EXPERIMENTELLE MECHANIK

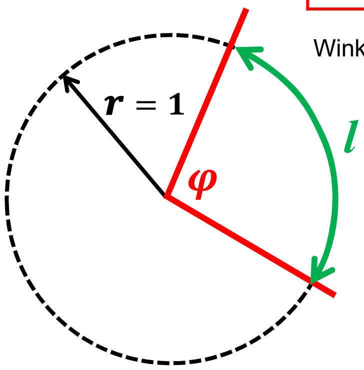
Kapitel 5
Drehbewegungen

5.1. Rotationsdynamik

5.1.1 Die Beschreibung von Drehbewegungen

Der Winkel φ wird beschrieben
durch die Länge l des zugehörigen Kreisbogens
auf einem Kreis mit Radius $r = 1$:

Bogenmaß: Definition
$$\boxed{\varphi = \frac{l}{r} = \frac{\text{Bogenlänge}}{\text{Radius}}}$$



Winkel sind dimensionslos !

Winkel zum Rechnen: Häufig in der Einheit „Radiant“ (Abkürzung „rad“)
Gemessene Winkel: Meist in Grad (auch ° oder engl. deg)
Winkel ohne Einheit gelten als in rad angegeben.

Umrechnung

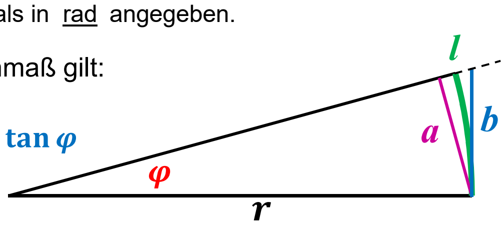
360°	=	2π rad	=	6,283 rad
57,3°	=	1 rad	=	1,0 rad
30°	=	$\pi/6$ rad	=	0,524 rad
1°	=	1/57 rad	=	17,5 mrad

1°	=	60‘	(Bogenminuten; arcmin)
1‘	=	60“	(Bogensekunden; arcsec)

Kleine Winkel: Im Bogenmaß gilt:

$$\varphi = \frac{l}{r} \approx \frac{a}{r} = \sin\varphi \approx \frac{b}{r} = \tan\varphi$$

Einheiten: mrad, µrad



5.1.1 Die Beschreibung von Drehbewegungen

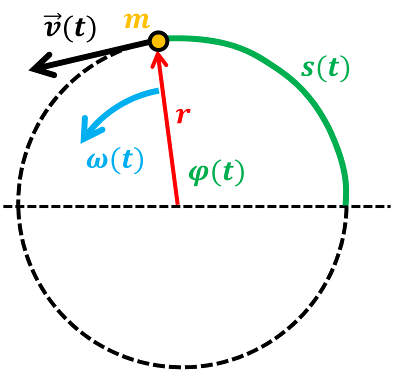
Positionsbeschreibung

mittels Winkelposition: $\varphi(t) = \dfrac{s(t)}{r}$

Änderung der Winkelposition:

$$\omega(t) = \frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}$$

ω heißt **Winkelgeschwindigkeit** des Körpers



Die **Winkelgeschwindigkeit** gibt die Änderung der Winkelposition eines Objektes pro Zeiteinheit an.

Dimension der Winkelgeschwindigkeit: **Winkel / Zeit**

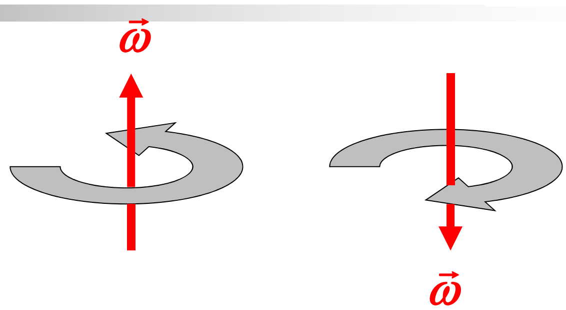
SI-Einheit der Winkelgeschwindigkeit: **rad / s**

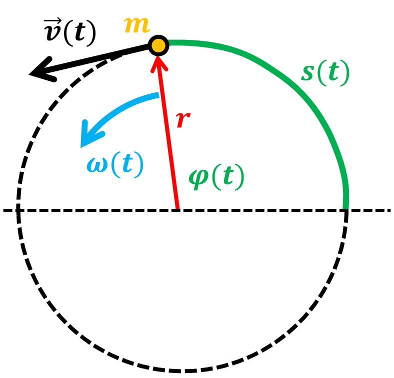
Bahngeschwindigkeit:

$$v(t) = \omega(t) \cdot r = \frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t} \cdot r = \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}$$

5.1.1 Die Beschreibung von Drehbewegungen

Vektorbeschreibung: $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{e}_\omega$

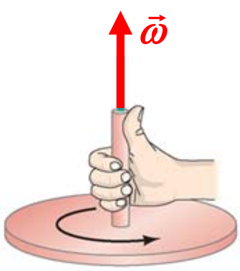


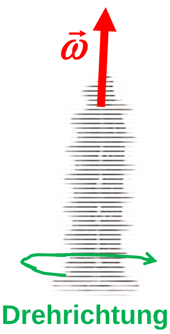


Richtung:

„Rechte-Hand-Regel“

„Rechtsschraubenregel“





5.1.1 Die Beschreibung von Drehbewegungen

Eine immer gleiche Rotation wird oft mit der Umlauffrequenz beschrieben (z.B. Umdrehungen/Minute)

Wenn ein Durchlauf („eine Runde") die Zeit

T (Periodendauer)

lang dauert, dann finden pro Zeiteinheit

$$\nu = \frac{1}{T} \qquad \text{(Frequenz)}$$

solcher Durchläufe statt.

Heinrich R. Hertz (1857 – 1894)

Dimension der Frequenz: **1 / Zeit**

SI-Einheit der Frequenz: 1 Hz = 1/s („Hertz")

Ein periodischer Vorgang mit ν = 100 Hz läuft 100 mal pro Sekunde ab und dauert jeweils T = 0,01 s.

Die Frequenz wird allgemein für periodische Vorgänge verwendet (Pendelschwingung, Wellen, Herzschlag, ...)

5.1.1 Die Beschreibung von Drehbewegungen

Änderung der Winkelgeschwindigkeit:

$$\alpha(t) = \frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi(t)}{\mathrm{d}t^2} \qquad \alpha = \dot{\omega} = \ddot{\alpha}$$

α heißt **Winkelbeschleunigung** des Körpers.

Die Winkelbeschleunigung gibt die Änderung der Winkelgeschwindigkeit pro Zeiteinheit an.

Dimension der Winkelbeschleunigung: **Winkel / Zeit²**

SI-Einheit der Winkelbeschleunigung: **rad / s²**

Bahnbeschleunigung:

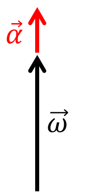
$$a(t) = \alpha(t) \cdot r = \frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} \cdot r = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$$

Vektordarstellung der Winkelbeschleunigung:

$$\vec{\alpha}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}\,(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{\omega}}$$

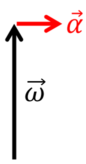
$\vec{\alpha} \parallel \vec{\omega}$:

Nur Betrag der Winkelgeschwindigkeit ändert sich, nicht Richtung der Drehachse



$\vec{\alpha} \perp \vec{\omega}$:

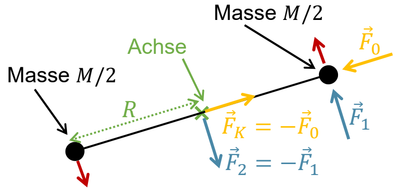
Nur Richtung der Drehachse ändert sich, nicht Betrag der Winkelgeschwindigkeit



5.1.2 Rotationsbewegung

<u>Beispiel:</u>

Testkörper



Kraft und Gegenkraft entlang einer Linie:
→ Kompensation, keine Bewegung

Kraft und Gegenkraft nicht entlang einer Linie:
→ Kompensation, keine lineare Bewegung des Körpers

Aber: „Kräftepaar" führt zu Drehung:

Beschleunigung: $a = F_1/M$

Winkelbeschleunigung: $\alpha = \frac{a}{R} = \frac{F_1}{M \cdot R}$

<u>Bewegungsgleichung der Rotation</u>: $\boxed{I \cdot \alpha = D}$

I … Trägheitsmoment hier: $I = M \cdot R^2$

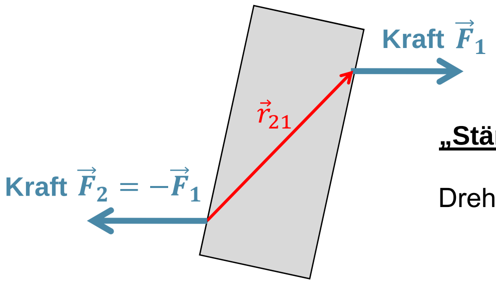
D … Drehmoment hier: $\mathrm{D} = R \cdot F_1$

<u>Frage:</u> Wie beschreibt man allgemein das „in Drehung setzen":
Beliebige Körper, beliebige Geometrie

5.1.2 Das Drehmoment *D*

<u>Antreiben einer Drehbewegung:</u>

(1) Kräftepaar an freiem Körper:



Zwei gleiche Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$

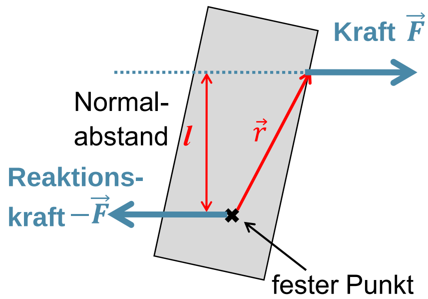
Verbindung der Angriffspunkte $\vec{r}_{21}$

„Stärke des Andrehens":

Drehmoment $\vec{D} = \vec{r}_{21} \times \vec{F}_1$

$|\vec{D}| = l \cdot |\vec{F}|$

(2) Körper mit fester Achse, nicht-zentrische Kraft



Es ist egal, wo am Körper das Kräftepaar angreift!

<u>Beispiele:</u> Schraubendreher, Kreisel, …

5.1.2 Das Drehmoment *D*

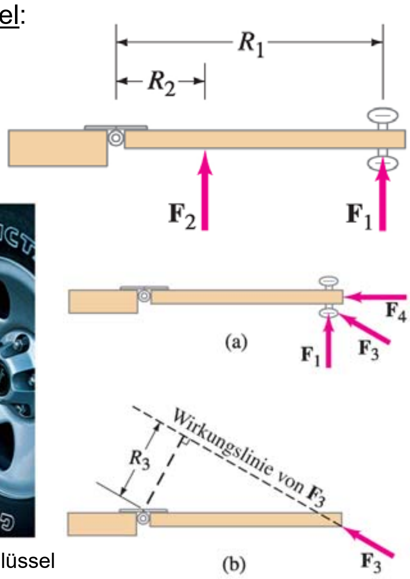
Drehmoment $\vec{D} = \vec{r}_{21} \times \vec{F}_1$

Dimension: Weg x Kraft

SI-Einheit: $[\vec{D}]$ = N·m = kg·m²/s²

Achtung: Energie hat auch Dimension Kraft x Weg, ist aber ganz andere Größenart!

