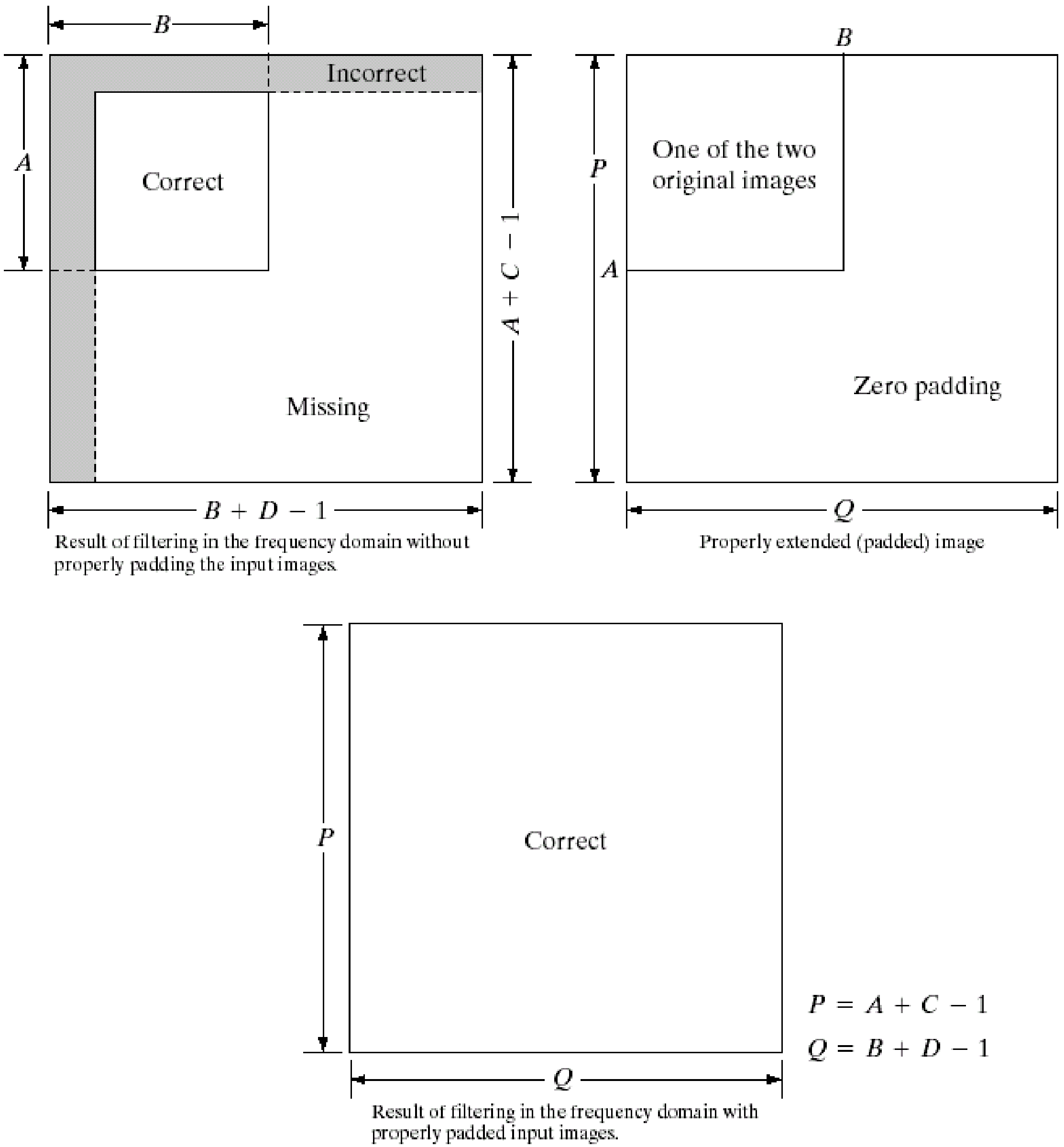
$P\geq A+C-1$

$Q\geq B+D-1$

$$f_e(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & 0\leq x\leq A-1 \text{且} 0\leq y\leq B-1 \\ 0 & A\leq x\leq P \text{或} B\leq y\leq Q \end{cases}$$

$$h_e(x,y)=\begin{cases} h(x,y) & 0\leq x\leq C-1 \text{且} 0\leq y\leq D-1 \\ 0 & C\leq x\leq P \text{或} D\leq y\leq Q \end{cases}$$

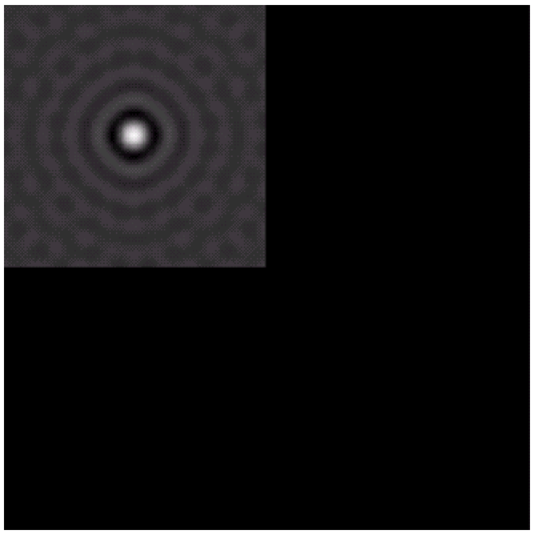
二维函数的周期延拓



a b
c

FIGURE 4.38 Illustration of the need for function padding. (a) Result of performing 2-D convolution without padding. (b) Proper function padding. (c) Correct convolution result.

二维函数的周期延拓



在空间域延拓的
低通滤波器

卷积和相关性理论

卷积定义：

$$f(x,y)*h(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}f(m,n)h(x-m,y-n)$$

卷积理论：

$$f(x,y)*g(x,y)\Leftrightarrow F(u,v)\cdot G(u,v)$$

$$f(x,y)\cdot g(x,y)\Leftrightarrow F(u,v)*G(u,v)$$

卷积和相关性理论

相关定义：

$$f(x,y)\circ h(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}f^*(m,n)h(x+m,y+n)$$

相关定理：

$$f(x,y)\circ g(x,y)\Leftrightarrow F(u,v)\cdot G^*(u,v)$$

$$f(x,y)\cdot g^*(x,y)\Leftrightarrow F(u,v)\circ G(u,v)$$

卷积和相关性理论

卷积是空间域滤波和频率域滤波之间的纽带；相关的作用是匹配。

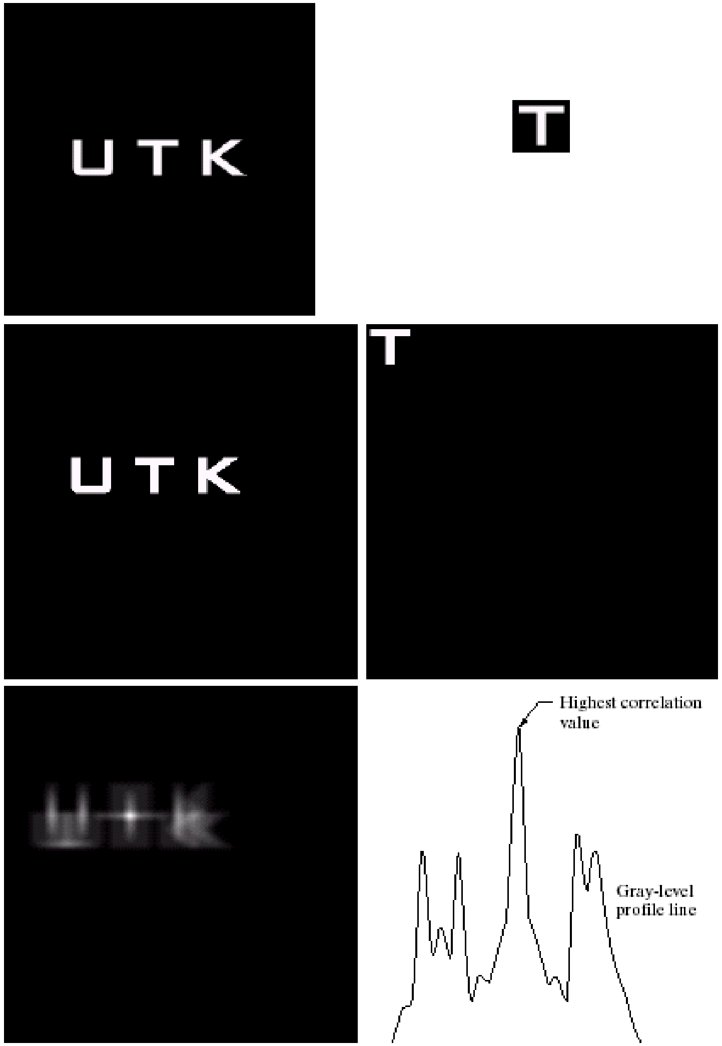
卷积和相关性理论

自相关：

$$f(x,y) \circ f(x,y) \Leftrightarrow \left|F(u,v)\right|^2$$

$$\left|f(x,y)\right|^2 \Leftrightarrow F(u,v) \circ F(u,v)$$

例：图像相关



a b
c d
e f

FIGURE 4.41
(a) Image.
(b) Template.
(c) and
(d) Padded images.
(e) Correlation function displayed as an image.
(f) Horizontal profile line through the highest value in (e), showing the point at which the best match took place.

二维傅里叶幅度谱的显示

步骤：1. 求移中的傅里叶变换：

$$F'(u,v)=\frac{1}{N\times N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}\left[f(x,y)(-1)^{(x+y)}\right]\exp\left[-j\frac{2\pi}{N}(ux+vy)\right]$$

2. 求幅度谱：

$$\left|F'(u,v)\right|=\sqrt{R^2(u,v)+I^2(u,v)}$$

3. 求幅度谱的对数函数：

$$D(u,v)=\log\left(1+\left|F'(u,v)\right|\right)$$

4. 显示D(u, v)

若D(u, v)很小或很大，则将其线性扩展或压缩到0-255

频域图像增强法

- 平滑的频率域滤波器
- 频率域锐化滤波器
- 同态滤波器

频率域滤波

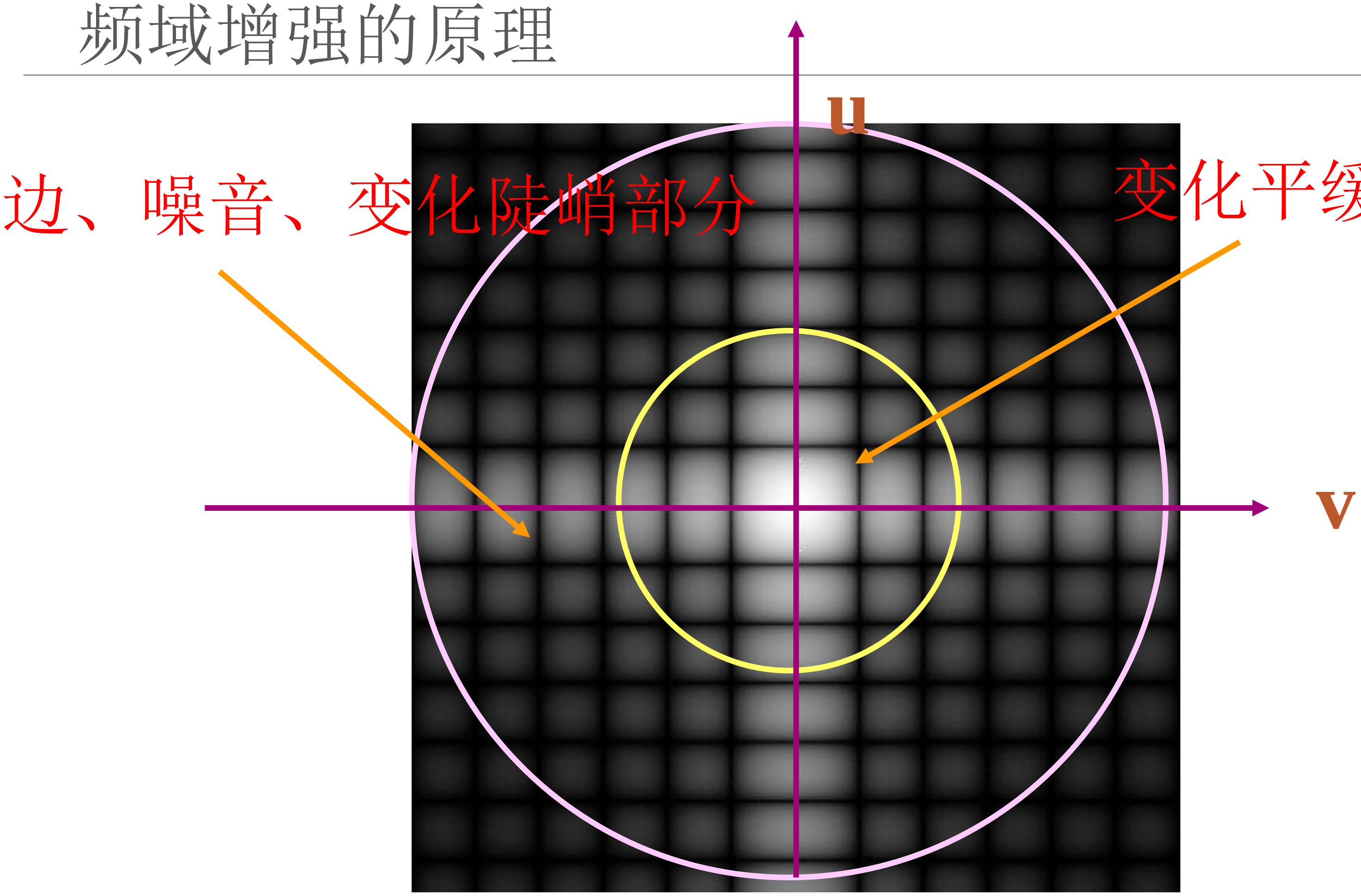
频率域是傅里叶变换和频率变量(u,v)定义的空间。

频率域的基本性质：

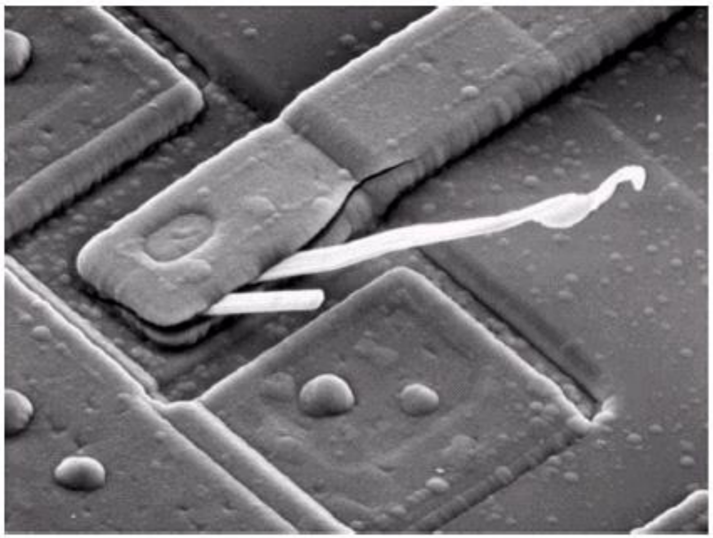
- 变化最慢的频率成分（原点）对应图像的平均灰度级。
- 低频对应着图像的慢变化分量。
- 较高的频率对应着图像中变化较快的灰度级。

