Конспект лекций курса ФН-12
«Аналитическая геометрия»

Жихарев Кирилл ИУ7-24Б

Содержание

1 Векторная алгебра

Определение 1.1. Вектором называется отрезок, с выбранном на нём направлением.

Определение 1.2. Два вектора называется **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Определение 1.3. Три вектора называются **компланарными**, если они лежат на прямых, параллельных некоторой плоскости.

Определение 1.4. Вектор определяется точкой начала и точкой конца.

$$\overrightarrow{AB}.$$

Вектор, у которого точка начала фиксирована, называется **связанным**.

Вектор, у которого точка начала не фиксированная, называется **свободным**.

Вектор характеризуется *длиной* и *направлением*.

Два вектора называются **сонаправленными**, если они *коллинеарны* и имеют одно и то же направление.

Два вектора называются **противоположно направленными** если они *коллинеарны* и имеют противоположные направления.

Два векторы называются равными, если:

1. Они коллинеарны и сонаправлены
2. Их длины равны

Определение 1.5. Вектор, длина которого равна 1 называется единичным вектором или **ортом**.

$$\vec{e} \quad |\vec{e}| = 1.$$

Определение 1.6. Вектор, длина которого равна нулю (начало и конец совпадают) называется **нулевым вектором**. Направление нулевого вектора произвольное. Нулевой вектор коллинеарен всем векторам.

$$|\vec{0}| = 0.$$

Определение 1.7. Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется $\vec{c}$, который получается по правилу треугольника:

1. Конец вектора $\vec{a}$ совмещают с началом вектора $\vec{b}$
2. Тогда вектор, идущий из начала вектора $\vec{a}$ к концу вектора $\vec{b}$ и

будет вектором $\vec{c}$.

Определение 1.8. Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который получается по правилу параллелограмма следующим образом:

1. Совмещают начала векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$
2. Достраивают фигуры до параллелограмма
3. Тогда вектор, идущий из начала вектором по диагонали параллелограмма и будет исходным вектором $\vec{c}$.

Замечание. Если два вектора коллинеарны, то их можно сложить только правилу треугольника.

Определение 1.9. Произведение вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\vec{c}$, который будет коллинеарен вектору $\vec{a}$, длина которого будет или меньше в $|\lambda|$ раз и будет сонаправлен, если $\lambda > 0$, и противонаправлен, если $\lambda < 0$.

1.1 Свойства векторов

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \tag{1}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \tag{2}$$

$$\forall \vec{a} \exists \vec{0} \qquad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \tag{3}$$

$$\forall \vec{a} \exists \vec{b} \qquad \vec{a} + \vec{b} = \vec{0} \implies -\vec{b} = \vec{a} \tag{4}$$

$$\lambda \left(\vec{a} + \vec{b} \right) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b} \tag{5}$$

$$\lambda (p \vec{a}) = (\lambda p)\, \vec{a} \tag{6}$$

$$(\lambda + q)\, \vec{a} = \lambda \vec{a} + q \vec{a} \tag{7}$$

Определение 1.10. Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который получается следующим образом:

1. Совмещаем начала вектооров $\vec{a}$ и $\vec{b}$
2. Вектор, который идёт из конца вектора $\vec{b}$ в начало вектора $\vec{a}$ и есть искомый вектор $\vec{c}$.

1.2 Ортогональная проекция вектора на направление

Определение 1.11. Основание точки O_a перпендикуляра, опущенного их точки A на прямую L называется **ортогональной проекцией**

точки A на прямую L.

Определение 1.12. Пусть имеем вектор $\overrightarrow{AB}$. Пусть O_a - ортогональная проекция начала вектора $\overrightarrow{AB}$ на прямую L, а O_b - это ортогональная проекция конца вектора $\overrightarrow{AB}$ на прямую L. Тогда вектор $\overrightarrow{O_aO_b}$, соединяющий проекции и лежащий на прямой L, называется **ортогональной проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на прямую L**.

Определение 1.13. **Осью** называется прямая с выбранным на ней направлением.

Если на прямой L выбрано направление, то длину $\overrightarrow{O_aO_b}$ берут со знаком $+$, если направление вектора совпадает с выбранным направлением L, и со знаком $-$, если нет.

Определение 1.14. Длину вектора $\overrightarrow{O_aO_b}$ со знаком, определяющим направление этого вектора, **называют ортогональной проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось $\vec{l}$**.

$$np_{\vec{l}}\overrightarrow{AB}.$$

Определение 1.15. Ортогональную проекцию вектора на ненулевой вектор $\vec{l}$ называют **ортогональной проекцией этого вектора на направление вектора $\vec{l}$**.

Замечание. Важно! *Ортогональная проекция вектора на направление* - это **число**!

Теорема 1.1. Ортогональная проекция вектора $\vec{a}$ на направление ненулевого вектора $\vec{l}$ равна произведению длины вектора $\vec{l}$ на $cos\phi = \widehat{\vec{a}\vec{l}}$

Теорема 1.2. Ортогональная проекция суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на направление ненулевого вектора $\vec{l}$ равна сумме ортогональных проекций вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на направление ненулевого вектора $\vec{l}$.

$$np_{\vec{l}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = np_{\vec{l}}\vec{a} + np_{\vec{l}}\vec{b}.$$

Теорема 1.3. Ортогональная проекция вектора произведения $\vec{a}$ и числа λ на направление ненулевого вектора $\vec{l}$ равна произведению числа λ на ортогональную проекцию вектора $\vec{a}$.

$$np_{\vec{l}}\lambda\vec{a} = \lambda np_{\vec{l}}\vec{a}.$$

2 Линейная зависимость и независимость векторов

Определение 2.1.

$$\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \ldots + \lambda_n\vec{a_n}$$
$$\text{где } \lambda_i - \text{произвольные числа}$$

называется линейной комбинацией системы векторов $\vec{a}$, а числа λ - коэффициентом линейной комбинации.

Если $\forall\lambda = 0$, то линейную комбинацию называют *тривиальной*. Если $\neg\forall\lambda = 0$, то линейную комбинацию называют *нетривиальной*.

Определение 2.2. Система векторов называется *линейно-зависимой*, если существует нетривиальная равная нулевому вектору линейной комбинация этих векторов:

$$\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \ldots + \lambda\vec{a_n} = \vec{0}$$
$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 \neq 0$$

Определение 2.3. Система векторо называется *линейно-независимой*, если существует только тривиальная равная нулевому вектору линейная комбинация.

$$\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \ldots + \lambda\vec{a_n} = \vec{0}$$

Теорема 2.1. Система векторов линейно-зависима тогда и только тогда, когда один из этих векторов можно представить в виде линейной комбинации других векторов.

Доказательство. 1). Пусть система векторов линейно-зависима.
Тогда по определению существует нетривиальная равная нулевому вектору линейная комбинация этих векторов:

$$\lambda_1 \neq 0$$
$$\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \ldots + \lambda_n\vec{a_n} = \vec{0}$$
$$\vec{a_1} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{a_2} - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\vec{a_3} - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\vec{a_n}$$

Обозначим $\beta_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda_1}$, где $i \in N \wedge 2 \leq i \leq n$.
Получаем:

$$\vec{a_1} = \beta_2\vec{a_2} + \beta_3\vec{a_3} + \ldots + \beta_n\vec{a_n}$$

Что и требовалось доказать. □

Доказательство. 2) Пусть один из векторов можно представить в виде линейной комбинации другиз векторов системы (возьмем $\vec{a_1}$. Перенесём слагаемые из правой части в левую:

$$\vec{a_1} - \lambda_2\vec{a_2} - \lambda_3\vec{a_3} - \ldots - \lambda_n\vec{a_n} = \vec{0}$$

Получили нетривиальную равную нулевому вектору линейную комбинацию векторов. По определению, данная система векторов является *линейно-зависимой.* □

2.1 Критерии линейной зависимости 2 и 3 векторов

Теорема 2.2. Два вектору *линейно-зависимы* тогда и только тогда, когда они *коллинеарны.*

Доказательство. 1) Необходимость.
Пусть система векторв $\vec{a_1}, \vec{a_2}$ линейно-зависима. Тогда по определению $\exists$ нетривиальная линейная зависимость $= \vec{0}$ этих векторов. Пусть $\lambda_1 \neq 0$, тогда $\vec{a_1} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{a_2}$. Обозначим $\beta = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, тогда $\vec{a_1} = \beta\vec{a_2}$. По определению произведение вектора на число $\vec{a_1}$ и $\vec{a_2}$ коллинеарны. 2) Достаточность.
Пусть $\vec{a_1} \parallel \vec{a_2}$. Тогда $\vec{a_1} = \lambda\vec{a_2}$ (по определению произведения вектора на число). Перенесем все налево:

$$\vec{a_1} - \lambda\vec{a_2} = \vec{0}$$

По определению $\vec{a_1}$ и $\vec{a_2}$ являются линейной зависимостью. □

Теорема 2.3. Три вектора линейной зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

Доказательство. (1) Пусть $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, $\vec{a_3}$ - линейная зависимость, тогда по определению существуют:

$$\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \lambda_3\vec{a_3} = \vec{0}$$

Тогда:

$$\lambda_1 \neq 0$$
$$\vec{a_1} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{a_2} - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\vec{a_3}$$

Обозначим $\beta = -\frac{\lambda_i}{\lambda}$, где $i = 2, 3$.

$$\vec{a_1} = \beta_2\vec{a_2} + \beta_3\vec{a_3}$$

Совместим начала $\vec{a_2}$ и $\vec{a_3}$ и построим $\beta_2\vec{a_2}$ и $\beta_3\vec{a_3}$, где $\beta_2, \beta_3 > 0$.
Т.к. $\vec{a_3}$ лежит на диагонали параллелограмма (из правила сложения

векторов параллелограммом), получается, что вектора $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ лежат в одной плоскости, что и требовалось доказать.

(2) Пусть $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ лежат в одной плоскости (компланарны). Совместим начала векторов, концы векторов обозначим A_i. Проведём через A_1 прямую, параллельную $\vec{a_3}$.

$$\begin{gathered}
\overrightarrow{OA_2'} \parallel \overrightarrow{OA_2} \\
\implies \overrightarrow{OA_2'} = \lambda_2 \overrightarrow{OA_2} \\
\overrightarrow{OA_3'} \parallel \overrightarrow{OA_3} \\
\implies \overrightarrow{OA_3'} = \lambda_3 \overrightarrow{OA_3}
\end{gathered}$$

Тогда согласно правилу параллелограмма сложения векторов:

$$\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_2'} = \overrightarrow{OA_3'}, \text{ то } \vec{a_1} = \lambda_2 \vec{a_2} + \lambda_3 \vec{a_3}$$

□

Теорема 2.4. Любые 4 вектора линейно зависимы.

3 Базис

Определение 3.1. **Базис** - упорядоченный набор векторов.

Введём обозначения:

- V_1 - пространство всех коллинеарных векторов
- V_2 - пространство всех компланарных векторов
- V_3 - пространство всех свободных векторов

Пространство V_1

Пусть $\vec{e} \neq \vec{0} \in V_1$, тогда $\forall \vec{x} \in V_1$ ($\vec{x} = \lambda\vec{e}$, т.к. $\vec{x} \parallel \vec{e}$). Тогда $\vec{x} = \lambda\vec{e}$ называется разложением $\vec{x}$ по базису $\vec{e}$ в V_1, а λ - координаты $\vec{x}$ в этом базисе.

Пространство V_2

Любая упорядоченная пара неколлинеарных векторов в V_2 является базисом V_2.
Пусть в V_2 $\vec{e_1} \nparallel \vec{e_2}$, тогда эти вектора можно рассматривать как базис $V_2, \vec{x} \in V_2 \implies \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{x}$ - линейная зависимость.

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{e_1} + \lambda_2\vec{e_2}$$

- разложение вектора $\vec{x}$ по базису $\vec{e_1}, \vec{e_2}$. λ_1 и λ_2 называются координатами $\vec{x}$ в этом базисе. Базис в V_2 называется ортогональным, если базисные вектора лежат на перпендикулярных прямых.

