EXPERIMENTELLE MECHANIK

Kapitel 4
Energie und Impuls

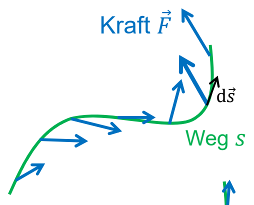
4.1. Mechanische Arbeit

4.1.1. Mechanische Arbeit: Definition

Allgemein:

Wird auf einen Körper eine Kraft $\vec{F}$ ausgeübt
und wird er gleichzeitig entlang der Strecke $\vec{s}$ bewegt,
dann wird am Körper die **Arbeit W** verrichtet:

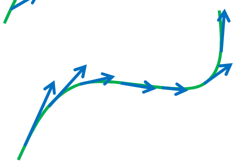
$$\boxed{W = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}}$$



Vereinfacht:

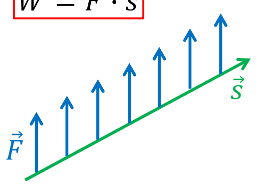
(A) Kraft $\vec{F}$ zeigt überall in Richtung des Weges:

$$\boxed{W = \int F \cdot \mathrm{d}s}$$



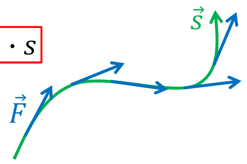
(B) konstante Kraft $\vec{F}$ und gerader Weg $\vec{s}$

$$\boxed{W = \vec{F} \cdot \vec{s}}$$



(C) konstante Kraft $\vec{F}$ in Richtung des Weges $\vec{s}$

$$\boxed{W = F \cdot s}$$



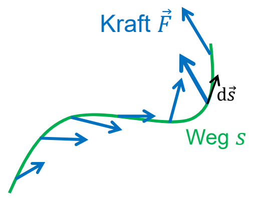
Arbeit = Kraft × Weg

4.1.1. Mechanische Arbeit: Definition

Allgemein:

Wird auf einen Körper eine Kraft $\vec{F}$ ausgeübt und wird er gleichzeitig entlang der Strecke $\vec{s}$ bewegt, dann wird am Körper die **Arbeit *W*** verrichtet.

$$\boxed{W = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}}$$



Dimension der Arbeit: **Kraft x Weg**

SI-Einheit der Arbeit: **1 J = 1 N·m = 1 kg·m²/s²** (**Joule**)

James P. Joule (1818 – 1889)

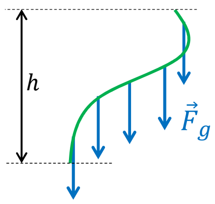
Wirkt auf einen Körper die Kraft F = 1 N und bewegt er sich um s = 1 m in Kraft-Richtung, so wurde an ihm die Arbeit W = 1 J verrichtet.

Beispiel: Ballwurf

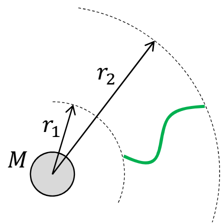
4.1.2. Mechanische Arbeit

Beispiele für mechanische Arbeit:

Arbeit im Schwerefeld: $W_H = m \cdot g \cdot h$



Arbeit im Gravitationsfeld: $W_{\text{grav}} = m \cdot G \cdot M \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$



Arbeit gegen eine Feder: $W_{\text{feder}} = \frac{D \cdot (\Delta L)^2}{2}$

Arbeit beim Beschleunigen: $W_{\mathrm{a}} = \frac{m \cdot ({v_2}^2 - {v_1}^2)}{2}$

4.2.1. Energie: Definition

Definition in der Mechanik:

Die Energie $\boldsymbol{E}$ ist die Fähigkeit, Arbeit zu verrichten.

Dimension der Energie: Masse x Länge² / Zeit²

SI-Einheit der Energie: **$[E]$ = $[W]$ = 1 J = 1 kg·m²/s²** (**Joule**)

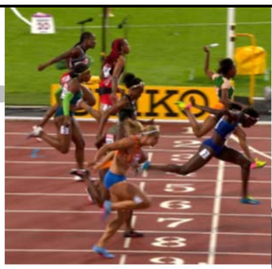
Arbeit und Energie bezeichnen die gleiche Größenart

Ist in einem Körper oder System die Energie E gespeichert,
dann besitzt dieser Körper/dieses System die Fähigkeit,
Arbeit der Größe $W = E$ zu verrichten.

Als **Arbeit** bezeichnet man die Energiemenge, die bei einer Krafteinwirkung auf ein Objekt von einer Energieform in eine andere überführt wird.

Es gibt viele verschiedene Formen von Energie.

