Подготовка к экзамену
«Интегралы и дифференциальные уравнения»

Проект «Аполлон»

11 июня 2024 г.

1 Теория по интегралам

Вопрос 1. Сформулировать определение первообразной. Сформулировать свойства первообразной и неопределенного интеграла. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании по частям для неопределенного интеграла.

Определение (Первообразная). Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на интервале (a, b), если $F(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $\forall x \in (a, b)$ верно:

$$F'(x) = f(x).$$

Ответ. Свойства первообразной.

1. Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на (a, b), то $F(x) + C$ – первообразная функции $f(x)$ на (a, b), где $\forall C - const$.
2. Если $F(x)$ дифференцируема на (a, b) и $\forall x \in (a, b)$ верно $F'(x) = 0$, то $F(x) = const$ $\forall x \in (a, b)$.
3. Любая непрерывная функция на (a, b) имеет множество первообразных на этом интервале, причем любые две отличаются на константу.

Ответ. Свойства неопределенного интеграла.

Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и константы.

$$\int d(F(x)) = F(x) + C.$$

Константу можно выносить за знак неопределенного интеграла.

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx \quad \lambda \neq 0.$$

Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют первообразные $F_1(x)$ и $F_2(x)$ соответственно, то функция $\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x)$, где $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ имеет первообразную на (ab) , причем $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$:

$$\int (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))\, dx = \lambda_1 \int f_1(x)dx + \lambda_2 \int f_2(x)dx.$$

Теорема (Об интегрировании по частям). Пусть функция $u = u(x)$, $v = v(x)$ непрерывно-дифференцируемы. Тогда справедлива формула:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Доказательство. Рассмотрим произведения двух функций: $u(x)v(x)$. Дифференциал выражения равен:

$$d(uv) = udv + vdu \quad udv = d(uv) - vdu.$$

Интегрируем:

$$\int d(uv) = \int (d(uv) - vdu)$$
$$\int udv = uv - \int vdu.$$

□

Вопрос 2. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие. Интегрирование простейших дробей.

Определение (Рациональная дробь). Дробно-рациональной функцией или рациональной дробью называется функция, равная частному от деления двух многочленов.

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

Определение (Правильная рациональная дробь). Рациональная дробь называется правильной, если степень числителя меньше степени знаменателя, т.е. $m < n$.

Ответ.

1.
$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{dx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C \quad \forall C.$$

2.
$$\int \frac{A}{(x-a)^k} = A\int \frac{dx}{(x-a)^k} = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} =$$
$$= A\int (x-a)^{-k}d(x-a) = \frac{A(x-a)^{1-k}}{1-k} + C \quad \forall c$$

3.
$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = (*)$$
$$x^2+px+q = x^2 + 2\cdot\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)^2 = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + b^2$$

$$\begin{aligned}
(*) &= \int \frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)+b^2}dx = \begin{vmatrix} x+\frac{p}{2} = t \\ x = t - \frac{p}{2} \\ dx = dt \end{vmatrix} \\
&= \int \frac{M(t-\frac{p}{2})+N}{t^2+b^2}dt = \\
&= M\int \frac{t}{t^2+b^2}dt + \left(N - \frac{p}{2M}\right)\int \frac{dt}{t^2+b^2} = \\
&= \frac{M}{2}\int \frac{d\left(t^2+b^2\right)}{t^2+b^2} + \left(N - \frac{p}{2}M\right)\frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{t}{b} = \\
&= \frac{M}{2}\ln|t^2+b^2| + \frac{\left(N-\frac{p}{2}M\right)}{b}\operatorname{arctg}\frac{t}{b} + C = \\
&= \frac{M}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{\left(N-\frac{p}{2}M\right)}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C\right)
\end{aligned}$$

Вопрос 3. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему о сохранении определенным интегралом знака подынтегральной функции.

Определение (Определенный интеграл). Определенным интегралом от функции $y = f(x)$ на $[a, b]$ называется конечный предел интегральной суммы

$$\int_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

когда число отрезков растет, а их длина стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Ответ.

1. Если функция $y = f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

2. Если функция $y = f(x)$ интегрируема на каждом из отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$, то она интегрируема на $[a, b]$ и верно равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

3. Если $c = const$, то:

$$\int_a^b cdx = c(b - a).$$

4. Если функция $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, то их линейная комбинация $\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x)$, где $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ интегрируема на $[a, b]$ и верно равенство:

$$\int_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))\,dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x)dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x)dx.$$

5. Если $f(x)$ интегрируема и неотрицательная на $[a, b]$, то:

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

6. Пусть функция $f(x)$ и $g(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $\forall x \in [a, b]$ $f(x) > g(x)$, тогда:

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

7. Если функции $f(x)$ и $|f(x)|$ интегрируема на оценке $[a, b]$, то справедливо неравенство:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b f(x)dx.$$

8. Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то:

$$\exists c \in [a, b] : f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

9. Пусть функция $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$ и $\forall x \in [a, b] : m \leq f(x) \leq M$, $g(x) \geq 0$. Тогда:

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx.$$

Теорема (О сохранении знака подынтегральной функции). Если $f(x)$ интегрируема и неотрицательная на $[a, b]$, то:

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Доказательство. По определению:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

причем $\Delta x_i > 0$ и $f(\xi_i) \geq 0$. Тогда:

$$f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,n}$$
$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0$$
$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0$$
$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

□

Вопрос 4. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему об оценке определенного интеграла.

Ответ. Свойства см. предыдущий вопрос.

Теорема (Об оценке определенного интеграла). Пусть функция $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$ и $\forall x \in [a,b] : m \leq f(x) \leq M, \quad g(x) \geq 0$. Тогда:

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Т.к. $\forall x \in [a,b]$ верны неравенства:

$$m \leq f(x) \leq M \quad m, M \in \mathbb{R}$$
$$g(x) \geq 0$$
$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x).$$

По теореме об интегрировании неравенства:

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx.$$

□

Вопрос 5. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему об оценке модуля определенного интеграла.

Ответ. Свойства см. предыдущий вопрос.

Теорема (Об оценке модуля определенного интеграла). Если функции $f(x)$ и $|f(x)|$ интегрируема на оценке $[a,b]$, то справедливо неравенство:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b f(x)dx$$

Доказательство. $\forall x \in [a,b]$ верно неравенство:

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|.$$

По теореме о интеграле линейной комбинации и об интегрировании неравенства $\implies$:

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Сворачиваем двойное неравенство:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \geq \int_a^b |f(x)|dx.$$

□

Вопрос 6. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему о среднем для определенного интеграла.

Ответ. Свойства см. предыдущий вопрос.

Теорема (О среднем значении для определенного интеграла). Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то:

$$\exists c \in [a, b] : f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Доказательство. Т.к. функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то по теореме Вейерштрасса она достигает своего наибольшего и наименьшего значения, т.е. $\exists m, M \in \mathbb{R} : \forall x \in [a, b] \quad m \leq f(x) \leq M$ По теореме об интегрировании неравенства:

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx.$$

По теореме об интеграле линейной комбинации функций:

$$m \int_a^b dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \int_a^b dx.$$

По теореме о интегрировании константы:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a). \tag{1}$$

Т.к. функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то по теореме Больцано-Коши, она принимает все свои значения между наибольшим и наименьшим значениями. Разделим (1) на $b - a$:

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

По теореме Больцано-Коши:

$$\exists c \in [a, b] : f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

□

Вопрос 7. Дать определение интеграла с переменным верхним пределом. Сформулировать и доказать теорему о производной от интеграла с переменным верхним пределом.