Пространство V_3

Любая упорядоченная тройка некомпланарных векторов в V_3 называется базисом в V_3.
Пусть $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ - упорядоченная тройка векторов в V_3, $\vec{x} \in V_3$. Тогда система векторов линейно зависима (по теореме 7). По теореме 4:

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{e_1} + \lambda_2\vec{e_2} + \lambda_3\vec{e_3}$$

Данное выражение называется разложением $\vec{x}$ по базису $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ в V_3, а $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ называются корординатами $\vec{x}$ в базисе.
Базис в V_3, если базисные вектора лежат на взаимно перпендикулярных прямых.

Определение 3.2. **Ортонормированный базис** - ортогональный базис из $\vec{e}$ векторов.

Теорема 3.1. *О разложении вектора по базису*
Любой вектор можно разложить по базису и при этом единственным образом.

Доказательство. Пусть в пространстве V_3 зафиксирован базис $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$. Возьмём вектор $\vec{x}$. Тогда система векторов $\vec{x}, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ - линейно зависима, если вектор $\vec{x}$ можно представить в виде линейной комбинации векторов $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$:

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{e_1} + \lambda_2\vec{e_2} + \lambda_3 + \vec{e_3} \tag{1}$$

Предположим, что разложение вектора $\vec{x}$ - не единственное.

$$\vec{x} = \rho\vec{e_1} + \rho\vec{e_2} + \rho\vec{e_3} \tag{2}$$

Вычтем из (1) уравнение (2). Тогда:

$$\vec{0} = (\lambda_1 - \rho_1)\,\vec{e_1} + (\lambda_2 - \rho_2)\,\vec{e_2} + (\lambda_3 - \rho_3)\,\vec{e_3} \tag{3}$$

Поскольку базисные вектора $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ - линейно независимы, то выражение (3) представляет собой тривиальную линейную комбинацию векторов $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$, равную нулю. Тогда получаем:

$$\begin{matrix} \lambda_1 - \delta_1 = 0 \\ \lambda_2 - \delta_2 = 0 \\ \lambda_3 - \delta_3 = 0 \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{matrix} \lambda_1 = \delta_1 \\ \lambda_2 = \delta_2 \\ \lambda_3 = \delta_3 \end{matrix}$$

Коэффициенты равны, что и требовалось доказать. □

Пример. Пусть в пространстве V_2 зафиксирован базис $\vec{i}, \vec{j}$.

$$|\vec{i}| = 1, \quad |\vec{j}| = 1$$
$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$
$$\overrightarrow{OA} \parallel \vec{i} \implies \overrightarrow{OA} = x_a\vec{i}$$
$$\overrightarrow{OB} \parallel \vec{j} \implies \overrightarrow{OB} = y_a\vec{j}$$
$$\implies \vec{a} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j}$$

Пример. Пусть в пространстве V_3 зафиксирован ортонормированный базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ Тогда:

$$\vec{a} = \{x_a, y_a, z_a\}$$
$$\vec{a} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}$$

Разложить $\vec{a}$ по векторам $\vec{b}, \vec{c}$.
Дано:

$$\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$$
$$\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j}$$
$$\vec{c} = -\vec{i} - 5\vec{j}$$

Решение:

$$\vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$$
$$3\vec{i} - 4\vec{j} = \alpha(2\vec{i} + \vec{j}) + \beta(-\vec{i} + 5\vec{j})$$
$$3\vec{i} - 4\vec{j} = (2\alpha - \beta)\vec{i} + (\alpha + 5\beta)\vec{j} \implies$$
$$\begin{cases} 3 = 2\alpha - \beta \\ -4 = \alpha + 5\beta \end{cases} \implies \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha - 1 \end{cases}$$

Замечание. Два вектора равны, если равны соответствующие координаты.

4 Координаты вектора. Действия с векторами

Пусть:

$$\vec{a} = \{x_a, y_a, x_a\}$$
$$\vec{b} = \{x_b, y_b, z_b\}$$

> **Замечание.** Два вектора равны, если равны соответствующие координаты.

Тогда:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \{x_a + x_b, y_a + y_b, z_a + z_b\}$$
$$k\vec{a} = \{kx_a, ky_a, kz_a\}$$

> **Замечание.** $k\vec{a} = k \cdot \{\dots\}$ - так записывать нельзя!

Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, где $\lambda = const$

$$\begin{cases} x_b = \lambda x_a \\ y_b = \lambda y_a \\ z_b = \lambda z_b \end{cases} \implies \frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b}$$

Расчёт косинуса угла по разложению в базисе

> **Пример.** В V_2:
>
> $$\vec{a} = \{x_a, y_a, z_a\}$$
> $$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}$$
> $$\cos\alpha = \frac{x_a}{|\vec{a}|}$$
> $$\cos\beta = \frac{y_a}{|\vec{a}|}$$

> **Пример.** Для V_3:
>
> $$\begin{array}{ll} \cos\alpha = \frac{x_a}{|\vec{a}|} & x_a = |\vec{a}|\cos\alpha \\ \cos\beta = \frac{y_a}{|\vec{a}|} & y_a = |\vec{a}|\cos\beta \\ \cos\gamma = \frac{z_a}{|\vec{a}|} & z_a = |\vec{a}|\cos\gamma \end{array}$$
>
> Возведём в квадрат:
>
> $$|\vec{a}|^2\cos^2\alpha + |\vec{a}|^2\cos^2\beta + |\vec{a}|^2\cos^2\gamma = x_a^2 + y_a^2 + z_a^2 = |\vec{a}|^2$$
> $$\implies \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

В результате получаем орт вектора $\vec{a}$:

$$\vec{e_a} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$$

4.1 Скалярное произведение векторов

Определение 4.1. **Скалярным произведением** векторов $\vec{a}, \vec{b}$ называется *число* равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\phi$$

4.1.1 Свойства скалярного произведения

1. Коммунитативность
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

2.
$$\vec{a}^2 \geq 0$$
$$\vec{a}^2 = 0 \iff \vec{a} = \vec{0}$$
$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

3. Дистрибутивность
$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

4. Ассоциативность
$$(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$$

4.1.2 Формула для вычисления скалярного произведения двух векторов, заданных ортонормированным базисом

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0, \text{ если } \varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0, \text{ если } \varphi \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \text{ если } \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Пусть в пространстве V_3 с заданным ортонормированном базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ заданы вектора $\vec{a}, \vec{b}$:

$$\vec{a} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}$$
$$\vec{b} = x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k}$$

Тогда:

$$\begin{array}{ll} \vec{i}^2 = \vec{i}\cdot\vec{i} = |\vec{i}|^2 = 1 & \vec{i}\perp\vec{j} \implies \vec{i}\cdot\vec{j} = 0 \\ \vec{j}^2 = \vec{j}\cdot\vec{j} = |\vec{j}|^2 = 1 & \vec{i}\perp\vec{k} \implies \vec{i}\cdot\vec{k} = 0 \\ \vec{k}^2 = \vec{k}\cdot\vec{k} = |\vec{k}|^2 = 1 & \vec{j}\perp\vec{k} \implies \vec{j}\cdot\vec{k} = 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \vec{a}\cdot\vec{b} = & \left(x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}\right)\left(x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k}\right) \\ & = x_a x_b \vec{i}^2 + x_a y_b(\vec{i}\cdot\vec{j}) + x_a z_b(\vec{i}\cdot\vec{k}) \\ & + y_a x_a(\vec{i}\cdot\vec{j}) + y_a y_b \vec{j}^2 + y_a z_b(\vec{j}\cdot\vec{k}) \\ & + z_a x_b(\vec{i}\cdot\vec{k}) + z_a y_b(\vec{j}\cdot\vec{k}) + z_a z_b \vec{k}^2 \\ & = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}$$

4.1.3 Формула косинуса между векторами, заданными ортонормированным базисом

Т.к. $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, то:

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \\ &= \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \\ &= \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}\cdot\sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}\cdot\sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}}$$

4.2 Векторное произведение векторов

Определение 4.2. Тройка векторов называется **правой**, если кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к $\vec{b}$ осуществляется *против часовой стрелки* (смотря из конца вектора $\vec{c}$).

Определение 4.3. Тройка векторов называется **левой**, если кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к $\vec{b}$ осуществляется *по часовой стрелки* (смотря из конца вектора $\vec{c}$).

Определение 4.4. **Векторным произведением** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который удовлетворяет следующему условию:

1. $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (перпендикулярен плоскости, в которой лежат вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$);

2. $\vec{c} = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot \sin\phi$
3. Вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют *правую* тройку векторов.

Обозначение:

$$\vec{a} \times \vec{b} \text{ или } [\vec{a}, \vec{b}]$$

4.2.1 Свойства векторного произведения векторов

1. Антикомунитативность
$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$
2. Дистрибутивность
$$(\vec{a_1} + \vec{a_2}) \times \vec{b} = \vec{a_1} \times \vec{b} + \vec{a_2} \times \vec{b}$$
3. Ассоциативность
$$(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$$

4.2.2 Геометрическое приложение векторов.

Пусть $\vec{a} = \{x_a y_a, x_a\}$ и $\vec{b} = \{x_b, y_b, z_b\}$. Совместим начала этих векторов и достроим до параллелограмма. Тогда площадь этого параллелограмма будет равна модулю векторного произведения этих векторов.

Пример.

$$A(1,2,-1), \quad B(-1,1,0), \quad C(0,-1,2)$$
$$\overrightarrow{AB} = \{-2,-1,1\}$$
$$\overrightarrow{AC} = \{-1,-3,3\}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{vmatrix} =$$
$$\vec{i} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} + \vec{j} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} =$$
$$0\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\vec{c} = \{0,5,5\} \implies |\vec{c}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

4.3 Смешанное произведение

Определение 4.5. Смешанное поизведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется скалярное произведения первых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на третий вектор

$\vec{c}$.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \times \vec{c}$$

4.3.1 Свойства смешанных произведений

1. **Свойство перестановки (кососимметричности)**

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}$$

2. Три вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно 0.

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ - компланарны } \iff \vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$$

> **Замечание.** $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$, если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - правая тройка векторов.
> $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$, если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - левая тройка векторов.

3. **Свойство ассоциативности**

$$(\lambda\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \lambda(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$$

> **Доказательство.**
>
> $$(\lambda\vec{a})\vec{b}\vec{c} = (\lambda\vec{a})\vec{d} = \lambda(\vec{a}\vec{d}) = \lambda(\vec{a}(\vec{b}\vec{c})) = \lambda(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$$
>
> □

> **Замечание.** Примечание: это работает для любого положения λ.

4. **Свойство коммутативности**

$$(\vec{a_1} + \vec{a_2})\vec{b}\vec{c} = \vec{a_1}\vec{b}\vec{c} + \vec{a_2}\vec{b}\vec{c}$$

> **Доказательство.**
>
> $$\begin{aligned}(\vec{a_1} + \vec{a_2})\vec{b}\vec{c} &= (\vec{a_1} + \vec{a_2})\vec{d} \\ &= \vec{a_1}\vec{d} + \vec{a_2}\vec{d} \\ &= \vec{a_1}(\vec{b}\vec{c}) + \vec{a_2}(\vec{b}\vec{c}) \\ &= \vec{a_1}\vec{b}\vec{c} + \vec{a_2}\vec{b}\vec{c}\end{aligned}$$
>
> □

> **Замечание.** Работает не только для $\vec{a}$, но и векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

4.3.2 Формула смешанного произведения трёх векторов в правом ортонормированном базисе

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ заданы координатами:

$$\vec{a} = \{x_a, y_a, x_a\}$$
$$\vec{b} = \{x_b, y_b, .z_b\}$$
$$\vec{c} = \{x_c, y_c, z_c\}$$

Найдём смешанное произведение:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \{\begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix}\} \cdot \vec{c} =$$
$$= \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} \cdot x_c - \begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix} \cdot y_c + \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} \cdot z_c =$$
$$= \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

Т.е.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_c \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

4.3.3 Геометрическое приложение смешанного произведения

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Совместим начала этих векторов и достроим до параллелипипеда. Тогда $V_{paral} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$.

