Математический анализ. Подготовка к экзамену

1 Определения

Определение 1 (Множество натуральных чисел). $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел. Состоит
из чисел, возникающих при счёте.

Определение 2 (Множество целых чисел). $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел. Состоит из натуральных чисел, нуля и чисел, противоположных натуральным.

Определение 3 (Множество рациональных чисел). $\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел. Состоит из
чисел, представимых в виде $\frac{z}{n}, z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$.

Определение 4 (Множество иррациональных чисел). $\mathbb{I}$ – множество иррациональных чисел. Состоит из чисел, которые не представимы в виде $\frac{z}{n}, z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$.

Определение 5 (Множество действительных чисел). $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел. Состоит из
рациональных и иррациональных чисел.

Определение 6 (Окрестность точки). Окрестностью $S(x)$ точки x называется любой интервал, содержащий эту точку.

Определение 7 (ε-окрестность точки). ε-окрестностью точки x называется интервал с центром в точке x и длиной 2ε.

$$S(x, \varepsilon) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$$

Определение 8 (δ-окрестность точки). δ-окрестностью точки x называется интервал с центром в точке x и длиной 2δ.

$$S(x, \delta) = (x - \delta, x + \delta)$$

Определение 9 (Окрестность $+\infty$). Окрестностью $+\infty$ называется любой интервал вида:

$$S(+\infty) = (a, +\infty), \quad a \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

Определение 10 (Окрестность $-\infty$). Окрестностью $-\infty$ называется любой интервал вида:

$$S(-\infty) = (-\infty, -a), \quad a \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

Определение 11 (Окрестность ∞). Окрестностью ∞ называется любой интервал вида:

$$S(\infty) = (-\infty, -a) \cup (a, +\infty), \quad a \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

Определение 12 (Числовая последовательность). Числовой последовательностью называется бесконечное множество числовых значений, которое можно упорядочить (перенумеровать)

Определение 13 (Ограниченная последовательность). Последовательность x_n называется *ограниченной*, если она ограничена и сверху, и снизу, т.е.

$$\forall n \in \mathbb{N}, m \leq x_n \leq M \quad \text{или} \quad |x_n| \leq M$$

Определение 14 (Предел последовательности). Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется натуральное число $N(\varepsilon)$, такое, что если порядковый номер n члена последовательности станет больше $N(\varepsilon)$, то имеет место неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \to \infty} x_n = a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}) : (\forall n > N(\varepsilon)) \implies |x_n - a| < \varepsilon$$

Определение 15 (Сходящаяся последовательность). Числовая последовательность называется сходящейся, если существует предел это последовательности, и он конечен.

Определение 16 (Предел функции по Коши). Число a называется пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0, если $\forall \varepsilon > 0$ найдется δ, зависящее от ε такое что $\forall x \in \mathring{S}(x_0; \delta)$ будет верно неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0; \delta) \implies |f(x) - a| < \varepsilon)$$

Определение 17 (Предел функции по Гейне). Число a называется пределом $y = f(x)$ в точке x_0, если эта функция определена в окрестности точки a и $\forall$ последовательньсти x_n из области определения этой функции, сходящейся к x_0 соответствующая последовательность функций $\{f(x_n)\}$ сходится к a.

$$\lim_{x \to x_0} = a \iff (\forall x_n \in D_f)(\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \to \infty} f(x_n) = a)$$

Определение 18 (Локальная ограниченность функции). Функция называется локально ограниченной при $x \to x_0$, если существует проколотая окрестность с центром в точке x_0, в которой данная функция ограничена.

Определение 19 (Бесконечно малые функции). Функция называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если предел функции в этой точке равен 0.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon))(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \implies |f(x)| < \varepsilon)$$

Определение 20 (Бесконечно большие функции). Функция называется бесконечно большой при $x \to x_0$, если предел функции в этой точке равен ∞.