Определение. Определенным интегралом с переменным верхнем пределом интегрирования от непрерывной функции $f(x)$ на $[a, b]$ называется интеграл вида:

$$\mathcal{I}(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Теорема (Непрерывность). Если функция $f(x)$ на $[a, b]$ непрерывна, то $\mathcal{I}(x) = \int_a^x f(t) dt$ – непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство. Рассмотрим $\mathcal{I}(x) = \int_a^b f(t) dt$. Найдем $\mathcal{I}(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt$. Тогда:

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{I}(x) &= \mathcal{I}(x + \Delta x) - \mathcal{I}(x) \\ &= \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = (*). \end{aligned}$$

Т.к. функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ $\implies$ $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ $\implies$ применяем свойство аддитивности определенного интеграла:

$$(*) = \int_a^x f(t)dt + \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$$
$$= \int_x^{x+\Delta x} f(x)dx = (*).$$

Согласно теореме о среднем значении определенного интеграла:

$$(*) = f(c)(x + \Delta x - x)$$
$$= f(c)\Delta x, \text{ где } c \in [x, x + \Delta x].$$

Найдем предел:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta \mathcal{I}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(c)\Delta x = 0.$$

По определению непрерывной функции:

$$\mathcal{I}(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

□

Теорема (О производной). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то $\forall x \in [a, b]$ верно равенство:

$$(\mathcal{I}(x))' = \left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x).$$

Доказательство. По теореме о непрерывности интеграла с переменным верхним пределом интегрирования и по определению производной функции:

$$(\mathcal{I}(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \mathcal{I}(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c).$$

□

Вопрос 8. Сформулировать свойства определенного интеграла. Вывести формулу Ньютона – Лейбница.

Ответ. См. свойства определенного интеграла выше.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$.

Доказательство. Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Тогда по следствию из теоремы о производной интеграла с переменным верхним пределом интегрирования и по о свойству первообразной:

$$\mathcal{I}(x) - F(x) = C, \quad C = const$$
$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C, \text{ где } C = const. \qquad (*)$$

Возьмем $x = a$:

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C$$
$$0 = F(a) + C$$
$$C = -F(a).$$

Подставим $C = -F(a)$ в $(*)$:

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Возьмем $x = b$ и получаем:

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)}.$$

□

Вопрос 9. Дать геометрическую интерпретацию определенного интеграла. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании подстановкой для определенного интеграла.

Ответ. $\mathcal{I}(x) = \int_a^x f(t)dt$ – переменная площадь криволинейной трапеции с основанием $[a - x] \subset [a, b]$

Теорема. Пусть:

- $y = f(x)$ – непрерывна на $[a, b]$;
- функция $x = \varphi(t)$ – непрерывно-дифференцируема при $t \in [t_1, t_2]$.
- при $t \in [t_1, t_2]$ значения функции $\varphi(t)$ не выходят за пределы $[a, b]$.
- $\varphi(t_1) = a$, $\varphi(t_2) = b$.

Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Доказательство. Т.к. $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, а $x = \varphi(t)$ непрерывна на $[t_1, t_2]$, то сложная функция $y = f(\varphi(t))$ непрерывна на $[t_1, t_2]$ (по теореме о непрерывной сложной функции). Т.к. $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, а $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ непрерывна на $[t_1, t_2]$, то существует определенный и неопределенный интеграл от этих функций. Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на $[a, b]$. В силу инвариантности неопределенного интеграла $F(\varphi(t))$ – первообразная $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на $[t_1, t_2]$. Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))\Big|_a^b = F(\varphi(t_2)) - F(\varphi(t_1)) = F(b) - F(a)$$

.

□

Вопрос 10. Сформулировать свойства определенного интеграла. Интегрирование периодических функций. Интегрирование четных и нечетных функций на отрезке, симметричном относительно начала координат.

Ответ. Свойства см. ответ на вопросы выше.

Ответ. Пусть $f(x)$ непрерывная периодическая функция с периодом T. Тогда:

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx \forall a \in \mathbb{R}$$

Ответ. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на $[-a, a]$, где $a \in \mathbb{R}$. Тогда:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx \text{ – функция четная} \\ 0 \text{ – функция нечетная} \end{cases}.$$

Вопрос 11. Сформулировать свойства определенного интеграла. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании по частям для определенного интеграла.

Ответ. Свойства см. ответ на вопросы выше.

Теорема. Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывно дифференцируемы. Тогда имеет место равенство:

$$\int_a^b udu = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Доказательство. Рассмотрим произведение функций uv. Дифференциал:

$$d(uv) = vdu + udv$$
$$udv = d(uv) - vdu.$$

Интегрируем:

$$\int_a^b udv = \int_a^b (d(uv) - vdu)$$
$$\int_a^b udv = \int_a^b d(uv) - \int_a^b vdu$$
$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

□

Вопрос 12. Сформулировать определение несобственного интеграла 1-го рода. Сформулировать и доказать признак сходимости по неравенству для несобственных интегралов 1-го рода.

Определение (Несобственный интеграл первого рода). Предел функции $\Phi(b)$

$$\Phi(b) = \int_a^b f(x)dx$$

при $b \to +\infty$ называется несобственным интегралом от функции $f(x)$ по бесконечному промежутку $[a, +\infty)$ ($[+\infty, a]$ или $[\infty, +\infty]$) или несобственным интегралом первого рода и обозначается:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \Phi(b) = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Теорема. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b] \in [a, +\infty)$, причем $\forall x \geq a : 0 \leq f(x) \leq g(x)$. Тогда:

1. если $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ – сходится, то и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ – сходится;
2. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ – расходится, то и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ – расходится.

Доказательство. Докажем первое утверждение. По условию:

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx \text{ – сходится.}$$

По определению несобственного интеграла первого рода:

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_a^b g(x)dx = C \in \mathbb{R}.$$

Т.к. $g(x) \geq 0, \forall x \geq a$:

$$\Phi(b) = \int_a^b g(x)dx \leq C, \quad b > a.$$

По условию:

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \quad \forall x \geq a.$$

Интегрируем:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \leq C.$$

Т.к. $f(x) \geq 0$, $\forall x \geq a$, то функция $\Psi(b) = \int_a^b f(x)dx$ – монотонно возрастает и ограничена сверху. Монотонная и ограниченная сверху функция при $x \to +\infty$ имеет конечный предел, поэтому:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \Psi(b) = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Последнее выражения имеет конечный предел, а значит $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится. □

Вопрос 13. Сформулировать определение несобственного интеграла 1-го рода. Сформулировать и доказать предельный признак сравнения для несобственных интегралов 1-го рода.

Ответ. См. определение выше.

Теорема. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b] \in [a, +\infty)$ и $\forall x \geq a$, $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$.

