Конспект лекций курса ФН-12
«Интегралы»

Жихарев Кирилл ИУ7-24Б

5 апреля 2024 г.

Содержание

1 Первообразная и неопределённый интеграл **3**
1.1 Свойства неопределённого интеграла 3
1.2 Геометрический смысл 6
1.3 Таблица основных интегралов 6
1.4 Основные методы интегрирования 7
1.4.1 Непосредственное интегрирование 7
1.4.2 Занесение под знак дифференциала 7
1.4.3 Замена переменной 7
1.4.4 Интегрирование по частям 7

2 Правильные и неправильные рациональные дроби **8**
2.1 Интегрирование простейших рациональных дробей 8
2.2 Неправильные рациональные дроби 9
2.2.1 Метод неопределенных коэффициентов 9
2.2.2 Метод конкретных значений 10

3 Определенный интеграл **11**
3.1 Свойста определённого интеграла 11

4 Определенный интеграл с переменным верхним пределом интегрирования **18**
4.1 Свойства определенного интеграла с переменным верхним пределом интегрирования 18
4.2 Формула Ньютона-Лейбница 19
4.3 Методы вычисления определенного интеграла 20
4.3.1 Интегрирование по частям 20
4.3.2 Метод подстановки 20
4.3.3 Интегрирование четных и нечетных функций 21
4.3.4 Интегрирование периодических функций 22

5 Приложение определенного интеграла **23**
5.1 Площадь плоской фигуры 23
5.1.1 В прямоугольной декартовой системе координат 23
5.1.2 Функция в параметрическом виде 24
5.1.3 В полярной системе координат 24
5.2 Объем тела 24
5.3 Длина дуги 24
5.4 Площадь поверхности вращения 24

6 Несобственные интегралы **28**
6.1 Несобственные интегралы первого рода 28
6.2 Признаки сходимости 28
6.2.1 По неравенству 28
6.2.2 Предельный признак 29

1 Первообразная и неопределённый интеграл

Определение 1.1 (Первообразная)**.** Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на интервале (a, b), если $F(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $\forall x \in (a, b)$ верно:

$$F'(x) = f(x)$$

1. Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на (a, b), то $F(x) + C$ – первообразная функции $f(x)$ на (a, b), где $\forall C - const$.
2. Если $F(x)$ дифференцируема на (a, b) и $\forall x \in (a, b) F'(x) = 0$, то $F(x) = const \forall x \in (a, b)$.
3. Любая непрерывная функция на (a, b) имеет множество первообразных на этом интервале, причём любые две отличаются на константу.

Определение 1.2 (Неопределённый интеграл)**.** Множество первообразных функции $f(x)$ на (a, b) называется *неопределённым интегралом*

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

- $\int$ – знак интеграла
- $f(x)$ – подынтегральная функция
- $f(x)dx$ – подынтегральное выражение
- x – переменная
- $F(x) + C$ – множество первообразных
- C – константа

Определение 1.3 (Интегрирование)**.** Интегрированием называется процесс нахождения неопределённого интеграла.

1.1 Свойства неопределённого интеграла

Свойство (1)**.** Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

Доказательство.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x)$$

□

Свойство (2). Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

Доказательство.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x)+C) = d(F(x)+C)'dx = F'(x)dx = f(x)dx$$

□

Свойство (3). Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и константы.

$$\int d(F(x)) = F(x) + C$$

Доказательство.

$$\int d(F(x)) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$$

□

Свойство (4). Константу можно выносить за знак неопределённого интеграла.

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx \quad \lambda \neq 0$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ – первообразная $f(x)$. Тогда:

$$\lambda \int f(x)dx = \lambda(F(x)+C), \forall c - const$$

Функция $\lambda F(x)$ – первообразная $\lambda f(x)$:

$$(\lambda F(x))' = \lambda F'(x) = \lambda f(x)$$

Рассмотрим левую часть:

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda F(x) + C_1, \quad \forall C_1 - -const$$

Т.к константы C_1 и C – произвольные, $\lambda \neq 0$, то их всегда можно выбрать так, чтобы было верно равенство $C_1 = \lambda C$. Тогда множества $\lambda(F(x)+C)$ и $\lambda F(x) + C_1$ совпадают. □

Свойство (5). Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют первообразные $F_1(x)$ и $F_2(x)$ соответственно, то функция $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$, где $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ имеет первообразную на (ab) , причём $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$:

$$\int (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))\, dx = \lambda_1 \int f_1(x)dx + \lambda_2 \int f_2(x)dx$$