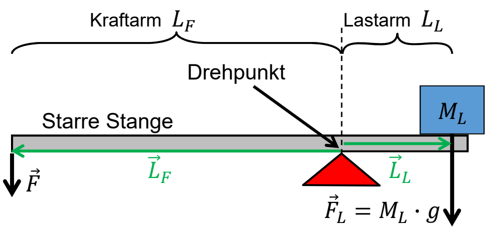
Beispiel:



Beispiele: Hebelzange Drehmomentschlüssel

5.1.2 Das Hebelgesetz

Zweiseitiger Hebel



Drehmoment: $\vec{D}_{ges} = \vec{L}_L \times \vec{F}_L + \vec{L}_F \times \vec{F}$

Gleichgewicht: $\vec{D}_{ges} = 0$

Mit Normalkräften: $F \cdot L_F = F_L \cdot L_L$

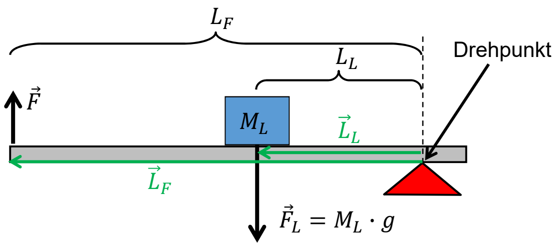
„Kraft x Kraftarm = Last x Lastarm"

Allgemein: $\vec{L}_L \times \vec{F}_L + \vec{L}_F \times \vec{F} = 0$

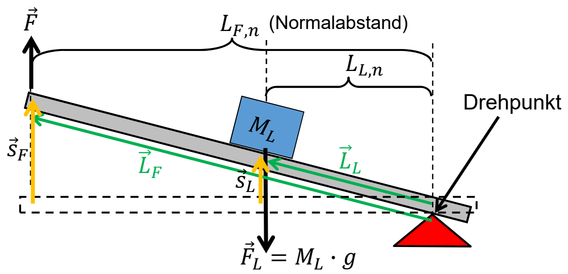
Für Bewegung: **kleine Kraft** braucht großen Weg

große Kraft macht kleinen Weg

Einseitiger Hebel



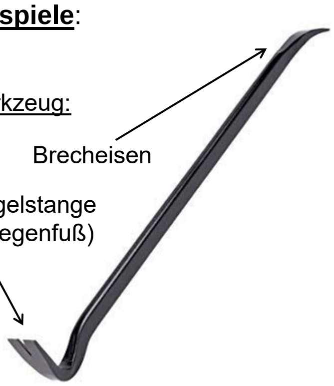
Schräger Hebel



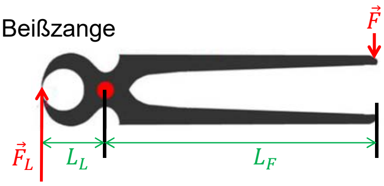
5.1.2 Das Hebelgesetz

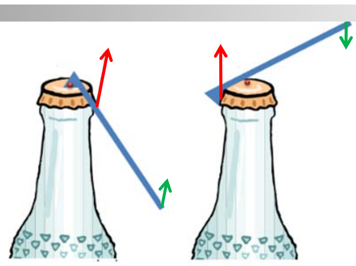
Beispiele:

Werkzeug:

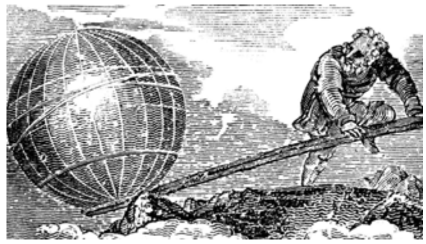


Beißzange





einseitig zweiseitig
Flaschenöffner



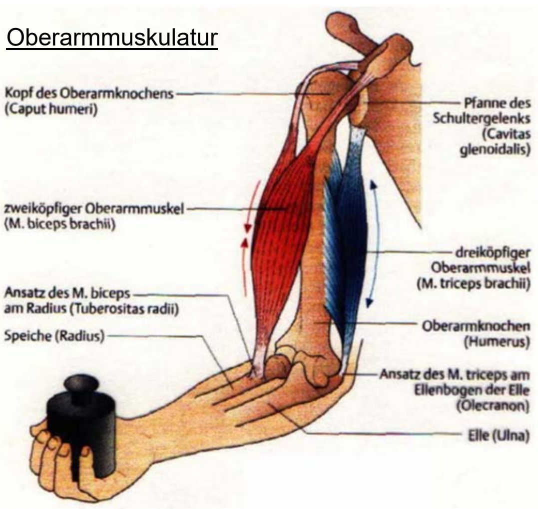
Archimedes: „Gebt mir einen festen Punkt, und ich hebe die Welt aus den Angeln."

Hebelgesetz suboptimal verwendet

5.1.2 Das Hebelgesetz

Bewegungsapparat:

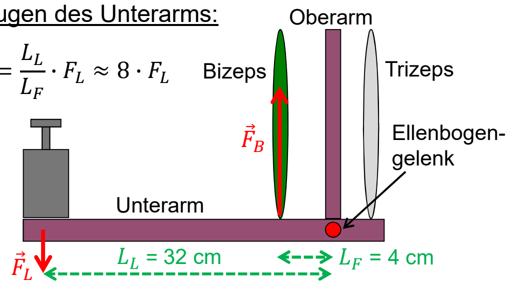
Oberarmmuskulatur



Einfaches Modell:

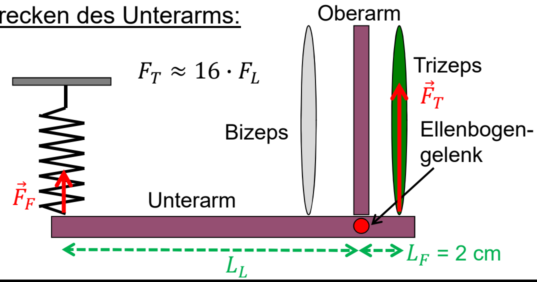
Beugen des Unterarms:

$$F_B = \frac{L_L}{L_F} \cdot F_L \approx 8 \cdot F_L$$



Strecken des Unterarms:

$$F_T \approx 16 \cdot F_L$$



5.1.2 Das Trägheitsmoment *I*

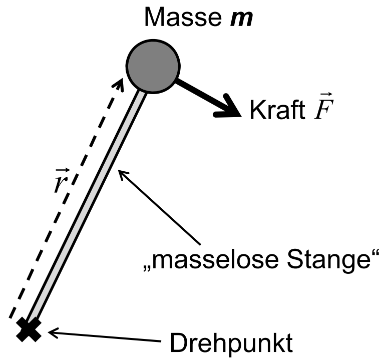
Wie schwer lässt sich ein exzentrischer Massenpunkt in Drehung versetzen?

Die „Trägheit“ skaliert mit

$I = m \cdot r^2$ (Trägheitsmoment)

Für einen ausgedehnten Körper:
Viele Massenelemente summieren

$$I = \int r^2 \cdot \mathrm{d}m = \rho \cdot \int r^2 \cdot \mathrm{d}V$$



Dimension: Masse x Weg²

SI-Einheit: $[I] =$ kg·m²

Das Trägheitsmoment ist keine Eigenschaft eines Körpers, sondern bezieht sich immer auf eine bestimmte Drehachse!

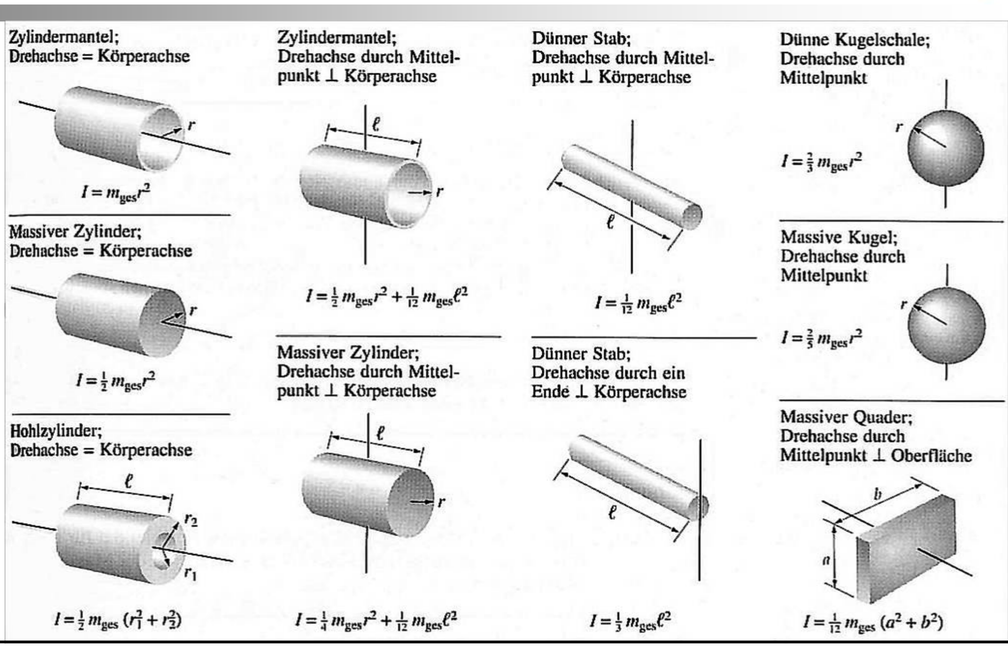
Das Trägheitsmoment hat bezüglich jeder Drehachse einen anderen Wert.

5.1.2 Das Trägheitsmoment *I*

Trägheitsmoment

$I = \int r^2 \cdot \mathrm{d}m =$

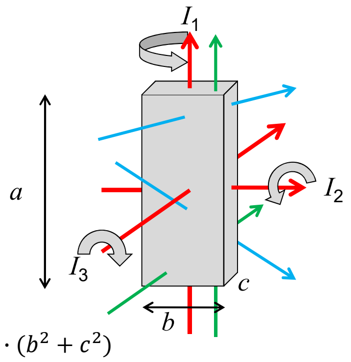
$= \rho \cdot \int r^2 \cdot \mathrm{d}V$



Trägheitsmomente für verschiedene regelmäßige Körper

5.1.2 Das Trägheitsmoment *I*

Jeder Körper (auch asymmetrische) hat 3 „ausgezeichnete Rotationsachsen“:
Hauptträgheitsachsen



$$I_1 = \frac{1}{12} \cdot M \cdot (b^2 + c^2)$$

$$I_2 = \frac{1}{12} \cdot M \cdot (a^2 + c^2)$$

$$I_3 = \frac{1}{12} \cdot M \cdot (a^2 + b^2)$$

Hier:
$I_1 < I_2 < I_3$

- Wenn man den Körper frei rotieren lässt (egal wie!), rotiert er nach einiger Zeit um eine dieser Achsen.
- Die drei Achsen stehen aufeinander normal.
- Das Trägheitsmoment ist im Allgemeinen um jede Hauptträgheitsachse anders.
- Für die Rotation um eine dieser Achsen kann das Trägheitsmoment durch einen Skalar angegeben werden.

Trägheitsmoment für Rotation um eine dazu parallele Achse: Berechnung mit Satz von Steiner.

Bei Rotation um andere Achsen ist der Sachverhalt oft sehr viel komplizierter (Angabe von ***I*** als Tensor 2. Stufe...)