4.2.2. Energieformen



Mechanische Energien:

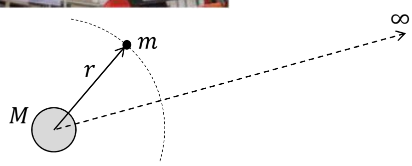
Kinetische Energie: $E_{\mathrm{kin}} = \dfrac{m \cdot v^2}{2}$

Potenzielle Energie (Schwerkraft): $E_{\mathrm{pot}} = m \cdot g \cdot h$

Nullpunkt: Boden

Potenzielle Energie (Gravitation): $E_{\mathrm{pot}} = -\dfrac{G \cdot M \cdot m}{r}$

Nullpunkt: „Unendlich weit“



Potenzielle Energie (Feder): $E_{\mathrm{pot}} = \dfrac{D \cdot (\Delta L)^2}{2}$

Nullpunkt: Ruhestellung

Mechanische Energieformen können verlustfrei umgewandelt werden: $\longrightarrow$ reversible Vorgänge

4.2.2. Energieformen

Thermische Energie:

Energieformen, die mit Temperatur verbunden sind.

Beispiel:

Arbeit aus Reibungskräften → Wärme

Energie zur Erwärmung eines Körpers:

$$\Delta E_{\mathrm{th}} = c \cdot m \cdot \Delta T$$

Masse

Temperaturerhöhung

spez. Wärmekapazität (Bsp. Wasser: $c = 4{,}18$ kJ / (kg · K)

Thermische Energie kann nie komplett in andere Formen umgewandelt werden: ⟶ irreversible Vorgänge

4.2.2. Energieformen

Elektrische Energie

Elektromagnetische Energie

Masse als Energie

Deformationsenergie

Chemische Energie

4.2.3. Energieerhaltung

Energie kann nicht vernichtet werden. Erzeugt werden auch nicht!

Energie kann aber in andere Energieformen umgewandelt werden.

Dazu ist eine **Kraft** notwendig, die **Arbeit** verrichtet.

Wenn Energie in **therm. Energie** verwandelt wird, bekommt man sie **nur zum Teil zurück.**

Beispiel: Hinunterfallen

Höhe: $h(t) = h_0 - \frac{g}{2} \cdot t^2$

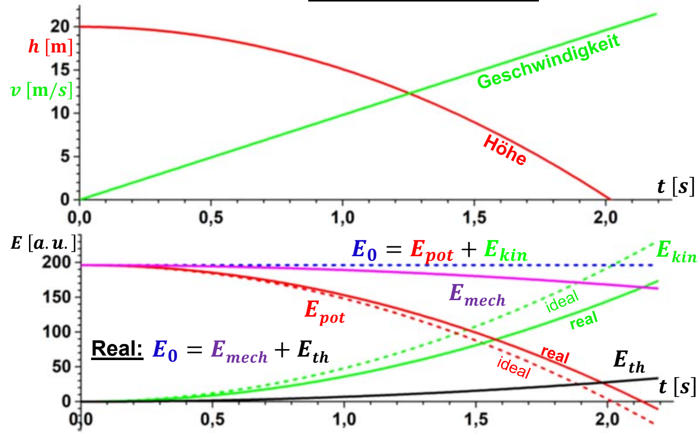
Geschwindigkeit: $v(t) = g \cdot t$

Pot. Energie: $E_{pot}(t) = m \cdot g \cdot h$

Kinet. Energie: $E_{kin}(t) = m \cdot v^2/2$

Real: Abnahme der **mechanischen Energie**

Umwandlung in **thermische Energie**



4.2.3. Energieerhaltung

Beispiel: Federpendel

Auslenkung: $z(t) = z_0 \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{t}{T_0}\right)$

Pot. Energie: $E_{pot,f} = \frac{D \cdot {z_0}^2}{2} \cdot \cos^2\left(2\pi \cdot \frac{t}{T_0}\right)$

Geschwindigk.: $v(t) = \frac{dz}{dt} = -v_0 \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{t}{T_0}\right)$

