Подготовка к рубежному контролю №1 «Линейная алгебра»

Проект «Аполлон»

10 апреля 2024 г.

1 Базовые теоретические вопросы

Вопрос 1. Дать определение линейного (векторного) пространства.

Ответ. Линейное пространство $\mathcal{L}$ над множеством значений $\mathcal{P}$, для которого определены операции сложения и умножения на скаляр, а также верно:

1. $\forall x, y \in \mathcal{L} \quad x + y = y + x$
2. $\forall x, y \quad (x + y) + z = x + (y + z)$
3. $\exists 0 : \forall x \in \mathcal{L} x + 0 = x$
4. $\forall x \in \mathcal{L} \quad \exists y : x + y$ – существование противоположного вектора $(-x)$
5. $\forall x \in \mathcal{L} \quad (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
6. $\forall x \quad 1x = x$
7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
8. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

Вопрос 2. Дать определение линейно зависимой и линейно независимой системы векторов.

Ответ. Система векторов называется *линейно зависимой*, если существует нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому вектору.

Иначе система векторов называется *линейно независимой*.

Вопрос 3. Дать определение базиса и размерности линейного пространства.

Ответ. *Базисом* линейного пространства $\mathcal{L}$ называют любую упорядоченную систему векторов, для которой выполнены два условия:

1. эта система векторов линейно независима;
2. каждый вектор в линейном пространстве может быть представлен в виде линейной комбинации векторов этой системы.

Максимальное количество линейно независимых векторов в данном линейном пространстве называют *размерностью линейного пространства*.

$$\dim(\mathcal{L}) = n$$

Вопрос 4. Дать определение матрицы перехода от одного базиса к другому.

Ответ. Матрицу U называют *матрицей перехода* от старого базиса b к новому базису, c.

$$c = bU \quad U = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Вопрос 5. Записать формулу преобразования координат вектора при переходе от одного базиса линейного пространства к другому.

Ответ. Пусть в n-мерном линейном пространстве $\mathcal{L}$ заданы два базиса: старый $b = (b_1 \dots b_n)$ и новый $c = (c_1 \dots c_n)$. Любой вектор можно разложить по базису b. В частности, каждый вектор из базиса c может быть представлен в виде линейной комбинации векторов базиса b:

$$c_i = \alpha_{1i} b_1 + \alpha_{2i} b_2 + \ldots + \alpha_{ni} b_n \quad i = \overline{1, n}$$

Вопрос 6. Дать определение подпространства линейного пространства и линейной оболочки системы векторов.

Ответ. Подмножество $\mathcal{H}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ называют *линейным подпространством*, если выполнены следующие два условия:

1. Сумма любых двух векторов из $\mathcal{H}$ принадлежит $\mathcal{H} : x, y \in \mathcal{H} \implies x + y \in \mathcal{H}$;
2. Произведение любого вектора из $\mathcal{H}$ на любое действительное число снова принадлежит $\mathcal{H} : x \in \mathcal{H}, \lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda x \in \mathcal{H}$.

Линейной оболочкой системы векторов $\mathcal{L}$ называется совокупность всех конечных линейных комбинаций векторов данной системы.

Вопрос 7. Дать определение скалярного произведения и евклидова пространства.

Ответ. *Скалярным произведением* называется операция, определенная следующим образом:

1. $(x, y) = (y, x)$;
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y), \quad \lambda \in \mathbb{R}$;
4. $(x, x) > 0$, причем $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

Евклидовым пространством называют линейное пространство $\mathcal{E}$, в котором определена операция *скалярного умножения*.

Вопрос 8. Записать неравенство Коши – Буняковского и неравенство треугольника.

Ответ. Неравенство Коши-Буняковского:

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y) \quad \forall x, y \in \mathcal{E}$$

Неравенство треугольника:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathcal{L}$$

Вопрос 9. Дать определение ортогональной системы векторов и ортонормированного базиса евклидова пространства.