Если существует конечный положительный предел:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda > 0,$$

то $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. По определению предела:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \quad M(\varepsilon) > 0, \forall x > M \implies |\frac{f(x)}{g(x)} - \lambda| < \varepsilon.$$

Распишем:

$$\begin{aligned} -\varepsilon <& \frac{f(x)}{g(x)} - \lambda < \varepsilon \\ \lambda - \varepsilon <& \frac{f(x)}{g(x)} < \lambda + \varepsilon \\ (\lambda - \varepsilon)g(x) <& f(x) < (\lambda + \varepsilon)g(x) \quad \forall x > M. \end{aligned}$$

1. $f(x) < (\lambda + \varepsilon)g(x)$
   Интегрируем:
   $$\int_a^{+\infty} f(x)dx < (\lambda - \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$
   Пусть $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ – сходится, тогда $(\lambda - \varepsilon) \int_a^{+\infty} f(x)dx$– сходится, $\implies$ $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ – сходится.

   Пусть $(\lambda - \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x)dx$ – расходится, тогда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ – расходится, $\implies$ $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ – расходится.

   Получаем, что $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

□

Вопрос 14. Сформулировать определение несобственного интеграла 1-го рода. Сформулировать и доказать признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-го рода.

Ответ. См. определение выше.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ – знакопеременна на $[a, +\infty)$. Если функции $f(x)$ и $|f(x)|$ интегрируемы на любом отрезке $[a, b] \subset [a, +\infty)$ и несобственный интеграл от функции $|f(x)|$ по бесконечному промежутку $[a, +\infty)$ сходится, то сходится и несобственный интеграл от функции $f(x)$ на $[a, +\infty)$, причем абсолютно.

Доказательство. $\forall x \in [a, +\infty)$ верно неравенство:

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \qquad\qquad 0 \leq f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)|.$$

По условию $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ – сходится, $\implies$ $2\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ – сходится. По теореме о признаке сходимости по неравенству

$$\int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|)\, dx$$

– сходится.

Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ можно представить в виде:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|) - \int_a^{+\infty} |f(x)|dx.$$

Оба слагаемых сходятся, а следовательно и их сумма сходится, причем, по определению абсолютной сходимости, сходится абсолютно. □

Вопрос 15. Сформулировать определение несобственного интеграла 2-го рода и признаки сходимости таких интегралов. Сформулировать и доказать признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-го рода.

Определение (Несобственный интеграл 2-го рода). Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $[a, b)$, а в точке b терпит разрыв второго рода. Предположим, что функция $f(x)$ интегрируема на $[a, \eta] \subset [a, b]$. Тогда на $[a, b)$ определен интеграл с переменным верхним пределом интегрирования $F(\eta) = \int_a^b f(x)dx$. Предел функции $F(\eta)$ при $\eta \to b$ называется несобственным интегралом второго рода и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{at \to b} \int_a^\eta f(x)dx = \lim_{\eta \to b} F(\eta).$$

Теорема (Признак сходимости по неравенству). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на любом отрезке $[a, \eta] \subset [a, b)$, $\forall x \in [a, b)$ выполняется неравенство $0 \le g(x) \le f(x)$, а также в точке $x = b$ терпят разрыв второго рода. Тогда:

1. если собственный интеграл 2-го рода $\int_a^b g(x)dx$ – сходится, то и несобственный интеграл 2-го рода $\int_a^b f(x)dx$ – сходится.
2. если собственный интеграл 2-го рода $\int_a^b f(x)dx$ – расходится, то и несобственный интеграл 2-го рода $\int_a^b g(x)dx$ – расходится.

Теорема (Предельный признак). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, \eta] \subset [a, b)$, являются неотрицательными $\forall x \in [a, b)$ а также в точке $x = b$ терпят разрыв второго рода. Тогда если существует конечный положительный предел

$$\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda > 0,$$

то $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Ответ. См. признак абсолютной сходимости в ответе выше.

Вопрос 16. Фигура ограничена кривой $y = f(x) \ge 0$, прямыми $x = a$, $x = b$ и $y = 0$ $(a < b)$. Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла площади этой фигуры.

Ответ.

1. Разбиваем $[a, b]$ точками:
$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$
2. $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$ – отрезки разбиения.
3. $\forall i = \overline{1, n}$ поставим в соответствие $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.
4. Выберем $\lambda = \max\{\Delta x_i\}$, $i = \overline{1, n}$. Составим интегральную сумму:
$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$

5. Вычислим предел:
$$\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx = S.$$

Вопрос 17. Фигура ограничена лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и кривой $r = f(\varphi)$. Здесь r и φ – полярные координаты точки, $0 \le \alpha \le \beta$. Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла площади этой фигуры.

Ответ.
1. Разбиваем сектор A_0OA_n лучами $\alpha < \varphi_0 M\varphi_1 < \ldots < \varphi_n = \beta$ на углы $\angle A_0OA_1$, $\angle A_{n-1}OA_n$. Обозначим $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$ – величина $A_{i-1}OA_i$ в радианах. Обозначим $\lambda = \max\{\Delta\varphi_i\}$.
2. Для каждого угла выберем ψ_i, $\psi_i \in \angle A_{i-1}OA_i$. Находим $r = r(\psi)$.
3. Заменяем каждый i-ый криволинейный сектор на круговой сектор $R = r(\psi)$, $i = \overline{1,n}$. Тогда площадь кругового i-го сектора равна
$$S_i = \frac{1}{2}R^2\Delta\varphi_i,$$
где $R = r(\varphi_i)$. Просуммируем площади:
$$\sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(r(\psi_i))^2\Delta\varphi_i.$$
4. Найдем предел интегральной суммы:
$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(r(\psi_i))^2\Delta\varphi_i = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (r(\varphi))^2 d\varphi = S.$$

Вопрос 18. Тело образовано вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x) \ge 0$, прямыми $x = a$, $x = b$ и $y = 0$ $(a < b)$. Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла объема тела вращения.

Ответ. Пусть T – тело, S – площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox, $S = S(x)$ – непрерывная функция на $[a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на отрезки $[x_{i-1}, x_i]$, $\Delta i =_i -_{i-1}$ – длина отрезка разбиения. Обозначим $\lambda = \max\{\Delta x_i\}$, $i = \overline{1,n}$.

Каждый слой тела заменим цилиндром с основанием $S(\xi_i)$ и высотой Δ_i, $i = \overline{1,n}$. Объем такого цилиндра равен $V_i = S(\xi_i)\Delta x_i$. Объем всего тела будет равен:
$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b S(x)dx = V.$$

Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную графиком непрерывной функции $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ и осью Ox. Пусть $\forall x \in [a, b]$ верно $f(x) \ge 0$. Тогда поперечное сечение тела, образуемого вращением криволинейной трапеции будет являются кругом с площадью
$$S_o = \pi R^2 = \pi y^2.$$
Следовательно, объем тела T будет равен:
$$V = \pi\int_a^b y^2 dx.$$

Вопрос 19. Кривая задана в декартовых координатах уравнением $y = f(x)$, где x и y – декартовые координаты точки, $a \le x \le b$. Вывести формулу для вычисления длины дуги этой кривой.

