

Математический анализ. Подготовка к экзамену

1 Определения

Определение 1 (Множество натуральных чисел). \mathbb{N} – множество натуральных чисел. Состоит из чисел, возникающих при счёте.

Определение 2 (Множество целых чисел). \mathbb{Z} – множество целых чисел. Состоит из натуральных чисел, нуля и чисел, противоположных натуральным.

Определение 3 (Множество рациональных чисел). \mathbb{Q} – множество рациональных чисел. Состоит из чисел, представимых в виде $\frac{z}{n}$, $z \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

Определение 4 (Множество иррациональных чисел). \mathbb{I} – множество иррациональных чисел. Состоит из чисел, которые не представимы в виде $\frac{z}{n}$, $z \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

Определение 5 (Множество действительных чисел). \mathbb{R} – множество действительных чисел. Состоит из рациональных и иррациональных чисел.

Определение 6 (Окрестность точки). Окрестностью $S(x)$ точки x называется любой интервал, содержащий эту точку.

Определение 7 (ε -окрестность точки). ε -окрестностью точки x называется интервал с центром в точке x и длиной 2ε .

$$S(x, \varepsilon) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$$

Определение 8 (δ -окрестность точки). δ -окрестностью точки x называется интервал с центром в точке x и длиной 2δ .

$$S(x, \delta) = (x - \delta, x + \delta)$$

Определение 9 (Окрестность $+\infty$). Окрестностью $+\infty$ называется любой интервал вида:

$$S(+\infty) = (a, +\infty), \quad a \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

Определение 10 (Окрестность $-\infty$). Окрестностью $-\infty$ называется любой интервал вида:

$$S(-\infty) = (-\infty, -a), \quad a \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

Определение 11 (Окрестность ∞). Окрестностью ∞ называется любой интервал вида:

$$S(\infty) = (-\infty, -a) \cup (a, +\infty), \quad a \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

Определение 12 (Числовая последовательность). Числовой последовательностью называется бесконечное множество числовых значений, которое можно упорядочить (перенумеровать)

Определение 13 (Ограниченная последовательность). Последовательность x_n называется *ограниченной*, если она ограничена и сверху, и снизу, т.е.

$$\forall n \in \mathbb{N}, m \leq x_n \leq M \quad \text{или} \quad |x_n| \leq M$$

Определение 14 (Предел последовательности). Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется натуральное число $N(\varepsilon)$, такое, что если порядковый номер n члена последовательности станет больше $N(\varepsilon)$, то имеет место неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}) : (\forall n > N(\varepsilon)) \implies |x_n - a| < \varepsilon$$

Определение 15 (Сходящаяся последовательность). Числовая последовательность называется сходящейся, если существует предел этой последовательности, и он конечен.

Определение 16 (Предел функции по Коши). Число a называется пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0 , если $\forall \varepsilon > 0$ найдется δ , зависящее от ε такое что $\forall x \in \dot{S}(x_0; \delta)$ будет верно неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \dot{S}(x_0; \delta)) \implies |f(x) - a| < \varepsilon$$

Определение 17 (Предел функции по Гейне). Число a называется пределом $y = f(x)$ в точке x_0 , если эта функция определена в окрестности точки a и \forall последовательности x_n из области определения этой функции, сходящейся к x_0 соответствующая последовательность функций $\{f(x_n)\}$ сходится к a .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \iff (\forall x_n \in D_f) (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a)$$

Определение 18 (Локальная ограниченность функции). Функция называется локально ограниченной при $x \rightarrow x_0$, если существует проколота окрестность с центром в точке x_0 , в которой данная функция ограничена.

Определение 19 (Бесконечно малые функции). Функция называется бесконечно малой при $x \rightarrow x_0$, если предел функции в этой точке равен 0.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \iff (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta(\varepsilon)) (\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta) \implies |f(x)| < \varepsilon)$$

Определение 20 (Бесконечно большие функции). Функция называется бесконечно большой при $x \rightarrow x_0$, если предел функции в этой точке равен ∞ .

Определение 21 (Бесконечно малые более высокого порядка). Функцию $\alpha(x)$ называют бесконечно малой более высокого порядка малости по сравнению с $\beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$ и записывают $\alpha(x) = o(\beta(x))$, если существует и равен нулю предел отношения $\alpha(x)/\beta(x)$, при $x \rightarrow x_0$.

$$\alpha(x) = o(\beta(x)) x \rightarrow x_0 \iff \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$$

Определение 22 (Эквивалентные бесконечно малые функции). Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют эквивалентными бесконечно малыми при $x \rightarrow x_0$, если предел их отношения при $x \rightarrow x_0$ равен 1.

$$\alpha(x) \sim \beta(x) x \rightarrow x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$

Определение 23 ((опр. 1) Непрерывность функции в точке). Функция $f(x)$, определённая в некоторой окрестности точки x_0 , называется непре-

рывной в этой точке если:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Определение 24 ((опр. 2) Непрерывность функции в точке). Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если бесконечно малому приращению аргумента $\Delta x = x_0 - x$ соответствует бесконечно малое приращение функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

Определение 25 (Непрерывность функции на интервале). Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на интервале (a, b) , если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Определение 26 (Непрерывность функции в точке справа). Функция $y = f(x)$ определённая в правосторонней окрестности точки x_0 $([x_0, x_0 + \delta))$ называется непрерывной справа в этой точке, если:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0+} = f(x_0)$$

Определение 27 (Непрерывность функции в точке слева). Функция $y = f(x)$ определённая в левосторонней окрестности точки x_0 $((x_0 - \delta, x_0])$ называется непрерывной слева в этой точке, если:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0-} = f(x_0)$$

Определение 28 (Непрерывность функции на отрезке). Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a, b]$, если:

1. Непрерывна на интервале (a, b)
2. Непрерывна в точке a справа
3. Непрерывна в точке b слева

Определение 29 (Точка разрыва функции). Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой точке проколотой окрестности точки x_0 непрерывна в любой точке этой окрестности (за исключением самой точки x_0). Тогда точка x_0 называется точкой разрыва функции.

Определение 30 (Производная функции). Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ и предел приращения аргумента $\Delta x = x_0 - x$ при стремлении последнего к нулю.

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Определение 31 (Правосторонняя производная функции). Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 справа или правосторонней производной называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении к нулю справа.

$$y'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Определение 32 (Левосторонняя производная функции). Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 слева или левосторонней производной называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении к нулю слева.

$$y'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Определение 33 (Дифференцируемость функции в точке). Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0 , если существует константа A такая, что приращение функции в этой точке представимо в виде:

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta x > 0$.

Определение 34 (Дифференциал функции в точке). Дифференциалом функции $y = f(x_0)$ называется главная часть приращения функции Δy .

$$dy = f'(x_0)\Delta x \quad (2)$$

Определение 35 (Невозрастающая функция на интервале). Функция $y = f(x)$, определённая на интервале (a, b) не возрастает на этом интервале, если для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$ таких что $x_2 > x_1 \implies f(x_2) \leq f(x_1)$.

Определение 36 (Неубывающая функция на интервале). Функция $y = f(x)$, определённая на интервале (a, b) не убывает на этом интервале, если для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$ таких что $x_2 > x_1 \implies f(x_2) \geq f(x_1)$.

Определение 37 (Точка строгого локального минимума). Точка x_0 называется точкой строгого локального минимума функции $f(x)$, если $\exists S(x_0, \delta)$, такая что $\forall x \in S(x_0, \delta) : f(x_0) < f(x)$.

Определение 38 (Точка строгого локального максимума). Точка x_0 называется точкой строгого локального максимума функции $f(x)$, если $\exists S(x_0, \delta)$, такая что $\forall x \in S(x_0, \delta) : f(x_0) > f(x)$.

Определение 39 (Точка локального минимума). Точка x_0 называется точкой локального минимума функции $f(x)$, если $\exists S(x_0, \delta)$, такая что $\forall x \in S(x_0, \delta) : f(x_0) \leq f(x)$.

Определение 40 (Стационарные точки). Точки, в которых производная функции обращается в ноль называются *стационарными*.

Определение 41 (Точка локального максимума). Точка x_0 называется точкой локального максимума функции $f(x)$, если $\exists S(x_0, \delta)$, такая что $\forall x \in S(x_0, \delta) : f(x_0) \geq f(x)$.