Ответ. Два вектора в евклидовом пространстве называют *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю.

$$x \perp y \iff (x, y) = 0$$

Систему векторов евклидова пространства называют *ортогональной*, если любые два вектора из этой системы ортогональны.

Если базис евклидова пространства представляет собой ортогональную систему векторов, то этот *базис* называют *ортогональным*.

Вопрос 10. Сформулировать теорему о связи линейной зависимости и ортогональности системы векторов.

Ответ. Любая ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.

Вопрос 11. Дать определение линейного оператора и матрицы линейного оператора.

Ответ. Отображение $\mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ из линейного пространства $\mathcal{L}$ в линейное пространство $\mathcal{L}'$ называют *линейным преобразованием* или *линейным оператором*, если выполнены условия:

1. $\mathcal{A}(x + y) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y) \quad \forall x, y \in \mathcal{L}$;
2. $\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda \mathcal{A}(x) \quad \forall x \in \mathcal{L} \quad \forall \lambda \in R$.

Матрицу $A = (a_1 \dots a_n)$, составленную из координатных столбцов векторов $\mathcal{A}b_1 \dots \mathcal{A}b_n$ в базисе $b = (b_1 \dots b_n)$ называют *матрицей линейного оператора* $\mathcal{A}$ *в базисе* $\mathcal{B}$.

Вопрос 12. Записать формулу преобразования матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.

Ответ. Матрицы A_b и A_e линейного оператора $\mathcal{A} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$, записанные в базисах b и e линейного пространства $\mathcal{L}$, связаны друг с другом соотношением:

$$A_e = U^{-1} A_b U$$

где $U = U_{b \to e}$ – матрица перехода от базиса b к базису e.

Вопрос 13. Дать определение характеристического уравнения, собственного числа и собственного вектора линейного оператора.

Ответ. Многочлен $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ называют *характеристическим многочленом матрицы* A, а уравнение $\chi_a(\lambda) = 0$ – *характеристическим уравнением матрицы* A.

Ненулевой вектор x в линейном пространстве $\mathcal{L}$ называют *собственным вектором линейного оператора* $A : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, если для некоторого действительного числа λ выполняется соотношение $Ax = \lambda x$. При этом число λ называют *собственным значение линейного оператора* A.

Вопрос 14. Сформулировать теорему о собственных векторах самосопряженного оператора, отвечающих разным собственным значениям.

Ответ. Собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

Вопрос 15. Дать определение самосопряженного линейного оператора на евклидовом пространстве и сформулировать теорему о виде матрицы самосопряженного оператора в ортонормированном базисе.

Ответ. Линейный оператор A, действующий в евклидовом пространстве, называют *самосопряженным*, если $A^* = A$.

Матрица оператора в любом ортонормированном базисе является симметрической тогда и только тогда, когда оператор *самосопряженный*.

Вопрос 16. Сформулировать теорему о корнях характеристического уравнения самосопряженного оператора.

Ответ. Все корни характеристического уравнения самосопряженного оператор действительны.

Вопрос 17. Сформулировать теорему о собственных векторах самосопряженного оператора, отвечающих разным собственным значениям.

Ответ. Собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

Вопрос 18. Сформулировать теорему о существовании ортонормированного базиса, в котором матрица заданного самосопряженного оператора имеет простой вид.

Ответ. Если собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ самосопряженного оператора A, действующего в n-мерном евклидовом пространстве $\mathcal{E}$, попарно различны, то в $\mathcal{E}$ существует *ортонормированный базис*, в котором матрица этого линейного оператора A имеет диагональный вид, причем *диагональными элементами* такой матрицы являются *собственные значения* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Вопрос 19. Дать определение ортогонального линейного оператора и ортогональной матрицы.

Ответ. Квадратную матрицу O называют *ортогональной*, если она удовлетворяет условию

$$O^\tau O = E,$$

где E – единичная матрица.

