Vorlesung 3

# Mehrband-Turingmaschinen und die universelle Turingmaschine

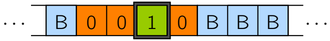
# Wdh.: Kodierung von Berechnungsproblemen

3 mögliche formale Definitionen.

| Als Relation: | Als Funktion | Als Sprache |
|---|---|---|
| ▶ Primfaktor: | | |
| $(110, 11) \in R$<br>$(101, 11) \notin R$<br>$(00110, 11) \notin R$ | | |
| ▶ Multiplikation | | |
| $(11\#10, 110) \in R$<br>$(11\#10, 11) \notin R$<br>$(1\#1\#0, 110) \notin R$ | $f(11\#10) = 110$<br>$(f(1\#1\#0) = \perp)$ | |
| ▶ Wörter die auf 1 enden. | | |
| $(11, 1) \in R$<br>$(110, 1) \notin R$<br>$(10, 0) \in R$ | $f(11) = 1$<br>$f(110) = 0$ | $11 \in L$<br>$110 \notin L$ |

# Wdh.: Turingmaschinen

*Anschauliche Definition:*




| $\delta$ | 0 | 1 | $B$ |
|---|---|---|---|
| $q_1$ | $(q_1, 1, L)$ | $(q_2, 1, R)$ | $(q_1, B, N)$ |
| $q_2$ | $(q_3, B, R)$ | $(q_1, 0, L)$ | $(q_3, B, R)$ |
| $q_3$ | $(q_2, 0, N)$ | $(q_2, 0, R)$ | $(q_3, B, R)$ |


*Formale Definition:*

Eine Turingmaschine ist ein 7-Tupel $(Q, \Sigma, \Gamma, B, q_0, \bar{q}, \delta)$, wobei

- $Q, \Sigma, \Gamma$ endliche Mengen sind,
- $\Sigma \subseteq \Gamma$,
- $B \in \Gamma \setminus \Sigma$,
- $q_0, \bar{q} \in Q$ und
- $\delta\colon (Q \setminus \{\bar{q}\}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{R, L, N\}$.

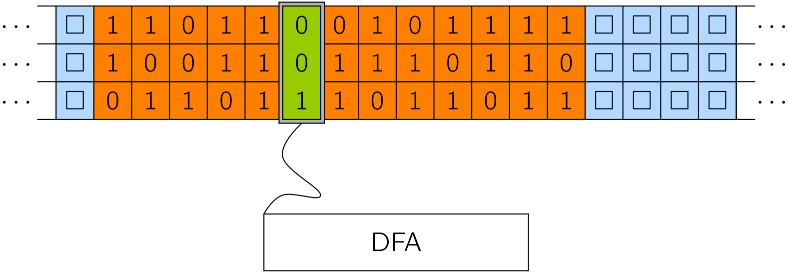
# Wdh.: TM-Techniken

- Speicher im Zustandsraum:

$$Q_{\text{neu}} := Q \times \Gamma^k$$

- Mehrspurmaschinen:

$$\Gamma_{\text{neu}} := \Gamma \cup \Gamma^k$$




- Schleifen, Variablen, Felder (Arrays), Unterprogramme

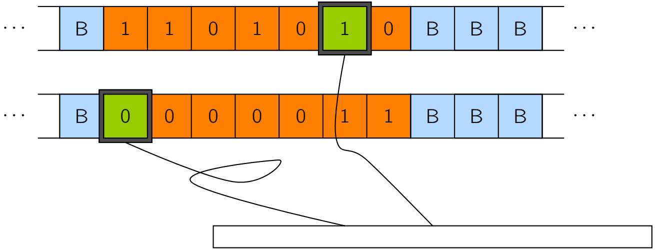
# Turingmaschinen mit mehreren Bändern

## $k$-Band-TM

Eine $k$-Band-TM ist eine Verallgemeinerung der Turingmaschine und verfügt über $k$ Arbeitsbänder mit jeweils einem unabhängigen Kopf.
Die Zustandsübergangsfunktion ist entsprechend von der Form

$$\delta : (Q \setminus \{\bar{q}\}) \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{L, R, N\}^k \ .$$

- Band 1 fungiert als Ein-/Ausgabeband wie bei der (1-Band-)TM.
- Die Zellen der Bänder $2, \ldots, k$ sind initial leer (ausschließlich $B$).