Определение 21 (Бесконечно малые более высокого порядка). Функцию $\alpha(x)$ называют бесконечно малой более высокого порядка малости по сравнению с $\beta(x)$ при $x \to x_0$ и записывают $\alpha(x) = o(\beta(x))$, если существует и равен нулю предел отношения $\alpha(x)/\beta(x)$, при $x \to x_0$.

$$\alpha(x) = o(\beta(x))x \to x_0 \iff \exists \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$$

Определение 22 (Эквивалентные бесконечно малые функции). Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют эквивалентными бесконечно малыми при $x \to x_0$, если предел их отношения при $x \to x_0$ равен 1.

$$\alpha(x) \sim \beta(x)x \to x_0 \iff \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$

Определение 23 (Непрерывность функции в точке). Функция $f(x)$, определённая в некоторой окрестности точки x_0, называется непрерывной в этой точке если:

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Определение 24. Функция $y = f(x)$ определённая в правосторонней окрестности точки x_0 ($[x_0, x_0 + \delta)$) называется непрерывной справа в этой точке, если:

$$\exists \lim_{x \to x_0+} = f(x_0)$$

Определение 25. Функция $y = f(x)$ определённая в левосторонней окрестности точки x_0 ($(x_0 - \delta, x_0]$) называется непрерывной справа в этой точке, если:

$$\exists \lim_{x \to x_0-} = f(x_0)$$

Определение 26 (Непрерывность функции на отрезке)**.** Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a, b]$, если:

1. Непрерывна на интервале (a, b)
2. Непрерывна в точке a справа
3. Непрерывна в точке b слева

2 Теория

Вопрос 1. Сформулируйте и докажите теорему о единственности предела сходящейся последовательности.

Ссылки. Используются определения №12, №14, №15.

Теорема (О существовании единственности предела последовательности)**.** Любая сходящаяся последовательность имеет единственный предел.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ – сходящаяся последовательность.
Рассуждаем методом от противного. Пусть последовательность $\{x_n\}$ более одного предела.

$$\lim_{n\to\infty} = a \quad \lim_{n\to\infty} = b \quad a \neq b$$

$$\lim_{n\to\infty} = a \iff (\forall\varepsilon_1 > 0)(\exists N_1(\varepsilon_1) \in N)(\forall n > N_1(\varepsilon_1) \implies |x_n - a| < \varepsilon_1) \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} = b \iff (\forall\varepsilon_2 > 0)(\exists N_2(\varepsilon_2) \in N)(\forall n > N_2(\varepsilon_2) \implies |x_n - b| < \varepsilon_2) \tag{2}$$

Выберем $N = max\{N_1(\varepsilon_1), N_2(\varepsilon_2)\}$.
Пусть

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = \frac{|b-a|}{3}$$

$$3\varepsilon = |b-a| = |b-a+x_n-x_n| =$$
$$= |(x_n-a)-(x_n-b)| \leq |x_n-a| + |x_n-b| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\varepsilon$$
$$3\varepsilon < 2\varepsilon$$

Противоречие. Значит, предоположение не является верным $\implies$ последовательность x_n имеет единственный предел. □

Вопрос 2. Сформулируйте и докажите теорему об ограниченности сходящейся последовательности.

Ссылки. Используются определения №12, №13, №14, №15.

Теорема. *Об ограниченности сходящейся последовательности.*
Любая сходящаяся последовательность *ограничена.*

Доказательство. По определению сходящейся последовательности

$$\implies \lim_{n\to\infty} = a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n > N(\varepsilon) \implies |x_n - a| < \varepsilon).$$

Выберем в качестве $M = max\{|x_1|, |x_2|, \ldots |x_n|, |a-\varepsilon|, |a+\varepsilon|\}$.
Тогда для $\forall n \in \mathbb{N}$ будет верно $|x_n| \leq M$ – это и означает, что последовательность x_n – ограниченная. □

Вопрос 3. Сформулируйте и докажите теорему о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел.

Ссылки. Используются определения №16, №18.

Теорема (О локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел)**.** Функция, имеющая конечный предел, локально ограничена.

Доказательство.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a$$
$$\iff (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0,\delta) \implies |f(x) - a| < \varepsilon)$$

Распишем:

$$\begin{array}{c} -\varepsilon < f(x) - a < \varepsilon \\ a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon \end{array} \qquad \forall x \in \mathring{S}(x_0,\delta)$$

Выберем $M = max\{|a-\varepsilon|, |a+\varepsilon|\}$

$$|f(x)| \le M, \quad \forall x \in \mathring{S}(x_0, a)$$

Что и требовалось доказать. □

Вопрос 4. Сформулируйте и докажите теорему о сохранении функцией знака своего предела.