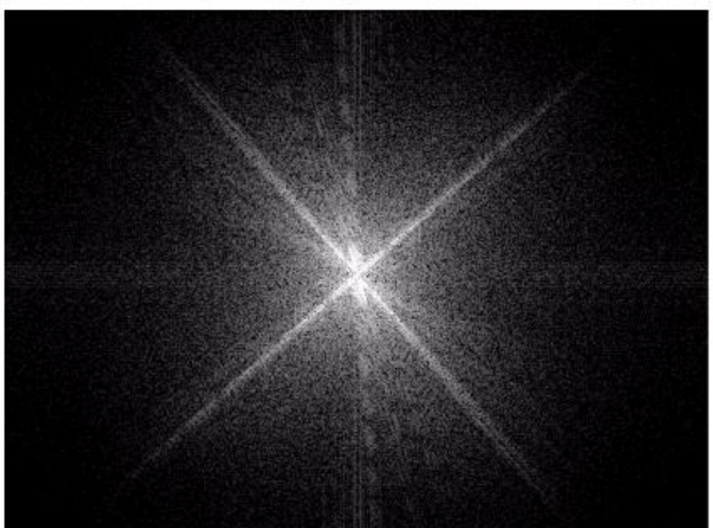
图像增强:频率域

频域增强的原理



例：一幅集成电路的扫描电子显微镜图像及其傅里叶谱





特征：

大约±45度的强边缘；
两个因热感应不足的白色氧化突起。

注：傅里叶频谱显示了±45^0的强边缘，在垂直轴偏左的部分有垂直成分（对应两个氧化物 突起）。

频率域滤波步骤：

1. 用$(-1)^{x+y}$乘以输入图像来进行中心变换；
2. 由(1)计算图像的DFT，即F(u, v)；
3. 用滤波器函数H(u, v)乘以F(u, v)；

$$G(u,v)=H(u,v)F(u,v)$$

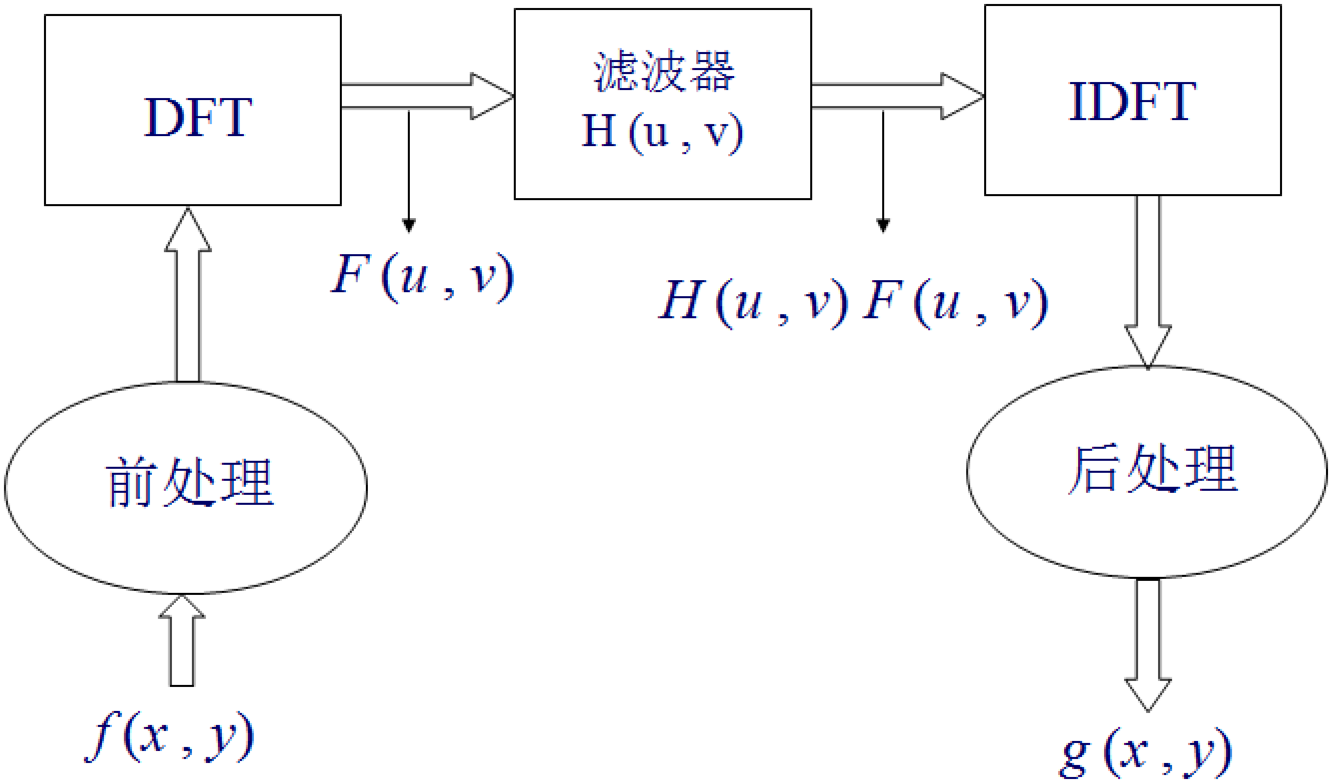
4. 计算(3)中结果的反DFT；

$$\text{滤波后的图像}=\mathfrak{I}^{-1}\left[G(u,v)\right]$$

5. 得到(4)中结果的实部；
6. 用$(-1)^{x+y}$乘以(5)中的结果。

频率域滤波

频域滤波的基本步骤



特殊的滤波器

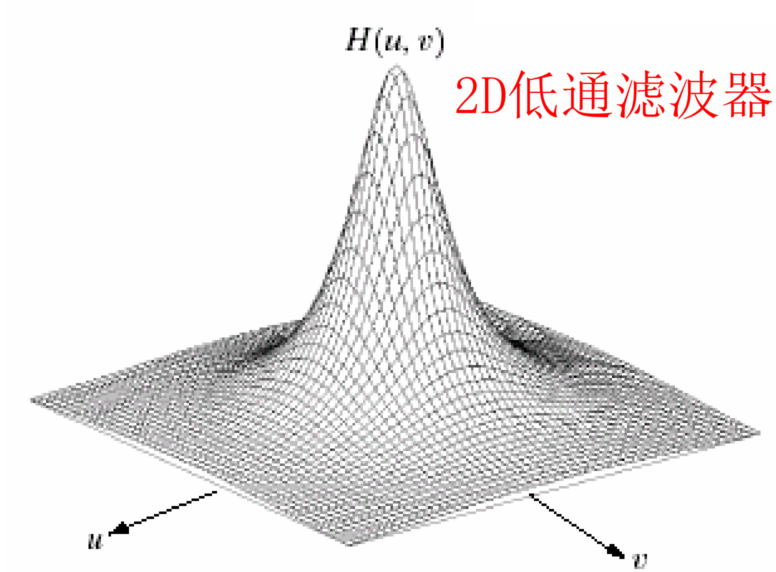
假定希望图像的平均值为零：

滤波器为：

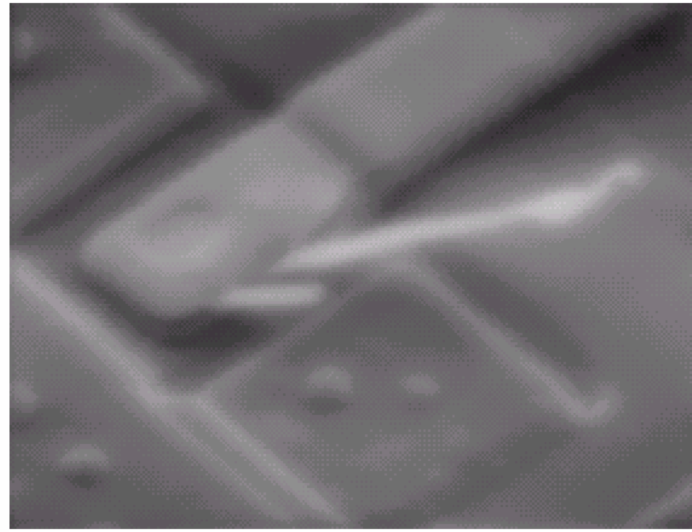
$$H(u,v)=\begin{cases}0 & (u,v)=(M/2,N/2)\\1 & \text{其它}\end{cases}$$

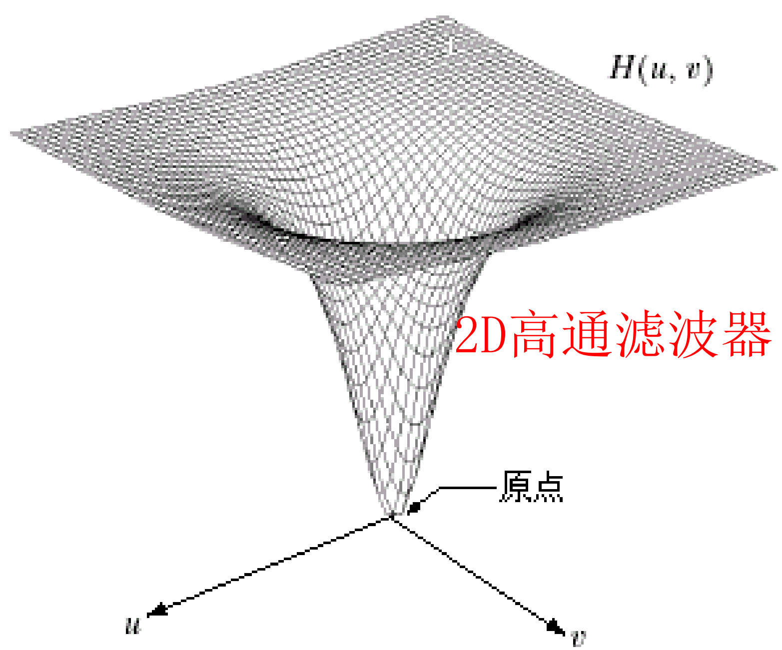
也称为“陷波滤波器”

例三、几种滤波器的形状及应用

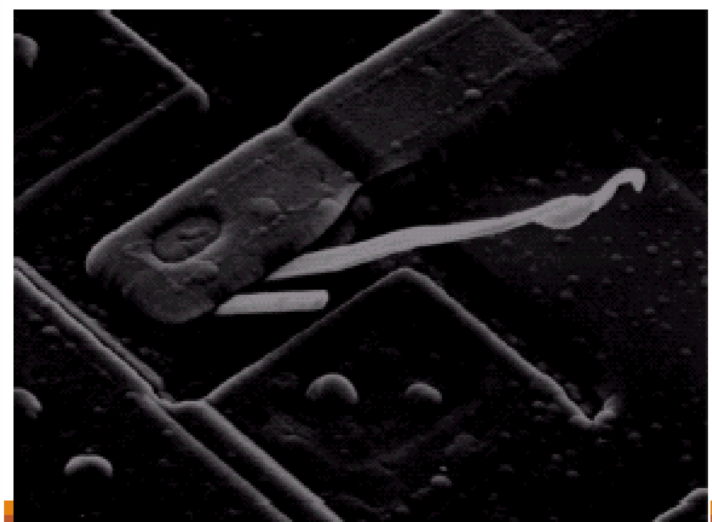


2D低通滤波器





2D高通滤波器



滤波器原点为0，因此几乎没有平滑的灰度级细节

空间域滤波和频率域滤波之间的对应关系

将图像的模板在图像中逐像素移动，并对每个像素进行指定数量计算的过程就是卷积过程。

$f(x,y)$和$h(x,y)$的离散卷积为：

$$f(x,y)*h(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}f(m,n)\,h(x-m,y-n)$$

