Математический анализ. Подготовка к экзамену

1 Определения

Определение 1 (Множество натуральных чисел). $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел. Состоит из чисел, возникающих при счёте.

Определение 2 (Множество целых чисел). $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел. Состоит из натуральных чисел, нуля и чисел, противоположных натуральным.

Определение 3 (Множество рациональных чисел). $\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел. Состоит из чисел, представимых в виде $\frac{z}{n}, z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$.

Определение 4 (Множество иррациональных чисел). $\mathbb{I}$ – множество иррациональных чисел. Состоит из чисел, которые не представимы в виде $\frac{z}{n}, z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$.

Определение 5 (Множество действительных чисел). $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел. Состоит из рациональных и иррациональных чисел.

Определение 6 (Окрестность точки). Окрестностью $S(x)$ точки x называется любой интервал, содержащий эту точку.

Определение 7 (ε-окрестность точки). ε-окрестностью точки x называется интервал с центром в точке x и длиной 2ε.

$$S(x, \varepsilon) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$$

Определение 8 (δ-окрестность точки). δ-окрестностью точки x называется интервал с центром в точке x и длиной 2δ.

$$S(x, \delta) = (x - \delta, x + \delta)$$

Определение 9 (Окрестность $+\infty$). Окрестностью $+\infty$ называется любой интервал вида:

$$S(+\infty) = (a, +\infty), \quad a \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

Определение 10 (Окрестность $-\infty$). Окрестностью $-\infty$ называется любой интервал вида:

$$S(-\infty) = (-\infty, -a), \quad a \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

Определение 11 (Окрестность ∞). Окрестностью ∞ называется любой интервал вида:

$$S(\infty) = (-\infty, -a) \cup (a, +\infty), \quad a \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

Определение 12 (Числовая последовательность). Числовой последовательностью называется бесконечное множество числовых значений, которое можно упорядочить (перенумеровать)

Определение 13 (Ограниченная последовательность сверху). Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если $\exists M \in \mathbb{R}$, что для всех $\forall n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $x_n \leq M$

Определение 14 (Ограниченная последовательность снизу). Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной снизу*, если $\exists M \in \mathbb{R}$, что для всех $\forall n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $x_n \geq M$

Определение 15 (Ограниченная последовательность). Последовательность x_n называется *ограниченной*, если она ограничена и сверху, и снизу, т.е.

$$\forall n \in \mathbb{N}, m \leq x_n \leq M \quad \text{или} \quad |x_n| \leq M$$

Определение 16 (Предел последовательности). Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется натуральное число $N(\varepsilon)$, такое, что если порядковый номер n члена последовательности станет больше $N(\varepsilon)$, то имеет место неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

$$\lim_{x\to\infty} x_n = a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}) : (\forall n > N(\varepsilon)) \implies |x_n - a| < \varepsilon$$

Определение 17 (Сходящаяся последовательность). Числовая последовательность называется сходящейся, если существует предел это последовательности, и он конечен.

Определение 18 (Предел функции по Коши)**.** Число a называется пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0, если $\forall \varepsilon > 0$ найдется δ, зависящее от ε такое что $\forall x \in \mathring{S}(x_0; \delta)$ будет верно неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0; \delta) \implies |f(x) - a| < \varepsilon)$$

Определение 19 (Предел функции по Гейне)**.** Число a называется пределом $y = f(x)$ в точке x_0, если эта функция определена в окрестности точки a и $\forall$ последовательнсти x_n из области определения этой функции, сходящейся к x_0 соответствующая последовательность функций $\{f(x_n)\}$ сходится к a.

$$\lim_{x \to x_0} = a \iff (\forall x_n \in D_f)(\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \to \infty} f(x_n) = a)$$

Определение 20 (Локальная ограниченность функции)**.** Функция называется локально ограниченной при $x \to x_0$, если существует проколотая окрестность с центром в точке x_0, в которой данная функция ограничена.

Определение 21 (Бесконечно малые функции)**.** Функция называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если предел функции в этой точке равен 0.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon))(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \implies |f(x)| < \varepsilon)$$

Определение 22 (Бесконечно большие функции)**.** Функция называется бесконечно большой при $x \to x_0$, если предел функции в этой точке равен ∞.

Определение 23 (Бесконечно малые более высокого порядка)**.** Функцию $\alpha(x)$ называют бесконечно малой более высокого порядка малости по сравнению с $\beta(x)$ при $x \to x_0$ и записывают $\alpha(x) = o(\beta(x))$, если существует и равен нулю предел отношения $\alpha(x)/\beta(x)$, при $x \to x_0$.

$$\alpha(x) = o(\beta(x)) \quad x \to x_0 \iff \exists \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$$

Определение 24 (Эквивалентные бесконечно малые функции)**.** Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют эквивалентными бесконечно малыми при

$x \to x_0$, если предел их отношения при $x \to x_0$ равен 1.

$$\alpha(x) \sim \beta(x) x \to x_0 \iff \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$

Определение 25 ((опр. 1) Непрерывность функции в точке)**.** Функция $f(x)$, определённая в некоторой окрестности точки x_0, называется непрерывной в этой точке если:

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Определение 26 ((опр. 2) Непрерывность функции в точке)**.** Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если бесконечно малому приращению аргумента $\Delta x = x_0 - x$ соответствует бесконечно малое приращение функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

Определение 27 (Непрерывность функции на интервале)**.** Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на интервале (a, b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Определение 28 (Непрерывность функции в точке справа)**.** Функция $y = f(x)$ определённая в правосторонней окрестности точки x_0 (интервал $[x_0, x_0 + \delta)$) называется непрерывной справа в этой точке, если:

$$\exists \lim_{x \to x_0+} = f(x_0)$$

Определение 29 (Непрерывность функции в точке слева)**.** Функция $y = f(x)$ определённая в левосторонней окрестности точки x_0 (интервал $(x_0 - \delta, x_0])$ называется непрерывной слева в этой точке, если:

$$\exists \lim_{x \to x_0-} = f(x_0)$$

Определение 30 (Непрерывность функции на отрезке)**.** Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a, b]$, если:

1. Непрерывна на интервале (a, b)
2. Непрерывна в точке a справа
3. Непрерывна в точке b слева

Определение 31 (Точка разрыва функции). Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0 и непрерывна в любой точке этой окрестности (за исключением самой точки x_0). Тогда точка x_0 называется точкой разрыва функции.

Определение 32 (Производная функции). *Производной функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0 называется предел отношения приращения функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ и предел приращения аргумента $\Delta x = x_0 - x$ при стремлении последнего к нулю.

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Определение 33 (Правосторонняя производная функции). *Производной функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0 *справа* или *правосторонней производной* называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении к нулю справа.

$$y'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Определение 34 (Левосторонняя производная функции). *Производной функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0 *слева* или *левосторонней производной* называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении к нулю слева.

$$y'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Определение 35 (Дифференцируемость функции в точке). Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x_0, если существует константа A такая, что приращение функции в этой точке представимо в виде:

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$, $\Delta x > 0$.

Определение 36 (Дифференциал функции в точке). *Дифференциалом функции* $y = f(x_0)$ называется главная часть приращения функции Δy.

$$dy = f'(x_0)\Delta x$$

Определение 37 (Невозрастающая функция на интервале)**.** Функция $y = f(x)$, определённая на интервале (a, b) *не возрастает* на этом интервале, если для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$ таких что $x_2 > x_1 \implies f(x_2) \leq f(x_1)$.

Определение 38 (Неубывающая функция на интервале)**.** Функция $y = f(x)$, определённая на интервале (a, b) *не убывает* на этом интервале, если для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$ таких что $x_2 > x_1 \implies f(x_2) \geq f(x_1)$.

Определение 39 (Точка строгого локального минимума)**.** Точка x_0 называется точкой строгого локального минимума функции $f(x)$, если $\exists S(x_0, \delta)$, такая что $\forall x \in S(x_0, \delta) : f(x_0) < f(x)$.

Определение 40 (Точка строгого локального максимума)**.** Точка x_0 называется точкой строгого локального максимума функции $f(x)$, если $\exists S(x_0, \delta)$, такая что $\forall x \in S(x_0, \delta) : f(x_0) > f(x)$.

Определение 41 (Точка локального минимума)**.** Точка x_0 называется точкой локального минимума функции $f(x)$, если $\exists S(x_0, \delta)$, такая что $\forall x \in S(x_0, \delta) : f(x_0) \leq f(x)$.

Определение 42 (Точка локального максимума)**.** Точка x_0 называется точкой локального максимума функции $f(x)$, если $\exists S(x_0, \delta)$, такая что $\forall x \in S(x_0, \delta) : f(x_0) \geq f(x)$.

