Конспект лекций курса ФН-4
«Физика»

Жихарев Кирилл ИУ7-24Б

20 мая 2024 г.

Содержание

1 Кинематика

Кинематика описывает общие законы движения точки.

При описании движения необходим выбор системы отсчета – совокупность *координат* и *часов*, связанных с телом, по отношению которого изучается движение. Это тело называется *началом отсчета*.

1.1 Траектория, перемещение

Определение 1.1 (Траектория точки). Множество геометрических точек в пространстве, через которые проходит точка при своем движении называется *траекторией точки*.

Определение 1.2 (Уравнение траектории). Уравнение, выражающее соотношение между пространственными координатами, называется *уравнением траектории*.

Определение 1.3. *Законом движения* называется закон изменения радиус-вектора точки от времени

$$\vec{R}_A = \vec{R}(t). \tag{1.1}$$

Если траектория представляет из себя прямую линию, то движение называют *прямолинейным*. Если траектория – окружность, то движение точки называют *движением по окружности*.

Определение 1.4. *Вектором перемещения* $\Delta\vec{R}$ за интервал времени (t_1, t_2) называется вектор, соединяющий положения точки в t_1 и t_2.

Замечание. Важно не путать *величину перемещения* и *длину пути*

$$L \geq \Delta R. \tag{1.2}$$

Определение 1.5. *Средней путевой скоростью* называется скалярная величина, равная отношению длины пути к величине временного интервала

$$V_{av} = \frac{L}{\Delta t} \tag{1.3}$$

Определение 1.6. *Вектором средней скорости перемещения* за интервал времени (t_1, t_2) называется вектор, равный отношению вектора перемещения к величине промежутка Δt

$$\vec{V}_{av} = \frac{\Delta\vec{R}}{\Delta t}. \tag{1.4}$$

1.2 Мгновенная скорость

Определение 1.7. *Мгновенной скоростью* точки называется вектор $\vec{V}$, являющийся пределом скорости перемещения в некоторый момент времени при стремлении Δt к нулю

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{R}}{\Delta t}. \tag{1.5}$$

Мгновенная скорость – это ничто иное, как *первая производная закона движения*

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt}. \tag{1.6}$$

Замечание. *Вектор скорости всегда* лежит на касательной к линии траектории точки.

Длину пути можно найти следующим соотношением:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{V}| dt. \tag{1.7}$$

1.3 Ускорение

Определение 1.8. *Мгновенным ускорением* точки называется вектор $\vec{a}$, являющийся пределом среднего ускорения в некоторый момент времени при стремлении dt к нулю

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{dt}. \tag{1.8}$$

Аналогично, как для мгновенной скорости, можно определить мгновенное ускорение

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}. \tag{1.9}$$

1.4 Движение на плоскости

Вектор ускорения можно представить в виде суммы двух векторов: вектора $\vec{a}_\tau$ и вектора $\vec{a}_n$. Первый параллелен вектору скорости и называется *тангенциальным ускорением*, второй – перпендикулярен, и называется *нормальным ускорением* (от слова *нормаль*).

Введем единичный вектор для направления скорости $\vec{\tau}_{\vec{V}} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}$. Тогда *тангенциальное ускорение* можно определить как

$$\vec{a} = \frac{d|\vec{V}|}{dt}\vec{\tau}_{\vec{V}} + \underbrace{|\vec{V}|\dot{\vec{\tau}}}_{=0} = \frac{d|\vec{V}|}{dt}\vec{\tau}_{\vec{V}}.$$

Вектор *тангенциального ускорения* отвечает за изменение *модуля* вектора скорости.

Вектор *нормального ускорения* $\vec{a}_n = |\vec{V}|\dot{\vec{\tau}}_{\vec{V}}$ направлен в ту же сторону, что и вектор $\dot{\vec{\tau}}_{\vec{V}}$, т.е. в сторону поворота вектора скорости; следовательно, он отвечает за *изменение направления* вектора скорости.

Полезно рассматривать движение точки как движение по окружности.

1.5 Движение по окружности

Введем величину α – *угловая координата.*

Определение 1.9. Отношение приращения угловой координаты $d\alpha$ в конкретный момент времени к приращению величины временного интервала dt называется *угловой скоростью*

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} \tag{1.10}$$

.

Определение 1.10. Отношение приращения угловой скорости $d\omega$ в конкретный момент времени к приращению величины временного интервала называется *угловым ускорением*

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2 a}{dt^2} \tag{1.11}$$

.

Угловую скорость и ускорение можно связать с векторными:

$$|\vec{V}| = R\omega$$
$$|\vec{a_\tau}| = R\beta$$
$$|\vec{a_n}| = \omega^2 R = \frac{V^2}{R}$$

1.5.1 Частный случай: движение по окружности с постоянной скоростью

При движении по окружности с постоянной скоростью тангенциальное ускорение равно нулю, а значит, угловая скорость постоянна $\omega = \omega_0$. Угловая координата меняется по закону:

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \omega(t - t_0) \tag{1.12}$$

Одному полному обороту соответствует $\alpha - \alpha_0 = 2\pi$. Время одного оборота называется *периодом*

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{1.13}$$

Величина $\nu = \frac{1}{T}$ называется частотой вращения

$$\nu = \frac{1}{T} \tag{1.14}$$

1.6 Закон сложения скоростей и ускорений

При описании движения точки все системы отсчета равноправны, а значит, мы имеем возможность описывать движение тела относительно подвижной системы отчета (подвижной относительно, например, Земли). В рамках лекции ограничимся теми системами отсчета, которые движутся относительно друг друга *поступательно.*

Пусть положение некоторой точки A в системе отсчета 1 задано радиус-вектором $\vec{R}_1$, в системе отсчета 2 – $\vec{R}_2$. Тогда получаем:

$$\vec{R}_2 = \vec{R}_1 + \vec{R}_{21} \tag{1.15}$$

Дифференцируя по t, получаем:

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_1 + \vec{V}_{21} \qquad\qquad \vec{a}_2 = \vec{a}_1 + \vec{a}_{21}$$

Величины с индексом 21 – векторы величин во *второй системе отсчета относительно первой.*

> **Определение 1.11.** Систему отсчета, в которой скорость точка равна нулю, называется *сопутствующей* данной точке.

2 Закон сохранения импульса

Определение 2.1 (Импульс). *Вектором импульса* материальной точки называется произведение массы материальной точки на ее скорость

$$\vec{p} = m\vec{V}. \tag{2.1}$$

2.1 Силы в механике

Определение 2.2 (Сила). *Сила* – векторная величина, являющаяся *мерой* механического действия на материальное тело со стороны других тел.

Замечание. В рамках классической механики силы не меняются при переходе от одной системы отсчета к другой.

2.1.1 Сила всемирного тяготения

Закон (Закон всемирного тяготения). Две материальные точки, массы которых m_1 и m_2, находящиеся друг от друга на расстоянии R, взаимно притягиваются с силой, прямо пропорциональной произведению масс точек и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними

$$F_G = G\frac{m_1 m_2}{R^2}. \tag{2.2}$$

Константа $G \approx 6.67 \cdot 10^{-11}$Н $\cdot$ м^2/кг^2 называется *гравитационной постоянной.*

Замечание. Для двух однородных сфер и шаров сила гравитационного взаимодействия определяется расстояниями между их *центрами.*

2.1.2 Сила тяжести

Рассмотрим какое-нибудь тело массы m, находящееся *вблизи* поверхности Земли. Если тело небольшое относительно масштабов Земли, то его можно рассматривать как материальную точку. Землю считаем однородным шаром. Тогда сила всемирного тяготения равна:

$$F_G = G\frac{mM_{\text{Земли}}}{(R_{\text{Земли}} + h)}^2..$$

Введем обозначение:

$$g = G\frac{V_{\text{Земли}}}{(R_{\text{Земли}} + h)^2}$$

Если высота незначительно по отношению к радиусу Земли, то $g \approx 9.81$.

Определение 2.3 (Сила тяжести). Величину гравитации, приложенной к телу и направленной к центру Земли, называют *силой тяжести*

$$F_g = mg. \tag{2.3}$$

2.1.3 Сила реакции опоры

Если два тела находятся в соприкосновении, то между ними, вообще говоря, действуют силы взаимной реакции, вызванные этим соприкосновением. При прекращении соприкосновения эти силы исчезают. Эти силы называют *силами реакции опоры.* Обычно обозначают $\vec{N}$.

2.1.4 Сила натяжении нити

Определение 2.4 (Сила натяжения нити)**.** Сила, возникающая в нити при ее растяжении, называется *силой натяжения нити.*

2.1.5 Сила сухого трения

Сила (сухого) трения возникает между соприкасающимися телами при попытке сдвинуть их друг относительно друга. Сила трения всегда направлена так, чтобы препятствовать относительному движению соприкасающихся тел.

Силы сухого трения делятся на:

1. *Сила трения покоя* – возникает при попытке сдвинуть покоящееся тело.

2. *Сила трения скольжения* – действует на тело, скользящее по поверхности. Равна:

$$F_{\text{тр}} = \mu N \tag{2.4}$$

2.1.6 Сила сопротивления движения тела в жидкости или газе

Сила сопротивления движению направлена всегда *против относительного движения* тела в жидкости или газе.

В общем случае ее можно представить в виде:

$$\vec{F}_{\text{сопр}} = -\alpha S \vec{V}^N e_{\vec{V}} \tag{2.5}$$

где α – коэффициент вязкости среды, S – площадь поперечного сечения, V – относительная скорость движения тела, N – некоторый показатель, определяемый формой тела, $\vec{e}_{\vec{V}}$ – направляющий вектор.

2.1.7 Сила упругости

Определение 2.5 (Деформация тела)**.** *Деформацией тела* называется изменение размеров тела под действием силы.

Направлением деформации называют направление смещения точек тела относительно положения равновесия.

Закон. Сила упругости, возникающая в теле при *малой* деформации величиной x, прямо пропорциональна величине деформации и противоположна по направлению:

$$\vec{F}_{\text{упр}} = -k\vec{x} \tag{2.6}$$

Коэффициент k называют *коэффициентом упругости (жесткости).*

Для параллельного соединения пружин:

$$k = \sum_i k_i \tag{2.7}$$

Для последовательного соединения пружин:

$$\frac{1}{k} = \sum_i \frac{1}{k_i} \tag{2.8}$$

2.1.8 Обобщенный закон Гука

Рассмотрим деформируемый стержень с начальной длиной L_0, площадью поперечного сечения S и коэффициентом жесткости k. По закону Гука при деформации ΔL величина силы упругости равна:

$$F = k\Delta L.$$

Определение 2.6 (Напряжение). *Напряжением* в сечении называется отношение силы упругости к площади поперечного сечения

$$\sigma = \frac{F}{S}. \tag{2.9}$$

Измеряется в Паскалях.

