Skript zur Vorlesung

EXPERIMENTELLE MECHANIK

Prof. Georg Pretzler

Wintersemester 2021/22

B.Sc.-Studiengänge Physik / Medizinische Physik

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

1 Einführung

1.1 Naturwissenschaften und Physik

Die Naturwissenschaften beschäftigen sich ganz allgemein mit grundlegenden Phänomenen der uns umgebenden Natur. Sie versuchen, Modellsysteme aufzubauen, in die alle beobachtbaren Effekte eingeordnet werden können und aus denen heraus sich dann auch neue Möglichkeiten entwickeln lassen. Traditionell wird die klassische Naturwissenschaft in drei Hauptsäulen aufgeteilt:

- Die **Physik** untersucht die grundlegenden Phänomene der unbelebten Natur und trägt somit nicht nur entscheidend zu unserem Bild der Naturgesetze bei, sondern ist auch eine wichtige Basis für die technologische Entwicklung der letzen Jahrhunderte auf vielen Gebieten.
- Die **Chemie** beschäftigt sich mit dem Aufbau und vor allem mit der Umwandlung von Stoffen. Sie hat sich in den letzten zweihundert Jahren von einer sehr empirischen, halb esoterischen Disziplin („Alchimie“) zu einer modernen Wissenschaft entwickelt, die ebenfalls enorm zum technologischen Fortschritt beiträgt.
- Die **Biologie** untersucht die belebte Welt der Pflanzen und Tiere und war für lange Zeit eine beschreibende, katalogisierende Disziplin, der es vor allem auf das Einsortieren aller Arten und Spezies in ein universelles System ankam. In den letzten Jahrzehnten hat sich das Gewicht stark dahin verlagert, allgemeine Prinzipien und Funktionsweisen zu untersuchen (z. B. Zellen, Gene etc.) und solche Systeme zu beeinflussen und weiterzuentwickeln. Dafür sind in hohem Maß Methoden aus der Physik (und auch Chemie und Informatik) erforderlich. Auch die moderne Biologie zieht zunehmend technologische Entwicklungen nach sich (Stichwort „Biotechnologie“).

- Die **Mathematik** ist keine Naturwissenschaft an sich, gibt aber die Regeln vor, mit denen in den Naturwissenschaften argumentiert wird – nicht nur die Regeln für alle Rechenmethoden, sondern viel allgemeiner für logisches, logisch in sich geschlossenes Vorgehen. Somit stellt die Mathematik jene „Sprache“ zur Verfügung, in der man naturwissenschaftliche Erkenntnisse widerspruchsfrei formulieren kann, ohne auf sprachliche Nebenbedeutungen und Spitzfindigkeiten achten zu müssen.

Die Abgrenzung zwischen den Naturwissenschaften ist fließend und kann nicht eindeutig definiert werden. So gibt es in den Grenzbereichen eigene Teildisziplinen (Physikalische Chemie, Biophysik, Biochemie), in denen sich Methoden zweier Fächer gleichberechtigt ergänzen. Sogar Kernbereiche der einzelnen Fächer können auch in einem anderen Fach enthalten sein (z. B. Atom- und Molekülphysik in der Chemie) oder starken Input erhalten (z. B. Physik der Weichen Materie aus der Biologie, oder Festkörperphysik aus der Chemie).

Der Begriff „Physik“ ist eng mit dem altgriechischen Begriff „physis“ verwandt (Bedeutung etwa: Natur, natürliche Ordnung). Das Wort wurde schon im antiken Griechenland verwendet, um die Gesamtheit aller beobachtbaren Phänomene zu beschreiben, manchmal im Gegensatz zur „Metaphysik“, mit der dann Phänomene bezeichnet wurden, die nicht empirisch fassbar sind.

Das grundsätzliche Ziel der Physik ist es, die uns umgebende Natur modellhaft zu beschreiben und alle Effekte auf möglichst wenige Grundprinzipien zurückzuführen. Dies wird immer dadurch gemacht, dass man die Naturphänomene gezielt und analytisch beobachtet. Man versucht dabei, komplizierte Effekte in einzelne Bestandteile zu zerlegen, deren Gesetzmäßigkeit man dann zu erkennen bemüht.

In den letzten Jahrhunderten hat sich die Physik in viele Teilgebiete aufgespalten, die aber alle dieselbe Methodik verwenden und auf dieselben Grundprinzipien zurückgreifen. Oft ergeben sich überraschende Querverbindungen und Parallelen zwischen Teilgebieten, die auf den ersten Blick nichts miteinander zu tun haben.

1.2 Die naturwissenschaftliche Methode

Die naturwissenschaftliche Methode ist ist ein logisches System, mit dem in allen Naturwissenschaften vorgegangen wird, um auf gesicherte Weise Wissen zu erwerben. Ganz grundsätzlich folgt man dabei folgenden Leitlinien:

- Reduktionismus: Alle Phänomene und ihre Erklärungen sollen auf eine kleine Anzahl von Grundprinzipien zurückgeführt werden (sogenannte „*basic principles*“). In der Physik wurde sogar immer wieder versucht, eine einzige „Weltformel“ zu finden, aus der unser gesamtes physikalisches Wissen abgeleitet werden kann.
- Vorhersagbarkeit: Alle Ereignisse und Phänomene innerhalb einer naturwissenschaftlichen Disziplin sollen aus den Grundprinzipien heraus richtig vorausgesagt werden können. Dazu braucht es Kausalzusammenhänge, also Regeln, wie dies konkret gemacht werden muss.
- Kommunikation: Essenziell für die moderne (Natur-)Wissenschaft ist es, dass neue Ideen und Erkenntnisse auf eine Art und Weise veröffentlicht werden, dass Fachkollegen aus aller Welt darauf Zugriff haben. Dies geschieht oft schon im Zustand der Entstehung einer neuen Idee, sodass Andere an der Weiter- und Fertigstellung mitwirken können. Ziel ist das Aufbau eines kollektiven Verständnisses über alle Teilbereiche der Naturwissenschaft.

Alle Naturwissenschaften und ihre Erkenntnisse beruhen, wie auch der Name sagt, auf der genauen und vorurteilslosen Beobachtung der Natur. Jede Theorie muss wieder und wieder durch Experimente überprüft werden und kann jederzeit durch experimentelle Ergebnisse falsifiziert (als falsch erkannt) werden: „Das Experiment ist der Prüfstein jeder Theorie“.

Physik wird zwar bereits seit über 2000 Jahren betrieben, aber erst seit etwa 500 Jahren nach dieser Maxime. Zuvor wurden immer wieder intuitive Thesen und philosophische

Ideen zu Lehrsätzen erklärt, ohne dass man die Notwendigkeit verspürt hätte, diese Thesen experimentell zu überprüfen.

Das Ziel naturwissenschaftlicher Forschung ist es, allgemeine Gesetzmäßigkeiten aufzufinden, um die unüberschaubare Vielzahl einzelner Fakten auf vergleichsweise wenige Grundprinzipien zurückführen zu können. Man versucht dazu, sich ein möglichst genaues Modell von der Natur zu machen, das durch Experimente überprüft und immer weiter verfeinert wird.

Der naturwissenschaftliche Erkenntnisgewinn erfolgt zyklisch in der wiederholten Abfolge von Experiment und Modellbildung:

- Experiment: In Experimenten wird gezielt der Zusammenhang zwischen verschiedenen messbaren Größen abgefragt. Dabei wird dafür gesorgt, dass alle Nebenbedingungen genau definiert und möglichst viele unerwünschte Einflüsse ausgeschaltet sind.
- Hypothese: Das Ergebnis eines oder mehrerer Experimente ist der Zusammenhang mehrerer Größen unter bestimmten Bedingungen. Daraus versucht man ein Modell zu erstellen, das diesen Zusammenhang allgemein beschreibt, meist in Form von mathematisch formulierten Beziehungen. Das Modell wird in diesem Stadium „Hypothese“ genannt.
  Der hier vorgenommene Schritt der Verallgemeinerung „vom Kleinen ins Große“, also hier von experimentellen Daten in einer konkreten Situation hin zu einem allgemein gültigen Zusammenhang, wird in der Logik **Induktion** genannt.
- Überprüfung: Jede Hypothese sollte durch weitere Experimente überprüft werden. Dazu werden aus der Hypothese heraus die Ergebnisse von Experimenten bei bestimmten Bedingungen vorausgesagt („wenn die Hypothese stimmt, sollte dies und jenes herauskommen“) und dann im Experiment überprüft.
  Dieser Schritt „vom Großen ins Kleine“, hier von einer allgemeinen Hypothese zu den Ergebnissen in einer ganz bestimmten Situation, heißt **Deduktion**.
- Bestätigung: Wenn das Experiment das vorausgesagte Ergebnis ergibt, ist gezeigt, dass die Hypothese auch für diesen speziellen Fall gilt.
  Wenn eine Hypothese in vielen verschiedenen Experimenten bestätigt wurde, nennt man sie eine **Theorie**. Beachten Sie, dass eine Theorie in der Physik also das derzeit beste Modell zu einem bestimmten physikalischen Sachverhalt darstellt (und nicht etwa eine von mehreren Möglichkeiten). Manchmal wird eine Theorie „Gesetz“ genannt, wie z. B. das Gravitationsgesetz, das durch eine Vielzahl an Experimenten in verschiedensten Zusammenhängen immer wieder überprüft und für richtig befunden wurde.
- Falsifizierung: Wenn ein Experiment nicht das vorhergesagte Ergebnis bringt, obwohl es nach allen Regeln fehlerfrei ausgeführt wurde, gilt die ganze Hypothese als „falsifiziert“: Offensichtlich kann die Hypothese nicht alle Aspekte der Wirklichkeit richtig beschreiben. Die Hypothese muss daher verbessert oder ganz neu formuliert werden, um auch die neuen experimentellen Erkenntnisse richtig darstellen zu können.

Beachten Sie, das Erkenntnisgewinn nach diesem Schema vor allem dann entsteht, wenn sich ein bestehendes Modell (Hypothese oder Theorie) als nicht ganz korrekt erweist, also durch Falsifizierung eines vorhergesagten Ergebnisses. Dies führt in den meisten Fällen zu Korrekturen am vorhandenen Modell. Manchmal ist aber auch ein völliger Paradigmenwechsel notwendig: Dann muss das vorhandene Modell verworfen und durch ein ganz anderes ersetzt werden – spektakuläre Beispiele sind die Einführung der Quantenmechanik oder der Relativitätstheorie. Beachten Sie, dass das neue Modell dann nicht nur jene Daten erklären muss, für die das alte Modell falsch war, sondern auch alle anderen Daten, die mit dem alten Modell ohnehin richtig beschrieben wurden.

Experimente sind also der Schlüssel zur naturwissenschaftlichen Erkenntnis. Damit sie diesem Anspruch genügen, müssen sie einen hohen Standard erfüllen, der durch folgende Stichworte beschrieben wird:

- Reproduzierbarkeit: Ein Experiment muss mit gleichem Ergebnis wiederholt werden können, auch an einem anderen Ort und durch andere Experimentatoren. Dies ist das wichtigste Kriterium für verlässliche Erkenntnisse.
- Messbarkeit: Die Ergebnisse des Experiments, aber auch die Vorgaben und Nebenbedingungen müssen messbar sein – es muss also möglich sein, allen nötigen Variablen Zahlen zuzuweisen. Dazu müssen Messgeräte vorhanden sein oder entwickelt werden. Qualitative Angaben wie „der Stoff ändert seine Farbe von kirschrot zu zinnoberrot“ können höchstens in Vorversuchen nützlich sein.
- Variierbarkeit: Ein Experiment muss immer so aufgebaut sein, dass bestimmte Bedingungen („Eingangsvariablen“) gezielt verändert werden können, was dann zu einer Änderung der Ergebnisse führt („Ausgangsvariablen“). Die Feststellung solcher Abhängigkeiten ist das Hauptziel wissenschaftlicher Experimente: Wie genau hängt eine physikalische Größe von einer anderen ab?
- Professionalität: Das Ziel und die Voraussetzungen des Experiments müssen vorher bekannt und formuliert sein (kein „Schuss ins Blaue“). Die Experimentatoren müssen vom Wissen und vom technischen Geschick her in der Lage sein, alle Abläufe sicher zu kontrollieren. Das Experiment muss zu einem gewollten Zeitpunkt unter genau bekannten Bedingungen abgerufen werden können.
- Dokumentation: Ein erfolgreiches Experiment muss in allen Details ganz genau beschrieben werden, damit später (wenn z. B. Zweifel oder Fragen auftauchen) jeder Prozessschritt eindeutig belegt ist. Gute Dokumentation ist auch die Basis für die Reproduzierbarkeit des Experiments.

Die Physik und die anderen Naturwissenschaften versuchen, ein vollständiges und objektives Bild der uns umgebenden Natur zu erstellen, und sie haben in den letzten Jahrhunderten und Jahrzehnten dank der naturwissenschaftlichen Methodik in allen Bereichen riesige Fortschritte erzielt. Bei aller Begeisterung für den Reichtum an Erkenntnissen sollte man sich aber doch immer vor Augen halten, dass es viele weitere Aspekte der Welt gibt, die von dieser Methode aus Prinzip nicht beschrieben werden können. Ganz allgemein sind dies Fragen nach dem „Warum ist alles, wie es ist?“ (im Gegensatz zum beschreibenden „Wie ist alles?“ der Naturwissenschaften), für die die

Philosophie, die Theologie und andere Fächer zuständig sind. Ebenso können viele Fragen, bei denen menschliche Meinungen, Vorlieben und Verhaltensweisen mitspielen, nicht mit naturwissenschaftlichen Methoden angegangen werden, sondern mit ganz anders aufgebauten Techniken aus den Geisteswissenschaften.

1.3 Physikalische Größen

1.3.1 Messgrößen und Einheiten

(A) Messgröße

Jedes physikalische Objekt (ein Körper, eine Welle, ein Medium etc.) wird durch quantitativ bestimmbare Eigenschaften definiert. Diese Eigenschaften nennt man „physikalische Größen". Wichtig ist dabei das Wort „quantitativ": Jede physikalische Größe kann durch Zahlenwerte ganz eindeutig in ihrem Ausmaß beschrieben werden.

Damit ein solcher Zahlenwert eindeutig und vergleichbar ist, verwendet man immer die Schreibweise mit Maßzahl und Einheit wie z. B.

$$L = 3{,}12\,\mathrm{m} \qquad \text{mit} \qquad \begin{aligned} L &\ \ldots \text{ Symbol der Messgröße} \\ 3{,}12 &\ \ldots \text{ Maßzahl} \\ \mathrm{m} &\ \ldots \text{ Einheit} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Dabei bedeutet die Angabe der Einheit, dass wir bei der Messung die konkrete Messgröße mit der Einheit vergleichen und dann angeben, um wie viel größer oder kleiner sie ist. Man schreibt im oberen Beispiel eigentlich auf, dass die Länge L 3,12-mal so lang ist wie die Einheit 1 m. Man könnte genau genommen schreiben: $L = 3{,}12 \cdot 1\,\mathrm{m}$.

Messen bedeutet also immer, dass zwei Größen miteinander verglichen werden. Dazu wird die Messgröße in der Regel mit der zuständigen Einheit verglichen, die von einem Messgerät „zur Verfügung gestellt" wird.

(B) Größenart

Es gibt sehr viele physikalische Größen. Einige davon sind sich insofern ähnlich, als sie zur selben **Größenart** gehören: Die Größen „Höhe", „Wellenlänge", „Entfernung" usw. haben z. B. alle dieselbe Größenart „Länge". Das erkennt man daran, dass man all diese Größen im Prinzip mit demselben Messgerät messen kann (z. B. Maßband). Für ein- und dieselbe Größenart gibt es oft verschiedene Einheiten – so verwendet man für die Größenart Länge die Einheiten Meter, Meile, Lichtjahr und viele andere.

Verschiedene Messgrößen aus derselben Größenart können miteinander verglichen, addiert oder sonstwie kombiniert werden. Dazu ist es wichtig, diese Größen mit derselben

Einheit zu beschreiben, sobald man Zahlenwerte einsetzt. Prinzipiell unmöglich ist es hingegen, Größen verschiedener Größenart miteinander zu vergleichen (Aussagen wie „Mein Auto hat doppelt so viel Höchstgeschwindigkeit wie Leistung: 200 km/h, aber nur 100 kW“ sind unsinnig.)

(C) Basiseinheit

Zwischen vielen physikalischen Größen bestehen Beziehungen, die man als Formeln oder als Definitionsgleichungen aufschreiben kann. Deshalb hängen auch die Einheiten dieser physikalischen Größen miteinander zusammen.

Ein Beispiel ist die Größe Geschwindigkeit v, die mit Hilfe der Größen s (Wegstrecke, gemessen in Meter) und t (benötigte Zeit, gemessen in Sekunden) definiert ist, nämlich $v = s/t$. Daraus wird die Einheit für Geschwindigkeit abgeleitet, nämlich m/s (sprich: Meter pro Sekunde). Im Laufe dieser Vorlesung werden wir noch sehr viele weitere derartige Zusammenhänge besprechen.

Letztendlich zeigt sich, dass man alle physikalischen Größen auf sehr wenige Grundgrößen zurückführen kann. Seit vielen Jahrzehnten verwendet man in der Naturwissenschaft (fast) ausschließlich das SI (*Système international d'unités*), das auf folgenden sieben Grundgrößen aufgebaut ist, deren Größe mit den Basiseinheiten angegeben wird:

- Länge, gemessen in Meter (m)
- Masse, gemessen in Kilogramm (kg)
- Zeit, gemessen in Sekunde (s)
- Temperatur, gemessen in Kelvin (K)
- Stromstärke, gemessen in Ampere (A)
- Stoffmenge, gemessen in Mol (mol)
- Lichtstärke, gemessen in Candela (cd)

Für jede dieser Basiseinheiten muss eine genaue Regel angegeben sein, wie man sie „realisieren“ kann. Das bedeutet: Es muss irgendeine Methode definiert werden, mit der man feststellen kann, was z. B. genau $1,00000...$ m lang ist oder $1,00000...$ s lang dauert. Beachten Sie, dass alle Basisgrößen mehr oder weniger willkürlich von Menschen festgelegt wurden und sich nicht irgendwo in der Natur finden lassen.

Erst die präzise Festlegung der Einheiten, die jederzeit und überall nachgemacht werden kann, ermöglicht es, reproduzierbare und allgemeingültige Erkenntnisse zu gewinnen – nicht nur in den Naturwissenschaften, sondern auch in anderen Disziplinen wie z. B. in der Wirtschaft.

Wir besprechen unten im Abschnitt 1.3.2 die Realisierungsvorschriften für die drei Basiseinheiten Meter, Kilogramm und Sekunde, die in der Mechanik verwendet werden. Die übrigen folgen in späteren Vorlesungen.

(D) Angabe von Einheiten

Im SI gibt es für jede physikalische Größenart genau eine Einheit, mit der ihre Größe quantitativ angegeben wird. Diese Einheiten sind oft mit einem eigenen Namen versehen (z. B. „Watt“ für die Größenart Leistung), aber nicht immer (z. B. „m/s“ für die Größenart Geschwindigkeit in der Physik). Jede Einheit hat ein Einheitensymbol – beachten Sie dabei die Groß- und Kleinschreibung!