# Simulation $k$-Band-TM durch 1-Band-TM

## Satz

*Eine $k$-Band-TM $M$, die mit Rechenzeit $t(n)$ und Platz $s(n)$ auskommt, kann von einer (1-Band-)TM $M'$ mit Zeitbedarf $O(t^2(n))$ und Platzbedarf $O(s(n))$ simuliert werden.*

## Beweisskizze

Die TM $M'$ verwendet $2k$ Spuren. Nach Simulation des $t$-ten Schrittes für $0 \leq t \leq t(n)$ gilt

- Die ungeraden Spuren $1, 3, \ldots, 2k-1$ enthalten den Inhalt der Bänder $1, \ldots, k$ von $M$.
- Auf den geraden Spuren $2, 4, \ldots, 2k$ sind die Kopfpositionen auf diesen Bändern mit dem Zeichen $\#$ markiert.

Diese Initialisierung der Spuren ist in Zeit $O(1)$ möglich.

# Simulation $k$-Band-TM durch 1-Band-TM – Illustration

simulierte 2-Band-Turingmaschine $M$

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ··· | B | * | * | * | * | A | r | b | e | i | t | s | b | a | n | d | 1 | B | B | B | ··· |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ··· | B | A | r | b | e | i | t | s | b | a | n | d | 2 | * | * | * | * | B | B | B | ··· |

simulierende 4-Spur-Turingmaschine $M'$ (zu Beginn des Simulationsschrittes)

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ··· | B | * | * | * | * | A | r | b | e | i | t | s | b | a | n | d | 1 | B | B | B | ··· |
| ··· | B | B | B | B | B | B | # | B | B | B | B | B | B | B | B | B | B | B | B | B | ··· |
| ··· | B | A | r | b | e | i | t | s | b | a | n | d | 2 | * | * | * | * | B | B | B | ··· |
| ··· | B | # | B | B | B | B | B | B | B | B | B | B | B | B | B | B | B | B | B | B | ··· |

# Simulation $k$-Band-TM durch 1-Band-TM – Beweis

Jeder Rechenschritt von $M$ wird durch $M'$ wie folgt simuliert.

- Am Anfang stehe der Kopf von $M'$ auf der linkesten Zelle, die $\#$ enthält, und $M'$ kenne den Zustand von $M$.
- Der Kopf von $M'$ läuft nach rechts bis zum rechtesten $\#$, wobei die $k$ Zeichen an den mit $\#$ markierten Spurpositionen im Zustand abgespeichert werden.
- An der Zelle mit dem rechtesten $\#$-Zeichen angekommen, kann $M'$ die Übergangsfunktion von $M$ auswerten und kennt den neuen Zustand von $M$ sowie die erforderlichen Übergänge auf den $k$ Bändern.
- Nun läuft der Kopf von $M'$ zurück, verändert dabei die Bandinschriften an den mit $\#$ markierten Stellen und verschiebt, falls erforderlich, auch die $\#$-Markierungen um eine Position nach links oder rechts.

# Simulation $k$-Band-TM durch 1-Band-TM – Beweis

Laufzeitanalyse:

Wieviele Bandpositionen können zwischen dem linkesten und dem rechtesten $\#$ liegen?

Nach $t$ Schritten können diese Markierungen höchstens $2t$ Positionen auseinanderliegen.

Also ist der Abstand zwischen diesen Zeichen und somit auch die Laufzeit zur Simulation eines Schrittes durch $O(t(n))$ beschränkt.

Insgesamt ergibt das zur Simulation von $t(n)$ Schritten eine Laufzeitschranke von $O(t(n)^2)$. $\square$

# Special versus General Purpose Rechner

- Bisher haben wir für jedes Problem eine eigene TM entworfen, einen special purpose Rechner.
- Real existierende Maschinen sind jedoch programmierbare general purpose Rechner.
- Wir konstruieren jetzt eine programmierbare Variante der TM, die sogenannte universelle TM.

# Ein-/Ausgabeverhalten der universellen TM

- Das Programm der universellen TM $U$ ist die Kodierung einer beliebigen TM $M$.
- Mit $\langle M \rangle$ bezeichnen wir diese Kodierung der TM $M$.
- Als Eingabe erhält $U$ einen String der Form $\langle M \rangle w$ bestehend aus einer TM-Kodierung $\langle M \rangle$ und einem Wort $w$.
- Die universelle TM simuliert das Verhalten der TM $M$ auf der Eingabe $w$.
- Bei inkorrekter Eingabe (d.h., die Eingabe beginnt nicht mit einer TM-Kodierung) gibt $U$ eine Fehlermeldung aus.