Введем обозначение $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$ – относительная деформация, $E = \frac{kL_0}{S}$ – *коэффициент упругости материала* или *модуль Юнга*.

Получаем *обобщенный закон Гука*.

Закон (Обобщенный закон Гука). Напряжение и относительная деформация прямо пропорциональны друг другу

$$\sigma = E\varepsilon. \tag{2.10}$$

2.2 Законы Ньютона

2.2.1 Первый закон Ньютона

Закон (Первый закон Ньютона). Существуют такие системы отсчета, в которых материальная точка либо покоится, либо движется по прямой с постоянной скоростью, если на нее не действуют силы со стороны других тел или (векторная) сумма сил равна нулю. Такие системы отсчет называются *инерциальными*.

Определение 2.7 (Инертность тела). Свойство тела не изменять вектора своей скорости в отсутствие внешних сил называется *инертностью тела*.

Определение 2.8 (Движение по инерции). Движение тела, на которое не действуют силы, в инерциальной системе отсчета называется *движением по инерции*.

Определение 2.9 (Инертная масса тела). *Инертной массой тела* называют меру инертности тела.

Замечание. Инертная масса численно совпадает с гравитационной.

Замечание. Землю в рамках большинства задач можно считать инерциальной системой отсчета.

2.2.2 Второй закон Ньютона

Закон (Второй закон Ньютона). В инерциальной системе отсчета вектор ускорения материальной точки сонаправлен с вектором суммы сил, действующих на точку. Величина ускорения точки прямо пропорциональна величине равнодействующей всех сил и обратно пропорциональна массе точки:

$$\vec{a} = \frac{\sum_i \vec{F}_i}{m}. \tag{2.11}$$

Второй закон Ньютона можно записать в импульсном виде:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \tag{2.12}$$

2.2.3 Третий закон Ньютона

Закон (Третий закон Ньютона). Две материальные точки действуют друг на друга с силами одинаковыми по величине, природе этих сил, и противоположными по направлению:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Эти силы приложены к разным телам и лежат на одной прямой, проходящей через точки.

2.2.4 Неинерциальные системы отсчета

Рассмотрим систему отсчета, которая движется относительно некоторой инерциальной с заданным ускорением $\vec{a}_c$. Такая система отсчета *не является инерциальной*.

Согласно принципу сложения вектором ускорения:

$$\vec{a}_1 = \vec{a} - \vec{a}_c$$

Что равносильно:

$$\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_1 \tag{2.13}$$

Подставив выражение в уравнение второго закона Ньютона получаем:

$$m\vec{a}_1 = \sum_i \vec{F} - m\vec{a}_c \tag{2.14}$$

Формально оно совпадает со вторым законом Ньютона, и дополнительное слагаемое $-m\vec{a}$ называют *силой инерции*. Но такая сила является *фиктивной*, т.к. нет тел, которые ее создают.

2.3 Движение системы точек

Для моделирования системы точек используется понятие *центра масс*. Ее ускорение определятся только внешними силами.

2.3.1 Центр масс

Рассмотрим на примере системы из двух материальных точек. Запишем второй закон Ньютона:

$$\begin{cases} m_1\vec{a}_1 = \sum_i \vec{F}_{i1} \\ m_2\vec{a}_2 = \sum_i \vec{F}_{i2} \end{cases} \tag{2.15}$$

На точки могут действовать

- внутренние силы (действующие со стороны другой точки)
- внешние силы (действующие со стороны тел, не входящих в систему)

Тогда:

$$\begin{cases} m_1\vec{a}_1 = \sum_i F_{i1}^{\text{внеш}} + \sum_i F_{i1}^{\text{внут}} \\ m_2\vec{a}_2 = \sum_i F_{i2}^{\text{внеш}} + \sum_i F_{i2}^{\text{внут}} \end{cases} \tag{2.16}$$

Сложим уравнения. По третьему закону Ньютона внутренние силы взаимно компенсируются и остаются только внешние. Векторную сумму внешних сил обозначим как $\vec{F}^{\text{внеш}}$. Получаем:

$$m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = \vec{F}^{\text{внеш}} \tag{2.17}$$

Продифференцируем обе части уравнения по времени (2.17). Получаем:

$$m_1\vec{R}_1 + m_2\vec{R}_2 = (m_1 + m_2)\,\vec{R}_c \tag{2.18}$$

Радиус-вектор $\vec{R}_c$ определяет точку *центра масс системы*.

Определение 2.10 (Центр масс). *Центром масс тела* (центром инерции тела) называется абстрактная точка, положение которой определяется распределением масс в теле.

$$\vec{R}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{R}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \tag{2.19}$$

Аналогично определяется ускорение центра масс:

$$\vec{a}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \tag{2.20}$$

Поэтому уравнение движения системы точек будет иметь вид:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i = m\vec{a}_c = \vec{F}^{\text{внеш}} \tag{2.21}$$

где $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$.

2.4 Закон сохранения импульса

Запишем второй закон Ньютона в импульсном виде:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{\text{внеш}} \tag{2.22}$$

Определение 2.11. Система называется *замкнутой*, если сумма действующих на нее внешних сил равна нулю.

Рассмотрим замкнутую систему. Тогда:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$$

что означает, что суммарный импульс системы сохраняется.

Закон (Закон сохранения импульса). В замкнутой системе суммарный импульс системы сохраняется.

Рассмотрим уравнение (2.22) в проекциях на оси $oXYZ$:

$$\begin{cases} \vec{p}_x(t) = \vec{F}_x^{\text{внеш}} \\ \vec{p}_x(t) = \vec{F}_y^{\text{внеш}} \\ \vec{p}_z(t) = \vec{F}_z^{\text{внеш}} \end{cases}$$

Если одна из проекций сил равна нулю, то мы можем говорить *только о сохранении одной из координат $\vec{p}$, но не о законе сохранения импульса!*

2.4.1 Изменение импульса

Из (2.22) вектор изменения импульса системы за интервал времени (t_1, t_2) равен:

$$\Delta\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}^{\text{внеш}} dt \tag{2.23}$$

3 Закон сохранения момента импульса

3.1 Момент импульса

3.1.1 Момент силы относительно точки

Определение 3.1 (Момент импульса). Вектором *момента импульса* относительно точки O называется вектор
$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{p}. \tag{3.1}$$
где $\vec{R}$ – радиус-вектор из точки O, $\vec{p}$ – вектор импульса точки.

Замечание. Точку O иногда называют *полюсом*.

Найдем производную момента импульса по времени:
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} \times \vec{p} + \vec{R} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{3.2}$$
Первое слагаемое в (3.2) равно нулю, т.к.:
$$\frac{d\vec{R}}{dt} \times \vec{p} = m(\vec{V} \times \vec{V}) = \vec{0}.$$
Поэтому:
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{R} \times \vec{F} \tag{3.3}$$

Определение 3.2 (Момент силы). Величина $\vec{M_O}(\vec{F}) = \vec{R} \times \vec{F}$ называется *моментом силы* $\vec{F}$ относительно точки O.

Прямая, на которой лежит вектор $\vec{F}$, называется *линией действия силы* $\vec{F}$. Расстояние от точки O до *линии действия силы* называется *плечом силы* относительно точки O.

3.1.2 Момент силы относительно оси

Чтобы найти момент силы относительно оси, надо:

1. Найти проекцию силы $\vec{F_\perp}$ на *любую* плоскость, перпендикулярной заданной оси. Указать точку O – точку пересечения этой плоскости с осью.

2. Найти плечо силы $\vec{F_\perp}$ относительно оси.

3. Найти величину момента силы:
$$M = F_\perp d$$
где d – плечо силы.

4. Определить направление момента силы по *правилу буравчика*

5. Если ось имеет направление, определить знак проекции момента силы.

3.2 Момент импульса системы

Рассмотрим суммарный момент импульса системы точек относительно некоторой точки O:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i (\vec{R}_i \times \vec{p}_i) \tag{3.4}$$

При переходе к другой точке O_1 радиус-векторы точек системы преобразуются в $\vec{R}_i = \vec{R}_{1i} + \vec{R}_1$, поэтому:

$$\vec{L} = \sum_i \left(\vec{R}_{1i} + \vec{R}_1\right) \times \vec{p}_i = \sum_i \left(\vec{R}_{1i} \times \vec{p}_i + \vec{R}_1 \times \vec{p}_i\right) =_i \vec{R}_{1i} \times \vec{p}_i + \vec{R}_1 \times \left(\sum_i \vec{p}_i\right).$$

Суммарный импульс системы равен импульсу центра масс:

$$\sum_i \vec{p}_i = \vec{p}_c$$

Подставляя в (3.2) получаем:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{R}_1 \times \vec{p}_c \tag{3.5}$$

В системе отсчета, где центр масс тела покоится ($\vec{p}_c = 0$) суммарный момент импульса не зависит от точки, относительно которой он вычисляется.

Если рассматривать движение твердого тела, то возможное движение в случае $\vec{p}_c = 0$ – это вращение вокруг центра масс. В этом смысле *момент импульса описывает вращательно движение системы (тела)*.

Продифференцировав уравнение (3.5) получаем *уравнение динамики вращательного движения системы точек*:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_O \left(\vec{F}_i^{\text{внеш}}\right) \tag{3.6}$$

3.3 Момент импульса твердого тела

Рассмотрим твердое тело, которое вращается вокруг неподвижной оси z с угловой скоростью ω. На оси z выберем точку O.

Выделим в теле малую частицу массой Δm. Ей момент импульса относительно точки O равен:

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

Траекторией частица Δm_i является окружность, поэтому вектор импульса $\vec{p}_i$ направлен по касательной к этой окружности и угол между векторами $\vec{r}_i$ и $\vec{p}_i$ равен 90. Тогда величина момента импульса частица равна:

$$L_i = r_i p_i$$

Пусть $r_{i\perp}$ – радиус окружности траектории частицы. Тогда

$$p_i = \Delta m_i V_i = \Delta m_i r_{i\perp} \omega$$

Рассмотрим проекцию вектора момента импульса на ось z:

$$L_{iz} = r_i p_i \cos\beta_i$$

Учитывая, что $\cos\beta_i = \sin\alpha_i$, получаем:

$$L_{iz} = \Delta m_i r_{i\perp}^2 \omega$$

Просуммировав для всего тела:

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \sum_i \Delta i r_{i\perp}^2 \omega = \omega \sum_i \Delta m_i r_{i\perp}^2$$

Величина момента импульса вдоль оси z не зависит от положения точки O на оси.
Величина:

$$I_z = \sum_i \Delta m_i r_{i\perp}^2 \tag{3.7}$$

называется *моментом инерции* твердого тела относительно оси z.