Определение 42 (Наклонная асимптота). Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$, если сама функция представима в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – б.м.ф при $x \rightarrow \pm\infty$.

Определение 43 (Выпуклость вверх). Говорят, что график функции $y = f(x)$ на интервале (a, b) выпуклый вверх на этом интервале, если касательная к нему в любой точке этого интервала (кроме точки касания) лежит выше графика функции.

Определение 44 (Выпуклость вниз). Говорят, что график функции $y = f(x)$ на интервале (a, b) выпуклый вниз на этом интервале, если касательная к нему в любой точке этого интервала (кроме точки касания) лежит ниже графика функции.

Определение 45 (Точка перегиба функции). Точка $x_0 \in (a, b)$ называется точкой перегиба функции $f(x)$, если эта функция непрерывна в точке x_0 и если $\exists \delta > 0$ такое, что направления выпуклостей функции $f(x)$ на интервалах $(x_0 - \delta; x_0)$ и $(x_0; x_0 + \delta)$ различны.

2 Теория

Вопрос 1. Сформулируйте и докажите теорему о единственности предела сходящейся последовательности.

Ссылки. Используются определения №12, №14, №15.

Теорема (О существовании единственности предела последовательности). Любая сходящаяся последовательность имеет единственный предел.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ – сходящаяся последовательность. Рассуждаем методом от противного. Пусть последовательность $\{x_n\}$ более одного предела.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b \quad a \neq b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff (\forall \varepsilon_1 > 0)(\exists N_1(\varepsilon_1) \in \mathbb{N})(\forall n > N_1(\varepsilon_1) \implies |x_n - a| < \varepsilon_1) \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b \iff (\forall \varepsilon_2 > 0)(\exists N_2(\varepsilon_2) \in \mathbb{N})(\forall n > N_2(\varepsilon_2) \implies |x_n - b| < \varepsilon_2) \quad (2)$$

Выберем $N = \max\{N_1(\varepsilon_1), N_2(\varepsilon_2)\}$.

Пусть

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = \frac{|b - a|}{3}$$

$$\begin{aligned} 3\varepsilon &= |b - a| = |b - a + x_n - x_n| = \\ &= |(x_n - a) - (x_n - b)| \leq |x_n - a| + |x_n - b| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\varepsilon \\ 3\varepsilon &< 2\varepsilon \end{aligned}$$

Противоречие. Значит, предположение не является верным \implies последовательность x_n имеет единственный предел. \square

Вопрос 2. Сформулируйте и докажите теорему об ограниченности сходящейся последовательности.

Ссылки. Используются определения №12, №13, №14, №15.

Теорема. *Об ограниченности сходящейся последовательности.*
Любая сходящаяся последовательность *ограничена*.

Доказательство. По определению сходящейся последовательности

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} = a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n > N(\varepsilon) \implies |x_n - a| < \varepsilon).$$

Выберем в качестве $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|, |a - \varepsilon|, |a + \varepsilon|\}$.

Тогда для $\forall n \in \mathbb{N}$ будет верно $|x_n| \leq M$ — это и означает, что последовательность x_n — ограниченная. \square

Вопрос 3. Сформулируйте и докажите теорему о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел.

Ссылки. Используются определения №16, №18.

Теорема (О локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел). Функция, имеющая конечный предел, локально ограничена.

Доказательство.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

$$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \implies |f(x) - a| < \varepsilon)$$

Распишем:

$$\begin{aligned} -\varepsilon < f(x) - a < \varepsilon \\ a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon \end{aligned} \quad \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$$

Выберем $M = \max\{|a - \varepsilon|, |a + \varepsilon|\}$

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$$

Что и требовалось доказать.

□

Вопрос 4. Сформулируйте и докажите теорему о сохранении функцией знака своего предела.

Ссылки. Используются определения №16.

Теорема (О сохранении функцией знака своего предела). Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \neq 0$, то $\exists \dot{S}(x_0, \delta)$ такая, что функция в ней сохраняет знак своего предела.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \neq 0 \rightarrow \begin{matrix} a > 0 \\ a < 0 \end{matrix} \implies \begin{matrix} f(x) > 0 \\ f(x) < 0 \end{matrix} \quad \forall x \in \dot{S}(x_0, \delta)$$

Доказательство. Пусть $a > 0$. Выберем $\varepsilon = a > 0$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \iff (\forall \varepsilon = a)(\exists \delta(x) > 0)(\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta) \implies |f(x) - a| < \varepsilon = a)$$

Распишем:

$$\begin{aligned} -a < f(x) - a < a \\ \boxed{0 < f(x) < 2a} \end{aligned}$$

Знак у функции $f(x)$ и числа a - одинаковые.

Пусть $a < 0$. Выберем $\varepsilon = -a$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \iff (\forall \varepsilon = -a)(\exists \delta(x) > 0)(\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta) \implies |f(x) - a| < \varepsilon = -a)$$

Распишем:

$$\begin{aligned} -a < f(x) - a < a \\ \boxed{-2a < f(x) < 0} \end{aligned}$$

Знак у функции $f(x)$ и числа a - одинаковые.

Значит, $f(x)$ сохраняет знак своего предела $\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta)$ □

Вопрос 5. Сформулируйте и докажите теорему о предельном переходе в неравенстве.

Ссылки. Используются определения №16.

Теорема (О предельном переходе в неравенстве). Пусть существуют конечные пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0 и $\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta)$ верно $f(x) < g(x)$. Тогда $\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta)$ имеет место неравенство $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

Доказательство. По условию $f(x) < g(x), \forall x \in \dot{S}(x_0, \delta)$. Введём функцию $F(x) = f(x) - g(x) < 0, \forall x \in \dot{S}(x_0, \delta)$. Т.к. $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы в точке x_0 , соответственно и функция $F(x)$ имеет конечный предел в точке x_0 (как разность $f(x)$ и $g(x)$).

По следствию из предыдущей теоремы $\implies \lim_{x \rightarrow x_0} F(x)$

Подставим $F(x) = f(x) - g(x)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) \leq 0 &\implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \leq 0 \implies \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &\leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \end{aligned}$$

□

Вопрос 6. Сформулируйте и докажите теорему о пределе промежуточной функции.

Ссылки. Используются определения №16.

Теорема (О пределе промежуточной функции). Пусть существуют конечные пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0 и $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$, $\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta)$ верно неравенство $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a$.

Доказательство. По условию:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_1(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta) \implies |f(x) - a| < \varepsilon) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_2(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta) \implies |g(x) - a| < \varepsilon) \quad (2)$$

Выберем $\delta_0 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, тогда (1), (2) и $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ верны одновременно $\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta_0)$.

$$(1) \quad a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$$

$$(2) \quad a - \varepsilon < g(x) < a + \varepsilon$$

$$\begin{aligned} & f(x) \leq h(x) \leq g(x) \\ \implies & a - \varepsilon_1 < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < a + \varepsilon_2 \\ \implies & \forall x \in \dot{S}(x_0, \delta_0) \quad a - \varepsilon < h(x) < a + \varepsilon \end{aligned}$$

В итоге:

$$\begin{aligned} & (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_0(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta_0) \implies |h(x) - a| < \varepsilon) \\ \implies & \text{по определению предела} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a \end{aligned}$$

□

Вопрос 7. Сформулируйте и докажите теорему о пределе произведения функций.

Ссылки. Используются определения №16, №19, теорема “О произведении бесконечно малой функций на локально ограниченную”.

Теорема (О пределе произведения функций). *О пределе произведения функций.*

Предел произведения функций равен произведению пределов.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

Доказательство. Пусть:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \quad (2)$$

По теореме о связи функции, её предела и бесконечно малой функции:

$$(1) \implies f(x) = a + \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) - \text{б.м.ф.}$$

$$(2) \implies g(x) = b + \beta(x), \text{ где } \beta(x) - \text{б.м.ф.}$$

Рассмотрим:

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= (a + \alpha(x))(b + \beta(x)) \\ &= ab + \underbrace{a \cdot \beta(x) + b\alpha(x) + \alpha(x) \cdot \beta(x)}_{\gamma(x)} \\ &= ab + \gamma(x) \end{aligned}$$

По следствию из теоремы “О произведении бесконечно малой функций на локально ограниченную”:

$$a \cdot \beta(x) = \text{б.м.ф. при } x \rightarrow 0$$

$$b \cdot \alpha(x) = \text{б.м.ф. при } x \rightarrow 0$$

$$\alpha(x) \cdot \beta(x) = \text{б.м.ф. при } x \rightarrow 0$$

По теореме о сумме конечного числа с б.м.ф.:

$$\gamma(x) = \text{б.м.ф. при } x \rightarrow 0$$

Далее расписываем предел:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} ab + \lim_{x \rightarrow x_0} \gamma(x) \\ &= ab + 0 \\ &= ab\end{aligned}$$

□

Вопрос 8. Сформулируйте и докажите теорему о пределе сложной функции.