5.1.2 Das Trägheitsmoment *I*

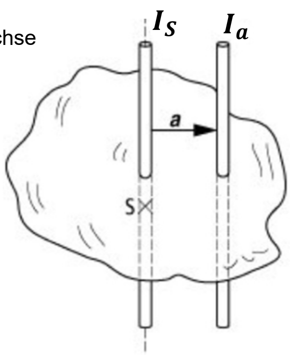
Der Satz von Steiner

$$\boxed{\boldsymbol{I_a = I_S + M \cdot a^2}}$$

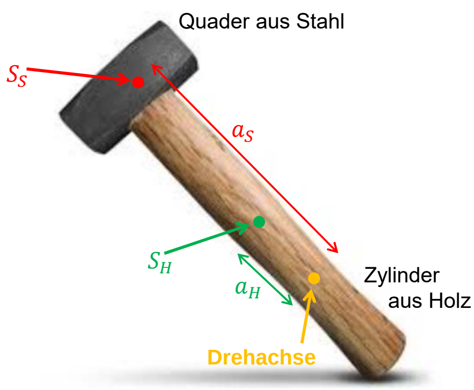
Abstand der Achsen

Trägheitsmoment um die parallele Schwerpunkt-Achse

Gesamtmasse



Beispiel: Trägheitsmoment eines Hammers

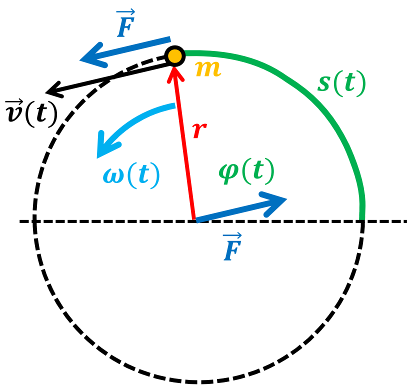


$$I_{Hammer} = I_{H,S} + M_H \cdot a_H{}^2 + I_{S,S} + M_S \cdot a_S{}^2$$

Griff (Holz) Kopf (Stahl)

5.1.2 Dynamik bei Drehbewegungen

Die Bewegungsgleichung der Rotation



Kraft erzeugt Beschleunigung:

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Für Drehung: <u>Kräftepaar</u> nötig!
Zweite Kraft: gleich groß, entgegengerichtet

Mit $v = \omega \cdot r$ und $r = \text{const}$:

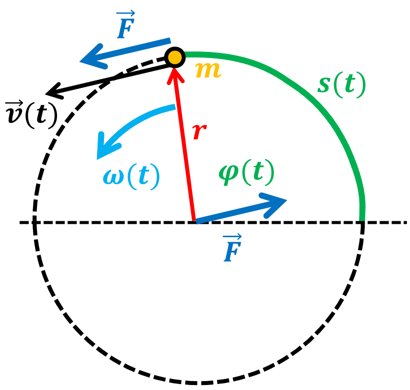
$$F = mr \cdot \frac{d\omega}{dt} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{F \cdot r}_{D} = \underbrace{mr^2}_{I} \cdot \frac{d\omega}{dt}$$

Für diese Situation: D I

<u>Allgemeine Bewegungsgleichung:</u> $\boxed{\vec{D} = I \cdot \vec{\alpha}}$

5.1.2 Dynamik bei Drehbewegungen

Die Bewegungsgleichung der Rotation



Berechnung der Drehbeschleunigung eines Körpers:

(1) Trägheitsmoment I des Körpers um die aktuelle Drehachse ermitteln

(2) Drehmoment D des Körpers ermitteln: (Kräftepaar; „Kraft mal Kraftarm“)

(3) Drehbeschleunigung α berechnen.

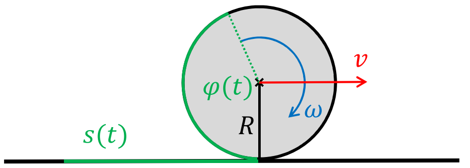
(4) Daraus weitere Größen, z .B.

- Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$
- Winkelposition $\varphi(t)$

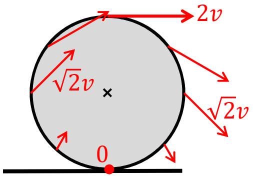
$\boxed{\vec{D} = I \cdot \vec{\alpha}}$

5.1.3 Die Rollbewegung

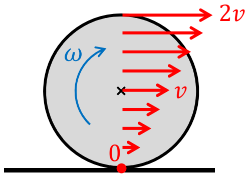
Rollen: Gekoppelte Rotation + Translation



Rollbedingung: $s(t) = \varphi(t) \cdot R$
$v(t) = \omega(t) \cdot R$

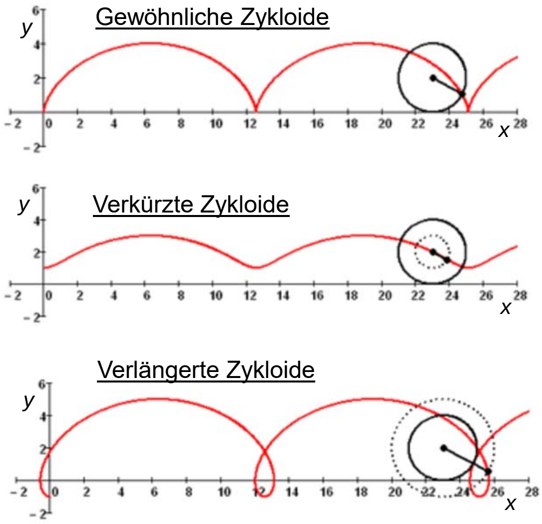


Geschwindigkeiten am Umfang



Geschwindigkeiten am Querschnitt

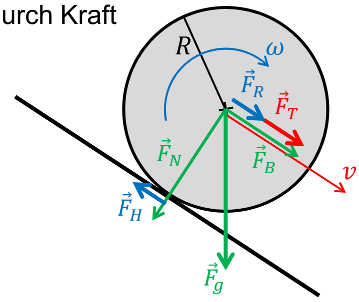
Abrollkurven:



5.1.3 Die Rollbewegung

Rollen: Gekoppelte Rotation + Translation

(1) Antrieb durch Kraft



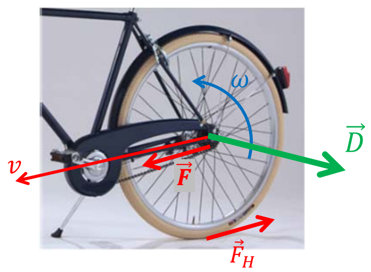
Kraft $\vec{F}_B$

beschleunigt $(F_T = m \cdot a)$ und
dreht an $(D = F_R \cdot R = I \cdot \alpha = I \cdot a/R)$

Notwendig:
Haftreibung $F_H \geq F_R$

$\boxed{F_B = F_T + F_R}$

(2) Antrieb durch Drehmoment



Drehmoment $\vec{D}$

dreht an $(D_R = I \cdot \alpha)$ und
beschleunigt $(F = D_T/R = m \cdot a = m \cdot \alpha \cdot R)$

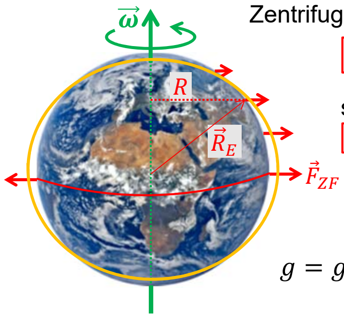
Notwendig:
Haftreibung $F_H \geq F$

$\boxed{D = D_R + D_T}$

5.1.4 Die Zentrifugalkraft (Fliehkraft)

Im rotierenden System: Kraft nach außen spürbar

(1) scheinbare Erdbeschleunigung



Zentrifugalbeschl. vektoriell:

$$\boxed{\vec{a}_{ZF} = \vec{\omega} \times (\vec{R}_E \times \vec{\omega})}$$

skalar:

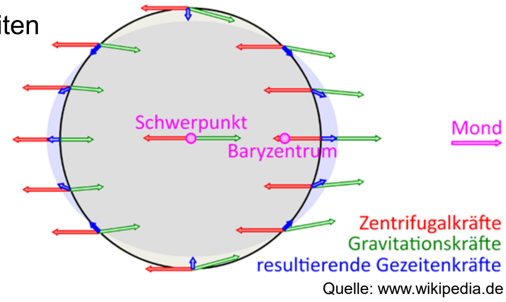
$$\boxed{a_{ZF} = \omega^2 \cdot R}$$

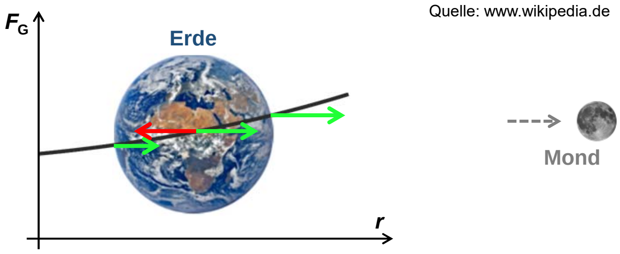
$$g = g_0 - (\vec{a}_{ZF} \cdot \vec{e}_{RE})$$

Dazu kommt noch: Ellipsoidform der Erde

am Äquator:	größerer Radius (~6378 km)
an den Polen:	kleinerer Radius (~6357 km)

(2) Gezeiten





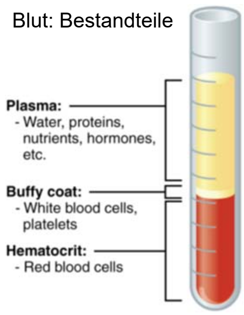
5.1.4 Die Zentrifugalkraft (Fliehkraft)

Anwendung: Zentrifugen

Laborzentrifuge

Blut: vorher - nachher

Blut: Bestandteile



Zentrifugengeschwindigkeit wird oft als Beschleunigung angegeben:

$$a_{ZP} = N \cdot g = \omega^2 \cdot r$$

Oft aus Frequenz f (oft U/min): $\omega = 2\pi \cdot f$

Mittlerer Radius

Wäscheschleuder

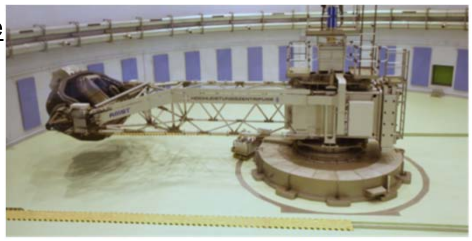
Symbole:

- maximal
- schonend
- nicht

Humanzentrifuge

Beschleunigung bis $a = 10\ g$ für einige Minuten

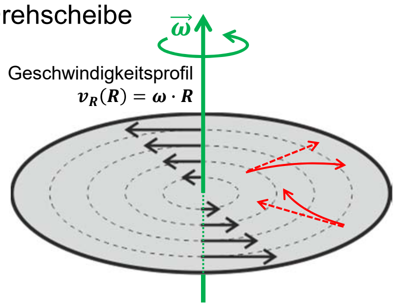
Piloten, Astronauten



5.1.4 Die Corioliskraft

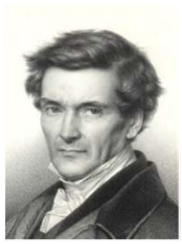
Bei Bewegung im rotierenden System: Querkraft spürbar

(1) Drehscheibe



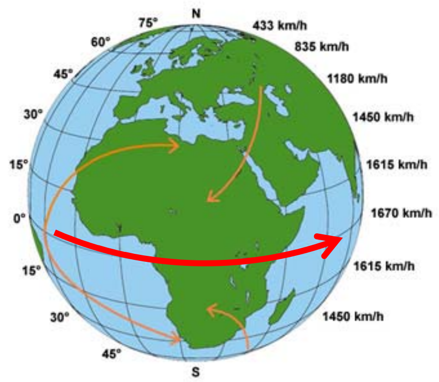
Bei Bewegung normal auf Drehachse:
Mitnehmen des Impulses → Kurvenbahn.

Im rotierenden System:
scheinbare Querbeschleunigung
→ „Scheinkraft" Corioliskraft



Gaspard-Gustave
de Coriolis (1792-1843)

(2) Erde



Ablenkung von Luftströmungen

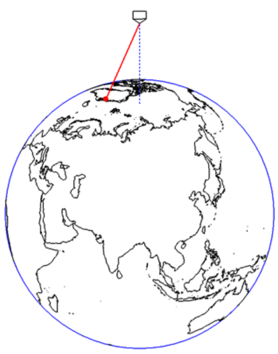
Berechnung: vektoriell: $\boxed{\vec{a}_C = 2 \cdot (\vec{v} \times \vec{\omega})}$

skalar: $\boxed{a_C = v \cdot \omega \cdot \sin\varphi}$

5.1.4 Die Corioliskraft

Das Foucaultsche Pendel

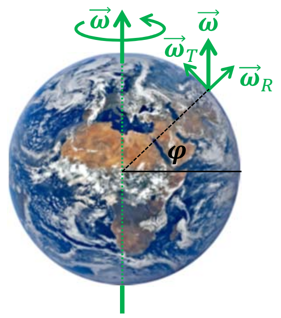
(1) Pendel am Nordpol



Erde dreht sich unter dem Pendel weg.

