Подготовка к рубежному контролю №1 «Интегралы»

Проект «Аполлон»

11 апреля 2024 г.

1 Определения

Вопрос 1. Сформулировать определение первообразной.

Ответ. Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на интервале (a, b), если $F(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $\forall x \in (a, b)$ верно:

$$F'(x) = f(x)$$

Вопрос 2. Сформулировать определение неопределенного интеграла.

Ответ. Множество первообразных функции $f(x)$ на (a, b) называется *неопределенным интегралом*

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Вопрос 3. Сформулировать определение определенного интеграла.

Ответ. *Определенным интегралом* от функции $y = f(x)$ на $[a, b]$ называется конечный предел интегральной суммы (3.1), когда число отрезков растет, а их длина стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (3.2)$$

Вопрос 4. Сформулировать определение интеграла с переменным верхним пределом.

Ответ. Определенным интегралом с переменным верхнем пределом интегрирования от непрерывной функции $f(x)$ на $[a, b]$ называется интеграл вида:

$$I(b) = \int_a^b f(x)dx$$

Вопрос 5. Сформулировать определение несобственного интеграла 1-го рода.

Ответ. Предел функции $\Phi(b)$ при $b \to +\infty$ называется *несобственным интегралом от функции* $f(x)$ *по бесконечному промежутку* $[a, +\infty)$ ($[+\infty, a]$ или $[\infty, +\infty]$) или *несобственным интегралом первого рода* и обозначается:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \Phi(b) = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx$$

Вопрос 6. Сформулировать определение несобственного интеграла 2-го рода.

Ответ. Пусть функция $f(x)$ определена на $[a, b)$ и не ограничена ни на каком интервале вида $(b - \varepsilon, b)$, $0 < \varepsilon < b - a$. Предположим далее, что эта функция интегрируема на отрезке $[a, \eta]$. Тогда если существует предел

$$\lim_{\eta \to b-0} f(x)dx,$$

то он называется *несобственным интегралов второго рода* от функции $f(x)$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Вопрос 7. Сформулировать определение сходящегося несобственного интеграла 1-го рода.

Ответ. Несобственный интеграл первого рода $\Phi(b) = \int_a^b f(x)dx$ называется *сходящимся*, когда предел:

$$\lim_{b \to \infty} \Phi(b) = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx$$

существует и равен конечному числу.

Вопрос 8. Сформулировать определение абсолютно сходящегося несобственного интеграла 1-го рода.

Ответ. Пусть функция $f(x)$ определена на $[a, +\infty)$ и интегрируема на любом отрезке $[a, b]$. Обозначим интегралы $I_1 = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $I_2 = \int_a^{+\infty} |f(x)|dx$. Тогда, если I_2 – сходится, то интеграл I_1 – *сходится абсолютно* и называется *абсолютно сходящимся интегралом первого рода*.

Вопрос 9. Сформулировать определение условно сходящегося несобственного интеграла 1-го рода.

Ответ. Пусть функция $f(x)$ определена на $[a, +\infty)$ и интегрируема на любом отрезке $[a, b]$. Обозначим интегралы $I_1 = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $I_2 = \int_a^{+\infty} |f(x)|dx$. Тогда, если I_1 – сходится, а I_2 – не сходится, то интеграл I_1 называют *условно сходящимся интегралом первого рода*.

Вопрос 10. Сформулировать определение сходящегося несобственного интеграла 2-го рода.

Ответ. Пусть функция $f(x)$ определена на $[a, b)$ и не ограничена ни на каком интервале вида $(b - \varepsilon, b)$, $0 < \varepsilon < b - a$. Предположим далее, что эта функция интегрируема на отрезке $[a, \eta]$. Тогда если существует предел

$$\lim_{\eta \to b-0} f(x)dx$$

и *он конечен*, то он называется *несобственным интегралов второго рода* от функции $f(x)$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Вопрос 11. Сформулировать определение условно сходящегося несобственного интеграла 2-го рода.

Ответ. Пусть функция $f(x)$ определена на $[a, b)$ и не ограничена ни на каком интервале вида $(b - \varepsilon, b)$, $0 < \varepsilon < b - a$. Обозначим интегралы второго рода $I_1 = \int_a^b f(x)dx$ и $I_2 = \int_a^b |f(x)|dx$. Тогда если I_2 – сходится, то интеграл I_1 – *сходится абсолютно* и называется *абсолютно сходящимся интегралом второго рода.*

Вопрос 12. Сформулировать определение условно сходящегося несобственного интеграла 2-го рода.