Ссылки. Используются определения №16.

Теорема (О сохранении функцией знака своего предела)**.** Если $\lim_{x\to x_0} = a \neq 0$, то $\exists \mathring{S}(x_0, \delta)$ такая, что функция в ней сохраняет знак своего предела.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \neq 0 \to \begin{matrix} a > 0 \\ a < 0 \end{matrix} \implies \begin{matrix} f(x) > 0 \\ f(x) < 0 \end{matrix} \quad \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$$

Доказательство. Пусть $a > 0$. Выберем $\varepsilon = a > 0$.

$$\lim_{x\to x_0} = a \iff (\forall \varepsilon = a)(\exists \delta(x) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \implies$$
$$|f(x) - a| < \varepsilon = a)$$

Распишем:

$$-a < f(x) - a < a$$
$$\boxed{0 < f(x) < 2a}$$

Знак у функции $f(x)$ и числа a - одинаковые.

Пусть $a < 0$. Выберем $\varepsilon = -a$.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \iff (\forall \varepsilon = -a)(\exists \delta(x) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \implies$$
$$|f(x) - a| < \varepsilon = -a)$$

Распишем:

$$-a < f(x) - a < a$$
$$\boxed{-2a < f(x) < 0}$$

Знак у функции $f(x)$ и числа a - одинаковые.
Значит, $f(x)$ сохраняет знак своего предела $\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$ □

Вопрос 5. Сформулируйте и докажите теорему о предельном переходе в неравенстве.

Ссылки. Используются определения №16.

Теорема (О предельном переходе в неравенстве)**.** Пусть существуют конечные пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0 и $\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$ верно $f(x) < g(x)$. Тогда $\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$ имеет место неравенство $\lim_{x \to x_0} f(x) \le \lim_{x \to x_0} g(x)$.

Доказательство. По условию $f(x) < g(x), \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$.
Введём функцию $F(x) = f(x) - g(x) < 0, \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$. Т.к. $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы в точке x_0, соответственно и функция $F(X)$ имеет конечный предел в точке x_0 (как разность $f(x)$ и $g(x)$).

По следствию из предыдущей теоремы $\implies \lim_{x \to x_0} F(x)$

Подставим $F(x) = f(x) - g(x)$:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) \le 0 \implies \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x) \le 0 \implies$$
$$\lim_{x \to x_0} f(x) \le \lim_{x \to x_0} g(x)$$

□

Вопрос 6. Сформулируйте и докажите теорему о пределе промежуточной функции.

Ссылки. Используются определения №16.

Теорема (О пределе промежуточной функции)**.** Пусть существуют конечные пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0 и $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ и $\lim_{x\to x_0} g(x) = a$, $\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$ верно неравенство $f(x) \le h(x) \le g(x)$. Тогда $\lim_{x\to x_0} h(x) = a$.

Доказательство. По условию:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_1(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \implies |f(x) - a| < \varepsilon) \tag{1}$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_2(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \implies |g(x) - a| < \varepsilon) \tag{2}$$

Выберем $\delta_0 = min\{\delta, \delta_1, \delta_2\}$, тогда (1), (2) и $f(x) \le h(x) \le g(x)$ верны одновременно $\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_0)$.

$$\begin{aligned} &(1) \quad a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon \\ &(2) \quad a - \varepsilon < g(x) < a + \varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} f(x) \le h(x) \le g(x) \\ \implies a - \varepsilon_1 < f(x) \le h(x) \le g(x) < a + \varepsilon_2 \\ \implies \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_0) \qquad a - \varepsilon < h(x) < a + \varepsilon \end{gathered}$$

В итоге:

$$\begin{gathered} (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_0(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_0) \implies |h(x) - a| < \varepsilon) \\ \implies \text{по определению предела} \quad \lim_{x\to x_0} h(x) = a \end{gathered}$$

$\square$

Вопрос 7. Сформулируйте и докажите теорему о пределе произведения функций.

Ссылки. Используются определения №16, №19, теорема “О произведении бесконечно малой функций на локально ограниченную”.

Теорема (О пределе произведения функций). *О пределе произведения функций.*
Предел произведения функций равен произведению пределов.