# Gödelnummern

Wir entwickeln nun eine eindeutige präfixfreie Kodierung, die einer Turingmaschine $M$ ein Wort $\langle M \rangle$ über dem Alphabet $\{0, 1\}$ zuordnet.

### Definition

Wir nennen die Kodierung $\langle M \rangle$ die Gödelnummer der Turingmaschine $M$.

- *Präfixfrei* bedeutet, dass keine Gödelnummer Präfix (Anfangsteilwort) einer anderen Gödelnummer sein darf.
- Um Präfixfreiheit zu erreichen, vereinbaren wir, dass alle Gödelnummern mit 111 beginnen und auf 111 enden und ansonsten der Teilstring 111 nicht in der Kodierung vorkommt.

# Realisierung von Gödelnummern

Zur präfixfreien Kodierung von TMen gibt es viele Möglichkeiten. Wir stellen jetzt eine mögliche Definition der Gödelnummer vor.

Wir beschränken uns (O.B.d.A.) auf TMen der folgenden Form:

- $Q = \{q_1, \ldots, q_t\}$ für ein $t \geq 2$.
- Der Anfangszustand ist $q_1$ und der Endzustand ist $q_2$.
- $\Gamma = \{0, 1, B\}$.

Zur Beschreibung von TMen dieser Form müssen wir nur die Übergangsfunktion als Binärstring kodieren.

- Wir nummerieren das Alphabet durch, indem wir $X_1 = 0$, $X_2 = 1$ und $X_3 = B$ setzen.
- Auch die möglichen Kopfbewegungen nummerieren wir, indem wir $D_1 = L$, $D_2 = N$ und $D_3 = R$ setzen.

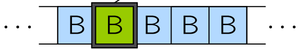
# Realisierung von Gödelnummern

## Kodierung der Übergangsfunktion

- Der Übergang $\delta(q_i, X_j) = (q_k, X_\ell, D_m)$ wird kodiert durch den Binärstring
$$0^i 1 0^j 1 0^k 1 0^\ell 1 0^m \ .$$

- Die Kodierung des $t$-ten Übergangs bezeichnen wir mit $\mathrm{code}(t)$.
- Die Gödelnummer einer TM $M$ mit $s$ Übergängen ist dann
$$\langle M \rangle \ = \ 111\,\mathrm{code}(1)\,11\,\mathrm{code}(2)\,11 \ldots 11\,\mathrm{code}(s)\,111 \ .$$

# Beispielkodierung




$\Sigma = \{0, 1\}$
$\Gamma = \{0, 1, B\}$
$Q = \{q_1, q_2, q_3\}$

Start: $q_1$ Ende: $q_2$ Blank: $B$

| $\delta$ | 0 | 1 | $B$ |
|---|---|---|---|
| $q_1$ | $(q_1, B, R)$ | $(q_3, B, R)$ | $(q_2, B, N)$ |
| $q_3$ | $(q_1, 1, R)$ | $(q_2, 0, R)$ | $(q_1, B, L)$ |

111 0101010001000 11 0100100010001000 11 010001001000100 11
00010101001000 11 000100100101000 11 00010001010010 111

# Implementierung der universellen TM

Als Eingabe erhält die universelle TM $U$ ein Wort der Form $\langle M \rangle w$ für beliebiges $w \in \{0, 1\}^*$.

Wir implementieren $U$ zunächst in Form einer 3-Band-TM:

- Band 1 von $U$ simuliert das Band der TM $M$.
- Band 2 von $U$ enthält die Gödelnummer von $M$.
- Auf Band 3 speichert $U$ den jeweils aktuellen Zustand von $M$.

# Implementierung der universellen TM

*Initialisierung:*

- $U$ überprüft, ob die Eingabe eine korrekte Gödelnummer enthält. Falls nein, Fehlerausgabe.
- $U$ kopiert die Gödelnummer auf Band 2 und schreibt die Kodierung des Anfangszustands auf Band 3.
- $U$ bereitet Band 1 so vor, dass es nur das Wort $w$ enthält. Der Kopf steht auf dem ersten Zeichen von $w$.

Laufzeit? – Die Laufzeit ist $O(1)$, wenn wir die Kodierungslänge von $M$ als Konstante ansehen.

# Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine $M$

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| … | B | ***** | * | * | * | E | i | n | g | a | b | e | * | * | * | * | * | B | B | B | … |

Initialisierung der universellen Maschine $U$

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| … | B | ***** | * | * | * | E | i | n | g | a | b | e | * | * | * | * | * | B | B | B | … |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| … | B | ***** | * | * | < | M | > | * | * | B | B | B | … |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| … | B | **0** | B | B | B | … |

# Implementierung der universellen TM

*Simulation eines Schritts von $M$:*

$U$ sucht zu dem Zeichen an der Kopfposition auf Band 1 und dem Zustand auf Band 3 die Kodierung des entsprechenden Übergangs von $M$ auf Band 2.