> **Замечание.**
> $$V_{pyramid} = \frac{1}{6} V_{paral} = \frac{1}{6} \cdot |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$$

5 Прямая на плоскости

5.1 Способы задания прямой

5.1.1 Каноническое уравнение

Пусть прямая l проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ и задана направляющим вектором $\vec{S} = \{m, n\}$ (т.е. вектор паралеллен прямой). Выберем на прямой l произвольную точку M. Составим $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$.

$$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s} \implies \boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}}$$

5.1.2 Параметрическое уравнение

Пусть прямая l задана каноническим уравнением:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$$

Обозначим коэффициент пропорциональности через t. Тогда:

$$\begin{matrix} \frac{x-x_0}{m} = t \\ \frac{y-y_0}{n} = t \end{matrix} \implies \boxed{\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}}$$

5.1.3 Через две точки

Пусть прямая l проходит через точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x, y)$. Выберем на прямой l произвольную точку $M_1(x_1, y_1)$. Составим два вектора $\overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{M_0, M_1}$.

$$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$$
$$\overrightarrow{M_0M_1} = \{x_1 - x_0, y_1 - y_0\}$$

Т.к. вектора коллинеарны, то и соответствующие координаты пропорциональны:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}}$$

5.1.4 В отрезках

Пусть прямая l отсекает от координатного угла отрезки a и b. Тогда прямая l проходит через точки $A(0, a)$ и $B(b, 0)$.

$$\frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - 0}{b - 0} \implies \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

5.1.5 С угловым коэффициентом

Пусть прямая l проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$. Выберем произвольную точку $M(x, y)$. Тогда из прямоугольного треугольника $\triangle M_0AM$:

$$\triangle M_0AM : \operatorname{tg}\varphi = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$
$$\text{Пусть } \operatorname{tg}\varphi = k$$
$$k = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$
$$y - yo = kx - x_0$$
$$y = kx - kx_0 + y_0$$
$$-kx_0 + y_0 = const = b$$
$$\boxed{y = kx + b}$$

5.1.6 Общего вида

Пусть прямая l проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$, а также дан перпендикулярный ей вектор $\vec{n} = \{A, B\}$. Выберем произвольную точку $M(x, y)$. Тогда:

$$\vec{n} = \{A, B\} \qquad \overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$$
$$\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M} \implies \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$$
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$
$$Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0$$

Обозначим: $-Ax_0 - By_0 = const = C$. Получаем:

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

5.2 Угол между прямыми

5.2.1 Прямые, заданные каноническими уравнениями

$$l_1 : \frac{x - 0}{m_1} = \frac{y - y_0}{n_1}$$
$$l_2 : \frac{x - \widetilde{x}_0}{m_2} = \frac{y - \widetilde{y}_0}{n_2}$$

Угол между прямыми l_1, l_2 соответствует углу между направляющими векторами $\vec{S_1}, \vec{S_2}$ для соответствующий прямых.

$$\widehat{(l_1, l_2)} = (\widehat{\vec{S_1}, \vec{S_2}}) = \varphi$$
$$\cos\varphi = \frac{|\vec{S_1} \cdot \vec{S_2}|}{|\vec{S_1}| \cdot |\vec{S_2}|}$$
$$\boxed{\cos\varphi = \frac{|m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}}$$

5.2.2 Прямые, заданные общими уравнениями

$$\begin{aligned} l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0 \\ \vec{n_1} = \{A_1, B_1\} \\ \vec{n_2} = \{A_2, B_2\} \end{aligned}$$

Угол между прямыми l_1, l_2 соответствует углу между нормалями $\vec{n_1}, \vec{n_2}$ к соответствующим прямым.

$$\widehat{(l_1, l_2)} = (\widehat{\vec{n_1}, \vec{n_2}}) = \varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|}$$

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}}$$

5.2.3 Прямые, заданные угловыми коэффициентами

$$\begin{cases} l_1 : y = k_1x + b_1, & k_1 = \operatorname{tg}\varphi_1 \\ l_2 : y = k_2x + b_2, & k_2 = \operatorname{tg}\varphi_2 \end{cases} \implies \varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi 2} =$$

$$= \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$$

$$\implies \boxed{\varphi = arctg\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}}$$

5.3 Условие параллельности прямых

5.3.1 Прямые, заданные каноническими уравнениями

Если $l_1 \parallel l_2$, то $\vec{s_1} \parallel \vec{s_2} \implies$

$$\boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}}$$

5.3.2 Прямые, заданные общими уравнениями

Если $l_1 \parallel l_2$, то $\vec{n_1} \parallel \vec{n_2} \implies$

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}}$$

5.3.3 Прямые, заданные угловыми коэффициентами

Если $l_1 \parallel l_2$, то $\varphi = 0 \implies tg\varphi = 0 \implies k_2 - k_1 = 0 \implies$

$$\boxed{k_2 = k_1}$$

5.4 Условие перпендикулярности прямых

5.4.1 Прямые, заданные каноническими уравнениями

Если $l_1 \perp l_2$, то $\vec{S_1} \perp \vec{S_2} \implies \vec{S_1} \cdot \vec{S_2} = 0 \implies$

$$\boxed{m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0}$$

5.4.2 Прямые, заданные общими уравнениями

Если $l_1 \perp l_2$, то $\vec{n_1} \perp \vec{n_2} \implies$

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} + \frac{B_1}{B_2} = 0}$$

5.4.3 Прямые, заданные угловыми коэффициаентами

Если $l_1 \perp l_2$, то:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \implies \quad \nexists \operatorname{tg}\varphi \quad \implies \quad 1 + k_1 k_2 = 0 \quad \implies \quad k_1 k_2 = -1 \implies$$

$$\boxed{k_2 = -\frac{1}{k_1}}$$

5.5 Расстояние от точки до прямой

Пусть прямая l задана общим уравнением:

$$l : Ax + By + C = 0 \implies \vec{n} = \{A, B\}$$

Требуется найти расстояние от точки $M_0\,(x_0, y_0)$ до прямой l.

Возьмём на прямой l произвольную точку M. Тогда расстояние от точки M_0 будет равно проекции вектора $\overrightarrow{MM_0}$ на направление вектора нормали прямой l.

$$\rho(M_0, l) = np_{\vec{n}}\overrightarrow{MM_0}$$
$$\overrightarrow{MM_0} = \{x_0 - x, y_0 - y\}$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{MM_0} = |\vec{n}| \cdot |MM_0| \cdot \cos\varphi = |\vec{n}| \cdot np_{\vec{n}}\overrightarrow{MM_0}$$
$$\implies np_{\vec{n}}\overrightarrow{MM_0} = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{MM_0}|}{\vec{n}} = \frac{A(x_0 - x) + B(y_0 - y)}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$$
$$= \frac{Ax_0 + By_0 + (-Ax - By)}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Из общего уравнения прямой l:

$$-Ax - By = C$$

$$\boxed{\rho(M_0, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

Пример. Найти расстояние от точки $M_0(1, -2)$ до прямой $l : y = 3x-1$.

$$3x - y - 1 = 0 \text{ - общее уравнение прямой}$$
$$Ax + By + C = 0$$

$$\rho(M_0, l) = \frac{|3 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) - 1|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{10}}$$

6 Уравнение плоскости

6.1 Способы задания плоскости

6.1.1 Через три точки

Пусть заданы точки $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$, которые принадлежат плоскости α.

$$M_1(x_1, y_1, z_1) \in \alpha$$
$$M_2(x_2, y_2, z_2) \in \alpha$$
$$M_3(x_3, y_3, z_3) \in \alpha$$

Выберем точку на плоскости α точку $M(x, y, z)$.
Составим вектора:

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$$
$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$
$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_1 - x_3, y - y_3, z - z_3\}$$

$\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$ - компанарны, а значит:

$$\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0$$

Следовательно:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0}$$

6.1.2 Через две точки с направляющим вектором

Пусть даны:

$$M_1(x_1, y_1, z_1) \in \alpha$$
$$M_2(x_2, y_2, z_2) \in \alpha$$
$$\vec{S} = \{m, n, p\} \in \beta$$
$$\alpha \parallel \beta$$

Выберем на плоскости α произвольную точку M

$$M(x, y, z) \in \alpha$$

Составим вектора $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}$:

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$$
$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

Тогда вектора $\overrightarrow{M_1, M}, \overrightarrow{M_1, M_2}, \vec{S}$ - компланарны, а следовательно:

$$\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{S} = 0 \implies \boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0}$$

6.1.3 Проходящей через точку с двумя направляющими векторами

Пусть даны:

$$M_1(x_1, y_1, z_1) \in \alpha$$
$$\vec{S_1} = \{m_1, n_1, p_1\} \in \beta$$
$$\vec{S_2} = \{m_2, n_2, p_2\} \in \beta$$
$$\alpha \parallel \beta$$

Выберем на плоскости α произвольную точку M

$$M(x, y, z) \in \alpha$$

Составим вектора $\overrightarrow{M_1M}$:

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$$

Тогда вектора $\overrightarrow{M_1, M}, \vec{S_1}, \vec{S_2}$ - компланарны, а следовательно:

$$\overrightarrow{M_1M} \cdot \vec{S_1} \cdot \vec{S_2} = 0 \implies \boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0}$$

6.1.4 Уравнение плоскости в отрезках

Пусть плоскость α отсекает от координатного угла отрезки a, b, c на осях x, y, z соответственно. Обозначим точки пересечения A, B, C. Тогда:

$$A(a, 0, 0) \quad B(0, b, 0) \quad C(0, 0, c)$$

Выберем на плоскости α произвольную точку M

$$M(x, y, z) \in \alpha$$

Составим вектора:

$$\overrightarrow{AM} = \{x - a, y, z\}$$
$$\overrightarrow{AB} = \{-a, b, 0\}$$
$$\overrightarrow{AC} = \{-a, 0, c\}$$

Тогда вектора $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ - компланарны, а следовательно:

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{Ac} = 0 \implies \begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \implies$$

$$(x-a) \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} + y \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -a & 0 \\ -a & c \end{vmatrix} + z \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -a & b \\ -a & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies$$

$$(x-a)bc - y(-ac) + zab = 0$$

$$xbc + yac + zab = abc$$

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}$$

6.1.5 Общее уравнение

Пусть даны:

$$M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$$

$$\vec{n} = \{A, B, C\} \text{ - вектор нормали}$$

Выберем на плоскости α произвольную точку M

$$M(x, y, z) \in \alpha$$

Составим вектор $\overrightarrow{M_0M}$:

$$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$$

Тогда:

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M} \implies \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M}$$

$$\iff A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$\iff Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = D$$

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$

6.2 Угол между плоскостями

Пусть заданы плоскости общими уравнениями:

$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + Cz_1 + D_1 = 0 \implies \vec{n_1} = \{A_1, B_1, C_1\}$$

$$\alpha_2 : A_2x + B_2y + Cz_2 + D_2 = 0 \implies \vec{n_2} = \{A_2, B_2, C_2\}$$

Угол между плоскостями α_1, α_2 равен углу между нормалями n_1, n_2 к этим плоскостям.

Тогда можно найти:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|} =$$

$$= \boxed{\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} + \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}}$$

6.2.1 Условие перпендикулярности

Если $\alpha_1 \perp \alpha_2$, то $\vec{n_1} \perp \vec{n_2} \implies \vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0 \implies$

$$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0}$$

6.2.2 Условие параллельности

Если $\alpha_1 \parallel \alpha_2$, то $\vec{n_1} \parallel \vec{n_2} \implies$

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}$$

> **Замечание.** Если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$, то плоскости **совпадают**.

> **Замечание.** Если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$, то плоскости **не совпадают**.