Определение 43 (Критические точки первого порядка)**.** Точки, в которых производная функции обращается в ноль или не существует, называются *критическими точками первого порядка*.

Определение 44 (Стационарные точки)**.** Точки, в которых производная функции обращается в ноль называются *стационарными*.

Определение 45 (Наклонная асимптота)**.** Прямая $y = kx+b$ называется наклонной ассимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to \pm\infty$, если сама функция представима в виде $f(x) = kx+b+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – б.м.ф при $x \to \pm\infty$.

Определение 46 (Выпуклость вверх). Говорят, что график функции $y = f(x)$ на интервале (a, b) выпуклый вверх на этом интервале, если касательная к нему в любой точке этого интервала (кроме точки касания) лежит выше графика функции.

Определение 47 (Выпуклость вниз). Говорят, что график функции $y = f(x)$ на интервале (a, b) выпуклый вниз на этом интервале, если касательная к нему в любой точке этого интервала (кроме точки касания) лежит ниже графика функции.

Определение 48 (Точка перегиба функции). Точка $x_0 \in (a, b)$ называется точкой перегиба функции $f(x)$, если эта функция непрерывна в точке x_0 и если $\exists \delta > 0$ такое, что направления выпуклостей функции $f(x)$ на интервалах $(x_0 - \delta; x_0)$ и $(x_0; x_0 + \delta)$ различны.

2 Теория

Вопрос 1. Сформулируйте и докажите теорему о единственности предела сходящейся последовательности.

Ссылки. Используются определения №12, №16, №17.

Теорема (О существовании единственности предела последовательности)**.** Любая сходящаяся последовательность имеет единственный предел.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ – сходящаяся последовательность.
Рассуждаем методом от противного. Пусть последовательность $\{x_n\}$ более одного предела.

$$\lim_{n\to\infty} = a \qquad \lim_{n\to\infty} = b \quad a \neq b$$

$$\lim_{n\to\infty} = a \iff (\forall \varepsilon_1 > 0)(\exists N_1(\varepsilon_1) \in N)(\forall n > N_1(\varepsilon_1) \implies |x_n - a| < \varepsilon_1) \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} = b \iff (\forall \varepsilon_2 > 0)(\exists N_2(\varepsilon_2) \in N)(\forall n > N_2(\varepsilon_2) \implies |x_n - b| < \varepsilon_2) \tag{2}$$

Выберем $N = max\{N_1(\varepsilon_1), N_2(\varepsilon_2)\}$.
Пусть

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = \frac{|b-a|}{3}$$

Тогда:

$$3\varepsilon = |b-a| = |b - a + x_n - x_n| =$$
$$= |(x_n - a) - (x_n - b)| \leq |x_n - a| + |x_n - b| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\varepsilon$$
$$3\varepsilon < 2\varepsilon$$

Противоречие. Значит, предоположение не является верным $\implies$ последовательность x_n имеет единственный предел. □

Вопрос 2. Сформулируйте и докажите теорему об ограниченности сходящейся последовательности.

Ссылки. Используются определения №12, №15, №16, №17.

Теорема. *Об ограниченности сходящейся последовательности.*
Любая сходящаяся последовательность *ограничена.*

Доказательство. По определению сходящейся последовательности

$$\implies \lim_{n\to\infty} = a \iff (\forall\varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n > N(\varepsilon) \implies |x_n - a| < \varepsilon).$$

Выберем в качестве $M = max\{|x_1|, |x_2|, \ldots |x_n|, |a-\varepsilon|, |a+\varepsilon|\}$.
Тогда для $\forall n \in \mathbb{N}$ будет верно $|x_n| \leq M$ – это и означает, что последовательность x_n – ограниченная. $\square$

Вопрос 3. Сформулируйте и докажите теорему о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел.

Ссылки. Используются определения №18, №20.

Теорема (О локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел)**.** Функция, имеющая конечный предел, локально ограничена.

Доказательство.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$
$$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \implies |f(x) - a| < \varepsilon)$$

Распишем:

$$\begin{matrix} -\varepsilon < f(x) - a < \varepsilon \\ a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon \end{matrix} \qquad \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$$

Выберем $M = max\{|a - \varepsilon|, |a + \varepsilon|\}$

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in \mathring{S}(x_0, a)$$

Что и требовалось доказать. □

Вопрос 4. Сформулируйте и докажите теорему о сохранении функцией знака своего предела.

Ссылки. Используются определения №18.

Теорема (О сохранении функцией знака своего предела)**.** Если $\lim_{x\to x_0} = a \neq 0$, то $\exists \mathring{S}(x_0,\delta)$ такая, что функция в ней сохраняет знак своего предела.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \neq 0 \to \begin{matrix} a > 0 \\ a < 0 \end{matrix} \implies \begin{matrix} f(x) > 0 \\ f(x) < 0 \end{matrix} \quad \forall x \in \mathring{S}(x_0,\delta)$$

Доказательство. Пусть $a > 0$. Выберем $\varepsilon = a > 0$.

$$\lim_{x\to x_0} = a \iff (\forall\varepsilon = a)(\exists\delta(x) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0,\delta) \implies$$
$$|f(x) - a| < \varepsilon = a)$$

Распишем:

$$-a < f(x) - a < a$$
$$\boxed{0 < f(x) < 2a}$$

Знак у функции $f(x)$ и числа a - одинаковые.
Пусть $a < 0$. Выберем $\varepsilon = -a$.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \iff (\forall\varepsilon = -a)(\exists\delta(x) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0,\delta) \implies$$
$$|f(x) - a| < \varepsilon = -a)$$

Распишем:

$$-a < f(x) - a < a$$
$$\boxed{-2a < f(x) < 0}$$

Знак у функции $f(x)$ и числа a - одинаковые.
Значит, $f(x)$ сохраняет знак своего предела $\forall x \in \mathring{S}(x_0,\delta)$ □

Вопрос 5. Сформулируйте и докажите теорему о предельном переходе в неравенстве.

Ссылки. Используются определения №18, "О сохранении функцией знака своего предела".

Теорема (О предельном переходе в неравенстве)**.** Пусть существуют конечные пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0 и $\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$ верно:

$$f(x) < g(x)$$

Тогда $\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$ имеет место неравенство:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Доказательство. По условию $f(x) < g(x), \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$.
Введём функцию $F(x) = f(x) - g(x) < 0, \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$. Т.к. $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы в точке x_0, соответственно и функция $F(X)$ имеет конечный предел в точке x_0 (как разность $f(x)$ и $g(x)$).

По следствию из теорема "О сохранении функцией знака своего предела" $\implies \lim_{x \to x_0} F(x) \leq 0$

Подставим $F(x) = f(x) - g(x)$:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) \leq 0 \implies \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x) \leq 0 \implies$$
$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$\square$

Вопрос 6. Сформулируйте и докажите теорему о пределе промежуточной функции.

Ссылки. Используются определения №18.

Теорема (О пределе промежуточной функции)**.** Пусть существуют конечные пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0 и $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ и $\lim_{x\to x_0} g(x) = a$, $\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$ верно неравенство $f(x) \le h(x) \le g(x)$. Тогда $\lim_{x\to x_0} h(x) = a$.

Доказательство. По условию:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_1(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_1) \implies |f(x) - a| < \varepsilon) \tag{1}$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_2(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_2) \implies |g(x) - a| < \varepsilon) \tag{2}$$

Выберем $\delta_0 = min\{\delta_1, \delta_2\}$, тогда (1), (2) и $f(x) \le h(x) \le g(x)$ верны одновременно $\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_0)$.

$$\begin{aligned} (1) \quad & a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon \\ (2) \quad & a - \varepsilon < g(x) < a + \varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} f(x) \le h(x) \le g(x) \\ \implies a - \varepsilon < f(x) \le h(x) \le g(x) < a + \varepsilon \\ \implies \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_0) \qquad a - \varepsilon < h(x) < a + \varepsilon \end{gathered}$$

В итоге:

$$\begin{gathered} (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_0(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_0) \implies |h(x) - a| < \varepsilon) \\ \implies \text{по определению предела} \quad \lim_{x\to x_0} h(x) = a \end{gathered}$$

$\square$

Вопрос 7. Сформулируйте и докажите теорему о пределе произведения функций.

Ссылки. Используются определения №18, №21, теорема "О произведении бесконечно малой функций на локально ограниченную", теорема "О связщи функции, её предела и бесконечно малой функции", теорема "О сумме конечного числа с бесконечно малой функцией".

Теорема (О пределе произведения функций). *О пределе произведения функций.*
Предел произведения функций равен произведению пределов.