Ссылки. Используются определения №14, №17.

Теорема (О пределе сложной функции). Если функция $y = f(x)$ имеет предел в точке x_0 равный a , то функция $\varphi(y)$ имеет предел в точке a , равный C , тогда сложная функция $\varphi(f(x))$ имеет предел в точке x_0 , равный C .

$$\left. \begin{array}{l} y = f(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \\ \lim_{y \rightarrow a} \varphi(y) = C \end{array} \right\} \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(f(x)) = C$$

Доказательство.

$$\lim_{y \rightarrow a} \varphi(y) \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_1 > 0)(\forall y \in \overset{\circ}{S}(a, \delta_1) \implies |\varphi(y) - C| < \varepsilon) \quad (1)$$

Выберем в качестве ε в пределе найденное δ_1 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \\ \iff (\forall \delta_1 > 0)(\exists \delta_2 > 0)(\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta_2 \implies |f(x) - a| < \delta_1) \end{aligned} \quad (2)$$

В итоге:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_2 > 0)(\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta_2 \implies |\varphi(f(x)) - C| < \varepsilon)$$

Что равносильно:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(f(x)) = C$$

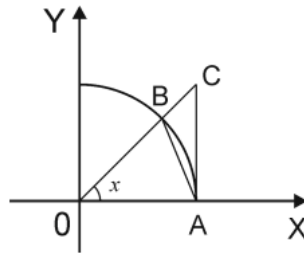
□

Вопрос 9. Докажите, что:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Ссылки. Используется теорема о промежуточной функции.

Доказательство. Пусть $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Рассмотрим окружность радиуса R с центром в начале координат, пересекающую ось абсцисс в точке A , и пусть угол $\angle AOB$ равен x . Пусть, далее, CA – перпендикуляр к этой оси, C точка пересечения с этим перпендикуляром продолжения отрезка OB за точку B . Тогда



$$\begin{aligned} S_{\triangle AOB} &< S_{\text{sector } OAB} < S_{\triangle OAC} \\ \frac{1}{2}R^2 \sin(x) &< \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2 \operatorname{tg}(x) \\ \sin(x) &< x < \operatorname{tg}(x) \\ 1 &< \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)} \\ 1 > \frac{x}{\sin(x)} &> \cos(x), \text{ при } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Рассмотрим $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Сделаем замену $\beta = -x$, таким образом $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, а значит, справедливо следующее неравенство:

$$1 > \frac{\sin(\beta)}{\beta} > \cos(\beta)$$

Вернёмся к замене $\beta = -x$:

$$\begin{aligned} 1 &> \frac{\sin(-x)}{-x} > \cos(-x) \\ 1 &> \frac{-\sin(x)}{-x} > \cos(x), \text{ при } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Таким образом, полученное неравенство справедливо для $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$(0, \frac{\pi}{2})$. Перейдём к пределу при $x \rightarrow 0$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

по теореме “О пределе промежуточной функции”.

□

Вопрос 10. Сформулируйте и докажите теорему о связи функции, её предела и бесконечно малой.

Ссылки. Используются определения №16, №19.

Теорема (О связи функции, её предела и бесконечно малой). Функция $y = f(x)$ имеет конечный предел в точке x_0 тогда и только тогда, когда её можно представить в виде суммы предела и некоторой бесконечно малой функции.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \iff f(x) = a + \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) - \text{б.м.ф. при } x \rightarrow x_0$$

Необходимость. Дано:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Доказать:

$$f(x) = a + \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) - \text{б.м.ф. при } x \rightarrow x_0$$

Распишем:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta) \implies |f(x) - a| < \varepsilon)$$

Обозначим $f(x) - a = \alpha(x)$, тогда:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta) \implies |\alpha(x)| < \varepsilon)$$

По определению бесконечно малой функции $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция. Из обозначения следует, что:

$$f(x) = a + \alpha(x)$$

где $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \rightarrow x_0$. □

Достаточность. Дано:

$$f(x) = a + \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) - \text{б.м.ф. при } x \rightarrow x_0$$

Доказать:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

По определению б.м.ф.:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0 \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\dot{S}(x_0, \delta) \implies |\alpha(x)| < \varepsilon)$$

С учётом введённого обозначения:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\dot{S}(x_0, \delta) \implies |f(x) - a| < \varepsilon \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a)$$

□

Вопрос 11. Сформулируйте и докажите теорему о произведении бесконечно малой функции на ограниченную.

Ссылки. Используются определения №18, №19.

Теорема (О произведении бесконечно малой функции на ограниченную). Произведение бесконечно малой функции на локально ограниченную есть величина бесконечно малая.

Доказательство. Пусть $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \rightarrow x_0$, а функция $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ является локально ограниченной. Докажем, что:

$$\alpha(x) \cdot f(x) = 0$$

Распишем:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) &= 0 \\ \iff (\forall \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M} > 0)(\exists \delta_1 > 0)(\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta_1) \implies |\alpha(x)| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M}) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} M &\in \mathbb{R}, M > 0 \\ \forall x \in \dot{S}(x_0, \delta_2) &\implies |f(x)| < M \end{aligned} \quad (2)$$

Выберем $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, тогда (1) и (2) верны одновременно. В итоге получаем:

$$\begin{aligned} (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta) \implies \\ |\alpha(x) \cdot f(x)| = |\alpha(x)| \cdot |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M < \varepsilon) \end{aligned}$$

Тогда по определению бесконечно малой функции:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) \cdot f(x) = 0$$

□

Вопрос 12. Сформулируйте и докажите теорему о связи между бесконечно большой и бесконечно малой.

Ссылки. Используются определения №16, №19, №20.

Теорема (О связи между бесконечно большой и бесконечно малой). Если $\alpha(x)$ - бесконечно большая функция при $x \rightarrow x_0$, то $\frac{1}{\alpha(x)}$ - бесконечно малая функция при $x \rightarrow x_0$.

Доказательство. По условию $\alpha(x)$ - б.б.ф при $x \rightarrow x_0$. По определению:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \infty \iff (\forall M > 0)(\exists \delta(M) > 0)(\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta) \implies |\alpha(x)| > M)$$

Рассмотрим неравенство:

$$|\alpha(x)| > M, \forall x \in \dot{S}(x_0, \delta)$$

Обозначим $\varepsilon = \frac{1}{M}$.

$$\begin{aligned} |\alpha(x)| > M &\implies \frac{1}{|\alpha(x)|} < \frac{1}{M} \\ &\implies \left| \frac{1}{\alpha(x)} \right| < \frac{1}{M} < \varepsilon \end{aligned}$$

В итоге получаем:

$$\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta) \implies \left| \frac{1}{\alpha(x)} \right| < \varepsilon$$

Что по определению является бесконечно малой функцией. \square

Вопрос 13. Сформулируйте и докажите теорему о замене бесконечно малой на эквивалентную под знаком предела.

Ссылки. Используются определения №19, №22.

Теорема (О замене бесконечно малой на эквивалентную под знаком предела). Предел **отношения** двух б.м.ф. (б.б.ф) не изменится, если заменить эти функции на эквивалентные.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha(x), \beta(x) - \text{б.м.ф. при } x \rightarrow x_0 \\ \alpha(x) \sim \alpha_0(x) \\ \beta(x) \sim \beta_0(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{\alpha_0(x)}{\beta_0(x)}$$

Доказательство. Рассмотрим предел:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) \cdot \alpha_0(x) \cdot \beta_0(x)}{\beta(x) \cdot \alpha_0(x) \cdot \beta_0(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\alpha_0(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta_0(x)}{\beta(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_0(x)}{\beta_0(x)} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \end{aligned}$$

□

Вопрос 14. Сформулируйте и докажите теорему о необходимом и достаточном условии эквивалентности бесконечно малых.