Ответ. Пусть $y = f(x)$ – непрерывна на $[a, b]$. Выберем на графике произвольные две точки: $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x, y)$. Обозначим $\Delta x = x - x_0$ – приращение x, $\Delta y = y - y_0$ – приращение y. l_0 –

приращение дуги кривой $M\breve{M}_0$. Найдем l'_x:

$$l'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta x}..$$

Из треугольника $\triangle MM_1A$, где $MA = \Delta x$ и $M_1A = \Delta y$, по теореме Пифагора

$$MM_1^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2.$$

Домножим на $1 = \Delta l^2/\Delta l^2$

$$\left(\frac{MM_1}{\Delta l}\right)^2 \Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$$
$$\left(\frac{MM_1}{\Delta l}\right)^2 \left(\frac{\Delta l}{\Delta x}\right) = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2.$$

Вычислим предел при $\Delta x \to 0$:

- Левая часть:
$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{MM_1}{\Delta l}\right)\left(\frac{\Delta l}{\Delta x}\right)^2 = \lim_{\Delta x \to 0} 1 \cdot \left(\frac{\Delta l}{\Delta x}\right)^2 = (l'_x)^2.$$
- Правая часть:
$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right) = 1 + \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 = 1 + (y'_x)^2.$$

Получаем:

$$\begin{aligned} (l'_x)^2 &= 1 + (y'_x)^2 \\ l'_x &= \sqrt{1 + (y'_x)^2} \\ l'_x dx &= \sqrt{1 + (y'_x)^2} \\ dl &= \sqrt{1 + (y'_x)^2} \\ l &= \int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx. \end{aligned}$$

Вопрос 20. Кривая задана в полярных координатах уравнением $r = f(\varphi) \geq 0$, где r и φ – полярные координаты точки, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$. Вывести формулу для вычисления длины дуги этой кривой.

Ответ. Пусть $r = r(\varphi)$ – непрерывная на $[\alpha, \beta]$ функция. Выберем на графике произвольную точку $M_0(x_0, y_0)$. Обозначим приращения $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$. Считаем их малыми и обозначим dx и dy соответственно. Тогда малая дуга dl между точками $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x, y)$ имеет приближенно длину гипотенузы треугольника, образованного катетами dx и dy. По теореме Пифагора:

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.$$

Учитывая, что

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi, \end{cases}$$

получаем

$$\begin{cases} dx = (r\cos\varphi)' d\varphi = (r'\cos\varphi - r\sin\varphi)d\varphi \\ dx = (r\sin\varphi)' d\varphi = (r'\sin\varphi + r\cos\varphi)d\varphi. \end{cases}$$

Подставляя в выражение для dl^2:

$$(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = [(r' \cos\varphi - r\sin\varphi)^2 + (r' \sin\varphi + r\cos\varphi)^2](d\varphi)^2 =$$
$$= [(r')^2\cos^2\varphi - 2r'r\cos\varphi\sin\varphi + r^2\sin^2\varphi + (r')^2\sin^2\varphi + 2r'r\sin\varphi\cos\varphi + r^2\cos^2\varphi](d\varphi)^2 =$$
$$= [(r')^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + r^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)](d\varphi)^2 = \left((r')^2 + r^2\right)(d\varphi)^2.$$

Соответственно:

$$dl = \sqrt{(r')^2 + r^2}d\varphi$$
$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r')^2 + r^2}d\varphi.$$

2 Теория по дифференциальным уравнениям

Вопрос 21. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Интегрирование линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка методом Бернулли и методом Лагранжа (вариации произвольной постоянной).

Определение (Линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка). Дифференциальное уравнение 1-го порядка называется линейным, если неизвестная функция $y(x)$ и ее производная $y'(x)$ входят в уравнение первой степени, не перемешиваясь между собой.

$$y' + p(x)y = f(x).$$

Ответ. Метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной.

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' + p(x)y = f(x).$$

1. Решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения:

$$\begin{aligned} &y' + p(x)y = 0 \\ &y' = -p(x)y \\ &\frac{dy}{dx} = -p(x)y \\ &\frac{dy}{y} = -p(x)dx \end{aligned}$$

Интегрируем обе части:

$$\begin{aligned} &\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx \\ &\ln|y| = \int p(x)dx + \ln c_1 \\ &|y| = c_1 e^{-\int p(x)dx} \\ &y = c_2 e^{-\int p(x)dx} \qquad c_2 = \pm c_1 \neq 0 \end{aligned}$$

Особое решение:

$$\begin{aligned} &(0)' + p(x)\cdot 0 = 0 \\ &\begin{cases} y = c_2 e^{-\int p(x)dx} & c_2 \neq 0 \\ y = 0 \end{cases} \implies \boxed{y_{oo} = ce^{-\int p(x)dx}} \forall c \end{aligned}$$

2. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения:

Предполагаемый вид решения:

$$y_\tau = k(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

Подставим:

$$\begin{aligned} \left(k(x)e^{-\int p(x)dx}\right)' + p(x)k(x)e^{-\int p(x)dx} &= f(x) \\ k'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x)k(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)k(x)e^{-\int p(x)dx} &= f(x) \\ k'(x)e^{-\int p(x)dx} &= f(x) \end{aligned}$$

.

Получаем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{dk}{dx} = f(x)e^{\int p(x)dx}$$
$$dk = f(x)e^{\int p(x)dx}dx.$$

Интегрируем

$$k(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + c.$$

Подставляем $k(x)$ в (??):

$$y_\tau = k(x)e^{-\int p(x)dx} = \left(\int f(x)e^{\int p(x)dx} + c\right)e^{-\int p(x)dx}, \qquad \forall c = const.$$

Общее решение имеет вид:

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right), \qquad \forall c = const.$$

Ответ. Метод Бернулли.

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' + p(x)y = f(x).$$

Представим функцию $y(x)$ как

$$y(x) = u(x)v(x).$$

Подставим:

$$\begin{aligned}
(u(x)v(x))' + p(x)u(x)v(x) &= f(x)\\
u'(x)v(x) + u(x)v'(x) + p(x)u(x)v(x) &= f(x)\\
v(x)\left(u'(x) + p(x)u(x)\right) + u(x)v'(x) &= f(x)\\
v(x)\left(u'(x) + p(x)u(x)\right) &= f(x) - u(x)v'(x)
\end{aligned}$$

Так как неизвестная функция $y(x)$ была заменена на произведение $u(x)$ и $v(x)$, то одну из функций мы можем выбрать так, как удобно. Произвольная постоянная будет учтена при нахождении второй функции.

Мы вправе задать функции так, что

$$u'(x) + p(x)u(x) = 0.$$

Тогда получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} u'(x) + p(x)u(x) = 0 \\ f(x) = u(x)v'(x) \end{cases}.$$

Первое уравнение является дифференциальным уравнений с разделяющимися переменными

$$\begin{aligned}
&u'(x) + p(x)u(x) = 0\\
&\frac{du}{dx} = -p(x)u\\
&\frac{du}{u} = -p(x)dx\\
&\int \frac{du}{u} = -\int p(x)dx\\
&\ln|u| = -\int p(x)dx + \ln c_1\\
&u = c_1e^{-\int p(x)dx}\\
&u = c_2e^{-\int p(x)dx} \qquad c_2 = \pm c_1 \neq 0.
\end{aligned}$$

Далее выражаем $v'(x)$ из второго уравнения:

$$v'(x) = \frac{f(x)}{u(x)} = f(x)e^{\int p(x)dx},$$

и интегрируем

$$\int dv = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx$$
$$v = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + c \quad \forall c = const$$

Подставим найденные $u(x)$ и $v(x)$ в ДУ:

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(\int p(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right) \qquad \forall c = const.$$

Вопрос 22. Сформулировать теорему Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения n-го порядка. Интегрирование дифференциальных уравнений n-го порядка, допускающих понижение порядка.