Wie in der Übergangsfunktion beschrieben

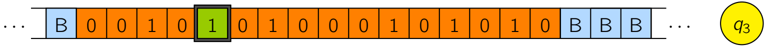
- aktualisiert $U$ die Inschrift auf Band 1,
- bewegt $U$ den Kopf auf Band 1, und
- verändert $U$ den auf Band 3 abgespeicherten Zustand von $M$.

Laufzeit eines Simulationsschrittes: $O(1)$.

Das bedeutet, $U$ simuliert $M$ mit konstantem Zeitverlust!

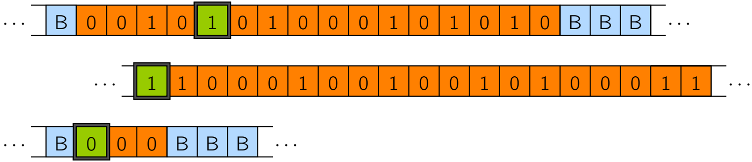
# Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine $M$



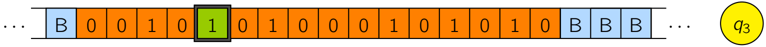

| $\delta$ | 0 | 1 | $B$ |
|---|---|---|---|
| $q_1$ | | | |
| $q_2$ | | | |
| $q_3$ | | $(q_2, 0, R)$ | |

simulierende universelle Maschine $U$



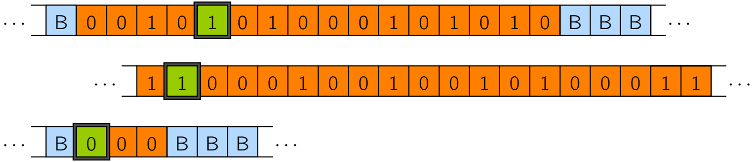
# Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine $M$



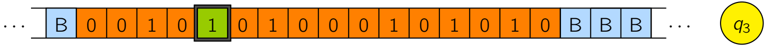

| $\delta$ | 0 | 1 | $B$ |
|---|---|---|---|
| $q_1$ | | | |
| $q_2$ | | | |
| $q_3$ | | $(q_2, 0, R)$ | |

simulierende universelle Maschine $U$



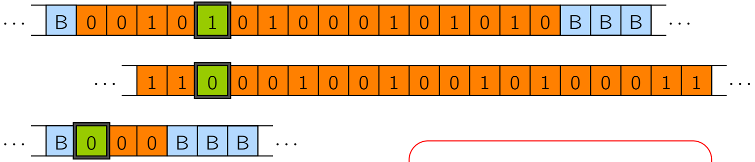
# Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine $M$




| $\delta$ | 0 | 1 | $B$ |
|---|---|---|---|
| $q_1$ | | | |
| $q_2$ | | | |
| $q_3$ | | $(q_2, 0, R)$ | |

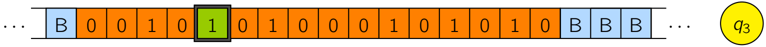
simulierende universelle Maschine $U$




Vergleiche Band 3 mit Band 2

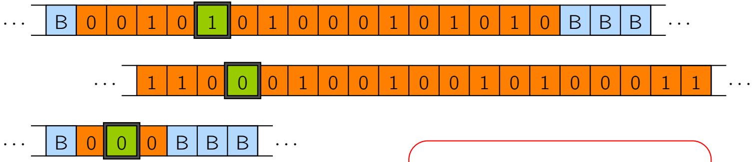
# Simulation durch universelle Maschine – Illustration

## simulierte Turingmaschine *M*




| $\delta$ | 0 | 1 | $B$ |
|---|---|---|---|
| $q_1$ | | | |
| $q_2$ | | | |
| $q_3$ | | $(q_2, 0, R)$ | |

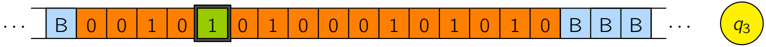
## simulierende universelle Maschine *U*