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

Доказательство. Пусть:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \quad (1)$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = b \quad (2)$$

По теореме о связи функции, её предела и бесконечно малой функции:

$$(1) \implies f(x) = a + \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) \text{ - б.м.ф.}$$
$$(2) \implies f(x) = b + \beta(x), \text{ где } \beta(x) \text{ - б.м.ф.}$$

Рассмотрим:

$$\begin{aligned} f(x)\cdot g(x) &= (a+\alpha(x))(b+\beta(x)) \\ &= ab + \underbrace{a\cdot\beta(x) + b\alpha(x) + \alpha(x)\cdot\beta(x)}_{\gamma(x)} \\ &= ab + \gamma(x) \end{aligned}$$

По следствию из теоремы "*О произведении бесконечно малой функций на локально ограниченную*":

$$a\cdot\beta(x) = \text{б.м.ф. при } x\to 0$$
$$b\cdot\alpha(x) = \text{б.м.ф. при } x\to 0$$
$$\alpha(x)\cdot\beta(x) = \text{б.м.ф. при } x\to 0$$

По теореме о сумме конечного числа с б.м.ф.:

$$\gamma(x) = \text{б.м.ф. при } x\to 0$$

Далее расписываем предел:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) &= \lim_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x))\\ &= \lim_{x\to x_0} ab + \lim_{x\to x_0} \gamma(x)\\ &= ab + 0 = ab\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$\square$

Вопрос 8. Сформулируйте и докажите теорему о пределе сложной функции.

Ссылки. Используются определения №16.

Теорема (О пределе сложной функции)**.** Если функция $y = f(x)$ имеет предел в точке x_0 равный a, то функция $\varphi(y)$ имеет предел в точке a, равный C, тода сложная функция $\varphi(f(x))$ имеет предел в точке x_0, равный C.

$$\left.\begin{array}{l} y = f(x) \\ \lim_{x\to x_0} f(x) = a \\ \lim_{y\to a} \varphi(y) = C \end{array}\right\} \implies \lim_{x\to x_0} \varphi(f(x)) = C$$

Доказательство.

$$\lim_{y\to a} \varphi(y) \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_1 > 0)(\forall y \in \overset{\circ}{S}(a, \delta_1) \implies |\varphi(y) - a| < \varepsilon) \quad (1)$$

Выберем в качестве ε в пределе найденное δ_1:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a$$
$$\iff (\forall \delta_1 > 0)(\exists \delta_2 > 0)(\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta_2 \implies |f(x) - a| < \delta_1) \quad (2)$$

В итоге:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_2 > 0)(\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta_2 \implies |\varphi(f(x)) - c| < \varepsilon)$$

Что равносильно:

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(f(x)) = c$$

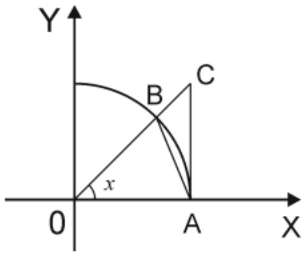
□

Вопрос 9. Докажите, что:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sin(x)}{x} = 0$$

Ссылки. Используется теорема о промежуточной функции.

Доказательство. Пусть $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Рассмотрим окружность радиуса R с центром в начале координат, пересекающую ось абсцисс в точке A, и пусть угол $\angle AOB$ равен x. Пусть, далее, CA – перпендикуляр к этой оси, C точка пересечения с этим перпендикуляром продолжения отрезка OB за точку B. Тогда



$$S_{\triangle AOB} < S_{secOAB} < S_{\triangle OAC}$$
$$\frac{1}{2}R^2 \sin(x) < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2 \operatorname{tg}(x)$$
$$\sin(x) < x < \operatorname{tg}(x)$$
$$1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)}$$
$$1 > \frac{x}{\sin(x)} > \cos(x), \text{ при } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Рассмотрим $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Сделаем замену $\beta = -x$, таким образом $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, а значит, справедливо следующее неравенство:

$$1 > \frac{\sin(\beta)}{\beta} > \cos(\beta)$$

Вернёмся к замене $\beta = -x$:

$$1 > \frac{\sin(-x)}{-x} > \cos(-x)$$
$$1 > \frac{-\sin(x)}{-x} > \cos(x), \text{ при } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Таким образом, полученное неравенство справедливо для $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup$

$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Перейдём к пределу при $x \to 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0}\cos(x) = 1 \\ \lim_{x\to 0} 1 = 1 \end{array}\right\} \implies \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$$

по теореме "О пределе промежуточной функции". $\square$

Вопрос 10. Сформулируйте и докажите теорему о связи функции, ее предела и бесконечно малой.

Ссылки. Используются определения №18, №21.

Теорема (О связи функции, её предела и бесконечно малой)**.** Функция $y = f(x)$ имеет конечный предел в точке x_0 тогда и только тогда, когда её можно представить в виде суммы предела и некоторой бесконечно малой функции.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \iff f(x) = a + \alpha(x), \text{где } \alpha(x) - \text{б.м.ф при } x \to x_0$$

Необходимость. Дано:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

Доказать:

$$f(x) = a + \alpha(x), \text{где } \alpha(x) \text{ - б.м.ф. при } x \to x_0$$

Распишем:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \implies |f(x) - a| < \varepsilon)$$

Обозначим $f(x) - a = \alpha(x)$, тогда:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \implies |\alpha(x)| < \varepsilon)$$

По определению бесконечно малой функции $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция. Из обозначения следует, что:

$$f(x) = a + \alpha(x)$$

где $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$. □

Достаточность. Дано:

$$f(x) = a + \alpha(x), \text{где } \alpha(x) \text{ - б.м.ф. при } x \to x_0$$

Доказать:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

По определению б.м.ф.:

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0 \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\mathring{S}(x_0, \delta) \implies |\alpha(x)| < \varepsilon)$$

С учётом введённого обозначения:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\mathring{S}(x_0, \delta) \implies |f(x) - a| < \varepsilon) \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

□

Вопрос 11. Сформулируйте и докажите теорему о произведении бесконечно малой функции на ограниченную.

Ссылки. Используются определения №20, №21.

Теорема (О произведении бесконечно малой функции на ограниченную). Произведение бесконечно малой функции на локальной ограниченную есть величина бесконечно малая.

Доказательство. Пусть $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$, а функция $f(x)$ при $x \to x_0$ является локально ограниченной. Доказываем, что:

$$\alpha(x) \cdot f(x) = 0$$

Распишем:

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$$

$$\iff (\forall \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M} > 0)(\exists \delta_1 > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_1) \implies |\alpha(x)| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M}) \tag{1}$$

$$M \in \mathbb{R}, M > 0$$

$$\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_2) \implies |f(x)| < M \tag{2}$$

Выберем $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$, тогда (1) и (2) верны одновременно. В итоге получаем:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \implies$$
$$|\alpha(x) \cdot f(x)| = |\alpha(x)| \cdot |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon)$$

Тогда по определению бесконечно малой функции:

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) \cdot f(x) = 0$$

□

Вопрос 12. Сформулируйте и докажите теорему о связи между бесконечно большой и бесконечно малой.

Ссылки. Используются определения №18, №21, №22.

Теорема (О связи между бесконечно большой и бесконечно малой)**.** Если $\alpha(x)$ - бесконечно большая функция при $x \to x_0$, то $\frac{1}{\alpha(x)}$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

Доказательство. По условию $\alpha(x)$ - б.б.ф при $x \to x_0$. По определению:

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = \infty \iff$$
$$(\forall M > 0)(\exists \delta(M) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \implies |f(x)| > M)$$

Рассмотрим неравенство:

$$|\alpha(x)| > M, \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$$

Обозначим $\varepsilon = \frac{1}{M}$.

$$|\alpha(x) > M| \implies \frac{1}{|\alpha(x)|} < \frac{1}{M}$$
$$\implies \left|\frac{1}{\alpha(x)}\right| < \frac{1}{M} < \varepsilon$$

В итоге получаем:

$$\forall x \in \mathring{s}(x_0, \delta) \implies \left|\frac{1}{\alpha(x)}\right| < \varepsilon$$

Что по определению является бесконечно малой функцией. □

Вопрос 13. Сформулируйте и докажите теорему о замене бесконечно малой на эквивалентную под знаком предела.

Ссылки. Используются определения №21, №24.

Теорема (О замене бесконечно малой на эквивалентную под знаком предела)**.** Предел **отношения** двух б.м.ф. не изменится, если заменить эти функции на эквивалентные.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha(x), \beta(x) \text{ - б.м.ф. при } x \to x_0 \\ \alpha(x) \sim \alpha_0(x) \\ \beta(x) \sim \beta_0(x) \end{array}\right\} \implies \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_0(x)}{\beta_0(x)}$$

Доказательство. Рассмотрим предел:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} &= \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x) \cdot \alpha_0(x) \cdot \beta_0(x)}{\beta(x) \cdot \alpha_0(x) \cdot \beta_0(x)} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\alpha_0(x)} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{\beta_0(x)}{\beta(x)} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_0(x)}{\beta_0(x)} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \end{aligned}$$

□

Вопрос 14. Сформулируйте и докажите теорему о необходимом и достаточном условии эквивалентности бесконечно малых.

