Математический анализ. Подготовка к экзамену

1 Определения

Определение 1 (Множество натуральных чисел). $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел. Состоит
из чисел, возникающих при счёте.

Определение 2 (Множество целых чисел). $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел. Состоит из натуральных чисел, нуля и чисел, противоположных натуральным.

Определение 3 (Множество рациональных чисел). $\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел. Состоит из
чисел, представимых в виде $\frac{z}{n}, z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$.

Определение 4 (Множество иррациональных чисел). $\mathbb{I}$ – множество иррациональных чисел. Состоит из чисел, которые не представимы в виде $\frac{z}{n}, z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$.

Определение 5 (Множество действительных чисел). $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел. Состоит из
рациональных и иррациональных чисел.

Определение 6 (Окрестность точки). Окрестностью $S(x)$ точки x называется любой интервал, содержащий эту точку.

Определение 7 (ε-окрестность точки). ε-окрестностью точки x называется интервал с центром в точке x и длиной 2ε.

$$S(x, \varepsilon) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$$

Определение 8 (δ-окрестность точки). δ-окрестностью точки x называется интервал с центром в точке x и длиной 2δ.

$$S(x, \delta) = (x - \delta, x + \delta)$$

Определение 9 (Окрестность $+\infty$). Окрестностью $+\infty$ называется любой интервал вида:

$$S(+\infty) = (a, +\infty), \quad a \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

Определение 10 (Окрестность $-\infty$). Окрестностью $-\infty$ называется любой интервал вида:

$$S(-\infty) = (-\infty, -a), \quad a \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

Определение 11 (Окрестность ∞). Окрестностью ∞ называется любой интервал вида:

$$S(\infty) = (-\infty, -a) \cup (a, +\infty), \quad a \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

Определение 12 (Числовая последовательность). Числовой последовательностью называется бесконечное множество числовых значений, которое можно упорядочить (перенумеровать)

Определение 13 (Ограниченная последовательность). Последовательность x_n называется *ограниченной*, если она ограничена и сверху, и снизу, т.е.

$$\forall n \in \mathbb{N}, m \leq x_n \leq M \quad \text{или} \quad |x_n| \leq M$$

Определение 14 (Предел последовательности). Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется натуральное число $N(\varepsilon)$, такое, что если порядковый номер n члена последовательности станет больше $N(\varepsilon)$, то имеет место неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

$$\lim_{x\to\infty} x_n = a \iff (\forall\varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}) : (\forall n > N(\varepsilon)) \implies |x_n - a| < \varepsilon$$

Определение 15 (Сходящаяся последовательность). Числовая последовательность называется сходящейся, если существует предел это последовательности, и он конечен.

Определение 16 (Предел функции по Коши). Число a называется пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0, если $\forall\varepsilon > 0$ найдется δ, зависящее от ε такое что $\forall x \in \mathring{S}(x_0; \delta)$ будет верно неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \iff (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0; \delta) \implies |f(x) - a| < \varepsilon)$$

Определение 17 (Предел функции по Гейне). Число a называется пределом $y = f(x)$ в точке x_0, если эта функция определена в окрестности точки a и $\forall$ последовательнсти x_n из области определения этой функции, сходящейся к x_0 соответствующая последовательность функций $\{f(x_n)\}$ сходится к a.

$$\lim_{x \to x_0} = a \iff (\forall x_n \in D_f)(\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \to \infty} f(x_n) = a)$$

Определение 18 (Локальная ограниченность функции). Функция называется локально ограниченной при $x \to x_0$, если существует проколотая окрестность с центром в точке x_0, в которой данная функция ограничена.

Определение 19 (Бесконечно малая функция). Функция называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если предел функции в этой точке равен 0.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon))(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \implies |f(x)| < \varepsilon)$$

2 Теория

Вопрос 1. Сформулируйте и докажите теорему о единственности предела сходящейся последовательности.