Доказательство. $F_1(x)$ – первообразная $f_1(x)$
$F_2(x)$ – первообразная $f_2(x)$

$$\begin{aligned}\lambda_1 \int f_1(x)dx + \lambda_2 \int f_2(x) &= \lambda_1 (F_1(x) + C_1) + \lambda_2 (F_2(x) + C_2) \\ &= \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 + C_2 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}F'(x) = (\lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x)) &= \lambda_1 F_1'(x) + \lambda_2 F_2'(x) \\ &= \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)\end{aligned} \tag{2}$$

$$\int (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))\, dx = \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + C \tag{3}$$

Т.к константы C, C_1 и C_2 – произвольные, $\lambda \neq 0$, то их всегда можно выбрать так, чтобы было верно равенство:

$$C = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$$

Тогда множества $\lambda_1 F_1(x)+\lambda_2 F_2(x)+\lambda_1 C_1+\lambda_2 C_2$ и $\lambda_1 F_1(x)+\lambda_2 F_2(x)+C$ совпадают. □

Свойство (Инвариантность формы интегрирования). Если $\int f(x)dx +$ $F(x) + C$, где $C - const$, то $\int f(u)du = F(u) + C$, где $C - const$, где $u = \varphi(x)$ – непрерывно-дифференцируемая функция.

Доказательство. Пусть x – переменная, $f(x)$ – непрерывная функция, $F(x)$ – первообразная $f(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad C - const$$

Рассмотрим сложную функцию $F(u) = F(\varphi(x))$. Найдём дифференциал $F(u)$:

$$d(F(u)) = F'(u)u'(x)dx = \begin{vmatrix} u = \varphi(x) \\ du = \varphi'(x)dx \end{vmatrix} = F'(u)du = f(u)du$$

Неопределённый интеграл:

$$\int f(u)du = \int d(F(u)) = F(u) + C, \quad F(u) + C$$

$\square$

1.2 Геометрический смысл

Неопределённый интеграл геометрически представляет собой семейство интегральных кривых (граф. функций) вида:

$$y = F(x) + C, \quad \forall C = const$$

1.3 Таблица основных интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \forall C - const$
2. $\int dx = x + c$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int e^x dx = e^x + C$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
9. $\frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
10. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
11. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|$
12. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a-x}{a+x} \right|$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$
15. $\int shxdx = chx + C$
16. $\int chxdx = shx + C$
17. $\int \frac{dx}{ch^x} = \operatorname{th} x + C$
18. $\int \frac{dx}{sh^x} = -\operatorname{cth} x + C$
19. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln|\operatorname{tg} \frac{x}{2}| + C$
20. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)| + C$

1.4 Основные методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование.
2. Метод подстановки.
   (a) Занесение под знак дифференциала
   (b) Замена переменной.
   Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференциама на T, а множество X – множество значений этой функции, на котором определена $f(x)$. Тогда если существует первообразная функции $f(x)$ на множестве X, то на множестве T верно равенство:
   $$\int f(x)dx = \begin{vmatrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) \end{vmatrix} = \int f(\phi(t))\varphi'(t)dt$$
3. Интегрирование по частям.

1.4.1 Непосредственное интегрирование

Используя свойства и таблицу интегралов.

1.4.2 Занесение под знак дифференциала

1.4.3 Замена переменной

Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на T, а множество X – множество значений этой функции на котором определена $f(x)$. Тогда, если существует первообразная функции $f(x)$ на X, то на множестве T верно равенство:

$$\int f(x)dx = \begin{vmatrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) \end{vmatrix} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

1.4.4 Интегрирование по частям

Пусть функция $u = u(x)$, $v = v(x)$ непрерывно-дифференцируемы. Тогда справедлива формула:

$$\int udu = uv - \int vdu$$

Доказательство. Рассмотрим произведения двух функций: $u(x) \cdot v(x)$. Дифференциал

$$d(uv) = udv + vdu \quad udv = d(uv) - vdu$$

Интегрируем:

$$\int d(uv) = \int (d(uv) - vdu) \int ud \qquad = uv - \int vdu$$

□

2 Правильные и неправильные рациональные дроби

Определение 2.1 (Рациональная дробь). *Дробно-рациональной функцией* или *рациональной дробью* называется функция, равная частному от деления двух многочленов.

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

Определение 2.2 (Правильная рациональная дробь). Рациональная дробь называется *правильной*, если степень числителя меньше степени знаменателя, т.е. $m < n$.

Определение 2.3 (Неправильная рациональная дробь). Рациональная дробь называется *неправильной*, если степень числителя *не меньше* степени знаменателя, т.е. $m \geq n$.