Ссылки. Используются определения №19, №21, №22.

Теорема (Необходимое и достаточное условие эквивалентности бесконечно малых). Две функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда их разность имеет более высокий порядок малости по сравнению с каждой из них.

$$\begin{aligned} &\alpha(x), \beta(x) - \text{б.м.ф при } x \rightarrow x_0 \\ &\alpha(x) \sim \beta(x) \iff \begin{cases} \alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x)) \\ \alpha(x) - \beta(x) = o(\beta(x)) \end{cases} \text{ при } x \rightarrow x_0 \end{aligned}$$

Необходимость. Дано:

$$\alpha(x), \beta(x) - \text{б.м.ф при } x \rightarrow x_0$$

Доказать:

$$\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x)), \text{ при } x \rightarrow x_0$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 - \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \right) \\ &= 1 - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1 - \frac{1}{1} = 0 \end{aligned}$$

□

Достаточность. Дано:

$$\alpha(x) - \beta(x) = o(\beta(x)), \text{ при } x \rightarrow x_0$$

Доказать:

$$\alpha(x) \sim \beta(x), \text{ при } x \rightarrow x_0$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 \\ &\implies \alpha(x) \sim \beta(x), \text{ при } x \rightarrow x_0 \end{aligned}$$

□

Вопрос 15. Сформулируйте и докажите теорему о сумме конечного числа бесконечно малых разных порядков.

Ссылки. Используются определения №19, №22.

Теорема (О сумме конечного числа бесконечно малых разных порядков). Сумма бесконечно малых функций разным порядком малости эквивалентно слагаемому низшего порядка малости.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha(x), \beta(x) - \text{б.м.ф при } x \rightarrow x_0 \\ \alpha(x) = o(\beta(x)), \text{ при } x \rightarrow x_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha(x) + \beta(x) \sim \beta(x), \text{ при } x \rightarrow x_0$$

Доказательство. Рассмотрим предел:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) + \beta(x)}{\beta(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} + 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} + 1 \\ &= 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

□

Вопрос 16. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций.

Ссылки. Используются определения №23.

Теорема (О непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0 , то функции (последняя с учётом $g(x) \neq 0$):

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) \\ (f \cdot g)(x) \\ \frac{f(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

также непрерывны в точке x_0 .

Доказательство. По определению непрерывной функции:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= f(x_0) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) &= g(x_0) \end{aligned}$$

Рассмотрим:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0) \\ &\implies f(x) + g(x) \in C(x_0) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0) \cdot g(x_0) \\ &\implies (f \cdot g)(x) \in C(x_0) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \end{aligned}$$

□

Вопрос 17. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности сложной функции.

Ссылки. Используются определения №23, теорема “О пределе сложной функции”.

Теорема (О непрерывности сложной функции). Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 , а функция $g(y)$ непрерывна в соответствующей точке $y_0 = f(x_0)$, то сложная функция $g(f(x))$ непрерывна в точке x_0 .

Доказательство. Т.к. функция $g(y) \in C(y_0)$, то $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = g(y_0)$. С другой стороны, по условию $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$. По теореме “О пределе сложной функции” $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x))$. Подставим в последнее равенство $y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x))$$

□

Вопрос 18. Сформулируйте и докажите теорему о сохранении знака непрерывной функции в окрестности точки.

Ссылки. Используются определения №23, теорема “О сохранении функции знака своего предела”.

Теорема (О сохранении знака непрерывной функции в окрестности точки). Если функция $f(x) \in C(x_0)$ и $f(x_0) \neq 0$, то $\exists S(x_0)$, в которой знак значения функции совпадает со знаком $f(x_0)$.

Доказательство. Т.к. функция $y = f(x) \in C(x_0)$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. По теореме о сохранении функции знака своего предела $\implies \exists S(x_0)$, в которой знак значений функции совпадает со знаком $f(x_0)$. \square

Вопрос 19. Дайте определение функции, непрерывной в точке. Сформулируйте теорему о непрерывности элементарных функций. Докажите непрерывность функций $y = \sin x$, $y = \cos x$

Ссылки. Используются определения №23, теорема “Об произведении ограниченной функции на бесконечно малую”.

Теорема (О непрерывности элементарных функций). Основные элементарные функции непрерывны в области определения.

Доказательство (Для $y = \sin(x)$ и $y = \cos(x)$). Докажем её для функций $y = \sin(x)$, $y = \cos(x)$:

$$\begin{aligned} y &= \sin(x), D_y = \mathbb{R} \\ x_0 = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} \sin(x) &= \sin(0) \implies y = \sin(x) \in C(0) \\ \forall x \in D_y = \mathbb{R}, \quad \Delta x &- \text{приращение функции} \\ x &= x_0 + \Delta x, \quad x \in D_f = \mathbb{R} \\ \Delta y &= y(x) - y(x_0) = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) \\ &= \sin(x_0 + \Delta x) - \sin(x_0) = 2 \sin\left(\frac{x_0 + \Delta x - x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x_0 + \Delta x + x_0}{2}\right) \\ &= 2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) = 0 \\ &- \text{ по т. об произв. огр. на б.м.ф.} \end{aligned}$$

Т.к. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ по опр. непр. функции $\implies y = \sin(x)$ непрерывна в точке x_0 . Т.к. x_0 – произвольная точка из области определения, то $y = \sin(x)$ непрерывна на всей области произведения. \square

Вопрос 20. Сформулируйте свойства функций, непрерывных на отрезке.

Ссылки. Используются определения №28.

Теорема (Первая теорема Вейерштрасса). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке ab , то она на этом отрезке ограничена.

$$f(x) \in C[a, b] \implies \exists M \in \mathbb{R}, M > 0, \forall x \in: |f(x)| \leq M$$

Теорема (Вторая теорема Вейерштрасса). Если функция $y = f(x) \in C[a, b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значения.

$$\begin{aligned} f(x) \in C[a, b] \\ \implies \\ \exists x_*, x^* \in \implies m = f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*) = M \end{aligned}$$

Теорема (Первая теорема Больцано-Коши). Если функция $y = f(x) \in C[a, b]$, и на концах отрезка принимает значения разных знаков, то $\exists c \in (a, b) : f(c) = 0$.

$$f(x) \in S[a, b] \wedge f(a) \cdot f(b) < 0 \implies \exists c \in (a, b) : f(c) = 0$$

Теорема (Вторая теорема Больцано-Коши). Если функция $y = f(x) \in C[a, b]$ и принимает на границах отрезка различные значения $f(a) = A \neq f(b) = B$, то $\forall C \in \exists c \in (a, b)$, в которой $f(c) = C$.

$$\begin{aligned} f(x) \in C[a, b] \wedge f(a) = A \neq f(b) = B \\ \implies \\ \exists C \in (A, B) \implies \exists c \in (a, b) : f(c) = C \end{aligned}$$

Теорема (Теорема о непрерывности обратной функции). Пусть $y = f(x) \in C(a, b)$ и строго монотонна на этом интервале. Тогда в соответствующем (a, b) интервале значений функции существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, которая так же строго монотонна и непрерывна.

Вопрос 21. Сформулируйте определение точки разрыва функции и дайте классификацию точек разрыва. На каждый случай приведите примеры.

Ссылки. Используются определения №29.

Ответ. Классификация точек разрыва:

- Первого рода
 - Устранимого разрыва

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} = \lim_{x \rightarrow x_0-} \neq f(x_0)$$

- Неустранимого разрыва

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} \neq \lim_{x \rightarrow x_0-} \text{ или } \nexists f(x_0)$$

- Второго рода

$$\nexists \lim_{x \rightarrow x_0 \pm}$$

Примеры точек разрыва:

- Устранимого разрыва:

$$y = \frac{\sin(x)}{x} \quad x_0 = 0$$

- Неустранимого разрыва:

$$\begin{cases} y = x, x > 0 \\ y = x - 1, x < 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$$

- Второго рода:

$$y = \frac{1}{x} \quad x_0 = 0$$

Вопрос 22. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие существования наклонной асимптоты.

Ссылки. Используются определения №19, №42.