Ответ. Пусть функция $f(x)$ определена на $[a, b)$ и не ограничена ни на каком интервале вида $(b - \varepsilon, b)$, $0 < \varepsilon < b - a$. Обозначим интегралы второго рода $I_1 = \int_a^b f(x)dx$ и $I_2 = \int_a^b |f(x)|dx$. Тогда если I_1 – сходится, а I_2 – не сходится, то интеграл I_1 называют *условно сходящимся интегралов второго рода.*

2 Теоремы

Вопрос 13. Сформулировать и доказать теорему об оценке определенного интеграла.

Теорема (Об оценке определенного интеграла)**.** Пусть функция $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$ и $\forall x \in [a,b] : m \leq f(x) \leq M$, $g(x) \geq 0$. Тогда:

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx$$

Доказательство. Т.к. $\forall x \in [a,b]$ верны неравенства:

$$\begin{aligned} m \leq & f(x) \leq M \quad m, M \in \mathbb{R} \\ & g(x) \geq 0 \\ mg(x) \leq & f(x)g(x) \leq Mg(x) \end{aligned}$$

По теореме о сохранении знака подынтегральной функции:

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx$$

□

Вопрос 14. Сформулировать и доказать теорему о среднем.

Теорема (О среднем значении для определенного интеграла)**.** Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то:

$$\exists c \in [a,b] : f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Доказательство. Т.к. функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то по теореме Вейерштрасса она достигает своего наибольшего и наименьшего значения, т.е. $\exists m, M \in \mathbb{R} : \forall x \in [a,b] \quad m \leq f(x) \leq M$ По теореме о сохранении знака подынтегральной функции:

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx$$

По теореме 3.4:

$$m \int_a^b dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq M \int_a^b dx$$

По теореме аддитивности определенного интеграла:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \tag{1}$$

Т.к. функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то по теореме Больцана-Коши, она принимает все свои значения между наибольшим и наименьшим значениями. Разделим (1) на $b-a$:

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$$

по теореме Больцано-Коши:

$$\exists c \in [a,b] : f(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

□

Вопрос 15. Сформулировать и доказать теорему о производной интеграла с переменным верхним пределом.

Теорема (О производной)**.** Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то $\forall x \in [a,b]$ верно равенство:

$$(I(x))' = \left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл с переменный верхним пределом интегрирования

$$I(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

По определению производной

$$(I(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{I(x+\Delta x) - I(x)}{\Delta x}.$$

Найдём приращение функции $I(x)$ от приращения аргумента Δx

$$\Delta I(x) = I(x+\Delta x) - I(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt =$$
$$= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Т.к. по условию функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, значит, она непрерывна на $[x, x+\Delta x]$. По теореме Вейерштрасса:

$$f(x) \in C[x, x+\Delta x] \implies$$
$$\implies \exists m, M \in [x, x+\Delta x] : m \leq f(x), = M \quad \forall x \in [x, x+\Delta x].$$

Домножим на dx и проинтегрируем

$$\begin{aligned} m \leq& f(x) \leq M \\ mdx \leq& f(x)dx \leq Mdx \\ m\int_x^{x+\Delta x} dx \leq& \int_x^{x+\Delta x} f(x)dx \leq M\int_x^{x+\Delta x} dx \\ m\Delta x \leq& \int_x^{x+\Delta x} f(x)dx \leq M\Delta x. \end{aligned}$$

Разделим на Δx

$$m \leq \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx \leq M. \tag{*}$$

При $\Delta x \to 0$ значение минимумов и максимумов стремятся к $f(x)$

$$\lim_{\Delta x\to 0} m(\Delta x) = \lim_{\Delta x\to 0} f(x_{min}(\Delta x)) = f(x)$$
$$\lim_{\Delta x\to 0} m(\Delta x) = \lim_{\Delta x\to 0} f(x_{min}(\Delta x)) = f(x).$$

Возьмём предел $\Delta x \to 0$ от (*)

$$\lim_{\Delta x\to 0} m(\Delta x) \leq \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx \leq \lim_{\Delta x\to 0} M(\Delta x)$$
$$f(x) \leq \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx \leq f(x).$$

По теореме о средней функции

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx = f(x).$$

Левая часть равенства представляет из себя ничто иное, как выведенная ранее производная $(I(x))'$. То есть получаем:

$$(I(x))' = f(x)$$

□

Вопрос 16. Сформулировать и доказать теорему Ньютона-Лейбница.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$.