6.3 Расстояние от точки до плоскости

Пусть плоскость α задана общим уравнением:

$$\alpha : Ax + By + Cx + D = 0, \text{ где } \vec{n} = \{A, B, C\}$$

Пусть задана некоторая точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Возьмём некоторую точку $M(x, y, z) \in \alpha$. Составим вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z\}$. Тогда модуль проекции $\overrightarrow{MM_0}$ на вектор на направление вектора нормали и есть искомое расстояние. Найдем:

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = |\overrightarrow{M_0M}| \underbrace{|\vec{n}| \cdot \cos\varphi}_{np_{\vec{n}}\overrightarrow{M_0M}}$$

$$\begin{aligned}
\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} &= A(x_0 - x) + B(y_0 - y) + C(z_0 - z) \\
&= Ax_0 + By_0 + Cz_0 + (-Ax - By - Cz) \\
&= Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D
\end{aligned}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$\boxed{\rho(M_0, \alpha) = |np_{\vec{n}\overrightarrow{M_0M}}| = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

7 Прямая в пространстве

7.1 Способы задания прямой в пространстве

7.1.1 Каноническое уравнение прямой

Пусть прямая l проходит через точку $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ и имеет направляющий вектор $\vec{S} = \{m, n, p\}$. Возьмём на прямой l произвольную точку $M(x, y, z)$. Составим вектор:

$$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$$

Отсюда:

$$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{S} \implies \boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}}$$

7.1.2 Параметрическое уравнение

Пусть прямая l задана каноническим уравнением:

$$l : \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = (t)$$

Отсюда:

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{m} = t \\ \frac{y-y_0}{n} = t \\ \frac{z-z_0}{p} = t \end{cases} \implies \boxed{\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}}$$

7.1.3 Через две точки

Пусть прямая l проходит через точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Возьмём на прямой l точку $M(x, y, z)$. Составим два вектора:

$$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$$
$$\overrightarrow{M_0M_1} = \{x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\}$$

Отсюда:

$$\overrightarrow{M_0M} \parallel \overrightarrow{M_0M_1} \implies$$
$$\boxed{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}}$$

7.1.4 Общее уравнение

Пусть плоскости α_1 и α_2 заданы общими уравнениями:

$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Если $\alpha_1 \not\parallel \alpha_2$, то они пересекаются по прямой l. Тогда $\forall M(x, y, z) \in l$ будет выполнятся система:

$$\boxed{\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}}$$

Пример. Составить уравнение прямой, являющейся пересечением плоскостей:

$$\alpha_1 : 2x + y - z + 4 = 0$$
$$\alpha_2 : 3x + 2y + z - 6 = 0$$

Для того, чтобы содать уравнение прямой l, нужно знать $M_0(x_0, y_0, z_0)$ направляющий вектор $\vec{S} = \{m, n, p\}$.

$$\text{Из } (1) \implies \vec{n_1} = \{2, 1, -1\}$$
$$\text{Из } (2) \implies \vec{n_2} = \{3, 2, 1\}$$
$$\alpha_1 \neq \alpha_2$$

Найдем точку M_0. Пусть $z_0 = 0$ (прямая обязательно пересечёт плоскость oXY):

$$\begin{cases} 2x_0 + y_0 + 4 = 0 \\ 3x_0 + 2y_0 - 6 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 4x_0 + 2y_0 + 8 = 0 \\ 3x_0 + 2y_0 + -6 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_0 = -14 \\ y_0 = 24 \end{cases}$$

$$\implies M_0(-14, 24, 0)$$

Найдем направляющий вектор $\vec{S}$

$$\begin{aligned} \vec{s} &= \vec{n_2} \cdot \vec{n_1} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k} \end{aligned}$$

$$\implies \vec{S} = \{-3, 5, 1\}$$

Составим каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x + 14}{-3} = \frac{y - 24}{5} = \frac{z}{-1}$$

7.2 Расстояние от точки до прямой в пространстве

Пусть прямая l задана каноническим уравнением:

$$l: \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$$

$$\vec{S} = \{m, n, p\}$$

Задана точка $M_1(x_1, y_1, z_1) \notin l$. Составим вектор:

$$\overrightarrow{M_0M_1} = \{x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\}$$

Построим на векторах $\vec{S}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ параллелограмм. Тогда высота этого параллелограмма из точки M_1 и есть искомое расстояние от точки M_1 до прямой l.

$$S_{par} = h \cdot |\vec{S}|$$
$$h = \frac{S_{par}}{|\vec{S}|}$$
$$S_{par} = |\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{S}|$$

Тогда:

$$\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{S} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n & p \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ n & p \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ m & p \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ m & n \end{vmatrix} \cdot \vec{k} \implies$$

$$\overrightarrow{M_0M_1 \times \vec{S}} = \left\{ \begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ n & p \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ m & p \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ m & n \end{vmatrix} \right\} \implies$$

$$|\overrightarrow{M_0M_1 \times \vec{S}}| = \sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ n & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ m & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2} \implies$$
$$\rho(M_1, l) = \frac{|\overrightarrow{M_1M_0} \times \vec{S}|}{|\vec{S}|} =$$
$$\boxed{\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ n & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ m & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}}$$

7.2.1 Расстояние между параллельными прямыми

Пусть прямые заданы каноническими уравнениями:

$$l_1 : \frac{x-x_0}{m_1} = \frac{y-y_0}{n_1} = \frac{z-z_0}{p_1} \implies M_0(x_0, y_0, z_0), \vec{S_1} = \{m_1, n_1, p_1\}$$
$$l_2 : \frac{x-x_0}{m_2} = \frac{y-y_0}{n_2} = \frac{z-z_0}{p_2} \implies M_0(x_0, y_0, z_0), \vec{S_2} = \{m_2, n_2, p_2\}$$
$$l_1 \parallel l_2 \implies \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

Построим параллелограмм на векторах $\overrightarrow{S_1}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$. Тогда расстояние между прямыми l_1 и l_2 будет высота данного параллелограмма.

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{|\overrightarrow{M_1M_0} \times \vec{S}|}{|\vec{S}|} =$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ n_1 & p_1 \end{vmatrix}^2, \begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & p_1 \end{vmatrix}^2, \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}}}$$

7.2.2 Расстояние между скрещивающимися прямыми

Пусть прямые заданы каноническими уравнениями:

$$l_1 : \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \implies M_1(x_1, y_1, z_1), \quad \vec{S_1} = \{m_1, n_1, p_1\}$$
$$l_2 : \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2} \implies M_2(x_2, y_2, z_2), \quad \vec{S_2} = \{m_2, n_2, p_2\}$$

Составим вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

Вектора $\vec{S}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ не компланарны. Поэтому на этих векторах можно построить параллелепипед. Тогда расстояние между прямыми l_1 и l_2 будет равно высоте этого параллелепипеда.

$$V = |\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{s_1} \cdot \vec{s_2}|$$
$$V = h \cdot S$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{s_1} \cdot \vec{s_2} = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}$$

$$S = |\vec{s_1} \times \vec{s_2}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}$$
$$= \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\rho(l_2, l_1) = \frac{\left\|\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & x_2 - x_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}\right\|}{\sqrt{\begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2}}}$$

7.3 Взаимное расположение прямых в пространстве

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы каноническими уравнениями:

$$l_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \Longrightarrow M_1(x_1, y_1, z_1), \vec{S_1} = \{m_1, n_1, p_1\}$$
$$l_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2} \Longrightarrow M_2(x_2, y_2, z_2), \vec{S_2} = \{m_2, n_2, p_2\}$$

Составим вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$.

7.3.1 Совпадают

Если прямые l_1 и l_2 **совпадают**, то:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_1} = \frac{p_1}{p_1}$$
$$\frac{x_2 - x_1}{m_1} = \frac{y_2 - y_1}{n_1} = \frac{z_2 - z_1}{p_1}$$

7.3.2 Параллельны

Если прямые l_1 и l_2 **параллельны** то:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

И **не** выполняется условие:

$$\frac{x_2 - x_1}{m_1} = \frac{y_2 - y_1}{n_1} = \frac{z_2 - z_1}{p_1}$$

7.3.3 Пересекаются

Если прямые l_1 и l_2 **пересекаются**, они лежат в одной плоскости. В таком случае вектора $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s_1}, \vec{s_2}$ - компланарны:

$$\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{S_1} \cdot \vec{S_2} = 0$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0}$$

7.3.4 Скрещиваются

Если прямые l_1 и l_2 **скрещиваются**, то они не лежат в одной плоскости. В таком случае вектора $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s_1}, \vec{s_2}$ - некомпланарны:

$$\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{S_1} \cdot \vec{S_2} \neq 0$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} \neq 0}$$

7.4 Угол между прямой и плоскостью

Пусть плоскость задана общим уравнением:

$$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$$

Пусть прямая l задана каноническим уравнением:

$$l : \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \qquad \vec{s} = \{m, n, p\}$$

Обозначим угол φ - между прямой плоскостью, и β - между прямой и нормалью. Тогда:

$$\cos\beta = \frac{\vec{n} \cdot \vec{s}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|}$$

$$\beta = 90 - \varphi$$

$$\cos(90 - \varphi) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{s}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{s}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|}$$

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}}$$

7.4.1 Условие параллельности прямой и плоскости

Пусть плоскость задана общим уравнением:

$$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0 \qquad \vec{n} = \{A, B, C\}$$

Пусть прямая l задана каноническим уравнением:

$$l : \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \qquad \vec{s} = \{m, n, p\}$$

$$l \parallel \alpha \implies \vec{n} \perp \vec{s} \implies \vec{n} \cdot \vec{s} = 0$$

$$\boxed{Am + Bn + Cp = 0}$$

7.4.2 Условие перпендикулярности прямой и плоскости

Пусть плоскость задана общим уравнением:

$$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0 \qquad \vec{n} = \{A, B, C\}$$

Пусть прямая l задана каноническим уравнением:

$$l : \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \qquad \vec{s} = \{m, n, p\}$$

$$l \perp \alpha \implies \vec{n} \parallel \vec{s} \implies \boxed{\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}}$$

7.4.3 Примеры задач

Пример. Задача: *составить уравнение прямой l_2 симметричной прямой l_1, которая задана каноническим уравнением*:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0} \qquad \vec{s} = \{2, 1, 0\}$$

относительно плоскости α:

$$\alpha : x - y + 2z - 1 = 0 \qquad \vec{n} = \{1, -1, 2\}$$

Решение: (1) Проверим, является ли прямая l_1 параллельной плоскости α:

$$\vec{s} \cdot \vec{n} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 = 2 - 1 = 1 \neq 0 \implies l_1 \nparallel \alpha$$

(2) Находим точку пересечения прямой l с плоскостью α - пусть это точка $A(x_2, y_2, z_2)$. Из канонического уравнения прямой l_1 получим параметрическое уравнение:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0} = t$$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} = t \\ \frac{y}{1} = t \\ \frac{z+1}{0} = t \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}$$

Т.к. точка A принадлежит и прямой, и плоскости, то её координаты удовлетворяют и параметрическому уравнению прямой, и общему уравнению плоскости:

$$2t + 1 - t - 2 - 1 = 0$$

$$t = 2 \implies \begin{cases} x_2 = 5 \\ y_2 = 2 \\ z_2 = -1 \end{cases} \implies A(5, 2, -1)$$

(3) Из канонического уравнения прямой возьмем точку $M_1(1, 0, -1) \in l_1$. Найдем ей симметричную относительно плоскости α точку $M_2(x_2, y_2, z_2)$ Составим уравнение прямой l_3, проходящей через точку M_1 и с направляющим вектором $\vec{n}$.