Теорема (Необходимое и достаточное условие существования наклонной асимптоты). График функции $y = f(x)$ имеет при $x \rightarrow \pm\infty$ наклонную асимптоту тогда и только тогда, когда существуют два конечных предела:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) \end{cases} \quad (*)$$

Необходимость. Дано $y = kx + b$ наклонная асимптота.

Доказать \exists пределов.

По условию $y = kx + b$ – наклонная асимптота \implies по определению $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – б.м.ф. при $x \rightarrow \pm\infty$. Рассмотрим:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{kx + b + \alpha(x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(k + b \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \alpha(x) \right) \\ &= k + b \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} \alpha(x) \\ &= k + b \cdot 0 + 0 = k \end{aligned}$$

Рассмотрим выражение:

$$\begin{aligned} f(x) - kx &= kx + b + \alpha(x) - kx = b + \alpha(x) \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (b + \alpha(x)) = b \end{aligned}$$

□

Достаточность. Дано \exists конечные пределы (*). Доказать $y = kx + b$ – наклонная асимптота.

\exists конечный предел $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = b$ По теореме о связи функции, её предела и б.м.ф. \implies

$$f(x) - kx = b + \alpha(x)$$

при $x \rightarrow \pm\infty$. Выразим $f(x)$:

$$f(x) = kx + b + \alpha(x)$$

где $\alpha(x)$ б.м.ф. при $x \rightarrow \pm\infty$. По определению $\implies y = kx + b$ – наклонная асимптота к графику функции $y = f(x)$ □

Вопрос 23. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции в точке.

Ссылки. Используются определения №30, №33.

Теорема (Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции в точке). Функция $y = f(x)$ в точке x_0 тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке конечную производную.

Необходимость. Дано: $y = f(x)$ – дифференцируема в точке x_0 .

Доказать: $\exists y'(x)$ – конечное число

Т.к. $y = f(x)$, то $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \rightarrow 0$.

Вычислим предел:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (A + \alpha(\Delta x)) = \\ &= A + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = A + 0 = A \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= y'(x_0) \text{ – по определению} \\ \Rightarrow y'(x_0) &= A = \text{const} \Rightarrow \exists y'(x_0) \text{ – конечное число.} \end{aligned}$$

□

Достаточность. Дано: $\exists y'(x_0)$ – конечное число.

Доказать: $y = f(x)$ – дифференцируема в этой точке.

Доказательство:

Т.к. $\exists y'(x)$, то по определению производной

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

По теореме "О связи функции, её предела и некоторой бесконечно малой функции":

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0) + \alpha(\Delta x)$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \rightarrow 0$.

$$\Delta y = y'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

где $A = y'(x_0) \Rightarrow y = f(x)$ дифференцируема в данной точке.

□

Вопрос 24. Сформулируйте и докажите теорему о связи дифференцируемости и непрерывности функции.

Ссылки. Используются определения №24, №33.

Теорема (О связи дифференцируемости и непрерывности функции). Если функция дифференцируема в точке x_0 , то она в этой точке непрерывна.

Доказательство. Т.к. $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , то $\Delta y = y'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, где $y'(x_0) = \text{const}$, $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \rightarrow 0$.

Вычислим:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (y'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x) \\ &= y'(x_0) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \\ &= y'(x_0) \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

По определению непрерывной функции $y = f(x)$ является непрерывной в точке x_0 . \square

Вопрос 25. Сформулируйте и докажите теорему о производной произведения двух дифференцируемых функций.

Ссылки. Используются определения №30, №33.

Теорема (О производной произведения двух дифференцируемых функций). Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x_0 , то функция $u(x) \cdot v(x)$ также дифференцируема в точке x_0 :

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Доказательство. Пусть $y = uv$, тогда:

$$\begin{aligned} \Delta y &= y(x + \Delta x) - y(x) = u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) = \\ &= (\Delta u + u(x))(\Delta v + v(x)) - u(x)v(x) = \Delta u \Delta v + \Delta u v(x) + \\ &\quad + \Delta v u(x) + u(x)v(x) = \\ &= \Delta u \Delta v + \Delta u v(x) + \Delta v u(x). \end{aligned}$$

Вычислим предел:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u \Delta v + \Delta u v(x) + \Delta v u(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x) \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \\ &= \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u}_0 \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}_{v'(x)} + v(x) \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}}_{u'(x)} + u(x) \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}_{v'(x)} = \\ &= v(x)u'(x) + v'(x)u(x) + v'(x) \cdot 0 = \\ &= \boxed{v(x)u'(x) + u(x)v'(x)} \end{aligned}$$

Т.к. функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ дифференцируемы в точке x , то по теореме о связи дифференцируемости и непрерывности функции $\Rightarrow u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывны в точке $x \Rightarrow$ по определению непрерывности функции:

$$\begin{cases} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u = 0 \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = 0 \end{cases}$$

□

Вопрос 26. Сформулируйте и докажите теорему о производной частного двух дифференцируемых функций.

Ссылки. Используются определения №30, №33.

Теорема (О производной частного двух дифференцируемых функций). Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x_0 и $v(x_0) \neq 0$, то функция $\frac{u(x)}{v(x)}$ также дифференцируема в точке x_0 :

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

Доказательство. Пусть $y = \frac{u}{v}$, тогда:

$$\begin{aligned} \Delta y &= y(x + \Delta x) - y(x) = \\ &= \frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \\ &= \frac{u(x + \Delta x)v(x) - u(x)v(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)v(x)} = \\ &= \frac{(u(x) + \Delta u)v(x) - u(x)(v(x) + \Delta v)}{(\Delta v + v(x))v(x)} = \\ &= \frac{u(x) + \Delta u v(x) - u(x)v(x) - u(x)\Delta v}{v^2(x) + v(x)\Delta v} = \\ &= \frac{\Delta u v(x) - \Delta v u(x)}{v^2(x) + v(x)\Delta v} \end{aligned}$$

Вычислим предел:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta u v(x) - \Delta v u(x)}{v^2(x) + v(x)\Delta v}}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x) \frac{\Delta u}{\Delta x} - v(x_0) \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2(x) + v(x)\Delta v} = \\ &= \frac{v(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2(x) - v(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v} = \\ &= \boxed{\frac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}} \end{aligned}$$

□

Вопрос 27. Сформулируйте и докажите теорему о производной сложной функции.

Ссылки. Используются определения №24 №30, №33.

Теорема (О производной сложной функции). Пусть функция $u = g(x)$ дифференцируема в точке $x = a$, а функция $y = f(u)$ дифференцируема в соответствующей точке $b = g(a)$. Тогда сложная функция $F(x) = f(g(x))$ дифференцируема в точке $x = a$.

$$F'(x)|_{x=a} = (f(g(x)))'|_{x=a} = f'_u(b) \cdot g'_x(a)$$

Доказательство. Т.к. функция $u = g(x)$ дифференцируема в точке $x = a$, то по определению \implies

$$\Delta u = g'(a) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta \quad (1)$$

где $\alpha(\Delta x)$ – б.м.ф при $\Delta x \rightarrow 0$. Т.к. функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке b , то по определению дифференцируемости \implies

$$\Delta y = f'(b) \cdot \Delta u + \beta(\Delta u) \cdot \Delta u \quad (2)$$

где $\beta(\Delta u)$ – б.м.ф при $\Delta u \rightarrow 0$.

Подставим (1) в (2). Тогда:

$$\begin{aligned} \Delta y &= f'(b) \cdot (g'(a)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x) + \beta(\Delta u)(g'(a)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x) = \\ &= f'(b) \cdot g'(a)\Delta x + \Delta x(f'(b)\alpha(\Delta x) + g'(a)\beta(\Delta u) + \beta(\Delta u)\alpha(\Delta x)) = \Delta F \end{aligned}$$

Обозначим: $\gamma(\Delta x) = f'(b)\alpha(\Delta x) + g'(a)\beta(\Delta u) + \beta(\Delta u)\alpha(\Delta x)$. В итоге получаем $\Delta F = f'(b)g'(a)\Delta x + \gamma(\Delta x)\Delta x$.