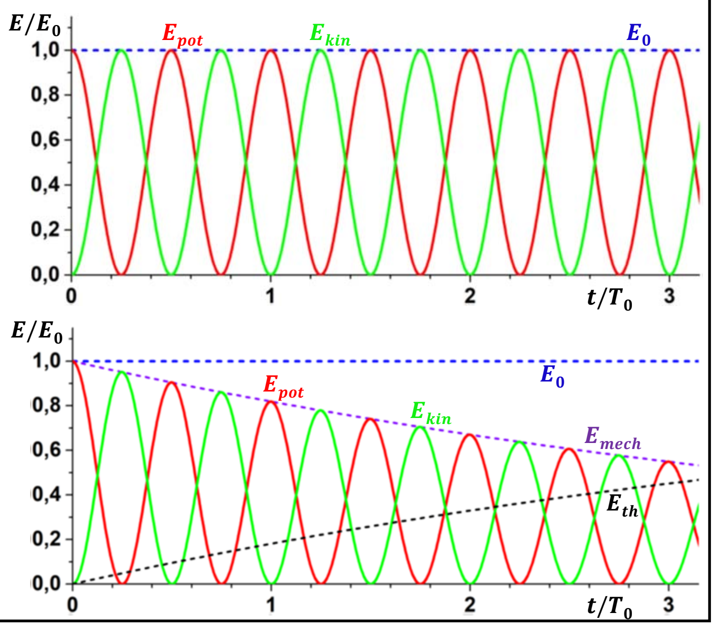
$v_0 = \sqrt{D/m} \cdot z_0$

Kinet. Energie: $E_{kin} = \frac{m \cdot {v_0}^2}{2} \cdot \sin^2\left(2\pi \cdot \frac{t}{T_0}\right)$

Gesamtenergie: $E_0 = E_{pot,f} + E_{kin} = \frac{D \cdot {z_0}^2}{2}$

Real: Abnahme der **mechanischen Energie**

Umwandlung in **thermische Energie**



4.2.4. konservative Kräfte

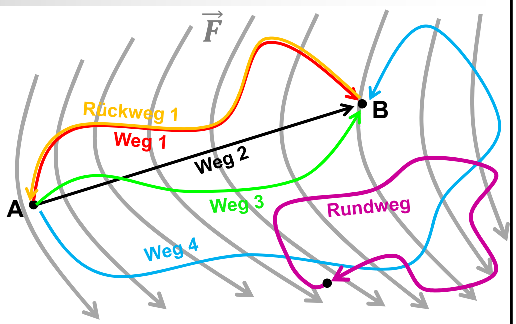
Konservatives Kraftfeld:

Arbeit $W = \int_{Weg} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ für Strecke A → B ist immer gleich, egal, welchen Weg man nimmt.

Hin- und Rückweg: $W_R = -W_H$

Geschlossene Bahn im konservativen Kraftfeld

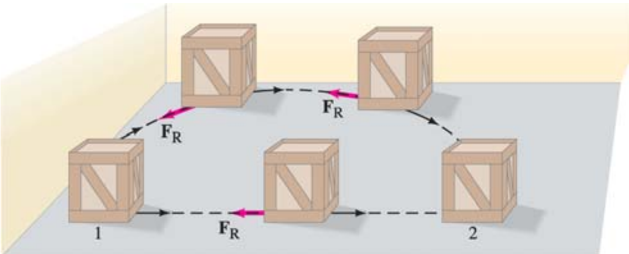
kostet keine Arbeit: $W_R = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$



Nicht-konservatives Kraftfeld:

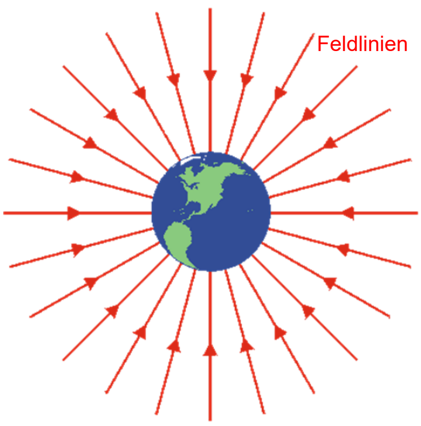
Arbeit W ist wegabhängig

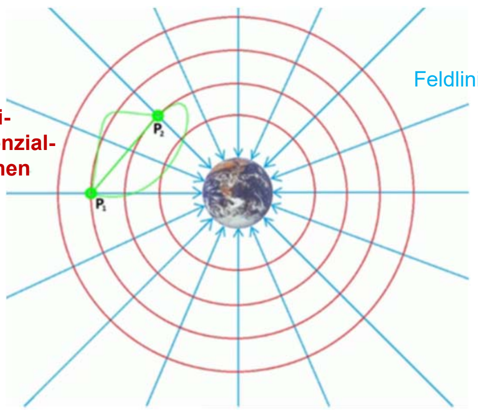
Jede geschlossene Bahn kostet Arbeit



Beispiel: Reibungskräfte

4.2.4. Gravitationsfeld und Gravitationspotenzial





Gravitationsfeld einer schweren Masse:

$$\vec{g}(\vec{r}) = G \cdot \frac{M}{r^2} \cdot (-\vec{e}_r) \qquad \vec{F}_g(\vec{r}, m) = m \cdot \vec{g}(\vec{r})$$

Gravitationspotenzial einer schweren Masse:

$$\varphi(\vec{r}) = -G \cdot \frac{M}{r} \qquad E_{pot}(\vec{r}, m) = m \cdot \varphi(\vec{r})$$

4.3.1. Leistung: Definition

Die **Leistung *P*** gibt an, wie viel Arbeit pro Zeiteinheit verrichtet wird.