Теорема (О существовании и единственности решения задачи Коши для ДУ n-порядка). Если в дифференциальном уравнении n-го порядка функция $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ и ее частные производные по переменным $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ непрерывные в некоторой области $D \in \mathbb{R}^{n+1}$, содержащей точку $M_0(x_0, y_{00}, y_{10}, \dots, y_{n-1,0})$, то существует единственное решение задачи Коши.

Ответ.

1. Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$

   Метод решения: n-кратное интегрирование

$$y = \underbrace{\int \cdots \int}_{n} f(x)(dx)^n.$$

2. Уравнения, не содержащие переменную x явно

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

   Метод решения: замена

$$\begin{cases} y' = p(y) \\ y'' = p'y' = p'p \dots \\ y^{(n)} = p^{(n-1)} \cdot \dots \cdot p. \end{cases}$$

3. Уравнения, не содержащие функцию y в явном виде

$$F(x, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

   Метод решения: понижение порядка при помощи замены

$$y' = p(x)y'' = p'(x) \dots y^{(n)} = p^{(n-1)}(x).$$

Вопрос 23. Сформулировать теорему Коши о существовании и единственности решения линейного дифференциального уравнения n-го порядка. Доказать свойства частных решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка.

Теорема (О существовании и единственности решения задачи Коши для ЛДУ n-порядка). Если в линейном дифференциальном уравнении высшего порядка функция $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ и ее частные производные по переменным $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ непрерывные в некоторой области $D \in \mathbb{R}^{n+1}$, содержащей точку $M_0(x_0, y_{00}, y_{10}, \dots, y_{n-1,0}$, то существует единственное решение задачи Коши.

Теорема. Множество частных решений линейного однородного дифференциального уравнения порядка с непрерывными функциями $p_1(x), \dots, p_n(x)$ на промежутке $\mathcal{I}$ образуют линейное пространство.

Доказательство. Пусть y_1 и y_2 частные решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка. Тогда:

$$\begin{cases} y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_1' + p_n(x)y_1 = 0 \\ y_2^{(n)} + p_1(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_2' + p_n(x)y_2 = 0 \end{cases}.$$

Сложим оба уравнения:

$$\left(y_1^{(n)} + y_2^{(n)}\right) + p_1(x)\left(y_1^{(n-1)} + y_2^{(n-1)}\right) + \ldots + p_{n-1}(x)\left(y_1' + y_2'\right) + p_n(x)\left(y_1 + y_2\right) = 0.$$

По свойству производных:

$$(y_1 + y_2)^{(n)} + p_1(x)\left(y_1 + y_2\right)^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)\left(y_1 + y_2\right)' + p_n(x)\left(y_1 + y_2\right).$$

Обозначим $y = y_1 + y_2$:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0.$$

Тогда $y = y_1 + y_2$ – частное решение линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка.

Пусть y_1 – частное решение ЛОДУ n-го порядка. Тогда:

$$y_1^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_1' + p_n(x)y_1 = 0,$$

домножив на константу c

$$\begin{aligned} &cy_1^{(n)} + cp_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + cp_{n-1}(x)y_1' + cp_n(x)y_1 = 0 \\ &(cy_1)^{(n)} + p_1(x)(cy)^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)(cy_1)' + p_n(x)(cy_1) = 0. \end{aligned}$$

Обозначим $y = cy_1$, где $c = const$ – решение ЛОДУ. По определению линейного пространства $\Longrightarrow$ частные решения ЛОДУ n-го порядка образуют линейное пространство. □

Теорема. Если $y_1, \dots, y_n$ – частные решения ЛОДУ, то их линейная комбинация:

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n,$$

является решением ЛОДУ.

Доказательство. Пусть $y_1, \dots, y_n$ частные решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка. Тогда:

$$\begin{aligned} &y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_1' + p_n(x)y_1 = 0 \\ &y_2^{(n)} + p_1(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_2' + p_n(x)y_2 = 0 \\ &\ldots \\ &y_n^{(n)} + p_1(x)y_n^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_n' + p_n(x)y_n = 0. \end{aligned}$$

Умножим каждое уравнения на константу $c_1, \dots, c_n$, где $c_i \neq 0$ $i = \overline{1, n}$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} c_iy_i^{(n)}\right) + p_1(x)\left(\sum_{i=1}^{n} c_iy_i^{(n-1)}\right) + \ldots + p_{n-1}(x)\left(\sum_{i=1}^{n} c_iy_i'\right) + p_n(x)\left(\sum_{i=1}^{n} c_iy_i\right).$$

По свойству производных:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} c_iy_i\right)^{(n)} + p_1(x)\left(\sum_{i=1}^{n} c_iy_i\right)^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} c_iy_i\right)' + p_n(x)\left(\sum_{i=1}^{n} c_iy_i\right).$$

Обозначим $y = \sum_{i=1}^{n} c_iy_i$. Получаем:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0,$$

$\Longrightarrow y = c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n$ решение ЛОДУ n-го порядка. □

Вопрос 24. Сформулировать определения линейно зависимой и линейно независимой систем функций. Сформулировать и доказать теорему о вронскиане линейно зависимых функций.

Определение (Линейно зависимая система функций). Система функций $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ называется линейно зависимой, если их линейная комбинация равна нулю, то есть:

$$c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x) = 0,$$

при этом $\exists c_i \neq 0 \; i = \overline{1, n}$, где $c_i = const$.

Определение (Линейно независимая система функций). Система функций $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ называется линейно независимой, если их линейная комбинация равна нулю, то есть:

$$c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x) = 0,$$

при этом $\forall c_i = 0 \; i = \overline{1, n}$ где $c_i = const$.

Теорема (О вронскиане линейных зависимых функций). Если $n-1$ раз дифференцируемые функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ линейно зависимы на некотором промежутке $\mathcal{L}$, то $W(x) = 0 \; \forall x \in \mathcal{I}$.

Доказательство. Т.к. $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ линейно зависима на $\mathcal{I}$, то:

$$c_1 y_1(x) \ldots + c_n y_n(x) = 0. \tag{*}$$

Продифферинцируем (*) $n-1$ раз:

$$c_1 y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}(x) = 0, \tag{**}$$

причем $\exists c_i \neq 0, i = \overline{1, n}$.

По определению линейной зависимости, $y_1^{(n-1)}(x), \ldots, y_n^{(n-1)}(x)$ – линейно зависимы. Составим систему из $(*)$ и $(**)$:

$$\begin{cases} c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x) = 0 \\ c_1 y_1'(x) + \ldots + c_n y_n'(x) = 0 \\ \ldots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{cases}$$

– это однородная СЛАУ относительно $c_1, \ldots, c_n$. Определитель данной СЛАУ:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Данный определитель является определителем Вронского и равняется нулю, так как все строки определителя линейно-зависимы. □

Вопрос 25. Сформулировать определения линейно зависимой и линейно независимой систем функций. Сформулировать и доказать теорему о вронскиане системы линейно независимых частных решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка.

Определение (Линейно зависимая система функций). Система функций $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ называется линейно зависимой, если их линейная комбинация равна нулю, то есть:

$$c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x) = 0,$$

при этом $\exists c_i \neq 0 \; i = \overline{1, n}$, где $c_i = const$.