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

Найдём точку пересечения $O(x_3, y_3, z_3)$ прямой l_3 с плоскостью α. Составим параметрическое уравнение прямой l_3:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2} = t$$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{1} = t \\ \frac{y}{-1} = t \\ \frac{z+1}{2} = t \end{cases} \implies \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t \\ z = 2t - 1 \end{cases}$$

Т.к. точка O принадлежит и прямой, и плоскости, то её координаты удовлетворяют и параметрическому уравнению прямой, и общему уравнению плоскости:

$$t + 1 + t + 4t - 2 = 0$$

$$t = \frac{1}{3} \implies \begin{cases} x_3 = \frac{4}{3} \\ y_3 = -\frac{1}{3} \\ z_3 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Составляем вектор $\overrightarrow{M_1O}$:

$$\overrightarrow{M_1O} = \left\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$$

Пусть $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Тогда:

$$\overrightarrow{OM_2} = \{x_2, y_2, z_2\}$$

$$\overrightarrow{M_1O} = \overrightarrow{OM_2} \implies \begin{cases} x_2 - \frac{4}{3} = \frac{1}{3} \\ y_2 + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \\ z_2 + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = \frac{5}{3} \\ y_2 = \frac{2}{3} \\ z_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

4) Составляем уравнение прямой, проходящей через точки $A\,(5, 2, -1)$

и $M_2\left(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$:

$$\frac{x - x_a}{x_1 - x_a} = \frac{y - y_a}{y_2 - y_a} = \frac{z - z_a}{z_2 - z_a}$$
$$\frac{x - 5}{\frac{5}{3} - 5} = \frac{y - 2}{-\frac{2}{3} - 2} = \frac{z + 1}{\frac{1}{3} + 1}$$
$$\frac{x - 5}{-\frac{10}{3}} = \frac{y - 2}{-\frac{8}{3}} = \frac{z + 1}{\frac{4}{3}}$$
$$\boxed{\frac{x - 5}{-5} = \frac{y - 2}{-4} = \frac{z + 1}{4}}$$

Пример. Задача: *Составить каноническое уравнение общего перпендикуляра к прямым l_1 и l_2, заданными параметрическими уравнениями*:

$$l_1 : \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 3t + 4 \\ z = -2t - 2 \end{cases} \qquad l_2 : \begin{cases} x = -3t + 2 \\ y = t \\ z = 3t - 4 \end{cases}$$

Решение:
1) Составим канонические уравнения прямых для l_1 и l_2:

$$l_1 : \begin{cases} t = \frac{x-2}{2} \\ t = \frac{y-4}{3} \\ t = \frac{z+2}{-2} \end{cases} \implies \frac{x - 2}{2} = \frac{y - 4}{3} = \frac{z + 2}{-2} \implies$$
$$M_1(2, 4, -2) \qquad \vec{s_1} = \{2, 3, -2\}$$

$$l_2 : \begin{cases} t = \frac{x-1}{-3} \\ t = \frac{y}{1} \\ t = \frac{z+4}{3} \end{cases} \implies \frac{x - 1}{-3} = \frac{y - 4}{3} = \frac{z + 2}{-2} \implies$$
$$M_2(1, 4, -2) \qquad \vec{s_2} = \{-3, 1, 3\}$$

Найдём вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{0, -4, -2\}$$

Проверим, являются ли прямые l_1 и l_2 скрещивающимися или параллельными. Найдём смешанное произведение $\overrightarrow{M_1M_2}\vec{s_1}\vec{s_2}$:

$$\overrightarrow{M_1M_2}\vec{s_1}\vec{s_2} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -22 \neq 0$$

Значит, прямые не лежат в одной плоскости, следовательно, они скрещивающиеся.

2) Найдем направляющий вектор общего перпендикуляра к прямым l_1 и l_2.

$$\left.\begin{matrix} \vec{s} \perp \vec{s_1} \\ \vec{s} \perp \vec{s_2} \end{matrix}\right\} \iff \vec{s} = \vec{s_1} \times \vec{s_2}$$

$$\vec{s_1} \times \vec{s_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 11\vec{i} + 11\vec{k} \implies \vec{s} = \{1, 0, 1\}$$

3) Составим уравнение плоскости α_1, проходящей через точки M_1 и вектора $\vec{s_1}\vec{s}$. Возьмём произвольную точку $M(x, y, z) \in \alpha_1$. Составим вектор $\overrightarrow{M_1M}$:

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - 2, y - 4, z + 2\}$$

Вектора $\overrightarrow{M_1M}, \vec{s_1}, \vec{s}$ - компланарные, а следовательно:

$$\overrightarrow{M_1M}\vec{s_1}\vec{s} = 0$$

$$\overrightarrow{M_1M}\vec{s_1}\vec{s} = \begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z+2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3x + 4y + 3z - 4$$

$$\boxed{\alpha_1 : -3x + 4y + 3z - 4 = 0}$$

4) Составим плоскость α_2 через точку M_2 и вектора $\vec{s_1}$ и $\vec{s_2}$. Возьмём произвольную точку $M(x, y, z) \in \alpha_2$. Составим вектор $\overrightarrow{M_2M}$:

$$\overrightarrow{M_2M} = \{x - 2, y, z + 4\}$$

Вектора $\overrightarrow{M_2M}, \vec{s_2}, \vec{s}$ - компланарные, а следовательно:

$$\overrightarrow{M_2M}\vec{s_2}\vec{s} = 0$$

$$M_2\vec{M}\vec{s_2}\vec{s} = \begin{vmatrix} x-2 & y & z+4 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x + 6y - z - 6$$

$$\boxed{\alpha_2 : x + 6y - z - 6 = 0}$$

5) Для начала, определим одну из координат точек. Прямая l пересекает плоскость oXY, т.е. можем взять $z = 0$. Тогда в системе уравнений:

$$\begin{cases} -3x + 4y + 3z - 4 = 0 \\ x + 6y - z - 6 = 0 \end{cases}$$

Полагаем, что $z = 0$:

$$\begin{cases} -3x + 4y - 4 = 0 \\ x + 6y - 6 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \implies A(0, 1, 0)$$

где точка $A \in \alpha_1, \alpha_2, l$.

Составляем каноническое уравнение прямой l, проходящей через точку A, и с направляющим вектором $\vec{s}$.

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-0}{1}$$

$$\boxed{\frac{x}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{1}}$$

8 Кривые второго порядка

Общее уравнение кривой второго порядка:

$$\boxed{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

где:

$$A, B, C, D, E, F = const$$
$$A^2 + B^2 + C^2 > 0$$

8.1 Эллипс

Определение 8.1. *Эллипсом* называется геометрическое место точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух фиксированных точек, называемых *фокусами*, постоянна и равна $2a$.

F_1, F_2 - фокусы эллипса

Расстояние между фокусами называется *фокальным расстоянием.*

Расстояние от каждой точки эллипса до фокуса называется *фокальным радиусом*

Прямая, которая проходит через фокусы, и прямая, которая проходит через середину этой прямой и перпендикулярной ей, являются *осями симметрии данного эллипса.* Первая прямая называется *большой осью*, а вторая – *малой осью.*

Точка пересечения осей эллипса называется *центром эллипса*, а точки пересечения эллипса с осями называются *вершинами эллипса.*

Уравнение эллипса

Расположим декартову систему координат так, чтобы её начало совпадало с центром эллипса, а фокусы лежали на оси абсцисс.

O – центр эллипса
F_1, F_2 – фокусы эллипса
A_1, A_2, A_3, A_4 – вершины эллипса
$F_1F_2 = 2c$ – фокусное (фокальное) расстояние
Возьмём точку $M(x, y)$, принадлежащей эллипсу, и составим векторы:

$$\overrightarrow{F_1M} = \{x + c, y\}$$
$$\overrightarrow{F_2M} = \{x - c, y\}$$

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{F_1M}| + |\overrightarrow{F_2M}| &= 2a \\
\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} &= 2a \\
\sqrt{(x+c)^2+y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2} \\
(x+c)^2+y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2 \\
\cancel{x^2} + 2cx + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} - \cancel{x^2} + 2cx - \cancel{c^2} - \cancel{y^2} - 4a^2 &= -4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \\
4cx - 4a^2 &= -4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \\
a^2 - cx &= a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \\
a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 &= a^2(x-c)^2 + a^2y^2 \\
a^4 - \cancel{2a^2cx} + c^2x^2 &= a^2x^2 - \cancel{2a^2cx} + a^2c^2 + a^2y^2 \\
c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 &= -a^4 + a^2c^2 \\
x^2(c^2-a^2) - y^2a^2 &= -a^2(a^2-c^2) \\
x^2(a^2-c^2) + y^2a^2 &= a^2(a^2-c^2) \\
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} &= 1
\end{aligned}$$

Обозначим $b^2 = a^2 - c^2$. Получаем *каноническое уравнение эллипса*:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

где a – *большая полуось эллипса*, а b – *малая полуось эллипса.*

Отношение фокусного расстояния эллипса к большой оси называется *эксцентриситетом* эллипса.

$$\frac{F_1F_2}{A_3A_1} = \frac{2c}{2a} = \varepsilon$$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{c}{a}}$$

Замечание. Т.к. $a > c$, то $0 < \varepsilon < 1$

Центриситет показывает степень "сжатия"эллипса.

Отношение фокального радиуса точки эллипса к расстоянию до некоторой прямой, называемой *директрисой*, постоянно и равно *эксцентриситету*.

Уравнение директрис:

$$d_1 : x = -\frac{a}{\varepsilon}$$

$$d_2 : x = \frac{a}{\varepsilon}$$

Замечание. 1. Уравнение эллипса с центром в точке $O(x_0, y_0)$:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

2. Уравнение мнимого эллипса с центром в точке $O(0,0)$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

3. Если $a = b = R$, то это уравнение окружности:

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1$$
$$x^2 + y^2 = R^2$$

Для окружности в точке $O(x_0, y_0)$:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$$

4. Если $a < b$, то изображение эллипса "переворачивается"на 90:

8.2 Гипербола

Определение 8.2. *Гиперболой* называется геометрическое место точек, разность расстояний от каждой их которых до двух фиксированных точек, называемых *фокусами*, постоянно и равно $2a$.

Прямая, на которой лежат фокусы, и прямая, которая проходит через середину отрезка, соединяющего фокусы и перпендикулярная ей, называются *осями симметрии гиперболы*. Первая прямая называется *действительной осью*, а вторая – *мнимой осью*.

F_1, F_2 – фокусы

$F_1F_2 = 2c$ – фокусное (фокальное) расстояние

Точки пересечения действительной и мнимой оси гиперболы называется *центром гиперболы*, а точка пересечения с действительной осью называются *вершинами гиперболы*.

Уравнение гиперболы

Расположим декартову систему координат так, чтобы её начало совпадало с центром гипероболы, а фокусы лежали на оси абцисс.

$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$.

Возьмём произвольную точку $M(x, y)$, принадлежащей гиперболе.

$$\overrightarrow{F_1M} = \{x + c, y\} \quad \overrightarrow{F_2M} = \{x - c, y\}$$

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{F_1M}| - |\overrightarrow{F_2M}| &= 2a \\
\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} &= 2a \\
\sqrt{(x+c)^2+y^2} &= 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2} \\
(x+c)^2+y^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2 \\
\cancel{x^2} + 2cx + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} - \cancel{x^2} + 2cx - \cancel{c^2} - \cancel{y^2} - 4a^2 &= 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \\
4cx - 4a^2 &= 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \\
cx - a^2 &= a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \\
c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 &= a^2(x-c)^2 + a^2y^2 \\
c^2x^2 - \cancel{2a^2cx} + a^4 &= a^2x^2 - \cancel{2a^2cx} + a^2c^2 + a^2y^2 \\
c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 &= -a^4 + a^2c^2 \\
x^2(c^2-a^2) - y^2a^2 &= a^2(c^2-a^2) \\
\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2-a^2} &= 1
\end{aligned}
$$

Обозначим $b^2 = c^2 - a^2$. Получаем *каноническое уравнение гиперболы*:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Центриситетом гиперболы называется:

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

Замечание. Т.к. $c > a$, то $\varepsilon > 1$

Замечание. Уравнение сопряжённой гиперболы:

$$\boxed{-\frac{x}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \text{ или } \boxed{\frac{x^2}{b^2} = -1}$$

Уравнение гиперболы с центром в точке $M(x_0, y_0)$:

$$\frac{(x-x_0)}{a^2} - \frac{(y-y_0)}{b^2} = 1$$

Если $a = b$, то гипербола становится *равносторонней*.
Если:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

то получается вырожденной уравнение – две пересекающиеся прямые:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = 0(bx - ay)(bx + ay) = 0$$
$$\begin{cases} bx - ay = 0 \\ bx + ay = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = \frac{b}{a}x \\ y = -\frac{b}{a}x \end{cases}$$

Эти же уравненения и являются *уравнениями ассимптот.*

Если центр гиперболы $O(x_0, y_0)$, то:

$$y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0) \implies y = \frac{b}{a}x + (y_0 - \frac{b}{a}x_0$$
$$y - y_0 = -\frac{b}{a}(x - x_0) \implies y = -\frac{b}{a}x + (y_0 + \frac{b}{a}x_0$$

8.3 Парабола

Определение 8.3. *Параболой* называется геометрическое место точек, расстояние от каждой из которых до некоторой точки, называмой *фокусом*, и фиксированной прямой, называемой *директрисой*, равно.