Ссылки. Используются определения №21, №23, №24.

Теорема (Необходимое и достаточное условие эквивалентности бесконечно малых)**.** Две функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда их разность имеет более высокий порядок малости по сравнению с каждой из них.

$$\alpha(x), \beta(x) \text{ - б.м.ф при } x \to x_0$$

$$\alpha(x) \sim \beta(x) \iff \begin{array}{l} \alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x)) \\ \alpha(x) - \beta(x) = o(\beta(x)) \end{array} \quad \text{при } x \to x_0$$

Необходимость. Дано:

$$\alpha(x), \beta(x) \text{ - б.м.ф при } x \to x_0$$

Доказать:

$$\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x)), \text{ при } x \to x_0$$

Доказательство:
Рассмотрим отношение разности функций к $\alpha(x)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} &= \lim_{x \to x_0} \left(1 - \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right) \\ &= 1 - \lim_{x \to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1 - \frac{1}{1} = 0\end{aligned}$$

По определению получаем, что разность б.м.ф. большего порядка, чем $\alpha(x)$. □

Достаточность. Дано:

$$\alpha(x) - \beta(x) = o(\beta(x)), \text{ при } x \to x_0$$

Доказать:

$$\alpha(x) \sim \beta(x), \text{ при } x \to x_0$$

Доказательство:
Рассмотрим отношение разности функций к $\alpha(x)$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1\right) = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1 = 0$$

$$\implies \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 \implies \alpha(x) \sim \beta(x), \text{ при } x \to x_0$$

□

Вопрос 15. Сформулируйте и докажите теорему о сумме конечного числа бесконечно малых разных порядков.

Ссылки. Используются определения №21, №24.

Теорема (О сумме конечного числа бесконечно малых разных порядков)**.** Сумма бесконечно малых функций разных порядком малости эквивалентно слагаемому низшего порядка малости.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha(x), \beta(x) \text{ - б.м.ф при } x \to x_0 \\ \alpha(x) = o(\beta(x)), \text{ при } x \to x_0\end{array}\right\} \implies \alpha(x) + \beta(x) \sim \beta(x), \text{ при } x \to x_0$$

Доказательство. Рассмотрим предел:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x) + \beta(x)}{\beta(x)} &= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} + 1 \right) \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} + 1 \\ &= 0 + 1 = 1\end{aligned}$$

□

Вопрос 16. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций.

Ссылки. Используются определения №25.

Теорема (О непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций)**.** Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то функции (последняя с учётом $g(x) \neq 0$):

$$f(x) + g(x)$$
$$f(x) \cdot g(x)$$
$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

также непрерывны в точке x_0.

Доказательство. По определению непрерывной функции:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$
$$\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$$

Рассмотрим:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0)$$
$$\Longrightarrow f(x) + g(x) \in C(x_0)$$
$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) \cdot g(x_0)$$
$$\Longrightarrow f(x) \cdot g(x) \in C(x_0)$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$$
$$\Longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \in C(x_0)$$

□

Вопрос 17. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности сложной функции.

Ссылки. Используются определения №26, теорема "О пределе сложной функции".

Теорема (О непрерывности сложной функции). Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $g(y)$ непрерывна в соответствующей точке $y_0 = f(x_0)$, то сложная функция $g(f(x))$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство. По условию функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $g(y)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда по определению:

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = b$$
$$\exists \lim_{x \to x_0} g(y) = g(y_0)$$

Тогда:

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to y_0} g(y) = g(y_0) = g(f(x_0))$$

Следовательно, по определению функция $g(f(x))$ непрерывна в точке $x = a$. Теорема доказана. □

Вопрос 18. Сформулируйте и докажите теорему о сохранении знака непрерывной функции в окрестности точки.

Ссылки. Используются определения №25, теорема "О сохранении функции знака своего предела".

Теорема (О сохранении знака непрерывной функции в окрестности точки). Если функция $f(x) \in C(x_0)$ и $f(x_0) \neq 0$, то $\exists S(x_0)$, в которой знак значения функции совпадает со знаком $f(x_0)$.

Доказательство. Т.к. функция $y = f(x) \in C(x_0)$, то $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. По теореме о сохранении функции знака своего предела $\implies$ $\exists S(x_0)$, в которой знак значений функции совпадает со знаком $f(x_0)$. □

Вопрос 19. Дайте определение функции, непрерывной в точке. Сформулируйте теорему о непрерывности элементарных функций. Докажите непрерывность функций y = sin x, y = cos x

Ссылки. Используются определения №25, теорема "Об произведении ограниченной функции на бесконечно малую".

Теорема (О непрерывности элементарных функций)**.** Основные элементарные функции непрерывны в области определения.

Доказательство (Для $y = sin(x)$)**.**

$$y = \sin(x), D_y = \mathbb{R}$$
$$x_0 = 0, \quad \lim_{x \to x_0} \sin(x) = \sin(0) \implies y = \sin(x) \in C(0)$$
$$\forall x \in D_y = \mathbb{R}, \quad \Delta x \text{ – приращение функции}$$
$$x = x_0 + \Delta x, \quad x \in D_y = \mathbb{R}$$
$$\Delta y = y(x) - y(x_0) = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$$
$$= \sin(x_0 + \Delta x) - \sin(x_0) = 2 \sin\left(\frac{x_0 + \Delta x - x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x_0 + \Delta x + x_0}{2}\right)$$
$$= 2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} 2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) = 0$$
$$\text{– по т. об произв. огр. на б.м.ф.}$$

Т.к. $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ по опр. непр. функции $\implies$ $y = \sin(x)$ непрерывна в точке x_0. Т.к. x_0 – произвольная точка из области определения, то $y = \sin(x)$ непрерывна на всей области произведения. □

Доказательство (Для $y = cos(x)$)**.** Аналогично для $\cos(x)$. □

Вопрос 20. Сформулируйте свойства функций, непрерывных на отрезке.

Ссылки. Используются определения №30.

Теорема (Первая теорема Вейерштрасса)**.** Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она на этом отрезке ограниченна.

$$f(x) \in C[a, b] \implies \exists M \in \mathbb{R}, M > 0, \forall x \in [a, b] : |f(x)| \leq M$$

Теорема (Вторая теорема Вейерштрасса)**.** Если функция $y = f(x) \in C[a, b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значения.

$$\begin{gathered} f(x) \in C[a, b] \\ \implies \\ \exists x_*, x^* \in [a, b] \implies m = f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*) = M \end{gathered}$$

Теорема (Первая теорема Больцано-Коши)**.** Если функция $y = f(x) \in C[a, b]$, и на концах отрезка принимает значения разных знаков, то $\exists c \in (a, b) : f(c) = 0$.

$$f(x) \in S[a, b] \wedge f(a) \cdot f(b) < 0 \implies \exists c \in (a, b) : f(c) = 0$$

Теорема (Вторая теорема Больцано-Коши)**.** Если функция $y = f(x) \in C[a, b]$ и принимает на границах отрезка различные значения $f(a) = A \neq f(b) = B$, то $\forall C \in [a, b] \quad \exists c \in (a, b)$, в которой $f(c) = C$.

$$\begin{gathered} f(x) \in C[a, b] \wedge f(a) = A \neq f(b) = B \\ \implies \\ \exists C \in (A, B) \implies \exists c \in (a, b) : f(c) = C \end{gathered}$$

Теорема (Теорема о непрерывности обратной функции)**.** Пусть $y = f(x) \in C(a, b)$ и строго монотонна на этом интервале. Тогда в соответствующем (a, b) интервале значений функции существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, которая так же строго монотонна и непрерывна.

Вопрос 21. Сформулируйте определение точки разрыва функции и дайте классификацию точек разрыва. На каждый случай приведите примеры.

Ссылки. Используются определения №31.

Ответ. Классификация точек разрыва:

- Первого рода
  - Устранимого разрыва
  $$\lim_{x \to x_0+} = \lim_{x \to x_0-} \neq f(x_0)$$
  - Неустранимого разрыва
  $$\lim_{x \to x_0+} \neq \lim_{x \to x_0-} \quad \text{или} \quad \nexists f(x_0)$$
- Второго рода
$$\nexists \lim_{x \to x_0 \pm}$$

Примеры точек разрыва:

- Устранимого разрыва ($x = 0$):
$$y = \frac{sin(x)}{x}$$
- Неустранимого разрыва ($x = 0$):
$$\begin{cases} y = x, x > 0 \\ y = x - 1, x < 0 \end{cases}$$
- Второго рода ($x = 0$):
$$y = \frac{1}{x}$$

Вопрос 22. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие существования наклонной асимптоты.