Линейный оператор $A : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, действующий в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$, называют *ортогональный оператором* (или *ортогональный преобразованием*), если он сохраняет скалярное произведение в $\mathcal{E}$, то есть $\forall x, y \in \mathcal{E}$ выполняется равенство

$$(Ax, Ay) = (x, y)$$

Вопрос 20. Дать определение квадратичной формы, матрицы и канонического вида квадратичной формы.

Ответ. Однородный многочлен второй степени от n переменных с действительными коэффициентами

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij}x_ix_j$$

называют *квадратичной формой.*

Квадратичную форму можно записать в виде:

$$x^\tau Ax$$

где $x = (x_1 x_2 \ldots x_n)^\tau$ – столбец, составленный из переменных; $A = (a_{ij})$ – симметричная матрица порядка n, называемая *матрицей квадратичной формы.*

Квадратичную форму

$$\alpha_1 x_1^2 + \ldots + a_n x_n^2, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, n}.$$

называют *квадратичной формой канонического вида.*

Вопрос 21. Записать формулу преобразования матрицы квадратичной формы при переходе к новому базису.

Ответ. Матрица A квадратичной формы при переходе к другому базису изменяется по формуле $A' = U^{\tau} A U$, где U – матрица перехода.

Вопрос 22. Дать определение положительно определенной, отрицательно определенной и неопределенной квадратичной формы.

Ответ. Квадратичная форма $f(x) = x^{\tau} A x$, $x = (x_1 x_2 \ldots x_n)^{\tau}$ называется:

- *положительно (отрицательно) определенной*, если для любого ненулевого столбца x выполняется неравенство $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$);
- *неотрицательно (неположительно) определенной*, если $f(x) \geq 0$ ($f(x) \leq 0$) для любого столбца x, причем $\exists$ ненулевой столбец x, для которого $f(x) = 0$;
- *знакопеременной (неопределенной)* , если существуют такие столбцы x и y, что $f(x) > 0$ и $f(y) < 0$.

Вопрос 23. Сформулировать критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы и его следствия для отрицательно определенных и неопределенных форм.

Ответ. Для того, чтобы квадратичная форма от n переменных была *положительно* определена, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства $\Delta_i > 0, i = \overline{1, n}$, где Δ_i – угловые миноры матрицы квадратичной формы.

Вопрос 24. Сформулировать закон инерции квадратичных форм.

Ответ. Для любых двух канонических видов

$$f_1(y_1, \ldots, y_m) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_m y_m^2, \quad \lambda_i \neq 0, i = \overline{1, m}$$
$$f_2(z_1, \ldots, z_k) = \mu_1 z_1^2 + \ldots + \mu_k z_k^2, \quad \mu_j \neq 0, j = \overline{1, k}$$

одной и той же квадратичной формы:

- $m = k$ и их общее значение равно рангу квадратичной формы;

- количество положительных коэффициентов λ_i совпадает с количеством положительных коэффициентов μ_j;
- количество отрицательных коэффициентов λ_i совпадает с количеством отрицательных коэффициентов μ_j;

2 Теоретические вопросы повышенной сложности

Вопрос 25. Вывести формулу преобразования координат вектора при переходе от одного базиса к другому.

Ответ. Пусть в n-мерном линейном пространстве $\mathcal{L}$ заданы два базиса: старый $b = (b_1 \dots b_n)$ и новый $c = (c_1 \dots c_n)$. Любой вектор можно разложить по базису b. В частности, каждый вектор из базиса c может быть представлен в виде линейной комбинации векторов базиса b:

$$c_i = \alpha_{1i} b_1 + \alpha_{2i} b_2 + \ldots + \alpha_{ni} b_n \quad i = \overline{1,n}$$

Запишем эти представления в матричной форме:

$$c_i = b_i \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \dots \\ \alpha_{ni} \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1,n}$$

или

$$c = bU$$

где

$$U = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Вопрос 26. Доказать неравенство Коши-Буняковского и неравенство треугольника.