Момент инерции для сплошного тела можно заменить интегралом:

$$I_z = \iiint_m r_\perp^2 dm$$

3.4 Уравнение динамики вращательного движения вокруг неподвижной оси

Момент импульса твердого тела при вращательном движении вокруг оси z вычисляется как:

$$L_z = I_z \omega.$$

Тогда уравнение динамики вращательного движения примет вид:

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}\left(I_z \omega\right).$$

Если тело твердое ($I_z = const$), а $\frac{d\omega}{dt} = \beta$ (угловое ускорение), то получаем, что:

$$I_z \beta = M_z^{\text{внеш}} \tag{3.8}$$

Определение 3.3. *Моментом инерции* тела называют меру инертности тела при вращательном движении

$$I = \frac{L}{\omega} \tag{3.9}$$

3.5 Теорема Гюйгенса-Штейнера

Теорема 3.1 (Теорема Гюйгенса-Штейнера)**.** Момент инерции твердого тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции тела относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела и квадрата расстояния между осями, умноженного на массу тела

$$I_z = I_{zc} + ma^2. \tag{3.10}$$

3.6 Закон сохранения момента импульса

Закон (Закон сохранения момента импульса)**.** Если момент внешних сил, действующих на систему относительно заданной точки равен нулю, то сохраняется момент импульса системы относительно этой точки:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right) = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{L} = const \tag{3.11}$$

3.7 Векторная форма записи угловой скорости

Рассмотрим поворот твердого тела на малый угол $d\varphi$ вокруг оси z.

Некоторая точка A, находящаяся на расстоянии $r_\perp$ от оси вращения переместится на малый вектор $d\vec{s}$, направленный по касательно к окружности в направлении поворота:

$$ds = r_\perp d\varphi.$$

Пусть положение точки A задано с помощью радиус-вектора $\vec{R}$ из какой-то точки O на оси вращения, тогда $r_\perp = R \sin \alpha$. Поэтому:

$$ds = R \sin \alpha d\varphi.$$

Если вдоль оси вращения задать вектор поворота $d\vec{\varphi}$, связанный с направлением поворота *правилом буравчика*, то будет справедливо следующее равенство:

$$d\vec{s} = d\vec{\varphi} \times \vec{R}.$$

Так как для скорости движения точки A справедливо выражение $d\vec{s} = \vec{V} dt$, то задавая вектор угловой скорости, направленный вдоль оси вращения равенством $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$, получаем:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

4 Закон сохранения энергии в механике

4.1 Теорема об изменении кинетической энергии

Рассмотрим движение материальной точки в некоторой инерциальной системе отсчета. Второй закон Ньютона имеет вид:

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}$$

Вектор $\vec{V}$ направлен по касательной к траектории, поэтому вектор малого перемещения точки $d\vec{r} = \vec{V}dt$ тоже направлен по касательной к траектории. Скалярно умножим и проинтегрируем:

$$\int \left(m\frac{d\vec{V}}{dt}, d\vec{r}\right) = \int \left(\vec{F}, d\vec{r}\right). \tag{4.1}$$

4.1.1 Преобразование левой части равенства

Преобразуем левое подынтегральное выражение (4.1):

$$\left(m\frac{d\vec{V}}{dt}, d\vec{r}\right) = \left(m\frac{d\vec{V}}{dt}, \vec{v}dt\right) = m\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\vec{v}\right)dt = = \frac{1}{2}m\left[\frac{d}{dt}\left(\vec{v},\vec{v}\right)\right]dt = d\left(\frac{1}{2}mV^2\right)$$

Получаем:

$$\int \left(m\frac{d\vec{V}}{dt}d\vec{r}\right) = \int d\left(\frac{1}{2}mV^2\right) = \left(\frac{1}{2}mv^2\right)_{\text{кон}} - \left(\frac{1}{2}mV^2\right)_{\text{нач}} \tag{4.2}$$

Определение 4.1 (Кинетическая энергия). *Кинетической энергией* материальной точки массы m, которая движется со скоростью V, называется величина

$$W_{\text{кин}} = \frac{1}{2}mV^2 \tag{4.3}$$

Кинетическую энергию можно выразить через импульс:

$$W_{\text{кин}} = \frac{p^2}{2m} \tag{4.4}$$

Замечание. Кинетическая энергия зависит от системы отсчета. Например, в *сопутствующей системе отсчета* кинетическая энергия равна нулю.

4.1.2 Преобразование правой части равенства

Определение 4.2 (Работа постоянной силы). *Работой постоянной силы* F, действующей на материальную точку, при малом перемещении $d\vec{r}$ называется произведение

$$A = \left(\vec{F}, d\vec{r}\right) = |\vec{F}||d\vec{r}|\cos\alpha \tag{4.5}$$

Работа переменной силы определяется как:

$$A = \int \left(\vec{F}, d\vec{r}\right) \tag{4.6}$$

4.1.3 Итог

Получаем:

$$\int \left(m\frac{d\vec{V}}{dt}, d\vec{r} \right) = \int \left(\vec{F}, d\vec{r} \right) \tag{4.7}$$

С учетом введенных преобразований:

$$W_{\text{кин}}^{\text{кон}} - W_{k}^{\text{нач}} = A \tag{4.8}$$

Таким образом была доказана *теорема об изменении кинетической энергии.*

Теорема 4.1 (Об изменении кинетической энергии)**.** Изменение кинетической энергии материальной точки на участке пути равно работе действующих на нее сил на этом участке.

4.1.4 Мощность силы

Определение 4.3 (Средняя мощность силы)**.** *Средней мощностью силы* $\vec{F}$ называется отношение работы этой силы к интервалу времени Δt

$$P_{\text{ср}} = \frac{A}{\Delta t}. \tag{4.9}$$

Определение 4.4 (Мгновенная мощность силы)**.** *Мгновенной мощностью силы* называют мощность силы за малый промежуток времени

$$P = \frac{A}{\Delta t} = \frac{\left(\vec{F}, d\vec{r} \right)}{dt} = \left(\vec{F}, \vec{V} \right). \tag{4.10}$$

Следствие 4.1.1. Если в каждый момент времени $\vec{F} \perp \vec{V}$, то работа данной силы равна нулю.

4.2 Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

Для вращающегося тела величина скорости вращения любой точки вокруг оси равна:

$$v_i = \omega r_{i\perp}$$

где $r_{i\perp}$ – расстояние от этой точки до оси вращения. Поэтому суммарная кинетическая энергия всех точек тела равна:

$$W_{\text{кин}}^{\text{вращ}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i V_i = \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i r_{i\perp}^2 = \frac{1}{2}\omega^2 I_z$$

Рассмотрим уравнение динамики вращательного движения твердого тела вокруг оси:

$$I_z = \frac{d\omega}{dt} = M_z.$$

Для малого угла поворота $d\varphi = \omega dt$. Поэтому:

$$I_z \frac{d\omega}{dt} d\varphi = M_z d\varphi.$$

Преобразуем левую часть:

$$I_z \frac{d\omega}{dt} \omega dt = I_z \omega d\omega = d\left(\frac{1}{2} I_z \omega^2 \right).$$

Рассмотрим поворот на конечный угол $\Delta\varphi$:

$$\int_0^{\Delta\varphi} I_z \frac{d\omega}{dt} d\varphi = \int_0^{\Delta\varphi} M_z d\varphi.$$

Откуда получаем:

$$\left(\frac{1}{2} I_z \omega^2\right)_{\text{кон}} - \left(\frac{1}{2} I_z \omega^2\right)_{\text{нач}} = \int_0^{\Delta\varphi} M_z d\varphi \tag{4.11}$$

Таким образом работа сил при повороте тела равна:

$$A = \int_0^{\Delta\varphi} M_z d\varphi \tag{4.12}$$

Мгновенная мощность:

$$P = M_z \omega \tag{4.13}$$

4.3 Кинетическая энергия тела

Рассмотрим систему движущихся точек. Кинетическая энергия системы – сумма всех энергий точек:

$$W_\Sigma = \sum_i W_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i V_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\vec{V}_i, \vec{V}_i\right).$$

Скорость каждой точки можно представить в виде:

$$\vec{V}_i = \vec{V}_c + \vec{V}_{\text{отн}}$$

где $\vec{V}_c$ – скорость центра масс системы, $\vec{V}_{\text{отн}}$ – относительная скорость точки (в системе отсчета, где центр масс покоится).

Подставим:

$$\begin{aligned} W_\Sigma = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\vec{V}_c + \vec{V}_{i,\text{отн}}, \vec{V}_c + \vec{V}_{i,\text{отн}}\right) = \\ = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\left(\vec{V}_c, \vec{V}_c\right) + 2m_i \left(\vec{V}_c, \vec{V}_{\text{i,отн}}\right) + m_i \left(\vec{V}_{i,\text{отн}}, \vec{V}_{i,\text{отн}}\right)\right) = \\ = \frac{1}{2} m \vec{V}_c^2 + \frac{1}{2} \sum_i m \vec{V}_{i,\text{отн}} \end{aligned}$$

Итого получаем:

$$W = \frac{1}{2} m_c \vec{V}_c^2 + W_{\text{кин}}^{\text{отн}} \tag{4.14}$$

Теорема 4.2 (Теорема Кенига)**.** Полная кинетическая энергия тела (системы точек) равна сумме кинетической энергии движения центра масс и кинетической энергии движения точек относительно центра масс.

4.4 Потенциальная энергия

В механике принято делить силы на *консервативные* и *неконсераватиные*.

Определение 4.5. Силы между телами, которые зависят только от их взаимного положения, называют *консервативными*.

Такими являются:

1. сила всемирного тяготения;

2. сила тяжести;
3. сила кулоновского взаимодействия;
4. сила упругости.

Для каждой из консервативных сил можно определить *потенциальную энергию.*

Определение 4.6 (Потенциальная энергия)**.** *Потенциальной энергией* консервативной силы называется физическая величина, зависящая только от положения точки (тела), и уменьшение которой равно работе соответствующей силы, действующей на точку (тело)

$$W^{\text{пот}}_{\text{нач}} - W^{\text{пот}}_{\text{кон}} = A. \tag{4.15}$$

Замечание. Обратите внимание на порядок индексов! Ошибки тут нет.