Ссылки. Используются определения №12, №14, №15

Теорема (О существовании единственности предела последовательности). Любая сходящаяся последовательность имеет единственный предел.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ – сходящаяся последовательность.
Рассуждаем методом от противного. Пусть последовательность $\{x_n\}$ более одного предела.

$$\lim_{n \to \infty} = a \quad \lim_{n \to \infty} = b \quad a \neq b$$

$$\lim_{n \to \infty} = a \iff (\forall \varepsilon_1 > 0)(\exists N_1(\varepsilon_1) \in N)(\forall n > N_1(\varepsilon_1) \implies |x_n - a| < \varepsilon_1) \tag{1}$$

$$\lim_{n \to \infty} = b \iff (\forall \varepsilon_2 > 0)(\exists N_2(\varepsilon_2) \in N)(\forall n > N_2(\varepsilon_2) \implies |x_n - b| < \varepsilon_2) \tag{2}$$

Выберем $N = max\{N_1(\varepsilon_1), N_2(\varepsilon_2)\}$.

Пусть

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = \frac{|b-a|}{3}$$

$$3\varepsilon = |b-a| = |b-a+x_n-x_n| =$$
$$= |(x_n-a)-(x_n-b)| \leq |x_n-a| + |x_n-b| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\varepsilon$$
$$3\varepsilon < 2\varepsilon$$

Противоречие. Значит, предоположение не является верным $\implies$ последовательность x_n имеет единственный предел. □

Вопрос 2. Сформулируйте и докажите теорему об ограниченности сходящейся последовательности.

Ссылки. Используются определения №12, №13, №14, №15

Теорема. *Об ограниченности сходящейся последовательности.* Любая сходящаяся последовательность *ограничена.*

Доказательство. По определению сходящейся последовательности

$$\implies \lim_{n\to\infty} = a \iff (\forall\varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n > N(\varepsilon) \implies |x_n - a| < \varepsilon).$$

Выберем в качестве $M = max\{|x_1|, |x_2|, \dots |x_n|, |a-\varepsilon|, |a+\varepsilon|\}$.
Тогда для $\forall n \in \mathbb{N}$ будет верно $|x_n| \leq M$ – это и означает, что последовательность x_n – ограниченная. □

Вопрос 3. Сформулируйте и докажите теорему о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел.

Ссылки. Используются определения №16, №18

Теорема (О локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел)**.** Функция, имеющая конечный предел, локально ограничена.

Доказательство.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a$$
$$\iff (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0,\delta) \implies |f(x) - a| < \varepsilon)$$

Распишем:

$$\begin{matrix} -\varepsilon < f(x) - a < \varepsilon \\ a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon \end{matrix} \qquad \forall x \in \mathring{S}(x_0,\delta)$$

Выберем $M = max\{|a-\varepsilon|, |a+\varepsilon|\}$

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in \mathring{S}(x_0, a)$$

Что и требовалось доказать. $\square$

Вопрос 4. Сформулируйте и докажите теорему о сохранении функцией знака своего предела.

Ссылки. Используются определения №16

Теорема (О сохранении функцией знака своего предела)**.** Если $\lim_{x\to x_0} = a \neq 0$, то $\exists \mathring{S}(x_0, \delta)$ такая, что функция в ней сохраняет знак своего предела.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \neq 0 \to \begin{matrix} a > 0 \\ a < 0 \end{matrix} \implies \begin{matrix} f(x) > 0 \\ f(x) < 0 \end{matrix} \quad \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$$

Доказательство. Пусть $a > 0$. Выберем $\varepsilon = a > 0$.

$$\lim_{x\to x_0} = a \iff (\forall \varepsilon = a)(\exists \delta(x) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \implies$$
$$|f(x) - a| < \varepsilon = a)$$

Распишем:

$$-a < f(x) - a < a$$
$$\boxed{0 < f(x) < 2a}$$

Знак у функции $f(x)$ и числа a - одинаковые.
Пусть $a < 0$. Выберем $\varepsilon = -a$.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \iff (\forall \varepsilon = -a)(\exists \delta(x) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \implies$$
$$|f(x) - a| < \varepsilon = -a)$$

Распишем:

$$-a < f(x) - a < a$$
$$\boxed{-2a < f(x) < 0}$$

Знак у функции $f(x)$ и числа a - одинаковые.
Значит, $f(x)$ сохраняет знак своего предела $\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$ $\square$

Вопрос 5. Сформулируйте и докажите теорему о предельном переходе в неравенстве.

Ссылки. Используются определения №16

Теорема (О предельном переходе в неравенстве)**.** Пусть существуют конечные пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0 и $\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$ верно $f(x) < g(x)$. Тогда $\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$ имеет место неравенство $\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$.