Für viele Größenarten gibt es eine ganze Reihe weiterer Einheiten, die in der Technik, im täglichen Leben, in anderen Disziplinen oder auch in veralteten Physikbüchern verwendet werden. Bemühen Sie sich dennoch, im Zusammenhang mit Physik nur die Einheiten aus dem SI zu benutzen!

In der Naturwissenschaft kommen viele Größen in einem sehr weiten Zahlenbereich vor. Da es umständlich ist, viele Stellen vor oder nach dem Komma zu schreiben, gibt es zwei Möglichkeiten, die Größenangabe solcher Werte verkürzt darzustellen:

- Potenzschreibweise:
  Man verschiebt das Komma so, dass eine Stelle vor dem Komma bleibt und so viele Stellen nach dem Komma, wie es von der Genauigkeit her notwendig ist (siehe Abschnitt 1.3.3). Diese Zahl wird mit 10^x multipliziert, wobei der Exponent x angibt, um wie viele Stellen das Komma verschoben wurde. x ist positiv, wenn das Komma nach links geschoben wurde (also bei großen Zahlen) und negativ, wenn es nach rechts geschoben wurde. Beispiele:
  $$\begin{aligned} 13800000000000\,\mathrm{W} &= 1,38 \cdot 10^{13}\,\mathrm{W} \\ 0,0000002356\,\mathrm{m} &= 2,356 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m} \end{aligned}$$
- Präfixe (Vorsilben):
  Man versetzt das Komma um ein Vielfaches von 3 Stellen nach rechts oder links und setzt eine Vorsilbe vor die Einheit, die durch ein Symbol mit einem Buchstaben abgekürzt wird. Listen dieser Vorsilben finden sich in jedem Physikbuch. Die Beispiele von oben werden dann zu
  $$\begin{aligned} 1380000000000\,\mathrm{W} &= 13,8\,\mathrm{TW} \quad \text{(Terawatt)} \\ 0,0000002356\,\mathrm{m} &= 235,6\,\mathrm{nm} \quad \text{(Nanometer)} \end{aligned}$$

1.3.2 Basisgrößen der Mechanik

Für die Mechanik werden nur drei der sieben SI-Basisgrößen benötigt: Alle Größen, die wir im Laufe dieser Vorlesung verwenden, und ihre Einheiten lassen sich im SI auf die Basisgrößen Zeit (Sekunde), Länge (Meter) und Masse (Kilogramm) zurückführen.

(A) Die Zeit t

Die Zeit wird im SI in der Einheit Sekunde gemessen. Diese Einheit wird aus der Stunde abgeleitet, die – als Aufteilung des „hellen Tages“ in 12 gleiche Teile – bereits seit mehreren tausend Jahren in Gebrauch ist. Auch die Minute (1/60 einer Stunde) und die Sekunde (1/60 einer Minute, also 1/3600 einer Stunde) werden bereits seit fast tausend Jahren verwendet.

Die Definition hat sich über die Jahrhunderte grundlegend verändert. Während die Sekunde früher mit Hilfe der Länge eines Tages oder später – wegen allzu großer Schwankungen – über die Länge eines Jahres definiert wurde („Ephemeridensekunde"), verwendet man heute die Frequenz von Mikrowellen, die aus einem genau definierten atomaren Übergang des chemischen Elements Cäsium (Cs) ausgesandt oder von diesem Übergang absorbiert werden.

Konkret wird das in der Cäsium-Atomuhr so umgesetzt, dass Mikrowellen erzeugt werden, die genau dieser Frequenz entsprechen. Dies wird permanent kontrolliert, indem man die Mikrowellen auf Cäsium-Atome strahlt, die mit den Mikrowellen nur dann in Wechselwirkung treten, wenn die Frequenz genau stimmt. Nur dann können die Mikrowellen die Cs-Atome in einen bestimmten magnetischen Zustand bringen (was man gut kontrollieren kann), und nur dann werden die Mikrowellen merkbar absorbiert. Falls sich die Frequenz der Mikrowellen verändert, nimmt die Stärke der Wechselwirkung ab, und man kann die Frequenz nachregeln.

Die aktuelle Definition für eine Sekunde lautet somit:

Eine Sekunde ist jenes Zeitintervall, in dem eine Cäsiumuhr genau 9.192.631.770,0 Schwingungen macht.

Es gibt Bestrebungen, die Definition der Sekunde noch beträchtlich genauer zu machen, indem andere Atome oder Moleküle verwendet werden, bei denen es einen passenden Übergang gibt, der viel höhere Frequenz hat.

Zur konkreten Messung der Zeit braucht man immer irgendeinen „Referenzvorgang", von dem man genau weiß, wie er zeitlich verläuft und mit dem man den interessierenden Vorgang vergleichen kann.

In den meisten Fällen verwendet man periodisch ablaufende Effekte als Referenz, also Vorgänge, die sich in festen Zeitabständen wiederholen. Historisch waren das der Herzschlag (Ruhepuls) oder Pendel, später auch Feder-Drehschwingungen („Unruhe" einer mechanischen Uhr). Heutzutage werden die Resonanzschwingungen eines kleinen Quarzkristalls verwendet, die ein konstantes elektrisches Taktsignal erzeugen. Für Präzisionsanwendungen gibt es Atomuhren, die nach dem Prinzip der Cäsiumuhr funktionieren und zum Teil sogar erheblich genauer sind.

Die Zeitmessung benutzt den vorgegebenen Takt dann, indem abgezählt wird, wie viele „Taktschläge" stattgefunden haben, während das Ereignis abläuft, dessen Dauer man kennen möchte. Zur Messung sehr kurzer Ereignisse braucht man also immer Uhren mit einem inneren Takt, der noch viel kürzer ist als das kurze Ereignis.

Manchmal werden auch nicht-periodische Vorgänge als „Zeitmaß" verwendet. Ein Beispiel ist die ^{14}C-Methode, mit der in der Archäologie das Alter biologischer Substanzen abgeschätzt werden kann. Das Verfahren beruht darauf, dass lebende Pflanzen und Organismen aus der Luft stetig das radioaktive Kohlenstoff-Isotop ^{14}C aufnehmen, das sich dann im Körper zu einem gewissen sehr kleinen Prozentsatz neben dem „normalen“ Isotop ^{12}C anlagert. Nach dem Tod des Organismus wird kein neuer Kohlenstoff aufgenommen und das ^{14}C zerfällt mit einer Halbwertszeit von $\tau_{1/2} \sim 5700\,\mathrm{y}$. Aus der Bestimmung des relativen ^{14}C-Gehalts kann also auf das Alter geschlossen werden.

Beachten Sie zur Größe „Zeit“ noch Folgendes:

- „Zeit“ kann zwei Bedeutungen haben:
  - Zeitpunkt: Wird typisch als Datum und Uhrzeit angegeben. Die korrekte Angabe beruht darauf, dass man sich auf ein gültiges Referenzsystem geeinigt hat („Wann ist es genau 0 Uhr?“).
  - Zeitdauer: Beschreibt die Länge eines Ereignisses oder den Abstand zwischen zwei Vorfällen.
- In der speziellen Relativitätstheorie wird gezeigt, dass die Zeit unterschiedlich schnell vergeht, wenn sich zwei Körper mit sehr stark unterschiedlicher Geschwindigkeit bewegen. Wie lang ein Ereignis dauert, hängt davon ab, aus welchem System man die Situation beobachtet. Es zeigt sich also, dass die Zeit keine absolute Größe ist. Man nennt diesen Effekt „Zeitdilatation“.
- In der speziellen Relativitätstheorie wird außerdem gezeigt, dass nicht eindeutig geklärt werden kann, ob zwei Ereignisse gleichzeitig stattfinden, wenn sie weit voneinander entfernt sind. („Relativität der Gleichzeitigkeit“).
- In der allgemeinen Relativitätstheorie wird gezeigt, dass die Zeit in einem starken Gravitationsfeld langsamer vergeht als außerhalb.

(B) Die Länge s

Die Länge wird im SI in der Einheit Meter gemessen. Diese Einheit stammt aus der Zeit der französischen Revolution und wurde ursprünglich auf die Erde bezogen (1 m sollte der 40-millionste Teil des Erdumfangs sein), was sich jedoch als nicht hinreichend genau herausstellte.

In der Folge gab es andere, zunehmend genauere Definitionen: Erst den „Urmeter“, dann den „Meterprototyp“ (jeweils eine Metallstange mit genauer Länge), später den Bezug auf die Wellenlänge einer bestimmten charakteristischen Strahlung, so wie bei der Definition der Sekunde.

Seit 1973 gilt die aktuelle Definition, die auf der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit c_0 beruht, weil diese als absolute Konstante erkannt wurde. Zwei wichtige Fakten dazu:

- Materie kann sich nie schneller als c_0 bewegen.
- Licht bewegt sich relativ zu einem Beobachter im Vakuum immer genau mit c_0, egal wie schnell der Beobachter selbst unterwegs ist.

Der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit wurde also ein fester Wert zugewiesen, der den bis dahin genauesten Messwerten entspricht, nämlich $c_0 = 299\,792\,458$ m/s. Damit wird nun aktuell die Einheit Meter definiert:

Ein Meter ist jene Strecke, die Licht im Vakuum während des Zeitintervalls 1/299 792 458 s zurücklegt.

Beachten Sie, dass die Definition des Meters hier auf die Definition einer Sekunde zurückgreift. Darüber hinaus verlässt man sich darauf, dass die Naturkonstante „Lichtgeschwindigkeit“ tatsächlich konstant ist. Beachten Sie, dass wir es mit dieser Definition gar nicht bemerken könnten, wenn sich c_0 im Lauf der Zeit verändern würde.

Zur konkreten Messung von Längen gibt es eine immense Menge an verschiedenen Methoden, je nach Längenbereich und gewünschter Genauigkeit. Einige Beispiele:

- Vergleich mit einem vorgefertigen Maßstab (Maßband, Zollstock etc.).
- Vergleich mit der Wellenlänge von Licht (Laser-Interferometer).
- Messung der Umdrehungen eines Rades (Kilometerzähler).
- Messung der Laufzeit von Licht (Radar, Laser-Entfernungsmesser, GPS).

Zur Messung alltäglicher Längen sind vielerorts nicht-SI-Einheiten in Gebrauch, z. B. 1 mil $= 25,4\,\mu$m, 1 Zoll (inch) $= 2,54$ cm, 1 Meile ≈ 1609 m oder 1 Seemeile $= 1852$ m. Auch für sehr große Entfernungen gibt es alternativ definierte Einheiten, so z. B. das Lichtjahr, das jene Entfernung definiert, die Licht im Vakuum in einem Jahr zurücklegt ($1\,\text{ly} = 365,24 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot c_0 \approx 9,46 \cdot 10^{15}\,\text{s}$).

Beachten Sie, dass auch die Größe Länge nicht absolut und eindeutig bestimmt werden kann, sobald große Geschwindigkeiten im Spiel sind: Die spezielle Relativitätstheorie beschreibt, dass die Länge jedes Objekts kleiner wird, wenn sich das Objekt relativ zur Messposition bewegt. Dieser Effekt heißt „relativistische Längenkontraktion“ und spielt bei Geschwindigkeiten nahe an der Lichtgeschwindigkeit eine Rolle, z. B. in Teilchenbeschleunigern.

(C) Die Masse m

Die Masse beschreibt die Menge an Materie, die in einem bestimmten Körper vorhanden ist. Sie wird in der Einheit Kilogramm gemessen, die in der Zeit der französischen Revolution eingeführt wurde. Ursprünglich wurde die Einheit 1 Gramm als Masse von 1 cm^3 Wasser definiert. Bald stellte sich aber heraus, dass diese Menge zu klein für eine genaue Definition ist. Außerdem eignet sich Wasser sehr schlecht als Mess-Standard, wegen Eigenschaften wie Temperaturausdehnung, Verdunstung, Oberflächenbenetzung, Reinheit usw.

In Anlehnung an die Wasser-Definition wurden also ein Metallstück hergestellt, das sogenannte „Urkilogramm“, dessen Masse als $m = 1,00000...$ kg festgelegt wurde. Darauf beruht die Definition der Basiseinheit Kilogramm, die bis ins Jahr 2019 gültig war: „Ein Kilogramm ist die Masse des Internationalen Kilogrammprototyps (eines Zylinders aus einer Platin-Iridium-Legierung, der in Paris als Massennormal aufbewahrt wird).“

Diese Definition wurde mehr und mehr problematisch, weil Zweifel daran bestanden, dass die Masse des Prototyps mit der heute benötigten Genauigkeit konstant bleibt. Effekte wie Abrieb, Verdunstung, Einlagerung fremder Atome, Kernumwandlungen usw. könnten die Masse geringfügig verändern. Tatsächlich gab es Unstimmigkeiten und Diskrepanzen beim Vergleich des „originalen“ Prototyps mit Kopien, die eigentlich genau massengleich sein sollten: Über einige Jahrzehnte entwickelten sich Unterschiede bis zu einigen $10\,\mu$g.

Seit dem 20. Mai 2019 ist eine neue Definition des Kilogramm in Kraft:

Ein Kilogramm beruht darauf, dass die Naturkonstante „Plancksches Wirkungsquantum“ genau den Wert $h = \mathbf{6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34}\,Js}$ hat. Dabei ist die Einheit $\mathbf{1\,Js = 1\,kg \cdot 1\,m^2 / 1\,s}$, wobei Meter und Sekunde nach den SI-Definitionen realisiert werden müssen.

Das Plancksche Wirkungsquantum h verknüpft die Frequenz ν und die Energie E eines Photons (oder „Lichtquants“) nach der Formel $E = h \cdot \nu$ und ist eine der zentralen Größen der Quantenmechanik. h wurde bisher nach verschiedenen Methoden immer genauer gemessen, wurde aber nun mit dem oben angegebenen festen Wert definiert (so wie auch die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit).

Die Kilogramm-Definition legt nicht fest, mit welchem konkreten Experiment die Masseneinheit bestimmt werden muss. Im Prinzip sind all jene Experimente dazu geeignet, mit denen bis vor Kurzem versucht wurde, den genauen Wert der Konstante h zu bestimmen: Da der Zahlenwert für h nun festgelegt wurde, ergibt ein solches verbessertes Experiment also keinen genaueren Wert für h, sondern eine präzisere Definition der Masseneinheit Kilogramm.

Im Moment gibt es zwei ganz unterschiedliche Experimente, mit denen versucht wird, das Kilogramm sehr viel genauer und verlässlicher als bisher zu definieren:

- Watt-Waage:
  Hier wird die Schwerkraft, die auf ein Massestück wirkt, durch eine elektromagnetische Kraft kompensiert. Diese wiederum kann auf komplizierte Art auf das Plancksche Wirkungsquantum zurückgeführt werden. Als Messgrößen bleiben eine Geschwindigkeit und die Erdbeschleunigung, die mittels bekannter SI-Einheiten bestimmt werden können, sodass die Masse des Testobjekts ohne weitere Annahmen eindeutig festgelegt werden kann.
- Avogadro-Projekt:
  Als Testobjekt fungiert eine Kugel aus hochreinem Silizium (genauer gesagt: aus dem Silizium-Isotop ^{28}Si). In dieser Kugel kann die Anzahl an Silizium-Atomen extrem genau bestimmt werden. Die Masse eines Atoms kann auf Naturkonstanten zurückgeführt werden, u.a. auf das Plancksche Wirkungsquantum, sodass man ganz präzise den SI-Zahlenwert für die Masse dieser Kugel bestimmen kann.

Die Größe „Masse“ beschreibt zwei ganz verschiedene Eigenschaften von Materie:

- „Schwere Masse“:
  Diese Eigenschaft ist dafür verantwortlich, dass jeder Körper alle anderen Körper mittels Gravitationskraft anzieht (siehe Abschnitt 3.2.2). Auf der Erdoberfläche fühlen wir die Anziehung aller Massen durch die Masse der Erde und nennen diese Anziehung „Gewichtskraft“. Aus der Messung der Gewichtskraft kann ziemlich genau auf die Masse eines Körpers geschlossen werden – dies ist die Standardmethode zur konkreten Bestimmung von Massen („Wiegen“).
- „Träge Masse“:
  Diese Eigenschaft beschreibt die Tatsache, dass Materie immer im momentanen Bewegungszustand verbleibt, solange keine Kraft auf sie wirkt (siehe Abschnitt 3.1.3). Der „Aufwand“, den Bewegungszustand zu ändern (also die nötige Kraft), ist proportional zu dieser trägen Masse. Auch diese Eigenschaft kann zur Messung der Masse verwendet werden.

Es gibt vorerst keinen Grund, dass die schwere Masse und die träge Masse eines Körpers denselben Wert haben. In vielen grundlegenden Experimenten ist aber gezeigt worden, dass der Zahlenwert mit hoher Genauigkeit gleich ist. Damit ist empirisch gezeigt, dass die physikalische Größe Masse m die beiden Eigenschaften Trägheit und Gravitation in sich trägt, die sonst nichts miteinander zu tun haben.

Die Masse eines Körpers nimmt zu, wenn seine Geschwindigkeit in die Nähe der Lichtgeschwindigkeit kommt, allerdings nur aus Sicht eines ruhenden Beobachters. Im System des bewegten Körpers misst man immer die Ruhemasse. Dies ist zum Beispiel in Teilchenbeschleunigern von Bedeutung.

Die Masse jedes Körpers ist auf den ganzen Körper verteilt. Zum Rechnen kann man sich aber sehr oft die ganze Masse in einem Punkt vereinigt denken. Dieser „Massenmittelpunkt“ (MMP) eines Körpers (manchmal auch „Schwerpunkt“ genannt) ist sein mit der Masse gewichteter geometrischer Mittelpunkt.

Zuerst zum geometrischen Mittelpunkt eines Körpers ohne Gewichtung: Als einfaches Beispiel nehmen wir einen hantelförmigen Körper aus zwei „punktförmigen Massen“, die durch eine „masselose Stange“ verbunden sind. Wenn sich die Massen an den Positionen $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ befinden, liegt ihr geometrischer Mittelpunkt an der Position

$$\vec{r}_G = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2} \qquad \big(\text{geometrischer Mittelpunkt}\big) \tag{1.2}$$

Das ist aber nicht unbedingt der Massenmittelpunkt: Für den Massenmittelpunkt spielt es auch eine Rolle, wie groß die beiden Massen m_1 und m_2 sind. Deshalb wird jeder Positionsvektor mit der entsprechenden Masse multipliziert und alles durch die Gesamtmasse geteilt:

$$\vec{r}_S = \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \qquad \big(\text{Massenmittelpunkt (MMP)}\big) \tag{1.3}$$

Dadurch wird die Position der größeren Masse stärker berücksichtigt – der MMP liegt also näher an ihr. Wenn der Körper aus vielen einzelnen Massen besteht, läuft die Berechnung genau analog: Für den geometrischen Mittelpunkt addieren wir alle Positionsvektoren und teilen durch die Anzahl, und für den Massenmittelpunkt addieren wir alle mit der Masse gewichteten Positionsvektoren und teilen durch die Gesamtmasse. Im Normalfall haben wir es nicht mit Ansammlungen einzelner Massen zu tun, sondern mit kontinuierlichen Körpern (die zwar streng genommen aus vielen einzelnen Atomen oder Molekülen bestehen, aber das kann man für solche Berechnungen nicht verwenden). Dann wird statt der Summe über alle einzelnen Massen ein Integral über sehr viele infinitesimale Massenelemente ausgerechnet:

$$\vec{r}_S \;=\; \frac{\sum m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum m_i} \qquad \rightarrow \quad \vec{r}_S \;=\; \frac{\int \mathrm{d}M \cdot \vec{r}(\mathrm{d}M)}{\int \mathrm{d}M}$$

Das Integral im Nenner ist einfach die Gesamtmasse des Körpers. Um das Integral im Zähler ausrechnen zu können, setzt man für ein Massenelement $\mathrm{d}M = \rho \cdot \mathrm{d}V$ mit der Dichte ρ (in kg/m^2) und dem Volumselement $\mathrm{d}V$:

$$\vec{r}_S \;=\; \frac{\int \vec{r}\,\rho \cdot \mathrm{d}V}{M} \qquad \text{Massenmittelpunkt} \tag{1.4}$$

Für homogene Körper ist die Dichte ρ an jeder Stelle gleich. Dann kann man die Dichte vor das Integral ziehen und der Schwerpunkt liegt genau am geometrischen Mittelpunkt. In diesem Fall und für regelmäßig geformte Körper lässt sich das Integral in vielen Fällen analytisch berechnen. So muss der Massenmittelpunkt z. B. bei symmetrischen Körpern immer auf der Symmetrieachse liegen, was die Berechnung seiner Position sehr vereinfacht.