卷积：1、翻转；2、移动；3、乘积； 4、求和

空间域滤波和频率域滤波之间的对应关系

卷积定理：

$$f(x,y)*h(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)H(u,v)$$

$$f(x,y)h(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)*H(u,v)$$

空间域滤波和频率域滤波之间的对应关系

频率域滤波器：$$H(u) = Ae^{-u^2/2\delta^2}$$

空间域滤波器：$$h(x) = \sqrt{2\pi}\,\delta A e^{-2\pi^2\delta^2 x^2}$$

频率域滤波器：$$H(u) = Ae^{-u^2/2\delta_1^2} - Be^{-u^2/2\delta_2^2}$$

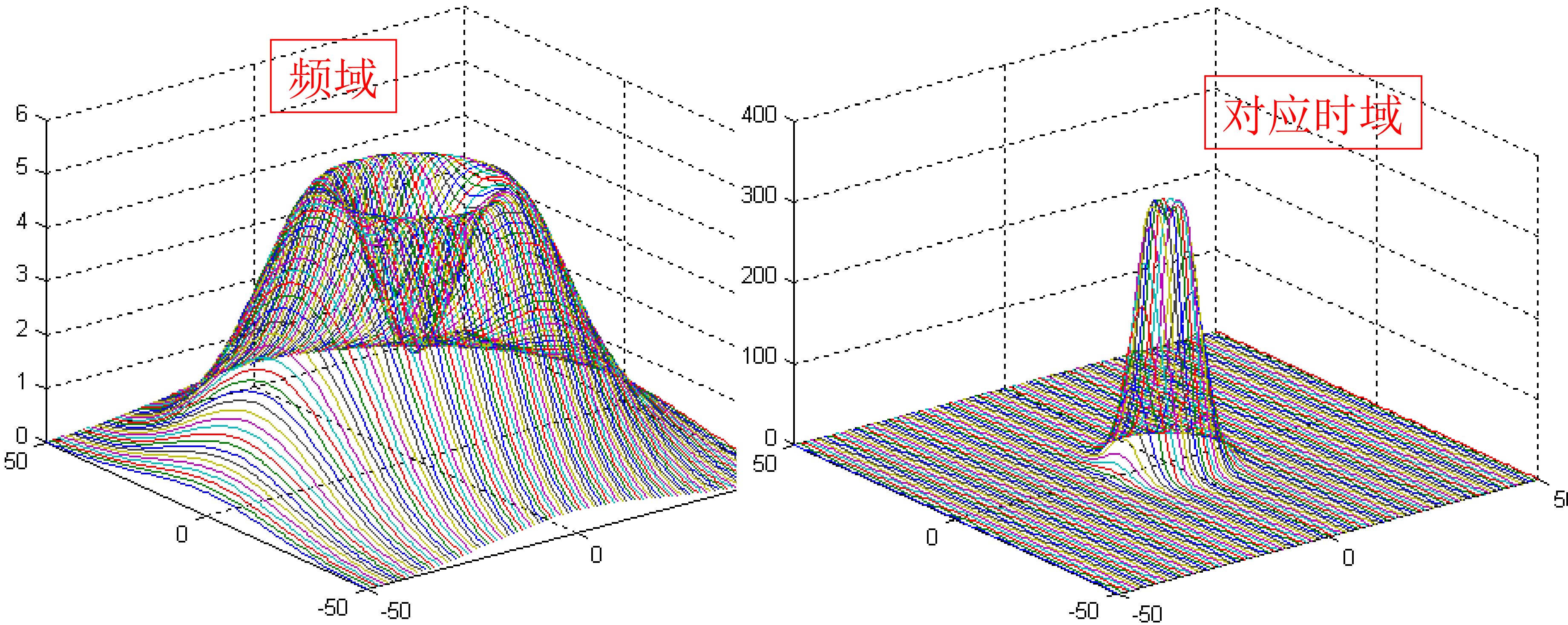
空间域滤波器：

$$h(x) = \sqrt{2\pi}\,\delta_1 A e^{-2\pi^2\delta_1^2 x^2} - \sqrt{2\pi}\,\delta_2 B e^{-2\pi^2\delta_2^2 x^2}$$

由简单高斯滤波器构成更复杂的滤波器：

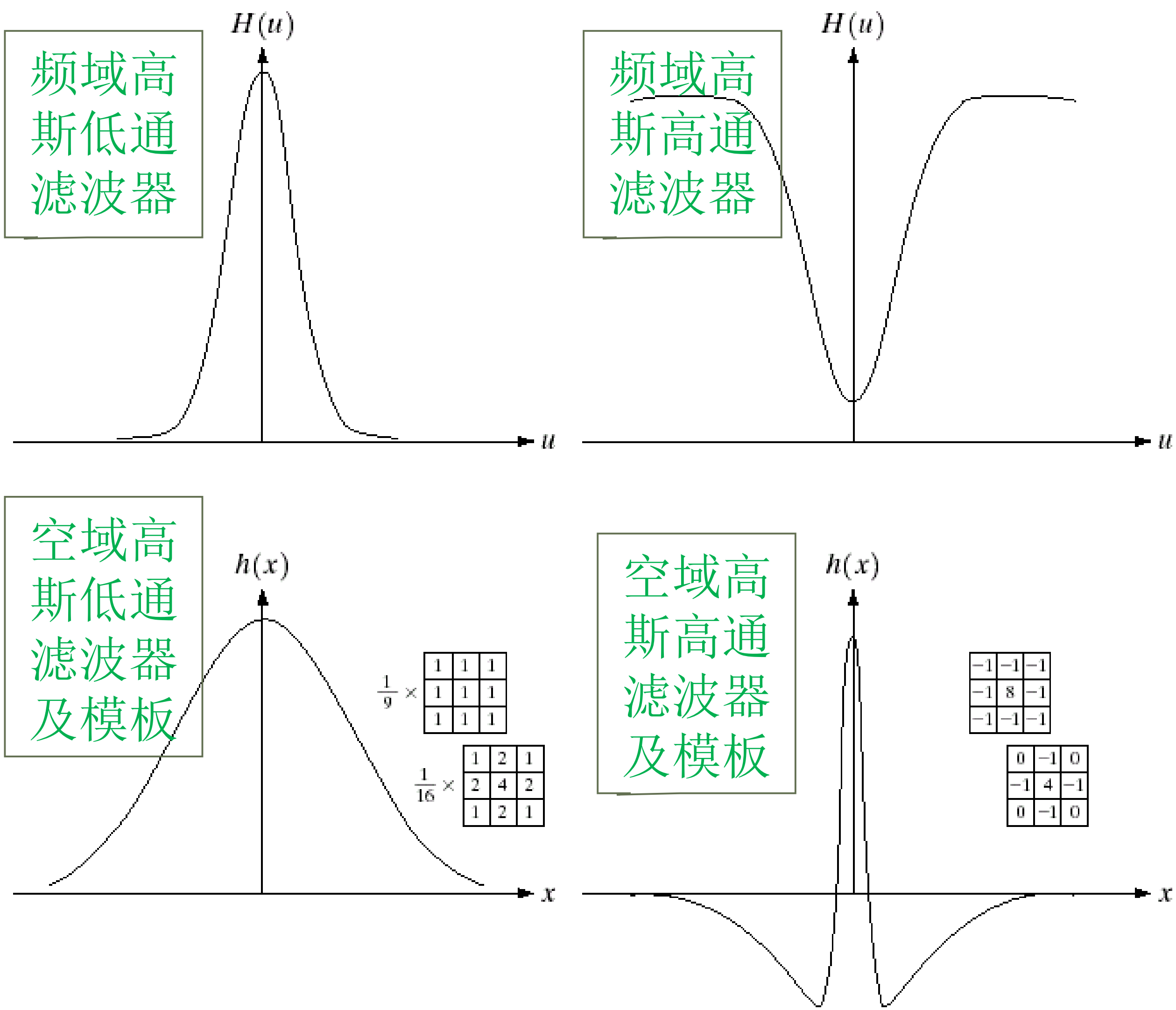
$$H(u,v) = Ae^{-(u^2+v^2)/2\sigma_1^2} - Be^{-(u^2+v^2)/2\sigma_2^2} \qquad A \geq B \quad \sigma_1 > \sigma_2$$

$$h(x,y) = \sqrt{2\pi}\sigma_1 \, Ae^{-2\pi^2\sigma_1^2(x^2+y^2)} - \sqrt{2\pi}\sigma_2 \, Be^{-2\pi^2\sigma_2^2(x^2+y^2)}$$



$$A=10, B=8, \sigma_1=20, \sigma_2=10$$

空间域滤波和频率域滤波之间的对应关系



a	b
c	d

FIGURE 4.9 (a) Gaussian frequency domain lowpass filter. (b) Gaussian frequency domain highpass filter. (c) Corresponding lowpass spatial filter. (d) Corresponding highpass spatial filter. The masks shown are used in Chapter 3 for lowpass and highpass filtering.

二、平滑的频率域滤波器

灰度图像中的边缘和尖锐变化主要处于傅里叶变换的高频部分。

平滑可以通过衰减指定图像傅里叶变换中高频成分的范围来实现。

频率域滤波模型：　$G(u,v) = H(u,v)F(u,v)$

$F(u, v)$ 为含有噪声原图像的傅里叶变换

$H(u, v)$ 为低通滤波器的传递函数

$G(u, v)$ 为经低通滤波后输出图像的傅里叶变换

二、平滑的频率域滤波器

1、理想低通滤波器

2、巴特沃思低通滤波器

3、高斯低通滤波器

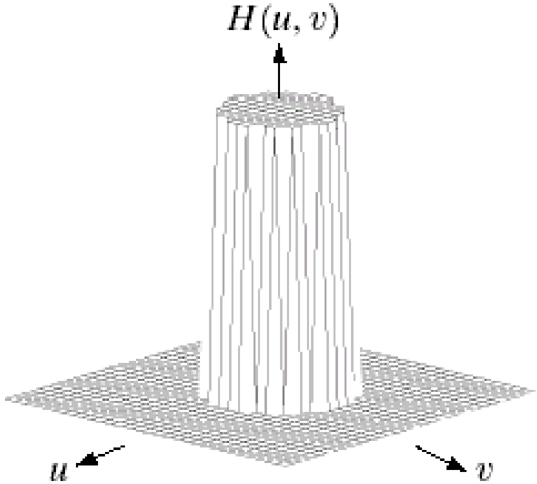
1、理想低通滤波器(ILPF)

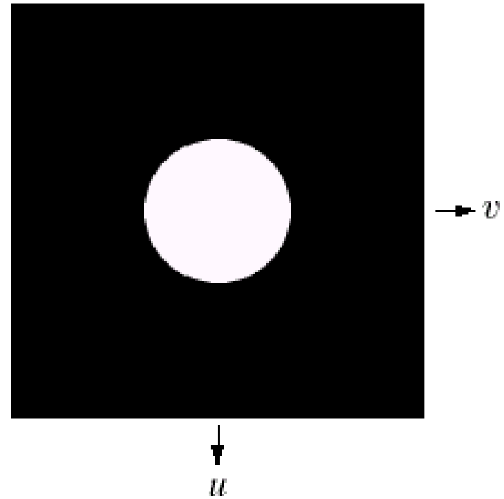
$$H(u,v)=\begin{cases}1; D(u,v)\le D_0\\0; D(u,v)>D_0\end{cases}$$