Теорема (Неравенство Коши-Буняковского)**.** Для любых векторов x, y евклидова пространства $\mathcal{E}$ справедливо неравенство:

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$$

Доказательство. Рассмотрим неравенство $(x, y) \leq (x, x)(y, y)$. При $x = 0$ обе части неравенства равны нулю согласно свойству; значит, неравенство выполняется. Для любого действительного числа λ, в силу аксиомы, выполняется неравенство

$$(\lambda x - y, \lambda x - y) \geq 0.$$

Преобразуем левую часть неравенства, используя аксиомы и свойства скалярного умножения:

$$(\lambda x - y)(\lambda x - y) = \lambda(x, \lambda x - y) - (y, \lambda x - y) = \lambda^2(x, x) - 2\lambda(x, y) + (y, y).$$

Мы получили квадратный трехчлен относительно параметра λ (коэффициент (x, x) при λ_2 согласно аксиоме ненулевой, так как $x \neq 0$), неотрицательный при всех действительных значениях параметра. Следовательно, его дискриминант равен нулю или отрицательный, то есть:

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y).$$

□

Теорема (Неравенство треугольника). Для любых векторов из евклидова пространства верно следующее неравенство:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Доказательство. Докажем, что $\|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$.

1. Из определения нормы в евклидовом пространстве

$$\|x\|^2 = (x, x) \qquad \|y\|^2 = (y, y)\,.$$

2. Из неравенства Коши-Буняковского

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y).$$

3. Следовательно, получаем что

$$\|x, y\|^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2.$$

4. Из определения нормы в евклидовом пространстве

$$\begin{aligned} (x + y, x + y) = (x + y)^2 = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leq \\ \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = \\ = (\|x\| + \|y\|)^2\,. \end{aligned}$$

Извлечем корень из обеих частей неравенства и используя свойство нормы получаем

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

□

Вопрос 27. Вывести формулу преобразования матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.

Ответ. Пусть $y = \mathcal{A}x$. Обозначим координаты векторов x и y в старом базисе через x_b b y_b, а в новом базисе e – через x_e и y_e. Поскольку:

$$y_b = A_b x_b \quad x_b = U x_e \quad y_b = U y_e$$

То получаем:

$$y_e = U^{-1} y_b = U^{-1}(A_b x_b) = U^{-1}(A_b U x_e) = (U^{-1} A_b U) x_e$$

Равенство $y_e = (U^{-1}A_bU)x_e$ является матричной формой записи действия линейного оператора $\mathcal{A}$ в базисе e, поэтому $U^{-1}A_bU = A_e$

Вопрос 28. Доказать инвариантность характеристического уравнения линейного оператора и инвариантность следа матрицы.

Теорема (Об инвариантности характеристического уравнения линейного оператора)**.** Характеристическое уравнение линейного оператора не зависит от выбора базиса линейного пространства.

Доказательство. Пусть A и B – мтрицы линейного оператора $\mathfrak{A} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ в базисах e_1 и e_2 линейного простанства $\mathcal{L}$. Рассмотрим характеристические многочлены $\chi_A(\lambda)$ и $\chi_B(\lambda)$; Пусть U – матрица перехода от A к B. Тогда:

$$\begin{aligned}\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda E) = \det(U^{-1}AU - \lambda U^{-1}EU) = \\ = \det(U^{-1}(A - \lambda E)U) = \det(U^{-1})\det(A - \lambda E)\det(U) = \\ = \det(A - \lambda E) = \chi_A(\lambda)\end{aligned}$$

то есть для двух любых базисов линейного пространства $\mathcal{L}$ характеристическое уравнение линейного оператора $\mathfrak{A}$ совпадают. □

Теорема (Об инвариантности следа)**.** След матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса линейного пространства.