Определение (Линейно независимая система функций). Система функций $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ называется линейно независимой, если их линейная комбинация равна нулю, то есть:

$$c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x) = 0,$$

при этом $\forall c_i = 0 \; i = \overline{1, n}$ где $c_i = const$.

Теорема (О вронскиане линейно независимых частных решений ЛОДУ n-го порядка). Если $n-1$ раз дифференцируемые функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ линейно независимы на некотором промежутке $\mathcal{L}$ и являются частными решениями ЛОДУ n-го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x),$$

с непрерывными на промежутке $\mathcal{I}$ коэффициентами $p_1(x), \ldots, p_n(x)$, то $W(x) \neq 0 \; \forall x \in \mathcal{I}$.

Доказательство. Предположим, что $\exists x_0 \in \mathcal{I}$, где $W(x_0) = 0$. Распишем определитель:

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}.$$

Построим СЛАУ по определителю:

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \ldots + c_n y_n(x_0) = 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) + \ldots + c_n y_n'(x_0) = 0 \\ \ldots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}.$$

Данная СЛАУ имеет ненулевое решение так как определитель $W(x_0) = 0$. Рассмотрим функцию

$$y = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x).$$

Т.к. $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ частные решения ЛОДУ n-го порядка, то $y = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x)$ – решение ЛОДУ n-го порядка.

Найдем $y(x_0)$:

$$y(x_0) = c_1 y_1(x_0) + \ldots + c_n y_n(x_0) = 0.$$

Дифференцируем $n-1$ раз функцию:

$$\begin{aligned} y'(x_0) &= c_1 y_1'(x_0) + \ldots + c_n y_n'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) &= c_1 y_1''(x_0) + \ldots + c_n y_n''(x_0) = 0 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{aligned}$$

Получаем, что $y = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x)$ – решение ЛОДУ n-го порядка, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y'(x_0) = \ldots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$. Но $y = 0$ – решение ЛОДУ, удовлетворяющее начальному условию. По теореме о $\exists!$ решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения n-го порядка:

$$y = c_1 y_1(x) + \ldots c_n y_n(x),$$

а значит $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ – линейно независимы, что противоречит условию. Значит, предположение неверно, $\implies \forall x \in \mathcal{I} \; W(x) \neq 0$. □

Вопрос 26. Сформулировать и доказать теорему о существовании фундаментальной системы решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка.

Теорема (О существовании ФСР ЛОДУ n-го порядка). Любое ЛОДУ n-го порядка с непрерывными на промежутке I коэффициентами $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ имеет ФСР, то есть систему из n линейно независимых функций.

Доказательство. Рассмотрим ЛОДУ n-го порядка $y^{(n-1)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}y' + p_n(x)y = 0$, где $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ – непрерывны на I.

Рассмотрим произвольный числовой определитель, отличных от нуля:

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \ldots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \ldots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \ldots & \gamma_{nn} \end{vmatrix},$$

где $\gamma_{ij} \in \mathbb{R}$ $i, j = \overline{1, n}$.

Для первой задачи Коши:

Возьмем $\forall x_0 \in I_n$ сформулируем для ЛОДУ n-го порядка задачи Коши, причем начальное условие в точке x_0 для i-ой задачи возьмем из i-го столбца определителя.

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

$$\begin{cases} y(x_0) = \gamma_{11} \\ y'(x_0) = y_{21} \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n1} \end{cases} \quad \text{– начальные условия}$$

По теореме о существовании и единственности 1-ая задача Коши имеет единственное решение $y_1(x)$.

Для n-ой задачи Коши

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

$$\begin{cases} y(x_0) = \gamma_{1n} \\ y'(x_0) = y_{2n} \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{nn} \end{cases} \quad \text{– начальные условия}$$

По теореме о существовании и единственности n-ая задача Коши имеет единственное решение $y_n(x)$.

Функции $y_1, \ldots, y_n$ – решения задач Коши.

Определитель Вронского функций $y_1, \ldots, y_n$:

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \ldots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \ldots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \ldots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \ldots & \gamma_{nn} \end{vmatrix},$$

, то есть существует $x_0 \in I$ где $W(x_0) \neq 0 \implies y_1, \ldots, y_n$ – линейно независимы, $\implies y_1, \ldots, y_n$ – ФСР. □

Вопрос 27. Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка.

Теорема (О структуре общего решение ЛОДУ n-го порядка). Общим решением ЛОДУ n-го порядка:

$$y^{(n)} - p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0, \tag{*}$$

с непрерывными коэффициентами $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ на промежутке I является линейная комбинация частных решений входящий в ФСР

$$y_{oo} = c_1y_1 + \ldots + c_ny_n,$$

где $y_1, \ldots, y_n$ – ФСР ЛОДУ для $c_1, \ldots, c_n = const$.

Доказательство. Покажем, что (*) решение ЛОДУ. Подставим (*) в ЛОДУ:

$$(c_1y_1 + \ldots + c_ny_n^{(n)} + p_1(x)(c_1y_1 + \ldots + c_ny_n)^{(n-1)} + \\ + \ldots + p_{n-1}(x)(c_1y_1 + \ldots + c_ny_n)' + p_n(x)c_ny_n^{(n-1)} = 0.$$

Вычислим производные:

$$c_1y_1^{(n)} + \ldots + c_ny_n^{(n)} + p_1(x)c_1y_1^{(n-1))} + \ldots + \\ + p_1(x)c_ny_n^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)c_2y_1' + \ldots + \\ + p_{n-1}(x)c_ny_n' + p_n(x)c_1y_1 + \ldots + p_n(x)c_ny_n = 0$$

Т.к. $y_1, \ldots, y_n$ – частные решения ЛОДУ, то:

$$c_1 \cdot 0 + \ldots + c_n \cdot 0 = 0,$$

а значит (*) – решение.

Вторая часть доказательства состоит в том, что мы докажем, что (*) – это общее решение ЛОДУ, то есть из него можно выделить единственное частное решение, удовлетворяющее начальному условию:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_{0,0} \\ y'(x_0) = y_{1,0} \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1,0} \end{cases}, \tag{1}$$

Подставляем (*) в начальные условия:

$$\begin{cases} y(x_0) = c_1y_1(x_0) + \ldots + c_ny_n(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = c_1y_1'(x_0) + \ldots + c_ny_n'(x_0) = y_0 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = c_1y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + c_ny_n^{(n-1)}(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

Рассмотрим это как СЛАУ относительно $c_1, \ldots, c_n$. Определитель данной системы – это определитель Вронского:

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix},$$

т.к. $y_1, \ldots, y_n$ образуют ФСР, следовательно, $y_1, \ldots, y_n$ – линейно независимы, а значит $W(x_0) \neq 0$. Ранг расширенной матрицы СЛАУ совпадает с рангом основной матрицы $\implies$ число неизвестных совпадает с числом уравнений, $\implies$ СЛАУ имеет единственное решение $c_1, \ldots, c_n$.

В силу теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши следует, что это единственное решение задачи Коши.

Получилось, что из (*) можно выделить частное решение, удовлетворяющее начальному условию $\implies$ по определению общего решения (*) – общее решение ЛОДУ. □

Вопрос 28. Вывести формулу Остроградского – Лиувилля для линейного дифференциального уравнения 2-го порядка.

