Интегралы и дифференциальные уравнения. Подготовка к РК №1

Проект "Апполон"

5 апреля 2024 г.

1 Определения

Вопрос 1. Сформулировать определение первообразной.

Ответ. Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на интервале (a,b), если $F(x)$ дифференцируема на интервале (a,b) и $\forall x \in (a,b)$ верно:

$$F'(x) = f(x)$$

Вопрос 2. Сформулировать определение неопределённого интеграла.

Ответ. Множество первообразных функции $f(x)$ на (a,b) называется *неопределённым интегралом*

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Вопрос 3. Сформулировать определение определённого интеграла.

Вопрос 4. Сформулировать определение интеграла с переменным верхним пределом.

Ответ. Определенным интегралом с переменным верхнем пределом интегрирования от непрерывной функции $f(x)$ на $[a,b]$ называется интеграл вида:

$$\mathcal{I}(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Вопрос 5. Сформулировать определение несобственного интеграла 1-го рода.

Вопрос 6. Сформулировать определение несобственного интеграла 2-го рода.

Вопрос 7. Сформулировать определение сходящегося несобственного интеграла 1-го рода.

Вопрос 8. Сформулировать определение абсолютно сходящегося несобственного интеграла 1-го рода.

Вопрос 9. Сформулировать определение условно сходящегося несобственного интеграла 1-го рода.

Вопрос 10. Сформулировать определение сходящегося несобственного интеграла 2-го рода.

Вопрос 11. Сформулировать определение абсолютно сходящегося несобственного интеграла 2-го рода.

Вопрос 12. Сформулировать определение условно сходящегося несобственного интеграла 2-го рода.

2 Теоремы

Вопрос 13. Сформулировать и доказать теорему об оценке определённого интеграла.

Теорема (Об оценке определённого интеграла)**.** Пусть функция $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$ и $\forall x \in [a, b] : m \leq f(x) \leq M, \quad g(x) \geq 0$. Тогда:

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx$$

Доказательство. Т.к. $\forall x \in [a, b]$ верны неравенства:

$$\begin{aligned} m \leq & f(x) \leq M \quad m, M \in \mathbb{R} \\ & g(x) \geq 0 \\ mg(x) \leq & f(x)g(x) \leq Mg(x) \end{aligned}$$

По теореме **??**:

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx$$

□

Вопрос 14. Сформулировать и доказать теорему о среднем.

Теорема (О среднем значении для определённого интеграла)**.** Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то:

$$\exists c \in [a, b] : f(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Доказательство. Т.к. функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то по теореме Вейерштрасса она достигает своего наибольшего и наименьшего значения, т.е. $\exists m, M \in \mathbb{R} : \forall x \in [a, b] \quad m \leq f(x) \leq M$ По теореме **??**:

$$\int_a^b mdx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx$$

По теореме **??**:

$$m \int_a^b dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq M \int_a^b dx$$

По теореме **??**:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \tag{1}$$

Т.к. функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то по теореме Больцана-Коши, она принимает все свои значения между наибольшим и наименьшим значениями. Разделим (1) на $b - a$:

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$$

по теореме Больцано-Коши:

$$\exists c \in [a, b] : f(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

$\square$

Вопрос 15. Сформулировать и доказать теорему о производной интеграла с переменным верхним пределом.

Теорема (О производной)**.** Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то $\forall x \in [a, b]$ верно равенство:

$$(\mathcal{I}(x))' = \left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$$

Доказательство. По определению производной функции:

$$(\mathcal{I}(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \mathcal{I}(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c)$$

$\square$

Вопрос 16. Сформулировать и доказать теорему Ньютона - Лейбница.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$.

Доказательство. Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Тогда по следствию из теоремы . По свойству первообразной:

$$\mathcal{I}(\S) - F(x) = C, \quad C = const$$

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C, \text{ где } C = const \tag{*}$$

Возьмем $x = a$:

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C$$
$$0 = F(a) + C$$
$$C = -F(a)$$

Подставим $C = -F(a)$ в $(*)$:

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

Возьмем $x = b$:

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)}$$

$\square$

Вопрос 17. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании по частям в определённом интеграле.

Теорема. Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывно дифференцируемы, тогда имеет место равенство:

$$\int_a^b udu = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

Доказательство. Рассмотрим произведение функций uv. Дифференциал:

$$d(uv) = vdu + udv$$
$$udv = d(uv) - vdu$$

Интегрируем:

$$\int_a^b udv = \int_a^b (d(uv) - vdu)$$
$$\int_a^b udv = \int_a^b d(uv) - \int_a^b vdu$$
$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

$\square$

Вопрос 18. Сформулировать и доказать признак сходимости по неравенству для несобственных интегралов 1-го рода.

Вопрос 19. Сформулировать и доказать предельный признак сравнения для несобственных интегралов 1-го рода.

Вопрос 20. Сформулировать и доказать признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-го рода.

Вопрос 21. Вывести формулу для вычисления площади криволинейного сектора, ограниченного лучами $=$, $=$ и кривой $=$ ().

Вопрос 22. Вывести формулу для вычисления длины дуги графика функции $y = f(x)$, отсечённой прямыми $x = a$ и $x = b$.