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Доказательство. Пусть:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \qquad (1)$$
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b \qquad (2)$$

По теореме о связи функции, её предела и бесконечно малой функции:

$$(1) \implies f(x) = a + \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) \text{ - б.м.ф.}$$
$$(2) \implies f(x) = b + \beta(x), \text{ где } \beta(x) \text{ - б.м.ф.}$$

Рассмотрим:

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= (a + \alpha(x))(b + \beta(x)) \\ &= ab + \underbrace{a \cdot \beta(x) + b\alpha(x) + \alpha(x) \cdot \beta(x)}_{\gamma(x)} \\ &= ab + \gamma(x) \end{aligned}$$

По следствию из теоремы “*О произведении бесконечно малой функций на локально ограниченную*”:

$$a \cdot \beta(x) = \text{б.м.ф. при } x \to 0$$
$$b \cdot \alpha(x) = \text{б.м.ф. при } x \to 0$$
$$\alpha(x) \cdot \beta(x) = \text{б.м.ф. при } x \to 0$$

По теореме о сумме конечного числа с б.м.ф.:

$$\gamma(x) = \text{б.м.ф. при } x \to 0$$

Далее расписываем предел:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) &= \lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)\\ &= \lim_{x\to x_0} ab + \lim_{x\to x_0}\gamma(x)\\ &= ab + 0\\ &= ab\end{aligned}$$

$\square$

Вопрос 8. Сформулируйте и докажите теорему о пределе сложной функции.

Ссылки. Используются определения №14, №17.

Теорема (О пределе сложной функции)**.** Если функция $y = f(x)$ имеет предел в точке x_0 равный a, то функция $\varphi(y)$ имеет предел в точке a, равный C, тода сложная функция $\varphi(f(x))$ имеет предел в точке x_0, равный C.

$$\left.\begin{array}{l} y = f(x) \\ \lim_{x \to x_0} f(x) = a \\ \lim_{y \to a} \varphi(y) = C \end{array}\right\} \implies \lim_{x \to x_0} \varphi(f(x)) = C$$

Доказательство.

$$\lim_{y \to a} \varphi(y) \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_1 > 0)(\forall y \in \mathring{S}(a, \delta_1) \implies |\varphi(y) - a| < \varepsilon) \quad (1)$$

Выберем в качестве ε в пределе найденное δ_1:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$
$$\iff (\forall \delta_1 > 0)(\exists \delta_2 > 0)(\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta_2 \implies |f(x) - a| < \delta_1) \quad (2)$$

В итоге:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_2 > 0)(\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta_2 \implies |\varphi(f(x)) - c| < \varepsilon)$$

Что равносильно:

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(f(x)) = c$$

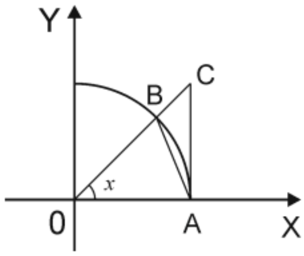
□

Вопрос 9. Докажите, что:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = 0$$

Ссылки. Используется теорема о промежуточной функции.

Доказательство. Пусть $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Рассмотрим окружность радиуса R с центром в начале координат, пересекающую ось абцисс в точке A, и пусть угол $\angle AOB$ равен x. Пусть, далее, CA – перпендикуляр к этой оси, C точка пересечения с этим перпендикуляром продолжения отрезка OB за точку B. Тогда



$$S_{\triangle AOB} < S_{secOAB} < S_{\triangle OAC}$$
$$\frac{1}{2}R^2\sin(x) < \frac{1}{2}R^2x < \frac{1}{2}R^2\,\mathrm{tg}(x)$$
$$\sin(x) < x < \mathrm{tg}(x)$$
$$1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)}$$
$$1 > \frac{x}{\sin(x)} > \cos(x), \text{ при } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Рассмотрим $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Сделаем замену $\beta = -x$, таким образом $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, а значит, справедливо следующее неравенство:

$$1 > \frac{\sin(\beta)}{\beta} > \cos(\beta)$$

Вернёмся к замене $\beta = -x$:

$$1 > \frac{\sin(-x)}{-x} > \cos(-x)$$
$$1 > \frac{-\sin(x)}{-x} > \cos(x), \text{ при } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Таким образом, полученное неравенство справедливо для $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup$

$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Перейдём к пределу при $x \to 0$:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \cos(x) = 1 \\ \lim_{x\to 0} 1 = 1 \end{aligned}\right\} \implies \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

по теореме “О пределе промежуточной функции”. $\square$

Вопрос 10. Сформулируйте и докажите теорему о связи функции, ее предела и бесконечно малой.