Eine volle Umdrehung pro Tag: $T = 24\,\mathrm{h}$

(2) Pendel in geogr. Breite φ



Foucaultsches Pendel
in Lüdenscheid

Léon Foucault
(1819-1868)

Vektorielle Aufspaltung der Winkelgeschw.:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_R + \vec{\omega}_T$$

Radiale Winkelgeschw.: $\omega_R = \omega \cdot \sin\varphi$

Eine volle Umdrehung: $T = \frac{2\pi}{\omega_R} = \frac{24\,\mathrm{h}}{\sin\varphi}$

(Düsseldorf: $T = 30{:}47$ h)

5.2.1 Die Rotationsenergie

Wenn ein Körper rotiert, bewegt sich jeder Massenpunkt mit $v(\vec{r}) = \omega \cdot R(\vec{r})$

und hat somit die Energie $\mathrm{d}E_{kin} = 1/2 \cdot \left(v(\vec{r})\right)^2 \cdot \mathrm{d}m$

Der ganze Körper hat also die Energie $E_{rot} = \int \mathrm{d}E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot \int \omega^2 \cdot \left(R(\vec{r})\right)^2 \cdot \rho(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}V$

$$= \frac{\omega^2}{2} \cdot \underbrace{\int \cdot \left(R(\vec{r})\right)^2 \cdot \rho(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}V}_{I \text{ (Trägheitsmoment)}}$$

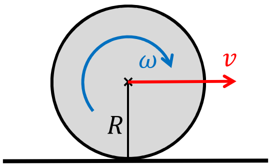
→ **Rotationsenergie:** $\boxed{E_{rot} = \frac{I \cdot \omega^2}{2}}$

Rotationsenergie
- ist eine mechanische Energieform
- kann in andere Energieformen überführt werden
- muss bei Energiebetrachtungen berücksichtigt werden.

Schwungrad
als Energie-Zwischenspeicher

5.2.1 Die Rotationsenergie

Beispiel: Roll-Energie



Gesamtenergie:

$$E_{ges} = E_{kin} + E_{rot} = \frac{m \cdot v^2}{2} + \frac{I \cdot \omega^2}{2} = \frac{v^2}{2} \cdot \left(m + \frac{I}{R^2}\right)$$

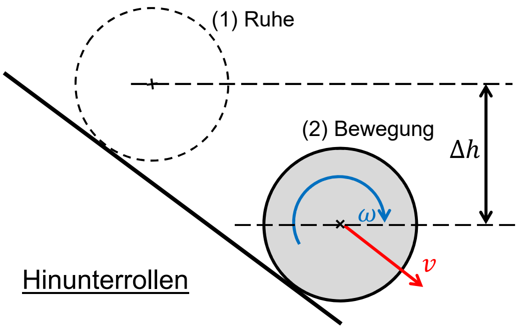
Trägheitsmoment für axialsymmetrische Körper: $I = k \cdot m \cdot R^2$

$$\boxed{E_{ges} = \frac{m \cdot v^2}{2} \cdot (1 + k)}$$

Kugel: $k = 2/5$

Zylinder: $k = 1/2$

Hohlzylinder: $k = 1$



Hinunterrollen

Erhaltung der mechanischen Energie:

$$\Delta E_{pot} = E_{kin,2} + E_{rot,2}$$

$$m \cdot g \cdot \Delta h = \frac{m \cdot v^2}{2} \cdot (1 + k)$$

Rollen ist langsamer als Gleiten!

5.2.2 Der Drehimpuls einer Punktmasse

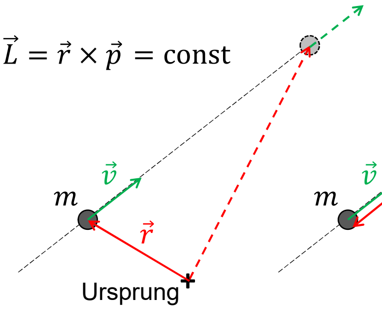
Welche Größe beschreibt, „wie stark" eine Drehbewegung ist?

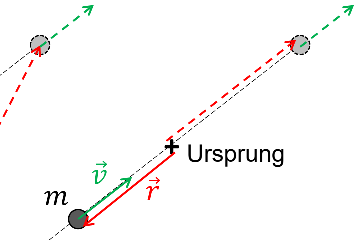
vgl. Translationsbewegung: Impuls $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

Allgemeine Definition: **Drehimpuls** $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \ = m \cdot \vec{r} \times \vec{v}$

Beispiel: Geradlinige, gleichförmige Bewegung

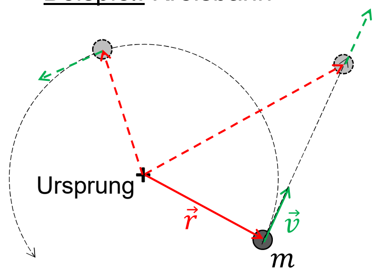
$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \ = \mathrm{const}$





$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = 0$

Beispiel: Kreisbahn



$\vec{L}$ ist gleich, egal ob Gerade oder Kreis.

5.2.2 Der Drehimpuls einer Punktmasse

Welche Größe beschreibt, „wie stark" eine Drehbewegung ist?

vgl. Translationsbewegung: Impuls $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

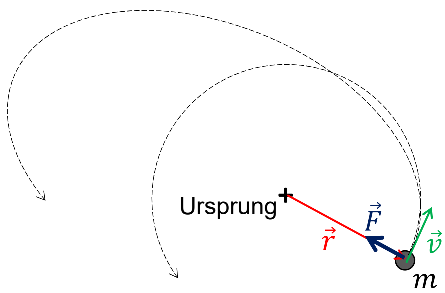
Allgemeine Definition: **Drehimpuls** $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \ = m \cdot \vec{r} \times \vec{v}$

Änderung des Drehimpulses:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = m \cdot (\underbrace{\cancel{\vec{v} \times \vec{v}}}_{=0} + \vec{r} \times \vec{a}) \ = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{D}$$

→ Drehimpuls kann sich nur ändern, wenn ein Drehmoment wirkt

Wenn nur eine Zentralkraft wirkt ($\vec{F} \parallel \vec{r}$), kann sich der Drehimpuls nicht ändern:



$\vec{L} = \mathrm{const}$ → Verschiedene Ellipsen oder Kreise möglich

5.2.2 Der Drehimpuls eines ausgedehnten Körpers

Für jeden rotierenden Körper kann ein Drehimpuls definiert werden.

Annahmen:
- Drehachse ist eine Hauptträgheitsachse
- Koordinatensystem: Drehachse ist die *z*-Achse

Drehimpuls einer Punktmasse:

$$\mathrm{d}\vec{L} = \mathrm{d}m \cdot \vec{r} \times \vec{v} = \mathrm{d}m \cdot \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$
$$= \mathrm{d}m \cdot r^2 \cdot \vec{\omega} = \mathrm{d}I \cdot \vec{\omega}$$

Drehimpuls eines rotierenden Körpers: $\boldsymbol{\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}}$

Dimension: Trägheitsmoment x Winkelgeschw.

SI-Einheit: $[\vec{L}]$ = kg·m^2 / s

Achtung:
Drehimpuls ist andere Größenart als Impuls!

Bei Rotation um eine Hauptträgheitsachse:
$\vec{L} \parallel \vec{\omega}$: Drehimpulsvektor zeigt in Achsrichtung

5.2.2 Der Drehimpuls eines ausgedehnten Körpers

Dynamik der Kreisbewegung:

$$\vec{D} = I \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(I \cdot \vec{\omega})}{\mathrm{d}t}$$

allgemeiner: $\vec{D} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$ mit Drehimpuls $\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$

Schlussfolgerungen:
- Der Drehimpuls eines Körpers kann sich nur ändern, wenn ein Drehmoment $\vec{D}$ auf ihn wirkt.
- Ein Drehmoment gibt die Änderung des Drehimpulses pro Zeiteinheit an.
- Wenn sich der Drehimpuls eines Körpers ändert, muss sich irgendein anderer Drehimpuls gegengleich ändern! („reactio“)

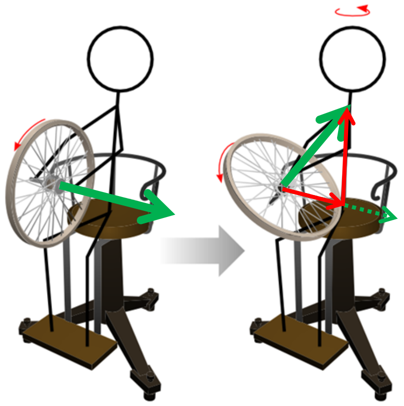
Erhaltung des Drehimpulses:

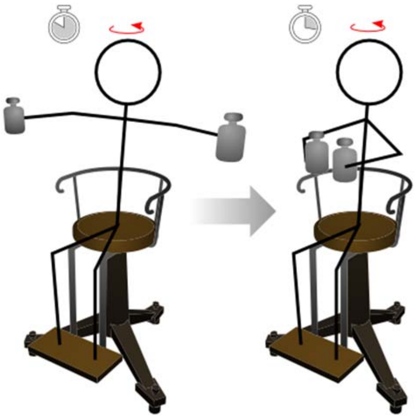
$$\vec{L}_{\text{ges}} = \sum \vec{L}_{\text{i}} = \text{const}$$

In einem abgeschlossenen System
bleibt die Summe aller Drehimpulse konstant

5.2.2 Der Drehimpuls eines ausgedehnten Körpers

Drehstuhlversuche:





Vertikaler Drehimpuls muss erhalten sein

Horizontaler Drehimpuls kann mit der Umgebung ausgetauscht werden.

Änderung von I $\leftrightarrow$ Änderung von ω

Drehimpuls bleibt konstant
Rotationsenergie ändert sich!

5.2.2 Der Drehimpuls eines ausgedehnten Körpers

Körper ohne externes Drehmoment:

keine Änderung von $\vec{L}$ möglich!