Ссылки. Используются определения №21, №45.

Теорема (Необходимое и достаточное условие существования наклонной асимптоты). График функции $y = f(x)$ имеет при $x \to \pm\infty$ наклонную ассимптоту тогда и только тогда, когда существуют два конечных предела:

$$\begin{cases} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \\ \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) \end{cases} \tag{*}$$

Необходимость. Дано $y = kx + b$ наклонная ассимптота.
Доказать $\exists$ пределов.
По условию $y = kx + b$ – наклонная ассимптота $\implies$ по определению $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – б.м.ф. при $x \to \pm\infty$. Рассмотрим:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{kx + b + \alpha(x)}{x} &= \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} (k + b \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\alpha(x)) \\ &= k + b \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\alpha(x) \\ &= k + b \cdot 0 + 0 = k \end{aligned}$$

Рассмотрим выражение:

$$f(x) - kx = kx + b + \alpha(x) - kx = b + \alpha(x)$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} (b + \alpha(x)) = b$$

□

Достаточность. Дано $\exists$ конечные пределы (*). Доказать $y = kx + b$ – наклонная ассимптота.
$\exists$ конечный предел $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) = b$ По теореме о связи функции, её предела и б.м.ф. $\implies$

$$f(x) - kx = b + \alpha(x)$$

при $x \to \pm\infty$. Выразим $f(x)$:

$$f(x) = kx + b + \alpha(x)$$

где $\alpha(x)$ б.м.ф при $x \to \pm\infty$. По определению $\implies$ $y = kx + b$ – наклонная ассимптота к графику функции $y = f(x)$ □

Вопрос 23. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции в точке.

Ссылки. Используются определения №32, №35, теорема "О связи функции, её предела и некоторой бесконечно малой функции".

Теорема (Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции в точке)**.** Функция $y = f(x)$ в точке x_0 тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке конечную производную.

Необходимость. Дано: $y = f(x)$ – дифференцируема в точке x_0.
Доказать: $\exists y'(x)$ – конечное число
Т.к. $y = f(x)$, то $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.
Вычислим предел:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (A + \alpha(\Delta x)) =$$
$$A + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = A + 0 = A$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0) \text{ – по определению}$$
$$\implies y'(x_0) = A = const \implies \exists y'(x_0) \text{ – конечное число.}$$

□

Достаточность. Дано: $\exists y'(x_0)$ – конечное число.
Доказать: $y = f(x)$ – дифференцируема в этой точке.
Доказательство:
Т.к. $\exists y'(x)$, то по определению производной

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

По теореме "О связи функции, её предела и некоторой бесконечно малой функции":

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0) + \alpha(\Delta x)$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.

$$\Delta y = y'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

где $A = y'(x_0) \implies y = f(x)$ дифференцируема в данной точке. □

Вопрос 24. Сформулируйте и докажите теорему о связи дифференцируемости и непрерывности функции.

Ссылки. Используются определения №26, №35.

Теорема (О связи дифференцируемости и непрерывности функции)**.** Если функция дифференцируема в точке x_0, то она в этой точке непрерывна.

Доказательство. Т.к. $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то $\Delta y = y'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, где $y'(x_0) = const$, $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.
Вычислим:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y &= \lim_{\Delta x\to 0} (y'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x)\\ &= y'(x_0) \lim_{\Delta x\to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x\to 0} \alpha(\Delta x) \lim_{\Delta x\to 0} \Delta x\\ &= y'(x_0)\cdot 0 + 0\cdot 0 = 0\end{aligned}$$

По определению непрерывной функции $y = f(x)$ является непрерывной в точке x_0. □

Вопрос 25. Сформулируйте и докажите теорему о производной произведения двух дифференцируемых функций.

Ссылки. Используются определения №32, №35, теорема "О связи дифференцируемости и непрерывности функции".

Теорема (О производной произведения двух дифференцируемых функций). Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x_0, то функция $u(x) \cdot v(x)$ также дифференцируема в точке x_0:

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Доказательство. Пусть $y = uv$, тогда:

$$\begin{gathered}\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x) - y(x) = \\ = (\Delta u + u(x))(\Delta v + v(x)) - u(x)v(x) - y(x) = \Delta u\Delta v + \Delta u v(x) + \\ + \Delta v u(x) + y(x) - y(x) = \\ \Delta u\Delta v + \Delta u v(x) + \Delta v u(x).\end{gathered}$$

Вычислим предел:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u\Delta v + \Delta u v(x) + \Delta v u(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x)\frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = \\ &= \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u}_{0}\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}_{v'(x)} + v(x)\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}}_{u'(x)} + u(x)\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}_{v'(x)} = \\ &= v(x)u'(x) + v'(x)u(x) + v'(x)\cdot 0 = \\ &= \boxed{u'(x)v(x) + u(x)v'(x)} \end{aligned}$$

Т.к. функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ дифференцируемы в точке x, то по теореме о связи дифференцируемости и непрерывности функции $\Longrightarrow$ $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывны в точке x $\Longrightarrow$ по определению непрерывности функции:

$$\begin{cases}\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u = 0\\ \lim_{\Delta x\to 0}\Delta v = 0\end{cases}$$

$\square$

Вопрос 26. Сформулируйте и докажите теорему о производной частного двух дифференцируемых функций.

Ссылки. Используются определения №32, №35.

Теорема (О производной частного двух дифференцируемых функций)**.** Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x_0 и $v(x_0) \neq 0$, то функция $\frac{u(x)}{v(x)}$ также дифференцируема в точке x_0:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

Доказательство. Пусть $y = \frac{u}{v}$, тогда:

$$\begin{aligned}
\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = \\
&= \frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \\
&= \frac{u(x + \Delta x)v(x) - u(x)v(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)v(x)} = \\
&= \frac{(u(x) + \Delta u)v(x) - u(x)(v(x) + \Delta v)}{(\Delta v + v(x))v(x)} = \\
&= \frac{u(x) + \Delta uv(x) - u(x)v(x) - u(x)\Delta v}{v^2(x) + v(x)\Delta v} = \\
&= \frac{\Delta uv(x) - \Delta vu(x)}{v^2(x) + v(x)\Delta v}
\end{aligned}$$

Вычислим предел:

$$\begin{aligned}
y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta uv(x) - \Delta vu(x)}{v^2(x) + v(x)\Delta v}}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x)\frac{\Delta u}{\Delta x} - v(x_0)\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2(x) + v(x)\Delta v} = \\
&= \frac{v(x)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2(x) - v(x)\lim_{\Delta x \to 0}\Delta v} = \\
&= \boxed{\frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}}
\end{aligned}$$

□

Вопрос 27. Сформулируйте и докажите теорему о производной сложной функции.

Ссылки. Используются определения №26 №32, №35.

Теорема (О производной сложной функции)**.** Пусть функция $u = g(x)$ дифференцируема в точке $x = a$, а функция $y = f(u)$ дифференцируема в соответствующей точке $b = g(a)$. Тогда сложная функция $F(x) = f(g(x))$ дифференцируема в точке $x = a$.

$$F'(x)|_{x=a} = (f(g(x))')_{x=a} = f'_u(b) \cdot g'_x(a)$$

Доказательство. Т.к. функция $u = g(x)$ дифференцируема в точке $x = a$, то по определению $\implies$

$$\Delta u = g'(a) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta \tag{1}$$

где $\alpha(\Delta x)$ – б.м.ф при $\Delta x \to 0$. Т.к. функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке b, то по определению дифференцируемости $\implies$

$$\Delta y = f'(b) \cdot \Delta u + \beta(\Delta u) \cdot \Delta u \tag{2}$$

где $\beta(\Delta x)$ – б.м.ф при $\Delta x \to 0$.
Подставим (1) в (2). Тогда:

$$\Delta y = f'(b) \cdot (g'(a)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x) + \beta(\Delta u)\,(g'(a)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x) =$$
$$= f'(b) \cdot g'(a)\Delta x + \Delta x\,(f'(b)\alpha(\Delta x) + g'(a)\beta(\Delta u) + \beta(\Delta u)\alpha(\Delta x)) = \Delta F$$

Обозначим:

$$\gamma(\Delta x) = f'(b)\alpha(\Delta x) + g'(a)\beta(\Delta u) + \beta(\Delta u)\alpha(x)$$

В итоге получаем:

$$\Delta F = f'(b)g'(a)\Delta x + \gamma(\Delta x)\Delta x$$

$f(b)\alpha(\Delta x)$ – б.м.ф при $\Delta x \to 0$ (как производная постоянной на б.м.ф.). Т.к. $u = g(x)$ дифференцируема в точке $x = a$, то по теореме о связи дифференцируемости и непрерывности функции $u = g(x)$ непрерывна в точке $x = a \implies$ по определению непрерывности $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$ или при $\Delta x \to 0$, $\Delta u \to 0$. $g'(a)\beta(\Delta u)$ – б.м.ф при $\Delta x \to 0$ как производная на б.м.ф. $\beta(\Delta u)\alpha(\Delta x)$ – б.м.ф при $\Delta x \to 0$ (как производная двую б.м.ф). Следовательно, $\gamma(x)$ – б.м.ф при $x \to 0$ как сумма конечного числа б.м.ф.
Вычислим предел:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (f'(b) \cdot g'(a) + \gamma(\Delta x)) = f'(b) \cdot g'(a) + 0 = f'(b) \cdot g'(a).$$

□

Вопрос 28. Сформулируйте и докажите теорему о производной обратной функции.