Уравнение параболы

Расположим декартову систему координат так, чтобы начало координат совпадало с вершиной параболы.

$$A(-\frac{p}{2}), \quad F(\frac{p}{2}, 0)$$

$$\overrightarrow{AM} = \{x + \frac{p}{2}, a\}, \quad \overrightarrow{FM} = \{x - \frac{p}{2}, y\}$$
$$|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{FM}|$$
$$\sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{\left((x - \frac{p}{2}) + y^2\right)}$$
$$x^2 + xp + \frac{p^2}{4} = x^2 - xp + \frac{p^2}{4} + y^2$$

Тогда получаем каноническое уравнение параболы с вершиной в $O(0, 0)$:

$$\boxed{y^2 = 2px}$$

Если $p > 0$, то ветви параболы направлены *вправо*, если $p < 0$, то ветви направлены *влево*.

Если вершина в точке $Mx_0, y_0)$, тогда:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)^2$$

Уравнение директрисы:

$$d : x = -\frac{p}{2}$$

8.4 Примеры

Пример.

$$2x^2 - 4y^2 - 6x + 8y - 10 = 0$$
$$2(x^2 - 3x) - 4(y^2 - 2y) - 10 = 0$$
$$2(x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}) - -4(y^2 - 2y + 1 - 1) - 10 = 0$$
$$2(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{2} - 4(y-1)^2 + 4 - 10$$
$$2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 4(y-1)^2 = \frac{21}{2}$$
$$\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{21}{4}} - \frac{(y-1)^2}{\frac{21}{8}} = 1$$

Получили *уравнение гиперболы* с центром в $O\left(\frac{3}{2}, 1\right)$, действительная полуось $a = \frac{\sqrt{21}}{2}$ и мнимая полуось $b = \sqrt{\frac{21}{8}}$.

9 Матрицы

Определение 9.1. *Матрицей* называется таблица чисел, в которой элементы расположены по строкам и столбцам.

Обозначаются заглавными латинскими буквами: $A, B, C \dots$ Размерность матрицы определятся кол-вом строк m и кол-вом столбцов n, и обозначается $m \times n$. Элемент матрицы a_{ij} – элемент, который расположен в i-ой строку и j-ом столбце.

Матрицу можно записать таким образом:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_1m \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_2m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_nm \end{pmatrix}$$

Определение 9.2. Матрица называется *квадратной* если кол-во строк равно кол-ву столбцов $(m = n)$.

Определение 9.3. Квадратная матрица называется *диагональной* если все элементы матрицы, кроме элементов на главной диагонали, равны нулю.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Определение 9.4. *Главной диагональю* называется диагональ матрицы, идущая из левого верхнего в правым нижний.

Определение 9.5. *Побочной диагональю* называется диагональ матрицы, идущая из левого верхнего в правым нижний.

Определение 9.6. Квадратная матрица, у которой на главной диагонали все элементы равны единице, а остальные равны нулю, называют *единичной.*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Определение 9.7. *Нулевой матрицей* называется матрица, все элементы которой равные нулю.

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Определение 9.8. *Верхне-треугольной матрицей* называется квадратная матрица, у которой элементы под главной диагональю равны нулю.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Определение 9.9. *Нижне-треугольной матрицей* называется квадратная матрица, у которой над главной диагональю равны нулю.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Две матрицы *равны*, если они имеют одинаковую размерность, и их соответствующие элементы равны.

9.1 Действия с матрицами

Определение 9.10. *Суммой матриц* $A_{m\times n}$ и $B_{m\times n}$ называется матрица $C_{m\times n}$, элементы которой являются суммой соответствующих элементов матриц A и B.

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Определение 9.11. *Произведением матрицы* $A_{m\times n}$ на число $k = const$ называется матрица $C_{m\times n}$, элементы которой равны произведению соответствующего элемента матрицы на данное число $c_{ij} = ka_{ij}$.

9.1.1 Свойства сложения и произведения матриц на число

1. $$A + B = B + A$$
2. $$(A + B) + C = A + (B + C)$$
3. Если θ – нулевая матрица, то:
$$A + \theta = A$$
4. Найдётся такая матрица B, что:
$$A + B = 0$$

5.
$$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$$

6.
$$(\lambda+\rho)A=\lambda A+\rho A$$

7.
$$(\lambda\rho)A=\lambda(\rho A)$$

9.2 Транспонирование матрицы

Определение 9.12. *Транспонированной матрицей* A_{mn} называется матрица размерностью $n\times m$, элементы которой:

$$a^{\tau}_{ij}=a_{ji}$$
$$A^{\tau}_{n\times m}\text{ – транспонированная матрица } A_{m\times n}$$

$$A_{2\times 3}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\qquad A^{\tau}_{3\times 2}=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}$$

9.2.1 Свойства транспонированния

1.
$$(A+B)^{\tau}=A^{\tau}+B^{\tau}$$

2.
$$(\lambda A)^{\tau}=\lambda A^{\tau}$$

9.3 Произведение матриц

Определение 9.13. *Произведением матриц* A и B назвается матрица C, элементы которой определяются как:

$$c_{ij}=\sum_{l=1}^{k}a_{il}\cdot b_{lj}$$

Замечание. Две матрицы можно перемножить, если количество столбцов одной матрицы равно количеству строк другой матрицы. Тогда результирующая матрица будет иметь количество строк одной матрицы и количеству столбцов другой матрицы.

$$C_{a\times b}=A_{a\times c}\cdot B_{c\times b}$$

Свойство антикомунитативности произведения матриц.

$$A\times B\neq B\times A$$

Замечание. *Исключения:* Когда $A = B$:

$$A \times B = A \times A = A^2$$

Когда матрица B – нулевая матрица:

$$A \times \theta = \theta$$

Когда матрица B – единичная матрица:

$$A \times E = A$$

Когда матрица B – обратная матрица:

$$A \times A^{-1} = E$$

9.3.1 Свойства произведения матриц

1. Произведение матриц антикомунитативно.

$$A \times B \neq B \times A$$

2.

$$1 \times A = A$$

3. Ассоциативность

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$$

Доказательство:

$$\begin{aligned}
(A \times B)\, C = \\
&= \sum_{r=1}^{k} [(A \times B)]_{ir} \times [C]_{rj} = \\
&= \sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{s=1}^{k} [A]_{is} \cdot [B]_{sn} \right) \cdot [C]_{rj} = \\
&= \sum_{n=1}^{n} \sum_{k=1}^{k} [A]_{is} \times [B]_{sn} \times [C]_{rj} = \\
&= \sum_{s=1}^{k} [A]_{is} \times [(B \times C)] = \\
&= A \times (B \times C)
\end{aligned}$$

4. Дистрибутивность произведения матриц относительно сложения:

$$(A + B) \times C = A \times C + B \times C$$

Доказательство:

$$
\begin{aligned}
(A_{m\times k} + B_{m\times k}) \times C_{k\times n} = \\
&= \sum_{r+1}^{k} [(A+B)]_{ir} \times [C]_{ir} \\
&= \sum_{r=1}^{k} ([A]_{ir} + [B]_{ir}) \times [C]_{rj} \\
&= \sum_{r=1}^{k} ([A]_{ir}[C]_{rj} + [B]_{ir} \times [C]_{rj}) \\
&= \sum_{r=1}^{k} [A]_{ir}[C]_{ir} + \sum_{r=1}^{k} [B]_{ir}[C]_{ir} \\
&= A \times C + B \times C
\end{aligned}
$$

5. Применение транспорирования к произведению матриц

$$(A \times B)^{\tau} = B^{\tau} \times A^{\tau}$$

Доказательство:

$$
\begin{aligned}
(A \cdot B)^{\tau} = \\
&= [(A \times B)^{\tau}]_{ij} \\
&= [AB]_{ji} = \sum_{r=1}^{k} [A]_{jr} \times [B]_{ri} \\
&= \sum_{r=1}^{k} [A^{\tau}] \times [B^{\tau}]_{ir} \\
&= \sum_{r=1}^{k} [B^{\tau}]_{ir} [A^{\tau}]_{rj} \\
&= [B^{\tau} \times A^{\tau}] \\
&= B^{\tau} \times A^{\tau}
\end{aligned}
$$

9.4 Элементарные преобразования матриц

1. Перестановка строк и столбцов.

2. Умножение элементов строк (столбцов) на число.

3. Прибавление к элементам одной строки соответствующий элементов другой строки (столбца), умноженного на число.

Используя элементарные преобразования, можно привести любую матрицу к *ступенчатому виду*.

Пример. Пример ступенчатой матрицы для 3×4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

9.5 Минор матрицы. Ранг матрицы

Определение 9.14. *Минором k-ого порядка* матрицы A называется определитель, составленный из пересечения k строк и k столбцов с сохранением их порядка.

Определение 9.15. *Окаймляющим минором* для минора M матрицы A называется минор M', полученный из минора M путём добавления 1 строки и 1 столбца.

Определение 9.16. *Базисным минором* называется матрицы A называется минор, не равный нулю, порядок которого равен рангу матрицы A.

Определение 9.17. *Рангом матрицы* называется число A, равное наибольшему порядку, отличному от нуля, минора матрицы A.

Теорема 9.1. *О базисном миноре.*
Строки (столбцы) матрицы A, входящие в базисный минор – базисные.
Базисные строки (столбцы), входящие в базисный минор – линейно-независимы.
Любую строку (столбец), не входящую в базисный минор, можно представить в виде линейной комбинации базисных строк (столбцов).

Доказательство. Пусть ранг матрицы A равен R.
Предположим, что строки матрицы A - линейно-зависимы. Тогда одну из ни можно выразить как линейную комбинацию других строк. Тогда в базисном миноре 1-ая строка – линейная комбинация других строк. По свойству определителей этот минор равен нулю, что противоречит определению базисного минора.

Пусть базисный минор состоит из первых r строк и r столбцов матрицы A. Добавим к этому минору произвольную i-ную строку и j-ный столбец – получим окаймляющий минор. Если $j \leq r$, то в миноре M' 2 одинаковых столбца и минор равен нулю. Если $j > r$, то в минор M' тоже равен нулю, т.к. ранг матрицы A равен r, наибольний порядок, отличный от нуля, минора равен j.

Определитель можно вычислить путём разложения по каой-нибудь строке или столбцу, поэтому найдем определитель M' путём разложения по j-ному столбцу:

$$a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{ij}A_{ij} = 0$$
$$j = r + 1 \implies$$
$$a_{1r+1}A_{1r+1} + a_{2r+1}A_{2r+1} + \ldots + a_{ir+1}A_{ir+1} = 0$$

$A_{r+1,r+1}$ – базисный минор, т.к. $M \neq 0$, то $A_{r+1,r+1} \neq 0$.

$$a_{r+1,r+1} = -\frac{A_{1,r+1}}{A_{r+1,r+1}} \cdot a_{1,r+1} - \frac{A_{2,r+1}}{A_{r+1,r+1}} \cdot a_{2,r+1} \ldots - \frac{A_{r,r+1}}{A_{r+1,r+1}} \cdot a_{r,r+1}$$

Обозначим $\lambda_i = -\frac{A_{i,r+1}}{A_{r+1}r+1}$

$$a_{r+1,r+1} = \lambda_i a_{1,r+1} + \lambda_2 a_{2,r+1} + \ldots + \lambda_r \cdot a_{r,r+1}$$

Элементы i-ой строки можно представить в виде линейной комбинации строк. □

9.5.1 Вычисление ранга матрицы

Ранг матрицы обозначается:

$$Rg(A), rgA$$

Метод окаймляющего минора

Выбираем любой элемент матрицы $A \neq 0$ – минор. Составляем окаймляющий минор и вычисляем его. Если он не равен 0, то составляющий минор 3 порядка и т.д. Если равен нулю, то берём другой элемент матрицы и соответствующий ему окаймляющий минор. Ранг матрицы будет равен размеру максимального минора, не равному нулю.

Метод элементарных преобразований

Теорема 9.2. Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразований строк (столбцов) матрицы. Ранг матрицы равен количеству ненулевых строк (столбцов) ступенчатой матрицы, полученной путём элементарных преобразований.

9.6 Обратная матрица

Определение 9.18. *Обратная матрица* квадратной матрицы $A_{n\times n}$ называется матрица $A^{-1}_{n\times n}$ такая, что $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = E$.

Обратная матрица вычисляется по формуле:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^{\tau}}$$

где $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ – арифметическое дополнение a_{ij} матрицы A.