Als Beispiel betrachten wir eine quadratische Pyramide. Die quadratische Grundfläche habe die Seitenlänge A, die Gesamthöhe sei H und die Massendichte ρ sei überall gleich. Eine solche Pyramide hat eine Symmetrieachse, auf der der Massenmittelpunkt liegen muss, die vom Mittelpunkt der Grundfläche bis zur Spitze läuft.

Damit die Integration in der Gleichung (1.4) möglichst einfach ist, sollte man die Form der Volumenelemente klug wählen. Im Fall der quadratischen Pyramide ist es vorteilhaft, wenn man sich vorstellt, die Pyramide bestehe aus lauter ganz dünnen Quadraten, die alle über der Grundfläche gestapelt sind. Jedes Quadrat hat das Volumen

$$\mathrm{d}V(z) \;=\; a(z)^2 \cdot \mathrm{d}z \qquad \text{mit der Seitenlänge} \quad a(z) \;=\; A \cdot \frac{H - z}{H}$$

Jedes Quadrat hat seinen Massenmittelpunkt genau im Zentrum, also auf der Symmetrieachse. Wir dürfen uns also die Masse jedes Quadrats in seinen MMP konzentriert denken und müssen fürs Integral nun nur mehr den gewichteten Mittelpunkt dieser einzelnen Schwerpunkte ausrechnen. Das ist ein Integral in einer Dimension entlang der z-Achse:

$$
\begin{aligned}
z_S \;&=\; \frac{\int z\cdot\rho\cdot\mathrm{d}V}{\int \rho\cdot\mathrm{d}V} \;=\; \frac{\rho\cdot\int z\cdot(a(z))^2\,\mathrm{d}z}{\rho\cdot\int (a(z))^2\,\mathrm{d}z} \;=\; \frac{\rho\cdot(A/H)^2\cdot\int z\cdot(H-z)^2\cdot\mathrm{d}z}{\rho\cdot(A/H)^2\cdot\int (H-z)^2\cdot\mathrm{d}z} \\
&=\; \frac{\int\limits_0^H z\cdot(H^2-2\,H\,z+z^2)\cdot\mathrm{d}z}{\int\limits_0^H (H^2-2\,H\,z+z^2)\cdot\mathrm{d}z} \;=\; \frac{\left(H^2\cdot z^2/2-2\,H\,z^3/3+z^4/4\right)\Big|_0^H}{\left(H^2\cdot z-H\,z^2+z^3/3\right)\Big|_0^H} \;=\; \frac{H}{4}
\end{aligned}
$$

Der Massenmittelpunkt des Pyramide liegt auf der Symmetrieachse genau bei einem Viertel der Gesamthöhe der Pyramide. Weil die Dichte in der ganzen Pyramide gleich ist, ist das gleichzeitig der geometrische Mittelpunkt.

Experimentell kann der Massenmittelpunkt eines kompliziert geformten Körpers recht einfach bestimmt werden: Wenn man den Körper an irgendeinem Punkt aufhängt, wird er sich so lange drehen, bis sich der Schwerpunkt genau senkrecht unter dem Aufhängepunkt befindet. Diese senkrechte Linie wird markiert. Anschließend macht man dasselbe für einen zweiten Aufhängepunkt. Die Schnittpunkte der ermittelten Schwerlinien ergeben den Massenmittelpunkt.

1.3.3 Messfehler und Genauigkeit

Die Messung physikalischer Größen ist zwangsläufig nicht unendlich genau, sondern immer mit einer bestimmten Unsicherheit verbunden. Diese Unsicherheit wird „Messfehler“ genannt. Dieser Begriff ist missverständlich, weil man damit ein Fehlverhalten der Experimentatoren verbinden könnte. Das ist aber nicht gemeint! Wir beschreiben damit vielmehr die Genauigkeit, mit der eine physikalische Größe in einem konkreten Fall bestimmt werden kann.

Jede physikalische Größe, egal ob sie gemessen, aus gemessenen Größen berechnet oder aus theoretischen Überlegungen ausgerechnet wird, sollte immer mit ihrem Fehler angegeben werden, sodass wir die Schreibweise in Gleichung (1.1) eigentlich erweitern müssen zu

$$
\begin{aligned}
& L \;=\; \big(3,12\pm 0,14\big)\,\mathrm{m} && \text{mit dem Fehler } \Delta L \;=\; 0,14\,\mathrm{m} \\
\text{oder}\quad & L \;=\; 3,12\,\mathrm{m}\pm 4,5\,\% && \text{mit dem Fehler } \Delta L \;=\; 0,045\cdot L
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

Wie hier gezeigt, wird ein Messwert entweder mit dem absoluten Fehler ΔL oder mit dem relativen Fehler $\Delta L/L$ angegeben, wobei die Fehlerangabe immer als Abschätzung zu sehen ist und somit keinen Anspruch auf Präzision hat.

In vielen praktischen Fällen ist die Bestimmung des Messfehlers mindestens ebenso schwierig wie die Gewinnung der Messwerte. Unverzichtbar sind diese Fehler aber spätestens dann, wenn man die gewonnenen Messdaten mit einem theoretischen

Modell vergleicht, wie das im Kap. 1.2 besprochen wird. Man muss dann entscheiden, ob die Messwerte zum Modell passen oder nicht. Das Kriterium ist immer, ob die theoretisch ermittelte Kurve jene Bereiche schneidet, die durch die Fehler um die Messwerte festgelegt werden.

Die zwangsläufigen Ungenauigkeit aller physikalischen Daten durch Messfehler führt dazu, dass man bei der Angabe von Zahlenwerten immer darauf achten muss, dass nur sinnvolle Information dargestellt wird. Als Faustregel gilt:

- Der Fehler wird mit zwei signifikanten Stellen angegeben, manchmal nur mit einer.
- Der Messwert wird so genau angeschrieben, dass die letzten beiden Ziffern den Dezimalstellen des Fehlers entsprechen.
- Dezimalstellen, die darüber hinaus ermittelt wurden, werden gerundet.

Beispiele:

Richtig: $L = 12,5612 \pm 0,0042\,\mathrm{m}$, falsch: $L = 12,5 \pm 0,0042\,\mathrm{m}$.

Richtig: $p = 84300 \pm 2900\,\mathrm{Pa}$, falsch: $p = 84321 \pm 2883\,\mathrm{Pa}$.

Richtig: $P = 121 \pm 12\,\mathrm{W}$, falsch: $P = 121,356 \pm 12\,\mathrm{W}$.

Wenn physikalische Daten ohne Fehler angegeben sind, geht man immer davon aus, dass die letzte angegebene Ziffer noch verlässlich ist. Die Angabe $t = 13,4\,\mathrm{s}$ bedeutet also ungefähr $t = 13,40 \pm 0,05\,\mathrm{s}$. Geben Sie acht: Die Angabe $L = 2\,\mathrm{m}$ bedeutet in der Physik eigentlich $L = 2,0 \pm 0,5\,\mathrm{m}$. Wenn „genau $2\,\mathrm{m}$“ gemeint ist, muss man schreiben $L = 2,00\,\mathrm{m} = 200\,\mathrm{cm}$ oder sogar $L = 2,000\,\mathrm{m} = 200,0\,\mathrm{cm}$, je nachdem, wie genau der Wert bekannt ist.

Beim Berechnen physikalischen Größen ist analog vorzugehen. Als Grundregeln merkt man sich:

- Ein Rechenergebnis kann nie genauer sein als die Ausgangszahlen, die man in die Formeln einsetzt.
- Die ungenaueste Eingangszahl definiert die Genauigkeit des Ergebnisses.
- Die Genauigkeit jeder Zahl wird durch die Anzahl an signifikanten Stellen festgelegt. Das sind jene Ziffern, die quantitative Information tragen. Beispiel: die Zahlen 0,00237, 3520000 und $4,17 \cdot 10^{22}$ haben in diesem Sinn alle die gleiche Genauigkeit, nämlich drei signifikante Stellen.

2 Kinematik: Die Beschreibung von Bewegungen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns damit, die Bewegung von „Punktmassen“ zu beschreiben. Eine Punktmasse ist entweder ein sehr kleiner Körper oder – allgemeiner – ein Körper, dessen gesamte Masse wir uns in seinem Massenmittelpunkt vereinigt denken (siehe Gleichung (1.4)). Wir beschreiben vorerst nur die „Bahn“ des Körpers, nicht aber, was er sonst noch macht, z. B. sich drehen, taumeln, schwingen, deformieren: solche Dinge kommen später ab dem Kap. 5.

Wir beschäftigen uns hier nur mit der Beschreibung der Bewegung – dies nennt man Kinematik. Die Ursachen von Bewegungen, sowie Methoden, die Bewegung von Körpern zu beeinflussen („Dynamik“), besprechen wir im folgenden Kap. 3.

2.1 Größen zur Beschreibung von Bewegung

Wenn man die Bewegung eines Körpers beschreiben will, folgt man einer Regel, die man zur Beschreibung aller physikalischen Phänomene anwendet:

So einfach wie möglich und so kompliziert wie notwendig.

Im Fall von bewegten Körpern heißt das zum Beispiel, dass wir uns in jedem Fall vorerst überlegen sollten, wie viele Dimensionen zur Beschreibung notwendig sind. Wir beginnen hier immer mit der kompliziertesten Beschreibung (voll 3D), besprechen aber auch, wie man dies für sehr viele Fälle vereinfachen kann.

2.1.1 Die Position

(A) Koordinatensystem

Die momentane Position einer Punktmasse wird als dreidimensionaler Vektor angegeben. Bevor wir dies tun können, brauchen wir ein passendes Koordinatensystem. Meist verwendet man kartesische Koordinaten, also drei zueinander orthogonale Achsen, die man als x-, y- und z-Achse bezeichnet. Dieses Koordinatensystem kann man in vielen Fällen selbst definieren und zwar am besten so, dass es gut zur Situation passt, die wir beschreiben wollen. Konkret wird benötigt:

- **Koordinatenursprung:**
  Jener Punkt im Raum, von dem das Koordinatensystem ausgeht.
- **3 orthogonale Achsen (Rechtssystem!):**
  Achten Sie bei den Richtungen der Achsen darauf, dass sie ein „Rechtssystem“

bilden! Wenn Ihr Koordinatensystem kein Rechtssystem ist, dann berechnen Sie z. B. Drehbewegungen (ab Kap. 5) falsch.
Kontrolle: Drehen Sie Ihre **rechte Hand** so, dass der Daumen in Richtung der x-Achse zeigt und der gestreckte Zeigefinger in Richtung der y-Achse. Dann muss die z-Achse in Richtung des halb gekrümmten Mittelfingers zeigen. Wenn das nicht funktioniert, muss die Richtung genau einer Achse umgedreht werden.

Auf der Erdoberfläche wählt man in der Regel ein Koordinatensystem, dessen Richtungen an Landkarten angelehnt sind: x zeigt nach Osten (rechts), y nach Norden (nach hinten) und z senkrecht nach oben. Beachten Sie, dass diese Koordinatenwahl ein Rechtssystem bildet. Der Ursprung wird meistens auf der Erdoberfläche gewählt, an einer Position, die für das gegebene Problem nützlich ist.

(B) Position: Definition

Die Position eines Massenpunktes zum Zeitpunkt t wird als Vektor angegeben:

$$\text{Ortsvektor:} \qquad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

Die Koordinaten $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$ beschreiben jeweils die Position in einer Dimension (z. B. x: rechts-links, y: hinten-vorne, z: oben-unten) und können sich unabhängig voneinander mit der Zeit verändern. Jede Koordinate des Ortsvektors hat die Dimension „Länge“. Beachten Sie, dass oft auch andere Variablennamen verwendet werden, um Positionen anzugeben.

In der Physik werden Vektoren für die Darstellung häufig nach Betrag und Richtung zerlegt. Für den Ortsvektor $\vec{r}(t)$ bedeutet das:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= r(t) \cdot \vec{e}_r(t) \qquad \text{mit} && (2.2) \\ r(t) &= |\vec{r}(t)| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2} \qquad \big(\text{Entfernung vom Ursprung}\big) \\ \vec{e}_r(t) &= \frac{\vec{r}(t)}{|\vec{r}(t)|} = \frac{\vec{r}(t)}{r(t)} \qquad \big(\text{Einheitsvektor zur Richtungsangabe}\big) \end{aligned}$$

Der Betrag $r(t)$ ist ein Skalar mit der Größenart Länge und gibt die Entfernung des Massenpunktes vom Koordinatenursprung an, enthält aber keine Information über die Richtung. Der Einheitsvektor $\vec{e}_r(t)$ hat genau die Länge 1 und keine physikalische Einheit. Er gibt nur die Richtung vom Koordinatenursprung zum Massenpunkt hin an. Diese Schreibweise kann für alle physikalischen Vektorgrößen zur Darstellung verwendet werden und erlaubt es, rasch den Zahlenwert der Größe zu erkennen (Betrag). Wenn mit den Vektoren gerechnet wird, muss man immer die Koordinatendarstellung verwenden (wie hier in Gleichung (2.1)).

In vielen Fällen wird die Positionsangabe vereinfacht, zum Beispiel:

- Wenn der Massenpunkt immer in einer Ebene bleibt, kann man einen zweidimensionalen Ortsvektor verwenden:

$$\text{2D-Ortsvektor:} \qquad \vec{r}(t) \ = \ \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

  Die Ebene, die durch die Koordinaten x und y beschrieben wird, kann dabei irgendwie windschief im Raum liegen.

- Wenn der Massenpunkt immer auf einer Linie bleibt (egal, wie diese orientiert ist), kann man die Position skalar beschreiben (also mit einer Zahl):

$$\text{1D-Positionsbeschreibung:} \qquad x(t)$$

  In diesem Fall ist die Positionsmessung wesentlich einfacher (km-Zähler etc.).

- Auf einer Kugeloberfläche kann es günstig sein, die Position in sphärischen Koordinaten mit Hilfe von zwei Winkeln anzugeben. Dies wird zum Beispiel bei GPS-Positionsdaten auf der Erdoberfläche gemacht. So hat z. B. der Hörsaal 5L an der HHU die Koordinaten

$$\text{Hörsaal 5L:} \qquad 51^\circ\, 11'\, 14{,}0''\ \text{N}, \quad 6^\circ\, 47'\, 50{,}4''\ \text{O}$$

  Das ist eine Angabe in Grad, Bogenminuten ($60' = 1^\circ$) und Bogensekunden ($60'' = 1'$). Sie bezieht sich in der Nord-Süd-Richtung auf den Äquator und in der West-Ost-Richtung auf den Meridian (Längenkreis), der durch das Observatorium von Greenwich läuft (Stadtteil von London).

(C) Position: Messung

In der Praxis kann man die Position $\vec{r}(t)$ eines bewegten Körpers auf verschiedene Arten messen. Dazu müssen zu bestimmten Zeitpunkten alle drei Koordinatenwerte bestimmt werden. Beispiele:

- In der Umgebung von Flughäfen werden die Positionen aller an- und abfliegenden Flugzeuge mit Hilfe von Radar-Techniken bestimmt: Das Gerät sendet gerichtete Mikrowellenpulse aus und misst die vom Objekt zurückreflektierten Anteile. Daraus können Richtung und Entfernung des Flugzeugs bestimmt werden.
- Bei der GPS-Positionsbestimmung (Mobiltelefone, Navigationsgeräte usw.) werden von mehreren Satelliten Funksignale ausgesandt, die ein präzises Zeitsignal sowie Informationen übe die Position des Satelliten enthalten. Wenn von mindestens drei (besser vier) dieser Satelliten gleichzeitig Signale empfangen werden, lässt sich die Position des Empfängers auf einige Meter genau berechnen.

Man kann die Position $\vec{r}(t)$ eines bewegten Körpers aber auch berechnen, wenn man seine Startposition und -geschwindigkeit kennt sowie alle Kräfte, die unterwegs auf ihn wirken. Damit beschäftigen wir uns im Kap. 3.

2.1.2 Die Geschwindigkeit

(A) Definition

Wenn sich ein Massenpunkt bewegt, dann verändert sich sein Ortsvektor $\vec{r}$ mit der Zeit. Die momentane Veränderung wird durch die Ableitung nach der Zeit t beschrieben und heißt Geschwindigkeit:

$$\textbf{Geschwindigkeit:} \qquad \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

$$\text{Dimension:} \quad \dim(v) = \frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}} \qquad \text{SI-Einheit:} \quad [v] = \text{m/s}$$

Bemerkungen:

- Wenn man einen Vektor nach der Zeit ableitet, muss man jede Komponente des Vektors einzeln nach der Zeit ableiten: v_x ist die Zeitableitung der Richtungskomponente $x(t)$, usw.
- Ganz allgemein verwendet man in der Physik einen Punkt auf einer Variablen als Kurz-Schreibweise für die Ableitung dieser Variablen nach der Zeit. Der dritte und der vierte Term in Gleichung (2.3) bedeuten somit genau dasselbe.

Der Vektor $\vec{v}(t)$ gibt die momentane Geschwindigkeit des Massenpunktes an, also sowohl die momentane Richtung als auch den momentanen Betrag:

$$\vec{v} = v \cdot \vec{e}_v \qquad \text{mit} \quad v = |\vec{v}| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2} \qquad \big(\text{Betrag der Geschwindigkeit}\big)$$

$$\vec{e}_v = \frac{\vec{v}}{v} \qquad \big(\text{Einheitsvektor zur Richtungsangabe}\big)$$

Beachten Sie, dass wir im Deutschen mit dem Begriff „Geschwindigkeit“ sowohl den Vektor $\vec{v}$ bezeichnen als auch den Betrag $|\vec{v}|$, was zu Verwirrung führen kann. Wenn man sprachlich klar trennen möchte, kann man für den Betrag der Geschwindigkeit den Begriff „Tempo“ verwenden. Im Englischen wird meist klarer unterschieden: Der physikalische Begriff $\vec{v}$ heißt *velocity*, während der Betrag *speed* genannt wird.

Der Betrag der Geschwindigkeit eines Massenpunktes ist nach oben begrenzt. Materie kann sich nie schneller bewegen als die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit c_0:

$$\text{Obere Grenze:} \qquad |\vec{v}| < c_0 = 299\,792\,458 \text{ m/s} \approx 300\,000 \text{ km/s}$$

Diese Grenze wurde erstmals von Albert Einstein in der Speziellen Relativitätstheorie postuliert und seither in keinem Experiment widerlegt.