Доказательство. Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. По свойству первообразной, любые две первообразные отличаются не более, чем на константу C

$$I(x) - F(x) = C, \quad C = const. \tag{*}$$

Возьмем $x = a$

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C$$
$$0 = F(a) + C$$
$$C = -F(a).$$

Подставим $C = -F(a)$ в $(*)$:

$$I(x) = F(x) - F(a).$$

Возьмем $x = b$

$$I(b) = F(b) - F(a).$$

Проводя обратную замену $I(x)$

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

$\square$

Вопрос 17. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании по частям в определенном интеграле.

Теорема. Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывно дифференцируемы, тогда имеет место равенство:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

Доказательство. Рассмотрим дифференциал произведения функций uv

$$d(uv) = vdu + udv$$
$$udv = d(uv) - vdu.$$

Проинтегрируем:

$$\int_a^b udv = \int_a^b d(uv) - \int_a^b vdu$$
$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

$\square$

Вопрос 18. Сформулировать и доказать признак сходимости по неравенству для несобственных интегралов 1-го рода.

Теорема. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b] \in [a, +\infty)$, причем $\forall x \geq a : 0 \leq f(x) \leq g(x)$. Тогда:

1. если $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ – сходится, то и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ – сходится;
2. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ – расходится, то и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ – расходится.

Доказательство (1). По условию

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx \text{ – сходится.}$$

По определению несобственного интеграла первого рода:

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b g(x)dx = C \in \mathbb{R}.$$

Так как $g(x) \geq 0, \forall x \geq a$

$$\Phi(b) = \int_a^b g(x)dx \leq C, \quad b > a.$$

По условию

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \quad \forall x \geq a.$$

Интегрируем

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \leq C.$$

Так как $f(x) \geq 0$, $\forall x \geq a$, то функция $\psi(b) = \int_a^b f(x)dx$ – монотонно возрастает и ограничена сверху. Монотонная и ограниченная сверху функция при $x \to +\infty$ имеет конечный предел, поэтому:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \Psi(b) = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Последнее выражения имеет конечный предел, а значит последнее выражение – сходится:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ – сходится.}$$

□

Доказательство (2). Докажем утверждение методом от противного. Предположим, что $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ – сходится. Тогда по первой части теоремы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ – сходится, и это противоречит условию теоремы. Значит $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ – расходится. □

Вопрос 19. Сформулировать и доказать предельный признак сравнения для несобственных интегралов 1-го рода.

Теорема. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b] \in [a,+\infty)$ и $\forall x \geq a$, $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$.

Если существует конечный положительный предел:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda > 0$$

То $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. По определению предела:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M(\varepsilon) > 0, \forall x > M \implies |\frac{f(x)}{g(x)} - \lambda| < \varepsilon.$$

Распишем:

$$-\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} - \lambda < \varepsilon$$
$$\lambda - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \lambda + \varepsilon$$
$$(\lambda - \varepsilon)g(x) < f(x) < (\lambda + \varepsilon)g(x) \quad \forall x > M$$

Рассмотрим правую часть:

$$f(x) < (\lambda + \varepsilon)g(x).$$

Интегрируем:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx < (\lambda + \varepsilon)\int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

Пусть $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ – сходится, тогда $(\lambda+\varepsilon)\int_a^{+\infty} f(x)dx$ – сходится, $\implies \int_a^{+\infty} g(x)dx$ – сходится.

Пусть $(\lambda+\varepsilon)\int_a^{+\infty} g(x)dx$ – расходится, тогда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ – расходится, тогда $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ – расходится.

Получаем, что $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся *одновременно.* □

Вопрос 20. Сформулировать и доказать признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-го рода.

Теорема. Если $f(x)$ и $|f(x)|$ – интегрируемы на $[a,b]$ $\forall b > a$ и $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ – сходится, то и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ – сходится.

Доказательство. Очевидно, что

$$\begin{aligned} -|f(x)| \leq & f(x) \leq |f(x)| \\ 0 \leq & f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)|. \end{aligned}$$

Проинтегрируем

$$\int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|)dx \leq 2 \int_a^{+\infty} |f(x)|dx.$$

Правый интеграл сходится по условию. По сравнительному признаку сходимости несобственного интеграла, получаем, что

$$\int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|)dx \text{ – сходится.}$$

Рассмотрим $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|)\, dx - \int_a^{+\infty} |f(x)|dx.$$

Разность сходящихся несобственных интегралов конечна, а значит $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ – сходится. □

Вопрос 21. Вывести формулу для вычисления площади криволинейного сектора, ограниченного лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и кривой $\rho = \rho(\varphi)$.

Вопрос 22. Вывести формулу для вычисления длины дуги графика функции $y = f(x)$, отсеченной прямыми $x = a$ и $x = b$.