Из определения есть несколько следствий:

Следствие 4.2.1. Нельзя говорить о абсолютном значении потенциальной энергии без указания точки отсчета.

Следствие 4.2.2. Работа консервативной силы не зависит от пути, вдоль которого двигалось тело; она зависит только от его начального и конечного положения.

$$\int \left(\vec{F}, d\vec{l}\right) = W^{\text{пот}}_{\text{нач}} - W^{\text{пот}}_{\text{кон}}.$$

Следовательно, работа консервативной силы по замкнутому пути равна нулю.

Определение 4.7. *Изоэнергетической поверхностью* в пространстве называется поверхность уровня энергии, так как поверхность, на которой величина энергии остается постоянной.

Определение 4.8. *Эквипотенциальной поверхностью* называется изоэнергетическая поверхность для *потенциальной энергии.*

4.4.1 Примеры потенциальной энергии

1. Для гравитационного взаимодействия:
$$W^{\text{пот}}_{\text{грав}} = -G\frac{m_1 m_2}{R} + C.$$
2. Для силы тяжести:
$$W^{\text{пот}}_{\text{тяж}} = mgz + C.$$
3. Для силы упругости:
$$W^{\text{пот}}_{\text{упр}} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}E\varepsilon^2 V.$$

4.5 Закон сохранения механической энергии

Определение 4.9 (Полная механическая энергия тела (системы))**.** *Полной механической энергией тела (системы)* называется энергия, определяемая движением и положением тела относительно других тел, то есть сумма потенциальной и кинетической энергией:

$$W^{\text{мех}} = W^{\text{кин}} + W^{\text{пот}} \tag{4.16}$$

Рассмотрим тело, на которое действуют только консервативные силы. Запишем изменение кинетической энергии:

$$W^{\text{пот}}_{\text{кон}} - W^{\text{пот}}_{\text{нач}} = A.$$

Но так как в системе действуют *только* консервативные силы, то для них можно ввести потенциальную энергию и выразить работу через уменьшение потенциальной энергии:

$$A = W^{\text{пот}}_{\text{нач}} - W^{\text{пот}}_{\text{кон}}.$$

Следовательно получаем:

$$\begin{aligned} W^{\text{пот}}_{\text{кон}} - W^{\text{пот}}_{\text{нач}} &= A = W^{\text{пот}}_{\text{нач}} - W^{\text{пот}}_{\text{кон}} \\ W^{\text{пот}}_{\text{кон}} + W^{\text{пот}}_{\text{кон}} &= W^{\text{пот}}_{\text{нач}} + W^{\text{пот}}_{\text{нач}} \\ W^{\text{мех}}_{\text{кон}} &= W^{\text{пот}}_{\text{нач}} \end{aligned}$$

Закон (Закон сохранения механической энергии)**.** Если на тело или в системе тел действуют только *консервативные силы*, то механическая энергия тела или системы тел остается постоянной.

Таким образом *консервативные* силы *сохраняют* энергию.Именно поэтому «консервативные» сил получили такое название (переводится как «сохраняющие»).

Существуют также и *диссипативные* силы – силы, рассеивающие *механическую* энергию.

Замечание. Закон сохранения энергии верен абсолютно всегда! Энергия лишь может переходить из одной формы в другую.

Закон (Закон изменения механической энергии)**.** Изменение механической энергии равно работе *неконсервативных* сил.

5 Колебания

5.1 Положение равновесия и квазиупругая сила

Рассмотрим одномерное движение тела под действием консервативной силы вдоль оси X. Для потенциальной энергии тела вблизи некоторой точки x_0 можно записать выражение

$$W(x) = W_0 + \left.\frac{dW}{dx}\right|_{x_0}(x - x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2W}{dx^2}\right|_{x_0}(x - x_0)^2 + \ldots. \tag{5.1}$$

Потенциальная энергия и вектор консервативной силы связаны соотношением:

$$\vec{F} = -\mathrm{grad} W.$$

откуда для проекции силы на ось X $F_x = -\frac{dW}{dx}$, то есть:

$$F_x = -\frac{\partial W}{\partial x} = -\left(\left.\frac{dW}{dx}\right|_{x_0} + \left.\frac{d^2W}{dx^2}\right|_{x_0}(x - x_0)\ldots\right).$$

Будем считать, что точка x_0 является положением равновесия, поэтому должно выполняться условие:

$$F_x = -\left.\frac{dW}{dx}\right|_{x_0} = 0.$$

Тогда для изменения потенциальной энергии вблизи точки x_0:

$$\Delta W = W(x) - W_0 \approx \frac{1}{2}\left.\frac{d^2W}{dx^2}\right|_{x_0}(x - x_0)^2 \tag{5.2}$$

и для проекции силы:

$$F_x \approx -\left.\frac{d^2W}{dx^2}\right|_{x_0}(x - x_0) \tag{5.3}$$

Рассмотрим случай, когда в точке x_0 наблюдается локальный минимум потенциальной энергии. Тогда:

$$\frac{d^2W}{dx^2} > 0$$

и существует некоторая окрестность точки $U_\varepsilon(x_0)$, для которой выполняется условие:

$$\forall x \in U_\varepsilon(x_0) \implies W(x) > W_0$$

при этом $F_x > 0$ для $x < x_0$ и $F_x < 0$ для $x > x_0$. Это означает, что при любом изменении положения тела вдоль оси X будет возникать сила F, которая стремится вернуть тело в исходное положение. Такое положение равновесия называется *устойчивым*.

> **Определение 5.1** (Устойчивое положение равновесия). Положение равновесия называется *устойчивым*, если при малом отклонении от этого положения возникает сила, возвращающая систему в положение равновесия.

> **Определение 5.2** (Неустойчивое положение равновесия). Положение равновесия называется *неустойчивым*, если при малом отклонении от этого положения возникает сила, уводящая систему из положения равновесия.

Для неустойчивого равновесия характерен *локальный максимум энергии*:

$$\frac{d^2W}{dx^2} < 0$$

Для случая $\frac{d^2W}{dx^2} = 0$ требуется дополнительное исследование.

Запишем выражение консервативной силы вблизи положения равновесия:

$$\vec{F} = -k_0 \Delta \vec{x}$$

Величину потенциальной энергии:

$$W = \frac{1}{2} k_0 \Delta x^2 + C$$

где $k_0 = \left(\frac{d^2W}{dx^2}\right)\Big|_{x=x_0}$. Такая форма записи консервативной силы вблизи точки равновесия называется *квазиупругой силой.*

Определение 5.3 (Квазиупругая сила)**.** Сила, пропорциональная смещению тела и противоположная его направлению, называется *квазиупругой.*

Запишем второй закон Ньютона для тела, движущегося под действием квазиупругой силы вблизи точки равновесия:

$$ma_x = -k_0(x - x_0)$$

Введем ось X так, чтобы $x_0 = 0$. Тогда уравнение примет вид:

$$ma_x = -k_0 x.$$

С учетом зависимости $a_x = \ddot{x}$ это уравнение примет вид:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

где $\omega^2 = \frac{k_0}{m} > 0$. Это *линейное обыкновенно дифференциальное уравнение второго порядка.* Решением этого уравнения являются *гармонические функции* от времени t:

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha)$$
$$x = A \sin(\omega_0 t + \alpha)$$

Параметры процесса будут повторятся через минимальный промежуток времени T, называемый *периодом колебаний.* Обратная к ней величина $\nu = \frac{1}{T}$ называется *частотой колебаний.* Величину $\omega_0 = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$ называют *круговой* или *циклической частотой* колебаний.

Величина A называется *амплитудой колебаний* – модуль максимального смещения от положения равновесия.

Таким образом, дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} + \omega_0 x = 0 \tag{5.4}$$

описывает *колебательный процесс.*

В этом колебательном процессе сохраняется механическая энергия:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} k_0 x^2\right) = 2m\frac{\dot{x}}{2}\ddot{x} + 2k_0\frac{x}{2}\dot{x} = m\dot{x}\left(\ddot{x} + \omega^2 x\right) = 0$$

Поэтому данный колебательный процесс (5.4) принято называть *свободными незатухающими колебаниями.*

5.2 Свободные незатухающие колебания

Определение 5.4 (Колебания)**.** *Колебаниями* называются движения или состояния, параметры которых повторяются во времени.

Моделью для изучения колебаний является *осциллятор.*

Определение 5.5 (Осциллятор)**.** Материальная точка или система, совершающая колебательное периодическое движение около положения устойчивого равновесия, называется *осциллятором.*

5.3 Энергия и импульс гармонического осциллятора

Пусть задан закон движения осциллятора:

$$x = A\cos(\omega t + \alpha) \tag{5.5}$$

1. Найдем среднее значение проекции импульса для колебательного движения. Проекция импульса в зависимости от t:

$$p_x(t) = mV_x(t) = m\dot{x}(t) = -m\omega A\sin(\omega t + \alpha)$$

Среднее значение:

$$p_x = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\int_0^t p_x dt\right) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\int_0^t \left(-m\omega A\sin\left(\omega t + \alpha\right)\right)dt\right) =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}mA\left(\cos\left(\omega t + \alpha\right) - \cos(\alpha)\right)\right) = 0$$

2. Найдем среднее значение кинетической энергии.

$$W_k = \frac{1}{2}mV_x^2 = \frac{p_x^2}{2m}$$

$$W_k = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\int_0^t \frac{p_x^2}{2m}dt\right) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\int_0^t \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2\left(\omega + \alpha\right)dt\right) =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\frac{m\omega^2A^2}{2}\int_0^t \frac{1-\cos[2\left(\omega t + \alpha\right)]}{2}dt\right) =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\frac{m\omega^2A^2}{4}\left(t - \frac{1}{2\omega}\left(\sin[2\left(\omega t + \alpha\right)] - \sin[2\alpha]\right)\right)\right)$$

Т.к. $|\sin\varphi| \le 1\ \forall\varphi$, то $W_k = \frac{1}{4}m\omega^2A^2$.