Vergleiche Band 3 mit Band 2

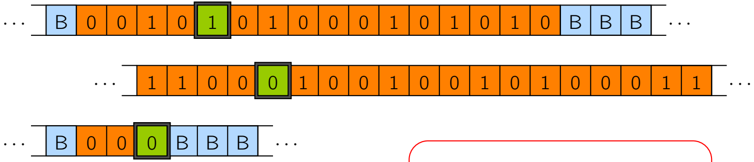
# Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine $M$




| $\delta$ | 0 | 1 | $B$ |
|---|---|---|---|
| $q_1$ | | | |
| $q_2$ | | | |
| $q_3$ | | $(q_2, 0, R)$ | |

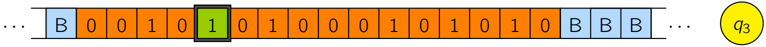
simulierende universelle Maschine $U$




Vergleiche Band 3 mit Band 2

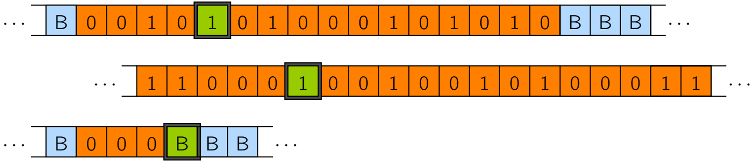
# Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine $M$



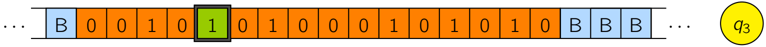

| $\delta$ | 0 | 1 | $B$ |
|---|---|---|---|
| $q_1$ | | | |
| $q_2$ | | | |
| $q_3$ | | $(q_2, 0, R)$ | |

simulierende universelle Maschine $U$



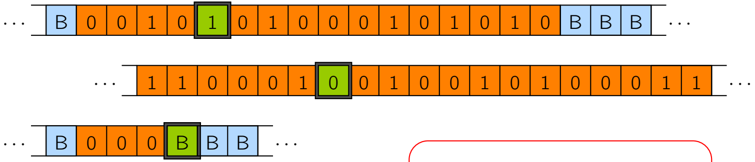
# Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine $M$




| $\delta$ | 0 | 1 | $B$ |
|---|---|---|---|
| $q_1$ | | | |
| $q_2$ | | | |
| $q_3$ | | $(q_2, 0, R)$ | |

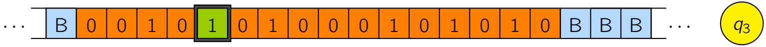
simulierende universelle Maschine $U$




Vergleiche Band 2 mit Band 1

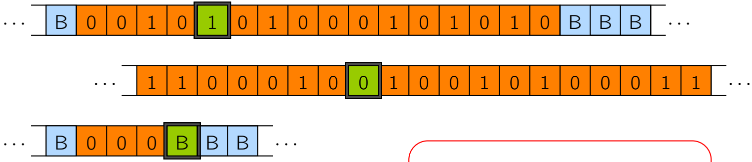
# Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine $M$




| $\delta$ | 0 | 1 | $B$ |
|---|---|---|---|
| $q_1$ | | | |
| $q_2$ | | | |
| $q_3$ | | $(q_2, 0, R)$ | |

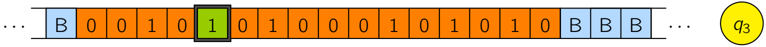
simulierende universelle Maschine $U$




Vergleiche Band 2 mit Band 1

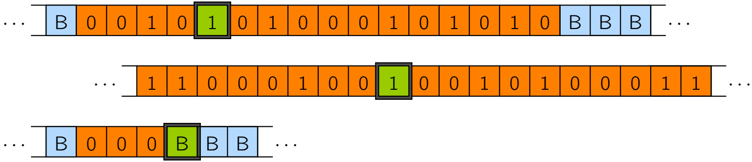
# Simulation durch universelle Maschine – Illustration

## simulierte Turingmaschine $M$



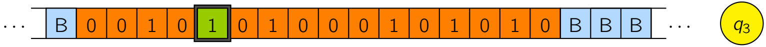

| $\delta$ | 0 | 1 | $B$ |
|---|---|---|---|
| $q_1$ | | | |
| $q_2$ | | | |
| $q_3$ | | $(q_2, 0, R)$ | |

## simulierende universelle Maschine $U$



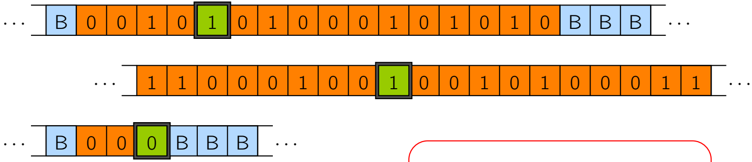
# Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine $M$




| $\delta$ | 0 | 1 | $B$ |
|---|---|---|---|
| $q_1$ | | | |
| $q_2$ | | | |
| $q_3$ | | $(q_2, 0, R)$ | |