2.1 Интегрирование простейших рациональных дробей

1.

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{dx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a}{x-a} = A\ln|x-a| + C \quad \forall C$$

2.

$$\begin{aligned}\int \frac{A}{(x-a)^k} &= A\int \frac{dx}{(x-a)^k} \\ &= A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k}d(x-a) \\ &= \frac{A(x-a)^{1-k}}{1-k} + C \quad \forall c\end{aligned}$$

3.

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = (*)$$

$$\begin{aligned}&x^2+px+q = x^2 + 2\cdot\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = \\ &= \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)^2 = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + b^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(*) &= \int \frac{Mx+N}{(x+\frac{p}{2})+b^2}dx = \begin{vmatrix} x+\frac{p}{2}=t \\ x = t-\frac{p}{2} \\ dx = dt \end{vmatrix} \\
&= \int \frac{M(t-\frac{p}{2})+N}{t^2+b^2}dt = \\
&= M\int \frac{t}{t^2+b^2}dt + \left(N-\frac{p}{2M}\right)\int \frac{dt}{t^2+b^2} = \\
&= \frac{M}{2}\int \frac{d\left(t^2+b^2\right)}{t^2+b^2} + \left(N-\frac{p}{2}M\right)\frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{t}{b} = \\
&= \frac{M}{2}\ln|t^2b^2| + \frac{\left(N-\frac{p}{2}M\right)}{b}\operatorname{arctg}\frac{t}{b} + C = \\
&= \frac{M}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{\left(N-\frac{p}{2}M\right)}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{ps^2}{4}}} + C
\end{aligned}$$

2.2 Неправильные рациональные дроби

Любая неправильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$$

Где $L(x)$ – многочлен, частное от деления $P(x)$ на $Q(x)$; $r(x)$ – остаток от деления $P(x)$ на $Q(x)$; $\frac{r(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь.

Интегрируя выражение выше мы получаем:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int L(x)dx + \int \frac{r(x)}{Q(x)}dx$$

Вывод: интегрирование непрерывной рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби.

Теорема 2.1 (О разложении правильной рациональной дроби на простейшие). Любая правильная рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой может быть представлен в виде:

$$Q(x) = (x-x_1)^k\cdot(x-x_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_n)^{k_n}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_mx+q_m)^{s_m}$$

может быть представлена и притом единственном образом в виде суммы многочлена и простейших дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = G(x) + \sum_{i=1}^{n}\frac{P_i(x)}{Q_i(x)}$$

2.2.1 Метод неопределенных коэффициентов

Равенство в теореме о разложении правильной рациональной дроби на простые представляет собой тождество. Поэтому, приводя дроби к общему знаменателю, получим тождество числителей слева и справа. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x получим СЛАУ для определения неизвестных коэффициентов.

2.2.2 Метод конкретных значений

После получения тождества числителей, подставляем конкретные значения переменной x, т.к. оно верно $\forall x$. Обычно вместо x подставляют действительные корни знаменателя.

3 Определенный интеграл

Пусть функция $y = f(x)$ определена на $[a, b]$. Множество точек $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_n = b$ называется *разбиением* $[a, b]$, при этом $[x_{i-1}, x_i]$ – *отрезки разбиения*, $\Delta x_i = x_i - \Delta x_{x-1}$ – длиной i-ого отрезка. МАксимальную длину отрезка назовем *диаметром разбиения* и обозначим λ.

Произведён произвольное разбиение $[a, b]$. В каждом из отрезков разбиений $[x_{i-1}, x_i]$ выберем точку ξ_i. Тогда *интегральной суммой* для функции $y = f(x)$ на $[a, b]$ называется выражение вида:

$$\int_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{3.1}$$

Определение 3.1 (Определенный интеграл). *Определённым интегралом* от функции $y = f(x)$ на $[a, b]$ называется конечный предел интегральной суммы (3.1), когда число отрезков растет, а их длина стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{3.2}$$

Замечание. Предел (3.2) не зависит от способа разбиения $[a, b]$ и выбора точек ξ_i.

Определение 3.2 (Криволинейная трапеция). *Криволинейной трапецией* называется фигура, ограниченная графиком функции $f(x)$, отрезком $[a, b]$ на Ox, прямыми $x = a$ и $x = b$, параллельными Oy.

Геометрический смысл

Определеный интеграл – площадь под графиком кривой:

$$S_{\text{кр.тр}} = \int_a^b f(x)dx$$

Функция $y = f(x)$ *интегрируема* на $[a, b]$, если существует конечный предел интегрируемой суммы (1) на $[a, b]$.