Найдем среднее значение потенциальной энергии.

$$W_n = \frac{1}{2}kx^2$$

$$W_n = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\int_0^t \frac{1}{2}kx^2dt\right) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\int_0^t \frac{1}{2}lA^2\cos^2\left(\omega t + \alpha\right)dt\right) =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\frac{kA^2}{2}\int_0^t \frac{1+\cos[2\left(\omega t + \alpha\right)]}{2}dt\right) =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\frac{kA^2}{4}\left(t + \frac{1}{2\omega}\left(\sin[2\left(\omega t + \alpha\right)] - \sin[2\alpha]\right)\right)\right)$$

Получаем, что:

$$W_n = \frac{1}{4}kA^2$$

С учетом соотношения $\omega^2 = \frac{k}{m}$, получаем, что:

$$W_k = W_n = \frac{1}{4}kA^2 \tag{5.6}$$

3. Найдем среднее значение механической энергии осцилятора:

$$W = \overline{W_k} + \overline{W_n} = W_k + W_n = \frac{1}{2}kA^2$$

Как и следовало ожидать, полная механическая энергия осциллятора остается постоянной.

5.4 Фазовая плоскость

Определение 5.6. *Фазовой плоскостью* называется двумерное пространство, координатами в котором является координата точки и проекция импульса.

Из закона сохранения энергии для пружинного маятника:

$$W = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 = const$$

следует, что фазовая траектория точки, совершающей свободные незатухающие колебания является *эллипс*, главные полуоси которого равны $a = \sqrt{km}A = m\omega A = mV_{max}$и $b = A$.

5.5 Векторная диаграмма

Рассмотрим радиус-вектор точки M, вращающейся вокруг начала координат с постоянной угловой скоростью ω. Угол между радиус-вектором и осью X меняется с течением времени по закону:

$$\varphi = \omega t + \varphi_0$$

, где φ_0 – его начальное значение. Пусть длина вектора $|\overrightarrow{OM}| = A$. Тогда координаты точки M могут быть описаны:

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \\ y = A\sin(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$$

Данная форма представления колебаний называется *амплитудной* или *векторной диаграммой*.

Рассмотрим сложение двух колебаний одного направления: пусть два осцилятора совершают колебания вдоль оси X с циклическими частотами ω_1 и ω_2:

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega_1 t + \alpha_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega_2 t + \alpha_2) \end{cases}$$

Зададим эти колебания на диаграмме векторами $\vec{A_1}$ и $\vec{A_2}$ соответственно. Тогда результирующему колебанию $x_\Sigma = x_1 + x_2$ сопоставим вектор $\vec{A_\Sigma} = \vec{A_1} + \vec{A_2}$ с фазой $\varphi_\Sigma = \omega_\Sigma + \alpha_\Sigma$.

По теореме косинусов:

$$A_\Sigma^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos(\pi - \delta).$$

Учтем, что $\cos(\pi - \delta) = -\cos\delta$. Угол δ представляет из себя разность углов φ_1 и φ_2:

$$\delta = \varphi_2 - \varphi_1 = (\omega_2 - \omega_1)\,t + \alpha_2 - \alpha_1.$$

Тогда получаем:

$$A_\Sigma^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left((\omega_2 - \omega_1)t + \alpha_2 - \alpha_1\right).$$

И отсюда:

$$\operatorname{tg}\left(\omega_\Sigma t + \alpha_\Sigma\right) = \frac{A_1\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2\sin(\omega_2 t + \alpha_2)}{A_1\cos(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2\cos(\omega 2t + \alpha_2)}.$$

Соответственно:

$$\operatorname{tg}\alpha_\Sigma = \frac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2}.$$

Рассмотрим два частных случая.

1. Пусть $A_1 = A_2 = A$ и $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Тогда:

$$A_\Sigma^2 = 2A^2 + 2A^2\cos(\alpha_2 - \alpha_1) = 2A^2\left(1 + \cos(\alpha_2 - \alpha_1)\right).$$

   В таком случае амплитуда колебания не зависит от времени. Амплитуду результирующего колебания можно найти по формуле:

$$A_\Sigma = 2A\left|\cos\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right)\right|.$$

2. Рассмотрим случай, когда $A_1 = A_2 = A$, но частоты отличаются на небольшое $\Delta\omega \ll \omega$. Для упрощения примем, что $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Получаем:

$$x_\Sigma = x_1 + x_2 = 2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos\left(\omega t + \frac{\Delta\omega}{2}t\right).$$

   Пренебрегая $\Delta\omega$ для второго сомножителя, получаем:

$$x_\Sigma = 2A\left|\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}\cos\left(\omega t + \theta\right)\right)\right|.$$

   Таким образом, при сложении колебаний близких частот, возникает периодическое изменение амплитуды и скачкообразное изменение фазы результирующего колебания. Данное явление называется *биением*.

5.6 Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний равных и кратных частот

Рассмотрим траекторию точки, совершающей колебания одновременно по двум взаимно перпендикулярным направлениям:

$$\begin{cases} x = A_x\cos(\omega_x t + \alpha_x) \\ y = A_y\sin(\omega_y t + \alpha_y) \end{cases}$$

Обозначим $\alpha_y = \alpha_x + \delta$. Получим уравнение траектории:

$$\frac{x}{A_x} = \cos(\omega t + \alpha_x)$$

$$\frac{y}{A_y} = \sin(\omega t + \alpha_x + \delta) = \sin(\omega t + \alpha_x)\cos\delta + \cos(\omega t + \alpha_x)\sin\delta$$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{x}{A_x}\right)^2}\cos\delta + \frac{x}{A_x}\sin\delta$$

$$\left(\frac{y}{A_y} - \frac{x}{A)x}\right)^2 = \left(1 - \left(\frac{x}{A_x}\right)^2\right)\cos^2\delta$$

$$\left(\frac{y}{A_y}\right)^2 - 2\frac{x}{A_x}\frac{y}{A_y}\sin\delta + \left(\frac{x}{A_x}\right)^2 = \cos^2\delta$$

Это уравнение второго порядка на плоскости.

Для $\delta = 0$ (фазы сдвинуты на $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$) получаем эллипс; для $\delta = \pm\frac{\pi}{2}$ (фазы сдвинуты на $\Delta\varphi = 0$ или π) получаем отрезок прямой.

Траектория точки, совершающей одновременно два взаимно перпендикулярных колебания, при рациональном отношении частот колебаний называется фигурой Лиссажу. Условие рационального частот отношения означает, что отношение частот можно записать в виде рационального числа. В этом случае траектория является замкнутой. Если отношение частот не является рациональным числом, то траектория – незамкнутая линия.

5.7 Затухающие колебания

Рассмотрим движение поршня в вязкой среде под действием квазиупругой силы вблизи положения равновесия. Считаем, что сила сопротивления пропорциональная скорости тела:

$$\vec{F}_s = -r\vec{V}$$

, где r – коэффициент сопротивления. Тогда уравнение движения поршня можно записать в виде

$$ma = -kx - rV$$

или

$$\ddot{x} + 2\beta x + \omega_0^2 x = 0 \qquad (5.7)$$

где $\beta = \frac{r}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. Уравнение 5.7 называется *уравнением свободных затухающих колебаний*.

Обозначим $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$. В таком случае решение уравнение примет вид:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi) \,. \qquad (5.8)$$

Уравнение (5.8) описывает *свободные колебания* циклической частоты ω, затухающие с течением времени.

Циклическая частота затухающих колебаний:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Период:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Необходимым условием колебательного движения является неравенство $\beta < \omega_0$. Величина $A = A_0 e^{-\beta t}$ является *амплитудой затухающих колебаний*. Амплитуда убывает – говорят, что колебания *затухают*.

Временем *релаксации* называют время τ, за которое амплитуда убывает в e раз

$$\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+\tau)}} = e \implies \tau = \frac{1}{\beta}.$$

Определение 5.7 (Декремент затухания). *Декрементом затухания* называют отношение амплитуд спустя период

$$\chi = \frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}. \qquad (5.9)$$

Также существует *логарифмический декремент затухания* $\delta = \ln\chi = \beta T$.

Число полных колебаний, совершенных за период релаксации равно:

$$N_\varepsilon = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\beta T} = \frac{1}{\delta}$$

Определение 5.8 (Добротность осциллятора). *Добротностью осциллятор* называют величину

$$Q = \pi N_\varepsilon = \frac{\pi}{\delta}.$$

Добротность для свободных колебаний характеризует *скорость убывания энергии при малых затуханиях*

$$\frac{W}{W_1 - W_2} = \frac{Q}{2\pi}.$$

Фазовый портрет затухающих колебаний

Если для свободных незатухающий колебаний фазовая диаграмма представляла из себя *эллипс*, то для *затухающих* колебаний это *спираль*.

5.8 Вынужденные колебания

Рассмотрим движение поршня в вязкой среде вблизи положения равновесия под действием квазиупругой силы и некоторой периодической внешней силы

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t + \alpha).$$

Второй закон Ньютона запишем в виде:

$$\ddot{x} = 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\Omega t + \alpha) \tag{5.10}$$

где $2\beta = \frac{r}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $f_0 = \frac{F_0}{m}$.

Уравнение (5.10) называется *уравнением вынужденных колебаний*. Его решением будет сумма решений однородного и частного решения неоднородного уравнений.

Однородное уравнение

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

является уравнением свободных затухающий колебаний.

Частное решение неоднородного уравнения

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\Omega t + \alpha)$$

(здесь должно быть решение)

Замечание. Вынужденные колебания происходят с частотой вынуждающей силы

Амплитуда вынужденных колебаний:

$$A_B = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2) + 4\beta^2\Omega^2}} \tag{5.11}$$

(здесь решение на диаграмме)

Следствие 5.0.1. Под действием периодической силы тело совершает два вида колебаний: свободные затухающие с собственной частотой ω, и вынужденные с частотой вынуждающей силы Ω. Затухающие колебания с течением времени прекратятся и останутся только вынужденные колебания – их называют *установившимися*.

5.9 Резонанс

Определение 5.9. *Резонансом* называется явление резкого возрастания амплитуды колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к собственной резонансной частоте системы.

Выясним резонансную частоту. Для этого найдем такую частоту вынуждающей силы, при которой амплитуда вынужденных колебаний будет иметь максимальное значение

$$\frac{\partial A_B}{\partial \Omega} = 0. \tag{5.12}$$

Уравнение (5.12) имеет два решения: при $\Omega = 0$ (постоянная сила, колебания отсутствуют) и при $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$.

Второе решение является *резонансной частотой системы*.

Условие возникновения резонанса

$$\beta < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}.$$

При малых $\beta \ll \omega_0$ резонансная частота системы практически совпадает с собственной частотой системы.