Ответ. Рассмотрим ЛОДУ 2-го порядка:

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0.$$

Пусть y_1 и y_2 – два частных решения ЛОДУ. Для y_1 и y_2 верны равенства:

$$\begin{cases} y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1 = 0 & \cdot(-y_2) \\ y_2'' + p_1(x)y_2' + p_2(x)y_2 = 0 & \cdot y_1 \end{cases}.$$

Домножим и сложим:

$$y_1y_2'' - y_2y_1'' + p_1(x)(y_1y_2' - y_2y_1)p_2(x)(y_1y_2 - y_1y_2) = y_1y_2'' - y_2y_1'' + p_1(x)(y_1y_2' - y_2y_1) = 0. \quad (2)$$

Введем обозначение $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_1'y_2$. Тогда:

$$(W(x))' \, (y_1y_2 - y_1y_2)' = y_1'y_2 + y_1y_2'' - y_1''y_2 - y_1'y_2' = y_1y_2'' - y_1''y_2,$$

и получаем

$$W' + p_1(x)W = 0,$$

– ДУ с разделяющимися переменными. Решим:

$$\begin{aligned} W' &= -p_1(x)W \\ \frac{dW}{dx} &= -p_1(x)W \\ \frac{dw}{W} &= -p_1(x)dx \\ \ln|W| &= -\int p_1(x)dx + C, \forall C \\ e^{\ln|W|} &= e^{-\int p_1(x)dx + C} \\ |W| &= e^{-\int p_1(x)dx}C_1, \quad \forall C_1 = e^c > 0 \\ W &= c_2e^{-\int p_1(x)dx} \quad \forall C_2 = \pm C_1 \end{aligned}$$

А также $W = 0$ – особое решение.

Вопрос 29. Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка при одном известном частном решении.

Ответ. Пусть дано ЛОДУ 2-го порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

и y_1-частное решение ЛОДУ дано по условию. Необходимо найти y_2 – второе частное решение ЛОДУ линейно-независимый с y_1.

Запишем вронскиан для частных решений ЛОДУ:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1' \neq 0.$$

Рассмотрим:

$$\left(\frac{y_2}{y_1} = \frac{y_2'y_1 - y_1'y_2}{y_1^2}\right) = \frac{W(x)}{y_1^2} = \frac{1}{y_1^2}c_3e^{-\int p_1(x)dx}.$$

Получаем:

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{1}{y_1^2}c_3e^{-\int p_1(x)dx},$$

и проинтегрируем:

$$\frac{y_2}{y_1} = c_3\int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int p_1(x)dx}dx + C_4,$$

и выражаем y_2 :

$$y_2 = y_1\left(c_3\int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int p_1(x)dx}dx + C_4\right).$$

y_2 – частное решение, поэтому вправе выбрать $C_4 = 0$, $C_3 = 1$:

$$y_2 = y_1\int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int p_1(x)dx}dx.$$

По теореме о структуре общего решения ЛОДУ:

$$y_{oo} = c_1 y_1 + c_2 y_2.$$

Подставляем (y_1 известно):

$$y_{oo} = c_1 y_1 + c_2 y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p_1(x)dx} dx.$$

Вопрос 30. Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка.

Теорема (О структуре общего решения ЛНДУ n-го порядка). Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$y^{(n)} - p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \tag{1}$$

может быть записано в виде

$$y = y_0(x) + c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x), \tag{2}$$

где $y_0(x)$ – частное решение уравнения (1), а $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ – фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения; $c_1, \ldots, c_n$ – произвольные постоянные.

Доказательство. Подставим (2) в (1):

$$\begin{aligned}
&(y_0(x) + c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x))^{(n)} - p_1(x)(y_0(x) + c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x))^{(n-1)} + \ldots + \\
&+ p_{n-1}(x)(y_0(x) + c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x))' + p_n(x)(y_0(x) + c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x)) = \\
&= y_0^{(n)} - p_1(x)y_0^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_0' + p_n(x)y_0 + \\
&+ c_1 \left[y_1^{(n)} - p_1(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_1' + p_n(x)y_1\right] + \\
&+ c_{n-1} \left[y_{n-1}^{(n)} - p_1(x)y_{n-1}^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_{n-1}' + p_n(x)y_{n-1}\right] + \\
&+ c_n \left[y_n^{(n)} - p_1(x)y_n^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y_{n-1}' + p_n(x)y_n\right] = f(x),
\end{aligned}$$

следовательно, при любых $c_1, \ldots, c_n$ функция y, определяемая равенством (2), является решением уравнения (1).

Проверим, что при соответствующем подборе констант можно получить решение, удовлетворяющее любым начальным условиям

$$y(x_0) = y_{00}, \quad y'(x_0) = y_{10}, \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1,0}.$$

Для определения констант $c_1, \ldots, c_n$ имеем такую систему:

$$\begin{cases} y(x_0) + c_1 y_1(x_0) + \ldots + c_n y_n(x_0) = y_{00} \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) + c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, 0) \end{cases}.$$

Определитель данной системы равен:

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_0^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_m^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0,$$

так как $y_1, \ldots, y_n$ – ФСР ЛОДУ, соответствующего уравнению (1). Поэтому требуемый набор постоянных $c_1, \ldots, c_n$ существует. Оба условия, входящие в определения общего решения, проверены. Теорема доказана. □

Вопрос 31. Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае кратных корней характеристического уравнения.

Ответ. Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$y'' + 2ay' + b = 0$$

, где a, b – постоянные. Запишем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2a\lambda + b = 0.$$

По условию корни характеристического уравнения действительны и совпадают

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0 \in \mathbb{R}.$$

В этом случае фундаментальная система решений имеет вид

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} \qquad y_2 = xe^{\lambda_2 x}$$

или

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda_0 x}$$

Проверим линейную независимость решений; составим определитель Вронского:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_0 x} & xe^{\lambda_0 x} \\ \lambda_0 a^{\lambda_0 x} & (1+\lambda_0 x)a^{\lambda_0 x} \end{vmatrix} = e^{2\lambda_0 x} \begin{vmatrix} 1 & x \\ \lambda_0 & 1+\lambda_0 x \end{vmatrix} = e^{2\lambda_0 x} \neq 0.$$

Определитель Вронского не равен нулю, а значит данные функции образуют ФСР дифференциального уравнения.

Вопрос 32. Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней характеристического уравнения.

Ответ. Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$y'' + 2ay' + b = 0$$

, где a, b – постоянные. Запишем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2a\lambda + b = 0$$

По условию корни характеристического уравнения комплексные и различны

$$\lambda = \alpha \pm i\beta.$$

В этом случае фундаментальная система решений уравнения имеет вид

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \qquad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

или

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x).$$

Проверим линейную независимость решений y_1 и y_2; составим определитель Вронского:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x) & e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x) \end{vmatrix} =$$
$$= e^{2\alpha x}\begin{vmatrix} \cos\beta x & \sin\beta x \\ \alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x & \alpha\sin\beta + \beta\cos\beta x \end{vmatrix} = \beta e^{2\alpha x}\left(\cos^2\beta x + \sin^2\beta x\right) = \ = \beta e^{2\alpha x} \neq 0.$$

$W(x) \neq 0$, поэтому y_1 и y_2 линейно независимы.

Вопрос 33. Частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида (являющейся квазимногочленом).

Сформулировать и доказать теорему о наложении частных решений.