Доказательство. По условию $f(x) < g(x), \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$.
Введём функцию $F(x) = f(x) - g(x) < 0, \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$. Т.к. $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы в точке x_0, соответственно и функция $F(X)$ имеет конечный предел в точке x_0 (как разность $f(x)$ и $g(x)$).

По следствию из предыдущей теоремы $\implies \lim_{x\to x_0} F(x)$

Подставим $F(x) = f(x) - g(x)$:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) \leq 0 \implies \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x) \leq 0 \implies$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$$

□

Вопрос 6. Сформулируйте и докажите теорему о пределе промежуточной функции.

Ссылки. Используются определения №16

Теорема (О пределе промежуточной функции)**.** Пусть существуют конечные пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0 и $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ и $\lim_{x\to x_0} g(x) = a$, $\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$ верно неравенство $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. Тогда $\lim_{x\to x_0} h(x) = a$.

Доказательство. По условию:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_1(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \implies |f(x) - a| < \varepsilon) \tag{1}$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_2(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \implies |g(x) - a| < \varepsilon) \tag{2}$$

Выберем $\delta_0 = min\{\delta, \delta_1, \delta_2\}$, тогда (1), (2) и $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ верны одновременно $\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_0)$.

$$(1) \quad a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$$
$$(2) \quad a - \varepsilon < g(x) < a + \varepsilon$$

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$
$$\implies a - \varepsilon_1 < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < a + \varepsilon_2$$
$$\implies \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_0) \qquad a - \varepsilon < h(x) < a + \varepsilon$$

В итоге:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_0(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_0 \implies |h(x) - a| < \varepsilon)$$
$$\implies \text{по определению предела} \quad \lim_{x\to x_0} h(x) = a$$

□

Вопрос 7. Сформулируйте и докажите теорему о пределе произведения функций.

Ссылки. Используются определения №16, №19, теорема “О произведении бесконечно малой функций на локально ограниченную”

Теорема (О пределе произведения функций). *О пределе произведения функций.*
Предел произведения функций равен произведению пределов.

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

Доказательство. Пусть:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \tag{1}$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = b \tag{2}$$

По теореме о связи функции, её предела и бесконечно малой функции:

$$(1) \implies f(x) = a + \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) \text{ - б.м.ф.}$$
$$(2) \implies f(x) = b + \beta(x), \text{ где } \beta(x) \text{ - б.м.ф.}$$

Рассмотрим:

$$\begin{aligned} f(x)\cdot g(x) &= (a+\alpha(x))(b+\beta(x)) \\ &= ab + \underbrace{a\cdot\beta(x) + b\alpha(x) + \alpha(x)\cdot\beta(x)}_{\gamma(x)} \\ &= ab + \gamma(x) \end{aligned}$$

По следствию из теоремы “*О произведении бесконечно малой функций на локально ограниченную*”:

$$a\cdot\beta(x) = \text{б.м.ф. при } x\to 0$$
$$b\cdot\alpha(x) = \text{б.м.ф. при } x\to 0$$
$$\alpha(x)\cdot\beta(x) = \text{б.м.ф. при } x\to 0$$

По теореме о сумме конечного числа с б.м.ф.:

$$\gamma(x) = \text{б.м.ф. при } x\to 0$$

Далее расписываем предел:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) &= \lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))\\ &= \lim_{x\to x_0} ab + \lim_{x\to x_0}\gamma(x)\\ &= ab+0\\ &= ab\end{aligned}$$

□

Вопрос 8. Сформулируйте и докажите теорему о пределе сложной функции.

Ссылки. Используются определения №14, №17

Теорема (О пределе сложной функции)**.** Если функция $y = f(x)$ имеет предел в точке x_0 равный a, то функция $\varphi(y)$ имеет предел в точке a, равный C, тода сложная функция $\varphi(f(x))$ имеет предел в точке x_0, равный C.

$$\left.\begin{array}{l} y = f(x)\\ \lim_{x\to x_0} f(x) = a\\ \lim_{y\to a}\varphi(y) = C\end{array}\right\} \implies \lim_{x\to x_0}\varphi(f(x)) = C$$

Доказательство.