6 Термодинамика

Определение 6.1 (Термодинамика)**.** *Термодинамикой* называется раздел физики, изучающий методы описания физических систем, состоящих из большого числа частиц.

Определение 6.2 (Макросистема)**.** *Макросистемой* называется система частиц, имеющая массу, сравнимую с массой окружающих частиц.

Определение 6.3 (Микрочастица)**.** *Микрочастицей* называется частица, масса которой сравнима с массой атома.

Так как для описания систем с большим количеством частиц требуется большое количество уравнений, для описания макросистем используют *статистический метод.*

Определение 6.4 (Статистический метод)**.** *Статистическим методом* называют метод описания систем на основе применения законов теории вероятности.

Определение 6.5 (Термодинамическая система)**.** *Термодинамическая система* – система, описываемая с точки зрения *термодинамики.*

Определение 6.6 (Равновесное состояние)**.** *Равновесным состоянием (термодинамическим равновесием)* называют такое состояние, при котором отсутствую *любые потоки*, а макроскопические параметры не изменяются со временем.

Определение 6.7 (Теплопередача)**.** *Теплопередачей* называется передача энергии от одного тела к другому без переноса вещества и совершения механической работы.

6.1 Нулевое начало термодинамики

Закон (Нулевое начало термодинамики)**.** Изолированная термодинамическая система, представленная себе самой, стремится к состояния термодинамического равновесия и после его достижения не может самопроизвольно из него выйти.

Такой процесс называют *релаксацией*, а время, в течении которого происходит релаксация – *временем релаксации.*

6.2 Температура

Определение 6.8 (Температура)**.** *Температурой* называется величина, характеризующая состояние термодинамической системы и зависящая от параметров состояния (например, давления и объема). Она является однозначной функцией внутренней энергии системы. В СИ термодинамическая температура измеряется в Кельвинах (K).

6.2.1 Свойства температуры

1. Если между телами, находящимися в тепловом контакте, отсутствует теплопередача, то тела имеют одинаковую температуру и находятся в термодинамическом равновесии.
2. Если две равновесные термодинамические системы находятся в тепловом контакте и имеют одинаковую температуру, то вся совокупность находится в равновесии при той же температуре.
3. Теплопередача происходит от более нагретого тела к менее нагретому телу. Процесс идет до тех пор, пока не наступит *термодинамическое равновесие.*

6.3 Первое начало термодинамики

Определение 6.9 (Адиобатическая система)**.** *Адиобатической системой* называется система, изменение состояния которой происходит только за счет механический перемещений частей системы или окружающих тел и не может происходить путем теплообмена с окружающими телами.

При совершении механической работы над адиобатической системой меняется внутренняя энергия системы, о чем свидетельствует изменение температуры:

$$A_{\text{внеш}} = U_2 - U_1 \tag{6.1}$$

Если система не является адиобатической, то изменение внутренней энергии может быть осуществлено путем совершения работы и теплопередачей некоторого количества теплоты Q:

$$\Delta U = A_{\text{внеш}} + Q \tag{6.2}$$

Работа системы над внешними телами $A = -A_{\text{внеш}}$. Подставляя в (6.2), получаем:

$$Q = \Delta U + A \tag{6.3}$$

Данное утверждение и называется *первым законом термодинамики.*

Запись для малых количеств:

$$\partial Q = dU + \partial A$$

6.4 Работа газа

Работа газа *против* внешних сил записывается как:

$$\partial A = F \cos\alpha dr,$$

с учетом выражения $F = pS$ и изменения объема $dV = S\cos\alpha dr$:

$$\partial A = pdV \tag{6.4}$$

Замечание. Именно первый закон термодинамики запрещает создание вечных двигателей первого рода – бесконечно совершающих работы без подвода внешней энергии. Если энергия не подводится ($Q = 0$), то работа совершается за счет внутренней энергии системы, а значит, $A = -\Delta U$. В конце концов энергия системы исчерпается.

7 Основы молекулярно-кинетической теории

7.1 Уравнение Менделеева-Клапейрона

Для большинства газов верно следующее уравнение:

$$pV = \nu RT, \tag{7.1}$$

называемое *уравнение Менделеева-Клапейрона*, где p – давление, V – объем, занимаемый газом, ν – количество вещества, $R = 831$Дж/моль · К – *универсальная газовая постоянная*, T – температура; все единицы в СИ.

Определение 7.1 (Моль вещества). *Молью вещества* называется количество атомов или молекул, равное числу Авогадро:

$$N_A = 6.02 \cdot 10^{23}\text{моль}^{-1}.$$

Число Авогадро обозначает количество атомов в 12 граммах ^{12}C.
Количество вещества равно отношению массы к молярной массе:

$$\nu = \frac{m}{\mu}$$

Определение 7.2 (Идеальный газ). *Газ* называется *идеальным*, если его параметры удовлетворяют уравнению Менделеева-Клапейрона.

7.2 Давление идеального газа. Основное уравнение МКТ

Рассмотрим механическую модель газа, находящегося в термодинамическом равновесии со стенками сосуда. Молекулы упруго сталкиваются со стенками сосуда, в котором находится газ. Столкновениями между молекулами в рамках идеальной модели пренебрегаем. Молекулы заменим на материальные точки.

Пусть $n = \frac{N}{V}$ – концентрация молекул газа, T – температура газа, u – средняя квадратичная скорость молекул. Выберем такую ось координат, что стенка сосуда лежит в плоскости XY, а ось Z направлена перпендикулярно внутрь стенке сосуда.

Рассмотрим удары молекул о стенки. Так как удар упругий, импульс меняется только по направлению, но не по модулю. За некоторый период времени Δt до стенки долетят только те молекулы, которые находятся на расстоянии не более, чем:

$$L = u\Delta t.$$

Далее определим, сколько молекул может столкнуться со стенкой в некотором объеме, ограниченным цилиндром с площадью основания S и высотой L. Используя обозначения, введенные ранее:

$$N = nV = nu\Delta tS.$$

Молекулы в трехмерном пространстве имеют 6 степеней свободы, а значит, в этом объеме до стенки долетят лишь $\frac{1}{6}$ всего количества молекул:

$$N_1 = \frac{N}{6} = \frac{1}{6}u\Delta tS.$$

Давление на стенку обуславливается силой, с которой молекулы ударяются. Суммарная сила определяется через изменение импульса частиц:

$$\Delta P_z = P_{2z} - P_{1z} = F\Delta t.$$

Распишем:

$$N_1 m_0 u - (-N_1 m_0 u) = F\Delta t$$
$$2N_1 m_0 u = F\Delta t$$
$$\frac{1}{3} n m_0 u^2 = \frac{F}{S}$$

Правая часть уравнения представляет из себя давление газа на стенку:

$$p = \frac{1}{3} n m_0 u^2. \tag{7.2}$$

Если подставить $W_{\text{кин}}^{\text{пост}} = \frac{1}{2} m_0 u^2$ – кинетическая энергия поступательного движения материальной точки, то получаем:

$$p = \frac{2}{3} n W^{\text{пост}_{\text{кин}}}. \tag{7.3}$$

Уравнение (7.3) называется *основным уравнением МКТ*.

7.3 Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы

Определение 7.3 (Количество степеней свободы)**.** *Количеством степеней свободы* i тела называется *минимальное* количество координат, которые необходимо задать для однозначного определения положения тела в пространстве.

- Для материальной точки $i = 3$.
- Для двух материальных точек $i = 5$.
- Максимальное количество степеней свободы в трехмерном пространстве $i = 6$.

Каждой модели выше сопоставляет соответствующее строение частица газа. Так, для атомарного водорода $i = 3$, для молекулярного водорода $i = 5$, а для метана $i = 6$.

Закон (Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы)**.** *Закон гласит*, что средняя кинетическая энергия, приходящаяся на одну степень свободы при тепловом движении равна

$$W_1 = \frac{1}{2} kT, \tag{7.4}$$

где $k = \frac{R}{N_A} \approx 1.38 \cdot 10^{-23}$ – постоянная Больцмана (Дж/К).

Соответственно, полная кинетическая энергия молекулы с количеством степеней свободы равному i

$$W_k = \frac{i}{2} kT. \tag{7.5}$$

Ранее мы приняли, что молекула идеальная газа – материальная точка. Тогда энергия одной частицы:

$$W_{\text{кин}}^{\text{пост}} = \frac{3}{2} kT.$$

Подставляя в основное уравнение МКТ:

$$p = \frac{2}{3} n W_{\text{кин}}^{\text{пост}} = nkT.$$

Т.к. $\nu = \frac{N}{V}$, полное число молекул $N = \nu N_A$, постоянная Больцмана $k = \frac{R}{N_A}$, то получаем уравнение

$$p = \frac{\nu N_A R T}{V N_A} = \frac{\nu R T}{V}$$

или

$$pv = \nu RT,$$

то есть уравнение Менделеева-Клапейрона. Именно поэтому говорят, что идеальный газ состоит из материальных точек, не взаимодействующих друг с другом на расстоянии.

Средний квадрат скорости можно определить как:

$$W_{\text{кин}}^{\text{пост}} = \frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}m_0u^2 \qquad u^2 = \frac{3kT}{m_0}.$$

Определение 7.4 (Средняя квадратичная скорость). *Средней квадратичной скоростью* называется величина:

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{u^2} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.$$

Так как у идеального газа отсутствует потенциальная энергия взаимодействия частиц, получаем, что внутренняя энергия газа равна суммарной кинетической энергии всех молекул:

$$U = \sum_{k=1}^{N} W_k = NW_k = \nu N_A \frac{i}{2}kt = \frac{i}{2}\nu RT$$

$$U = \frac{i}{2}\nu RT = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}RT$$

7.4 Закон Дальтона

Определение 7.5 (Парциальное давление). *Парциальным давлением* называют давление газа внутри смеси, которое он имел бы в отсутствии других газов при тех же объеме и температуре.

Закон (Закон Дальтона). Давление газовой смеси равно сумме парциальных давлений газов в смеси

$$p = \sum_{i=1}^{n} p_{\text{парц},i}.$$

8 Теплоемкость газа

Определение 8.1 (Теплоемкость). *Теплоемкостью* тела называется коэффициент пропорциональности между изменением температуры и количеством подведенной теплоты

$$C = \frac{Q}{\Delta T}.$$

Определение 8.2 (Удельная теплоемкость). *Удельной теплоемкостью* вещества называется теплоемкость единицы массы вещества

$$c_m = \frac{Q}{m\Delta T}.$$

Определение 8.3 (Молярная теплоемкость). *Молярной теплоемкостью* вещества называется теплоемкость единицы количества вещества

$$c_\nu = \frac{Q}{\nu\Delta T}.$$

Так, передача тепла телу с массой m теплоты Q описывается уравнением:

$$Q = mc_m(T_{\text{кр}} - T_0).$$

Замечание. Здесь и далее считаем, что $Q > 0$ если тело *получает тепло*; и $Q < 0$, если тело *отдает* тепло.