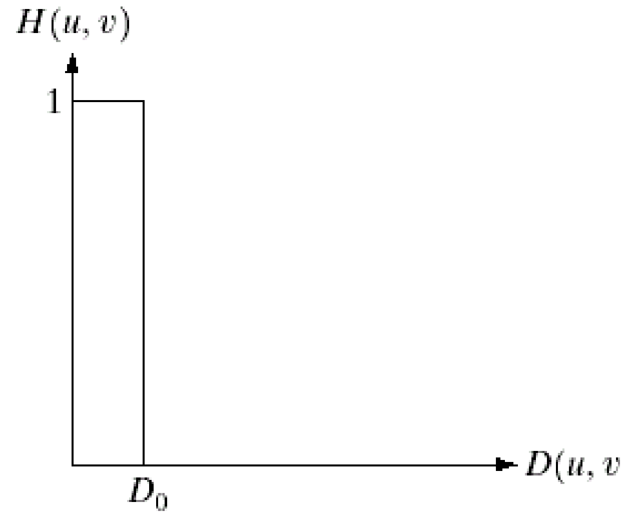
D_0——截止频率

$D(u,v)$——(u,v)到频率矩形原点的距离

$$D(u,v)=\left[(u-M/2)^2+(v-N/2)^2\right]^{1/2}$$







➢理想低通滤波器作用

D_0半径内的频率分量无损通过，圆外的频率分量会被滤除

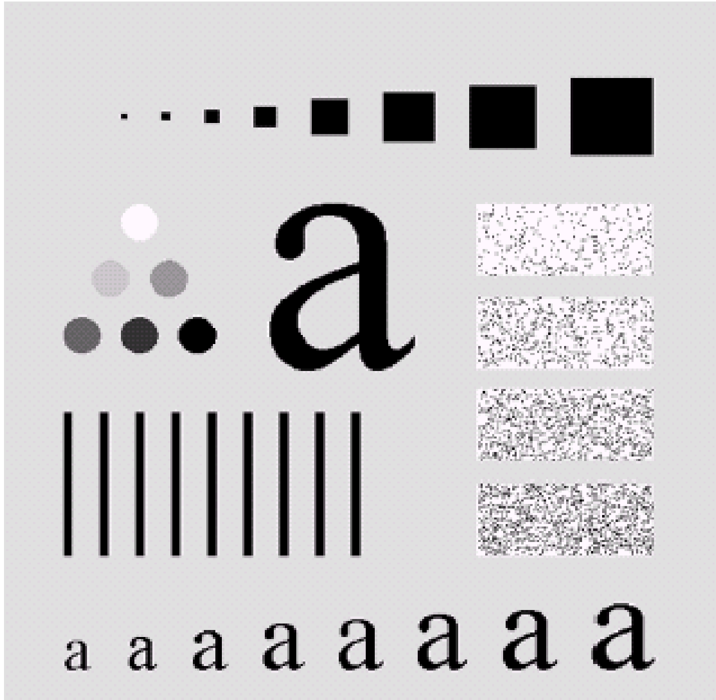
若滤除的高频分量中含有大量的边缘信息，会发生图像边缘模糊现象。

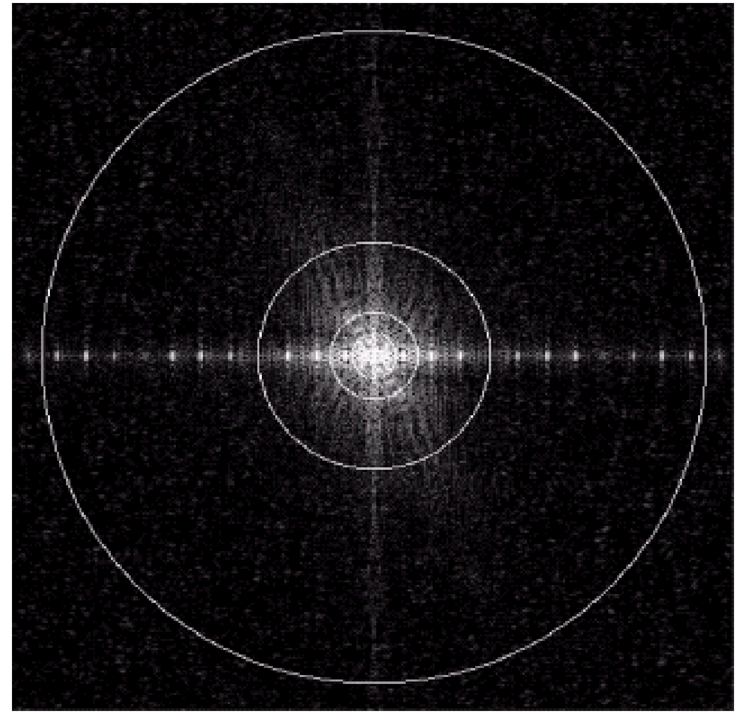
标准截止频率：是通过计算半径为r的圆包围的图像功率的百分比决定的。

$$P_T = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} P(u,v)$$

半径为r的圆包含a%的功率

$$a = 100\left[\sum_{u}\sum_{v} P(u,v) / P_T\right]$$

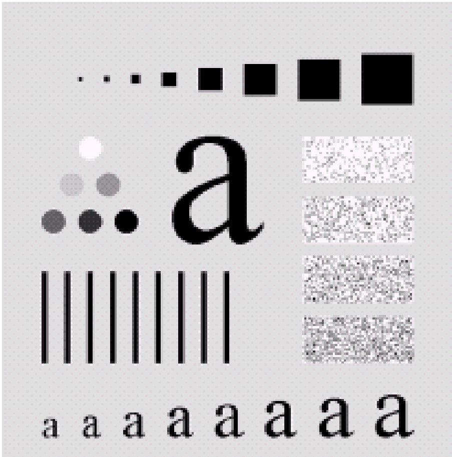




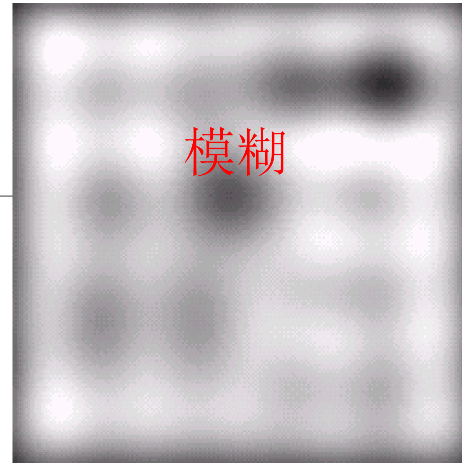
在谱中叠加的圆周分别有5，15，30，80，230像素的半径。

这些圆周包围的图像功率的百分比分别为92.0%，94.6%，96.4%，98%，99.5%。

例二、ILPF对图像进行滤波效果的比较

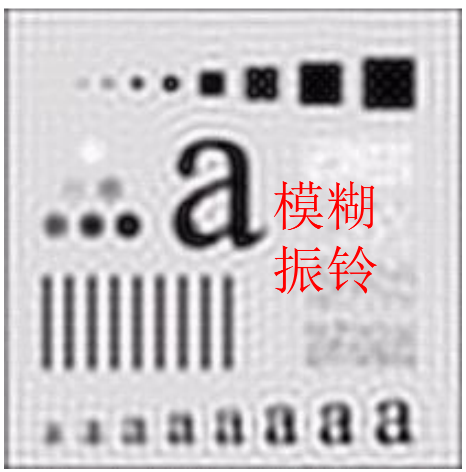


原始图

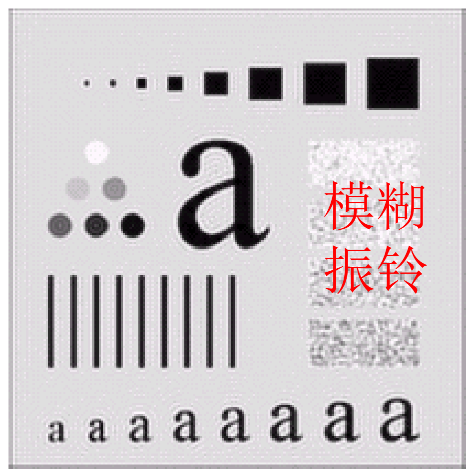


D_0=5的ILPF滤波
损失能量为8%

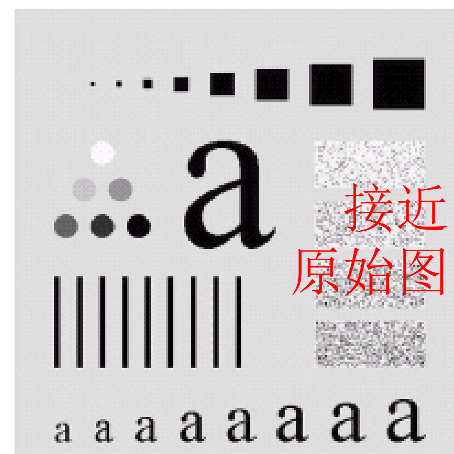
D_0=15的ILPF滤波
损失能量为5.4%



D_0=30的ILPF滤波
损失能量为3.6%

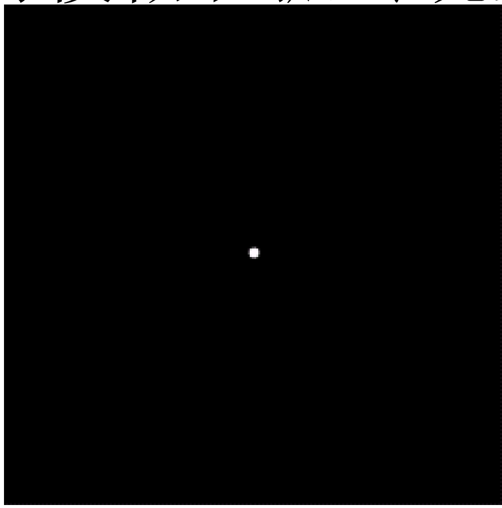


D_0=80的ILPF滤波
损失能量为2%

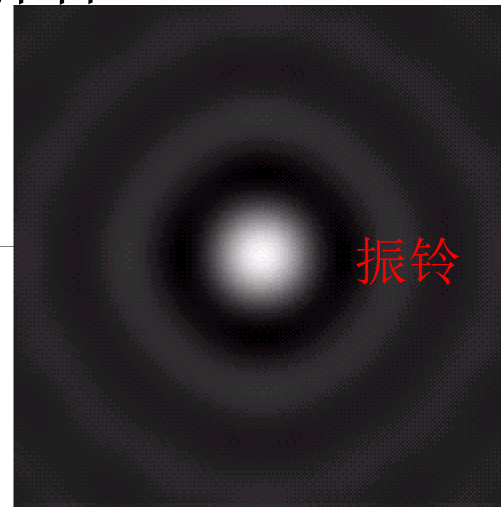


D_0=230的ILPF滤波
损失能量为0.5%

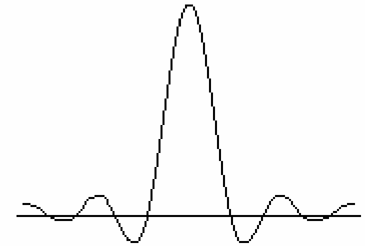
对模糊和振铃现象的解释



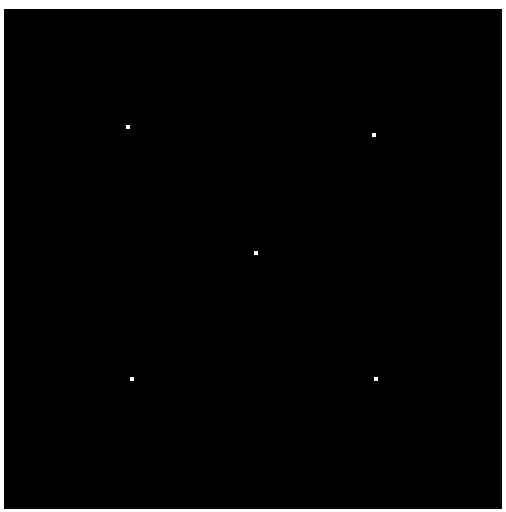
a ） 半径为5的频域ILPF



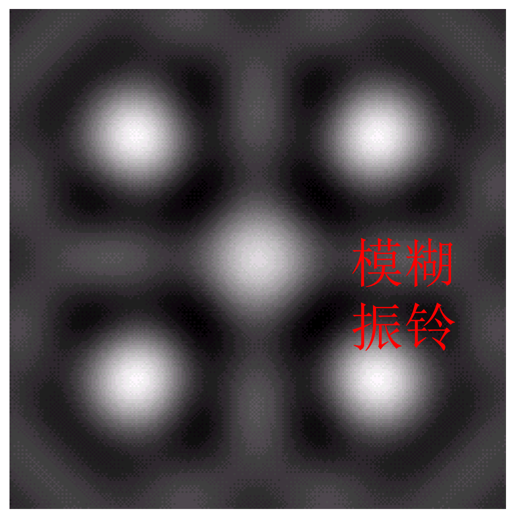
b ） 半径为5的空域ILPF



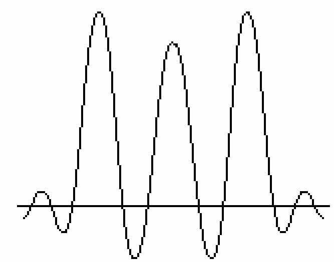
c ） 图像b）的水平扫描线灰度变化



d ） 空域图像中的5个脉冲



e ） （b）与（d）的卷积图像（空间域）



f ） 卷积图像d）的对角线灰度变化

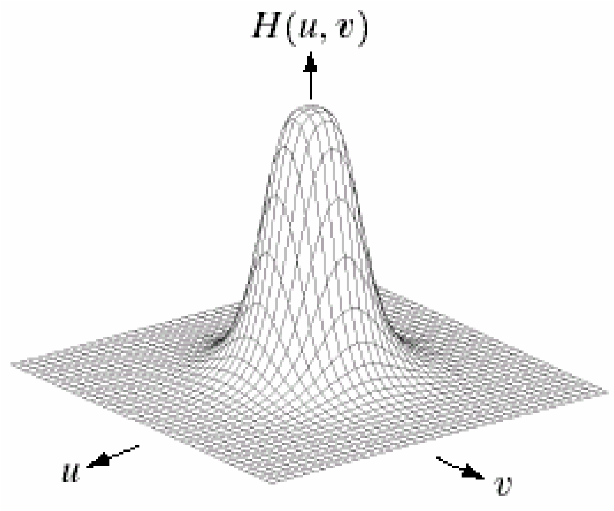
２、巴特沃思低通滤波器(BLPF)

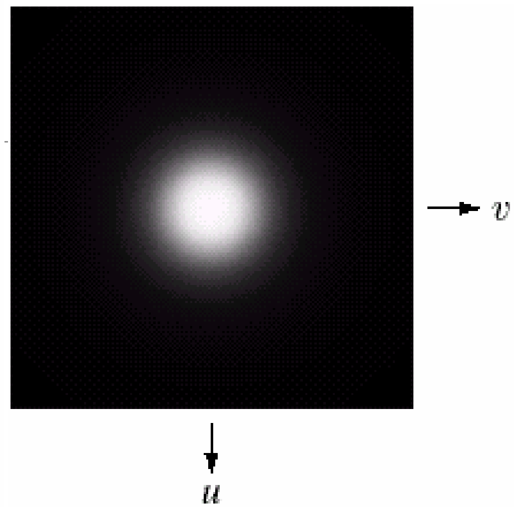
n阶巴特沃思低通滤波器的传递函数为:

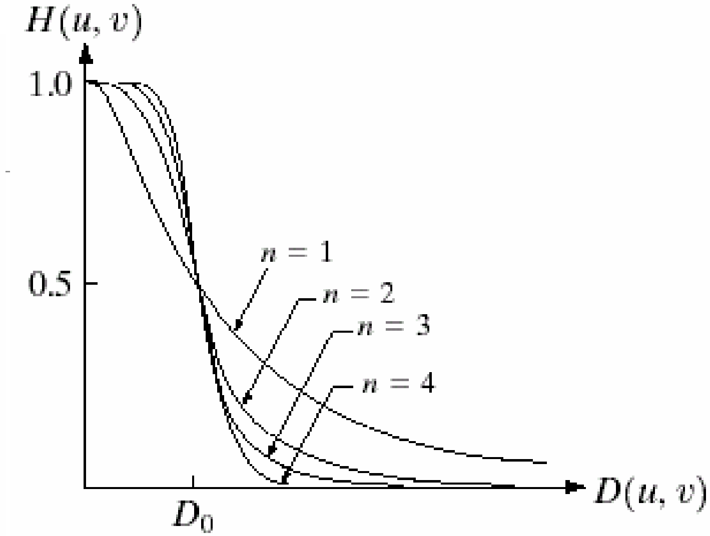
$$H(u,v)=\frac{1}{1+[D(u,v)/D_0]^{2n}}$$