Momentane Leistung: $P(t) = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$

Mittlere Leistung: $\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$

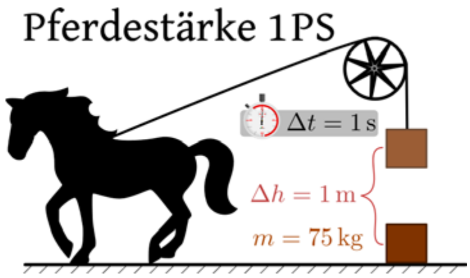
Dimension der Leistung: **Energie / Zeit**

SI-Einheit der Leistung: **1 W = 1 J / s = 1 kg·m²/s³** (**Watt**)

James Watt
(1736 – 1819)

Wird pro Sekunde eine Arbeit von 1 J geleistet, dann beträgt die aufgewandte Leistung 1 J/s = 1 W

veraltet: 1 PS = 735,5 W (Pferdestärke)



4.3.1. Leistung

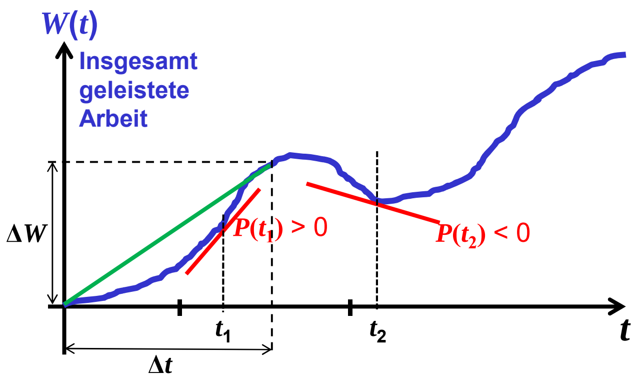
Die **Leistung *P*** gibt an, wie viel Arbeit W pro Zeiteinheit verrichtet wird.

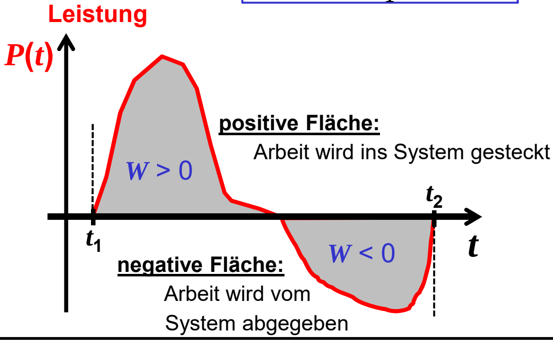
→ Leistung ist momentane Änderung der insgesamt geleisteten Arbeit

Momentane Leistung: $P(t) = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$

Mittlere Leistung: $\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$

$W_{ges} = \int_{t_1}^{t_2} P(t)\,\mathrm{d}t$





4.3.2. Leistung: Beispiele

(1) Auto: Beschleunigung 0 → 100 km/h in 10 s

Gesamte Arbeit: $W = E_{kin} = \frac{m \cdot {v_{end}}^2}{2}$ (ohne Luftwid.)

Durchschnittliche Leistung:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{m \cdot {v_{end}}^2}{2\,t} = \frac{800 \cdot (27{,}8)^2}{2 \cdot 10} = 31\ kW$$

(2) Leistung beim Treppensteigen in der ULB:

Erdgeschoß → dritter Stock in 40 Sekunden

Gesamte Arbeit: $W = E_{pot} = m \cdot g \cdot h$

Durchschnittliche Leistung:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{m\,g\,h}{t} = \frac{80 \cdot 9{,}81 \cdot 15}{40} = 300\ \mathrm{W}$$

Typische Leistungen

Mensch in Ruhe	80 W
Hobbysportler (Ausdauer)	300 W
Staubsauger, Fön	1000 W
Auto	40.000 W
großes Kohlekraftwerk	500.000.000 W
Sonne (Gesamtleistung)	$4 \cdot 10^{26}$ W

Mensch mit Schreibtischtätigkeit: 100 W

Energiebedarf für einen Tag:
$E \approx$ 100 W · 3600 s · 24 h = 8,64 MJ

Energieaufnahme mit der Nahrung

Angabe des physiologischen Brennwerts in kJ oder kcal (1 cal = 4,19 J)

4.4.1. Impuls: Definition

Motivation:

Zur Beschreibung schlagartiger Bewegungsänderungen (Stöße etc.) brauchen wir eine weitere Bewegungsgröße.