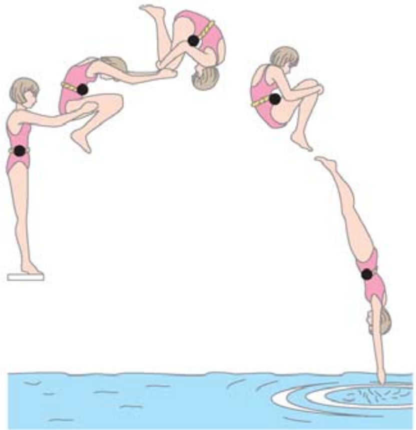
$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega} = \text{const}$$

Änderung von I $\leftrightarrow$ Änderung von ω

Beispiele:

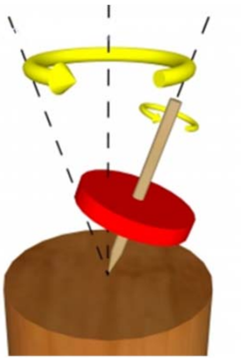
I groß, ω klein

I klein, ω groß

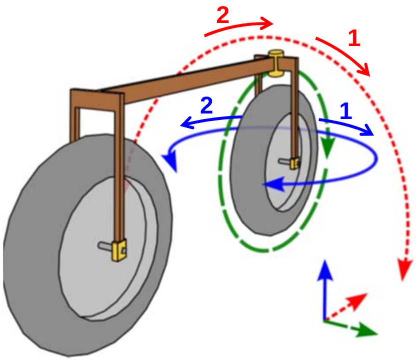


5.2.3 Präzessionsbewegung

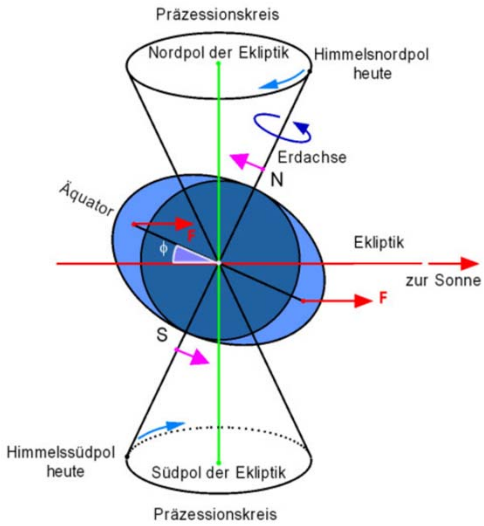
Prinzip



Präzession beim Fahrrad:



Präzession der Erde:



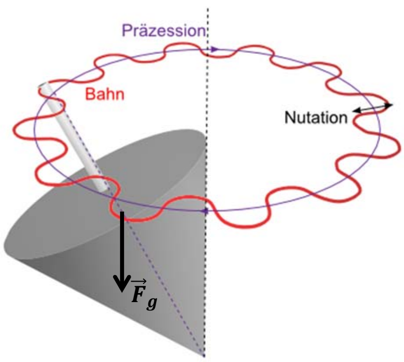
2 Effekte:

(1) Kippen des Fahrrads → Verdrehung des Vorderrads:
freihändiges Lenken durch seitliche Neigung

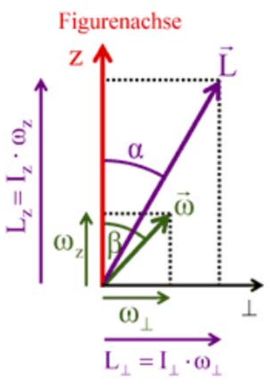
(2) Lenker drehen → Verkippen des Fahrrads:
Einleiten des Lenkens in der Gegenrichtung

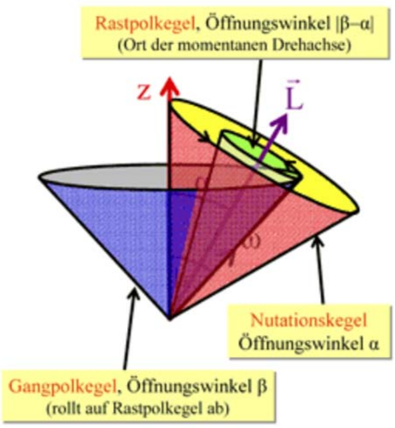
5.2.3 Kreiselbewegung

Allgemeine Kreiselbewegung:



Nutation: Trennung der Achsen





5.2.3 Kreiselbewegung

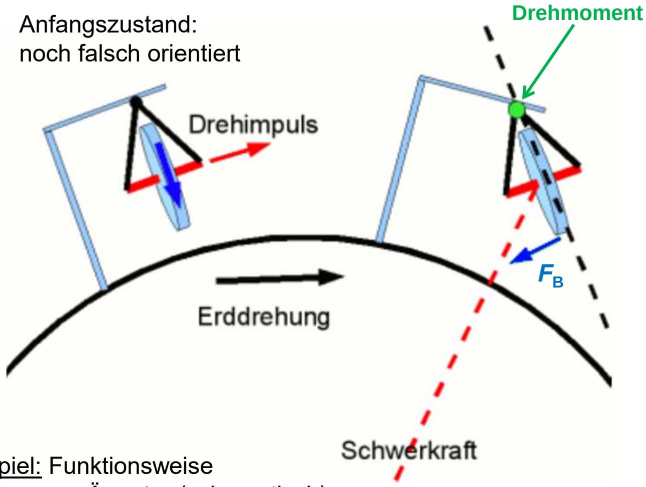
Kräftefreier Kreisel:

Kardanische Lagerung:

kein Austausch von Momenten

Anwendung: „Kreiselinstrument“ behält seine Drehrichtung absolut.

Kreiselkompass:



Beispiel: Funktionsweise am Äquator (schematisch)

5.3.1 Drehschwingungen

Allgemeines zu Schwingungen

Jede Gleichung der Form

$$\boxed{\ddot{x} = -C \cdot x(t)} \qquad \text{(z.B. } \ddot{z}(t) = -\frac{D}{m} \cdot z(t)\text{)}$$

beschreibt Schwingungen mit der Kreisfrequenz

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{C}} \qquad \text{(z.B. } \omega_0 = \sqrt{D/m}\text{)}$$

mit der allgemeinen Formel

frei festgelegt frei

$$\boxed{x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_0)}$$

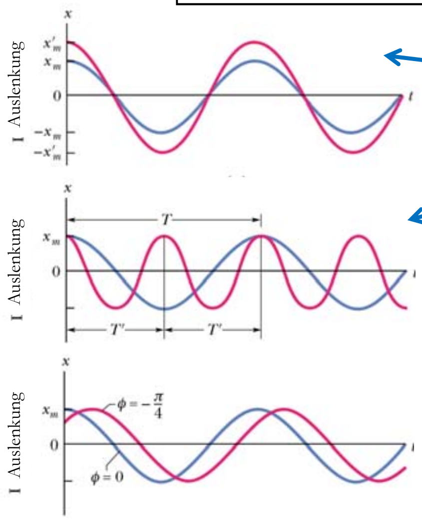
die **jede mögliche** freie Bewegung des Systems beschreibt.

Welche dieser Möglichkeiten in einem konkreten Fall zutrifft, wird durch die Parameter
$\boldsymbol{x_0}$ (Amplitude) und $\boldsymbol{\varphi_0}$ (Anfangsphase) beschrieben,
die aus Zusatzinformationen bestimmt werden.

5.3.1 Drehschwingungen

Allgemeines zu Schwingungen

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_0)$$



Haliday 16-3

x*(*t*)** **Auslenkung** zur Zeit ***t

x_0 **Amplitude**

T **Periodendauer**

ν **Frequenz**

$$\nu = \frac{1}{T}$$

ω_0 **Kreisfrequenz**

$$\omega_0 = 2\pi \cdot \nu$$

φ_0 **Anfangsphase**

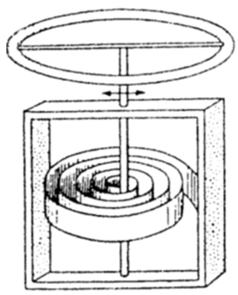
5.3.1 Drehschwingungen

Das rücktreibende Drehmoment einer Drehfeder ist proportional zum Auslenkungswinkel φ:

$$D = -\kappa \cdot \varphi$$

das Drehmoment wirkt der Auslenkung entgegen.

„Richtmoment" κ:
- gibt an, wie stark die Drehfeder ist
- Einheit: $[\mathrm{Nm/rad}]$



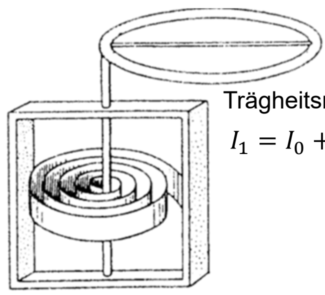
Drehkörper mit Trägheitsmoment I_0

Drehfeder mit Richtmoment κ

Bewegungsgleichung:

$$I \cdot \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -\kappa \cdot \varphi \quad \rightarrow \quad \varphi(t) = \varphi_0 \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{t}{T_0}\right)$$

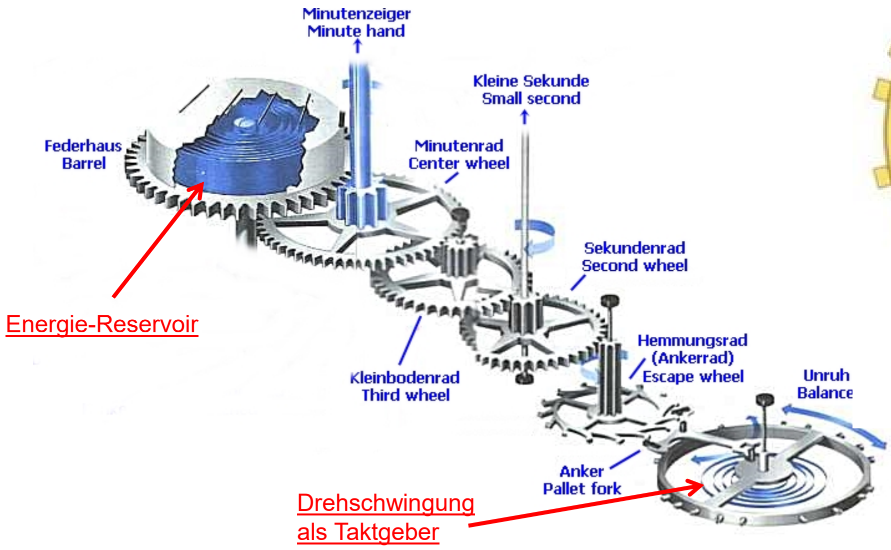
Periodendauer $T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{I / \kappa}$

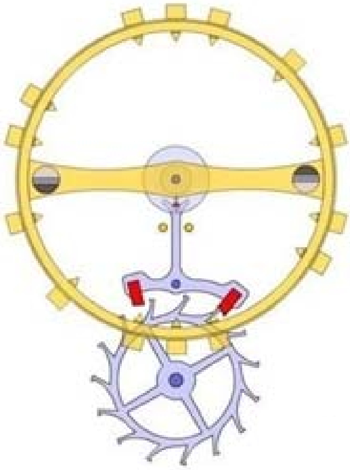


Trägheitsmoment $I_1 = I_0 + M \cdot R^2$

5.3.1 Drehschwingungen: Mechanische Uhr

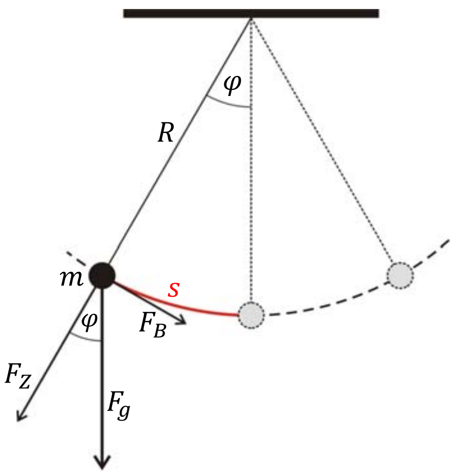
Beispiel: Prinzip einer mech. Uhr





5.3.1 Das Fadenpendel (mathematisches Pendel)

„Punktförmige Masse m an masselosem Faden"



Auslenkung: $s = \varphi \cdot R$

Beschleunigung: $a = \alpha \cdot R = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} \cdot R$

Rücktreibende Kraft: $F_B = -m \cdot g \cdot \sin\varphi \approx -m \cdot g \cdot \varphi$ Näherung!

Beweggsgl.: $m \cdot \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} \cdot R = -m \cdot g \cdot \varphi$

Schwingungsgl.: $\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{R} \cdot \varphi$

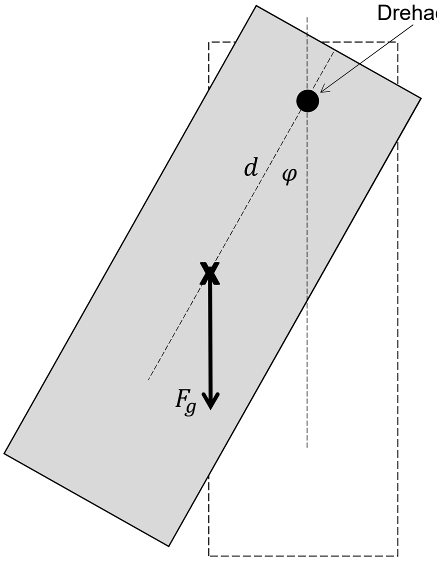
Kraft ist immer proportional zur negativen Auslenkung:
→ harmonische Schwingung

$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$

Kreisfrequenz der Schwingung: $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}$

Periodendauer $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \cdot \sqrt{R/g}$ unabhängig von Masse und Amplitude!