$$D(u,v)=\left[(u-M/2)^2+(v-N/2)^2\right]^{1/2}$$

当$D(u,v)=D_0$ $H(u,v)=0.5$







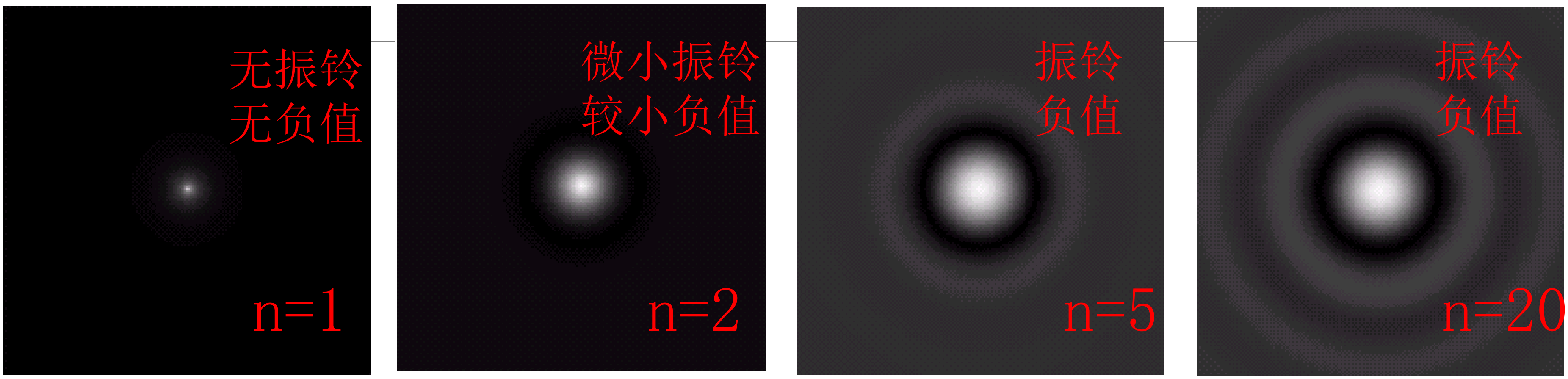
巴特沃思低通滤波器函数的透视图

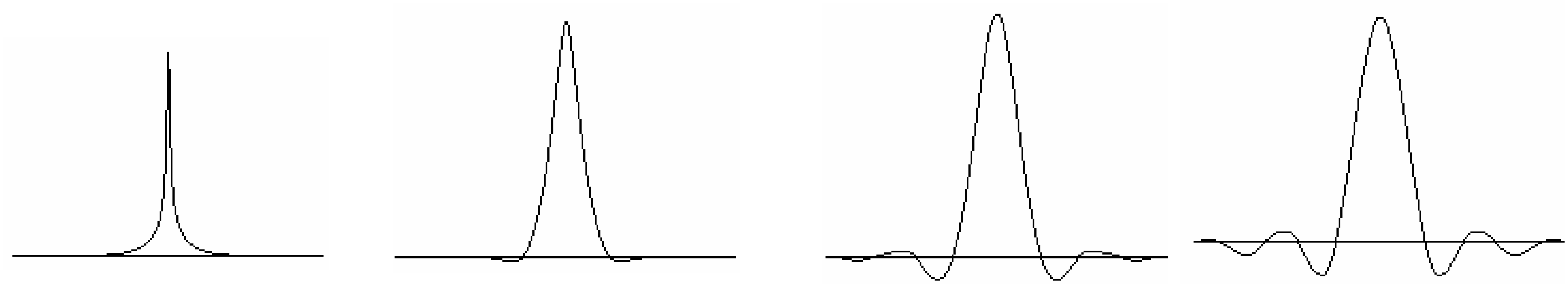
图像显示的巴特沃思低通滤波器

巴特沃思低通滤波器径向横断面

一阶巴特沃思滤波器没有振铃，二阶中振铃很微小，但阶数增高时振铃便成为一个重要的因素。

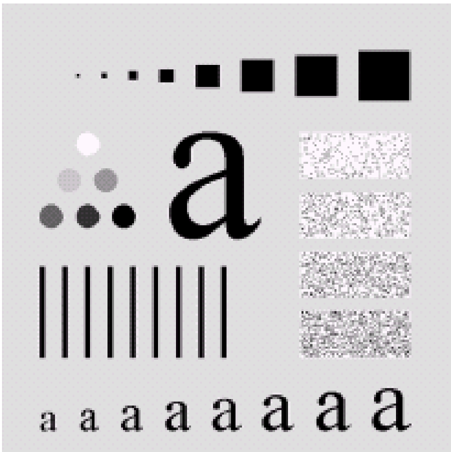
几种典型的低通巴特沃思滤波器



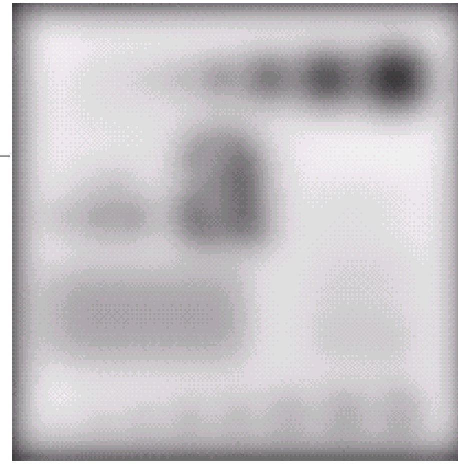


通过滤波器中心的灰度级剖面图

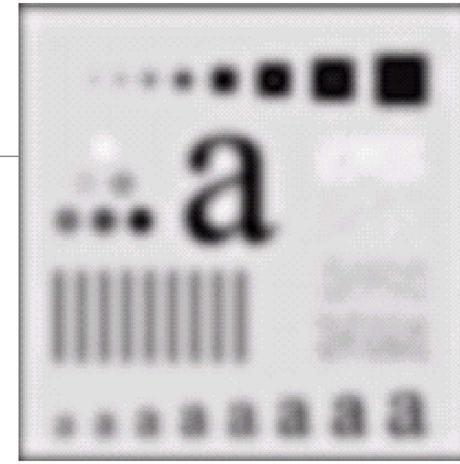
例、二阶巴特沃思低通滤波器的应用（n=2）。



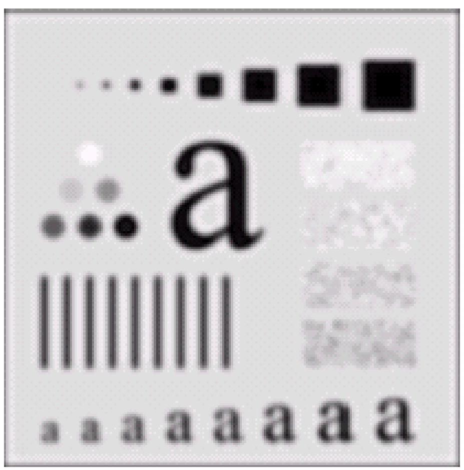
原始图



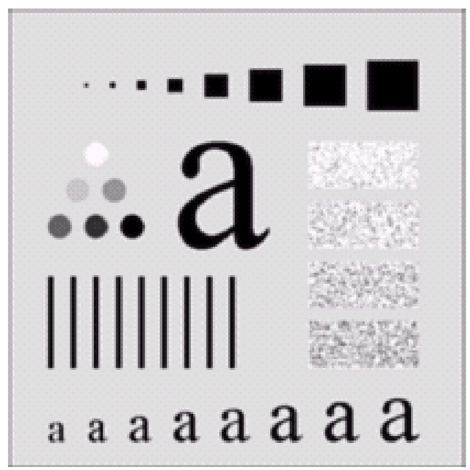
D_0=5的BLPF滤波



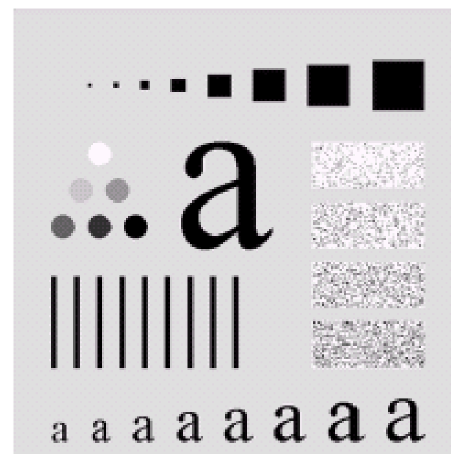
D_0=15的BLPF滤波



D_0=30的BLPF滤波



D_0=80的BLPF滤波



D_0=230的BLPF滤波

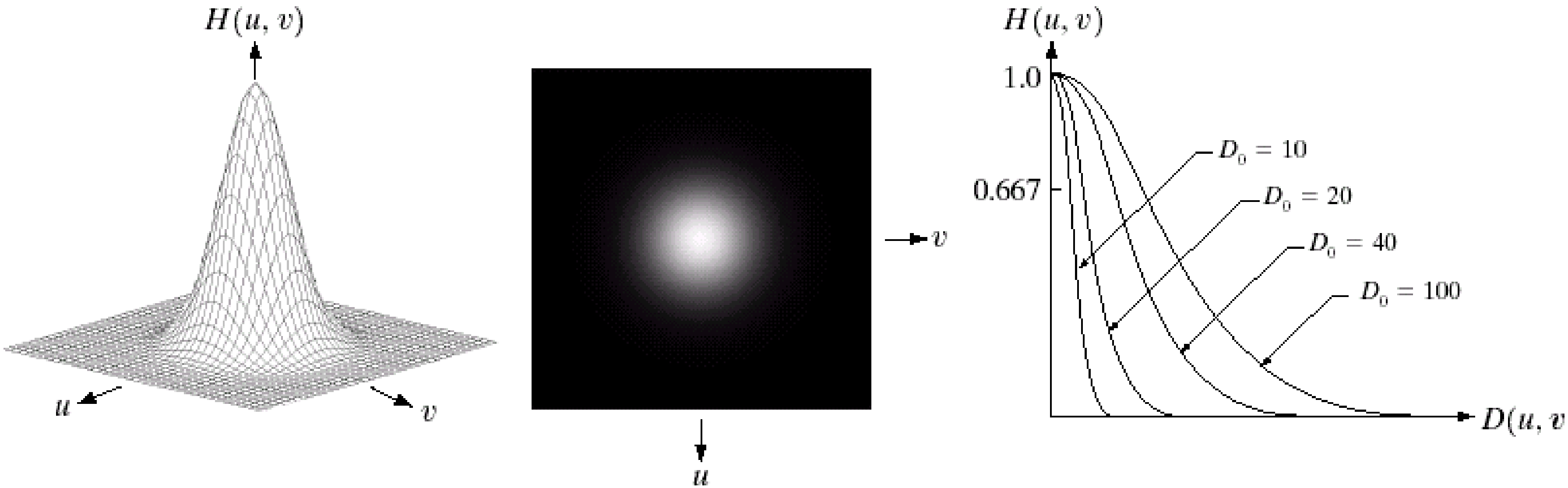
３、高斯低通滤波器（GLPF）

$$H(u,v) = e^{-D^2(u,v)/2\sigma^2}$$

令$\delta = D_0$

$$H(u,v) = e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$$

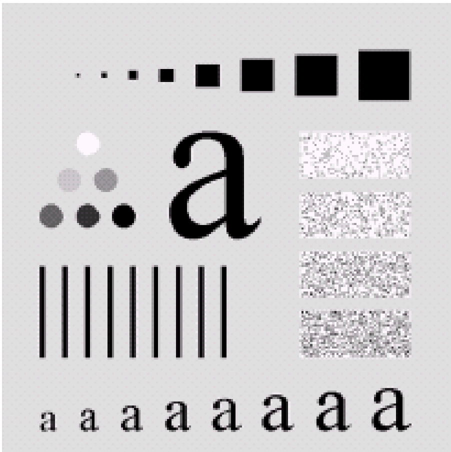
当$D(u,v) = D_0$　　$H(u,v) = 0.607$



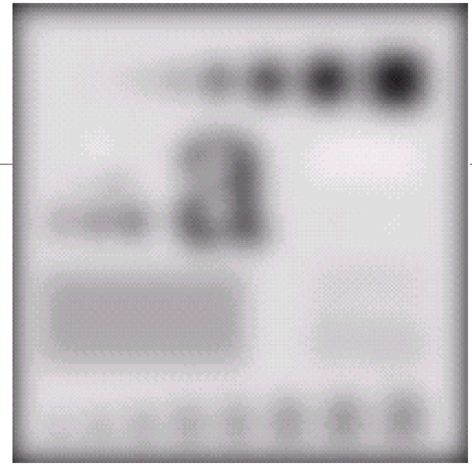
☑ 有更加平滑的过渡带，平滑后的图像没有振铃现象

☑ 与BLPF相比，衰减更快，经过GLPF滤波的图像比BLPF处理的图像更模糊一些

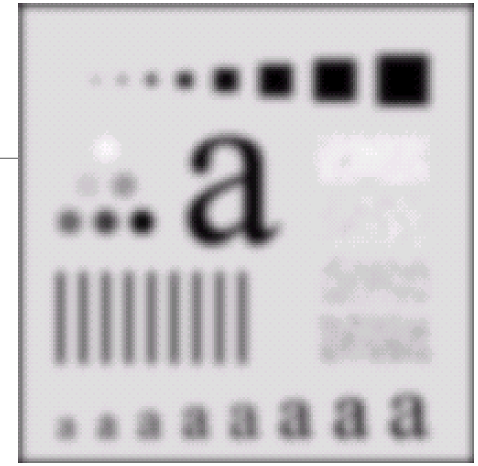
例、高斯低通滤波器的应用。



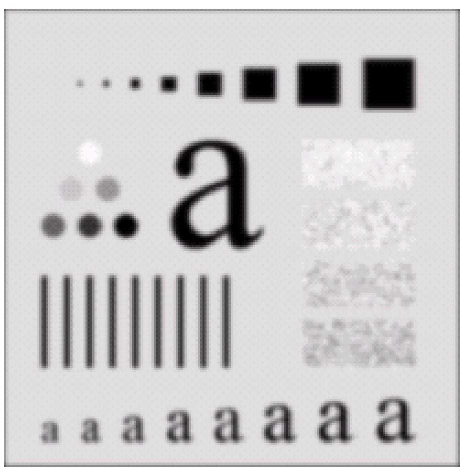
原始图



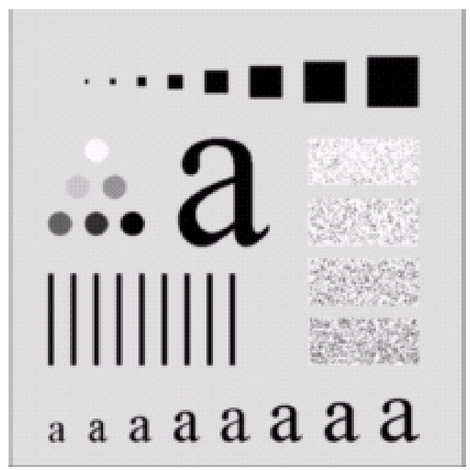
D_0=5的GLPF滤波



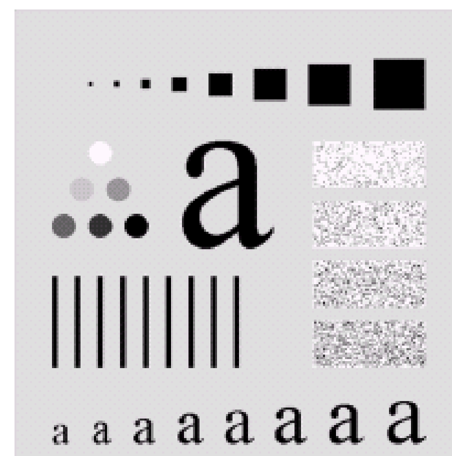
D_0=15的GLPF滤波



D_0=30的GLPF滤波



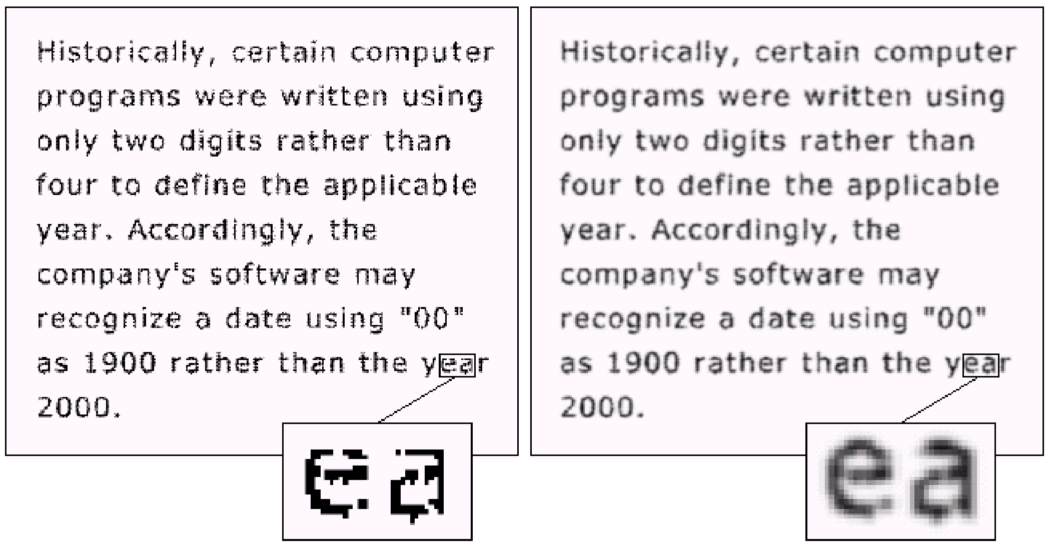
D_0=80的GLPF滤波



D_0=230的GLPF滤波

4、低通滤波的其它例子

a) 字符识别应用



a b

FIGURE 4.19 (a) Sample text of poor resolution (note broken characters in magnified view). (b) Result of filtering with a GLPF (broken character segments were joined).