$$\lim_{y\to a}\varphi(y) \iff (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta_1>0)(\forall y\in \mathring{S}(a,\delta_1) \implies |\varphi(y)-a|<\varepsilon) \quad (1)$$

Выберем в качестве ε в пределе найденное δ_1:

$$\begin{gathered}\lim_{x\to x_0} f(x) = a\\ \iff (\forall\delta_1>0)(\exists\delta_2>0)(\forall x: 0<|x-x_0|<\delta_2 \implies |f(x)-a|<\delta_1)\end{gathered} \quad (2)$$

В итоге:

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta_2>0)(\forall x: 0<|x-x_0|<\delta_2 \implies |\varphi(f(x))-c|<\varepsilon)$$

Что равносильно:

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(f(x)) = c$$

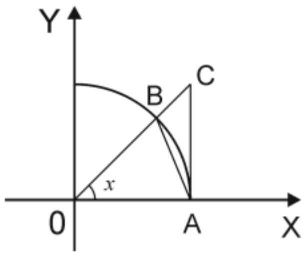
□

Вопрос 9. Докажите, что:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x} = 0$$

Ссылки. Используется теорема о промежуточной функции.

Доказательство. Пусть $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Рассмотрим окружность радиуса R с центром в начале координат, пересекающую ось абсцисс в точке A, и пусть угол $\angle AOB$ равен x. Пусть, далее, CA – перпендикуляр к этой оси, C точка пересечения с этим перпендикуляром продолжения отрезка OB за точку B. Тогда



$$
\begin{gathered}
S_{\triangle AOB} < S_{secOAB} < S_{\triangle OAC} \\
\frac{1}{2}R^2\sin(x) < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2\operatorname{tg}(x) \\
\sin(x) < x < \operatorname{tg}(x) \\
1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)} \\
1 > \frac{x}{\sin(x)} > \cos(x), \text{ при } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)
\end{gathered}
$$

Рассмотрим $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Сделаем замену $\beta = -x$, таким образом $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, а значит, справедливо следующее неравенство:

$$1 > \frac{\sin(\beta)}{\beta} > \cos(\beta)$$

Вернёмся к замене $\beta = -x$:

$$
\begin{gathered}
1 > \frac{\sin(-x)}{-x} > \cos(-x) \\
1 > \frac{-\sin(x)}{-x} > \cos(x), \text{ при } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)
\end{gathered}
$$

Таким образом, полученное неравенство справедливо для $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Перейдём к пределу при $x \to 0$:

$$
\left.\begin{array}{l}
\lim_{x\to 0}\cos(x) = 1 \\
\lim_{x\to 0} 1 = 1
\end{array}\right\} \implies \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1
$$

по теореме “О пределе промежуточной функции”.

$\square$

Вопрос 10. Сформулируйте и докажите теорему о связи функции, ее предела и бесконечно малой.

Ссылки. Используются определения №16, №19

Теорема (О связи функции, её предела и бесконечно малой). *О связи функции, её предела и бесконечно малой.*
Функция $y = f(x)$ имеет конечный предел в точке x_0 тогда и только тогда, когда её можно представить в виде суммы предела и некоторой бесконечно малой функции.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \iff f(x) = a + \alpha(x), \text{где } \alpha(x) - \text{б.м.ф при } x \to x_0$$

Необходимость. *Дано*:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a$$

Доказать:

$$f(x) = a + \alpha(x), \text{где } \alpha(x) \text{ - б.м.ф. при } x \to x_0$$

Распишем:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \iff (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \implies |f(x) - a| < \varepsilon)$$

Обозначим $f(x) - a = \alpha(x)$, тогда:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \iff (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \implies |\alpha(x)| < \varepsilon)$$

По определению бесконечно малой функции $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция. Из обозначения следует, что:

$$f(x) = a + \alpha(x)$$

где $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$. $\square$

Достаточность. *Дано*:

$$f(x) = a + \alpha(x), \text{где } \alpha(x) \text{ - б.м.ф. при } x \to x_0$$

Доказать:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a$$

По определению б.м.ф.:

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0 \iff (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\mathring{S}(x_0, \delta) \implies |\alpha(x)| < \varepsilon)$$

С учётом введённого обозначения:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\mathring{S}(x_0, \delta) \implies |f(x) - a| < \varepsilon \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = a)$$

$\square$