Wenn die Geschwindigkeit eines Massenpunktes konstant ist (konstant in Richtung und Betrag), nennt man seine Bewegung eine **gleichförmige Bewegung**. In jedem anderen Fall spricht man von einer beschleunigten Bewegung.

(B) Messung

Die Geschwindigkeit wird in der Praxis in verschiedenen Einheiten angegeben, z. B.

- $1\,\mathrm{km/h} = (1000\,\mathrm{m}) \,/\, (3600\,\mathrm{s}) = 0,2778\,\mathrm{m/s}$
  oder umgekehrt $1\,\mathrm{m/s} = 3,6\,\mathrm{km/h}$ (Straßenverkehr)
- $1\,\mathrm{mph} = 0,447\,\mathrm{m/s} = 1,609\,\mathrm{km/h}$ (miles per hour; Straßenverkehr in den USA)
- $1\,\mathrm{kn} = 0,514\,\mathrm{m/s} = 1,852\,\mathrm{km/h}$ (1 Knoten ist eine Seemeile pro Stunde: Nautik)
- $\vec{\beta} = \vec{v}/c_0$ (Bezug auf die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit)

Die Messung der vektoriellen Geschwindigkeit $\vec{v}$ (Betrag und Richtung) ist kompliziert und erfolgt oft mit Hilfe der Definitionsgleichung (2.3), indem die Position mehrmals hintereinander in drei Dimensionen gemessen wird (z. B. mit Radar oder GPS) und daraus die Geschwindigkeit berechnet wird. Eine andere Möglichkeit ist die getrennte Messung von Betrag und Richtung, z. B. mit Tachometer und Kompass.

Wenn nur das „Tempo" (Betrag von $\vec{v}$) gemessen werden soll, gibt es eine Reihe von Methoden, die von der Geschwindigkeit und dem umgebenden Medium abhängen:

- Tachometer zur Messung der Geschwindigkeit von Räderfahrzeugen beruhen fast immer auf einer Messung der Umdrehungsfrequenz ν_R der Räder (in Umdrehungen pro Sekunde), die mit $v = U_R \cdot \nu_R$ in die Geschwindikgkeit umgerechnet wird (siehe Kap. 5.1.3). Dazu muss der Außenumfang des Rades $U_R = 2\pi \cdot R_R$ oder der Radius R_R bekannt sein.
- Radar-Geschwindigkeitsmesser beruhen auf dem Doppler-Effekt, weil Wellen, die an einem bewegten Objekt reflektiert werden, ihre Frequenz verändern.
- Die Geschwindigkeit von Luftfahrzeugen wird mit sogenannten „Fahrtmessern" bestimmt, die darauf beruhen, dass sich der statische Druck eines Gases reduziert, wenn es sich relativ zum Messgerät bewegt (siehe Kap. 6.4.2). Damit kann man allerdings nur die Geschwindigkeit relativ zur umgebenden Luft bestimmen.

2.1.3 Die Beschleunigung

(A) Definition

Wenn sich die Geschwindigkeit eines Massenpunktes verändert, dann nennen wir diese Veränderung „Beschleunigung":

$$\textbf{Beschleunigung:} \qquad \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{v}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

$$\text{Dimension:} \quad \dim\bigl(a\bigr) = \frac{\text{Länge}}{(\text{Zeit})^2} \qquad \text{SI-Einheit:} \quad [a] = \mathrm{m/s^2}$$

Auch die Beschleunigung kann mit $\vec{a} = a \cdot \vec{e}_a$ in Betrag und Richtung zerlegt werden.

Wir wissen, dass jeder Körper, der im Bereich der Erdoberfläche frei gelassen wird, nach unten beschleunigt wird. Dabei tritt immer die gleiche Beschleunigung auf:

$$\text{Erdbeschleunigung} \qquad a \;=\; g \;\approx\; 9,81\,\mathrm{m/s^2}$$

Im Abschnitt 3.2.2 besprechen wir die Gravitationskraft und können dann auch begründen, warum gerade dieser Zahlenwert auftritt. Die Angabe von g sagt uns, dass die Geschwindigkeit eines frei und ungehindert fallenden Körpers in jeder Sekunde um $\Delta v = 9,81\,\mathrm{m/s}$ nach unten zunimmt. Wenn man zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 also z. B. die Geschwindigkeit $v_0 = 5,00\,\mathrm{m/s}$ misst, dann wird man zum Zeitpunkt $t_1 = t_0 + 1,00\,\mathrm{s}$ die Geschwindigkeit $v_1 = 14,81\,\mathrm{m/s}$ messen.

In manchen Zusammenhängen wird die Beschleunigung auch anders angegeben, z. B. bei Fahrzeugen, wo man auf Angaben wie „von 0 auf 100 in 6,3 Sekunden" stößt. Um eine solche Angabe vergleichbar zu machen, rechnet man am besten auf die SI-Einheit um: 100 km/h entsprechen $v_1 = 100/3,6 = 27,8\,\mathrm{m/s}$, sodass man für die mittlere Beschleunigung $\bar{a} = \Delta v/\Delta t = 27,8/6,3 \approx 4,4\,\mathrm{m/s^2}$ erhält.

Beachten Sie, dass wir die Größe a in der Physik immer „Beschleunigung" nennen, auch wenn die Geschwindigkeit kleiner wird („negative Beschleunigung") oder wenn sich der Massenpunkt mit konstanter Geschwindigkeit um eine Kurve bewegt („Radial- oder Normalbeschleunigung": Nur die die Richtung der Geschwindigkeit verändert sich, nicht aber Ihr Betrag).

Wenn man die Definitionsgleichungen (2.3) und (2.4) kombiniert, sieht man sofort, dass die Beschleunigung die zweite Ableitung der Position nach der Zeit ist („Änderung der Positionsveränderung"):

$$\vec{a}(t) \;=\; \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}\right) \;=\; \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} \;=\; \ddot{\vec{r}}(t)$$

Wenn man also die Position des Massenpunktes über längere Zeit genau misst, sodass der zeitliche Verlauf $\vec{r}(t)$ seiner Position bekannt ist, kann man daraus durch einfache Ableitung gemäß Gleichung (2.3) die jeweilige Geschwindigkeit berechnen und durch zweifache Ableitung die jeweilige Beschleunigung.

Im allgemeinen Fall hat die Beschleunigung („Änderung der Geschwindigkeit") eine andere Richtung als die Geschwindigkeit. Um die Wirkung der Beschleunigung zu beurteilen, verwendet man die Vektorzerlegung und zerlegt den Beschleunigungsvektor $\vec{a}$ in einen Vektor $\vec{a}_\parallel$ parallel zur Geschwindigkeit und einen Vektor $\vec{a}_\perp$ normal dazu:

$$\text{Vektorzerlegung:} \qquad \vec{a} \;=\; \vec{a}_\parallel + \vec{a}_\perp \qquad \text{mit} \tag{2.5}$$

$$\text{Parallelkomponente:} \qquad \vec{a}_\parallel \;=\; (\vec{a}\cdot\vec{e}_v)\cdot\vec{e}_v \qquad \text{mit} \quad \vec{e}_v \;=\; \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \tag{2.6}$$

$$\text{Normalkomponente:} \qquad \vec{a}_\perp \;=\; \vec{a} - \vec{a}_\parallel \tag{2.7}$$

Für $\vec{a}_{\parallel}$ muss man die Projektion der Beschleunigung auf die Geschwindigkeitsrichtung ermitteln (das ist der Anteil in der Klammer: Skalarprodukt von $\vec{a}$ mit dem Einheitsvektor $\vec{e}_v$ in Geschwindigkeitsrichtung) und mit $\vec{e}_v$ multiplizieren (um die Richtung festzulegen). Die Normalkomponente $\vec{a}_{\perp}$ ist dann der Rest des Beschleunigungsvektors, also alles, was nicht parallel zur Geschwindigkeit ist.

Der Parallelvektor $\vec{a}_{\parallel}$ gibt an, wie sich der Betrag der Geschwindigkeit verändert (Geschwindigkeitsvektor wird länger oder kürzer), während der Normalvektor $\vec{a}_{\perp}$ angibt, wie sich die Richtung der Geschwindigkeit verändert (Geschwindigkeitsvektor wird gedreht, siehe S. 31).

Wenn die Beschleunigung eines bewegten Massenpunktes in Betrag und Richtung konstant ist (wie z. B. bei frei fallenden Körpern im Bereich der Erdoberfläche), spricht man von einer **gleichförmig beschleunigten Bewegung**.

(B) Messung

Die Beschleunigung, die auf einen Körper wirkt, kann mit hoher Genauigkeit mit sogenannten Beschleunigungssensoren bestimmt werden. Das Messprinzip ist immer, dass sich eine definierte Masse nach dem Trägheitsprinzip (siehe Kap. 3.1.1) jeder Beschleunigung widersetzt. Dies führt zu einer Kraft, die gemessen werden kann. Oft wird die Verbiegung von Piezokristallen verwendet, die zu einer wohldefinierten elektrischen Spannung führt.

Solche Sensoren können auf mikroskopischer Skala gebaut werden (Größe: nur einige $10\,\mu$m) und sind standardmäßig in vielen elektronischen Geräten verbaut (Smartphones, Navigationsgeräte, Airbag-Sensoren usw.).

(C) Änderung der Beschleunigung

In der Praxis ist die Beschleunigung oft nicht konstant. Die zeitliche Änderung der Beschleunigung kann wieder durch die zeitliche Ableitung beschrieben werden:

$$\textbf{Ruck:} \qquad \vec{j}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{a}(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{a}}(t) = \frac{\mathrm{d}^3\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^3} = \dddot{\vec{r}}(t) \tag{2.8}$$

$$\text{Dimension:} \quad \dim(j) = \frac{\text{Länge}}{(\text{Zeit})^3} \qquad \text{Einheit:} \quad [a] = \mathrm{m/s^3}$$

Diese Größe wird nicht oft verwendet. In der Praxis spürt man den „Ruck“, wenn eine konstante Beschleunigung plötzlich beginnt oder endet, z. B. beim Abbremsen eines Zugs (konstante negative Beschleunigung), das plötzlich endet, wenn der Zug zum Stehen kommt. Beim Hochleistungsaufzügen wird darauf geachtet, dass der Ruck nicht zu groß ist; typisch soll er den Wert $j = 2\,\mathrm{m/s^3}$ nicht überschreiten.

2.1.4 Der Zusammenhang zwischen $\vec{r}$, $\vec{v}$ und $\vec{a}$

Wir fassen hier zusammen, wie die Größen Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Massenpunktes zusammenhängen.

(A) Position $\vec{r}(t)$ bekannt

Wenn es Daten für die Position eines Massenpunktes während seiner Bewegung gibt, kann man daraus die Geschwindigkeit berechnen. Wie das genau geht, hängt davon ab, in welcher Form die Positionsdaten vorliegen:

Wenn die Position zu vielen Zeitpunkten t_1, t_2, t_3, … gemessen wird, kennt man die Orte $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$, $\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$ usw. Daraus kann man zu jedem Zeitpunkt näherungsweise die Geschwindigkeit berechnen, nämlich als Veränderung der Position geteilt durch die vergangene Zeit („Weg durch Zeit“):

$$\text{Geschwindigkeit aus Differenzen:} \qquad \vec{v}(t_i) \approx \frac{\Delta\vec{r}_i}{\Delta t_i} = \frac{r_i - r_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \tag{2.9}$$

Wenn es gelingt, eine Funktion $\vec{r}(t)$ zu finden, auf der hinreichend genau alle Positions-Messpunkte liegen, oder wenn eine solche Funktion aus theoretischen Gründen angenommen wird, kann man die Geschwindigkeit $v(t)$ zu jedem Zeitpunkt aus der Zeitableitung dieser Funktion berechnen (siehe Gleichung (2.3)):

$$\text{Geschwindigkeit aus der Zeitableitung:} \qquad \vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} \tag{2.10}$$

Beachten Sie, dass die beiden Beziehungen dasselbe bedeuten: Die Geschwindigkeit ist die Änderung der Position in einem bestimmten Zeitintervall. Der Unterschied ist nur, dass man mit der Differenz den Mittelwert der Geschwindigkeit in einem bestimmten Zeitraum Δt erhält, während die Zeitableitung (bei der man ja ein infinitesimales, also unendlich kleines Zeitintervall $\mathrm{d}t$ betrachtet) die exakte momentane Geschwindigkeit ergibt.

Wenn die Funktion der Geschwindigkeit $v(t)$ nach Gleichung (2.10) berechnet wurde, kann man durch nochmalige Ableitung auch die Beschleunigung berechnen:

$$\text{Beschleunigung aus der zweiten Zeitableitung:} \qquad \vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} \tag{2.11}$$

(B) Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ bekannt

Ganz analog kann man aus der Geschwindigkeit die Beschleunigung berechnen, wieder auf zwei Arten: Wenn die Geschwindigkeit zu verschiedenen Zeitpunkten bekannt ist, also $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ ... zu den Zeitpunkten t_1, t_2 usw., dann erhält man die Beschleunigung als Geschwindigkeitsänderung in einem Zeitintervall:

$$\text{Beschleunigung aus Differenzen:} \qquad \vec{a}(t_i) \approx \frac{\Delta\vec{v}_i}{\Delta t_i} = \frac{v_i - v_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}\,. \tag{2.12}$$

Wenn für den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit eine Funktion $\vec{v}(t)$ bekannt ist, verwendet man zur Berechnung der Beschleunigung die Zeitableitung:

$$\text{Beschleunigung aus der Zeitableitung:} \qquad \vec{a}(t) \;=\; \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} \tag{2.13}$$

Aus bekannten Werten für die Geschwindigkeit lässt sich andererseits auch ausrechnen, um wie viel sich die Position verändert hat. Wenn einzelne Datenpunkte vorhanden sind, macht man das näherungsweise zwischen zwei Messpunkten:

$$\Delta\vec{r}_i \;\approx\; \vec{v}(t_i)\cdot\Delta t_i \qquad \rightarrow \qquad \vec{r}(t_i) \;\approx\; \vec{r}(t_{i-1}) + \vec{v}(t_i)\cdot(t_i - t_{i-1}) \tag{2.14}$$

oder, wenn für die Geschwindigkeit die Funktion $\vec{v}(t)$ bekannt ist, an jedem Zeitpunkt exakt aus dem Integral:

$$\mathrm{d}r \;=\; \vec{v}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \rightarrow \qquad \vec{r}(t_2) \;=\; \vec{r}(t_1) + \int\limits_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t)\,\mathrm{d}t \tag{2.15}$$

Wenn wie hier Vektoren integriert werden, wird das Integral für jede Koordinate separat berechnet. Ob sich diese Integrale analytisch lösen lassen oder nicht, hängt von der Form der Funktion $\vec{v}(t)$ ab. Wenn nur einzelne Messdaten für die Geschwindigkeit vorhanden sind, kann man versuchen, den zeitlichen Verlauf mit einer integrierbaren Funktion anzunähern. In der Praxis verzichtet man aber oft darauf und löst man die Integrale unter Verwendung der Messdaten numerisch.

(C) Beschleunigung $\vec{a}(t)$ bekannt

Wenn Daten für die Beschleunigung des bewegten Massenpunkts gemessen werden (wie das z. B. in Navigationsgeräten oder Mobiltelefonen gemacht wird), ist also zu bestimmten Zeitpunkten t_i bekannt, um wie viel sich die Geschwindigkeit pro Zeiteinheit verändert. Ganz konkret kann man dann näherungsweise berechnen, um wie viel sich die Geschwindigkeit von einem Messpunkt bis zum nächsten verändert hat:

$$\Delta\vec{v}_i \;\approx\; \vec{a}(t_i)\cdot\Delta t_i \qquad \rightarrow \qquad \vec{v}(t_i) \;\approx\; \vec{v}(t_{i-1}) + \vec{a}(t_i)\cdot(t_i - t_{i-1}) \tag{2.16}$$

Wenn die Beschleunigung als Funktion $\vec{a}(t)$ bekannt ist, macht man im Prinzip genau dasselbe, nur formuliert man die Gleichung dann als Integral:

$$\mathrm{d}v \;=\; \vec{a}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \rightarrow \qquad \vec{v}(t_2) \;=\; \vec{v}(t_1) + \int\limits_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t)\,\mathrm{d}t \tag{2.17}$$

Daraus kann man dann auch noch die Position des bewegten Körpers berechnen, indem man das Ergebnis aus Gleichung (2.17) in die Gleichung (2.15) einesetzt:

$$\vec{r}(t_2) \;=\; \vec{r}(t_1) + \int\limits_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \vec{r}(t_1) + \vec{v}(t_1)\cdot(t_2 - t_1) + \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\int\limits_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}t \tag{2.18}$$

Ob die Integrale lösbar sind, hängt hier von der Form der Funktion $\vec{a}(t)$ ab. Man kann aber immer versuchen, sie numerisch zu berechnen.

2.2 Die Bahnkurve eines bewegten Massenpunktes

2.2.1 Allgemeine Beschreibung

Als „Bahnkurve“ eines bewegten Massenpunktes bezeichnet man jene Kurve im Raum, die der Massenpunkt im Lauf der Zeit durchläuft. Man beschreibt die Bahnkurve mit dem zeitabhängigen

$$\text{Ortsvektor:} \qquad \vec{r}(t) \;=\; \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Der Ortsvektor zeigt zu jedem Moment t vom willkürlich gewählten Koordinatenursprung zum derzeitigen Aufenthaltsort der Masse. Deshalb kann durch Angabe von $\vec{r}(t)$ nicht direkt auf die geometrische Form der Bahnkurve geschlossen werden.

Die momentane Richtung der Bahnkurve wird zu jedem Zeitpunkt durch die Geschwindigkeit angegeben (also die Änderung des Ortsvektors):

$$\text{Richtung der Bahnkurve:} \qquad \vec{v}(t) \;=\; \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} \;=\; \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

Umgekehrt kann man ein kleines Stück des Weges auf der Bahnkurve ausrechnen, wenn man die momentane Geschwindigkeit kennt:

$$\text{infinitesimales Bahnelement:} \qquad \mathrm{d}\vec{r}(t) \;=\; \vec{v}(t) \cdot \mathrm{d}t \tag{2.20}$$

Wenn man entlang der Bahn kontinuierlich die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ misst, kann man – ausgehend vom Startpunkt $\vec{r}(t_1)$ – beliebige Punkte auf der Bahnkurve rekonstruieren, indem man alle Bahnelemente $\mathrm{d}\vec{r}(t)$ addiert:

$$\vec{r}(t_2) \;=\; \vec{r}(t_1) + \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}\vec{r}(t) \;=\; \vec{r}(t_1) + \int\limits_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t)\,\mathrm{d}t \tag{2.21}$$

Oft will man die Länge s der zurückgelegten Wegstrecke entlang der Bahnkurve wissen. Dazu rechnet man mit den Beträgen: Man integriert infinitesimale Wegstücke, die man aus dem momentanen „Tempo“ berechnet:

$$s \;=\; \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}s \;=\; \int\limits_{t_1}^{t_2} |\vec{v}(t)|\;\mathrm{d}t \;=\; \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{\big(v_x(t)\big)^2 + \big(v_y(t)\big)^2 + \big(v_z(t)\big)^2}\;\mathrm{d}t \tag{2.22}$$

Daraus enthält man dann zum Beispiel die

$$\text{Durchschnittsgeschwindigkeit entlang der Bahn:} \qquad \bar{v} \;=\; \frac{s}{t} \tag{2.23}$$

Die hier oben infinitesimal beschriebenen Größen kann man näherungsweise auch so berechnen, dass man anstelle der Differenziale Differenzen berechnet, die zwischen zwei nahe aneinander liegenden Zeitpunkten t_1 und t_2 auftreten. Dann erhält man die Näherungen

$$\begin{array}{lrcll} \text{Luftlinie :} & \Delta\vec{r} & = & \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) & \big(|\Delta\vec{r}| \;\le\; s\big) \\ \text{Geschwindigkeit:} & \vec{v}_n & \approx & \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} & \big(|\vec{v}_n| \;\le\; \bar{v}\big) \end{array}$$

Beachten Sie den Unterschied! Die Luftlinie $|\Delta\vec{r}|$ ist immer kleiner als der tatsächlich zurückgelegte Weg, weil sie ja eine „Abkürzung“ darstellt (außer wenn die Bahn ganz gerade ist). Ebenso ist die „genäherte Geschwindigkeit“ $|\vec{v}_n|$ kleiner als die tatsächliche Durchschnittsgeschwindigkeit $\bar{v}$, die aber kompliziert auszurechnen ist.