Закон (Соотношение Майера). *Соотношение Майера* связывает теплоемкость идеального газа при постоянном объеме и при постоянном давлении:

$$c_{p,\mu} = c_{v,\mu} + R,$$

где $c_{p,\mu}$ – молярная теплоемкость при постоянном давлении, $c_{v,\mu}$ – молярная теплоемкость при постоянном объеме, R – универсальная газовая постоянная.

8.1 Изопроцессы

Определение 8.4 (Изопроцесс). *Изопроцессом* называется термодинамический процесс над газом, при котором один из параметров состояния газа остается постоянным.

Изопроцессы бывают следующих видов:

1. Изохорический $V = const$.

2. Изобарный $p = const$.

3. Изотермический $T = const$.

4. Адиабатический $\partial Q = 0$.

8.1.1 Адиабатический процесс

Адиабатический процесс – процесс без теплообмена с окружающей средой, то есть $Q = 0$.

Найдем теплоемкость идеального газа при адиабатическом процессе. Первое начало термодинамики:

$$0 + \Delta U + A.$$

Для малых величин:

$$dU + pdV = 0.$$

Уравнение Менделеева-Клапейрона:

$$\begin{aligned} pV &= \nu RT \\ d(pV) &= d(\nu RT) \\ Vdp + pdV &= \nu RdT \end{aligned}$$

,

откуда

$$dT = \frac{Vdp + pdV}{\nu R}.$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \nu c_\nu dT + pDV &= 0 \\ \nu c_\nu \frac{Vdp + pdV}{\nu R} + pdV &= 0 \\ c_\nu Vdp + (c_\nu + R)pdV &= 0 \end{aligned}$$

.

Учитывая соотношение Майера $c_p = c_\nu + R$:

$$c_\nu Vdp + c_p pdV = 0.$$

Разделим на pV:

$$\begin{aligned} c_\nu \frac{dp}{p} + c_p \frac{dV}{V} &= 0 \\ d(\ln p) + d\left(\ln V^{\frac{c_p}{c_\nu}}\right) &= 0 \\ d\left(\ln \left(pV^{\frac{c_p}{c_\nu}}\right)\right) &= 0. \end{aligned}$$

Получаем *уравнение Пуассона*

$$pV^\gamma = const, \tag{8.1}$$

где $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$ – показатель адиабаты (коэффициент Пуассона). Для идеального газа $\gamma = \frac{i+2}{i}$.

8.2 Политропический процесс

Определение 8.5 (Политропичесий процесс). *Политропический процесс* – термодинамический процесс, протекающий при $C = const$.

Выведем уравнение политропического процесса аналогично адиабатному:

$$\partial Q = dU + \partial A.$$

Распишем правую и левую часть:

$$\begin{aligned} \nu CdT &= \nu c_\nu dT + pdV \\ dT &= \frac{Vdp + pdV}{\nu R} \\ \nu(C - C_v)\frac{Vdp + pdV}{\nu R} &= pdV \\ (c - c_V)Vdp + (c - c_V - R)pdV &= 0 \end{aligned}$$

Учитывая соотношение Майера $c_p = c_V + R$:

$$(c - c_V)Vdp + (c - c_P)pdV = 0.$$

Разделим на pV:

$$\begin{aligned}(c - c_V)\frac{dp}{p} + (c - c_p)\frac{dV}{V} &= 0\\ (c - c_V)d(\ln p) + (c - c_p)d(\ln V) &= 0\\ d(\ln(p)) + d\left(\ln\left(V^{\frac{c-c_p}{c-c_V}}\right)\right) &= 0\\ d\left(\ln\left(pV^{\frac{c-c_p}{c-c_V}}\right)\right) &= 0.\end{aligned}$$

Получаем уравнение политропического процесса

$$pV^n = const, \tag{8.2}$$

где $n = \frac{c-c_p}{c-c_V}$ – показатель политропического процесса.

8.2.1 Частные случаи политропических процессов

1. Пусть $c \to c_v$. Тогда $n \to \infty$ и $p^{\frac{1}{n}}V = const$. Вычислив предел, получаем $V = const$, то есть это *изохорический процесс.*

2. Пусть $c = c_p$. Тогда $v = 0$ и $pV^0 = const$. Получаем $p = const$, то есть это *изобарный процесс.*

3. Пусть $c = 0$. Тогда $n = \frac{-c_p}{-c_v} = \gamma_1$ и $pV^{\gamma_1} = const$. Получаем *адиабатический процесс.*

4. Пусть $c \to \infty$, тогда $n = 1$, $pV = \nu RT$. Получаем $T = const$, то есть *изотермический процесс.*

8.3 Приближение Ван-дер-Ваальса

Реальный газ не ведет себя как идеальный. Приближением модели реального газа является следующее уравнение, предложенное Ван-дер-Ваальсом:

$$\left(p + \frac{a\nu^2}{V^2}\right)(V - b\nu) = \nu RT. \tag{8.3}$$

Перепишем (8.3) в следующем виде:

$$pV^3 - \nu(bp + RT)V^2 + a\nu^2 V - ab\nu^3 = 0 \tag{8.4}$$

Кубическое уравнение (8.4) при $T = const$ относительно заданного давления может иметь три корня V. Такая температура называется *критической.*

Для нахождения критических параметров решим уравнение (8.4).

$$\begin{aligned}p_{\text{кр}}(V - V_{\text{кр}})^3 &= 0\\ p_{\text{кр}}V^3 - 3p_{\text{кр}}V_{\text{кр}}V^2 + 3p_{\text{кр}}V_{\text{кр}}^2 V - p_{\text{кр}}V_{\text{кр}}^3 &= 0,\end{aligned}$$

откуда следует система уравнений:

$$\begin{cases} 3p_{\text{кр}}V_{\text{кр}} = \nu(bp_{\text{кр}} + RT_{\text{кр}}) \\ 3p_{\text{кр}}V_{\text{кр}}^2 = a\nu^2 \\ p_{\text{кр}}V_{\text{кр}}^3 = ab\nu^3 \end{cases}. \tag{8.5}$$

Решая систему уравнений (8.5), получаем:

$$V_{\text{кр}} = 3b\nu$$
$$p_{\text{кр}} = \frac{a}{27b^2}$$
$$T_{\text{кр}} = \frac{8a}{27Rb}$$

Введем следующие безразмерные величины:

$$\begin{cases} \overline{\overline{T}} = \frac{T}{T_{\text{кр}}} \\ \overline{\overline{p}} = \frac{p}{p_{\text{кр}}} \\ \overline{\overline{V}} = \frac{V}{V_{\text{кр}}} \end{cases}$$

Подставляя в уравнение Ван-дер-Ваальса (8.3), получаем:

$$\left(p + \frac{3}{\overline{V}^2}\right)(3\overline{V} - 1) = 8\overline{T} \tag{8.6}$$

Так как полученное уравнение (8.6) не зависит от параметров a и b, оно справедливо для *всех газов, описываемых уравнением Ван-дер-Ваальса.*

> **Замечание.** Уравнение Ван-дер-Ваальса является *приближением.* Оно достаточно точно описывает состояние некоторых газов в окрестности критических точек.

8.3.1 Внутренняя энергия газа Ван-дер-Ваальса

В случае идеального газа, его внутренняя энергия зависит только от температуры:

$$U = \frac{i}{2}RT.$$

Определим уравнение внутренней энергии для газа Ван-дер-Ваальса.

$$dU = -\left(p + \frac{a\nu^2}{V^2}\right) d(V - p\nu)$$
$$dU = -\left(pdV + \frac{a\nu^2}{V^2}dV\right)$$
$$dU = dU_{\text{ид}}\frac{a\nu^2}{V^2}dV.$$

откуда, проинтегрировав:

$$U = \nu c_V T - \frac{a\nu^2}{V^2}. \tag{8.7}$$

Получаем, что внутренняя энергия газа Ван-дер-Ваальса зависит не только от температуры, но и от объема. Это можно проиллюстрировать адиабатическим расширении в пустоту: идеальный газ будет сохранять температуру, а неидеальный – будет охлаждаться. Данное явление получило название *эффект Джоуля-Томсона.*

9 Второе начало термодинамики

Определение 9.1 (Тепловая машина). *Тепловой машиной* называется устройство для получения полезной механической работы за счет теплоты.

Для функционирования тепловой машины необходимы следующие составляющие:

- Нагреватель
- Рабочее тело
- Холодильник

Нагреватель подводит тепло к *рабочему телу*, *холодильник* забирает тепло от *рабочего тела*, приводя систему в исходное состояние для начало нового цикла. В качестве *нагревателя* может выступать *сгораемое топливо*, в качестве *рабочего тела* – газ, в качестве *холодильника* – окружающая среда.

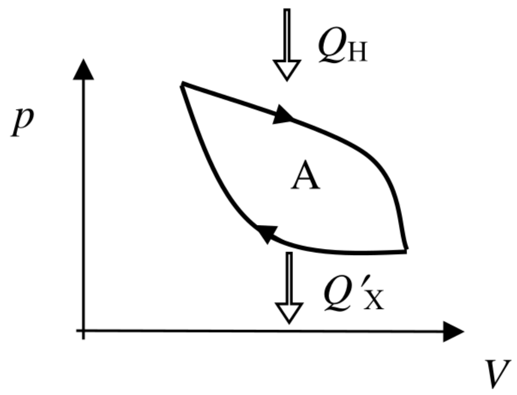

Рис. 1: Пример тепловой машины

На рисунке 1 изображен круговой процесс, в котором тепло забирается у более горячего тела и отдается менее нагретому. Такой цикл называется *прямым.* По *прямому* циклу работают *тепловые машины.* Если провести процесс в обратном направлении, то такой цикл называется *обратным.* По *обратному циклу* работают *холодильные машины*, которые забирают тепло у менее нагретых тел к более нагретым.

Рассмотрим работу, совершаемую в циклических процессах. Считаем, что холодильник отдает положительное количество теплоты $Q_x > 0$; $Q_n > 0$ – полученная теплота от нагревателя.