Теорема 3.1 (Существование определенного интеграла). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то она на этом отрезке интегрируема.

3.1 Свойста определённого интеграла

Теорема 3.2. Если функция $y = f(x)$ интегриуема на $[a, b]$, то:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \\ &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= -\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_{i-1} - x_i) \\ &= -\int_b^a f(x)dx\end{aligned}$$

□

Теорема 3.3 (Аддитивность определенного интеграла)**.** Если функция $y = f(x)$ инртегрируема на каждом из отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$, то она интегрируема на $[a, b]$ и верно равентство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Доказательство. Разобьем отрезок $[a, b]$ так, что одна из точек разбиения совпадает с точкой c:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = c < x_{m+1} < \ldots < x_n = b$$

Данное разбиение определяет еще два разбиения:

$$\begin{aligned}a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} < x_m = c \quad \lambda_1 = \max \Delta x_i \\ c = x_m < x_{m+1} < \ldots < x_{n-1} < x_n = b \quad \lambda_2 = \max \Delta_i\end{aligned}$$

Т.к. функция интегрируема на каждом из этих отрезков:

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{\lambda_1\to 0}\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\Delta x_i$$
$$\int_c^b f(x)dx = \lim_{\lambda_2\to 0}\sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Пусть:

$$\lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}, \quad \lambda \to 0$$

Суммируем интегральные суммы:

$$\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Вычислим предел:

$$\lim_{\lambda\to 0}\left(\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i\right) = \lim_{\lambda\to 0} f(\xi_i)\Delta_i$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i = \lim_{\lambda\to 0} f(\xi_i)\Delta_i$$

$$\lim_{\lambda_1\to 0}\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{\lambda_2\to 0}\sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i = \lim_{\lambda\to 0} f(\xi_i)\Delta_i$$

Из последнего равенства $\implies$ $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и верно равенство:

$$\boxed{\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx}$$

□

Теорема 3.4. Если $c = const$, то:

$$\int_a^b cdx = c(b-a)$$

Доказательство.

$$\int_a^b cdx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i = c\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = c(b-a)$$

□

Теорема 3.5. Если функция $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, то их линейная комбинация $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$, где $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ интегрируема на $[a, b]$ и верно равенство:

$$\int_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))\, dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x)dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x)dx$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\int_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))\, dx &= \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} (\lambda_1 f_1(\xi_i) + \lambda_2 f_2(\xi_i))\, \Delta x_i \\
&= \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} (\lambda_1 f_1(\xi_i)\Delta x_i + \lambda_2 f_2(\xi_i) \\
&= \lim_{\lambda\to 0} \left(\sum_{i=1}^{n} f_1(\xi)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} f_2(\xi)\Delta x_i \right) \\
&= \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f_1(\xi)\Delta x_i + \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f_2(\xi)\Delta x_i \\
&= \lambda_1 \lim_{\lambda\to 0} f_1(\xi_i)\Delta x_i + \lambda_2 \lim_{\lambda\to 0} f_2(\xi_i)\Delta x_i \\
&= \lambda_1 \int_a^b f_1(x)dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x)dx
\end{aligned}$$

□

Теорема 3.6 (О сохранении знака подынтегральной функции)**.** Если $f(x)$ интегрируема и неотрицательная на $[a, b]$, то:

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

Доказательство.

$$\begin{gathered}
\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \\
\Delta x_i > 0; \quad f(\xi_i) \geq 0, \text{по условию} \\
f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n} \\
\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0 \\
\lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i
\end{gathered}$$

□

Теорема 3.7 (Об интегрировании неравенства)**.** Пусть функция $f(x)$ и

$g(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $\forall x \in [a, b]$ $f(x) > g(x)$, то:

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

Доказательство. По условию $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b]$. Обозначим $h(x) = f(x) - g(x) \geq 0$. Тогда по теореме 3.6 $\implies \int_a^b h(x)dx \geq 0$. Получаем:

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx \geq 0$$

По теореме 3.5:

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \geq 0$$
$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

□

Теорема 3.8 (Об оценке модуля определённого интеграла)**.** Если функции $f(x)$ и $|f(x)|$ интегрируема на оценке $[a, b]$, то справедливо неравенство:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b f(x)dx$$

Доказательство. $\forall x \in [a, b]$ верно неравенство:

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

По теореме 3.5 и 3.7 $\implies$:

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Сворачиваем двойное неравенство:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \geq \int_a^b |f(x)|fx$$

□

Теорема 3.9 (О среднем значении для определённого интеграла)**.** Если

$f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то:

$$\exists c \in [a,b] : f(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Доказательство. Т.к. функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то по теореме Вейерштрасса она достигает своего наибольшего и наименьшего значения, т.е. $\exists m, M \in \mathbb{R} : \forall x \in [a,b] \quad m \le f(x) \le M$ По теореме 3.7:

$$\int_a^b mdx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b Mdx$$

По теореме 3.5:

$$m\int_a^b dx \le \int_a^b f(x)dx \le M\int_a^b dx$$

По теореме 3.4:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \tag{1}$$

Т.к. функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то по теореме Больцана-Коши, она принимает все свои значения между наибольшим и наименьшим значениями. Разделим (1) на $b-a$:

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

по теореме Больцано-Коши:

$$\exists c \in [a,b] : f(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

□

Теорема 3.10 (Об оценке определённого интеграла)**.** Пусть функция $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$ и $\forall x \in [a,b] : m \le f(x) \le M, \quad g(x) \ge 0$. Тогда:

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx$$

Доказательство. Т.к. $\forall x \in [a,b]$ верны неравенства:

$$\begin{aligned} m \le& f(x) \le M \quad m, M \in \mathbb{R} \\ &g(x) \ge 0 \\ mg(x) \le& f(x)g(x) \le Mg(x) \end{aligned}$$

По теореме 3.7:

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx$$

□

Следствие 3.10.1. $g(x) = 1$, $\forall x \in [a, b]$:

$$m\,(b-a) \leq \int_a^b f(x) \leq M(b-a)$$

4 Определенный интеграл с переменным верхним пределом интегрирования

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Рассмотрим $\int_a^b f(x)dx$. Закрепим нижний предел интегрирования a. Изменяем верхний предел интегрирования b. Чтобы подчеркнуть изменение предела интегрирования, заменим $b \to x$, $x \in [a, b] \implies [a, x] \subset [a, b]$:

$$\mathcal{I}(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Определение 4.1. Определенным интегралом с переменным верхнем пределом интегрирования от непрерывной функции $f(x)$ на $[a, b]$ называется интеграл вида:

$$\mathcal{I}(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Геометрический смысл

$\mathcal{I}(x)$ – переменная площадь криволинейной трапеции с основанием $[a - x] \subset [a, b]$

4.1 Свойства определенного интеграла с переменным верхним пределом интегрирования

Теорема 4.1 (Непрерывность). Если функция $f(x)$ на $[a, b]$ непрерывна, то $\mathcal{I}(x) \int_a^b f(t)dt$ – непрерывна на $[a, b$.

Доказательство. Рассмотрим $\mathcal{I}(x) = \int_a^b f(t)dt$. Найдем $\mathcal{I}(\S + \cdot\S) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt$. Тогда:

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{I}(x) &= \mathcal{I}(x + \Delta x) - I(x) \\ &= \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = (*)\end{aligned}$$

Т.к. функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b] \implies f(x)$ интегрируема на $[a, b] \implies$ применяем свойство аддитивности определенного интеграла:

$$\begin{aligned}(*) &= \int_a^x f(t)dt + \int_a^{x+\Delta x} f(t) - \int_a^x f(t)dt \\ &= \int)_x^{x+\Delta x} = (*)\end{aligned}$$

Согласно теореме **??**:

$$\begin{aligned}(*) &= f(c)(x + \Delta x - x) \\ &= f(c)\Delta x, \text{ где } c \in [x, x + \Delta x]\end{aligned}$$

Найдем предел:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta \mathcal{I}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) \Delta x = 0$$

По определению непрерывной функции:

$$\mathcal{I}(x) = \int_a^x f(t)dt$$

□

Замечание. Такого вопроса на экзамене нет, но при доказательстве следующей теоремы нужно доказать эту.

Теорема 4.2 (О производной). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то $\forall x \in [a, b]$ верно равенство:

$$(\mathcal{I}(x))' = \left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x)$$

Доказательство. По определению производной функции:

$$(\mathcal{I}(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \mathcal{I}(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c)$$

□

Следствие 4.2.1. Функция $I(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на $[a, b]$ по теореме **??**.

4.2 Формула Ньютона-Лейбница

Теорема 4.3. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$.