Ссылки. Используются определения №16, №19.

Теорема (О связи функции, её предела и бесконечно малой)**.** Функция $y = f(x)$ имеет конечный предел в точке x_0 тогда и только тогда, когда её можно представить в виде суммы предела и некоторой бесконечно малой функции.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \iff f(x) = a + \alpha(x), \text{где } \alpha(x) - \text{б.м.ф при } x \to x_0$$

Необходимость. *Дано*:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

Доказать:

$$f(x) = a + \alpha(x), \text{где } \alpha(x) \text{ - б.м.ф. при } x \to x_0$$

Распишем:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \implies |f(x) - a| < \varepsilon)$$

Обозначим $f(x) - a = \alpha(x)$, тогда:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \implies |\alpha(x)| < \varepsilon)$$

По определению бесконечно малой функции $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция. Из обозначения следует, что:

$$f(x) = a + \alpha(x)$$

где $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$. $\square$

Достаточность. Дано:

$$f(x) = a + \alpha(x), \text{где } \alpha(x) \text{ - б.м.ф. при } x \to x_0$$

Доказать:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

По определению б.м.ф.:

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0 \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\mathring{S}(x_0, \delta) \implies |\alpha(x)| < \varepsilon)$$

С учётом введённого обозначения:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\mathring{S}(x_0, \delta) \implies |f(x) - a| < \varepsilon \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = a)$$

$\square$

Вопрос 11. Сформулируйте и докажите теорему о произведении бесконечно малой функции на ограниченную.

Ссылки. Используются определения №18, №19.

Теорема (О произведении бесконечно малой функции на ограниченную)**.** Произведение бесконечно малой функции на локальной ограниченную есть величина бесконечно малая.

Доказательство. Пусть $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$, а функция $f(x)$ при $x \to x_0$ является локально ограниченной. Доказываем, что:

$$\alpha(x) \cdot f(x) = 0$$

Распишем:

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$$

$$\iff (\forall \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M} > 0)(\exists \delta_1 > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_1) \implies |\alpha(x)| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M}) \quad (1)$$

$$M \in \mathbb{R}, M > 0$$

$$\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_2) \implies |f(x)| < M \quad (2)$$

Выберем $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$, тогда (1) и (2) верны одновременно. В итоге получаем:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \implies$$
$$|\alpha(x) \cdot f(x)| = |\alpha(x)| \cdot |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M < \varepsilon)$$

Тогда по определению бесконечно малой функции:

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) \cdot f(x) = 0$$

□

Вопрос 12. Сформулируйте и докажите теорему о связи между бесконечно большой и бесконечно малой.

Ссылки. Используются определения №16, №19, №20.

Теорема (О связи между бесконечно большой и бесконечно малой)**.** Если $\alpha(x)$ - бесконечно большая функция при $x \to x_0$, то $\frac{1}{\alpha(x)}$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

Доказательство. По условию $\alpha(x)$ - б.б.ф при $x \to x_0$. По определению:

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = \infty \iff$$
$$(\forall M > 0)(\exists \delta(M) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \implies |f(x)| > M)$$

Рассмотрим неравенство:

$$|\alpha(x)| > M, \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$$

Обозначим $\varepsilon = \frac{1}{M}$.

$$|\alpha(x) > M| \implies \frac{1}{|\alpha(x)|} < \frac{1}{M}$$
$$\implies |\frac{1}{\alpha(x)}| < \frac{1}{M} < \varepsilon$$

В итоге получаем:

$$\forall x \in \mathring{s}(x_0, \delta) \implies |\frac{1}{\alpha(x)}| < \varepsilon$$

Что по определению является бесконечно малой функцией. □

Вопрос 13. Сформулируйте и докажите теорему о замене бесконечно малой на эквивалентную под знаком предела.