Die momentane Beschleunigung entlang der Bahnkurve berechnet man aus der zeitlichen Ableitung der Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$

$$\text{Beschleunigung:} \qquad \vec{a}(t) \;=\; \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} \;=\; \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} \;=\; \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

Die Richtung der Beschleunigung zeigt im Allgemeinen nicht in Richtung der Bahnkurve, nur wenn auf gerader Strecke beschleunigt oder gebremst wird.

2.2.2 Gleichförmig beschleunigte Bewegung

Wir beschäftigen uns hier mit einem wichtigen Sonderfall, wenn nämlich die Beschleunigung eines Massenpunktes zeitlich konstant ist, also $\vec{a} = \text{const} \neq f(t)$. Dieser Fall kommt in der Praxis eigentlich nur selten vor; viele Bewegungen lassen sich aber näherungsweise so beschreiben, zum Beispiel Bewegungen unter dem Einfluss der Schwerkraft ($a = g \approx 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} = \text{const}$), bei denen die (Luft-)Reibung vernachlässigt werden kann.

Wir betrachten mehrere Fälle einer solchen Bewegung mit konstanter Beschleunigung und verwenden diese Fälle dazu, uns genauer zu überlegen, wie man in der Physik bei der Beschreibung konkreter Situationen vorgeht.

(A) Gleichförmig beschleunigte Bewegung in einer Dimension

Wir betrachten hier den Fall, dass die Beschleunigung in derselben Richtung wirkt wie die Geschwindigkeit. Dann bleibt die Bewegung immer in derselben Dimension und wir brauchen zur Beschreibung der Situation keine Vektoren, sondern können alles in 1D mit skalaren Größen beschreiben:

$$\begin{aligned}
\text{Position:} \quad & x(t)\,, && \text{mit} \quad x(t=t_1) \;=\; x_1 \\
\text{Geschwindigkeit:} \quad & v(t) \;=\; \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,, && \text{mit} \quad v(t=t_1) \;=\; v_1 \\
\text{Beschleunigung:} \quad & a \;=\; \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \;=\; \text{const} \;\neq\; f(t) &&
\end{aligned}$$

Die konstante Beschleunigung führt dazu, dass sich die Geschwindigkeit mit konstanter Rate verändert. Den konkreten Wert $v(t_2)$ der Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt t_2 erhält man, indem man die zeitliche Veränderung der Geschwindigkeit über die Zeit aufsummiert. Für den allgemeinen 3D-Fall wird das mit dem Integral in Gleichung (2.17) gemacht. Hier brauchen wir nur in einer Dimension zu integrieren, und wegen des konstanten Werts von a lässt sich das Integral leicht lösen:

$$v(t_2) \;=\; v(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} a\,\mathrm{d}t \;=\; v(t_1) + a \cdot (t_2 - t_1) \tag{2.25}$$

Oft wählt man die Zeit so, dass die Anfangszeit $t_1 = 0$ gesetzt wird. Die Geschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt (die natürlich nicht Null sein muss) bezeichnet man dann als Anfangsgeschwindigkeit v_0. Dann ergibt sich

$$v(t) \;=\; v_0 + a \cdot t \tag{2.26}$$

Beachten Sie, dass die Geschwindigkeit gleichförmig zunimmt (oder abnimmt): In jeder Sekunde kommt der gleiche Betrag dazu, nämlich genau so viel, wie es der Zahlenwert der Beschleunigung angibt. So steigt bei ungebremstem freiem Fall die Geschwindigkeit pro Sekunde um den Wert $\Delta v = 9{,}81\,\mathrm{m/s}$. Das stimmt natürlich nur, solange kein Luftwiderstand wirkt, durch den in Realität eine zunehmende Bremsbeschleunigung dazu kommt (siehe Kap. 3.3.5).

Wenn wir die momentane Position der beschleunigten Punktmasse wissen wollen, müssen wir die Geschwindigkeit aus der Gleichung (2.25) noch einmal nach der Zeit integrieren, so wie es im allgemeinen 3D-Fall mit der Gleichung (2.18) gemacht wird. Wenn die Position zum Zeitpunkt $t = t_1$ bekannt ist, dann kommt in jedem kurzen Moment (Länge $\mathrm{d}t$) das Wegstück $\mathrm{d}x = v(t) \cdot \mathrm{d}t$ dazu. Diese Wegstücke werden über den ganzen interessierenden Zeitraum aufsummiert, was als Integral formuliert wird:

$$\begin{aligned}
r(t_2) \;&=\; r(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t \;=\; r(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \left(v(t_1) + a \cdot (t - t_1)\right)\,\mathrm{d}t \\
&=\; r(t_1) + v(t_1) \cdot (t_2 - t_1) + \frac{a}{2} \cdot (t_2 - t_1)^2
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Wenn man für den Beginn des Vorgangs wieder $t = t_0 = 0$ setzt, außerdem für Ort und Geschwindigkeit zu Beginn x_0 und v_0, dann erhält man

$$x(t) \;=\; x_0 + v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2 \tag{2.28}$$

Wir haben nun zwei „Beziehungen“ (= physikalische Formeln) zur Beschreibung der gleichförmig beschleunigten 1D-Bewegung vorliegen, nämlich die Gleichungen (2.26) und (2.28). Diese Formeln gelten allgemein, also für jede beliebige gleichförmig beschleunigte Bewegung in einer Dimension. Um zu berechnen, was in einem ganz konkreten Fall passiert, reichen sie aber nicht aus. Dazu sind auch konkrete Zahlenangaben notwendig, in der Physik fast immer Messwerte.

Was wir eigentlich wollen, ist eine „vollständige Beschreibung“ der Situation – wir wollen „alles“ über eine bestimmte gleichmäßig beschleunigte Bewegung wissen. Also z.B.: Wo ist der Massenpunkt nach $t = 3\,\mathrm{s}$? Wann wird er die Position $x = 3,5\,\mathrm{m}$ erreichen? Wie schnell ist er dann? Usw. Eine solche vollständige Beschreibung ist in allen Bereichen der Physik das, was wir anstreben: Wir wollen alles über ein bestimmtes konkretes Problem wissen und alle Möglichkeiten ausrechnen können.

Wie gelingt eine „vollständige Beschreibung“? Was alles brauchen wir dafür? Dabei hilft ein allgemeiner Satz aus der Mathematik:

Zur Bestimmung von N Unbekannten braucht man N unabhängige Informationen.

Dabei gilt jede Gleichung als „eine Information“ – wir haben hier zwei davon. In den Gleichungen gibt es aber insgesamt 6 Unbekannte, nämlich t, $x(t)$, $v(t)$, $a = \text{const}$, x_0 und v_0. Es werden also vier zusätzliche Informationen benötigt. In der Physik verwendet man Messdaten als „weitere Informationen“, die konkret beschreiben, welche Situation vorliegt (neben der allgemeinen Beschreibung durch die Gleichungen, die für alle gleichförmig beschleunigten Bewegungen gilt). Messdaten könnten hier z. B. sein:

- Ein Zahlenwert für die konstante Beschleunigung a (z. B. $a = g = 9,81\,\mathrm{m/s^2}$).
- Die Position x_0 zum Zeitpunkt $t = 0$. (z. B. sind eventuell die Koordinaten so gewählt, dass $x_0 = 0$).
- Die Anfangsgeschwindigkeit v_0 zum Zeitpunkt $t = 0$.
- Die gemessene Position $x(t_1)$ zu einem bestimmten gemessenen Zeitpunkt t_1 (z. B. $x(2,43\,\mathrm{s}) = 3,62\,\mathrm{m}$.
- Die gemessene Geschwindigkeit $v(t_2)$ zu einem gemessenen Zeitpunkt t_2.
- Die Fortbewegung $\Delta x = x(t_4) - x(t_3)$ im Zeitraum zwischen t_3 und t_4.
- usw.

Konkretes Beispiel: Ein kleiner Ball („Massenpunkt“) wird senkrecht nach oben in die Luft geworfen. Wenn angegeben ist, dass die Erdbeschleunigung wirkt ($a = -9,81\,\mathrm{m/s^2}$ nach unten) und dass der Ball zu Beginn ($t = 0$) an der Position $x_0 = 0$ ist und die Geschwindigkeit $v_0 = 15,0\,\mathrm{m/s}$ hat (nach oben), dann kann man für den Zeitpunkt $t_1 = 2,00\,\mathrm{s}$ mit den Gleichungen (2.26) und (2.28) Geschwindigkeit und Position berechnen:

$$\begin{aligned} v(t_1) &= v_0 + a \cdot t \;=\; 15,0 - 9,81 \cdot 2,00 \;=\; -4,62\,\mathrm{m/s} \quad \big(\text{nach unten}\big) \\ x(t_1) &= x_0 + v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2 \;=\; 15,0 \cdot 2,00 - 0,5 \cdot 9,81 \cdot 4,00 \;=\; 10,4\,\mathrm{m} \quad \big(\text{hoch}\big) \end{aligned}$$

Wenn gefragt ist, zu welchem Zeitpunkt der Ball sich $x = 10,0\,\mathrm{m}$ hoch befindet, brauchen wir die Gleichung (2.26) nicht (Geschwindigkeit spielt keine Rolle), sondern nur die Gleichung (2.28), die wir in eine quadratische Gleichung umformen müssen, um den gesuchten Zeitpunkt t zu erhalten:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2 \qquad \rightarrow \qquad t^2 + 2 \cdot \frac{v_0}{a} \cdot t + 2 \cdot \frac{x_0 - x}{a} = 0$$

$$t = -\frac{v_0}{a} \pm \sqrt{\frac{{v_0}^2}{a^2} - 2 \cdot \frac{x_0 - x}{a}} = (1,53 \pm 0,55)\ \mathrm{s}$$

$$\text{Ergebnis:} \qquad t_1 = 0,98\,\mathrm{s} \qquad \text{und} \quad t_2 = 2,08\,\mathrm{s}$$

Wie bei jeder quadratischen Gleichung erhalten wir zwei Ergebnisse. Wenn alle Annahmen richtig getroffen sind (hier z. B. : konstante Beschleunigung nach unten), darf man nicht einfach eines der beiden Resultate auswählen, sondern muss überlegen, warum es zwei Ergebnisse gibt. In diesem Fall wird die Höhe $x = 10,0\,\mathrm{m}$ beim Hochfliegen und noch einmal beim Herunterfallen erreicht – beide Lösungen sind also sinnvoll und richtig. Wenn man die beiden Zeiten in Gleichung (2.26) einsetzt, erhält man die momentanen Geschwindigkeiten $v(t_1) = +5,5\,\mathrm{m/s}$ und $v(t_2) = -5,5\,\mathrm{m/s}$.

Wenn man wissen möchte, zu welchem Zeitpunkt der Ball sich $x = 15,0\,\mathrm{m}$ hoch befindet, erhält man in der Lösung unter der Wurzel eine negative Zahl. Das bedeutet, dass dieser Fall nicht möglich ist. Auch das ist korrekt: Wenn man die Geschwindigkeit in Gleichung (2.26) null setzt, erhält man $t = 1,53\,\mathrm{s}$ als Zeitpunkt des Umkehrpunkts. Einsetzen in Gleichung (2.28) ergibt, dass der Ball dann die Maximalhöhe $x_{\mathrm{max}} = 11,5\,\mathrm{m}$ erreicht, und somit niemals $15\,\mathrm{m}$ hoch sein wird.

(B) Gleichförmig beschl. Bewegung in mehreren Dimensionen

Die Bewegung eines Massenpunktes wird im allgemeinen Fall so wie oben im Abschnitt 2.2.1 mit dreidimensionalen Vektoren beschrieben. Fürs praktische Rechnen ist dabei angenehm, dass vorerst jede Koordinatenrichtung für sich beschrieben werden kann. Die einzelnen Richtungen sind voneinander unabhängig und können – jede für sich – mit dem 1D-Formalismus behandelt werden. Bei komplizierten Bewegungen kann die Beschreibung durch richtige Wahl des Koordinatensystems wesentlich vereinfacht werden, wenn man die Koordinaten zum Beispiel so definiert, dass die Beschleunigung nur in einer Koordinatenrichtung stattfindet.

Jeder kennt aus dem täglichen Leben die Bewegung unter Einfluss der Schwerkraft – die Erdbeschleunigung wirkt konstant nach unten. Mit dem üblichen Koordinatensystem (siehe S. 17) ist das die $(-z)$-Richtung. Wenn keine weitere Beschleunigung vorliegt (Reibung, also Luftwiderstand sei vernachlässigbar), kann sich nur die z-Komponente der Geschwindigkeit zeitlich verändern. In den anderen Koordinatenrichtungen muss die Geschwindigkeit jeweils konstant bleiben, da ja z. B. $\mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t = a_x = 0$.

Ein typisches Beispiel ist der „waagrechte Wurf“: Ein Ball werde mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 12,0\,\mathrm{m/s}$ waagrecht aus einem Fenster geworfen, das sich in einem hohen Haus $h = 20{,}0\,\mathrm{m}$ über dem flachen Erdboden befindet. Wie weit vom Haus entfernt trifft der Ball auf den Boden?

Zur Lösung wählt man vorerst ein zweckmäßiges Koordinatensystem, z. B. so: x in die Anfangsflugrichtung, y normal dazu nach rechts, z senkrecht nach unten (das ist Rechtssystem!), Koordinatenursprung am Startpunkt des Balls genau in der Fensteröffnung, Zeit $t = 0$ beim Abwurf. (Beachten Sie, dass das Koordinatensystem keinen Einfluss auf das Ergebnis hat! Wenn Sie den Ursprung am Boden unter dem Fenster wählen, x nach rechts, y nach vorne und z nach oben, kommt exakt dasselbe heraus, nur vielleicht etwas komplizierter zu berechnen.)

Wie entwickelt sich die Bewegung?

- In y-Richtung kann überhaupt nichts passieren (keine Anfangsgeschwindigkeit, keine Beschleunigung): Der Ball bleibt immer an der gleichen Position, diese Richtung muss also nicht weiter behandelt werden.
- In x-Richtung bewegt sich der Ball mit konstanter Geschwindigkeit $v_x = v_0$, da in dieser Richtung ja keine Beschleunigung vorhanden ist, die den Ball bremsen oder beschleunigen könnte. In unserem Beispiel bewegt sich der Ball also in jeder Sekunde um $\Delta x = v_x \cdot \Delta t = 12\,\mathrm{m}$ vorwärts.
- In z-Richtung liegt eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung vor, die wir mit Gleichung (2.28) beschreiben können, mit $z_0 = 0$, $v_{z,0} = 0$ und $a_z = g$.

Wir können zwei Gleichungen aufstellen:

$$x\text{-Richtung:}\quad x(t) = v_x \cdot t \qquad \text{und} \qquad z\text{-Richtung:}\quad z(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2$$

Daraus lässt sich nun erstens die Zeit t_a des Aufpralls bestimmen

$$z(t_a) = h \qquad \to \qquad t_a = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}\,, \qquad \text{hier:}\quad t_a \approx 2{,}0\,\mathrm{s}\,,$$

zweitens die Entfernung des Auftreffpunkts vom Haus

$$x_a = x(t_a) = v_x \cdot t_a\,, \qquad \text{hier:}\quad x_a \approx 24{,}0\,\mathrm{m}\,,$$

und drittens die Form der Flugbahn, die sogenannte „Wurfparabel“:

$$t = \frac{x}{v_x} \qquad \text{und} \quad z = \frac{g}{2} \cdot t^2 = \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{{v_x}^2} \qquad \to \qquad z = \left(\frac{g}{2 \cdot {v_x}^2}\right) \cdot x^2$$

Beachten Sie, dass die z-Koordinate quadratisch von der x-Koordinate abhängt – in der Physik sagt man: „z skaliert quadratisch mit x“. Solche Abhängigkeiten zeigen viel über den allgemeinen Charakter eines Phänomens (hier: des waagrechten Wurfs), ohne dass man Zahlen einsetzen muss. Hier können wir z. B. sofort sagen, dass der Ball, wenn er doppelt so weit vom Haus weg ist wie vorher, gleichzeitig viermal so tief ist.

Das „Aufdröseln“ des Problems in einzelne Gleichungen für die einzelnen Koordinaten ist typisch für die allgemeine physikalische Vorgehensweise, nämlich große Probleme in kleine Einzelprobleme aufzuteilen und aus den Lösungen wieder eine Lösung für das „große Ganze“ zusammenzusetzen.

(C) Gleichförmige Normalbeschleunigung

Wir besprechen hier den häufigen Fall, dass die Beschleunigung auf eine bewegte Masse betragsmäßig konstant bleibt und außerdem immer im rechten Winkel auf die aktuelle Geschwindigkeit steht:

$$|\vec{a}(t)| \;=\; \text{const} \qquad \text{und} \qquad \vec{a}(t) \;=\; \vec{a}_\perp(t) \;\perp\; \vec{v}(t)$$

Die Beschleunigung wirkt also immer normal auf die Geschwindigkeit, sodass der Betrag von $\vec{v}$ unverändert bleiben muss, die Richtung von $\vec{v}$ sich aber andauernd verändert. Beachten Sie, dass der Beschleunigungsvektor selbst in diesem Fall nicht konstant ist: Er muss vielmehr ebenfalls andauernd seine Richtung ändern, um immer noch normal auf den Geschwindigkeitsvektor zu stehen.