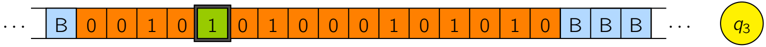
simulierende universelle Maschine $U$




Update von Band 3

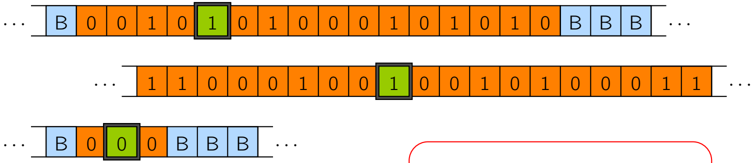
# Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine $M$




| $\delta$ | 0 | 1 | $B$ |
|---|---|---|---|
| $q_1$ | | | |
| $q_2$ | | | |
| $q_3$ | | $(q_2, 0, R)$ | |

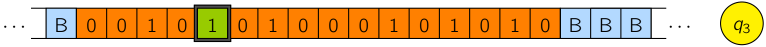
simulierende universelle Maschine $U$




Update von Band 3

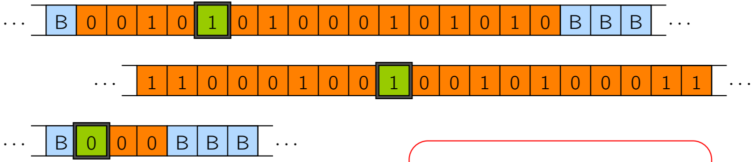
# Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine $M$




| $\delta$ | 0 | 1 | $B$ |
|---|---|---|---|
| $q_1$ | | | |
| $q_2$ | | | |
| $q_3$ | | $(q_2, 0, R)$ | |

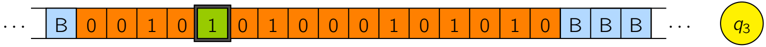
simulierende universelle Maschine $U$




Update von Band 3

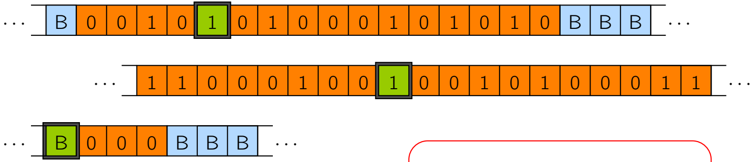
# Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine $M$




| $\delta$ | 0 | 1 | $B$ |
|---|---|---|---|
| $q_1$ | | | |
| $q_2$ | | | |
| $q_3$ | | $(q_2, 0, R)$ | |

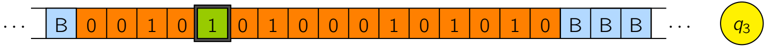
simulierende universelle Maschine $U$




Update von Band 3

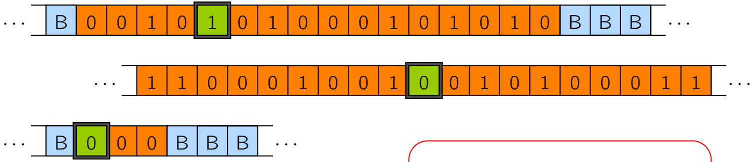
# Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine $M$




| $\delta$ | 0 | 1 | $B$ |
|---|---|---|---|
| $q_1$ | | | |
| $q_2$ | | | |
| $q_3$ | | $(q_2, 0, R)$ | |

simulierende universelle Maschine $U$




Update von Band 3

# Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine $M$

$\cdots$ B 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 1 0 1 0 1 0 B B B $\cdots$ $q_3$

| $\delta$ | 0 | 1 | $B$ |
|---|---|---|---|
| $q_1$ | | | |
| $q_2$ | | | |
| $q_3$ | | $(q_2, 0, R)$ | |

simulierende universelle Maschine $U$

$\cdots$ B 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 1 0 1 0 1 0 B B B $\cdots$

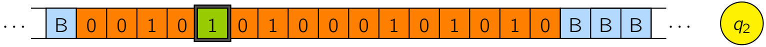
$\cdots$ 1 1 0 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 0 1 1 $\cdots$