低分辨率文本　　　用GLPF滤波的结果D_0=80

b）低通滤波器平滑图像（图像尺寸1028X732）

作用：减少皮肤细纹的锐化程度和小斑点

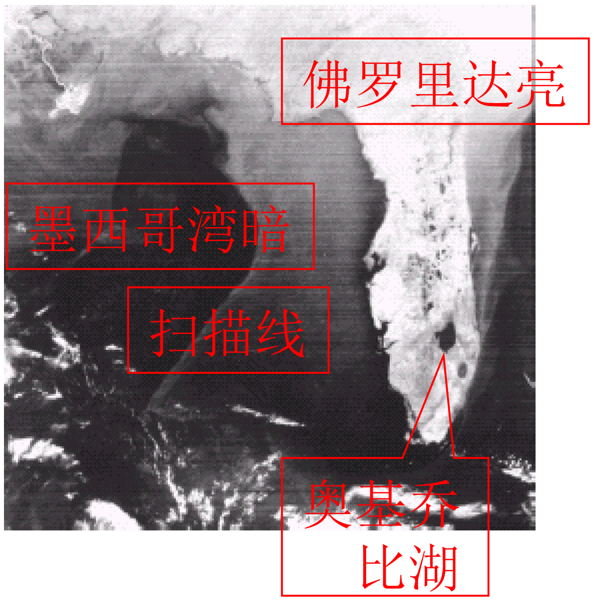
原始图

D_0=100的GLPF滤波图

D_0=80的GLPF滤波图

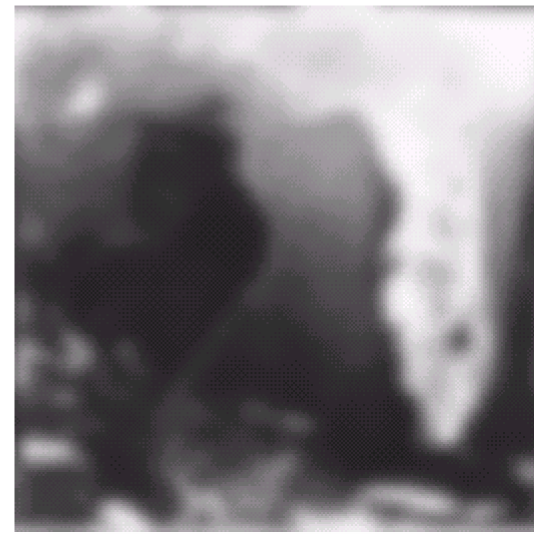
c）低通滤波器平滑图像（图像尺寸588X600，NASA提供）

作用：模糊更多的细节，保留大的可识别特征。



原始图
（高分辨率辐射计VHRR图像
尺寸588X600，NASA提供）

D_0=30的GLPF滤波图



D_0=10的GLPF滤波图

三、频率域锐化滤波器

高通滤波与低通滤波的作用相反，它使高频分量顺利通过，而使低频分量受到削弱。

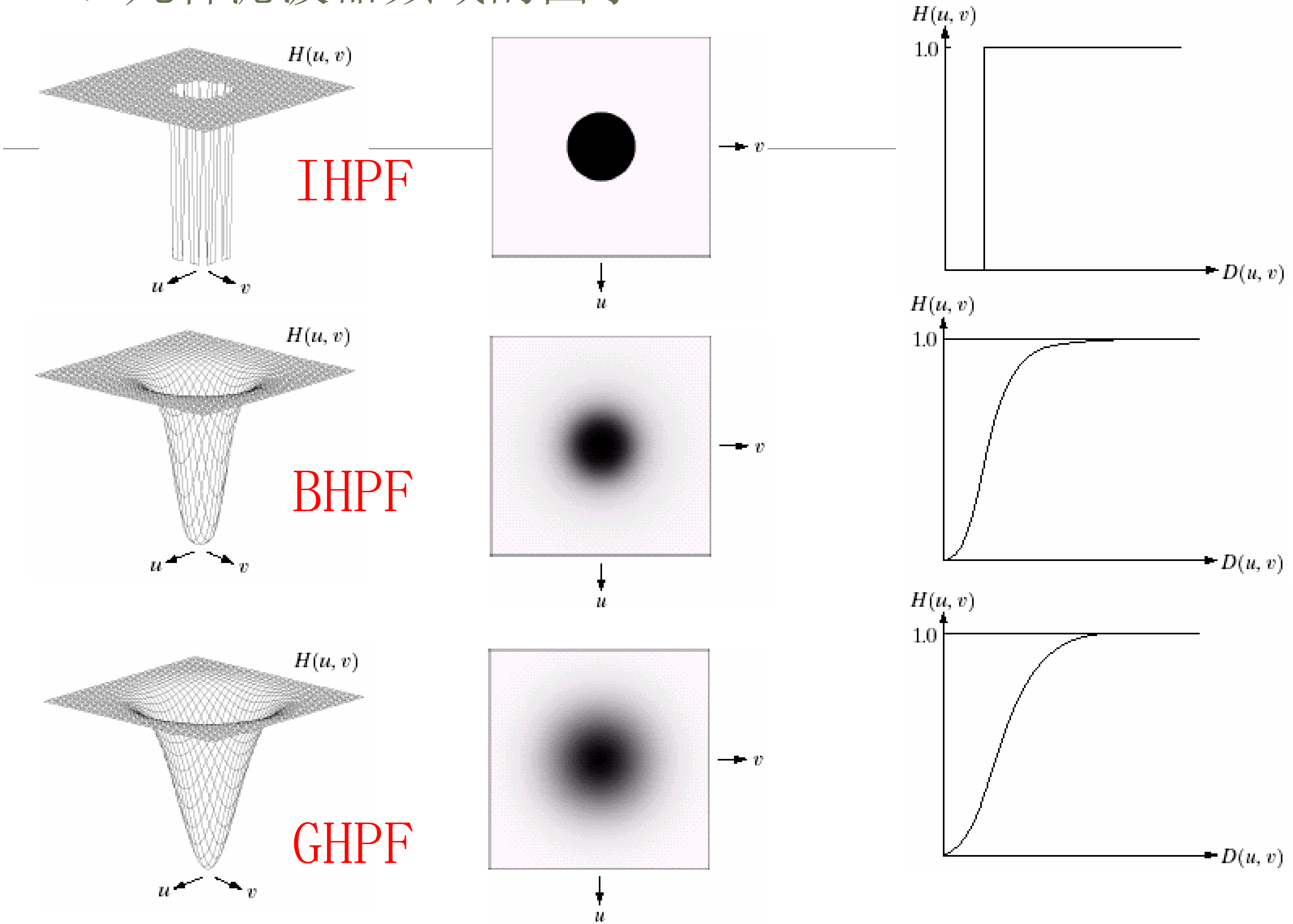
$$H_{hp}(u,v)=1-H_{lp}(u,v)$$

与低通滤波器相对应，频率域内常用的高通滤波器有 3 种：

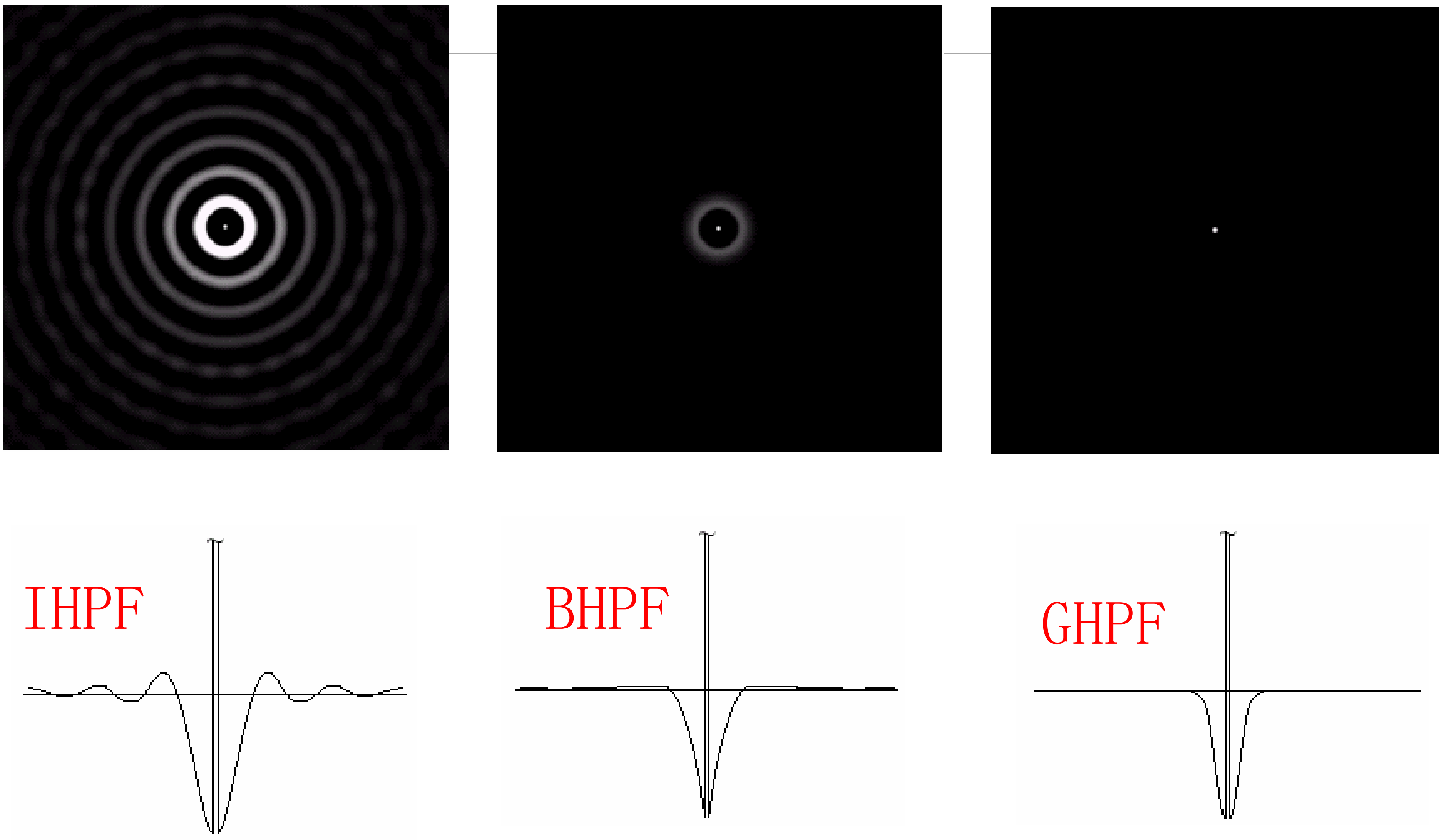
1. 理想高通滤波器
2. 巴特沃斯高通滤波器
3. 高斯高通滤波器

三、频率域锐化滤波器

1、几种滤波器频域的图示



2、几种高通滤波器空域的图示

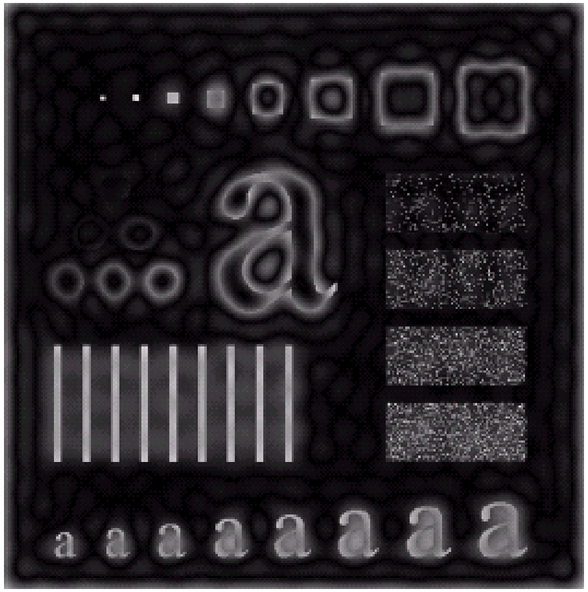


1、理想高通滤波器(IHPF)