Wir analysieren nun, welche Art von Bewegung zustande kommt, wenn eine derartige „gleichförmige Normalbeschleunigung“ auf ein bewegtes System wirkt:

Innerhalb eines kurzen Zeitraums Δt geschieht Folgendes:

- Der Massenpunkt bewegt sich um $\Delta s = \vec{v} \cdot \Delta t$ weiter.
- Die Geschwindigkeit ändert ihre Richtung $\vec{v}(t + \Delta t) \approx \vec{v}(t) + \vec{a} \cdot \Delta t$

Dadurch bewegt sich der Massenpunkt auf einem kleinen Kreisbogen. Den Radius R dieses Kreisbogens erhält man durch folgende Überlegungen:

- Der Radius muss an jeder Stelle normal auf die Bahnrichtung stehen.
- Wenn man den Radius zum Zeitpunkt t normal auf $\vec{v}(t)$ einzeichnet und zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ von der neuen Position aus normal auf $\vec{v}(t+\Delta t)$, dann schneiden sich diese beiden Linien im Kreismittelpunkt und man erhält ein Dreieck.
- Dieses Dreieck ist ähnlich (gleiche Winkel!) zu einem Dreieck aus $\vec{v}(t)$, $\vec{v}(t + \Delta t)$ und $\vec{a} \cdot \Delta t$.
- Aus dieser Ähnlichkeit erhält man die Beziehung

$$\frac{|\vec{v} \cdot \Delta t|}{R} \;=\; \frac{|\vec{a} \cdot \Delta t|}{|\vec{v}|} \qquad \to \qquad \frac{v}{R} \;=\; \frac{a}{v}$$

Daraus erhalten wir das Ergebnis: Ein Massenpunkt, der sich mit der konstanten Geschwindigkeit v bewegt und auf den konstant die Normalbeschleunigung a wirkt, läuft auf einer Kreisbahn mit dem

$$\text{Bahnradius} \qquad R \;=\; \frac{v^2}{a} \tag{2.29}$$

Dies gilt auch viel allgemeiner: Sobald auf einen bewegten Massenpunkt eine Beschleunigung $\vec{a}$ wirkt, die eine Normalkomponente $\vec{a}_\perp \neq 0$ hat, läuft der Massenpunkt auf einer Kurve, die mit einem Kreisbogen mit Radius R angenähert werden kann.

Wenn sich die Normalbeschleunigung und/oder Geschwindigkeit verändert, dann ändert sich auch dieser Radius, sodass insgesamt kein Kreis, sondern eine Kurvenbahn mit variablem Radius $R(t)$ durchlaufen wird. Dieser Radius kann zu jedem Zeitpunkt t kann aus den aktuellen Werten $|\vec{v}(t)|$ und $|\vec{a}_\perp(t)|$ berechnet werden.

Umgekehrt können wir feststellen, dass ein Massenpunkt nur dann auf einer Kurve läuft, wenn es eine Normalkomponente $\vec{a}_\perp$ seiner Beschleunigung gibt (das bedeutet ja genau, dass die Geschwindigkeit ihre Richtung ändert). Diese Normalkomponente heißt in diesem Kontext

$$\text{Zentripetalbeschleunigung} \qquad a_{\mathrm{ZP}} = \frac{v^2}{R} \tag{2.30}$$

Die Zentripetalbeschleunigung zeigt zu jedem Moment genau in Richtung auf den Mittelpunkt des Kreisbogens, auf dem der Massenpunkt gerade läuft. Im Kap. 3.2.6 beschäftigen wir uns damit, wie eine derartige Beschleunigung bereit gestellt werden kann.

3 Dynamik: Kraft und Bewegung

Warum bewegen sich Massen? Warum bremsen sie ab, warum bewegen sie sich um die Kurve? Und wie lässt sich das alles steuern und kontrollieren? Nach der bloßen Beschreibung von Bewegungen im vorigen Kapitel stellen wir hier nun die eigentlich physikalischen Fragen.

3.1 Die Newtonschen Axiome

Der englische Naturwissenschaftler, Mathematiker und Philosoph Isaac Newton formulierte Ende des 17. Jahrhunderts drei Grundsätze („Axiome"), aus denen heraus die Bewegung von Massen umfassend beschrieben werden kann. Diese drei Grundsätze bilden somit das Fundament der klassischen Mechanik. Sie eignen sich uneingeschränkt zur Beschreibung aller Bewegungen in unserem Umfeld. Sie gelten aber nicht in gleicher Weise bei extrem hohen Geschwindigkeiten nahe an der Lichtgeschwindigkeit (Beschreibung mittels spezieller Relativitätstheorie), im Umfeld extrem starker Massen (Beschreibung mittels allgemeiner Relativitätstheorie) und für extrem kleine Objekte (Beschreibung mittels Quantenmechanik).

Wir schreiben die Newtonschen Axiome hier an, ohne sie formal zu beweisen. Dies wird in der Vorlesung „Theoretische Mechanik" mit Methoden der Theoretischen Physik gemacht.

3.1.1 1. Axiom: Trägheitsprinzip

Das erste Newtonsche Axiom kann auf verschiedene Arten formuliert werden. Hier eine gängige Version:

> **1. Axiom: „Jeder Körper verbleibt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung, solange keine Nettokraft auf ihn wirkt"**

Mit der physikalischen Größe „Kraft" beschäftigen wir uns im folgenden Abschnitt und dann noch viel genauer im Teilkapitel 3.2. Wichtig ist vorerst, dass mit „Nettokraft" hier immer die Gesamtkraft gemeint ist, die auf den Körper wirkt, d. h. die Summe aller vorhandenen Kräfte.

Das Axiom sagt also aus, dass sich ein Körper, der in Ruhe ist, nur in Bewegung setzen kann, wenn auf ihn eine Kraft wirkt. Außerdem verbleibt ein Körper, der sich bewegt, immer im gleichen Bewegungszustand (gleiche Richtung und gleiche Geschwindigkeit: geradlinige Bewegung!), solange in Summe keine Kraft auf ihn wirkt.

Man nennt diese Eigenschaft eines Körpers (nämlich das Prinzip, ohne Kraft im gleichen Bewegungszustand zu verbleiben) die „Trägheit" des Körpers. Genauer gesagt ist die Trägheit eine Eigenschaft der Masse des Körpers (siehe folgender Abschnitt).

Das Trägheitsprinzip kann an vielen Stellen beobachtet werden, so z. B. in einem rasch bremsenden Bus, in dem Personen, die sich nicht festhalten, „im gleichen Bewegungszustand verbleiben“ und aus Sicht des bremsenden Busses durch den Gang fliegen, weil die Bremskraft nicht auf sie wirken kann.

Umgekehrt kann man immer, wenn man beobachtet, dass ein Körper sich mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig bewegt, sofort schlussfolgern, dass die Gesamtkraft, die auf diesen Körper wirkt, Null ist. Dies entspricht nicht immer unserer Intuition: Aus der Praxis wissen wir, dass Kraftaufwand notwendig ist, um sich mit konstanter Geschwindigkeit zu bewegen, z. B. mit dem Fahrrad. Die spürbar aufgewandte Kraft ist aber bei konstanter Geschwindigkeit genau gleich groß wie die entgegengerichteten Reibungskräfte, sodass die Gesamtkraft (Summe aller wirkenden Kräfte) tatsächlich genau Null ist.

3.1.2 2. Axiom: Aktionsprinzip

Das zweite Axiom beschäftigt sich damit, was geschieht, wenn die Gesamtkraft, die auf einen Körper einwirkt, nicht Null ist. In diesem Fall verändert der Körper seinen Bewegungszustand, und zwar nach einer einfachen Regel:

2. Axiom: „Die Beschleunigung eines Körpers ist direkt proportional zu der auf ihn wirkenden Nettokraft und invers proportional zu seiner Masse. Die Richtung der Beschleunigung ist gleich der Richtung der Nettokraft.“

Mathematisch formuliert erhält man die Beziehung

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \qquad \text{oder} \qquad \vec{F} = m \cdot \vec{a} \tag{3.1}$$

Diese einfache Gleichung wird „Bewegungsgleichung“ genannt und ist die Grundlage aller Berechnungen zur Bewegung von Körpern. Man kann damit z. B. die Bahnkurve und die momentane Geschwindigkeit eines Körpers berechnen, wenn man die wirkenden Kräfte genau kennt. Damit werden wir uns im Verlauf dieser Vorlesung noch intensiv beschäftigen.

Die **Masse** in der Gleichung (3.1) ist die „träge Masse“ des beschleunigten Körpers, also ein direktes Maß für seine Trägheit. Je größer diese (träge) Masse ist, desto mehr Aufwand kostet es, ihren Bewegungszustand zu verändern.

Die physikalische Größe **Kraft** wird im Abschnitt 3.2 genau besprochen. Eine Kraft $\vec{F}$ im physikalischen Sinn (genauer gesagt: eine „dynamische Kraft“) hat genau eine Auswirkung: Wenn sie auf einen Körper einwirkt, dann beschleunigt sie diesen Körper in jene Richtung, in die die Kraft zeigt ($\vec{a} \parallel \vec{F}$).

Wenn mehrere Kräfte $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ usw. auf einen Körper mit der Masse m wirken, gilt das **Superpositionsprinzip**: Alle Kräfte wirken gemeinsam. Wir berechnen in diesem

Fall die gesamte auf den Körper wirkende Kraft $\vec{F}_{\text{ges}}$, indem wir alle einzelnen Kräfte vektoriell addieren, und berechnen dann die Wirkung der resultierenden Kraft:

$$\vec{F}_{\text{ges}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots \qquad \rightarrow \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{ges}}}{m}$$

Wir können aus dem Aktionsprinzip folgende Schlussfolgerungen ziehen:

- Immer, wenn eine resultierende Kraft auf einen Körper wirkt, wird der Körper in jene Richtung beschleunigt, in die die Kraft wirkt.
- Und umgekehrt: Immer, wenn man bemerkt, dass ein Körper beschleunigt wird, muss in Summe eine Kraft auf ihn wirken.

Unter Beschleunigung meinen wir hier wieder, wie in Abschnitt 2.1.3 definiert, jede Art von Geschwindigkeitsänderung, also auch Abbremsung oder eine reine Kurvenbahn.

Daraus könnte man sich im Umkehrschluss sofort das erste Axiom herleiten: Auf jeden Körper, der in Ruhe ist oder sich konstant bewegt (der also nicht beschleunigt wird), wirkt in Summe keine Kraft. Da in unserem Umfeld auf jeden Körper die Schwerkraft wirkt, muss auf jeden ruhenden Körper eine genau gleich große, nach oben wirkende Gegenkraft wirken („statische Kräfte“, siehe Abschnitt 3.2).

3.1.3 3. Axiom: Reaktionsprinzip

Das dritte Axiom beschreibt die aus unserem Umfeld bekannte Tatsache, dass man sich irgendwo abstoßen muss, um eine eine Kraft auf einen Körper ausüben zu können. Wer z. B. einen schweren rollenden Wagen abbremsen möchte, muss sich abstützen, um nicht überrollt zu werden. Es zeigt sich eine einfache Gesetzmäßigkeit:

3. Axiom: „Jede Kraft $\vec{F}$, die auf einen Körper wirkt, bewirkt an irgendeinem anderen Körper eine Gegenkraft $-\vec{F}$, die genau gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet ist.“

Dieses Prinzip wirkt sich manchmal störend aus (z. B. wenn man von einem Boot ans Ufer springt und dabei das Boot wegschiebt), wird aber auch praktisch ausgenützt (z. B. beim Rückstoßprinzip von Raketen: Schnell nach hinten ausgestoßene Materie beschleunigt den Flugkörper nach vorne).

Die Rückstoßkraft $\vec{F}_2$, die auf den zweiten Körper wirkt, führt dazu, dass auch dieser – abhängig von seiner Masse m_2 – beschleunigt wird:

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1 \qquad \rightarrow \quad m_2 \cdot \vec{a}_2 = -m_1 \cdot \vec{a}_1 \qquad \text{oder} \quad \vec{a}_2 = -\frac{m_1}{m_2} \cdot \vec{a}_1 \tag{3.2}$$

Wenn die beschleunigte Masse m_1 und die „Rückstoßmasse“ m_2 ähnliche Größe haben, werden beide Massen etwa gleich beschleunigt. Wenn eine bestimmte Kraft $\vec{F}$ zur Verfügung steht, teilt sich diese auf die eigentliche Kraft und die Rückstoßkraft auf, sodass die Beschleunigung $\vec{a}_1$ kleiner ist als $\vec{F}/m_1$. Dies wird mit der Betrachtung von Energie (in Kap. 4) und Impuls (in Kap. 4.4) bei solchen Vorgängen noch klarer und kann dann auch genau berechnet werden. Dass die Beschleunigung $\vec{a}_1$ kleiner ist als geplant, wird schmerzlich sichtbar, wenn man von einem kleinen Boot ans Ufer springen möchte.

Die Beschleunigung $\vec{a}_2$ ist hingegen vernachlässigbar, wenn man sich an einer sehr großen Masse $m_2 \gg m_1$ „abstößt". Sehr oft ist der zweite Körper die ganze Erde (beim Hochspringen, bei der Beschleunigung von Fahrzeugen, beim Werfen von Bällen, Speeren etc., usw.), deren immense Masse von $M_E \approx 5,97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$ dazu führt, dass keinerlei Beschleunigung $\vec{a}_2$ bemerkbar ist.

3.2 Kräfte

3.2.1 Definition

Eine „Kraft" nennen wir, wie auf S. 34 eingeführt, jedes physikalische Phänomen, das in der Lage ist, eine Masse zu beschleunigen oder eine solche Beschleunigung zu verhindern. Die Definition folgt dem Aktionsprinzip in Gleichung (3.1):

$$\textbf{Kraft:} \quad \vec{F} = m \cdot \vec{a} \qquad \big(\text{engl. } \textit{force}\big) \tag{3.3}$$

$$\text{Dimension:} \quad \dim\big(F\big) = \frac{\text{Masse} \times \text{Länge}}{\text{Zeit}^2}$$

$$\text{SI-Einheit:} \quad [F] = 1\,\mathrm{N} = 1\,\frac{\mathrm{kg \cdot m}}{\mathrm{s}^2} \quad \big(\text{Newton}\big)$$

Beachten Sie, dass das Wort „Kraft" im Sprachgebrauch breiter verwendet wird, z. B. in Begriffen wie Schaffens- oder Geisteskraft. In der Physik kann eine Kraft tatsächlich nur eines, nämlich den Bewegungszustand einer Masse verändern, also die Masse beschleunigen (oder einer solchen Beschleunigung entgegenwirken).

In der Natur gibt es eine sehr große Anzahl verschiedener Kräfte, die sich in vielen Punkten voneinander unterscheiden:

- Wovon wird eine bestimmte Kraft ausgelöst?
- Worauf wirkt eine bestimmte Kraft?
- Wie stark ist die Kraft in verschiedenen Entfernungen?

Alle Kräften haben aber gemeinsam, dass sie ausschließlich eine Wirkung haben, nämlich die Beschleunigung von Masse(n).

Wir besprechen im Folgenden einige spezielle Kräfte, auf die wir im Verlauf dieser Vorlesung noch zurückkommen werden. Weitere Kräfte werden in späteren Kapiteln und in weiterführenden Vorlesungen eingeführt.

Die beschleunigten Massen betrachten wir in diesem Kapitel wie auch schon im vorigen immer als „Punktmassen“, also Massen ohne jegliche Ausdehnung (was eigentlich nur für manche Elementarteilchen zutrifft). Bei realen Körpern rechnen wir mit dem Massenmittelpunkt (siehe S. 12). In diesem Fall führt die Kraft zu einer Beschleunigung des ganzen Körpers. Dass eine Kraft, die auf einen Körper wirkt, auch zu Rotationsbewegung führen kann, besprechen wir im Kap. 5, und Deformationen und interne Verformungen durch die angreifenden Kräfte kommen im Kap. 6.

3.2.2 Die Gravitationskraft

(A) Definition

Die Gravitation wird als eine der vier fundamentalen Wechselwirkungen angesehen (siehe auch Abschnitt 3.2.7), kann also nicht aus anderen Kräften und Wechselwirkungen hergeleitet werden. Wir beschreiben damit die Eigenschaft von Materie, andere Materie anzuziehen. Dies führt zu einer Kraft F_G, von der in vielen Experimenten folgende Eigenschaften gezeigt wurden:

- Die Kraft F_G ist proportional zu jener Masse m_1, die eine andere Masse anzieht.
- Die Kraft F_G ist proportional zu jener Masse m_2, die von einer anderen Masse angezogen wird.
- Die Kraft F_G ist invers proportional zum Quadrat des Abstands r_{12} der Massen.

Beachten Sie, dass die ersten beiden Aussagen in dieser Form nicht ganz eindeutig sind, weil man ja nicht sagen kann, wer anzieht und wer angezogen wird. Besser könnte man formulieren, dass dass die Kraft proportional zu den beiden Massen ist, die sich gegenseitig anziehen. Insgesamt kommt man zur Beziehung

$$\text{Newtonsches Gravitationsgesetz:} \quad F_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{{r_{12}}^2} \tag{3.4}$$

$$\text{mit der Gravitationskonstante} \quad G = (6,67408 \pm 0,00031) \cdot 10^{-11} \, \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2}$$

Hier sind m_1 und m_2 vorerst „Punktmassen“, also viel kleiner als ihr Abstand r_{12}. Der Wert der Gravitationskonstante G ist – verglichen mit den Präzisionsmessungen für andere Naturkonstanten – nur relativ ungenau bekannt. Dies liegt vor allem daran, dass die Gravitationskraft im Vergleich zu anderen Kräften sehr klein ist. Nennenswerte Beschleunigung wird nur erreicht, wenn riesige Massen im Spiel sind.

Deshalb spielt die Gravitationskraft im täglichen Leben auch nur als „Schwerkraft“ eine merkbare Rolle (Anziehung aller Objekte durch die Erde), nicht aber als gegenseitige Anziehung verschiedener Gegenstände. Diese ist zwar vorhanden, aber im normalen Umfeld immer vernachlässigbar.

In der Gleichung (3.4) wird das Gravitationsgesetz skalar angeschrieben, also als Zahlen- und nicht als Vektorgleichung. Das kann man in den meisten Fällen so machen, muss dann aber darauf achten, die Richtung der Kraft für beide Massen richtig einzusetzen. Die Gravitationskraft ist immer anziehend: Jede der beiden Massen spürt genau jene Kraft, die man aus der Gleichung (3.4) berechnet, aber in entgegengesetzter Richtung – immer genau zur anderen Masse hin.

Wenn man die Gravitationskraft als Vektor anschreiben möchte, dann multipliziert man den Term F_G mit einem Einheitsvektor $\vec{e}$ (Länge 1: ändert nichts am Betrag der Kraft!), der zur anderen Masse hin zeigt. Es lohnt sich in diesem Fall, das Koordinatensystem so zu wählen, dass die Festlegung dieses Einheitsvektors einfach ist.

(B) Gravitationskraft mit ausgedehnten Massen

Das Gravitationsgesetz in Gleichung (3.4) gilt vorerst für zwei Punktmassen, also für Massen, deren Ausdehnungen viel kleiner sind als ihr Abstand r_{12}. Mit großen Massen, und einem Abtand, der von derselben Größenordnung ist, ist die Gravitation deutlich komplizierter.

Schon wenn nur eine Masse sehr groß und die andere klein ist, kann es bei engem Abstand sehr viel schwieriger sein, die Gravitationskraft zu bestimmen. Diesen Fall erleben wir in unserem Umfeld bei der Schwerkraft zwischen der Erde (groß) und allen Gegenständen um uns (klein) in einem Abstand, der dem Radius der großen Masse entspricht. Ein Körper auf der Erdoberfläche wird von jenen Teilen der Erde, die sich direkt unter ihm befinden, viel stärker angezogen als von sehr weit entfernten Teilen, weil die Gravitation ja mit $1/r^2$ skaliert.