Ссылки. Используются определения №19, №22.

Теорема (О замене бесконечно малой на эквивалентную под знаком предела). Предел **отношения** двух б.м.ф. (б.б.ф) не изменится, если заменить эти функции на эквивалентные.

$$\left.\begin{aligned} &\alpha(x), \beta(x) \text{ - б.м.ф. при } x \to x_0 \\ &\alpha(x) \sim \alpha_0(x) \\ &\beta(x) \sim \beta_0(x) \end{aligned}\right\} \implies \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{\alpha_0(x)}{\beta_0(x)}$$

Доказательство. Рассмотрим предел:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} &= \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x) \cdot \alpha_0(x) \cdot \beta_0(x)}{\beta(x) \cdot \alpha_0(x) \cdot \beta_0(x)} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\alpha_0(x)} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{\beta_0(x)}{\beta(x)} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_0(x)}{\beta_0(x)} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \end{aligned}$$

□

Вопрос 14. Сформулируйте и докажите теорему о необходимом и достаточном условии эквивалентности бесконечно малых.

Ссылки. Используются определения №19, №21, №22.

Теорема (Необходимое и достаточное условие эквивалентности бесконечно малых)**.** Две функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда их разность имеет более высокий порядок малости по сравнению с каждой из них.

$$\alpha(x), \beta(x) \text{ - б.м.ф при } x \to x_0$$
$$\alpha(x) \sim \beta(x) \iff \begin{matrix} \alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x)) \\ \alpha(x) - \beta(x) = o(\beta(x)) \end{matrix} \quad \text{при } x \to x_0$$

Необходимость. Дано:

$$\alpha(x), \beta(x) \text{ - б.м.ф при } x \to x_0$$

Доказать:

$$\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x)), \text{ при } x \to x_0$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} &= \lim_{x \to x_0} \left(1 - \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right) \\ &= 1 - \lim_{x \to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1 - \frac{1}{1} = 0 \end{aligned}$$

$\square$

Достаточность. Дано:

$$\alpha(x) - \beta(x) = o(\beta(x)), \text{ при } x \to x_0$$

Доказать:

$$\alpha(x) \sim \beta(x), \text{ при } x \to x_0$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} &= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1\right) \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\implies \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$
$$\implies \alpha(x) \sim \beta(x), \text{ при } x \to x_0$$

$\square$

Вопрос 15. Сформулируйте и докажите теорему о сумме конечного числа бесконечно малых разных порядков.

Ссылки. Используются определения №19, №22.

Теорема (О сумме конечного числа бесконечно малых разных порядков)**.** Сумма бесконечно малых функций разных порядком малости эквивалентно слагаемому низшего порядка малости.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha(x), \beta(x) \text{ - б.м.ф при } x \to x_0 \\ \alpha(x) = o(\beta(x)), \text{ при } x \to x_0\end{array}\right\} \implies \alpha(x) + \beta(x) \sim \beta(x), \text{ при } x \to x_0$$

Доказательство. Рассмотрим предел:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x) + \beta(x)}{\beta(x)} &= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} + 1 \right) \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} + 1 \\ &= 0 + 1 = 1\end{aligned}$$

□

Вопрос 16. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций.

Ссылки. Используются определения №23.

Теорема (О непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций)**.** Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то функции (последняя с учётом $g(x) \neq 0$):

$$f(x) + g(x)$$
$$(f \cdot g)(x)$$
$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

также непрерывны в точке x_0.

Доказательство. По определению непрерывной функции:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$
$$\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$$

Рассмотрим:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) + f(x_0) = g(x_0)$$
$$\implies f(x) + g(x) \in C(x_0)$$
$$\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) \cdot g(x_0)$$
$$\implies (f \cdot g)(x) \in C(x_0)$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x_0)}$$

□

Вопрос 17. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности сложной функции.

Ссылки. Используются определения №23, теорема “О пределе сложной функции”.

Теорема (О непрерывности сложной функции)**.** Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $g(y)$ непрерывна в соответствующей точке $y_0 = f(x_0)$, то сложная функция $g(f(x))$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство. Т.к. функция $g(y) \in C(y_0)$, то $\lim_{y \to y_0} g(y) = g(y_0)$. С другой стороны, по условию $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$. По теореме “О пределе сложной функции” $\exists \lim_{x \to x_0} g(f(x))$. Подставим в последнее равенство $y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x)$:

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \to x_0} f(x))$$

□

Вопрос 18. Сформулируйте и докажите теорему о сохранении знака непрерывной функции в окрестности точки.