Из первого начала термодинамики следует:

$$Q_c = \Delta U_c + A_c.$$

$\Delta U_c = 0$, так как для цикла газ должен возвращаться в исходное состояние. Запишем отношение полезной работы к полученной теплоте от нагревателя:

$$\eta = \frac{A_c}{Q_n} = \frac{Q_n - Q_x}{Q_n} = 1 - \frac{Q_x}{Q_n}.$$

Величина η называется *КПД цикла.* Для нециклических процессов данное отношение имеет название *полезного выхода.*

Замечание. КПД любой тепловой машины $\nu < 1$.

Для холодильной машины «полезной» является энергия, отданная нагретому телу

$$\varepsilon = \frac{Q_x}{Q_n - Q_x}.$$

Величина ε называется *коэффициентом холодильной машины.*

Замечание. Для холодильной машины $\varepsilon > 0$.

Холодильные машины (они же *тепловые насосы*) работают по обратному циклу от тепловых машин. Можно заметить, что

$$\varepsilon = \frac{1}{\eta}.$$

9.1 Цикл Карно

Реальные процессы в тепловых машинах являются необратимыми, так как всегда есть потери. Максимальный КПД будет иметь та машина, у которой цикл состоит из равновесных состояний. В идеальной тепловой машине процесс протекает по *циклу Карно.*

Цикл Карно состоит из двух адиабат и двух изотерм.

КПД цикла Карно определяется как:

$$\eta = 1 - \frac{T_x}{T_n}. \tag{9.1}$$

9.2 Второе начало термодинамики

Первое начало термодинамики не определяет направление протекания термодинамического процесса, в то время как опыт показывает, что тепло самопроизвольно может передаваться только от более нагретого тела к менее нагретому. Направление протекания термодинамического процесса определяется *вторым началом термодинамики.*

Закон (Формулировка Клаузиуса второго начала термодинамики)**.** Теплота самопроизвольно, без изменения в окружающих телах, не может перейти от менее нагретого тела к более нагретому.

Закон (Формулировка Томсона второго начала термодинамики)**.** В природе невозможен круговой процесс, единственным результатом которого была бы механическая работа, совершаемая за счет отвода теплоты от теплового резервуара.

Замечание. Данные формулировки эквивалентны.

Теорема 9.1 (1-я теорема Карно)**.** КПД любой тепловой машины, работающей по обратимому циклу Карно, не зависит от природы рабочего тела и устройства машины, а является функцией только температур нагревателя и холодильника.

Теорема 9.2 (2-я теорема Карно)**.** КПД любой тепловой машины, работающей по необратимому циклу, меньше КПД тепловой машины с обратимым циклом Карно при условии равенства температур их нагревателей и холодильников:

$$\eta_{\text{необр}} < \eta_{\text{обр}}$$

9.3 Термодинамическая шкала температур

Изначально температура T была эмпирически введена путем газового термометра исходя из зависимости между давлением и температурой идеального газа. Но уравнение идеального газа справедливо лишь в ограниченном интервале давлений и температур.

Из выражения для КПД тепловой машины, работающей по циклу Карно, следует:

$$\frac{Q_x}{Q_n} = \frac{T_x}{T_n}.$$

Поэтому мы можем ввести новую шкалу температур, которая *не зависит от свойств рабочего тела*. Для этого должно выполнятся равенство:

$$\frac{Q_x}{Q_n} = \Phi(T_x, T_n) = \frac{T_x}{T_n}.$$

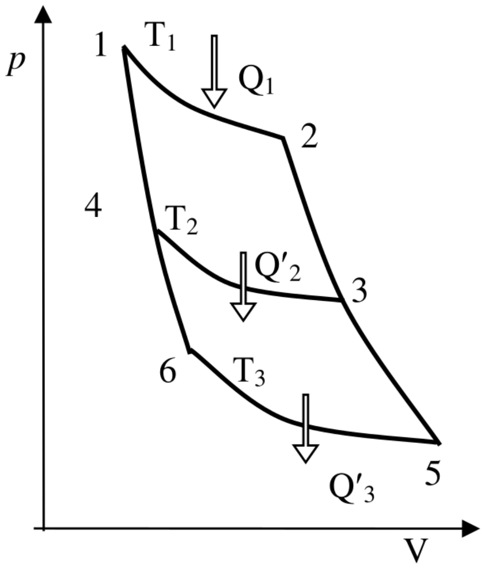

Рис. 2: Вывод термодинамической температуры

Рассмотрим цикл Карно 1-2-5-6 с температурами нагревателя T_1 и холодильника T_3, а также состоящий из подциклов 1-2-3-4 и 3-5-6-4 с промежуточной температурой T_2.

Для всех трех циклов можно записать систему:

$$\begin{cases} \frac{Q_2}{Q_1} = \Phi(T_2, T_1) \\ \frac{Q_3}{Q_2} = \Phi(T_3, T_2) \\ \frac{Q_3}{Q_1} = \Phi(T_3, T_1) \end{cases} . \tag{9.2}$$

Так как $\frac{Q_3}{Q_1} = \frac{Q_3 Q_2}{Q_2 Q_1}$, то должно выполняться:

$$\Phi(T_3, T_1) = \Phi(T_2, T_1)\Phi(T_3, T_2).$$

Но левая часть не зависит от T_2. Это возможно только в том случае, когда:

$$\begin{cases} \Phi(T_3, T_1) = \frac{\Theta(T_3)}{\Theta(T_1)} \\ \Phi(T_3, T_2) = \frac{\Theta(T_3)}{\Theta(T_2)} \\ \Phi(T_2, T_1) = \frac{\Theta(T_2)}{\Theta(T_1)} \end{cases} \tag{9.3}$$

где $\Theta(T)$ – искомая температура. Поэтому введенная ранее температура совпадает с абсолютной термодинамической температурой.

9.4 Неравенство Клаузиуса

Из второй теоремы Карно следует, что:

$$\frac{Q_x}{T_x} \geq \frac{Q_n}{T_n}.$$

В общем случае процесс можно разделить на некоторое множество участков, на которых подводится или отводится теплота:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{T_i} \leq 0.$$

Величина $\frac{Q}{T}$ называется *приведенным количеством теплоты*. В пределе для элементарных приведенных количеств теплоты:

$$\oint_{\text{цикл}} \frac{\partial Q}{T} \leq 0 \tag{9.4}$$

Соотношение (9.4) носит название *неравенства Клаузиуса* – суммарной количество приведенной теплоты в любом замкнутом цикле не может быть положительным.

Если приравнять правую и левую часть, мы получаем *обратимый процесс*:

$$\oint_{\text{цикл}} \frac{\partial Q}{T} = 0.$$

Рассмотрим произвольный обратимый циклический процесс, представленный на рисунке 3.

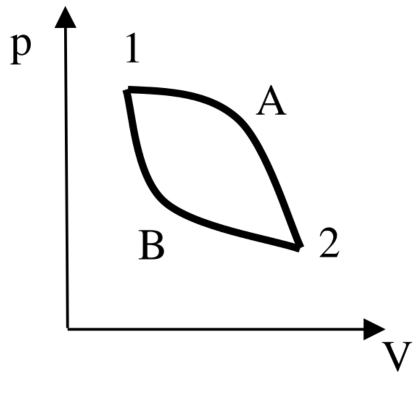

Рис. 3: Пример обратимого процесса

Он состоит из двух процессов: 1A2 и 1B1. Суммарное количество теплоты для такого процесса равно нулю:

$$\oint_{\text{цикл}} \frac{\partial Q}{T} = \oint_{1A2} \frac{\partial Q}{T} + \oint_{2B1} \frac{\partial Q}{T}.$$

С учетом того, что при смене направления процесса

$$\oint_{2B1} \frac{\partial Q}{T} = -\oint_{1B2} \frac{\partial Q}{T}$$

получаем

$$\oint_{1A2} \frac{\partial Q}{T} = -\oint_{1B2} \frac{\partial Q}{T},$$

то есть значение интеграла не зависит от процесса, а только от начального и конечного состояний. Поэтому элементарное количество приведенной теплоты для обратимого процесса является полным дифференциалом некоторой функции равновесного состояния системы

$$dS = \frac{\partial Q}{T},$$

изменение которой равно суммарном количеству приведенной теплоты в равновесном процессе

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\partial Q}{T}.$$

Данная величина называется *термодинамической энтропией* S и измеряется в Дж/К.

Определение 9.2 (Термодинамическая энтропия)**.** *Термодинамической энтропией* называется функция состояния термодинамической системы.

Теперь рассмотрим произвольный циклический процесс, представленный на рисунке 3, причем 1A2 – необратимый процесс, а 2B1 – обратимый. Должно выполнятся неравенство Клаузиуса

$$\oint_{\text{цикл}} \frac{\partial Q}{T} \leq 0.$$

Аналогично предыдущим рассуждениям:

$$\oint_{\text{цикл}} \frac{\partial Q}{T} = \oint_{1A2} \frac{\partial Q}{T} + \oint_{2B1} \frac{\partial Q}{dT} = \oint_{1A2} \frac{\partial Q}{T} - \oint_{1B2} = \oint \frac{\partial Q}{T} - (S_2 - S_1) \leq 0,$$

то есть изменение энтропии в обратим процессе больше, чем суммарное приведенное количеством теплоты в необратимом процессе:

$$S_2 - S_1 \geq \oint_{1A2} \frac{\partial Q}{T}.$$

Если система является адиабатически изолированной, то $\partial Q = 0$, поэтому $S_2 - S_1 \geq 0$.

Закон (Закон возрастания энтропии для адиабатически замкнутой системы)**.** В адиабатически изолированной системе энтропия не убывает.

9.5 Третье начало термодинамики

Энтропия определена с точностью до произвольного слагаемого:

$$S_2 = \int_1^2 \frac{\partial Q}{T} + S_1.$$

Об абсолютном количестве энтропии можно говорить только когда S_1 придано некоторое конкретное значение.

Закон (Теорема Нернста или Третье начало термодинамики)**.** При стремлении температуры любой равновесной системы к абсолютному нулю ее энтропия стремится к постоянной величине, которую можно принять равной нулю. Теплоемкости также стремятся к нулю.

$$\lim_{T\to 0} S = 0 \qquad \lim_{T\to 0} c_V = \lim_{T\to 0} c_p = 0.$$

Следствие 9.2.1. Невозможно достичь состояния с абсолютным нулем температуры 0K.

Достичь абсолютного нуля невозможно, так как при приближении к нулю теплоемкость тела тоже стремится к нулю.