Доказательство. Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Тогда по следствию из теоремы 4.2. По свойству первообразной:

$$\mathcal{I}(\S) - F(x) = C, \quad C = const$$

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C, \text{ где } C = const \qquad (*)$$

Возьмем $x = a$:

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C$$
$$0 = F(a) + C$$
$$C = -F(a)$$

Подставим $C = -F(a)$ в $(*)$:

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

Возьмем $x = b$:

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)}$$

$\square$

4.3 Методы вычисления определенного интеграла

4.3.1 Интегрирование по частям

Теорема 4.4. Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывно дифференцируемы, тогда имеет место равенство:

$$\int_a^b udu = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

Доказательство. Рассмотрим произведение функций uv. Дифференциал:

$$d(uv) = vdu + udv$$
$$udv = d(uv) - vdu$$

Интегрируем:

$$\int_a^b udv = \int_a^b (d(uv) - vdu)$$
$$\int_a^b udv = \int_a^b d(uv) - \int_a^b vdu$$
$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

$\square$

4.3.2 Метод подстановки

Теорема 4.5. Пусть:

- $y = f(x)$ – непрерывна на $[a, b]$;
- функция $x = \varphi(t)$ – непрерывно-дифференцируема при $t \in [t_1, t_2]$.
- при $t \in [t_1, t_2]$ значения функции $\varphi(t)$ не выходят за пределы $[a, b]$.
- $\varphi(t_1) = a$, $\varphi(t_2) = b$.

Доказательство. Т.к. $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, а $x = \varphi(t)$ непрерывна на $[t_1, t_2]$, то сложная функция $y = f(\varphi(t))$ непрерывна на $[t_1, t_2]$ (по *теореме о непрерывной сложной функции*). Т.к. $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, а $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ непрерывна на $[t_1, t_2]$, то существует определенный и неопределенный интеграл от этих функций. Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на $[a, b]$. В силу инвариантности неопределенного интеграла $F(\varphi(t))$ – первообразная $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на $[t_1, t_2]$. Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt &= F(\varphi(t))\Big|_a^b \\ &= F(\varphi(t_2)) - F(\varphi(t_1)) = F(b) - F(a)\end{aligned}$$

□

Замечание. Необходимо не забыть пересмотреть пределы интегрирования.

4.3.3 Интегрирование четных и нечетных функций

Теорема 4.6. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на $[-a, a]$, где $a \in \mathbb{R}$. Тогда:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx & \text{– функция чётная} \\ 0 & \text{– –} \end{cases}$$

Доказательство. Разделим на два определенных интеграла:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)fx + \int_0^a f(x)dx = (*)$$

Рассмотрим первый:

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \left| \begin{matrix} x = -t \\ dx = -dt \\ t_1 = a; t_2 = 0 \end{matrix} \right|$$

$$\begin{aligned}
(*) &= \int_a^0 f(-t)d(-t) \\
&= \int_0^a f(-t)dt \\
&= \begin{cases} \int_0^a f(t)dt - \text{четная} \\ \int_0^a -f(t)dt - \text{нечетная} \end{cases}
\end{aligned}$$

□

4.3.4 Интегрирование периодических функций

Теорема 4.7. Пусть $f(x)$ непрерывная периодическая функция с периодом T. Тогда:

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx \forall a \in \mathbb{R}$$

Доказательство.

$$\int_a^{a+T} f(x)dx \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{T+a} f(x)dx = (*)$$

Распишем один из членов:

$$\begin{vmatrix} t = x - T \\ x = +T \\ dx = dt \\ t_1 = 0; t_2 = a \end{vmatrix} = \int_0^a f(t+T)dt = \int_0^a f(t)dt$$

Получаем:

$$\begin{aligned}
(*) &= \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx - \int_a^0 f(x)dx \\
\int_a^{a+T} &= \int_0^T f(x)dx
\end{aligned}$$

□

5 Приложение определенного интеграла

5.1 Площадь плоской фигуры

5.1.1 В прямоугольной декартовой системе координат

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $\forall x \in [a, b]$ верно $f(x) \geq 0$. Из геометричского смысла определенного интеграла следует, что:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Этапы вывода формулы:

1. Разбиваем $[a, b]$ точками:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

2. $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$ – отрезки разбиения.
3. $\forall i = \overline{1, n}$ поставим в соответствие $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.
4. Выберем $\lambda = max \Delta x_i$, $i = \overline{1, n}$. Составим интегральную сумму:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

5. Вычислим предел:

$$\lim_{\lambda \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx = S$$

Следствие 5.0.1. Если $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $f(x) < 0$ $\forall x \in [a, b]$, то:

$$S = -\int_a^b f(x)dx$$

Следствие 5.0.2. Пусть фигура ограничена графиком функции:

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x) \\ y_2 = f_2(x) \end{cases} \quad \text{непрерывна над } [a, b]$$

Тогда:

$$S = \int_a^b \left(f_1(x) - f_2(x)\right) dx$$

Следствие 5.0.3. Если фигура симметрична относительно хотя бы одной из координатных осей, то $S_{\text{фигуры}} = 2S_{\text{половины}}$

Следствие 5.0.4. Если функция $y = f(x)$ конечное число раз меняет свой знак на $[a, b]$, то определенный интеграл от этой функции на $[a, b]$ равен алгебраической сумме площадей соответствующих криволинейных трапеций.