Определение 9.19. Матрица A^*, являющаяся транспонированной матрицей алгебраических дополнений матрицы A, называется *присоединённой матрицей.*

Теорема 9.3. Для того, чтобы матрица A имела обратную необходимо и достаточно, чтобы её определитель не равнялся нулю.

Доказательство. 1) Пусть матрица A имеет обратную, тогда по определению:

$$A \times A^{-1} = E$$

В таком случае:

$$det(A \times A^{-1}) = det(E) = 1$$
$$det(A \times A^{-1}) = det(A) \cdot det(A^{-1}) = 1 \implies detA \neq 0$$

2) Пусть $detA \neq 0$. Если матрицу разложить по строке или столбцу:

$$\sum_{j+1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \ldots + a_{in} A_{in} = detA$$
$$\sum_{j+1}^{n} a_{ij} A_{nj} = a_{i1} A_{n1} + a_{i2} A_{n2} + \ldots + a_{in} A_{nn} = 0 \quad i \neq k$$

Пусть существует матрица B:

$$b_{ij} = \frac{A_{ij}}{detA}$$

Пусть $C = A \cdot B$:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{in} = \sum_{n=1}^{n} a_{ik} \frac{A_{jn}}{detA}$$

$$= \frac{1}{detA} \cdot \sum_{n=1}^{n} a_{ik} A_{jn} = \begin{cases} \frac{1}{detA} \cdot detA = 1, & \text{если } i = j \\ \frac{1}{detA} \cdot 0 = 0, & \text{если } i \neq j \end{cases} \implies C = E$$

$$c_{ij} = 1, \text{ если } i = j$$
$$c_{ij} = 0, \text{ если } i \neq j$$

Получим:

$$\left.\begin{aligned} A \times B = E \\ B \times A = E \end{aligned}\right\} \implies \text{по определению } B = A^{-1}$$

□

Теорема 9.4. Пусть матрицы A_{nxn} и B_{nxn} имеют обратные A^{-1}_{nxn} и B^{-1}_{nxn}, тогда:

$$(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} (A \times B) \times (A \times B)^{-1} &= (A \times B) \times (B^{-1} \times A^{-1}) \\ &= A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} \\ &= A \cdot E \cdot A^{-1} = A \times A^{-1} = E \\ (A \times B)^{-1} \times (A \times B) &= (A^{-1} \times B^{-1}) \times (B \times A) \\ &= B^{-1} \times (A \times A^{-1}) \times B \\ &= B^{-1} \times E \times B = B^{-1} \times B = E \end{aligned}$$

□

Теорема 9.5. Пусть матрца A_{nxn} имеет обратную A^{-1}_{nxn}. Тогда:

$$(A^{\tau})^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{\tau}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} A^{\tau} \times (A^{\tau})^{-1} = A^{\tau} \times \left(A^{-1}\right)^{\tau} = (A \times A^{-1})^{\tau} = E^{\tau} = E \\ (A^{\tau})^{-1} \times A^{\tau} = \left(A^{-1}\right)^{\tau} \times A^{\tau} = (A^{-1} \times A)^{\tau} = E^{\tau} = E \end{aligned}$$

□

Определение 9.20. Матрица A, определитель которой не равен нулю, называется *невырожденной*.

Определение 9.21. Матрица A, определитель которой равен нулю, называется *вырожденной*.

Замечание. *Невырожденную матрицу* называют *обратимой*.

9.7 Вычисление обратной матрицы

Способ 1. По формуле

По формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^{\tau}$$

1. Находим определитель матрицы A.
2. Находим все алгебраические дополнения:
$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$
3. Подставляем алгебраические дополнения
4. Транспонируем матрицу
5. Домножаем на $\frac{1}{detA}$

Проверка получения обратной матрицы

По свойству:
$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$$

Способ 2. Метод Жордана-Гаусса (с помощью элементарных преобразований)

Данный способ подходит для больших матриц.

1. Приписываем к матрице справа единичную матрицу такой же размерности.
$$A|E$$
2. С помощью элементарных преобразований строк всей матрицы приводим матрицу A к верхне-треугольному виду. На первом шаге – переписываем строку без изменения, и с помощью элементарных преобразований получаем нулевые элементы в первом столбце матрицы A под элементом a_{11}. На втором шаге, переписываем первые две строки матрицы, и спомощью элементарных преобразований строк получаем нулевые элементы в первом столбце под элементом a_{22}.
3. С помощью элементарных преобразований строк получаем в левой части диагональную матрицу. На первом шаге – переписываем последнюю строку без изменений. С помощью элементарных преобразований получаем нулевые элементы в последнем столбце над элементов a'_{nn}. Во втором шаге переписываем без изменения последние две строки, и с помощью элементарных преолбразований получаем нулевые элементы в предпоследнем столбце над элементом a'_{n-1n-1}. И так далее.
4. Делим каждую строку на соответствующий элемент диагональный элемент левой части матрицы. В результате в левой части получаем единичную матрицу, а вправой – обратную матрицу матрице A.

Замечание. Если a_{11} равен нулю, то переставляем две строки матрицы так, чтобы a_{11} не был равен нулю.

Пример.

$$A|E = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 7 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 0 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 9 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 7 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{2}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{4} \end{array}\right)$$

10 Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Определение 10.1. *Системой линейных алгебраических уравнений* называется система уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n} = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots a_{mn} = b_m \end{cases}$$

где $a_{ij} = const$, $i = 1..m$, $j = 1..n$ – коэффициенты СЛАУ, $b_i = const$ – свободный член СЛАУ, $x_i, i = 1..n$ – неизвестная переменная СЛАУ.

Определение 10.2. Совокупность переменных $(x_1, x_2 \dots x_n)$, при которых каждое уравнение обращается в верное равенство, называется *решением* данной СЛАУ.

Форма записи СЛАУ выше называется *координатной*.

Матричная форма

Обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Тогда СЛАУ можно записать в виде:

$$\boxed{A \times X = B}$$

Векторная форма записи

Обозначим:

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \qquad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{2m} \end{pmatrix} \qquad \dots \qquad \vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \dots \\ a_{nm} \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Тогда вектор $\vec{b}$, координаты которого являются свободные члены, можно представить в виде линейной комбинаций векторов $\vec{a}$, координаты которых соответствуют элементам столбцов матрицы.

$$\vec{a_1}x_1 + \vec{a_2}x_2 + \dots + \dots \vec{a_n}x_n = \vec{b}$$

Определение 10.3. СЛАУ, имеющая решение, называется *совместной*.

Определение 10.4. СЛАУ, не имеющая решение, называется *несовместной*.

Определение 10.5. Совместная СЛАУ, имеющая единственное решение, называется *совместно-определённой*.

Определение 10.6. Совместная СЛАУ, имеющая бесконечное кол-во решений, называется *совместно-неопределённой*.

Определение 10.7. СЛАУ, у которой все свободные члены равны нулю, называется *однородной*.

Определение 10.8. СЛАУ, у которой хотя бы один свободный член не равен нулю, называется *неоднородной*.

10.1 Решение матричных уравнений

I

Для уравнения вида:

$$A \times X = B$$

1. Умножим обе части уравнения на обратную матрицу A **слева**:

$$\begin{aligned} A^{-1} \times A \times X &= A^{-1} \times B \\ E \times X &= A^{-1} \times B \\ X &= A^{-1} \times B \end{aligned}$$

II

Для уравнений вида:

$$X \times A = B$$

1. Умножим обе части уравнения на обратную матрицу A **справа**:

$$\begin{aligned} X \times A \times A^{-1} &= B \times A^{-1} \\ X \times E &= B \times A^{-1} \\ X &= B \times A^{-1} \end{aligned}$$

III

Для уравнения вида:

$$A \times X \times C = B$$

1. Умножим обе части уравнения на обратную матрицу A **слева** и на обратную матрицу C **справа**:

$$\begin{aligned} A^{-1} \times A \times X \times C \times C^{-1} = A^{-1} \times B \times C^{-1} \\ E \times X \times E = A^{-1} \times B \times C^{-1} \\ X = A^{-1} \times B \times C^{-1} \end{aligned}$$

10.2 Формулы Крамера для решения СЛАУ

Запишем СЛАУ в матричном виде:

$$A \times X = B \qquad A_{n\times n}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Пусть матрица не вырожденная. Тогда её обратная матрица будет иметь вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^{\tau} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{detA} & \frac{A_{12}}{detA} & \dots & \frac{A_{1n}}{detA} \\ \frac{A_{21}}{detA} & \frac{A_{22}}{detA} & \dots & \frac{A_{2n}}{detA} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{n1}}{detA} & \frac{A_{n2}}{detA} & \dots & \frac{A_{nn}}{detA} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{detA} & \frac{A_{12}}{detA} & \dots & \frac{A_{1n}}{detA} \\ \frac{A_{21}}{detA} & \frac{A_{22}}{detA} & \dots & \frac{A_{2n}}{detA} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{n1}}{detA} & \frac{A_{n2}}{detA} & \dots & \frac{A_{nn}}{detA} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_i = \frac{A_{i1}}{detA} b_1 + \frac{A_{i2}}{detA} b_2 + \ldots + \frac{A_{in}}{detA} b_n = \\ = \frac{A_{i1} b_1 + A_{i_2} b_2 + \ldots + A_{in} b_n}{detA} \end{aligned}$$

Заметим, что числитель последнего выражения это определитель матрицы.

$$x_i = \frac{1}{detA} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Замечание. Определитель Δ_i получается, если элементы i-ного столбца заменить на свободные члены СЛАУ.

Если квадратная матрица невырожденная, то однородная СЛАУ имеет *единственное решение*.

Если квадратная матрица вырожденная, то однородная СЛАУ имеет *бесконечное количество решений*.

Теорема 10.1. *Критерий Кронекера-Капелли.*
Для того, чтобы СЛАУ была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы A был равен рангу матрицы A|B.

Доказательство. 1) Необходимость.
Пусть: СЛАУ совместна, $Rg(a) = r$
Базисный минор $r \times r$:

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

Если использовать векторную форму записи, то если СЛАУ имеет решение $x_1, x_2, \dots x_n$, то можно записать её в виде:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_rx_r + a_{r+1}x_{r+1} + \dots + a_nx_n = b \qquad (1)$$

Согласно теореме о базисном миноре, любой столбец матрицы, который не входит в базисный минор, можно представить в виде линейной комбинации базисных столбцов:

$$\begin{cases} a_{r+1} = \lambda_{1,r+1}a_1 + \lambda_{2,r+1}a_2 + \dots + \lambda_{r,r+1}a_r \\ a_{r+2} = \lambda_{2,r+2}a_1 + \lambda_{2,r+2}a_2 + \dots + \lambda_{r,r+2}a_r \\ \dots \\ a_n = \lambda_{2,n}a_1 + \lambda_{2,n}a_2 + \dots + \lambda_{r,n}a_r \end{cases} \qquad (2)$$

Подставим (2) в (1):

$$\begin{aligned} a_1x_1 + {} & a_2x_2 + \dots + a_rx_r + \\ & + (\lambda_{1,r+1}a_1 + \lambda_{2,r+1}a_2 \dots + \lambda_{r,r+1}a_r)x_{r+1} + \\ & + \dots + \\ & + (\lambda_{1,n}a_1 + \lambda_{2,n}a_2 \dots + \lambda_{r,n}a_r)x_n = b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x_1 + {} & \lambda_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + \lambda_{1n}x_n)a_1 + \\ & + (x_2 + \lambda_{2,r+1}x_{r+1} + \dots + \lambda_{2n})a_2 + \\ & + \dots + \\ & + (x_r + \lambda_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + \lambda_{rn})a_r = b \\ & \text{где } b = const, i = 1 \dots r \end{aligned}$$

В результате столбец свободных членов можно представить в виде линейной комбинации столбцов базисного минора. Отсюда следует, что базисный минор матрицы A и будет базисным минором расширенной матрицы $A|B$.

Т.к $M \neq 0$ и любой окаймляющий минор $M' = 0$, то мы получаем:

$$Rg(A) = Rg(A|B)$$

2) Достаточность.
Пусть: $Rg(A) = Rg(A|B) = r$, базисный минор M будет содержать первые r строк и первые r столбцов базисного минора M.