Ссылки. Используются определения №26, №32.

Теорема (О производной обратной функции)**.** Пусть функция $y = f(x)$ в точке $x = 0$ имеет конечную и отличную от нуля производную $f'(a)$ и пусть для неё существует однозначная обратная функция $x = g(y)$, непрерывная в соответствующей точке $b = f(a)$. Тогда существует производная обратной функции и она равна:

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

Доказательство. Т.к. функция $x = g(y)$ однозначно определена, то соответственно при $\Delta y \neq 0$, $\Delta x \neq 0$. Т.к. функция $x = g(y)$ непрерывна в соответствующей точке b, то $\lim_{\Delta y \to 0} \Delta x = 0$ или $\Delta x \to 0$ при $\Delta y \to 0$.

$$g'(b) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} =$$
$$= \frac{1}{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(a)}$$

□

Вопрос 29. Сформулируйте и докажите свойство инвариантности формы записи дифференциала первого порядка.

Ссылки. Используются определения №36.

Теорема (Инвариантность формы записи дифференциала первого порядка)**.** Форма записи первого дифференциала не зависит от того, является ли x независимой переменной или функцией другого аргумента.

Доказательство. Пусть $y = f(x)$, $x = \varphi(t)$. Тогда можно задать сложную функцию:

$$F(t) = y = f(\varphi(t))$$

По определению дифференциала функции:

$$dy = F'(t)dt \tag{1}$$

По теореме о производной сложной функции:

$$F'(t) = f'(x) \cdot \varphi'(t) \tag{2}$$

Подставим (2) в (1):

$$dy = f'(x)\varphi'(t)dt \tag{3}$$

По определению дифференциала функции $dx = \varphi'(t)dt$ (4). Подставим (4) в (3):

$$\boxed{dy = f'(x)dx}$$

□

Вопрос 30. Сформулируйте и докажите теорему Ферма.

Ссылки. Используются определения №32, №33, №34, №35, №39 №40, теорема "О существовании производной функции в точке".

Теорема (Теорема Ферма о нулях производной функции)**.** Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке X и во внутренней точке C этого промежутка достигает наибольшего или наименьшего значения. Если в этой точке существует $f'(c)$, то $f'(c) = 0$.

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ в точке $x = c$ принимает наибольшее значение на промежутке X. Тогда $\forall x \in X \implies f(x) \leq f(c)$. Дадим приращение Δx точке $x = c$. Тогда $f(c + \Delta x) \leq f(c)$. Пусть

$$\exists f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(c + \Delta x) - y(c)}{\Delta x}$$

Рассмоотрим два случая:

$$1) \Delta x > 0, \Delta x \to 0+, x \to c+$$

$$f'_+(c) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{y(c + \Delta x) - y(c)}{\Delta x} = \left(\frac{-}{+}\right) \leq 0$$

$$2) \Delta x < 0, \Delta x \to 0-, x \to c-$$

$$f'_-(c) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{y(c + \Delta x) - y(c)}{\Delta x} = \left(\frac{-}{-}\right) \geq 0$$

По теореме о существовании производной функции в точке:

$$f'_+(c) = -f'_-(c)$$

Это возможно только в том случае, когда оно равняется 0. Теорема доказана. □

Вопрос 31. Сформулируйте и докажите теорему Ролля.

Ссылки. Используются определения №30, №35, №39, №40, теорема Ферма.

Теорема (Теорема Ролля)**.** Пусть функция $y = f(x)$:

1. Непрерывна на отрезке (a, b)
2. Дифференцируема на интервале (a, b)
3. $f(a) = f(b)$

Тогда $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$

Доказательство. Т.к. функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке (a, b), то по теореме Вейерштрасса она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значения. Возможны два случая:

1. Наибольше и наименьшее значение достигаются на границе, т.е. в точке a и в точке b. Это означает, что $m = M$, где m – наименьшее значение, а M – наибольшее. Из этого следует, что функция $y = f(x) = const$ на (a, b). Соответственно $\forall x \in (a, b), f'(x) = 0$
2. Когда наибольшее или наименьшее значение достигаются во внутренней точке (a, b). Тогда для функции $y = f(x)$ справедлива теорема Ферма, согласно которой $\exists c \in (a, b), f'(c) = 0$.

□

Вопрос 32. Сформулируйте и докажите теорему Лагранжа.

Ссылки. Используются определения №30, №35, теорема Ролля, "Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции".

Теорема (Теорема Лагранжа)**.** Пусть функция $y = f(x)$:

1. Непрерывна на отрезке $[a, b]$
2. Дифференцируема на интервале (a, b)

Тогда $\exists c \in (a, b)$, в которой выполняется равенство:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функция $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x - a)$. $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ как сумма непрерывных функций. Существует конечная производная функции $F(x)$:

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

следовательно по необходимому и достаточному условию дифференцируемости будет верно $F(x)$ – дифференцируема на (a, b). Покажем, что $F(a) = F(b)$:

$$\begin{aligned} F(a) &= f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0 \\ F(b) &= f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) \\ &= f(b) - f(b) + f(a) - f(a) = 0 \end{aligned}$$

Значит функция $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Тогда по теореме Ролля $\exists c \in (a, b), F'(c) = 0$.

$$\begin{aligned} &F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ &F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \\ &f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ &f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \end{aligned}$$

$\square$

Вопрос 33. Сформулируйте и докажите теорему Коши.

Ссылки. Используются определения №30, №35, теорема Ролля

Теорема (Теорема Коши)**.** Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условиям:

1. Непрерывны на отрезке $[a, b]$
2. Дифференцируемы на интервале (a, b)
3. $\forall x \in (a, b) f'(x) \neq 0$

Тогда $\exists c \in (a, b)$, такое что:

$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}}$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(a) - \varphi(b)}(\varphi(x) - \varphi(a))$$

Докажем применимость Теоремы Ролля:

1. $F(x)$ непрервына на $[a, b]$ как линейная комбинация непрерывных функций.
2. $F(x)$ дифференцируема на $[a, b]$ как линейная комбинация дифференцируемых функций.
3. $F(a) = F(b)$:

$$F(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}(\varphi(a) - \varphi(a)) = 0$$
$$F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\cancel{\varphi(b) - \varphi(a)}}\cancel{(\varphi(b) - \varphi(a))} = 0$$

Значит, функция $F(x)$ удовлетворяет условию теоремы Ролля, $\Longrightarrow \exists c \in (a, b) : F'(c) = 0$. Вычислим:

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}\varphi'(x)$$
$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}\varphi'(c) = 0$$
$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}\varphi'(c) = f'(c) \quad \boxed{\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}}$$

□

Вопрос 34. Сформулируйте и докажите теорему Лопиталя-Бернулли для предела отношения двух бесконечно малых функций.

Ссылки. Используются определения №21, №35, теорема "О связи дифференцируемости и непрерывности", теорема Коши.

Теорема (Теорема Лопиталя-Бернулли). Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условиям:

- Определены и дифференцируемы в $\mathring{S}(x_0)$
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0, \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$
- $\forall x \in \mathring{S}(x_0) \quad \varphi'(x) \neq 0$
- $\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$

Тогда $\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$.

Доказательство. Доопределим функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ в точке x_0 нулём:

$$f(x_0) = 0 \quad \varphi(x_0) = 0$$

По условию:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = f(x_0) \qquad\qquad \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = 0 = \varphi(x_0)$$

$f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке x_0.
По условию функция $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в точке $\mathring{S}(x_0) \implies$ по теореме о связи дифференцируемости и непрерывности $\implies f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в $\mathring{s}(x_0)$. Таким образом $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в $S(x_0)$.

Функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условию т.Коши на $[x_0, x]$. Тогда по теореме Коши $\implies$

$$\exists c \in [x_0, x] : \frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \tag{*}$$

Т.к. $f(x_0) = 0$ и $\varphi(x_0) = 0 \implies$

$$(*) \quad \boxed{\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(c)}{\varphi(c)}}$$

Т.к. $\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A \implies$ правая часть (*):

$$\lim_{c\to x_0} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = A$$

Левая часть (*):

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = A$$

Получаем:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$$

□

Вопрос 35. Сравните рост показательной, степенной и логарифмической функций на бесконечности.

Ссылки. Используются определения №22.

Ответ. Пусть:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^n \\ g(x) &= a^x \\ h(x) &= \ln x \end{aligned}$$

Найдём предел при стремлении к бесконечности:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{a^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{n \cdot x^{n-1}}{a^x \ln a} \\ &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \ldots = \lim_{x\to+\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\cdot 1}{a^x(\ln a)^n} = \\ &= \frac{n!}{\ln^n a} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x} = \frac{n!}{\ln^n a} = 0. \end{aligned}$$

Значит a^x растёт быстрее, чем x^n при $x \to \infty$ или $x^n = o(a^x)$ при $x \to +\infty$.

Найдём предел при стремлении к бесконечности:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{f(x)} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{n \cdot x^{n-1}} = \frac{1}{n} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{n} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Значит, x^n растёт быстрее, чем $\ln x$ при $x \to +\infty$ $\ln x = o(x^n)$ при $x \to +\infty$.

Вывод: на бесконечности функции расположены в таком порядке:

1. $g(x) = a^x$ – самая быстрорастущая функция
2. $f(x) = x^n$
3. $h(x) = \ln x$

Вопрос 36. Выведите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Теорема (Остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа)**.** Пусть функция $y = f(x)$ $(n+1)$ дифференцируема в $\mathring{S}(x_0)$, $\forall x \in \mathring{S}(x_0)$ $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$. Тогда:

$$R_n(c) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

где $c \in \mathring{S}(x_0)$.

Вопрос 37. Выведите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Теорема (Остаточный член формулы Тейлора в форме Пеано)**.** Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема n раз в точке x_0, тогда $x \to x_0$:

$$R_n(x) = o((x - x_0)^n)$$

Вопрос 38. Выведите формулу Маклорена для функции $y = e^x$ с остаточным членом в форме Лагранжа.

Ответ. Найдём производные для функции $y = e^x$ до n-ого порядка:

$$f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(n)} = e^x$$

Подставим $x = 0$:

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n)} = e^0 = 1$$

Получаем:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Вопрос 39. Выведите формулу Маклорена для функции $y = \sin(x)$ с остаточным членом в форме Лагранжа.

Ответ. Найдём производные для функции $y = \sin(x)$ до $2n + 2$-ого порядка:

$$
\begin{aligned}
&f'(x) = \cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) \\
&f''(x) = -\sin(x) = \sin(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}) \\
&f'''(x) = -\cos(x) = \sin(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}) \\
&f''''(x) = \sin(x) = \sin(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}) \\
&\dots \\
&f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos(x) \\
&f^{(2n+2)}(x) = (-1)^{n+1} \sin(x)
\end{aligned}
$$

Подставим $x = 0$:

$$
\begin{aligned}
&f(0) = 0 \\
&f'(0) = 0 \\
&f''(0) = -1 \\
&f'''(0) = 0 \\
&f''''(0) = 1 \\
&\dots \\
&f^{(2n+1)} = (-1)^n \\
&f^{(2n+2)} = 0
\end{aligned}
$$

Получаем:

$$
\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{\sin\left(\theta x + (2n+2)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+2)!} x^{2n+2}
$$

$$
\theta \in (0, 1)
$$

Вопрос 40. Выведите формулу Маклорена для функции $y = \cos(x)$ с остаточным членом в форме Лагранжа.

Ответ. Найдём производные для функции $y = \cos(x)$ до $2n+1$-ого порядка:

$$
\begin{aligned}
&f'(x) = -\sin(x) = \cos(x + 1 \cdot \frac{\pi}{2}) \\
&f''(x) = -\cos(x) = \cos(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}) \\
&f'''(x) = \sin(x) = \cos(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}) \\
&f''''(x) = \cos(x) = \cos(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}) \\
&\ldots \\
&f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos(x) \\
&f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \sin(x)
\end{aligned}
$$

Подставим $x = 0$:

$$
\begin{aligned}
&f(0) = 1 \\
&f'(0) = 0 \\
&f''(0) = -1 \\
&f'''(0) = 0 \\
&f''''(0) = 1 \\
&\ldots \\
&f^{(2n)} = (-1)^n \\
&f^{(2n+1)} = 0
\end{aligned}
$$

Получаем:

$$
\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{\cos\left(\theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+1)!} x^{2n+1}
$$
$$
\theta \in (0, 1)
$$

Вопрос 41. Выведите формулу Маклорена для функции $y = \ln(1+x)$ с остаточным членом в форме Лагранжа.

Ответ. Найдём производные для функции $y = \ln(1+x)$ до $n+1$-ого порядка:

$$
\begin{aligned}
&f'(x) = \frac{1}{1+x}\\
&f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}\\
&f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}\\
&f''''(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}\\
&\dots\\
&f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}\\
&f^{(n+1)}(x) = (-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}
\end{aligned}
$$

Подставим $x = 0$:

$$
\begin{aligned}
&f(0) = 0\\
&f'(0) = 1 = 1!\\
&f''(0) = -1 = -1!\\
&f'''(0) = 2 = 2!\\
&f''''(0) = -3 \cdot 2 = -6!\\
&\dots\\
&f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\\
&f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n!
\end{aligned}
$$

Получаем:

$$
\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}
$$
$$
\theta \in (0,1)
$$

Вопрос 42. Выведите формулу Маклорена для функции $y = (1+x)^\alpha$ с остаточным членом в форме Лагранжа.

Ответ. Найдём производные для функции $y = (1+x)^\alpha$ до n-ого порядка:

$$\begin{aligned}
&f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}\\
&f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}\\
&f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}\\
&\ldots\\
&f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}
\end{aligned}$$

Подставим $x = 0$:

$$\begin{aligned}
&f(0) = 1\\
&f'(0) = \alpha\\
&f''(0) = \alpha(\alpha-1)\\
&f'''(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\\
&\ldots\\
&f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)
\end{aligned}$$

Получаем:

$$\begin{gathered}
(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} + \\
+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!} \cdot (1+\theta x)^{\alpha-n-1} \cdot x^{n+1}\\
\theta \in (0,1)
\end{gathered}$$

Вопрос 43. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие неубывания дифференцируемой функции.

Ссылки. Используются определения №35, №38, теорема "О связи дифференцируемости и непрерывности функции", теорема Лагранжа.

Теорема (Необходимое и достаточное условие неубывания дифференцируемой функции). Дифференцируемая на интервале (a, b) не убывает на этом интервале тогда и только тогда, когда $f'(x) \geq 0\ \forall x \in (a, b)$.

Необходимость. Дано: $y = f(x)$ не убывает на (a, b).
Доказать:

$$\forall x \in (a, b) \quad f'(x) \geq 0$$

В точке $x \in (a, b)$, в которой функция $f(x)$ дифференцируема, имеем:

$$\Delta x > 0 \implies f(x + \Delta x) \geq f(x)$$
$$\implies f'(x) = f_+(x) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0$$

$$\Delta x < 0 \implies f(x) \geq f(x + \Delta x)$$
$$\implies f'(x) = f_-(x) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0$$

Таким образом, $\forall x \in (a, b) \implies f'(x) \geq 0$ □

Достаточность. Дано: $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) \geq 0$.
Доказать: $y = f(x)$ не убывает на a, b.

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b) : x_2 > x_1$$

Рассмотрим $[x_1, x_2]$. Функция на отрезке $[x_1, x_2]$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа:

1. Непрерывность на $[x_1, x_2]$.
   По условию $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b). По теореме о связи дифференцируемости и непрерывности функции $\implies y = f(x)$ – непрерывна на $[x_1, x_2]$.

2. дифференцируемость на (x_1, x_2) т.к. функция по условию дифференцируема на отрезке $[x_1, x_2]$.

По теореме Лагранжа $\exists c \in (x_1, x_2)$:

$$f(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Т.к. $x_2 > x_1 \implies x_2 - x_1 > 0$. По условию $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b) \implies f'(c) \geq 0$.

Тогда:

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 0$$
$$\Longrightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \text{ при } x_2 > x_1$$
$$f(x_2) \geq f(x_1) \text{ при } x_2 > x_1$$

$\Longrightarrow$ по определению функция $y = f(x)$ не убывает на (a, b). $\square$

Вопрос 44. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие невозрастания дифференцируемой функции.

Ссылки. Используются определения №35, №37.