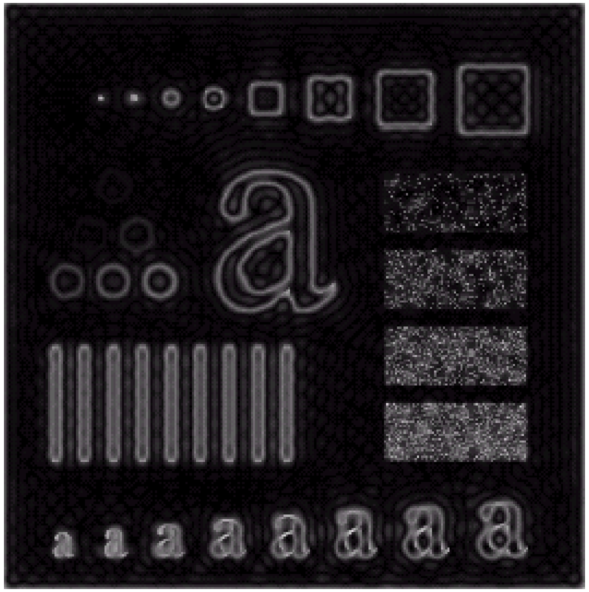
$$H(u,v)=\begin{cases}0; & D(u,v)\le D_0\\ 1; & D(u,v)>D_0\end{cases}$$

$$D(u,v)=\left[(u-M/2)^2+(v-N/2)^2\right]^{1/2}$$

1、理想高通滤波器



D_0=15



D_0=30

D_0=80

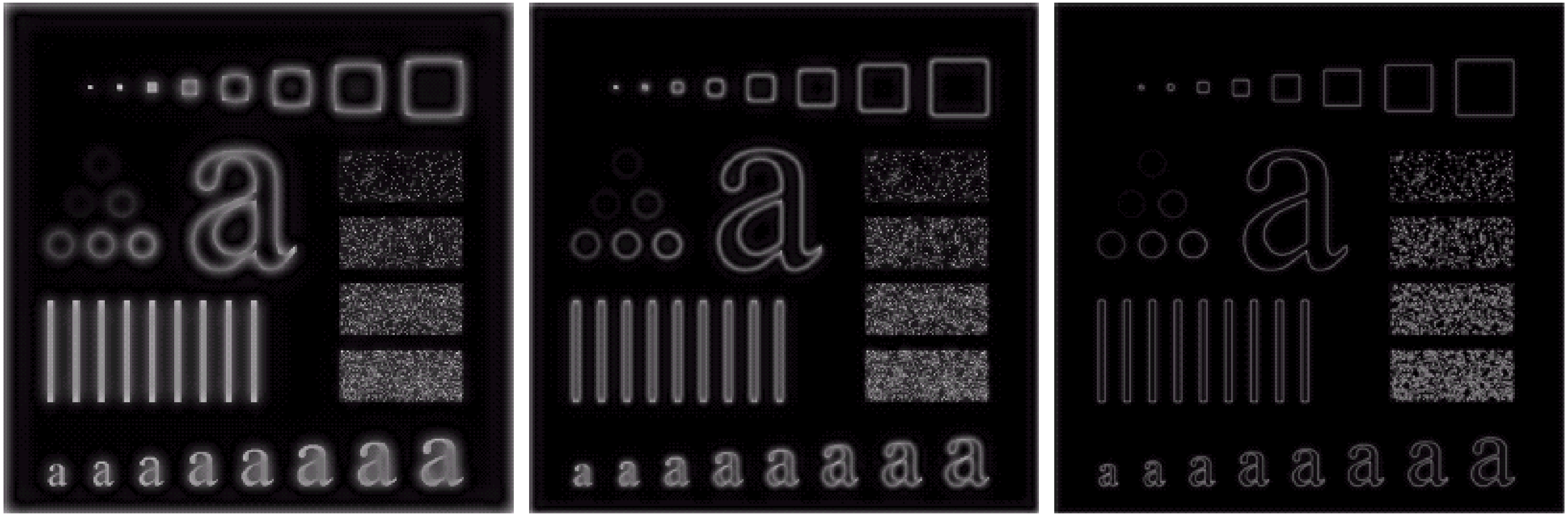
2、巴特沃思高通滤波器(BHPF)

n阶且截止频率距原点的距离为D_0的BHPF的传递函数：

$$H(u,v)=\frac{1}{1+[D_0/D(u,v)]^{2n}}$$

2、巴特沃思高通滤波器

2阶BHPF



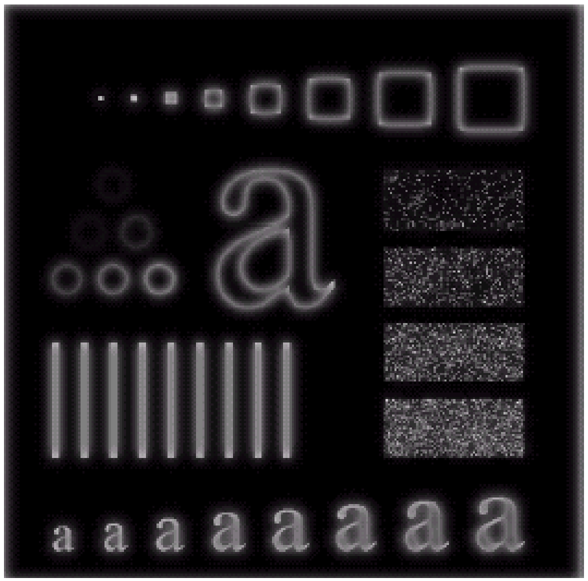
D_0=15　　D_0=30　　D_0=80

3、高斯高通滤波器

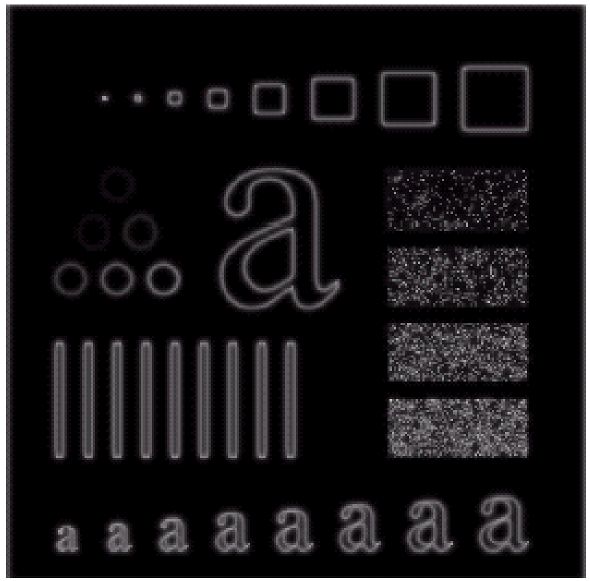
截止频率距原点的距离为D_0的GHPF的传递函数：

$$H(u,v)=1-e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$$

３、高斯高通滤波器



D_0=15



D_0=30

D_0=80

4、频率域的拉普拉斯算子

因为:

$$\Im\left[\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right]=(ju)^n F(u)$$

$$\Im\left[\frac{d^2 f(x,y)}{dx^2}+\frac{d^2 f(x,y)}{dy^2}\right]=(ju)^2 F(u,v)+(jv)^2 F(u,v)$$

$$=-\left(u^2+v^2\right)F(u,v)$$

$$\Im\left[\nabla^2 f(x,y)\right]=-\left(u^2+v^2\right)F(u,v)$$

频率域的拉普拉斯算子可以由如下滤波器实现:

$$H(u,v) = -\left(u^2 + v^2\right)$$

滤波器中心化:

$$H(u,v) = -\left[\left(u - M/2\right)^2 + \left(v - N/2\right)^2\right]$$

空间域拉普拉斯算子过滤后的图像可由下式计算:

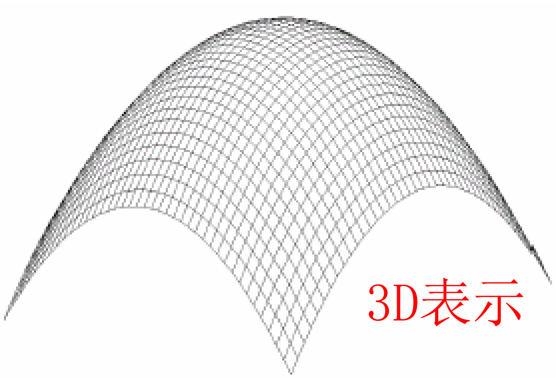
$$\nabla^2 f(x,y) = \Im^{-1}\left\{-\left[\left(u - M/2\right)^2 + \left(v - N/2\right)^2\right]F(u,v)\right\}$$

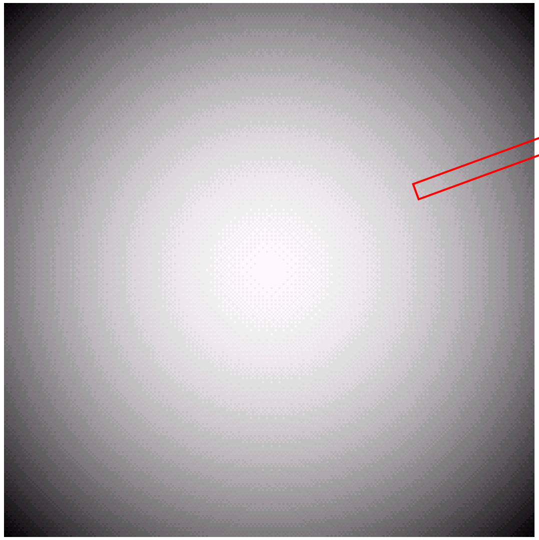
傅里叶变换对:

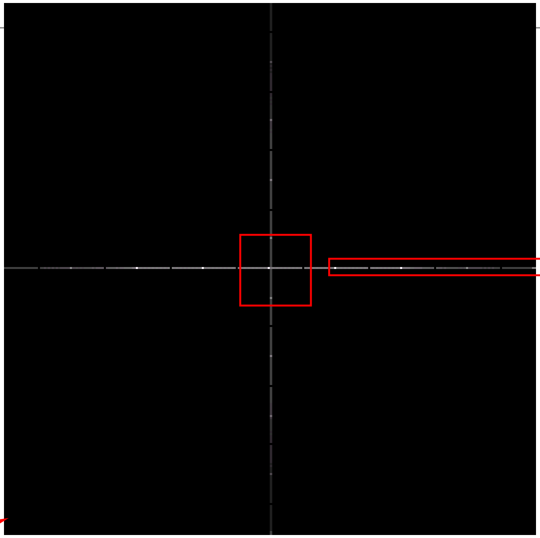
$$\nabla^2 f(x,y) \Leftrightarrow -\left[\left(u - M/2\right)^2 + \left(v - N/2\right)^2\right]F(u,v)$$

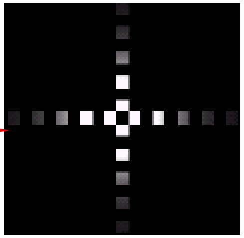
中心化后的频域拉普拉斯算子为：

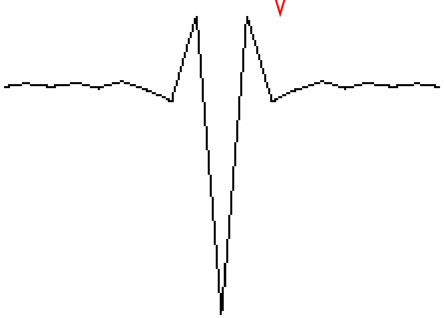
$$H(u,v) = -[(u - M/2)^2 + (v - N/2)^2]$$











0	1	0
1	–4	1
0	1	0

对应空域模板

4、频率域的拉普拉斯算子

原始图像减去拉普拉斯算子部分，形成增强图像

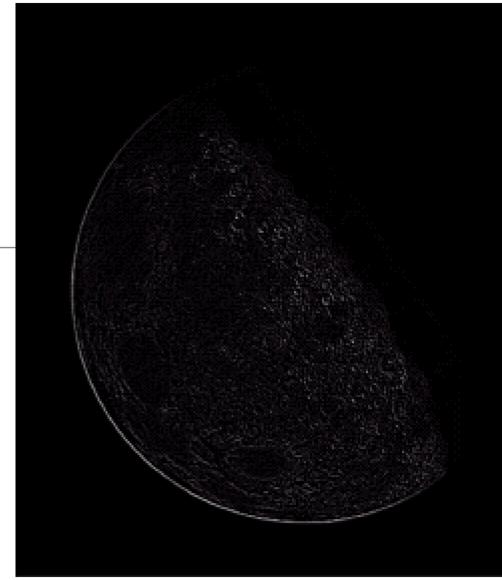
$$g(x,y)=f(x,y)-\nabla^2 f(x,y)$$

用单个滤波器完成全部操作：

$$g(x,y)=\Im^{-1}\left\{\left[1-\left((u-M/2)^2+(v-N/2)^2\right)\right]F(u,v)\right\}$$