$\cdots$ B 0 0 0 B B B $\cdots$

Update von Band 3

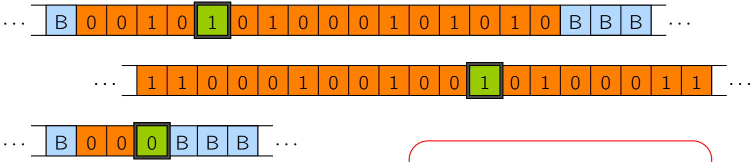
# Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine $M$




| $\delta$ | 0 | 1 | $B$ |
|---|---|---|---|
| $q_1$ | | | |
| $q_2$ | | | |
| $q_3$ | | $(q_2, 0, R)$ | |

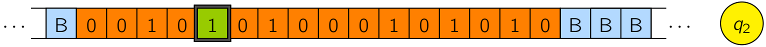
simulierende universelle Maschine $U$




Update von Band 3

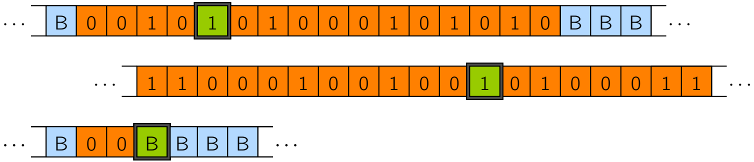
# Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine $M$



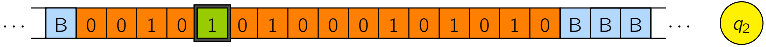

| $\delta$ | 0 | 1 | $B$ |
|---|---|---|---|
| $q_1$ | | | |
| $q_2$ | | | |
| $q_3$ | | $(q_2, 0, R)$ | |

simulierende universelle Maschine $U$



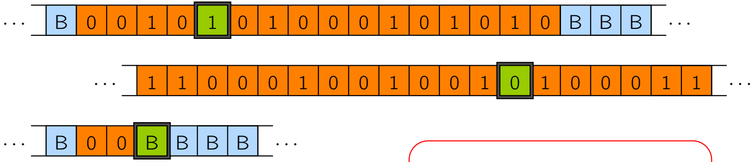
# Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine $M$




| $\delta$ | 0 | 1 | $B$ |
|---|---|---|---|
| $q_1$ | | | |
| $q_2$ | | | |
| $q_3$ | | $(q_2, 0, R)$ | |

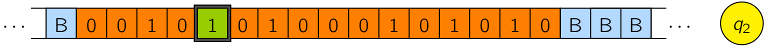
simulierende universelle Maschine $U$




Update Eintrag Band 1

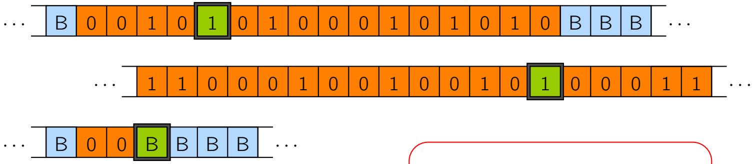
# Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine $M$




| $\delta$ | 0 | 1 | $B$ |
|---|---|---|---|
| $q_1$ | | | |
| $q_2$ | | | |
| $q_3$ | | $(q_2, 0, R)$ | |

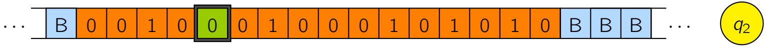
simulierende universelle Maschine $U$




Update Eintrag Band 1

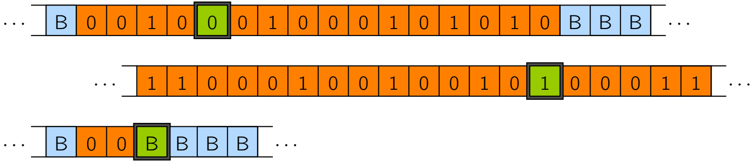
# Simulation durch universelle Maschine – Illustration

## simulierte Turingmaschine $M$



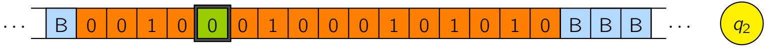

| $\delta$ | 0 | 1 | $B$ |
|---|---|---|---|
| $q_1$ | | | |
| $q_2$ | | | |
| $q_3$ | | $(q_2, 0, R)$ | |