Definition:

$\boxed{\vec{p} = m \cdot \vec{v}}$ ist der **kinetische Impuls** eines Körpers mit Masse m und Geschwindigkeit $\vec{v}$

Dimension des Impulses: **Masse x Länge/Zeit**

SI-Einheit des Impulses: **1 kg·m/s**

Der Impuls ist ein Vektor (wie die Geschwindigkeit), hat also Betrag und Richtung.

Der Impuls bedeutet etwa „Wucht“, „Schwung“ oder „Durchschlagskraft“.

Impuls vs. kinetische Energie

Zwei Körper mit gleicher kin. Energie:

$$\frac{M \cdot v^2}{2} = \frac{m \cdot V^2}{2} \qquad M > m, \qquad v < V$$

Körper mit größerer Masse hat größeren Impuls

$$M \cdot v \; > \; m \cdot V$$

4.4.1. Impulsänderung

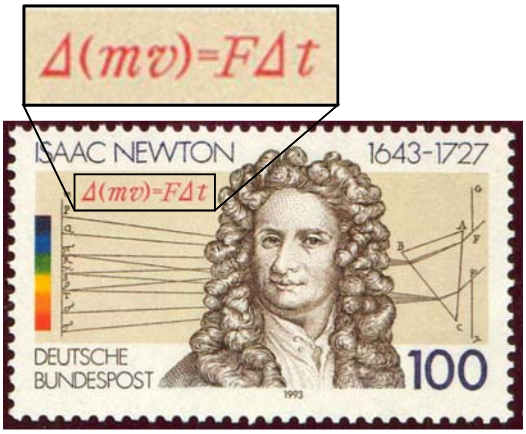
Zeitliche Impulsänderung:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m \cdot \vec{a}$$

Newtonsche Bewegungsgleichung

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m \cdot \vec{v})}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{ges}}$$

„Impulsänderung = Kraft“



Schlussfolgerungen:

- Der Impuls eines Körpers kann sich nur ändern, wenn eine Kraft F auf ihn wirkt.
- Eine Kraft gibt die Änderung des Impulses pro Zeiteinheit an.
- Wirkt auf einen Körper eine Kraft von 1N, dann ändert sich der Impuls des Körpers pro Sekunde um 1 kg·m/s.

4.4.1. Impulserhaltung

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_1}$$

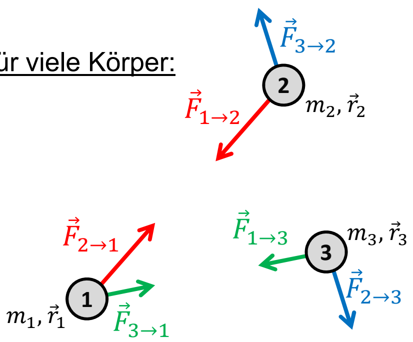
Der Impuls eines Körpers kann sich nur ändern, wenn eine Kraft F_1 auf ihn wirkt.

→ Auf irgendeinen anderen Körper wirkt „*reactio*“ $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$

→ Impulsänderung $\mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t = \vec{F}$ der beiden Körper ist genau entgegengesetzt

Wenn ein Körper Impuls dazubekommt, verliert irgendein anderer genau gleich viel!

Für viele Körper:



Körper 1: $\frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{2\to1} + \vec{F}_{3\to1}$

Körper 2: $\frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{1\to2} + \vec{F}_{3\to2}$

Körper 3: $\frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{1\to3} + \vec{F}_{2\to3}$

Summe:

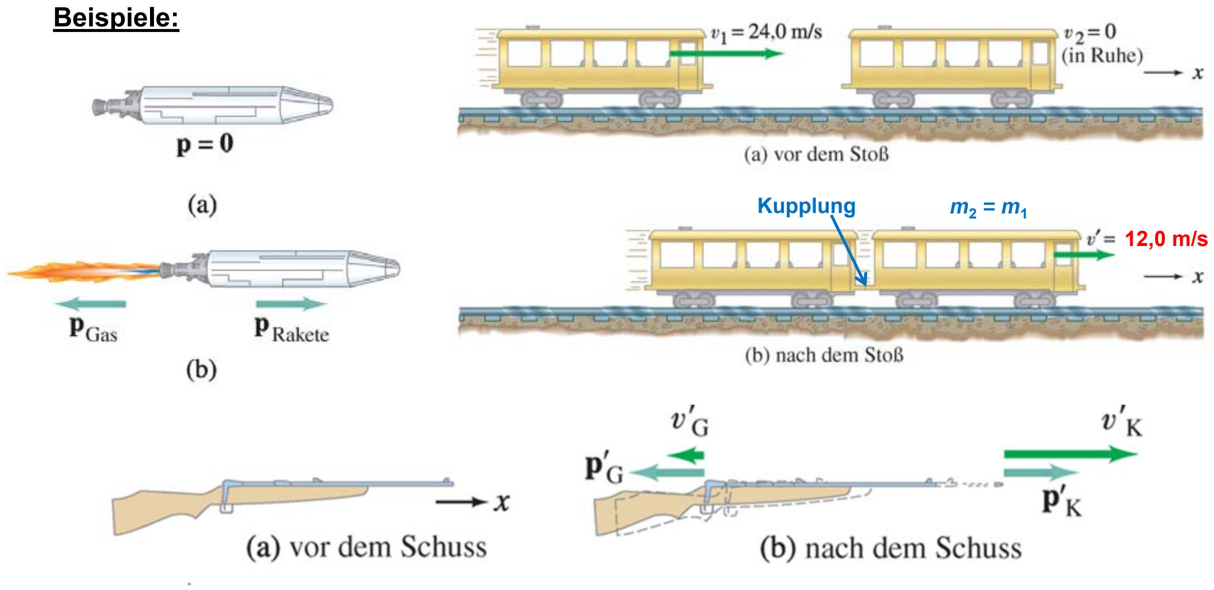
$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{ges}}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\vec{p}_{ges} = \mathrm{const}$$

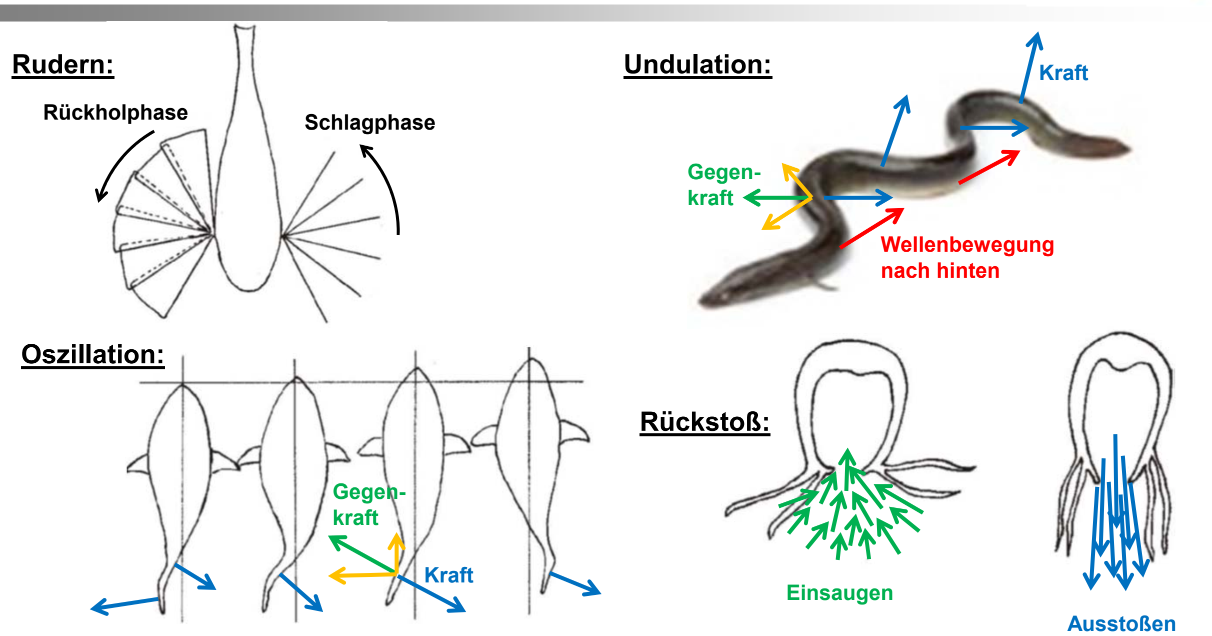
Der **Gesamtimpuls** $\vec{p}_{ges}$ eines abgeschlossenen Systems ist immer konstant („erhalten“).