5.3.1 Das physikalische Pendel



Auslenkung: Winkel φ

Rücktreibendes Drehmoment: $D = -F_g \cdot (d \cdot \sin\varphi) \approx -F_g \cdot d \cdot \varphi$

Winkelbeschleunigung: $\alpha = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}$

Bewegungsgleichung: $D = I \cdot \alpha \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{m \cdot g \cdot d}{I} \cdot \varphi = 0$

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$$

Kreisfrequenz der Schwingung: $\omega_0 = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot d}{I}}$

Reduzierte Pendellänge: Fadenlänge eines math. Pendels mit gleicher Schwingungsdauer

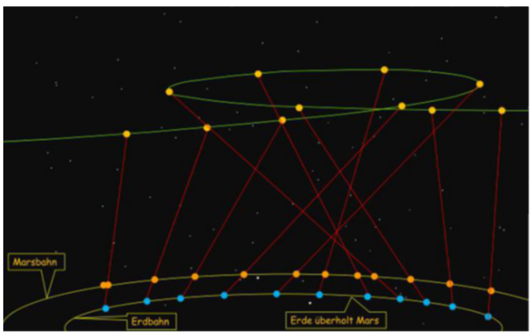
$$R = L_{red} = \frac{I}{m \cdot d}$$

5.3.2 Die Keplerschen Gesetze

Übergang vom geozentrischen System ... zum heliozentrischen System

Weltbild des Ptolemäus:
Problem: Beobachtungen stimmten nicht genau

„Schleife“ in der Marsbahn



Kopernikus (u.a.):

Sonne steht im Zentrum,
Planeten auf Kreisbahnen

Problem: z.T. ungenauer als Ptolemäus

Kepler:

Präzise Daten von Tycho de Brahe

Planeten auf Ellipsenbahnen

Newton (u.a.):

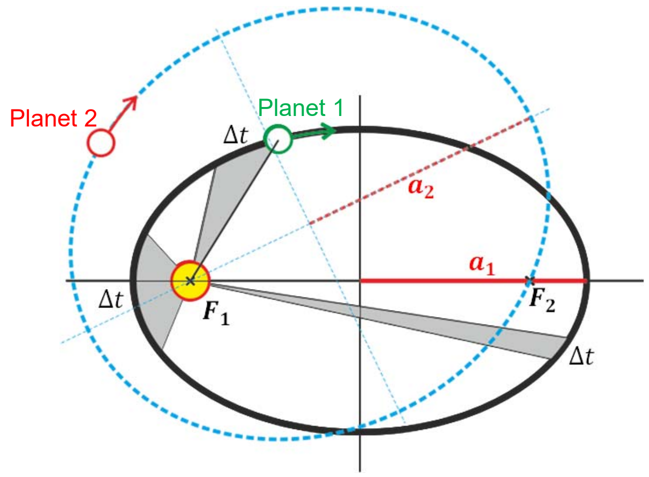
Physikalische Untermauerung


Johannes Kepler
1571-1630

5.3.2 Die Keplerschen Gesetze

1. Die Bahnen der Planeten sind Ellipsen, mit der Sonne in einem Brennpunkt
2. Die Verbindungslinie Sonne – Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen
3. Für zwei Planeten:
   Die Quadrate der Umlaufdauern verhalten sich wie die dritten Potenzen der großem Halbachsen der jeweiligen Ellipsen.

$$\boxed{\frac{T_1{}^2}{T_2{}^2} = \frac{a_1{}^3}{a_2{}^3}}$$

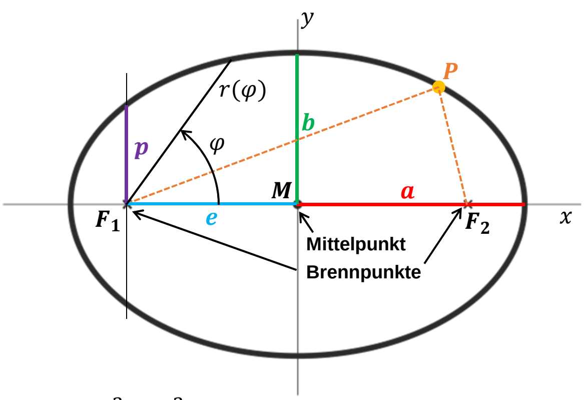


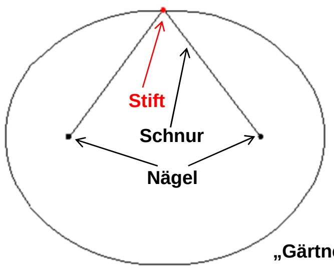
6.3.2 Das erste Keplersche Gesetz

Ellipse: Parameter: Große Halbachse a
Kleine Halbachse b
Exzentrizität e
Halbparameter p

Zusammenhänge: $a^2 = b^2 + e^2$
$p = b^2/a$

Beschreibung: Für jeden Punkt $\boldsymbol{P}$:
$\overline{F_1 P} + \overline{F_2 P} = 2a$





„Gärtner-Konstruktion"

Ellipsengleichung: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Polardarstellung: $r(\varphi) = \frac{p}{1 \pm (e/a) \cdot \cos\varphi}$

5.3.2 Das zweite Keplersche Gesetz

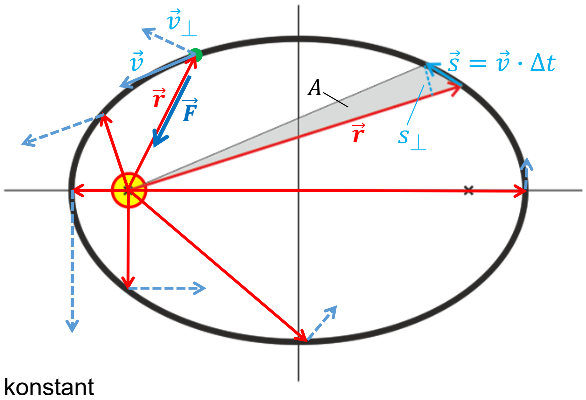
Allgemeiner Drehimpuls (Punktmasse m):

$$\boxed{\vec{L} = m \cdot \vec{r} \times \vec{v}}$$

Zeitliche Änderung: $\frac{d\vec{L}}{dt} = m \cdot (\underbrace{\cancel{\vec{v} \times \vec{v}}}_{=0} + \vec{r} \times \vec{a})$

Zentralkraft: $\vec{F} = m \cdot \vec{a} \parallel \vec{r} \quad \rightarrow \quad \vec{r} \times \vec{a} = 0$

$\rightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0, \quad \vec{L} = \text{const} \quad \rightarrow \quad r \cdot v_\perp = \text{const}$



Das Produkt aus Radius und Normalgeschwindigkeit ist konstant

Überstrichene Fläche Im Zeitintervall Δt : Dreieck $A = \frac{r \cdot s_\perp}{2} = \frac{\Delta t}{2} \cdot r \cdot v_\perp = \text{const}$

5.3.2 Das dritte Keplersche Gesetz

Für Kreisbahn:

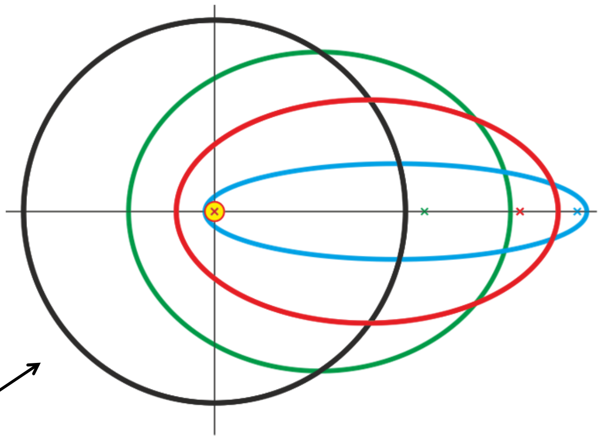
Gleichgewicht Zentripetalkraft – Gravitation:

$$F_{ZP} = m \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{M_E \cdot m}{r^2} = F_G$$

$$\rightarrow \quad v = \sqrt{G \cdot M_E / r}$$

Umlaufdauer: $T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2\pi \cdot \sqrt{r^3}}{\sqrt{G \cdot M_E}}$

$\rightarrow \quad \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_E} = C_K$ (Keplerkonstante)



Für Ellipsenbahn:

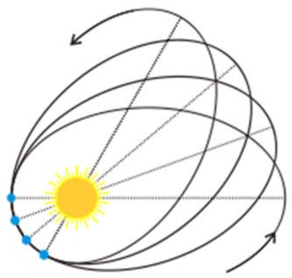
Jede Ellipse mit großer Halbachse a hat gleiche Umlaufdauer wie Kreis mit Radius $r = a$.

Ellipsen mit verschiedenen großen Halbachsen:

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = C_K \quad \rightarrow \quad \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

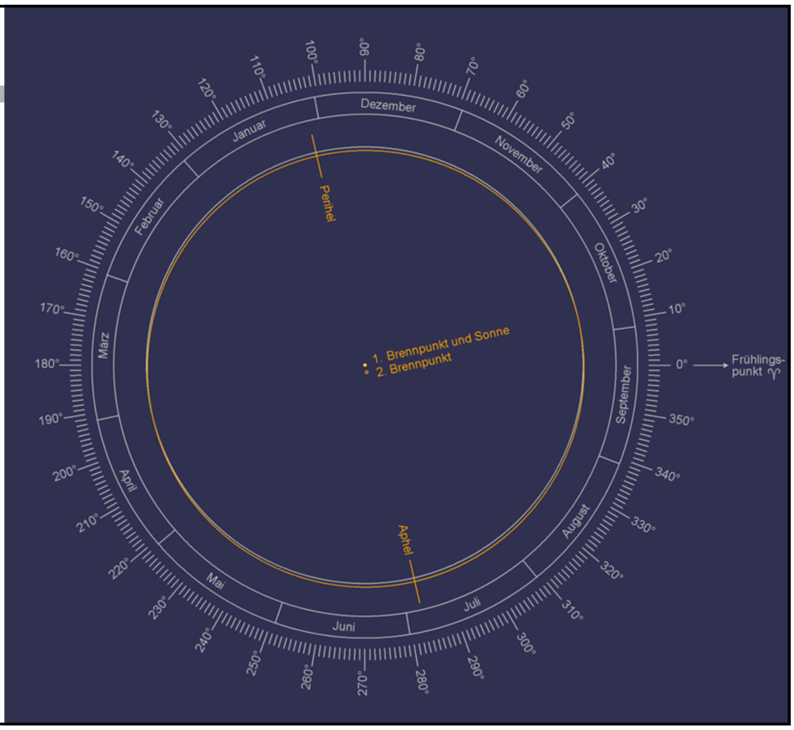
5.3.2 Die Bahn der Erde

Die Erd-Ellipsenbahn ist fast ein Kreis.
Einziger merkbarer Unterschied:
Die Sonne steht nicht genau im Zentrum.