例、频域中拉普拉斯运算

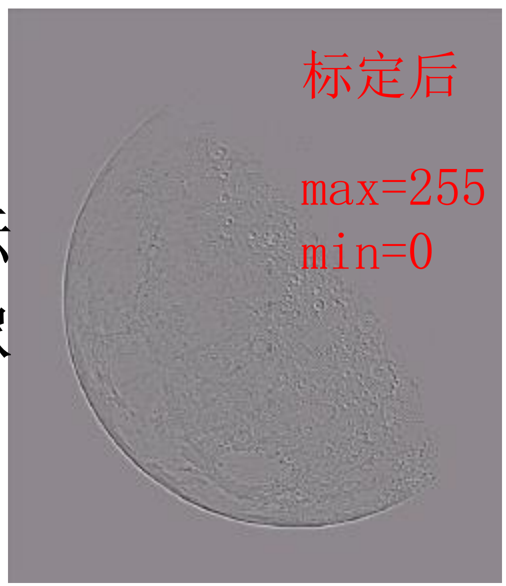
原始图像



滤波后图像

拉普拉斯滤波，有比较数量的正值和负值，需要标定

滤波并标定后图像



增强图像

5、反锐化模板、高频提升滤波、高频加强滤波

反锐化模板：从一幅图像减去其自身模糊图像而生成的锐化图像。

$$f_{hp}(x,y)=f(x,y)-f_{lp}(x,y)$$

高频提升滤波：$f_{hb}(x,y)=Af(x,y)-f_{lp}(x,y)$

$$f_{hb}(x,y)=(A-1)f(x,y)+f(x,y)-f_{lp}(x,y)$$

$$f_{hb}(x,y)=(A-1)f(x,y)+f_{hp}(x,y)$$

5、反锐化模板、高频提升滤波、高频加强滤波

反锐化模板在频率域可由混合滤波器直接执行：

$$F_{hp}(u,v) = F(u,v) - F_{lp}(u,v)$$

$$F_{lp}(u,v) = H_{lp}(u,v)F(u,v)$$

$$H_{hp}(u,v) = 1 - H_{lp}(u,v)$$

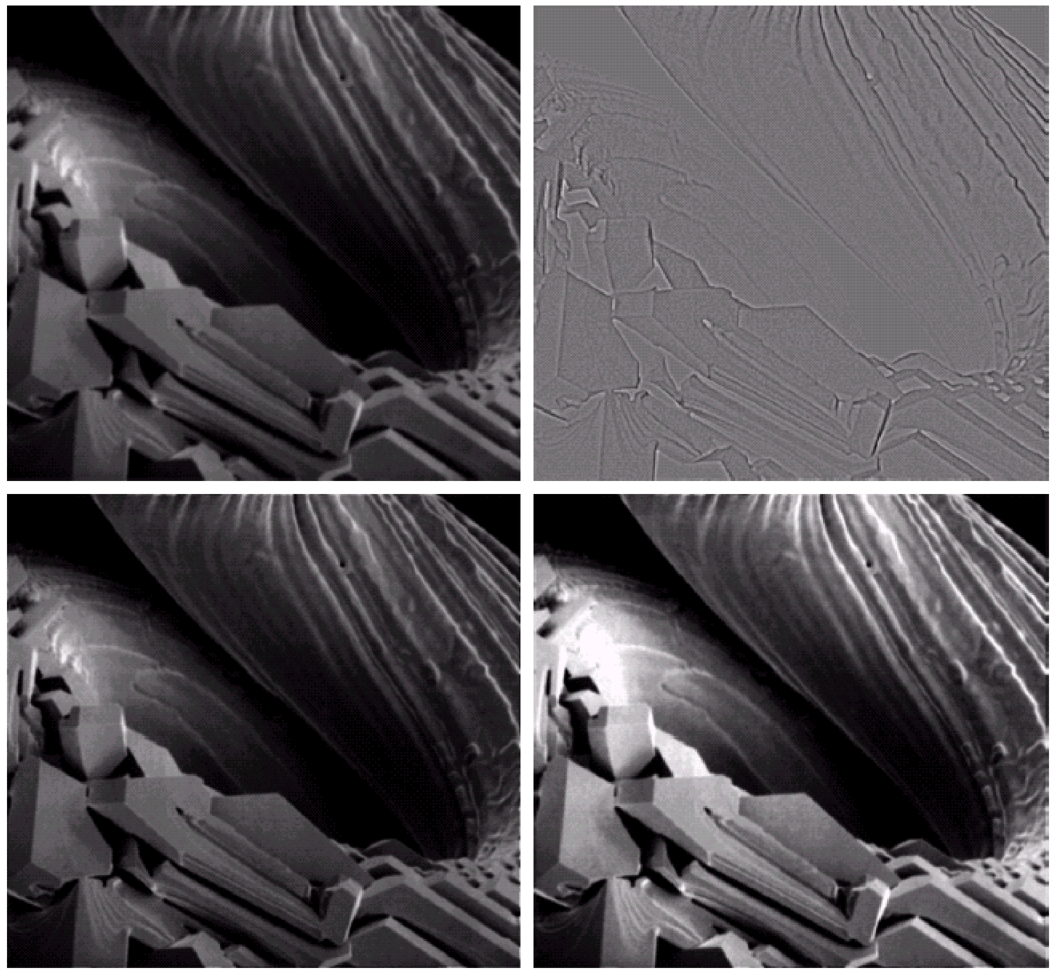
类似地，高频提升滤波的混合滤波器

$$H_{hb}(u,v) = (A-1) + H_{hp}(u,v)$$

例：高频提升滤波

a b
c d

FIGURE 4.29 Same as Fig. 3.43, but using frequency domain filtering. (a) Input image. (b) Laplacian of (a). (c) Image obtained using Eq. (4.4-17) with $A = 2$. (d) Same as (c), but with $A = 2.7$. (Original image courtesy of Mr. Michael Shaffer, Department of Geological Sciences, University of Oregon, Eugene.)



A=2　　　　A=2.7

5、高频加强滤波

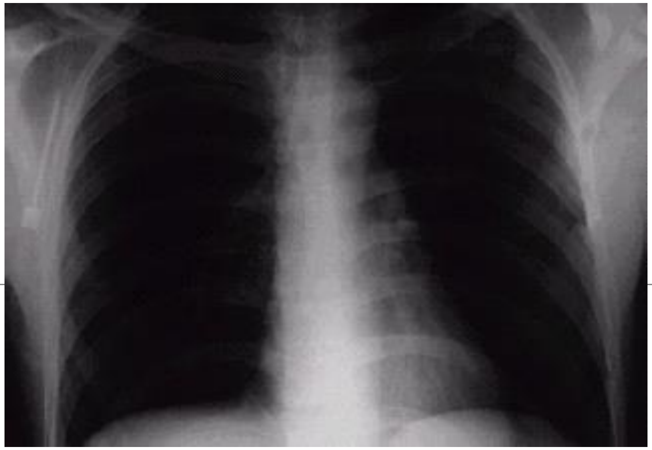
高频增强：在高通滤波器函数前简单地乘以一个常数，
再增加一个偏移以便使零频率不被滤掉。

$$H_{hfe}(u,v) = a + bH_{hp}(u,v)$$

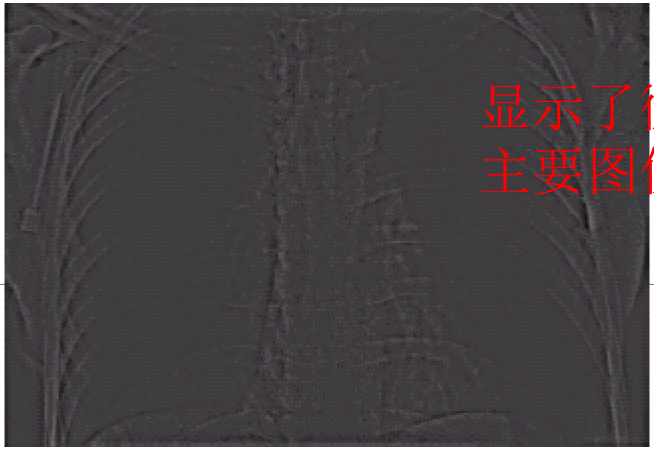
a的典型值在0.25到0.5之间，b的典型值在1.5到2.0之间。

当a=A-1且b=1时，高频加强转换为高频提升滤波。

例六、高频加强滤波



窄灰度级X射线胸透图

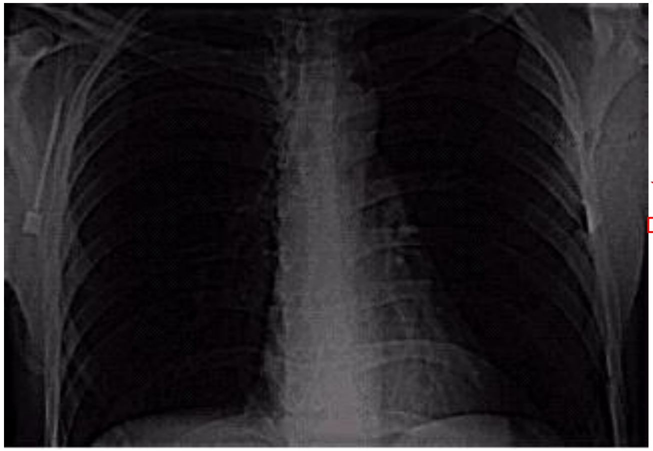


显示了微弱的主要图像边缘

二阶BHPF滤波结果

（ D_0垂直方向值得5% ）

图像暗灰度色调保持

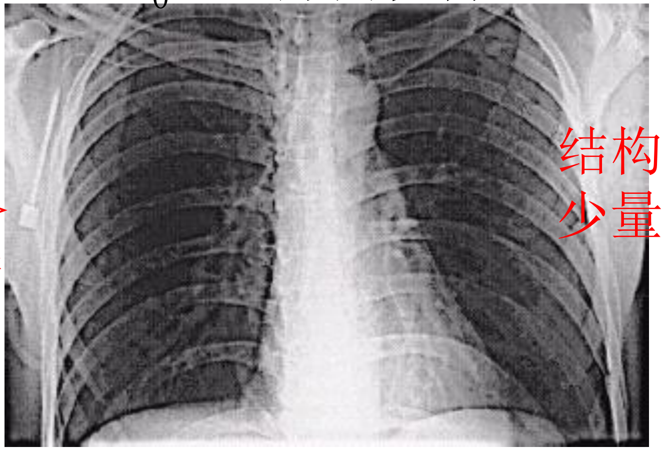


高频加强滤波结果

（ a=0.5，b=2 ）

直方图

均衡



结构清晰少量噪声

高频加强后直方图均衡图

四、同态滤波器

照射－反射模型：

$$f(x,y)=i(x,y)r(x,y)$$

$i(x,y)$：照射分量——空间域的慢变化为特征
$r(x,y)$：反射分量——往往引起突变，取决于物体的特性

图像的傅里叶变换的低频部分与照射分量有关；
高频部分与反射分量有关。

将照射分量和反射分量分开

$$\Im\{f(x,y)\} \neq \Im\{i(x,y)\}\Im\{r(x,y)\}$$

令：

$$z(x,y) = \ln f(x,y) = \ln i(x,y) + \ln r(x,y)$$

$$\Im\{z(x,y)\} = \Im\{\ln f(x,y)\} = \Im\{\ln i(x,y)\} + \Im\{\ln r(x,y)\}$$

$$Z(u,v) = F_i(u,v) + F_r(u,v)$$

滤波函数H(u,v)处理Z(u,v)：

$$\begin{aligned} S(u,v) &= H(u,v)Z(u,v) \\ &= H(u,v)F_i(u,v) + H(u,v)F_r(u,v) \end{aligned}$$

取傅里叶反变换，便可得空间域输出$s(x, y)$：

$$s(x,y)=\Im^{-1}\{S(u,v)\}$$
$$=\Im^{-1}\{H(u,v)F_i(u,v)\}+\Im^{-1}\{H(u,v)F_r(u,v)\}$$

$$i'(x,y)=\Im^{-1}\{H(u,v)F_i(u,v)\}$$

$$r'(x,y)=\Im^{-1}\{H(u,v)F_r(u,v)\}$$

$$s(x,y)=i'(x,y)+r'(x,y)$$

$$g(x,y)=e^{s(x,y)}=e^{i'(x,y)}\cdot e^{r'(x,y)}=i_0(x,y)\cdot r_0(x,y)$$

$$i_0(x,y)=e^{i'(x,y)}$$

$$r_0(x,y)=e^{r'(x,y)}$$

四、同态滤波器

图像增强中的同态滤波

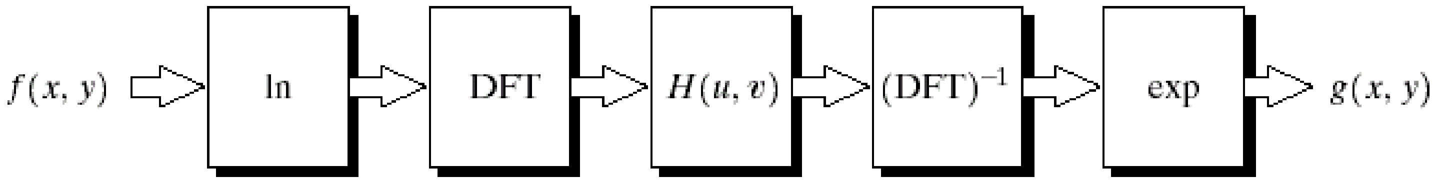


FIGURE 4.31 Homomorphic filtering approach for image enhancement.

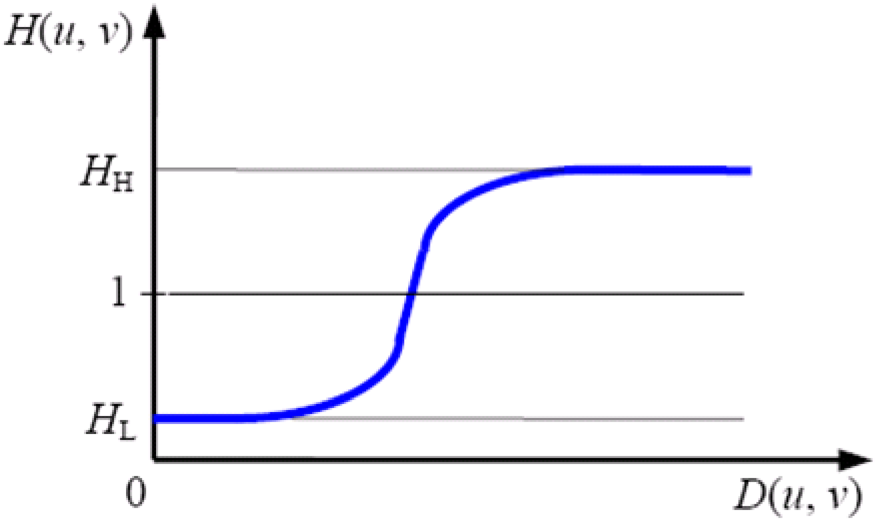
- 同态滤波器，分别作用于照射分量和反射分量
- 图像照射分量变化缓慢；反射分量在边缘处变化剧烈
- 图像对数的傅立叶变换后的低频部分对应照度分量，高频成分对应反射分量
- 滤波器特点：对高频和低频成分有不同的影响

- 同态滤波器函数

$$H(u,v)=(\gamma_H-\gamma_L)[1-e^{-c(D^2(u,v)/D_0^2)}]+\gamma_L$$

$$\gamma_L<1且\gamma_H>1$$

c：用来控制滤波器函数斜面的常数



- 特点：减弱低通分量（照明分量减弱），增强高频分量（反射分量增强）。
- 压缩图像的动态范围，同时增加对比度

例：同态滤波器

a b

FIGURE 4.33
(a) Original image. (b) Image processed by homomorphic filtering (note details inside shelter). (Stockham.)