Ganz allgemein muss man sich für die Anziehungskraft zwischen einer Punktmasse m („Testmasse“) und einer ausgedehnten Masse M diese große Masse im Geist in kleine Massenelemente $\mathrm{d}M$ zerlegt denken. Dann berechnet man für jedes Massenelement seine Schwerkraft $\mathrm{d}\vec{F}$ mit der Testmasse. All diese Schwerkraftanteile müssen schließlich vektoriell integriert werden, um die gesamte Kraft zu erhalten:

$$\vec{F}_G = m \cdot G \cdot \int_V \frac{\mathrm{d}M(\vec{r}) \cdot \vec{e}_r}{|\vec{r}|^2} = m \cdot G \cdot \int_V \frac{\rho(\vec{r}) \cdot \vec{e}_r}{|\vec{r}|^2} \cdot \mathrm{d}V \tag{3.5}$$

Dazu muss man die Massenverteilung innerhalb des großen Körpers sehr genau kennen: Die Dichte ρ und somit $\mathrm{d}M$ kann für jede Position $\vec{r}$ anders sein!). Dies Integration ist in der Regel äußerst schwierig und wir beschäftigen uns hier nicht damit.

Glücklicherweise vereinfacht sich die Berechnung manchmal sehr, wenn der große Körper symmetrisch ist. Große Himmelskörper wie die Erde sind kugelförmig, und außerdem kann man annehmen, dass sie aus lauter Kugelschalen bestehen (wie eine Zwiebel), wobei jede Schale in sich überall dieselbe Dichte hat. Für die Anziehung einer Testmasse m durch ein einzige solche Kugelschale mit Masse M_S und Radius R_S lässt sich mit dem Integral aus Gleichung (3.5) Folgendes berechnen:

- Wenn sich die Testmasse innerhalb der Kugelschale befindet, wirkt keine Gravitationskraft, weil sich die Kräfte aus den verschiedenen Richtungen gegenseitig genau aufheben.

- Wenn sich die Testmasse außerhalb der Kugelschale befindet, und zwar im Abstand h oberhalb der Schalenoberfläche (oder im Abstand R_S+h vom Mittelpunkt der Kugelschale entfernt), dann wirkt eine Anziehungskraft, die genau gleich groß ist, als wenn die gesamte Masse der Kugelschale in ihrem Mittelpunkt konzentriert wäre, also
$$F_G \;=\; G \cdot \frac{M_S \cdot m}{(R_S + h)^2} \tag{3.6}$$

Wenn wir nun im zweiten Schritt aus vielen solchen Zwiebelschalen eine Kugel mit dem Radius R zusammensetzen, erhalten wir folgendes Ergebnis:

- Wenn sich die Testmasse im Mittelpunkt der Kugel befindet (also im Inneren aller Kugelschalen), dann wirkt keine Schwerkraft. Das ist logisch, weil dann ja die Anziehung nach allen Seiten gleich stark ist und sich somit kompensiert.
- Wenn sich die Testmasse irgendwo innerhalb der Kugel befindet (mit dem Abstand $0 < r < R$ zum Mittelpunkt) wird sie zum Mittelpunkt der Kugel hin angezogen. Für die Berechnung der Gravitationskraft werden nur jene Kugelschalen verwendet, deren Radius $R_S \leq r$ ist: Für diese Schalen dürfen wir annehmen, dass ihre Masse im Mittelpunkt der Kugel konzentriert ist. Die größeren Schalen üben keine Kraft auf die Testmasse aus.
- Wenn sich die Testmasse außerhalb der Kugel befindet (mit dem Abstand H zur Kugeloberfläche und dem Abstand $R + H$ zum Mittelpunkt) wird sie zur Kugel hin angezogen. Dabei kann man für die Rechnung so tun, als sei die gesamte Masse der Kugel in ihrem Mittelpunkt konzentriert.

In diesem wichtigen Fall (Schwerkraft einer großen Kugel auf eine kleine Masse) können wir also ab der Kugeloberfläche immer so rechnen, als sei die gesamte Kugelmasse im Mittelpunkt der Kugel konzentriert (also in ihrem Massenmittelpunkt). Beachten Sie aber, dass das nur deshalb funktioniert, weil die Masse innerhalb der Kugel symmetrisch verteilt ist: Bei asymmetrischer Verteilung dürfen zur Berechnung der Gravitation nicht einfach die Masse großen Körpers im Schwerpunkt annehmen - vielmehr müssten wir dann das oben angeschriebene Integral lösen.

Noch komplizierter wird die Lage, wenn sich sich zwei große Massen aus kurzem Abstand anziehen: Dann verändert sich die Schwerkraft, die der erste Körper auf den zweiten ausübt, innerhalb des zweiten Körpers (und umgekehrt). Die gesamte Anziehungskraft kann durch ein noch komplizierteres Integral berechnet werden. Wichtig ist aber, dass jeder der beiden Körper durch die unterschiedliche Anziehung gedehnt wird und im schlimmsten Fall sogar zerreißen kann. Dieser Effekt muss bei Doppelsternsystemen beachtet werden und ist auf der Erde in sehr abgeschwächter Form als „Gezeitenkraft“ sichtbar.

(C) Die Gravitation der Erde

Wir betrachten hier noch einmal genau die Gravitation zwischen der Erde und Gegenständen im Bereich ihrer Oberfläche. Die Dichte im Inneren ist zwar kugelsymmetrisch, aber nicht gleichmäßig verteilt: Die Erde ist in mehreren Schalen aufgebaut und wird von innen nach außen kontinuierlich und in mehreren Sprüngen immer weniger dicht. Wie oben erläutert, spielt dieser kugelsymmetrische Schalenaufbau aber keine Rolle für den Verlauf der Schwerkraft auf der Erdoberfläche und außerhalb der Erde, weil es dabei nur auf die Gesamtmasse ankommt, nicht aber auf deren Verteilung.

Auf der Erdoberfläche lässt sich die Schwerkraft einfach mit Hilfe der Erdbeschleunigung g beschreiben, die aus der Gleichung (3.4) berechnet wird: Mit der Erdmasse $M_E = 5,9722 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$ und dem mittleren Erdradius $R_E = 6371,0\,\mathrm{km}$ erhält man

$$F_0 \;=\; G \cdot \frac{M_E \cdot m}{{R_E}^2} \;=\; m \cdot g \qquad \rightarrow \qquad g \;=\; G \cdot \frac{M_E}{{R_E}^2} \;=\; 9,8200\,\mathrm{m/s^2} \tag{3.7}$$

Allerdings ist g nicht ganz konstant, sondern kann je nach Ort kann um bis zu $0,05\,\mathrm{m/s^2}$ vom oben angegebenen Wert abweichen. In Deutschland variiert g zwischen 9,8070 (Oberbayern) und $9,8130\,\mathrm{m/s^2}$ (Norddeutschland). In Düsseldorf hat die Erdbeschleunigung den Wert $g = 9,811\,\mathrm{m/s^2}$. Die Erdbeschleunigung nimmt mit der Höhe um ca. $0,003\,\mathrm{m/s^2}$ pro $1000\,\mathrm{m}$ ab. Für fast alle praktischen Zwecke ist es in unseren Breiten hinreichend genau, mit dem bekannten Wert $g = 9,81\,\mathrm{m/s}$ zu rechnen.

Eine Reihe von Effekten trägt zur Variation von g bei:

- Abweichung der Erde von der Kugelform: Der Erdradius beträgt am Äquator 6378 km, an den Polen hingegen nur etwa 6357 km, weswegen die Schwerkraft an den Polen größer ist, weil man der Erdmasse im Schnitt näher kommt.
- Erdrotation: Ein Teil der Gravitation wird aufgewandt, um die Zentripetalkraft zur Verfügung zu stellen (siehe Abschnitt 3.2.6). Dieser Effekt ist am Äquator maximal ($a_{zp,max} \approx 0,033\,\mathrm{m/s^2}$) und an den Polen überhaupt nicht vorhanden.
- Masseverteilung innerhalb der Erde: Die inhomogene Verteilung von Masse innerhalb der Erdkruste führt zu örtlichen Unterschieden in der Erdbeschleunigung mit einer Größenordnung bis zu $\sim 1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m/s^2}$. Dies kann auch dazu verwendet werden, Erz-, Erdöl- oder Gasvorkommen zu orten: Dazu muss g aber mindestens auf 5 Nachkommastellen genau gemessen werden.
- Gezeiten: Die Schwerkraft des Mondes ist auf der Erde unterschiedlich groß: Zwischen dem mondnächsten und dem mondfernsten Punkt auf der Erdoberfläche liegt ein Unterschied $\Delta L = 2R_E \approx 1,27 \cdot 10^7\,\mathrm{m}$, immerhin $3,3\,\%$ des mittleren Mondabstands von $L \approx 3,84 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$. Mit der Mondmasse $M_M = 7,35 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$ ergibt sich ein Unterschied von $g_M \approx 2,20 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m/s^2}$.
  Beachten Sie, dass die Schwerkraft des Mondes im Schwerpunkt der Erde genau als Zentripetalkraft für die Bewegung um den gemeinsamen Massenmittelpunkt wirkt (sonst würden Mond und Erde ja aufeinander stürzen, siehe Abschnitt 3.2.6 und Kap. 5.3.2). Hier geht es um den Unterschied: Auf der mondzugewandten Seite wird die Mond-Schwerkraft durch die Fliehkraft nicht ganz kompensiert: Deshalb fühlen wir die Erd-Schwerkraft abgeschwächt. Auf der mondabgewandten Seite wird seine Gravitation hingegen überkompensiert, sodass die Erd-Schwerkraft ebenfalls abgeschwächt wirkt.

Deshalb gibt es pro Tag ca. zwei Zeiten, an denen die Erdbeschleunigung um maximal $\Delta g \approx 1 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m/s^2}$ kleiner ist. Dies reicht aus, um das Wasser der Weltmeere so umzuverteilen, dass es zweimal pro Tag zur Flut kommt und dazwischen (wenn die Mond-Gravitation horizontal wirkt) zur Ebbe.
Derselbe Effekt wird auch von der Sonne ausgeübt. Obwohl ihre Gravitationskraft auf die Erde ca. 200 Mal größer ist als jene des Mondes, ist die Gezeitenkraft (scheinbare Änderung der Erdbeschleunigung) nur knapp halb so groß, weil sich die Sonnengravitation entlang des Erddurchmessers wegen des viel größeren Abstands nur wenig verändert. Wichtig ist das Zusammenspiel von Mond und Sonne: Bei Voll- und Neumond (wenn Sonne, Erde und Mond grob in einer Linie angeordnet sind) fallen die Effekte von Sonne und Mond zusammen, sodass die Unterschiede zwischen Ebbe und Flut deutlich größer ausfallen.

(D) Das Gravitationsfeld

Wenn sich zwei Massen im leeren Raum gegenseitig anziehen, kann man sich die Frage stellen, wie der eine Körper von dem anderen „weiß“. Was geht im Raum zwischen ihnen vor, um den Effekt der Gravitation vom einen zum anderen Körper zu „übertragen“? In der Quantenpyhsik wird das „Graviton“ postuliert, ein hypothetischen Teilchen, das die Gravitationskraft übertragen könnte. Bisher gibt es aber keinen experimentellen Nachweis für die Existenz von Gravitonen.

Weil die Frage, wie die Kraftübertragung funktioniert, im Moment in voller Tiefe nicht beantwortbar ist, wollen wir hier ein Modell einführen, das die Beschreibung der Kräfte erleichtert, die an jedem Punkt des Raums auftreten können.

Dazu geht man von der Vorstellung aus, dass eine oder mehrere Massen vorerst fest im Raum verteilt sind. Bringt man nun zusätzlich eine kleine Testmasse m_0 an einen bestimmten Punkt $\vec{r}$, so verspürt sie eine ganz bestimmte Kraft $\vec{F}_{\mathrm{G,m0}}(\vec{r})$ (sie selbst übt natürlich aufgrund des Reaktionsprinzips die genau gleich große Kraft auf die verteilten Massen aus, aber das ist hier vorerst ohne Belang). Diese Kraft hängt vom Ort ab, man kann sie also als eine „momentane Eigenschaft des Raums“ ansehen.

Diese „Eigenschaft“ beschreibt man mit dem Konzept des **Gravitationsfelds**. Ein Gravitationsfeld ist ein Zustand des Raums (vor allem im Bereich um große Massen), der sich dadurch auszeichnet, dass in diesen Bereich gebrachte Testmassen eine Gravitationskraft erfahren.

Da die Größe der Kraft $\vec{F}_{\mathrm{G,m0}}(\vec{r})$ proportional zur betrachteten Testmasse m_0 ist, teilt man durch m_0, um allgemeine Aussagen zu ermöglichen. Dadurch erhält man die Größe

$$\text{Gravitationsfeldstärke:} \qquad \vec{g}(\vec{r}) \;=\; \frac{\vec{F}_{\mathrm{G,m0}}(\vec{r})}{m_0}\,, \tag{3.8}$$

die manchmal auch „Gravitationsbeschleunigung“ genannt wird. Das Gravitationsfeld wird an jedem Punkt $\vec{r}$ im Raum durch den Vektor $\vec{g}$ charakterisiert, der die Beschleunigung angibt, die auf eine dorthin gebrachte Masse wirkt. Dies gilt insbesondere auch auf der Erdoberfläche, wo $\vec{g}$ senkrecht nach unten zeigt und den als „Erdbeschleunigung“ wohlbekannten Betrag $g \approx 9,81\,\mathrm{m/s^2}$ hat.

Das Gravitationsfeld ist an jedem Punkt des Raums gegenwärtig, selbst wenn es dort keine Masse gibt, die darauf reagiert – es ist nur die Folge der in der Umgebung befindlichen Massenverteilung. Sobald sich aber eine punktförmige Testmasse m_0 am Ort $\vec{r}$ aufhält, erfährt sie dort die Kraft $F_{\mathrm{G,m0}}$. Wir stellen uns vor, dass diese Kraft durch das Feld $\vec{g}$ im Punkt $\vec{r}$ erzeugt wird. In diesem Bild ist es also das Gravitationsfeld, durch das die Massenverteilung ihre Wirkung an die Testmasse weitergibt.

Ein Gravitationsfeld wird wie alle physikalischen Felder bildlich durch **Feldlinien** beschrieben. Dies sind gedachte Kurven im Raum, deren Tangenten in den einzelnen Punkten des Raums die Richtung der dort auftretenden Kraft auf eine kleine Testmasse angeben. Die Feldliniendichte (also die Anzahl der Feldlinien pro Flächeneinheit senkrecht zu den Linien) an einem bestimmten Ort im Raum ist ein Maß für den Betrag der Feldstärke an dieser Stelle: Wo die Feldliniendichte hoch ist, ist die Feldstärke groß und umgekehrt. (Beachten Sie aber, dass die gezeichnete Feldliniendichte nicht genau proportional zur Feldstärke ist, weil man nur zweidimensional zeichnen kann.)

(E) Messung der Gravitationskonstante

Die Gravitationskraft lässt sich gut und recht genau messen, wenn man die Anziehung zwischen verschiedenen Objekten und der Erde betrachtet.

Hier kann einerseits durch Wiegen die sogenannte Gewichtskraft bestimmt werden, die zwischen einem beliebigen Objekt und der Erde vorliegt. Dies ist die Standardmethode zur Messung von Massen. Andererseits kann durch Beobachtung der Planetenbahnen auf die Gravitationskraft der Sonne und ihrer Planeten geschlossen werden. Dadurch kann die $1/R^2$-Abhängigkeit der Gravitationskraft bestätigt werden.

All diese Messungen von Kräften enthalten das Produkt $G \cdot M$, und solange die Masse M der Erde bzw. der Sonne nicht bekannt ist, lässt sich auf diese Art auch die Gravitationskonstante G nicht bestimmen. Somit muss G in präzisen Laborexperimenten gemessen werden, bei denen die Anziehung zwischen zwei bekannten Massen beobachtet wird. Dies ist extrem schwierig, weil die Anziehung jeder Masse mit der Erde um ein Vielfaches größer ist als die gegenseitige Anziehung.

Das klassische Experiment ist die Cavendish-Waage, bei der zwei Massen an einer waagrechten Stange befestigt sind, die an einem Torsionsfaden hängt. Ein Torsionsfaden ist ein Faden, der sich in seine Ruhestellung zurückdreht, wenn man ihn verdreht (siehe Kap. 5). Wenn jede der beiden Massen von einer weiteren Masse angezogen wird, verdreht sich die Stange so weit, wie es der Torsionsfaden zulässt, bevor das rücktreibende Drehmoment des Torsionsfadens (das proportional zur Verdrehung zunimmt) die Gravitation kompensiert. Damit lässt sich die Stärke der Gravitationskraft messen und somit – weil die Massen bekannt sind – die Gravitationskonstante G.

Mit bekannter Gravitationskonstante G kann nun auch die Erdmasse bestimmt werden, z. B. durch Abwiegen bekannter Massen oder Vermessung der Mondbahn.

3.2.3 Die Federkraft

Viele Festkörper lassen sich durch Krafteinwirkung in einem gewissen Maß komprimieren oder in die Länge ziehen und kehren in die Ausgangslage zurück, wenn die Kraftwirkung endet. Diese Eigenschaft heißt Elastizität und wird im Kap. 6.2 genauer besprochen.

Wichtig ist hier vorerst, dass bei elastischen Körpern die Stärke der Deformation proportional zur wirkenden Kraft ist (Hookesches Gesetz). Typisch ist die Deformation ΔL aber klein im Vergleich zur Gesamtlänge L, höchstens im Bereich von einigen Prozent, oft noch deutlich kleiner.

In **Federn** wird die Eigenschaft der elastischen Dehnung und Stauchung durch kluge Bauweise so verstärkt, dass sehr große relative Längenänderungen möglich sind. Es gibt eine große Vielfalt an Bauweisen, mit denen eine Längenänderung ermöglicht wird, z. B. Spiral-, Blatt- oder Sprungfedern. Für diese Federn gilt, so lange man die Dehnung nicht übertreibt, die Proportionalität von Längenänderung ΔL und Kraft F_F:

$$\text{Federkraft:} \qquad F_F \;=\; -D \cdot \Delta L \qquad \text{mit der Federkonstante } D \tag{3.9}$$

Die Federkonstante D wird in N/m angegeben und hat für jede Feder einen speziellen Zahlenwert. Sie gibt theoretisch an, welche Kraft F (in N) notwendig wäre, um die Feder um $\Delta L = 1\,\text{m}$ zu dehnen (was meist nicht möglich ist). Große Zahlenwerte für D beschreiben also eine „starke Feder“.

Das Minuszeichen in Gleichung (3.9) soll anzeigen, dass die Kraft F_F und die Ausdehnung ΔL immer in die entgegengesetzte Richtung zeigen: Die Kraft ist eine „rücktreibende Kraft“, die versucht, den Ursprungszustand herzustellen. Für Berechnungen kann das Minuszeichen meistens weggelassen werden.

Die Gleichung (3.9) gilt für jede Feder in einem bestimmten Bereich von Dehnung und Kraft: Zu starke Dehnung sorgt für dauerhafte Verformung, und Stauchung ist nur bis zu einem gewissen Wert möglich. Innerhalb des elastischen Bereichs erhält man strenge Proportionalität zwischen ΔL und der rücktreibenden Federkraft F_F. Beachten Sie, dass die Kraft proportional zur Verlängerung ΔL ist, nicht aber zur Länge L!