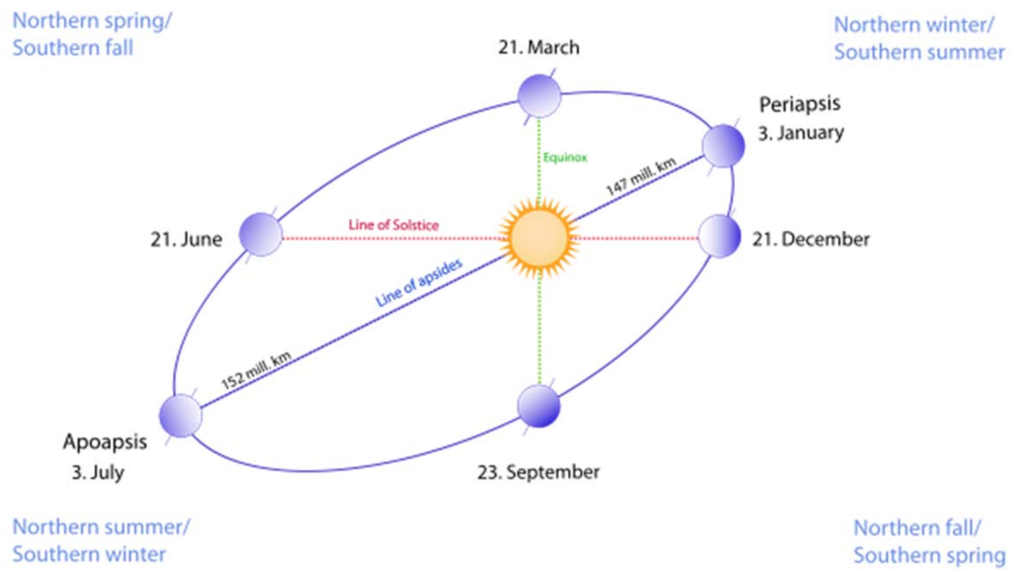


Periheldrehung:
Periode: ~22.000 Jahre

Außerdem: Präzession der Achse
Periode: ~25.800 Jahre

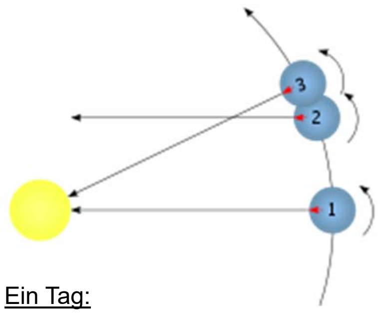


5.3.2 Die Bahn der Erde



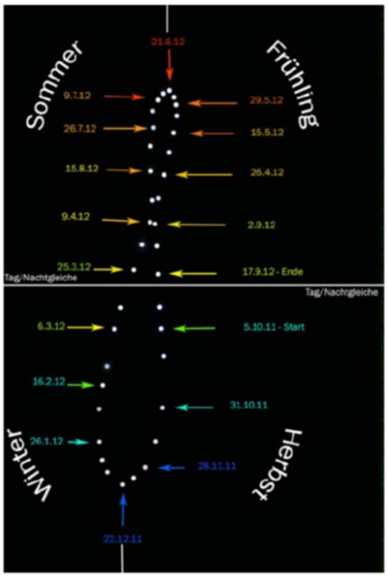
5.3.2 Die Zeitgleichung

Die Tageszeit auf der Erde
korreliert nicht perfekt
mit dem Sonnenstand



Ein Tag:

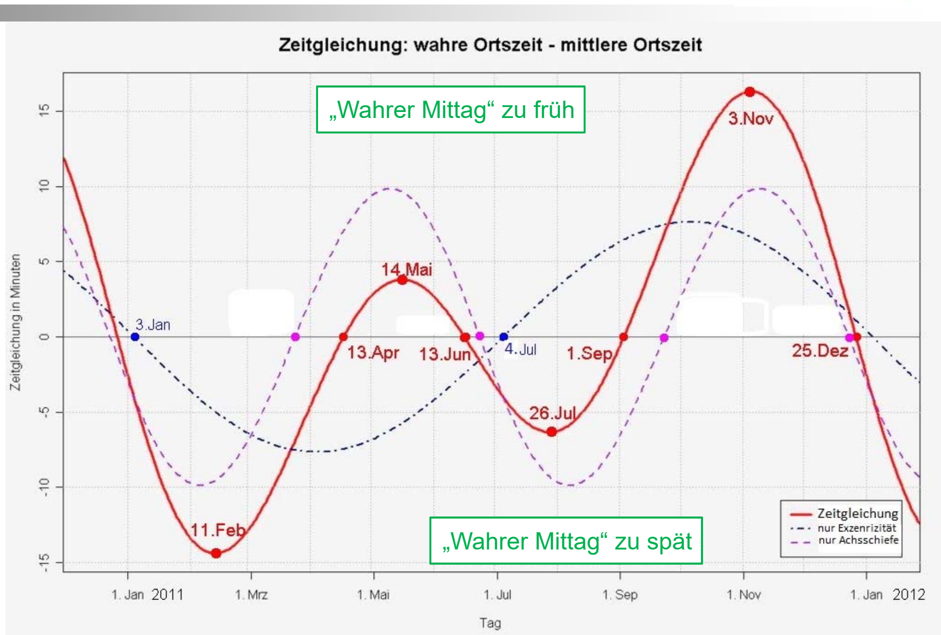
1. Ausgangspunkt
2. 360°-Drehung („Sterntag“)
3. Weiterdrehen um ca. 1° („Sonnentag“)



„Analemma“: Sonnenposition um 12:00 Uhr übers Jahr

5.3.2 Die Zeitgleichung

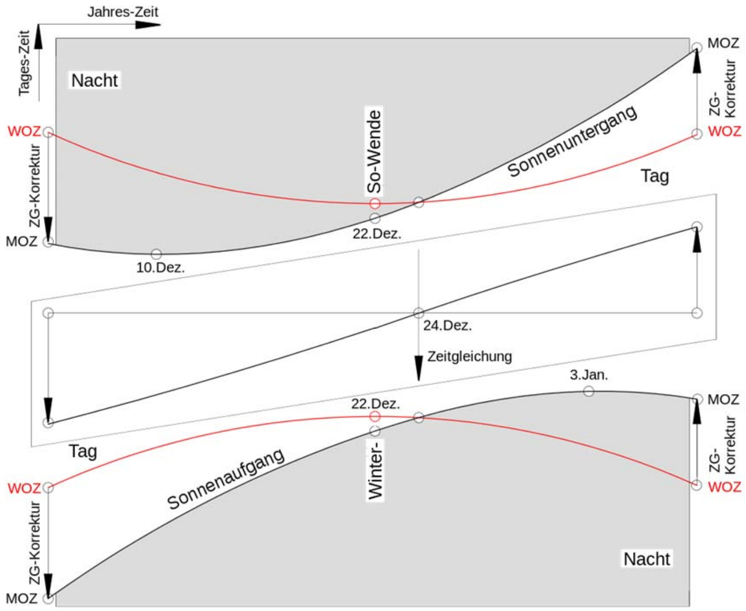
Die Tageszeit auf der Erde
korreliert nicht perfekt
mit dem Sonnenstand



5.3.2 Die Zeitgleichung

Effekt der Zeitgleichung um den Jahreswechsel:

Kürzester Tag: 21./22. Dezember.
Abende werden schneller hell.
Morgen bleiben länger dunkel.



5.3.3 Motor: Drehmoment und Leistung

Motorgrößen:

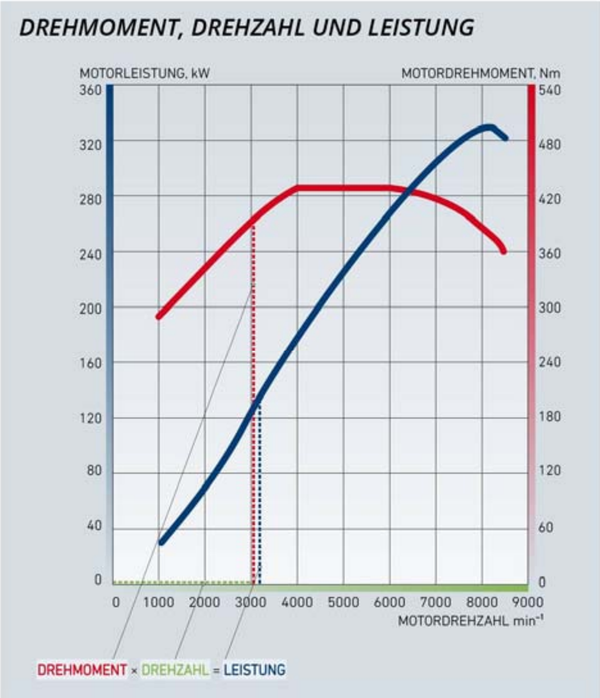
- Drehmoment D (in Nm)
- Motorleistung P (in kW)
- Drehzahl N (in U/min)

Zusammenhang:

$$P = D \cdot \omega \; = D \cdot 2\pi \cdot \nu$$

Zahlenwertgleichung:

$$P[\mathrm{kW}] = \frac{D[\mathrm{Nm}] \cdot N[\mathrm{U/min}]}{9550}$$



Verbrennungsmotor:
Relativ konstantes Drehmoment,
Leistung ~proportional zur Drehzahl.

5.3.3 Getriebe und Übersetzung

Schaltgetriebe: (historisch)

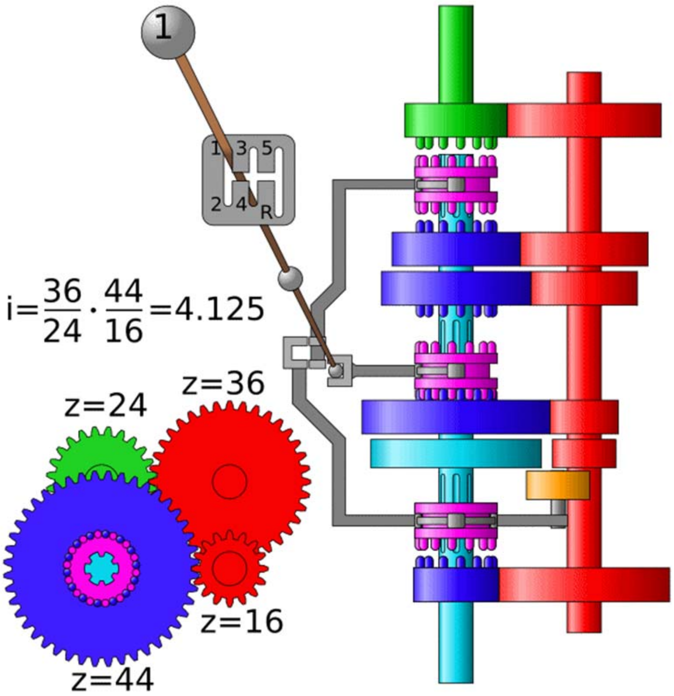
Verschiedene Zahnradkombinationen erlauben verschiedene Übersetzung.

Übersetzung Motor → Nutzer erfolgt mit konstanter Leistung:

$$P_N = P_M \quad \rightarrow \quad N_N \cdot D_N = N_M \cdot D_M$$

Niedere Gänge:
Nutzer erhält hohes Drehmoment („Kraft“) bei niedriger Drehzahl

Hohe Gänge:
Nutzer erhält hohe Drehzahl (Tempo!) bei reduziertem Drehmoment



5.3.3 Getriebe und Übersetzung

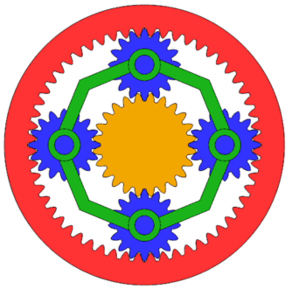
Fahrradgetriebe:

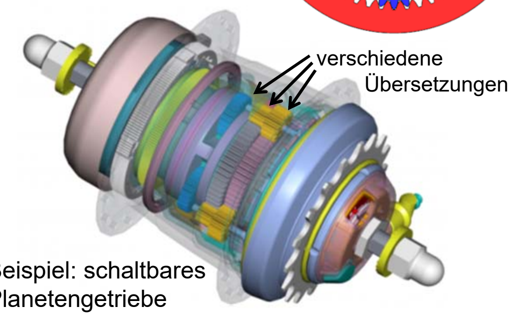
Kettenschaltung:

Nabenschaltung:

Prinzip: Planetengetriebe

Antrieb:
Planetenträger
Planeten
Sonnenrad (fest)
Last:
Hohlrad





Beispiel: schaltbares Planetengetriebe

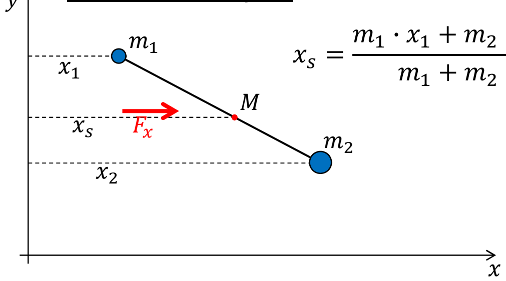
5.3.4 Der Massenmitelpunkt (Schwerpunkt)

Definition:

Der **Massenmittelpunkt** eines Körpers ist jener Punkt, an dem eine Kraft angreifen muss, damit nur Translation und keine Drehung hervorgerufen wird.