5.1.2 Функция в параметрическом виде

Пусть функция задана параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [t_1, t_2]$$

$x(t)$ и $y(t)$ непрерывно-дифференцируемы при $t \in [t_1, t_2]$.
Тогда:

$$S = \int_a^b y(x)dx = \left| \begin{array}{c} y = y(t) \\ x = x(t) \\ dx = x'(t)dt \\ a = x(t_1), b = x(t_2) \end{array} \right| = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$$

Замечание. Изменение параметра $t \in [t_1, t_2]$ соответствует росту переменной x (обход параметра $t \in [t_1, t_2]$ происходит по часовой стрелке).

5.1.3 В полярной системе координат

Определение 5.1 (Криволинейный сектор)**.** *Криволинейный сектор* – фигура, ограниченная лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и графиком непрерывной кривой $r = r(\varphi)$, $\varphi = [\alpha, \beta]$.

Этапы вывода формулы:

1.

5.2 Объем тела

5.3 Длина дуги

5.4 Площадь поверхности вращения

Пусть $y = f(x)$ – непрерывно дифференцируема на $[a, b]$. Будем искать площадь поверхности, образованной вращением дуги $\breve{AB}$ графика функции $y = f(x)$ вокруг оси ox.

Этапы вывода формулы:

1. Разбиваем отрезок $[a, b]$ точками.

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

Получаем $[x_{i-1}, x_i]$ – отрезки разбиения; $\Delta x_i = \xi - x_{i-1}$.

Найдём значение функции в точке x_i:

$$y_i = f(\xi), \quad i = \overline{1, n} M_i(x_i, f(x_i)), \quad i = \overline{1, n}$$

Тем самым мы заменили дугу на большое количество хорд $AM_1, AM_2, \ldots, M_{n-1}B$.

2. Хорда при вращении опишет усеченный конус.

$$Q_{ix} = 2\pi R_i \Delta S_i,$$

где R_i – средний радиус:

$$R_i = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$$

По теореме Больцано Коши $y = f(x)$ принимает все свои значения между граничными $f(a)$ и $f(b)$:

$$\implies R_i = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} = f(\xi_i) \quad \exists \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

Далее рассмотрим ΔS_i:

$$\Delta S_i^2 = \Delta x_i^2 + \Delta y_i^2$$

$$\Delta S_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \Delta x_i \sqrt{1 + \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}}$$

По теореме Лагранжа:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad \exists c \in [a, b]$$

Применительно к нашей задаче:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i) \exists \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

Получаем:

$$\Delta S_i = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i$$

$$Q_i = 2\pi f(\xi_i) \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i$$

3. Суммируем:

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i = 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \sqrt{1 + (f(\xi_i))\ \sqrt{}} \Delta x_i$$

4. Вычислим предел:

$$Q_x = \lim_{\lambda\to 0} 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\sqrt{1+(f(\xi_i))\ \sqrt{}}\Delta x_i$$
$$= 2\pi\int_a^b f(\xi)\sqrt{1+(f'(x))^2\,dx}$$

Что на самом деле равно:

$$Q_x = 2\pi\int_a^b ydl$$

Аналогично для вращения вокруг оси oy:

$$Q_y = 2\pi\int_c^d x(y)\sqrt{1+(x'(y))^2}dy$$

Следствие 5.0.5. Параметрически заданная функция:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \text{– непрерывно дифференцируема на } [t_1, t_2]$$

Записываем:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \implies \begin{matrix} x(t_1) = a & y(t_1) = c \\ x(t_2) = b & y(t_2) = d \end{matrix}$$

Запишем формулу (??):

$$Q_{ox} = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y'_x)^2}dx$$
$$= 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{1+\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)}x'_t dt$$
$$= 2\pi\int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}}{x'_t}x'_t dt$$
$$= \boxed{2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(x'_t)\ \sqrt{+(y'_t)^2}}dt = Q_{ox}}$$

Аналогично:

$$2\pi\int_{t_1}^{t_2} x(t)\sqrt{(x'_t)\ \sqrt{+(y'_t)^2}}dt = Q_{oy}$$

Следствие 5.0.6. В полярной системе координат.