Доказательство. Запишем характеристический многочлен линейного оператора A в произвольном базисе

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + p_1\lambda + p_0.$$

След матрицы по определению

$$A = (-1)^{n-1}p_{n-1}$$

В предыдущей теореме было доказано, что коэффициенты p_i $i = \overline{0, n}$ не зависят от выбора базиса. □

Вопрос 29. Доказать теорему о собственных векторах линейного оператора, отвечающих разным собственным значениям.

Теорема. Пусть собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ линейного оператора A попарно различимы. Тогда система соответствующих им собственных векторов $e_1, \ldots, e_r$ *линейно независима.*

Доказательство. Докажем методом математической индукции.

При $r = 1$ утверждение верно, так как собственный вектор по определению является *ненулевым.*

Пусть утверждение верно при $r = m$, то есть для произвольной системы из m собственных векторов $e_1, \ldots, e_m$. Добавим к системе вектором еще один собственный вектор e_{m+1}, отвечающий собственному значению λ_{m+1}. Докажем, что расширенная система вектором осталась линейно-независимой.

Предположим, что произвольная линейная комбинация полученной системы собственных векторов равна нулевому вектору:

$$\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_m e_m + \alpha_{m+1} e_{m+1} = 0. \tag{1}$$

К (1) применим линейный оператор A:

$$\alpha_1 A e_1 + \ldots + \alpha_m A e_m + \alpha_{m+1} A e_{m+1} = 0. \tag{2}$$

Учтем, что векторы $e_1, \ldots, e_{m+1}$ – собственные:

$$\alpha_1 \lambda_1 e_1 + \ldots + \alpha_m \lambda_m e_m + \alpha_{m+1} \lambda_{m+1} e_{m+1} = 0. \tag{3}$$

Умножив (3) на λ_{m+1} и вычтя полученное выражение из (3) получаем линейную комбинацию векторов $e_1, \ldots, e_m$, равную нулевому вектору:

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{m+1})e_1 + \ldots + \alpha_m(\lambda_m - \lambda_{m+1}) = 0.$$

Вспоминая, что система векторов $e_1, \ldots, e_m$ по предположению линейно независима, делаем вывод, что у полученной линейной комбинации все коэффициенты равны нулю:

$$\alpha_k(\lambda_k - \lambda_{m+1}) = 0, \quad k = \overline{1, m}. \tag{4}$$

Поскольку все собственные значения λ_i попарно различны, то из равенств (4) следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$. Значит, соотношение (2) можно записать в виде $\alpha_{m+1} e_{m+1} = 0$, а так как вектор e_{m+1} ненулевой (как собственный вектор), то $\alpha_{m+1} = 0$.

В итоге получаем, что равенство (2) выполняется лишь в том случае, когда все коэффициенты α_i $i = \overline{1, m+1}$ равны нулю. Тем самым мы доказали, что система векторов $e_1, \ldots e_{m+1}$ линейно независима. □

Вопрос 30. Вывести формулу преобразования матрицы квадратичной формы при переходе к новому базису.

Ответ. Пусть дана квадратичная форма $x^\tau A x$, где $x = (x_1 x_2 \ldots x_n)$. В n-мерном линейном пространстве $\mathcal{L}$ с фиксированным базисом b она определяет функцию $f(x) = x_b^\tau A x_b$, заданную через координаты x_b вектора x в базисе b. Найдем представление этой же функции в некотором другом базисе e. Пусть U – матрица перехода от b к e. Тогда координаты x_b вектора x в старом базисе b и координаты хе того же вектора в новом базисе е будут связаны соотношением

$$x_b = U x_e \tag{1}$$

Функция $f(x)$ в новом базисе будет выражаться через новые координаты вектора x следующим образом:

$$x_b^\tau A x_b = (U x_e)^\tau \, A \, (U x_e) = x_e^\tau \, (U^\tau A U) \, x_e = x_e^\tau A' x_e.$$

Функция f в новом базисе также записывается при помощи квадратичной формы, причем матрица A_0 этой квадратичной формы связана с матрицей A исходной квадратичной формы соотношением

$$A' = U^{\tau} AU. \tag{2}$$