Ответ. Рассмотрим ЛНДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$y^{(n)} + a_i y^{(n-1)} + \ldots a_{n-1} y' + a_n y = f(x),$$

где $a_1, \ldots, a_n = const$. Соответствующее ЛОДУ:

$$y^{(n)} + a_i y^{(n-1)} + \ldots a_{n-1} y' + a_n y = f(x).$$

Характеристическое уравнение для ЛОДУ:

$$\lambda^n a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0,$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – корни характеристического уравнения. ФСР ЛОДУ имеет вид

$$\{e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}\}.$$

Соответственно, общее решение ЛОДУ имеет вид:

$$y_{oo} = c_1 e^{\lambda_1 x} + \ldots + c_n e^{\lambda_n x},$$

где $c_1, \ldots, c_n = const$.

Если правая часть ЛНДУ представлена в специальном виде (квазимногочлена), то по ее виду можно найти частное решение ЛНДУ. По виду функции $f(x)$ записывается предполагаемый вид частного решения ЛНДУ с неопределенными коэффициентами. Затем предполагаемое решение подставляем в ЛНДУ и из полученного равенства находим неопределенные коэффициенты.

- Квазимногочлену вида $e^{\alpha x} P_m(x)$, где $P_m(x)$ – многочлен m-ой степени, $\alpha \in \mathbb{R}$; соответствует вид решения
$$y_\tau = e^{\alpha x} Q_n(x) x^k,$$
где $Q_m(x)$ – многочлен m-ой степени, k – кратность корня $\lambda = \alpha$.
- Квазимногочлену вида
$$e^{\alpha x}\left(P_{m_1}(x)\cos\beta x + Q_{m_2}\sin\beta x\right),$$
где P_{m_1}, Q_{m_2} – многочлены m_1 и m_2 степеней соответственно, $\alpha \in \mathbb{R}$; соответствует вид решения
$$y_\tau = e^{\alpha x}\left(M_m(x)\cos\beta x + N_m(x)\sin\beta x\right),$$
где $M_m(x)$ и $N_m(x)$ – многочлены m-ой степени, $m = max\{m_1, m_2\}$, k – кратность корня $\lambda = \alpha \pm i\beta$.

Теорема. Если y_1 – решение ЛНДУ со свободным членом $f_1(x)$, y_2 – решение ЛНДУ со свободным членом $f_2(x)$, $\ldots y_n$ – решение ЛНДУ со свободным членом $f_n(x)$, то их линейная комбинация

$$y = c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n$$

является решением ЛНДУ с свободным членом

$$f = c_1 f_1(x) + \ldots + c_n f_n(x).$$

Доказательство. Так как y_1 – решение ЛНДУ со свободным членом $f_1(x)$, y_2 – решение ЛНДУ со свободным членом $f_2(x)$, $\ldots y_n$ – решение ЛНДУ со свободным членом $f_n(x)$, то верны равенства:

$$\begin{cases} y_1^{(n)} + p_1(x) y_1^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y_1' + p_n(x) y_1 = f_1(x) \\ y_2^{(n)} + p_1(x) y_2^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y_2' + p_n(x) y_2 = f_2(x) \\ \ldots \\ y_n^{(n)} + p_1(x) y_n^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y_n' + p_n(x) y_n = f_n(x). \end{cases}$$

Рассмотрим $y = c_1y_1 + \ldots + c_ny_n$. Подставим сумму в левую часть ЛНДУ:

$$\begin{aligned}(c_1y_1 + \ldots + c_ny_n)^{(n)} &+ p_1(x)\,(c_1y_1 + \ldots + c_ny_n)^{(n-1)} + \\ &+ \ldots + p_{n-1}\,(c_1y_1 + \ldots + c_ny_n)' + p_n(x)\,(c_1y_1 + \ldots + c_ny_n) = \\ &= c_1y_1^{(n)} + \ldots + c_ny_n^{(n)} + p_1(x)c_1y_1^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)c_ny_n^{(n-1)} + \\ &+ \ldots + p_{n-1}c_1y_1' + \ldots + p_{n-1}(x)c_ny_n' + p_n(x)c_1y_1 + \ldots + p_n(x)c_ny_n = \\ &= c_1(y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_1' + p_n(x)y_1) + \\ &+ \ldots + c_n(y_n^{(n)} + p_1(x)y_{n-1}^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_n' + p_n(x)y_n) = \\ &= \boxed{c_1f_1(x) + \ldots + c_nf_n(x)}\end{aligned}$$

□

Вопрос 34. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных для нахождения решения линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка и вывод системы соотношений для варьируемых переменных.

Ответ. Рассмотрим ЛНДУ 2-го порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x),$$

и соответствующее ЛОДУ 2-го порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0,$$

где $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ – непрерывные функции.

Пусть y_1, y_2 образуют ФСР ЛОДУ. Тогда по теореме о структуре общего решения ЛОДУ

$$y_{oo} = c_1y_1 + c_2y_2,$$

где c_1, $c_2 = const$.

Предполагаемый вид решения ЛНДУ

$$y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2,$$

где c_1, c_2 – непрерывные функции. Найдем первую производную:

$$y' = c_1'y_1 + c_1y_1' + c_2'y_2 + c_2y_2'.$$

Применим первое детерминированное условие Лагранжа:

$$c_1'y_1 + c_2y_2 = 0,$$

получаем

$$y' = c_1y_1' + c_2y_2'.$$

Найдем вторую производную:

$$y'' = c_1'y_1' + c_1y_1'' + c_2'y_2' + c_2y_2''.$$

Подставим y, y', y'' в ЛНДУ:

$$c_1'y_1' + c_1y_1'' + c_2y'' + p_1(x)(c_1y_1' + c_2y_2') + p_2(x)(c_1y_1 + c_2y_2) = f(x).$$

Сгруппируем:

$$c_1'y_1 + c_1y_1'' + c_2y_2' + c_1(y_1'' + p_1(x)y_1 + p_2(x)y_1) + c_2(y_2'' + p_1(x)y_2' + p_2(x)y_2) = f(x)$$
$$c_1'y_1' + c_2'y_2' = f(x).$$

Так как y_1, y_2 – решения ЛОДУ, то $c_1'y_1' = c_2y_2' = f(x)$.

Второе условие Лагранжа заключается в том, что предполагаемое решение будет являться решением ЛНДУ, если функции $c_1(x)$ и $c_2(x)$ удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' = f(x). \end{cases}$$

Обозначим

$$\begin{cases} c_1'(x) = \varphi(x) \\ c_2'(x) = \psi(x). \end{cases}$$

Проинтегрируем:

$$\begin{cases} c_1(x) = \int \varphi(x)dx + k_1 & k_1 = const \\ c_2(x) = \int \varphi(x)dx + k_2 & k_2 = const. \end{cases}$$

Подставляем $c_1(x)$, $c_2(x)$:

$$y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 = \left(\int \varphi(x)dx + k_1\right)y_1 + \left(\int \psi(x)dx + k_2\right)y_2 =$$

$$= \underbrace{k_1y_1 + k_2y_2}_{y_{oo}} + \underbrace{y_1 \int \varphi(x)dx + y_2 \int \psi(x)dx}_{y_{\tau}}$$

Система варьируемых переменных имеет единственное решение, так как ее определитель совпадает с определителем Вронского:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0.$$