4.4.1. Impulserhaltung

Beispiele:

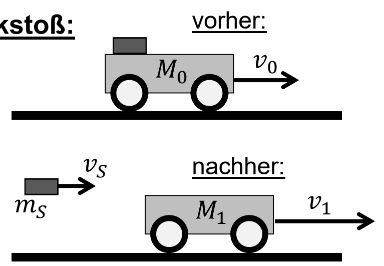


4.4.2. Rückstoß: Schwimmen



4.4.2. Rückstoß: Rakete

Rückstoß:



$$p_0 = M_0 \cdot v_0$$

$$p_1 = M_1 \cdot v_1 + m_S \cdot v_S$$

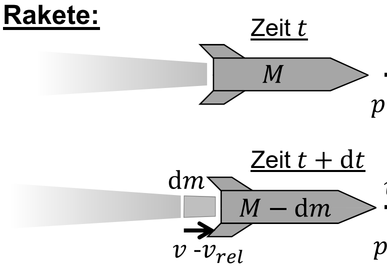
$$M_1 = M_0 - m_S$$

$$v_S = v_1 - v_W$$

Impulserhaltung:

$$\Rightarrow \quad v_1 = v_0 + v_W \cdot \frac{m_S}{M_0}$$

Rakete:



$$p(t) = M(t) \cdot v(t)$$

$$p(t + \mathrm{d}t) = (M(t) - \mathrm{d}m) \cdot (v + \mathrm{d}v)$$

$$\Rightarrow \quad a(t) = \frac{v_{rel}}{M(t)} \cdot \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

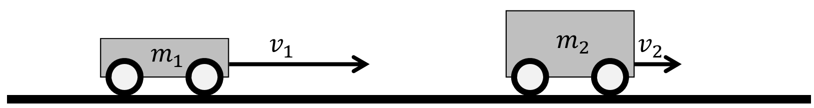
Erste Raketengleichung

Zweite Raketengleichung:

$$v_1 = v_0 + v_{rel} \cdot \ln\left(\frac{M_0}{M_1}\right)$$

4.5.1. Linearer elastischer Stoß

Vorher:



Impuls: $p_1 = m_1 \cdot v_1$ $\quad p_2 = m_2 \cdot v_2$

Energie: $E_{kin,1} = \dfrac{m_1 \cdot {v_1}^2}{2}$ $\quad E_{kin,2} = \dfrac{m_2 \cdot {v_2}^2}{2}$

Nachher:

$p_1' = m_1 \cdot v_1'$ $\quad E_{kin,1}' = \dfrac{m_1 \cdot (v_1')^2}{2}$ $\quad p_2' = m_2 \cdot v_2'$ $\quad E_{kin,2}' = \dfrac{m_2 \cdot (v_2')^2}{2}$

Impuls- und Energieerhaltung:

Immer: $p_1 + p_2 = p_1' + p_2'$

Elastisch: $E_{kin,1} + E_{kin,2} = E_{kin,1}' + E_{kin,2}'$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} v_1' &= \frac{2\, m_2 \cdot v_2 + m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_1}{m_1 + m_2} \\ v_2' &= \frac{2\, m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 - m_1 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \end{aligned}}$$

5.3. Linearer elastischer Stoß

Sonderfall 1: gleiche Massen $m_1 = m_2 = m$

$v_1{}' = v_2$ und $v_2{}' = v_1$

Die beiden Körper tauschen ihre Geschwindigkeiten, Impulse und Energien.

$$v_1{}' = \frac{-2\, m_2 \cdot v + m_1 \cdot v - m_2 \cdot v}{m_1 + m_2}$$

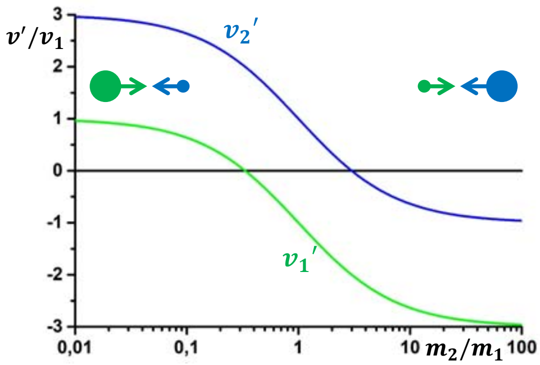
$$v_2{}' = \frac{2\, m_1 \cdot v - m_2 \cdot v + m_1 \cdot v}{m_1 + m_2}$$

Sonderfall 2: gleiche Geschwindigkeit

$v_1 = v, \quad v_2 = -v$

$$v_1{}' = v_1 \cdot \frac{m_1 - 3\, m_2}{m_1 + m_2} \qquad v_2{}' = v_1 \cdot \frac{3\, m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$

Die Geschwindigkeitsdifferenz
der beiden Körper ist immer $v_2{}' - v_1{}' = 2v$



5.3. Linearer elastischer Stoß

Sonderfall 3: Ein Körper in Ruhe: $v_2 = 0$

$$v_1{}' = v_1 \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \qquad v_2{}' = v_1 \cdot \frac{2\, m_1}{m_1 + m_2}$$

$$v_1{}' = \frac{2\, m_2 \cdot 0 + m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_1}{m_1 + m_2}$$

$$v_2{}' = \frac{2\, m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot 0 - m_1 \cdot 0}{m_1 + m_2}$$