$f'(b)\alpha(\Delta x)$ – б.м.ф при $\Delta x \rightarrow 0$ (как производная постоянной на б.м.ф.). Т.к. $u = g(x)$ дифференцируема в точке $x = a$, то по теореме о связи дифференцируемости и непрерывности функции $u = g(x)$ непрерывна в точке $x = a \implies$ по определению непрерывности $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u = 0$ или при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta u \rightarrow 0$. $g'(a)\beta(\Delta u)$ – б.м.ф при $\Delta x \rightarrow 0$ как производная на б.м.ф. $\beta(\Delta u)\alpha(\Delta x)$ – б.м.ф при $\Delta x \rightarrow 0$ (как производная двую б.м.ф.). Следовательно, $\gamma(x)$ – б.м.ф при $x \rightarrow 0$ как сумма конечного числа б.м.ф.

Вычислим предел:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f'(b)g'(a) + \gamma(\Delta x)) = f(b)g'(a) + 0 = f'(b)g'(a).$$

□

Вопрос 28. Сформулируйте и докажите теорему о производной обратной функции.

Ссылки. Используются определения №30, №30.

Теорема (О производной обратной функции). Пусть функция $y = f(x)$ в точке $x = a$ имеет конечную и отличную от нуля производную $f'(a)$ и пусть для неё существует однозначная обратная функция $x = g(y)$, непрерывная в соответствующей точке $b = f(a)$. Тогда существует производная обратной функции и она равна:

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

Доказательство. Т.к. функция $x = g(y)$ однозначно определена, то соответственно при $\Delta y \neq 0$, $\Delta x \neq 0$. Т.к. функция $x = g(y)$ непрерывна в соответствующей точке b , то $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \Delta x = 0$ или $\Delta x \rightarrow 0$ при $\Delta y \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} g'(b) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \\ &= \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(a)} \end{aligned}$$

□

Вопрос 29. Сформулируйте и докажите свойство инвариантности формы записи дифференциала первого порядка.

Ссылки. Используются определения №34.

Теорема (Инвариантность формы записи дифференциала первого порядка). Форма записи первого дифференциала не зависит от того, является ли x независимой переменной или функцией другого аргумента.

Доказательство. Пусть $y = f(x)$, $x = \varphi(t)$. Тогда можно задать сложную функцию:

$$F(t) = y = f(\varphi(t))$$

По определению дифференциала функции:

$$dy = F'(t)dt \quad (6)$$

По теореме о производной сложной функции:

$$F'(t) = f'(x) \cdot \varphi'(t) \quad (7)$$

Подставим (7) в (6):

$$dy = f'(x)\varphi'(t)dt \quad (8)$$

По определению дифференциала функции $dx = \varphi'(t)dt$ (9). Подставим (9) в (8):

$$\boxed{dy = f'(x)dx}$$

□

Вопрос 30. Сформулируйте и докажите теорему Ферма.

Ссылки. Используются определения №30, №31, №32, №33, №38, теорема “О существовании производной функции в точке”.

Теорема (Теорема Ферма о нулях производной функции). Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке X и во внутренней точке C этого промежутка достигает наибольшего или наименьшего значения. Если в этой точке существует $f'(c)$, то $f'(c) = 0$.

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ в точке $x = c$ принимает наибольшее значение на промежутке X . Тогда $\forall x \in X \implies f(x) \leq f(c)$. Дадим приращение Δx точке $x = c$. Тогда $f(c + \Delta x) \leq f(c)$. Пусть

$$\exists f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(c + \Delta x) - y(c)}{\Delta x}$$

Рассмотрим два случая:

$$1) \Delta x > 0, \Delta x \rightarrow 0+, x \rightarrow c+$$

$$f'_+(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{y(c + \Delta x) - y(c)}{\Delta x} = \left(\frac{-}{+} \right) \leq 0$$

$$2) \Delta x < 0, \Delta x \rightarrow 0-, x \rightarrow c-$$

$$f'_-(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{y(c + \Delta x) - y(c)}{\Delta x} = \left(\frac{-}{-} \right) \geq 0$$

По теореме о существовании производной функции в точке:

$$f'_+(c) = -f'_-(c) = 0$$

□

Вопрос 31. Сформулируйте и докажите теорему Ролля.

Ссылки. Используются определения №28, №33, №38, №38, теорема Ферма.

Теорема (Теорема Ролля). Пусть функция $y = f(x)$:

1. Непрерывна на отрезке (a, b)
2. Дифференцируема на интервале (a, b)
3. $f(a) = f(b)$

Тогда $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$

Доказательство. Т.к. функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке (a, b) , то по теореме Вейерштрасса она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значения. Возможны два случая:

1. Наибольшее и наименьшее значение достигаются на границе, т.е. в точке a и в точке b . Это означает, что $m = M$, где m – наименьшее значение, а M – наибольшее. Из этого следует, что функция $y = f(x) = \text{const}$ на (a, b) . Соответственно $\forall x \in (a, b), f'(x) = 0$
2. Когда наибольшее или наименьшее значение достигаются во внутренней точке (a, b) . Тогда для функции $y = f(x)$ справедлива теорема Ферма, согласно которой $\exists c \in (a, b), f'(c) = 0$.

□

Вопрос 32. Сформулируйте и докажите теорему Лагранжа.

Ссылки. Используются определения №28, №33, теорема Ролля.

Теорема (Теорема Лагранжа). Пусть функция $y = f(x)$:

1. Непрерывна на отрезке $[a, b]$
2. Дифференцируема на интервале (a, b)

Тогда $\exists c \in (a, b)$, в которой выполняется равенство:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x - a)$. $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ как сумма непрерывных функций. Существует конечная производная функции $F(x)$:

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

следовательно по необходимому и достаточному условию дифференцируемости будет верно $F(x)$ – дифференцируема на (a, b) . Покажем, что $F(a) = F(b)$:

$$\begin{aligned} F(a) &= f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0 \\ F(b) &= f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) \\ &= f(b) - f(b) + f(a) - f(a) = 0 \end{aligned}$$

Значит функция $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Тогда по теореме Ролля $\exists c \in (a, b)$, $F'(c) = 0$.

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ F'(c) &= f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \\ f'(c) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ f(b) - f(a) &= f'(c)(b - a) \end{aligned}$$

□

Вопрос 33. Сформулируйте и докажите теорему Коши.

Ссылки. Используются определения №28, №33, теорема Ролля

Теорема (Теорема Коши). Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условиям:

1. Непрерывны на отрезке $[a, b]$
2. Дифференцируемы на интервале (a, b)
3. $\forall x \in (a, b) f'(x) \neq 0$

Тогда $\exists c \in (a, b)$, такое что:

$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}}$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}(\varphi(x) - \varphi(a))$$

Докажем применимость Теоремы Ролля:

1. $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$ как линейная комбинация непрерывных функций.
2. $F(x)$ дифференцируема на (a, b) как линейная комбинация дифференцируемых функций.
3. $F(a) = F(b)$:

$$F(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}(\varphi(a) - \varphi(a)) = 0$$

$$F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}(\varphi(b) - \varphi(a)) = 0$$

Значит, функция $F(x)$ удовлетворяет условию теоремы Ролля,
 $\implies \exists c \in (a, b) : F'(c) = 0$. Вычислим:

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}\varphi'(x)$$

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}\varphi'(c) = 0$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}\varphi'(c) = f'(c) \quad \boxed{\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}}$$

□

Вопрос 34. Сформулируйте и докажите теорему Лопиталья – Бернулли для предела отношения двух бесконечно малых функций.

Ссылки. Используются определения №19, №20, №33, теорема “О связи дифференцируемости и непрерывности”, теорема Коши.

Теорема (Теорема Лопиталья-Бернулли). Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условиям:

- Определены и дифференцируемы в $\dot{S}(x_0)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$
- $\forall x \in \dot{S}(x_0) \quad \varphi'(x) \neq 0$
- $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$

Тогда $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$.

Доказательство. Доопределим функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ в точке x_0 нулём:

$$f(x_0) = 0 \quad \varphi(x_0) = 0$$

По условию:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 = f(x_0) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0 = \varphi(x_0)$$

$f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке x_0 .

По условию функция $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в точке $\dot{s}(x_0) \implies$ по теореме о связи дифференцируемости и непрерывности $\implies f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в $\dot{s}(x_0)$. Таким образом $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в $S(x_0)$.

Функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условию т.Коши на $[x_0, x]$. Тогда по теореме Коши \implies

$$\exists c \in [x_0, x] : \frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \quad (*)$$

Т.к. $f(x_0) = 0$ и $\varphi(x_0) = 0 \implies$

$$(*) \quad \boxed{\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}}$$

Т.к. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A \implies$ правая часть (*):

$$\lim_{c \rightarrow x_0} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = A$$

Левая часть (*):

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = A$$

Получаем:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$$

□

Вопрос 35. Сравните рост показательной, степенной и логарифмической функций на бесконечности.