## simulierende universelle Maschine $U$



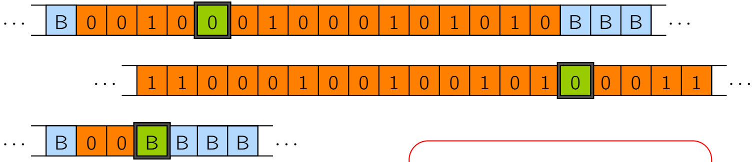
# Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine $M$




| $\delta$ | 0 | 1 | $B$ |
|---|---|---|---|
| $q_1$ | | | |
| $q_2$ | | | |
| $q_3$ | | $(q_2, 0, R)$ | |

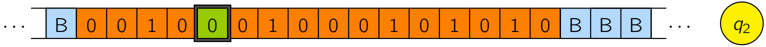
simulierende universelle Maschine $U$




Update Kopfposition Band 1

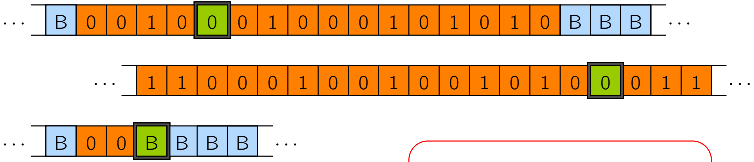
# Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine $M$




| $\delta$ | 0 | 1 | $B$ |
|---|---|---|---|
| $q_1$ | | | |
| $q_2$ | | | |
| $q_3$ | | $(q_2, 0, R)$ | |

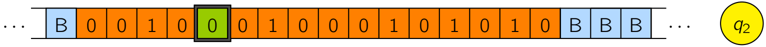
simulierende universelle Maschine $U$




Update Kopfposition Band 1

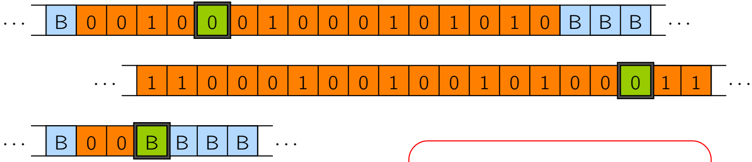
# Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine $M$




| $\delta$ | 0 | 1 | $B$ |
|---|---|---|---|
| $q_1$ | | | |
| $q_2$ | | | |
| $q_3$ | | $(q_2, 0, R)$ | |

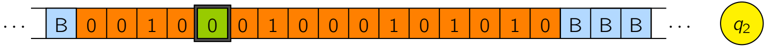
simulierende universelle Maschine $U$




Update Kopfposition Band 1

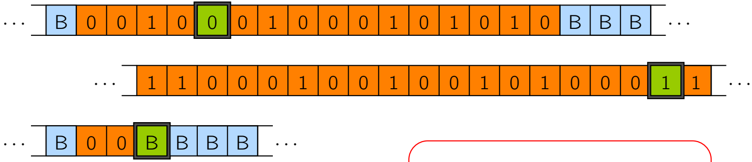
# Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine $M$




| $\delta$ | 0 | 1 | $B$ |
|---|---|---|---|
| $q_1$ | | | |
| $q_2$ | | | |
| $q_3$ | | $(q_2, 0, R)$ | |

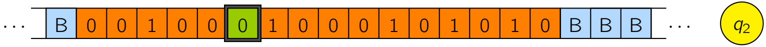
simulierende universelle Maschine $U$




Update Kopfposition Band 1

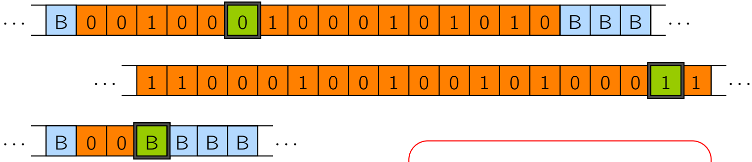
# Simulation durch universelle Maschine – Illustration

simulierte Turingmaschine $M$




| $\delta$ | 0 | 1 | $B$ |
|---|---|---|---|
| $q_1$ | | | |
| $q_2$ | | | |
| $q_3$ | | $(q_2, 0, R)$ | |

simulierende universelle Maschine $U$




Update Kopfposition Band 1

# Implementierung der universellen TM

Können wir dieses Ergebnis auch mit einer (1-Band-)TM erreichen?

Natürlich können wir die beschriebene 3-Band-TM auf der 1-Band TM mit mehreren Spuren simulieren.

Aber bei Verwendung dieser Simulation handeln wir uns einen quadratischen Zeitverlust ein.

Wir erhalten eine universelle 1-Band-TM mit konstantem Zeitverlust, wenn wir ... die Gödelnummer auf Spur 2 und den Zustand auf Spur 3 mit dem Kopf der TM $M$ mitführen.