Ссылки. Используются определения №23, теорема "О сохранении функции знака своего предела".

Теорема (О сохранении знака непрерывной функции в окрестности точки)**.** Если функция $f(x) \in C(x_0)$ и $f(x_0) \neq 0$, то $\exists S(x_0)$, в которой знак значения функции совпадает со знаком $f(x_0)$.

Доказательство. Т.к. функция $y = f(x) \in C(x_0)$, то $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. По теореме о сохранении функции знака своего предела $\implies$ $\exists S(x_0)$, в которой знак значений функции совпадает со знаком $f(x_0)$. $\square$

Вопрос 19. Дайте определение функции, непрерывной в точке. Сформулируйте теорему о непрерывности элементарных функций. Докажите непрерывность функций y = sin x, y = cos x

Ссылки. Используются определения №23, теорема “Об произведении ограниченной функции на бесконечно малую”

Теорема (О непрерывности элементарных функций)**.** Основные элементарные функции непрерывны в области определения.

Доказательство (Для $y = sin(x)$ и $y = cos(x)$)**.** Докажем её для функций $y = \sin(x), y = \cos(x)$:

$$y = \sin(x), D_y = \mathbb{R}$$
$$x_0 = 0, \lim_{x \to x_0} \sin(x) = \sin(0) \implies y = \sin(x) \in C(0)$$
$$\forall x \in D_y = \mathbb{R}, \quad \Delta x - \text{приращение функции}$$
$$x = x_0 + \Delta x, \quad x \in D_f = \mathbb{R}$$
$$\Delta y = y(x) - y(x_0) = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$$
$$= \sin(x_0 + \Delta x) - \sin(x_0) = 2 \sin\left(\frac{x_0 + \Delta x - x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x_0 + \Delta x + x_0}{2}\right)$$
$$= 2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} 2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) = 0$$
$$- \text{по т. об произв. огр. на б.м.ф.}$$

Т.к. $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ по опр. непр. функции $\implies$ $y = \sin(x)$ непрерывна в точке x_0. Т.к. x_0 – произвольная точка из области определения, то $y = \sin(x)$ непрерывна на всей области произведения. □

Вопрос 20. Сформулируйте свойства функций, непрерывных на отрезке.

Ссылки. Используются определения №26

Теорема (Первая теорема Вейерштрасса)**.** Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке ab, то она на этом отрезке ограниченна.

$$f(x) \in C[a,b] \implies \exists M \in \mathbb{R}, M > 0, \forall x \in [a,b] : |f(x)| \leq M$$

Теорема (Вторая теорема Вейерштрасса)**.** Если функция $y = f(x) \in C[a,b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значения.

$$f(x) \in C[a,b]$$
$$\implies$$
$$\exists x_*, x^* \in [a,b] : \forall x \in [a,b] \implies m = f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*) = M$$

Теорема (Первая теорема Больцано-Коши)**.** Если функция $y = f(x) \in C[a,b]$, и на концах отрезка принимает значения разных знаков, то $\exists c \in (a,b) : f(c) = 0$.

$$f(x) \in S[a,b] \land f(a) \cdot f(b) < 0 \implies \exists c \in (a,b) : f(c) = 0$$

Теорема (Вторая теорема Больцано-Коши)**.** Если функция $y = f(x) \in C[a,b]$ и принимает на границах отрезка различные значения $f(a) = A \neq f(b) = B$, то $\forall C \in [A,B] \exists c \in (a,b)$, в которой $f(c) = C$.

$$f(x) \in C[a,b] \land f(a) = A \neq f(b) = B$$
$$\implies$$
$$\exists C \in (A,B) \implies \exists c \in (a,b) : f(c) = C$$

Теорема (Теорема о непрерывности обратной функции)**.** Пусть $y = f(x) \in C(a,b)$ и строго монотонна на этом интервале. Тогда в соответствующем (a,b) интервале значений функции существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, которая так же строго монотонна и непрерывна.