Die Geschwindigkeitsdifferenz
der beiden Körper ist immer $v_2{}' - v_1{}' = v_1$

Sonderfall 4: Eine Masse viel größer: $m_2 \gg m_1$

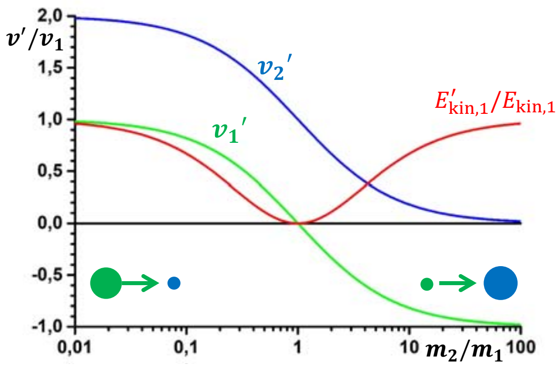
Näherung $m_1 + m_2 \approx m_2$

$v_1{}' = 2 \cdot v_2 - v_1 \qquad v_2{}' = v_2$

Wenn außerdem $v_2 = 0$: $\quad v_1{}' = -v_1 \quad v_2{}' = 0$

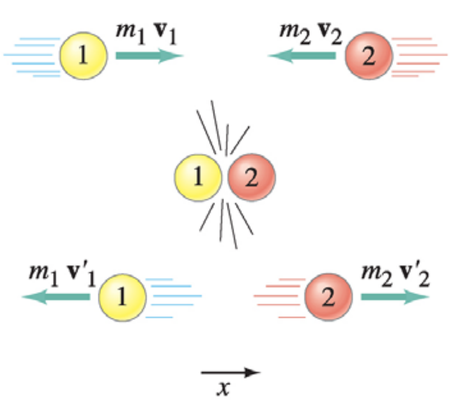
Impulsänderung: $\Delta p_1 = -2\, m_1 \cdot v_1$

Energieänderung: $\Delta E_{\text{kin},1} = 0$

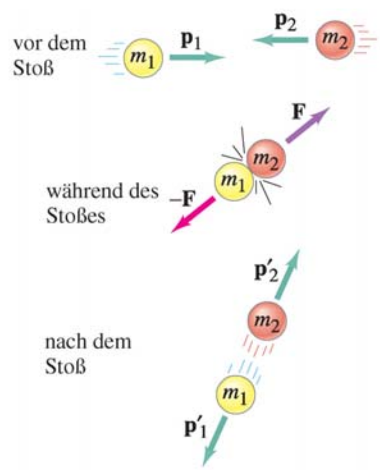


4.5.1. Schiefer elastischer Stoß

Bisher: zentraler Stoß



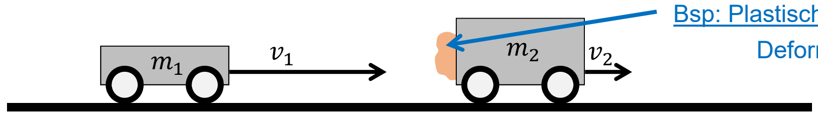
Allgemeiner Stoß



4.5.2. Inelastischer Stoß

Inelastischer Stoß: Kinetische Energie wird zum Teil in andere Formen umgewandelt

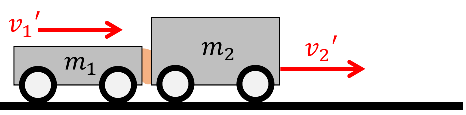
Vorher:



Bsp: Plastisch deformierbarer Körper:
Deformationsarbeit → Wärme

$p_1 = m_1 \cdot v_1 \quad E_{kin,1} = \frac{m_1 \cdot {v_1}^2}{2} \qquad p_2 = m_2 \cdot v_2 \quad E_{kin,2} = \frac{m_2 \cdot {v_2}^2}{2}$

Nachher: Beispiel: Feste Kupplung
$v_1' = v_2'$



$p_1' = m_1 \cdot v_1' \quad E_{kin,1}' = \frac{m_1 \cdot (v_1')^2}{2} \qquad p_2' = m_2 \cdot v_2' \quad E_{kin,2}' = \frac{m_2 \cdot (v_2')^2}{2}$

Impulserhaltung:

Immer: $p_1 + p_2 = p_1' + p_2'$

Inelastisch: $E_{kin,1} + E_{kin,2} = E_{kin,1}' + E_{kin,2}' + \Delta E$

Der „Energieverlust" ΔE
ist manchmal bekannt (bekannte Prozesse)
meistens aber unbekannt (therm. Energie)