Für die Beschreibung von Translationsbewegungen kann man sich die ganze Masse des Körpers in diesen Punkt konzentriert denken.

Einfaches Beispiel:



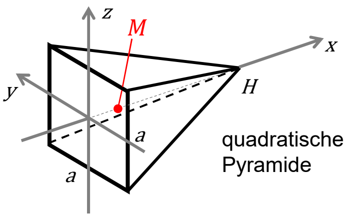
$$x_s = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2}{m_1 + m_2}$$

Berechnung:

$$\vec{r}_s = \frac{\sum \vec{r}_i \cdot m_i}{\sum m_i} \quad \text{(viele Einzelmassen)}$$

$$\vec{r}_s = \frac{\rho}{M} \cdot \int \vec{r} \cdot \mathrm{d}V \quad \text{(kontinuierlicher Körper)}$$

Beispiel:



quadratische Pyramide

$$x_s = \frac{\rho}{M} \cdot \int x \cdot \mathrm{d}V = \int_0^H x \cdot \left(a \cdot \frac{H - x}{H}\right)^2 \mathrm{d}x$$

$$\rightarrow \quad x_s = \frac{1}{4} \cdot H$$

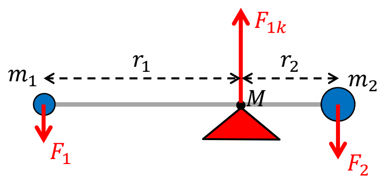
5.3.4 Der Massenmitelpunkt (Schwerpunkt)

Schwerpunkt:

Im Schwerefeld summieren wir die Kraft auf alle Massenelemente eines Körpers im Massenmittelpunkt.

Wenn ein Körper im Schwerpunkt festgehalten wird, heben sich die Drehmomente aller Massenelemente auf.

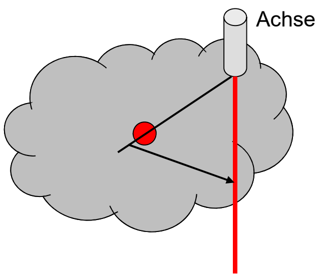
Beispiel



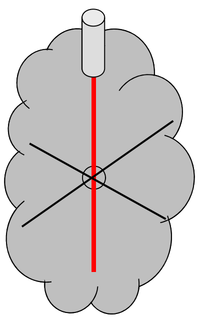
Kräftegleichgewicht: $F_1 + F_2 = F_k$

Momentengleichgewicht: $r_1 \cdot F_1 = r_2 \cdot F_2$

Bestimmung des Schwerpunkts:



Drehmoment wirkt so lange, bis Schwerpunkt genau unter dem Drehpunkt liegt.



Kreuzungspunkt der vertikalen Linien durch mehrere Achsen liefert den Schwerpunkt

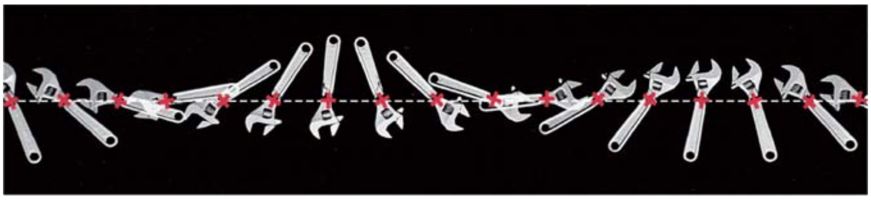
5.3.4 Die Dynamik starrer Körper

Strategie für Beschreibung der Dynamik starrer Körper:

1. Beschreibe die **Schwerpunktsbewegung** mittels Bahnkurve $\vec{r}_s(t)$ des Schwerpunkts (3 unabh. Koordinaten).

2. Beschreibe die **Orientierung und Drehung** des Körpers um den Schwerpunkt (3 Winkelkoordinaten. Oft schwierig!) Bei freier Rotation: Winkel um Hauptträgheitsachsen.

Beispiel:

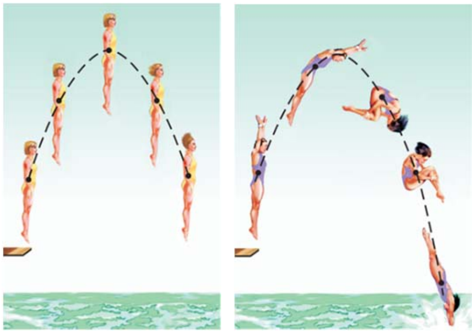


Komplizierte Bewegung „aufdröseln“ in
- geradlinige Bewegung des Schwerpunkts
- Rotation um den Schwerpunkt

5.3.4 Die Dynamik beweglicher Körper

Die Bewegung des Schwerpunkts ist unabhängig von der Rotation und von der Deformation des Körpers

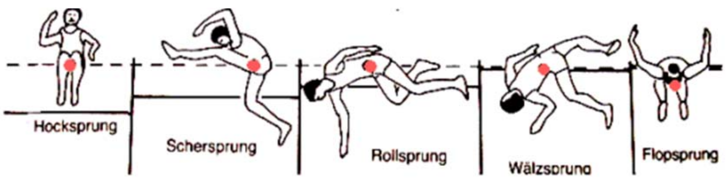
Kunstspringen:



Eigenrotation ändert nichts an der Translation des Schwerpunkts

Hochsprung:

„Fosbury-Flop“: Schwerpunkt bleibt unter der Latte



Vergleich verschiedener Techniken

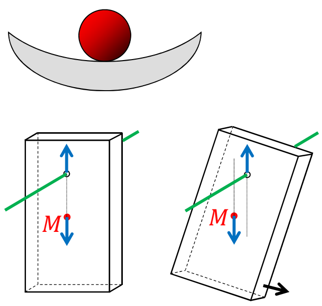
5.3.4 Mechanisches Gleichgewicht

Definition: „Gleichgewicht" ist ein Zustand, in dem auf einen Körper weder Kraft noch Drehmoment wirkt.

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \qquad \sum_i \vec{D}_i = 0$$

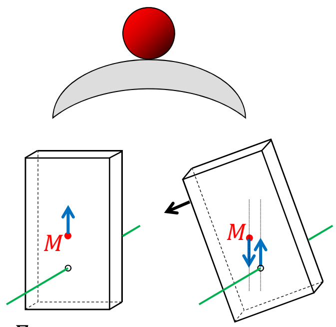
Arten des Gleichgewichts:

Stabiles Gleichgewicht



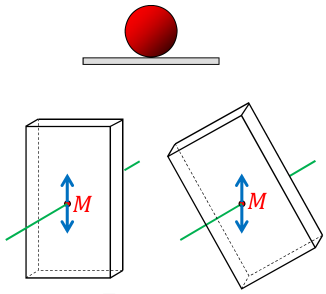
$E_{\mathrm{pot}} = \min$

Labiles Gleichgewicht



$E_{\mathrm{pot}} = \max$

Indifferentes Gleichgewicht

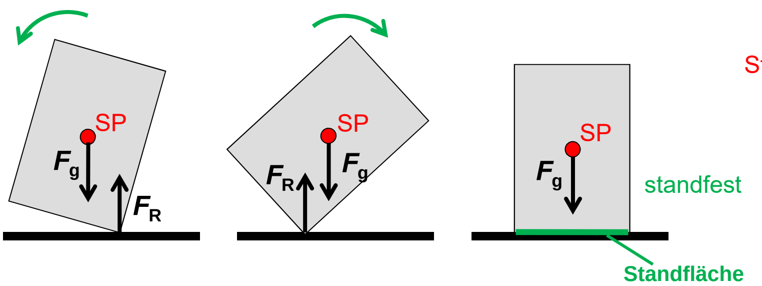


$E_{\mathrm{pot}} = \mathrm{const}$

5.3.4 Mechanisches Gleichgewicht

Kippen:

Auswirkungen des Drehmoments bei Auslenkung



Zurückkippen:

rücktreibendes Drehmoment

Umfallen:

verstärkendes Drehmoment

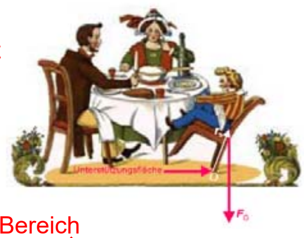
Gleichgewicht:

kein Drehmoment

Standfestigkeit:

Standfestigkeit ist gegeben, solange sich der Schwerpunkt über der Standfläche befindet.

Keine Standfestigkeit



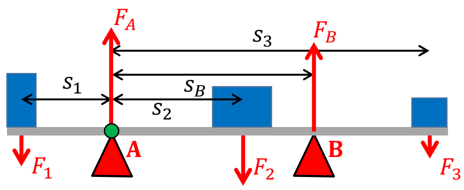
SP-Bereich

standfest

Standfläche

5.3.4 Gleichgewicht mit Kräften und Momenten

Anwendungsbeispiel 1: Balkenlast



Dünner Balken (masselos, keine Höhenausdehung) mit Gewichten.

Frage: Belastung der Auflager A und B

Kräftegleichgewicht: $\sum \vec{F}_i = 0$

$$F_A + F_B - (F_1 + F_2 + F_3) = 0$$

Momentengleichgewicht: $\sum \vec{D}_i = 0$

$$s_1 \cdot F_1 - s_2 \cdot F_2 + s_B \cdot F_B - s_3 \cdot F_3 = 0$$

Tipps:

Alle Kräfte berücksichtigen, die auf den Balken wirken

Wenn 1D-Problem: Vorzeichen festlegen. Hier: + nach oben

Sonst: Rechnen mit Vektoren.

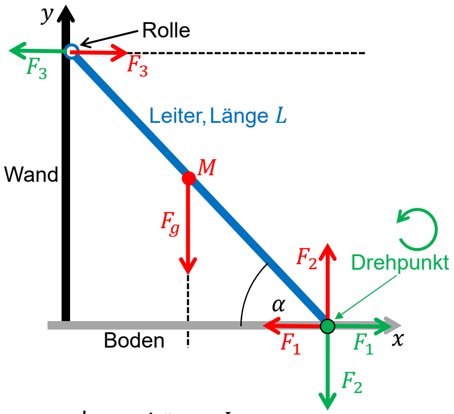
Einen Drehpunkt festlegen (willkürlich). Hier: Auflager A

Wenn 1D-Problem: Drehsinn festlegen. Hier: + ↺

Sonst: Rechnen mit Vektoren.

5.3.4 Gleichgewicht mit Kräften und Momenten

Anwendungsbeispiel 2: Leiter an der Wand



Kräftegleichgewicht in x-Richtung:

$$-F_1 + F_3 = 0$$

Kräftegleichgewicht in y-Richtung:

$$-F_g + F_2 = 0$$

Momentengleichgewicht: (nur D_y-Komponenten!)

„Achse“ am Boden-Berührungspunkt

$$F_g \cdot \left(\frac{L}{2} \cdot \cos\alpha\right) - F_3 \cdot (L \cdot \sin\alpha) = 0$$

gegeben: Länge L
Gewicht F_g
Winkel α