Ссылки. Используются определения №20.

Ответ. Пусть:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^n \\ g(x) &= a^x \\ h(x) &= \ln x \end{aligned}$$

Найдём предел при стремлении к бесконечности:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n \cdot x^{n-1}}{a^x \ln a} \\ &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1)(n-2) \dots 1}{a^x (\ln a)^n} = \\ &= \frac{n!}{\ln^n a} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x} = \frac{n!}{\ln^n a} = 0. \end{aligned}$$

Значит a^x растёт быстрее, чем x^n при $x \rightarrow \infty$ или $x^n = o(a^x)$ при $x \rightarrow +\infty$.

Найдём предел при стремлении к бесконечности:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{n \cdot x^{n-1}} = \frac{1}{n} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{n} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Значит, x^n растёт быстрее, чем $\ln x$ при $x \rightarrow +\infty$ $\ln x = o(x^n)$ при $x \rightarrow +\infty$.

Вывод: на бесконечности функции расположены в таком порядке:

1. $g(x) = a^x$ – самая быстрорастущая функция
2. $f(x) = x^n$
3. $h(x) = \ln x$

Вопрос 36. Выведите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Теорема (Остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа). Пусть функция $y = f(x)$ $(n + 1)$ дифференцируема в $\mathring{S}(x_0)$, $\forall x \in \mathring{S}(x_0)$ $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$. Тогда:

$$R_n(c) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

где $c \in \mathring{S}(x_0)$.

Вопрос 37. Выведите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Теорема (Остаточный член формулы Тейлора в форме Пеано). Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема n раз в точке x_0 , тогда $x \rightarrow x_0$:

$$R_n(x) = o((x - x_0)^n)$$

Вопрос 38. Выведите формулу Маклорена для функции $y = e^x$ с остаточным членом в форме Лагранжа.

Ответ. Найдём производные для функции $y = e^x$ до n -ого порядка:

$$f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$$

Подставим $x = 0$:

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

Получаем:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Вопрос 39. Выведите формулу Маклорена для функции $y = \sin(x)$ с остаточным членом в форме Лагранжа.

Ответ. Найдём производные для функции $y = \sin(x)$ до $2n + 2$ -ого порядка:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ f''(x) &= -\sin(x) = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \\ f'''(x) &= -\cos(x) = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \\ f^{(4)}(x) &= \sin(x) = \sin\left(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \\ &\dots \\ f^{(2n+1)}(x) &= (-1)^n \cos(x) \\ f^{(2n+2)}(x) &= (-1)^{n+1} \sin(x) \end{aligned}$$

Подставим $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f'(0) &= 0 \\ f''(0) &= -1 \\ f'''(0) &= 0 \\ f^{(4)}(0) &= 1 \\ &\dots \\ f^{(2n+1)}(0) &= (-1)^n \\ f^{(2n+2)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

Получаем:

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{\sin\left(\theta x + (2n+2)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+2)!} x^{2n+2} \\ \theta &\in (0, 1) \end{aligned}$$

Вопрос 40. Выведите формулу Маклорена для функции $y = \cos(x)$ с остаточным членом в форме Лагранжа.

Ответ. Найдём производные для функции $y = \cos(x)$ до $2n + 1$ -ого порядка:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin(x) = \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \\ f''(x) &= -\cos(x) = \cos\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \\ f'''(x) &= \sin(x) = \cos\left(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \\ f^{(4)}(x) &= \cos(x) = \cos\left(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \\ &\dots \\ f^{(2n)}(x) &= (-1)^n \cos(x) \\ f^{(2n+1)}(x) &= (-1)^{n+1} \sin(x) \end{aligned}$$

Подставим $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f'(0) &= 0 \\ f''(0) &= -1 \\ f'''(0) &= 0 \\ f^{(4)}(0) &= 1 \\ &\dots \\ f^{(2n)}(0) &= (-1)^n \\ f^{(2n+1)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

Получаем:

$$\begin{aligned} \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{\cos\left(\theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ \theta &\in (0, 1) \end{aligned}$$

Вопрос 41. Выведите формулу Маклорена для функции $y = \ln(1 + x)$ с остаточным членом в форме Лагранжа.

Ответ. Найдём производные для функции $y = \ln(1 + x)$ до $n + 1$ -ого порядка:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} \\ f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} \\ f'''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3} \\ f^{(4)}(x) &= -\frac{6}{(1+x)^4} \\ &\dots \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \\ f^{(n+1)}(x) &= (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}} \end{aligned}$$

Подставим $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f'(0) &= 1 = 1! \\ f''(0) &= -1 = -1! \\ f'''(0) &= 2 = 2! \\ f^{(4)}(0) &= -3 \cdot 2 = -6! \\ &\dots \\ f^{(n)}(0) &= (-1)^{n-1} (n-1)! \\ f^{(n+1)}(0) &= (-1)^n n! \end{aligned}$$

Получаем:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$$

$$\theta \in (0, 1)$$

Вопрос 42. Выведите формулу Маклорена для функции $y = (1+x)^\alpha$ с остаточным членом в форме Лагранжа.

Ответ. Найдём производные для функции $y = (1+x)^\alpha$ до n -ого порядка:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1} \\ f''(x) &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \\ f'''(x) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3} \\ &\dots \\ f^{(n)}(x) &= \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \end{aligned}$$

Подставим $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f'(0) &= \alpha \\ f''(0) &= \alpha(\alpha-1) \\ f'''(0) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \\ &\dots \\ f^{(n)}(0) &= \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1) \end{aligned}$$

Получаем:

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \\ &+ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!} \cdot (1+\theta x)^{\alpha-n-1} \cdot x^{n+1} \\ &\theta \in (0, 1) \end{aligned}$$

Вопрос 43. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие неубывания дифференцируемой функции.

Ссылки. Используются определения №33, №36.

Теорема (Необходимое и достаточное условие неубывания дифференцируемой функции). Дифференцируемая на интервале (a, b) не убывает на этом интервале тогда и только тогда, когда $f'(x) \geq 0 \forall x \in (a, b)$.

Необходимость. Дано: $y = f(x)$ не убывает на (a, b) .

Доказать: $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) \geq 0$.

$$\forall x \in (a, b)$$

Δx – приращение аргумента

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x + \Delta x \\ \Delta y &= y(x + \Delta x) - y(x) \end{aligned}$$

– приращение функции.

$\Delta x < 0$: т.к. $y = f(x)$ не убывает на a, b .

$$y(x + \Delta x) \geq y(x) \Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) \geq 0.$$

Тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\frac{\pm}{-} \right) \leq 0$.

По теореме о предельном переходе в неравенстве:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$$

По определению производной $f'(x) \geq 0$

□

Достаточность. Дано: $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) \geq 0$.

Доказать: $y = f(x)$ не убывает на a, b .

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b) : x_2 > x_1$$

Рассмотрим $[x_1, x_2]$. Функция на отрезке $[x_1, x_2]$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа:

1. Непрерывность на $[x_1, x_2]$.

По условию $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) . По теореме о связи дифференцируемости и непрерывности функции $\implies y = f(x)$ – непрерывна на $[x_1, x_2]$.

2. дифференцируемость на (x_1, x_2) т.к. функция по условию дифференцируема на отрезке $[x_1, x_2]$.

По теореме Лагранжа $\exists c \in (x_1, x_2)$:

$$f(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Т.к. $x_2 > x_1 \implies x_2 - x_1 > 0$. По условию $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b) \implies f'(c) \geq 0$.

Тогда:

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 0$$

$$\implies f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \text{ при } x_2 > x_1$$

$$f(x_2) \geq f(x_1) \text{ при } x_2 > x_1$$

\implies по определению функция $y = f(x)$ не убывает на (a, b) . □

Вопрос 44. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие невозрастания дифференцируемой функции.

Ссылки. Используются определения №33, №35.

Теорема (Необходимое и достаточное условие невозрастания дифференцируемой функции). Дифференцируемая на интервале (a, b) не возрастает на этом интервале тогда и только тогда, когда $f'(x) \leq 0 \forall x \in (a, b)$.