Тогда столбец B можно представить в виде линейной комбинации столбцов базисного минора M:

$$b = x_1^0 a_1 + x_2^0 a_2 + \ldots + x_r^0 a_r + 0 \cdot a_{r+1} + \ldots + 0 \cdot a_n$$

$x_1^0, x_2^0, \ldots x_r^0$ – коэффициенты линейной комбинации

$$x_i^0 = const, i = 1..r$$

Поэтому $X = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots x_r^0\right)$ является решением $AX = B$, т.е. СЛАУ совместимая. $\square$

10.3 Однородные СЛАУ

Однородные СЛАУ можно записыватть в матричном виде следующим образом:

$$A \times X = \theta$$

$$\theta_{m\times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad X_{n\times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Теорема 10.2. *О свойствах решения однородных СЛАУ.*
Пусть $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots X^{(n)}$ – решения однородных СЛАУ $A \times X = \theta$. Тогда их линейной комбинацией так же является решением однородной СЛАУ.

Доказательство.

$$\begin{aligned} X &= \lambda_1 X^{(1)} + \lambda_2 X^{(2)} + \dots + \lambda_k X^{(k)} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i X^{(i)}, \lambda_i = const \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \times X = A \cdot \sum_{i=1}^{k} \lambda_i X^{(i)} &= \sum_{i=1}^{k} A \lambda_i X^{(i)} = \\ = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot A \times X^{(i)} &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \theta = \theta \end{aligned}$$

□

Определение 10.9. Набор решений однородной СЛАУ называется *фундаментальной системой решений (ФСР).*

$$k = n - r \quad r = Rg(A), n \text{ – кол-во неизвестных СЛАУ}$$

Теорема 10.3. *О существовании ФСР однородной СЛАУ.*
Пусть имеется однородная СЛАУ $A \times X = \theta$ с n неизвестных и $rg(A) = r$.
Тогда существует набор $k = n - r$ решений однородной СЛАУ, которые образуют ФСР:

$$X^{(1)}, X^{(2)}, \dots X^{(k)}$$

Доказательство. Пусть базисный минор M матрицы A состоит из первых r строк и первых r столбцов матрицы A. Тогда любая строка A, от $r+1$ до m будет линейной комбинацией строк базисного минора.

Если $x_1, x_2, \dots x_n$ удовлетворяют уравнениям СЛАУ соответветствующим строкам базисного минора то это решение будет удовлетворять и остальным уравнениям СЛАУ. Поэтому исключим из системы уравнения после r-ой строки:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r + \dots + a_{rn}x_n = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Переменные, соответствующие базисным столбцам, называют *базисными*, остальные – *свободными*.

В системе (3) базисными переменными являются переменные $x_1, x_2, \dots x_r$; свободными являются переменные $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots x_n$.

Оставим в левой части слагаемые с базисными переменными, а в правой – со свободными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1r}x_r = a_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2r}x_r = a_{2,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots a_{rr}x_r = a_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{rn}x_n \end{cases} \tag{4}$$

Если свободным переменным придавать различные значения, то определитель левой части (4) равен базисному минору $A(\neq 0)$, то (4) будет иметь единственное решение.

Возьмём k наборов свободных переменных:

$$\begin{matrix} X_{r+1}^{(1)} & X_{r+1}^{(2)} & \dots & X_{r+1}^{(k)} \\ X_{r+2}^{(1)} & X_{r+2}^{(2)} & \dots & X_{r+2}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_n^{(1)} = 0 & X_n^{(2)} = 0 & \dots & X_n^{(k)} = 0 \end{matrix}$$

В результате, при каждом наборе свободных переменных мы получаем k решений однородной СЛАУ:

$$X^{(i)} = \begin{pmatrix} X_1^{(i)} \\ X_2^{(i)} \\ \dots \\ X_r^{(i)} \\ \dots \\ X_n^{(i)} \end{pmatrix}$$

Пусть линейная комбинация решений равна 0:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \\ \dots \\ X_r^{(1)} \\ \dots \\ X_n^{(1)} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \\ \dots \\ X_r^{(2)} \\ \dots \\ X_n^{(2)} \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_k \begin{pmatrix} X_1^{(k)} \\ X_2^{(k)} \\ \dots \\ X_r^{(k)} \\ \dots \\ X_n^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \theta$$

$$\begin{aligned} r+1: \quad & 1 \cdot \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 + \ldots + 0 \cdot \lambda_k = 0 \implies \lambda_1 = 0 \\ r+2: \quad & 0 \cdot \lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2 + \ldots + 0 \cdot \lambda_k = 0 \implies \lambda_2 = 0 \\ & \dots \\ r: \quad & 1\lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 + \ldots + 1 \cdot \lambda_k = 0 \implies \lambda_k = 0 \end{aligned}$$

Все коэффициенты равны нулю. Мы получили тривиальную равную нуля линейную комбинация решений однородной СЛАУ. □

Определение 10.10. Если в каждом столбце ФСР все свободные переменные равны нулю, кроме одного, равного единице, то такая ФСР называется *нормальной*

Теорема 10.4. *О структуре общего решения однородной СЛАУ.* Пусть $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots X^{(k)}$ – ФСР некоторой СЛАУ $A \times X = \theta$. Тогда общее решение однородной СЛАУ будет иметь вид:

$$X = c_1 X^{(1)} + c_2 X^{(2)} + \ldots + c_k X^{(k)}, \quad c_i = const$$

Доказательство. Пусть дана однородная СЛАУ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Пусть $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – решение СЛАУ, и матрица A имеет ранг $rgA = r$. Тогда если X является решением, то он является решением первых r уравнений, соответствующих базисным строкам матрицы A. Пусть базисный минор стоит из первых r строк и первых r столбцов данной матрицы, тогда если X – решение уравнений с нулевого по r, то он является решением уравнений с $r+1$ по m, которые являются линейной комбинацией первых k уравнений, поэтому уравнения с $r+1$ по m можно исключить. Т.к. базисный минор включает первые r столбцов матрицы A:

$$M_r = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & \dots & a_{1r}x_r \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & \dots & a_{2r}x_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1}x_1 & a_{r2}x_2 & \dots & a_{rr}x_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & a_{m2}x_2 & \dots & a_{mr}x_r \end{pmatrix}$$

то соответствующие этим столбцам переменные являются базисными (с x_1 по x_r), а остальные переменные (с x_{r+1} по x_n) – свободными.

После исключения первых r строк, получаем:

$$\begin{cases} a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n = 0 \\ a_{r+1,1}x_1 + a_{r+1,2}x_2 + \ldots + a_{r+1,n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mr}x_r + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Преобразуем уравнения так, что в левой части остались базисные переменные, а в правой – свободные:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12} + x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = a_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22} + x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = a_{2r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2} + x_2 + \ldots + a_{mr}x_r = a_{mr+1}x_{r+1} + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Задавая различные значения свободных переменных, мы получаем, что система (3) будет иметь единственное решение, т.к. главный определитель данной системы будет равен угловому минору, не равному нулю. Решая эту систему получаем решение:

$$\begin{cases} x_1 = x_{r+1}\lambda_{1,r+1} + x_{r+2}\lambda_{1,r+2} + \ldots + x_n\lambda_{1,n} \\ x_2 = x_{r+1}\lambda_{2,r+1} + x_{r+2}\lambda_{2,r+2} + \ldots + x_n\lambda_{2,n} \\ \dots \\ x_r = x_{r+1}\lambda_{r,r+1} + x_{r+2}\lambda_{r,r+2} + \ldots + x_n\lambda_{r,n} \end{cases} \tag{4}$$

Т.к. $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots X^{(k)}$ образуют ФСР, то они удовлетворяют системе (4):

$$\begin{cases} X_1^{(i)} = X_{r+1}^{(i)}\lambda_{1,r+1} + X_{r+2}^{(i)}\lambda_{1,r+2} + \ldots + X_n^{(i)}\lambda_{1,n} \\ X_2^{(i)} = X_{r+1}^{(i)}\lambda_{2,r+1} + X_{r+2}^{(i)}\lambda_{2,r+2} + \ldots + X_n^{(i)}\lambda_{2,n} \\ \dots \\ X_r^{(i)} = X_{r+1}^{(i)}\lambda_{n,r+1} + X_{r+2}^{(i)}\lambda_{n,r+2} + \ldots + X_n^{(i)}\lambda_{n,n} \end{cases} \qquad X^{(i)} = \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \\ \dots \\ x_m^{(i)} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Составим матрицу B из столбцов $X^{(i)}$:

$$B = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} x_1 & x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(n)} \\ x_2 & x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_r & x_r^{(1)} & x_r^{(2)} & \dots & x_r^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \dots & x_n^{(n)} \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} X & X^{(1)} & X^{(2)} & \dots & X^{(n)} \end{matrix} \end{array}$$

Вычтем из элементов первой строки соответствующие элементы строк с $r{+}1$ по m с соответствующим коэффициентом $\lambda_{1,r+1}, \lambda_{1,r+2}, \dots \lambda_{1n}$:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} - \lambda_{1,r+1}x_{r+1}^{(1)} - \lambda_{1,r+2}x_{r+2}^{(2)} - \dots - \lambda_{1,n}x_n^{(1)} = 0 \\ x_1^{(2)} - \lambda_{1,r+1}x_{r+1}^{(2)} - \lambda_{1,r+2}x_{r+2}^{(2)} - \dots - \lambda_{1,n}x_n^{(2)} = 0 \\ \dots \\ x_1^{(k)} - \lambda_{1,r+1}x_{r+1}^{(k)} - \lambda_{1,r+2}x_{r+2}^{(k)} - \dots - \lambda_{1,n}x_n^{(k)} = 0 \\ x_1 - \lambda_{1,r+1}x_{r+1} - \lambda_{1,r+2}x_{r+2} - \dots - \lambda_{1,n}x_n = 0 \end{cases}$$

Аналогично вычитая из строк до r строки $r + 1$ до n с коэффициентами λ. В результате получаем, что в преобразованной матрице B первые r строк будут нулевые:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_{r+1} & x_{r+1}^{(1)} & x_{r+1}^{(2)} & \dots & x_{r+1}^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \dots & x_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

Поскольку элементарные преобразования не меняют ранга матрицы, получаем, что ранг матрицы B будет равен $k = n - r$. Так как по условию столбцы $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots X^{(k)}$ образуют ФСР, они являются линейно-независимыми. Поэтому первый столбец можно представить в виде линейной комбинации столбцов. □

10.4 Неоднородные СЛАУ

Теорема 10.5. *О связи решений неоднородной и соответствующей однородной СЛАУ.*
Пусть $X^{(0)}$ – некоторое решение неоднордной СЛАУ $A \times X = B$. Произвольный стобец X является решением СЛАУ $A \times X = B$ тогда и только тогда, когда его можно представить в виде:

$$X = X^{(0)} + Y, \qquad \text{где } A \times Y = \theta$$

Доказательство. 1) Необходимость.
Пусть X – решение СЛАУ $A \times X = B$. Обозначим $Y = X - X^{(0)}$

$$A \times Y = A \times (X - X^{(0)}) = A \times X - A \times X^{(0)} = B - B = \theta$$

Значит Y является решением соответствующей однородной СЛАУ $A \times Y = \theta$.

2) Достаточность.
Пусть X можно представить в виде:

$$X = X^{(0)} + Y, \quad \text{где } A \times Y = 0$$

Тогда:

$$A \times X = A \times (X^{(0)} + Y) = A \times X^{(0)+A \times Y} = B + \theta = B$$

Отсюда делаем вывод, что X является решением неоднородной СЛАУ.
□

Теорема 10.6. *О структуре общего решения неоднородной СЛАУ.*
Пусть $X^{(0)}$ – некоторое частное решение неоднородной СЛАУ $A \times X = B$. Пусть $X^{(1)} \dots$ – некоторая ФСР, соответствующая однородной СЛАУ $A \times X = \theta$. Тогда общее решение неоднородной СЛАУ $A \times X = B$ будет иметь вид :

$$X_o = X^{(0)} + c_1 X^{(1)} + c_2 X^{(2)} + \dots + c_n X^{(n)}, \quad c_i = const$$