Теорема (Необходимое и достаточное условие невозрастания дифференцируемой функции). Дифференцируемая на интервале (a,b) не возрастает на этом интервале тогда и только тогда, когда $f'(x) \le 0 \, \forall x \in (a,b)$.

Необходимость. Дано: $y = f(x)$ не возрастает на (a,b).
Доказать:

$$\forall x \in (a,b) \quad f'(x) \le 0$$

В точке $x \in (a,b)$, в которой функция $f(x)$ дифференцируема, имеем:

$$\Delta x > 0 \implies f(x+\Delta x) \le f(x)$$
$$\implies f'(x) = f_+(x) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \le 0$$

$$\Delta x < 0 \implies f(x) \le f(x+\Delta x)$$
$$\implies f'(x) = f_-(x) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \le 0$$

Таким образом, $\forall x \in (a,b) \implies f'(x) \le 0$ □

Достаточность. Дано: $\forall x \in (a,b) \quad f'(x) \le 0$.
Доказать: $y = f(x)$ не возрастает на a, b.

$$\forall x_1, x_2 \in (a,b) : x_2 > x_1$$

Рассмотрим $[x_1, x_2]$. Функция на отрезке $[x_1, x_2]$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа:

1. Непрерывность на $[x_1, x_2]$.
   По условию $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b). По теореме о связи дифференцируемости и непрерывности функции $\implies y = f(x)$ – непрерывна на $[x_1, x_2]$.

2. дифференцируемость на (x_1, x_2) т.к. функция по условию дифференцируема на отрезке $[x_1, x_2]$.

По теореме Лагранжа $\exists c \in (x_1, x_2)$:

$$f(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Т.к. $x_2 > x_1 \implies x_2 - x_1 > 0$. По условию $f'(x) \le 0, \forall x \in (a,b) \implies f'(c) \le 0$.

Тогда:

$$\begin{gathered} f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 0 \\ \implies f(x_2) - f(x_1) \leq 0 \text{ при } x_2 > x_1 \\ f(x_2) \leq f(x_1) \text{ при } x_2 > x_1 \end{gathered}$$

$\implies$ по определению функция $y = f(x)$ не возрастает на (a, b). $\square$

Вопрос 45. Сформулируйте и докажите первое достаточное условие экстремума (по первой производной).

Ссылки. Используются определения №27, №35, №41, №42, №43, теорема Лагранжа.

Теорема (Первое достаточное условие экстремума). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в $S(x_0)$, где x_0 – критическая точка первого порядка; функция дифференцируема в $\mathring{S}(x_0)$. Тогда если производная функции меняет свой знак при переходе черех точку x_0, то эта точка x_0 – точка экстремума. Причём:

1. Если при $x < x_0$ $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$ $f'(x) < 0$, то x_0 – точка максимума.

2. Если при $x < x_0$ $f'(x) < 0$, а при $x > x_0$ $f'(x) > 0$, то x_0 – точка минимума.

Достаточность. $\forall x \in S(x_0)$. Пусть $x > x_0$, тогда рассматриваем отрезок $[x_0, x]$. Тогда функция $y = f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа:

1. Непрерывна на $[x_0, x]$, т.к. по условию функция непрерывна в $S(x_0)$, а следовательно $y = f(x)$ будет непрерывна и на меньшем промежутке $[x_0, x]$.

2. Дифференцируема на (x_0, x), т.к. по условию функция непрерывна в $\mathring{S}(x_0) \implies y = f(x)$ дифференцируема на (x_0, x)

По теореме Лагранжа $\exists c \in (x_0, x)$

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

При $x > x_0$ $x - x_0 > 0$. По условию
1) при $x > x_0$ $\quad f'(x) < 0 \implies f'(c) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0 \implies f(x) < f(x_0)$ по определению строгого x_0 – точка локального максимума. 2) при $x < x_0$ $\quad f'(x) > 0 \implies f'(c) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0 \implies f(x) > f(x_0)$ по определению строгого x_0 – точка локального минимума.

По теореме Лагранжа $\exists c \in (x, x_0)$:

$$f'(c) = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

Т.к. $x < x_0$, то $x - x_0 < 0 \implies x_0 - x > 0$. По условию
1) при $x < x_0$ $\quad f'(x) > 0 \implies f'(c) = \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} > 0 \implies f(x_0) > f(x)$ по определению строгого x_0 – точка локального максимума. 2) при $x > x_0$ $\quad f'(x) > 0 \implies f'(c) = \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} <$ ‘0 $\implies f(x) < f(x_0)$ по определению строгого x_0 – точка локального минимума. $\square$

Вопрос 46. Сформулируйте и докажите второе достаточное условие экстремума (по второй производной).

Ссылки. Используются определения №35, №39, №40, №44.

Теорема (Второе достаточное условие экстремума)**.** Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в точке x_0, и $f'(x_0) = 0$. Тогда:

1. Если $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка строгого максимума.
2. Если $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка строгого минимума.

Достаточность. Разложим функцию $y = f(x)$ в окрестности точки x_0 по формуле Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

Т.к. $f'(x_0) = 0$, то

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$
$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

Знак $f(x) - f(x_0)$ определяет $f''(x_0)$, т.к. $o((x - x_0)^2)$ – б.м.ф. при $x \to x_0$.

Если $f(x) - f(x_0) < 0$ то $f(x) < f(x_0)$, $\forall x \in S(x_0)$. По определению x_0 – точка локального максимума.

Если $f(x) - f(x_0) > 0$ то $f(x) > f(x_0)$, $\forall x \in S(x_0)$. По определению x_0 – точка локального минимума. □

Вопрос 47. Сформулируйте и докажите достаточное условие выпуклости функции.

Ссылки. Используются определения №35, №46, №47.

Теорема (Достаточное условие выпуклости функции)**.** Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a, b). Тогда:

1. Если $f''(x) < 0 \forall x \in (a, b)$, то график функции *выпуклый вверх* на этом интервале
2. Если $f''(x) > 0 \forall x \in (a, b)$, то график функции *выпуклый вниз* на этом интервале

Достаточность.

$$x_0 \in (a, b), y_0 = f(x_0) \implies M_0(x_0, y_0)$$

Построим в точке M_0 касательную к графику функции $y = f(x)$. Запишем уравнение касательной:

$$y = y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$$

Преобразуем:

$$y_k = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{1}$$

Представим функцию $y = f(x)$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}x + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2, \quad c \in S(x_0) \tag{2}$$

Вычтем (1) из (2):

$$\begin{aligned} f(x) - y_k = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0) \\ -f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)^2 \\ f(x) - y_k = \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2 \end{aligned}$$

По условию $f''(x) < 0 \ \forall x \in (a, b)$, то $f''(c) < 0 \implies f(x) - y_0 < 0 \implies f(x) < y_k$, а значит по определению выпуклой функции $\implies$ график функции $y = f(x)$ выпуклый вверх.

2. По условию $f''(x) > 0 \ \forall x \in (a, b)$, то $f''(c) > 0 \implies f(x) - y_0 > 0 \implies f(x) > y_k$, а значит по определению выпуклой функции $\implies$ график функции $y = f(x)$ выпуклый вниз.

□

Вопрос 48. Сформулируйте и докажите необходимое условие точки перегиба.

Ссылки. Используются определения №35, №48.

Теорема (необходимое условие точки перегиба)**.** Пусть функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет *непрерывную* вторую производную и $M(x_0, y_0)$ – точка перегиба графика функции $y = f(x)$. Тогда $f''(x_0) = 0$.

Необходимость. Докажем методом от противного. Предположим, что $f''(x_0) > 0$. В силу непрерывности второй производной функции $y = f(x)$ $\exists S(x_0) \forall x \in S(x_0) : f''(x) > 0$. Это противоречит тому, что $M_0(x_0, y_0)$ – точка перегиба. Предположим, что $f''(x_0) < 0$. В силу непрерывности второй производной функции $y = f(x)$ $\exists S(x_0)$ $\forall x \in S(x_0)$: $f''(x) < 0$. Это противоречит тому, что $M_0(x_0, y_0)$ – точка перегиба. $\square$

Вопрос 49. Сформулируйте и докажите достаточное условие точки перегиба.

Ссылки. Используются определения №25, №48.

Теорема (Достаточное условие точки перегиба)**.** Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, дважды дифференцируема в $S(x_0)$ и вторая производная меняет знак при переходе аргумента x через точку x_0. Тогда $M_0(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции $y = f(x)$.

Достаточность. По условию $\exists S(x_0)$ в которой вторая производная функции $y = f(x)$ меняет знак при переходе аргумента x через точку x_0 (даёт достаточное условие выпуклости функции). Это означает, что график функции $y = f(x)$ имеет различные направление выпуклости по разные стороны от точки x_0. По определению точки перегиба $M(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции $y = f(x)$. $\square$