Пусть $r = r(\varphi)$ – непрерывно дифференцируема на $[\alpha, \beta]$. Запишем уравнения перехода к декартовой системе координат:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

Тогда:

$$Q_{or} = 2\varphi \int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)\sin\varphi \sqrt{\left(r'(\varphi)\right)^2 + r^2} d\varphi$$

6 Несобственные интегралы

6.1 Несобственные интегралы первого рода

Пусть функция $y = f(x)$ определена $[a, +\inf)$ и интегрируема на отрезке $[a, b]$.

Тогда определена на $[a, +\infty]$ функция:

$$\Phi(b) = \int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

как определенный интеграл с переменным верхним пределом интегрирования.

Определение 6.1 (Несобственный интеграл первого рода)**.** Предел функции $\Phi(b)$ при $b \to +\infty$ называется *несобственным интегралом от функции* $f(x)$ *по бесконечному промежутку* $[a, +\infty)$ ($[+\infty, a]$ или $[\infty, +\infty]$) или *несобственным интегралом первого рода* и обозначается:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \Phi(b) = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx \tag{2}$$

Если предел в правой части равенства (2) существует и конечен, то несобственный интеграл в левой части равенства *сходится*.

Если предел в правой части равенства (2) не существует или равен бесконечности, то несобственный интеграл в левой части равенства *не сходится*.

Геометрический смысл

Если $f(x) \geq 0, \quad \forall x \geq a$, то значение сходящегося несобственного интеграла от функции $f(x)$ по промежутку $[a, +\infty]$ соответствует площади бесконечно длинной криволинейной трапеции.

6.2 Признаки сходимости

6.2.1 По неравенству

Теорема 6.1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b] \in [a, +\infty)$, причём $\forall x \geq a : 0 \leq f(x) \leq g(x)$. Тогда:

1. если $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ – сходится, то и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ – сходится;
2. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ – расходится, то и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ – расходится.

Замечание. Расходимость $g(x)$ не гарантирует расходимость $f(x)$!

Доказательство. Докажем первое утверждение. По условию:

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx - \text{сходится}$$

По определению несобственного интеграла первого рода:

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_a^b g(x)dx = C \in \mathbb{R}$$

Т.к. $g(x) \geq 0, \forall x \geq a$:

$$\Phi(b) = \int_a^b g(x)dx \leq C, \quad b > a$$

По условию:

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \quad \forall x \geq a$$

Интегрируем:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \leq C$$

Т.к. $f(x) \geq 0$, $\forall x \geq a$, то функция $\psi(b) = \int_a^b f(x)dx$ – монотоно возрастает и ограничена сверху. Монотонная и ограниченная сверху функция при $x \to +\infty$ имеет конечный предел, поэтому:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \Psi(b) = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Последнее выражения имеет конечный предел, а значит $\int_a^b \int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится. □

Доказательство. Докажем второе утверждение методом от противного. Предположим, что $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ – сходится. Тогда по первой части теоремы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ – сходится, и это противоречит условию теоремы. Значит $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ – расходится. □

6.2.2 Предельный признак

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b] \in [a, +\infty)$ и $\forall x \geq a$, $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$.

Если существует конечный положительный предел:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda > 0$$

То $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. По определению предела:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M(\varepsilon) > 0, \forall x > M \implies |\frac{f(x)}{g(x)} - \lambda| < \varepsilon$$

Распишем:

$$-\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} - \lambda < \varepsilon$$

$$\lambda - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \lambda + \varepsilon$$

$$(\lambda - \varepsilon)g(x) < f(x) < (\lambda + \varepsilon)g(x) \quad \forall x > M$$

1. $f(x) < (\lambda + \varepsilon)g(x)$
   Интегрируем:

   $$\int_a^{+\infty} f(x)dx < (\lambda - \varepsilon)\int_a^{+\infty} g(x)dx$$

   Пусть $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ – сходится, тогда $(\lambda - \varepsilon)\int_a^{+\infty} f(x)dx$ – сходится, $\implies \int_a^{+\infty} g(x)dx$ – сходится.

   Пусть $(\lambda - \varepsilon)\int_a^{+\infty} g(x)dx$ – расходится, тогда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ – расходится, тогда $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ – расходится.

   Получаем, что $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся *одновременно.*

$\square$