Необходимость. Дано: $y = f(x)$ не возрастает на (a, b) .

Доказать: $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) \leq 0$.

$$\forall x \in (a, b)$$

Δx – приращение аргумента

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x + \Delta x \\ \Delta y &= y(x + \Delta x) - y(x) \end{aligned}$$

– приращение функции.

$$\Delta x > 0:$$

т.к. $y = f(x)$ не возрастает на a, b .

$$y(x + \Delta x) \leq y(x) \Rightarrow \Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) \leq 0.$$

$$\text{Тогда } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\frac{\pm}{-} \right) \leq 0.$$

По теореме о предельном переходе в неравенстве:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$$

По определению производной $f'(x) \leq 0$

□

Достаточность. Дано: $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) \leq 0$.

Доказать: $y = f(x)$ не возрастает на a, b .

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b) : x_2 > x_1$$

Рассмотрим $[x_1, x_2]$. Функция на отрезке $[x_1, x_2]$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа:

1. Непрерывность на $[x_1, x_2]$.

По условию $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) . По теореме о связи дифференцируемости и непрерывности функции $\Rightarrow y = f(x)$ – непрерывна на $[x_1, x_2]$.

2. дифференцируемость на (x_1, x_2) т.к. функция по условию дифференцируема на отрезке $[x_1, x_2]$.

По теореме Лагранжа $\exists c \in (x_1, x_2)$:

$$f(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Т.к. $x_2 > x_1 \implies x_2 - x_1 > 0$. По условию $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a, b) \implies f'(c) \leq 0$.

Тогда:

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 0$$

$$\implies f(x_2) - f(x_1) \leq 0 \text{ при } x_2 > x_1$$

$$f(x_2) \leq f(x_1) \text{ при } x_2 > x_1$$

\implies по определению функция $y = f(x)$ не возрастает на (a, b) . \square

Вопрос 45. Сформулируйте и докажите первое достаточное условие экстремума (по первой производной).

Ссылки. Используются определения №25, №33, №39, №41, теорема Лагранжа.

Теорема (Первое достаточное условие экстремума). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в $S(x_0)$, где x_0 – критическая точка первого порядка; функция дифференцируема в $\dot{S}(x_0)$. Тогда если производная функции меняет свой знак при переходе через точку x_0 , то эта точка x_0 – точка экстремума. Причём:

1. Если при $x < x_0$ $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$ $f'(x) < 0$, то x_0 – точка максимума.
2. Если при $x < x_0$ $f'(x) < 0$, а при $x > x_0$ $f'(x) > 0$, то x_0 – точка минимума.

Достаточность. $\forall x \in S(x_0)$. Пусть $x > x_0$, тогда рассматриваем отрезок $[x_0, x]$. Тогда функция $y = f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа:

1. Непрерывна на $[x_0, x]$, т.к. по условию функция непрерывна в $S(x_0)$, а следовательно $y = f(x)$ будет непрерывна и на меньшем промежутке $[x_0, x]$.
2. Дифференцируема на (x_0, x) , т.к. по условию функция непрерывна в $\dot{S}(x_0) \implies y = f(x)$ дифференцируема на (x_0, x)

По теореме Лагранжа $\exists c \in (x_0, x)$

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

При $x > x_0$ $x - x_0 > 0$. По условию

1) при $x > x_0$ $f'(x) < 0 \implies f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \implies f(x) < f(x_0)$ по определению строгого x_0 – точка локального максимума. 2) при $x < x_0$ $f'(x) > 0 \implies f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \implies f(x) > f(x_0)$ по определению строгого x_0 – точка локального минимума.

По теореме Лагранжа $\exists c \in (x, x_0)$:

$$f'(c) = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

Т.к. $x < x_0$, то $x - x_0 < 0 \implies x_0 - x > 0$. По условию

1) при $x < x_0$ $f'(x) > 0 \implies f'(c) = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} > 0 \implies f(x_0) > f(x)$ по определению строгого x_0 – точка локального максимума. 2) при $x > x_0$ $f'(x) < 0 \implies f'(c) = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} < 0 \implies f(x) < f(x_0)$ по определению строгого x_0 – точка локального минимума. \square

Вопрос 46. Сформулируйте и докажите второе достаточное условие экстремума (по второй производной).

Ссылки. Используются определения №33, №37, №38, №40.

Теорема (Второе достаточное условие экстремума). Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в точке x_0 , и $f'(x_0) = 0$. Тогда:

1. Если $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка строго максимума.
2. Если $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка строго минимума.

Достаточность. Разложим функцию $y = f(x)$ в окрестности точки x_0 по формуле Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

Т.к. $f'(x_0) = 0$, то

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

Знак $f(x) - f(x_0)$ определяет $f''(x_0)$, т.к. $o((x - x_0)^2)$ – б.м.ф. при $x \rightarrow x_0$. Если $f(x) - f(x_0) < 0$ то $f(x) < f(x_0)$, $\forall x \in S(x_0)$ По определению x_0 – точка локального максимума.

Если $f(x) - f(x_0) > 0$ то $f(x) > f(x_0)$, $\forall x \in S(x_0)$ По определению x_0 – точка локального минимума. \square

Вопрос 47. Сформулируйте и докажите достаточное условие выпуклости функции.

Ссылки. Используются определения №33, №43, №44.

Теорема (достаточное условие выпуклости функции). Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a, b) . Тогда:

1. Если $f''(x) < 0 \forall x \in (a, b)$, то график функции *выпуклый вверх* на этом интервале
2. Если $f''(x) > 0 \forall x \in (a, b)$, то график функции *выпуклый вниз* на этом интервале

Достаточность.

$$x_0 \in (a, b), y_0 = f(x_0) \implies M_0(x_0, y_0)$$

Построим в точке M_0 касательную к графику функции $y = f(x)$. Запишем уравнение касательной:

$$y = y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$$

Преобразуем:

$$y_k = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (0)$$

Представим функцию $y = f(x)$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}x + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2, \quad c \in S(x_0) \quad (2)$$

Вычтем (1) из (2):

$$\begin{aligned} f(x) - y_k &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2 \\ &\quad - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)^2 \\ f(x) - y_k &= \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2 \end{aligned}$$

1) По условию $f''(x) < 0 \forall x \in (a, b)$, то $f''(c) < 0 \implies f(x) - y_0 < 0 \implies f(x) < y_k$, а значит по определению выпуклой функции \implies график функции $y = f(x)$ выпуклый вверх. 2) По условию $f''(x) > 0 \forall x \in (a, b)$, то $f''(c) > 0 \implies f(x) - y_0 > 0 \implies f(x) > y_k$, а значит по определению выпуклой функции \implies график функции $y = f(x)$ выпуклый вниз. \square

Вопрос 48. Сформулируйте и докажите необходимое условие точки перегиба.

Ссылки. Используются определения №33, №45.

Теорема (необходимое условие точки перегиба). Пусть функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет *непрерывную* вторую производную и $M(x_0, y_0)$ – точка перегиба графика функции $y = f(x)$. Тогда $f''(x_0) = 0$.

Необходимость. Докажем методом от противного. Предположим, что $f''(x_0) > 0$. В силу непрерывности второй производной функции $y = f(x)$ $\exists S(x_0) \forall x \in S(x_0) : f''(x) > 0$. Это противоречит тому, что $M_0(x_0, y_0)$ – точка перегиба. Предположим, что $f''(x_0) < 0$. В силу непрерывности второй производной функции $y = f(x)$ $\exists S(x_0) \forall x \in S(x_0) : f''(x) < 0$. Это противоречит тому, что $M_0(x_0, y_0)$ – точка перегиба. \square

Вопрос 49. Сформулируйте и докажите достаточное условие точки перегиба.

Ссылки. Используются определения №23, №45.

Теорема (Достаточное условие точки перегиба). Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 , дважды дифференцируема в $S(x_0)$ и вторая производная меняет знак при переходе аргумента x через точку x_0 . Тогда $M_0(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции $y = f(x)$.

Достаточность. По условию $\exists S(x_0)$ в которой вторая производная функции $y = f(x)$ меняет знак при переходе аргумента x через точку x_0 (даёт достаточное условие выпуклости функции). Это означает, что график функции $y = f(x)$ имеет различные направление выпуклости по разные стороны от точки x_0 . По определению точки перегиба $M(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции $y = f(x)$. \square