Diese Proportionalität wird in der **Federwaage** ausgenützt, die zur Messung von Kräften verwendet wird, z. B. von Gewichtskräften und somit Massen: Man kann die Kraft, die auf die Feder wirkt, direkt an einer linearen Skala ablesen, weil eine bestimmte Kraft zu einer genau proportionalen Verlängerung der Feder führt.

3.2.4 Reibungskräfte

(A) Definiton

Reibungskräfte sind im täglichen Leben allgegenwärtig und führen dazu, dass jede Bewegung abgebremst wird, meist bis zum Stillstand. Andererseits ist Reibung in vielen

Effekten nützlich, z. B. zum gezielten Abbremsen von Bewegung, oder weil dadurch viele Körper aneinander haften können, ohne sich verbinden zu müssen.

Reibungskräfte haben ganz besondere Eigenschaften, durch die sie sich von den meisten anderen Kräften unterscheiden:

- Reibung kann Bewegungen nur abbremsen, nicht beschleunigen.
- Die Reibungskraft wirkt immer genau in die Gegenrichtung zur vorliegenden (Relativ-)Geschwindigkeit.

Deshalb muss jede Art von Reibung vektoriell immer abhängig von der Geschwindigkeit dargestellt werden

$$\vec{F}_R \;=\; -F_R \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \;=\; -F_R \cdot \vec{e}_v \qquad \text{mit dem Einheitsvektor} \quad \vec{e}_v \;=\; \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Das Minus sorgt dafür, dass die Kraft entgegen der Geschwindigkeit wirkt, und $\vec{e}_v$ ist ein Vektor, der genau in die Richtung der Geschwindigkeit zeigt, aber die Länge 1 hat. Somit wird die Stärke der Kraft allein vom skalaren Term F_R beschrieben. Dieser Term enthält dann die Beschreibung jener Zusammenhänge, die einem konkreten Fall zur Reibung führen.

Je nach Situation gibt es ganz unterschiedliche Arten von Reibung, die mit völlig verschiedenen formelmäßigen Zusammenhängen beschrieben werden müssen. Wir besprechen im Folgenden einige wichtige Reibungsarten.

(B) Gleitreibung (Coulomb-Reibung oder trockene Reibung)

Wenn man zwei feste Körper aufeinander gleiten lässt, muss eine konstante Kraft aufgewandt werden, um die Reibung zwischen den gleitenden Flächen zu kompensieren. Dies kommt in erster Linie von der Oberflächenrauigkeit, die dazu führt, dass sich die gleitenden Flächen mikroskopisch ineinander verhaken. Bei der Bewegung müssen die verhakten Strukturen immer wieder auseinander gebracht werden. Dies kann auch dazu führen, dass die rauen Strukturen zum Teil abgeschmirgelt werden. All dies erfordert eine Kraft, die wir in Summe als Gleitreibungskraft bezeichnen. Beachten Sie, dass auch scheinbar glatte Oberflächen auf kleiner Skala rau sind, zumindest auf atomarem Niveau. Es zeigt sich, dass diese Reibungskraft einfach zu beschreiben ist:

$$\text{Gleitreibung:} \qquad F_{R,G} \;=\; \mu_G \cdot F_N \tag{3.10}$$

Hier ist F_N der Betrag der Normalkraft: Das ist jene Kraft, die normal auf die gleitende Fläche wirkt und die beiden Körper aufeinander drückt. μ_G ist der Gleitreibungskoeffizient, eine Zahl, die die Stärke der Reibungskraft angibt und für verschiedene Materialpaare tabelliert ist.

Beachten Sie, dass die Gleitreibung von zwei Parametern **nicht** abhängt, die man intuitiv im Verdacht haben könnte:

- Die Größe der Kontaktfläche spielt für diese Art der Reibungskraft in erster Näherung keine Rolle: Die Kraft in Gleichung (3.10) hat immer den gleichen Wert, egal, wie Sie den bewegten Körper auf seine Unterlage stellen: Ob der Körper auf einer großen oder auf einer kleinen Fläche liegt oder sogar auf einer Kante steht, ist egal.
- Die Geschwindigkeit des bewegten Körpers ist ebenfalls irrelevant.

Die letzte Aussage stimmt für hohe Geschwindigkeiten nicht immer: Hier kann es einerseits geschehen, dass an den Grenzflächen mehr Material abgerieben wird, wodurch die aufzuwendende Kraft größer wird. Andererseits kann der Körper zum Teil „springen“, wodurch er sich zeitweilig durch die Luft und somit deutlich reibungsärmer bewegt. Diese Fälle werden von der Gleichung (3.10) nicht beschrieben.

Die **Haftreibung**, die im Abschnitt 3.2.5 über statische Kräfte besprochen wird, ist eng mit der Gleitreibung verwandt. Sie beschreibt die Kraft, die aufgewandt werden muss, um einen Festkörper, der auf einem anderen liegt, in Bewegung zu setzen. Diese Kraft wird mit der analogen Beziehung $F_{R,H,max} = \mu_H \cdot F_N$ beschrieben (Gleichung (3.14)) und ist somit ebenso unabhängig von der Größe der Kontaktfläche zwischen den beiden Körpern. Beachten Sie, dass es nicht ums Beschleunigen geht, sondern nur darum, den Körper aus der Ruhelage in Bewegung zu setzen.

Der Haftreibungskoeffizient μ_H ist für alle Stoffkombinationen größer als der Gleitreibungskoeffizient μ_G. Dies kann dadurch erklärt werden, dass sich zwei ruhende Oberflächen fester miteinander „verhaken“ als bewegte, weil sie beim Stehenbleiben an jeder Stelle gleichsam in der tiefsten Position verbleiben. Außerdem können sich – je nach Stoffkombination – auch verstärkt Anziehungskräfte zwischen den Stoffen bilden (z. B. durch chemische Veränderungen), die beim Starten aufgebrochen werden müssen.

(C) Rollreibung

Ein rollendes Objekt hat wesentlich weniger Widerstand als ein gleitendes. So wird eine rollende Stahlkugel auf einer waagrechten Kunststoff-Fläche (Boden) viel weiter kommen als eine gleich schwere, gleich schnell gleitende Stahlplatte.

Dennoch muss auch ein rollendes Objekt gegen eine Bremskraft ankommen, die man Rollreibung nennt. Beachten Sie, dass bei diesem Vorgang nichts passiert, was wir klassisch als „Reibung“ bezeichnen würden. Die Rollreibung wird in erster Line dadurch bewirkt, dass sich sowohl der rollende Körper als auch die Unterlage leicht verformt. Dies wird dadurch erleichtert, dass beim Rollen immer nur eine sehr kleine Fläche den Boden berührt, sodass dort hoher Druck herrscht.

Diese Verformung ist zwar zum Teil elastisch, kostet aber in Summe Energie, sodass kontinuierlich eine Kraft wirkt, die den Rollvorgang abbremst. In erster Näherung beschreibt man diese „Rollreibungskraft“ analog zur Gleitreibung:

$$\text{Rollreibung:} \qquad F_{R,R} = \mu_R \cdot F_N \tag{3.11}$$

Auch diese Kraft ist proportional zur Normalkraft, die das rollende Objekt auf die Unterlage drückt. Der Proportionalitätsfaktor μ_R heißt Rollreibungszahl und ist um mindestens eine Größenordnung kleiner (bei gleichen Materialien) als die Gleitreibungszahl. Dies ist ein Hauptgrund dafür, dass man z. B. Achsen nicht in ihrem Lager gleiten lässt, sondern mittels Kugellagern festhält.

Auch hier hängt die bremsende Reibungskraft nicht von der Auflagefläche ab: Es ist also egal, ob eine Kugel oder eine Walze rollt. Außerdem ist die Rollreibung laut Gleichung (3.11) nicht von der Geschwindigkeit abhängig, was bei höheren Rollgeschwindigkeiten aber in vielen Fällen nicht ganz richtig ist.

(D) Strömungswiderstand

Wenn sich ein Körper in einer Flüssigkeit oder einem Gas bewegt, widersetzt sich dieses Medium der Bewegung: Es muss verdrängt werden, was nur durch Krafteinsatz möglich ist. Letztendlich führt dies dazu, dass auf den Körper eine bremsende Kraft F_W wirkt, die allgemein als Strömungswiderstand bezeichnet wird.

Wichtig ist, dass diese Kraft von der Geschwindigkeit abhängt, mit der sich ein Körper durch das Medium bewegt. Die Zusammenhänge sind im Allgemeinen kompliziert (siehe auch Kap. 6.4). Es gibt aber zwei gut beschreibbare Grenzfälle.

Laminare Reibung (Stokes-Reibung):
Wenn sich kleine Objekte langsam durch Flüssigkeiten bewegen (selten auch durch Gase), bildet sich im Medium eine laminare Strömung um das bewegte Objekt aus (genauer: Kap. 6.4). Das bedeutet, dass keine Wirbel entstehen, sondern kontinuierliche, einigermaßen geradlinige Stromlinien. In diesem Fall ist der Strömungswiderstand proportional zur Geschwindigkeit und hängt außerdem von der Form der bewegten Objekts und von der Flüssigkeit ab:

$$\begin{aligned} \text{Stokes-Reibung:} \quad F_{R,S} &= -\kappa \cdot \eta \cdot v \qquad \rightarrow \qquad \vec{F}_{R,S} = -\kappa \cdot \eta \cdot \vec{v} \\ \text{Kugel:} \quad \vec{F}_{R,S} &= -6\,\pi \cdot r \cdot \eta \cdot \vec{v} \end{aligned} \tag{3.12}$$

Hier ist η (der griech. Buchstabe „eta“) die Zähigkeit des Mediums (siehe Kap. 6.4.3), κ („kappa“) enthält Informationen zur Form des Körpers, und das Minus zeigt an, dass die Kraft der Geschwindigkeit entgegen wirkt. Für eine Kugel mit dem Radius r gilt: $\kappa = 6\pi \cdot r$. Wichtig ist, dass diese Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit v ist, im Gegensatz zur Gleitreibung ($F \neq f(v)$) und turbulenten Reibung ($F \sim v^2$).

Turbulente Reibung (Newtonsche Reibung):
Wenn sich Objekte durch Gase oder schnell durch Flüssigkeiten bewegen, entstehen um das Objekt und vor allem dahinter Wirbel und Turbulenzen im Medium. Dies führt zu einem Strömungswiderstand, der in guter Näherung proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit ist:

$$\text{Turbulente Reibung:} \qquad \vec{F}_{R,T} = -\frac{1}{2} \cdot c_w \cdot A \cdot \rho \cdot v^2 \cdot \vec{e}_v \tag{3.13}$$

A ist die Querschnittsfläche des bewegten Objekts in Bewegungsrichtung und ρ die Dichte des Mediums. c_w ist der „Widerstandsbeiwert“, eine Zahl, die ein Maß für die „Windschnittigkeit“ des bewegten Objekts liefert. c_w hängt nur von der Form, nicht aber von der Größe des Objekts ab – die Größe steckt ja in der Querschnittsfläche A. c_w-Werte sind einigermaßen konstant (aber nicht ganz...) und nicht einfach zu messen. Daher gibt es leicht unterschiedliche Angaben. Einige Werte:

flache Platte:	$c_w = 1{,}10$	Kugel:	$c_w = 0{,}40$
Mensch, stehend:	0,78	Mensch, liegend:	1,20
Halbkugelschale, konvex:	0,34	Halbkugelschale, konkav:	1,33
Radfahrer (aufrecht):	0,8	LKW (optimiert):	0,75
Cabrio, offen:	0,5	moderner PKW:	0,30
Formel 1-Rennwagen:	1,2	Pinguin:	0,02

Beachten Sie, dass diese Art der Reibung (auch „Luftwiderstand“ genannt), quadratisch mit der Geschwindigkeit zunimmt – zur Aufrechterhaltung einer höheren Geschwindigkeit muss also überproportional viel Kraft aufgewandt werden.

3.2.5 Statische Kräfte

Es gibt eine große Anzahl von Kräften, die einen Körper weder beschleunigen noch abbremsen, sondern lediglich festhalten können. Solche Kräfte nennt man statische Kräfte. Darunter fallen die **Adhäsionskräfte**, die für den Zusammenhalt zwischen verschiedenen Stoffen sorgen (z. B. Klebekräfte), die **Kohäsionskräfte** (innerer Zusammenhalt innerhalb eines Stoffs), aber auch die Haftreibung (z. B. auch zum Festhalten von Schrauben oder Nägeln) und viele andere mehr.

Typisch ist man vor allem daran interessiert, bis zu welcher Belastung eine statische Kraft anderen Kräften standhalten kann, ab wann sie also versagt, sodass eine dauerhafte Beschädigung des Materials eintritt oder die Verbindung sogar völlig zerstört wird. In den meisten Fällen sind die Vorgänge bei Belastung sehr kompliziert. Für elastische Materialien besprechen wir das in Kap. 6.2.

Für viele Materialien und Verbindungen werden Belastungs-Grenzwerte angegeben, oft in der Größe „Spannung“:

$$\text{(mechanische) Spannung:} \qquad \sigma = \frac{F}{A} \qquad [\sigma] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^2} = \mathrm{Pa} \quad \text{(Pascal)}$$

(σ ist der griechische Buchstabe sigma.) Beim Auftreten bekannter Kräfte F muss die Querschnittsfläche A der Klebung oder des Materials so groß gewählt werden, dass die auftretenden Spannungen σ immer deutlich kleiner sind als die in Tabellen aufgelisteten kritischen Spannungen, ab denen dauerhafte Schädigung zu befürchten ist.

Eine wichtige statische Kraft ist die **Haftreibung**, die immer dann auftritt, wenn zwei Körper lose und ohne Klebeverbindung aufeinander liegen. Die Haftreibung sorgt z. B.

dafür, dass Schuhsohlen oder die Räder von Fahrzeugen hinreichend fest auf dem Boden haften, damit Beschleunigungs- oder Bremskräfte ausgeübt werden können. Ohne Haftreibung wäre es fast unmöglich, sich bergauf zu bewegen. Alles, was wir festhalten, kann uns nur aufgrund der Haftreibung nicht entgleiten, usw. Die Berechnung funktioniert ganz analog zur Gleitreibung:

$$\text{Haftreibung:} \qquad F_{R,H} \;\leq\; F_{R,H,max} \;=\; \mu_H \cdot F_N \tag{3.14}$$

F_N ist die Normalkraft, also jene Kraft, die die beiden Körper aufeinander drückt, und μ_H der der Haftreibungskoeffizient, der die Stärke der Reibungskraft definiert. μ_H ist für Paare von je zwei (glatten) Materialien in Tabellen zu finden, hängt aber auch stark von der Oberflächenbeschaffenheit ab. Wie schon auf S. 45 ausgeführt, ist die Haftreibungskraft immer größer als die Gleitreibungskraft.

Die Haftreibung kann eine Kraft F_P kompensieren, die parallel zur Grenzfläche der beiden Körper wirkt, und somit verhindern, dass sich einer von beiden in Bewegung setzt und auf dem anderen gleitet. Dies funktioniert, solange $F_P < F_{R,H,max}$. Sobald die parallele Kraft aber größer wird als die maximale Haftreibung, setzt sich ein Körper gegenüber dem anderen in Bewegung. Nun wirkt nicht mehr die Haft- sondern die Gleitreibung der Kraft F_P entgegen. Da die Gleitreibung kleiner ist als die maximale Haftreibung, steht ein Teil der Kraft zur Beschleunigung zur Verfügung, sodass die Bewegung nicht mehr aufzuhalten ist (siehe auch Abschnitte 3.3.3 und 3.3.4).

Dies ist zum Beispiel zu bemerken, wenn ein Fahrzeug auf der Fahrbahn zu rutschen beginnt, weil die Brems- oder die Zentripetalkraft, die durch Haftreibung auf den Boden übertragen werden muss, größer ist als die die Haftreibung. Die Bodenhaftung kann dann nur wiederhergestellt werden, indem die Bremskraft für kurze Zeit unter die Gleitreibung abgesenkt wird. Dies wird in vielen Autos durch ein ABS (Antiblockier-System) gemacht.

Beachten Sie, dass die Gleitreibung immer der aktuellen Bewegung entgegengerichtet ist, während die Haftreibung eine Bewegung in jede beliebige Richtung verhindert.

3.2.6 Die Zentripetalkraft

Wenn sich ein Körper mit der Geschwindigkeit $v = |\vec{v}|$ um eine Kurve bewegen soll, kann man die Kurve zu jedem Moment als Kreisbahn mit dem Radius $R(t)$ annähern. Damit diese Kurvenfahrt möglich ist, ist eine Normalbeschleunigung $\vec{a}_\perp$ vonnöten, die genau zum Krümmungsmittelpunkt des Näherungskreises zeigt und den Betrag

$$|\vec{a}_\perp| \;=\; a_{\mathrm{ZP}} \;=\; \frac{v^2}{R} \qquad \big(\text{Zentripetalbeschleunigung}\big) \tag{3.15}$$

hat (siehe Gleichung (2.30)). Diese Beschleunigung muss von irgendeiner Kraft erzeugt werden, die man in dieser Funktion „Zentripetalkraft“ nennt. Wenn der kurvende Körper die Masse m hat, muss die Zentripetalkraft genau den Betrag

$$\left|\vec{F}_{\mathrm{ZP}}\right| \;=\; m \cdot \frac{v^2}{R} \qquad \big(\text{Zentripetalkraft}\big) \tag{3.16}$$

haben und genau in Richtung des Kreisbogen-Mittelpunkts zeigen. Beachten Sie, dass die Zentripetalkraft kein eigener Kraft-Typ ist, sondern von jeder beliebigen Kraft zur Verfügung gestellt werden kann, also z. B. von der Gravitation (Planeten), der Haftreibung (Auto um die Kurve) oder anderen statischen Kräften (Karussell).

Eine Kurvenbahn mit bestimmtem Radius und Tempo ist also nur dann möglich, wenn die Zentripetalkraft in der richtigen Größe vorhanden ist. Wenn die Zentripetalkraft zu klein ist, wird der Radius größer, und wenn es gar keine Zentripetalkraft gibt, kann sich der Körper nach dem Newtonschen Trägheitsprinzip nur geradlinig weiter bewegen.

Immer, wenn man sich um eine Kurve bewegt, fühlt man die „**Zentrifugalkraft**“, die das Bestreben hat, einen aus der Kurve hinaus zu befördern. Die Zentrifugalkraft fühlt sich sehr real an und hat auch durchaus Wirkung. Dennoch ist sie eine **Scheinkraft**, weil sie nicht die Definition aus Abschnitt 3.2.1 erfüllt: Die Zentrifugalkraft übt keine Beschleunigung auf einen Körper aus.

Vielmehr ist die Zentrifugalkraft eine anschauliche Demonstration des Newtonschen Trägheitsprinzips: Jeder Körper bewegt sich geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit weiter, wenn keine Kraft auf ihn wirkt. Wenn ein Körper um eine Kurve gelenkt werden soll, muss auf ihn die Zentripetalkraft wirken. Bei einer Kurve im Auto wird diese Kraft (eine Normalkraft, also zur Seite gerichtet!) über den Autositz auf den menschlichen Körper übertragen (besser gesagt: auf Teile des Körpers). Da jeder Körperteil ‚träge‘ ist und danach strebt, sich geradeaus weiterzubewegen, ist aktives Übertragen der Zentripetalkraft auf alle Körperteile notwendig, damit sie sich nach innen in die Kurve mitbewegen. Dies fühlt man als Kraft nach außen, der man aktiv begegnen muss – ein Irrtum!

Wenn die Zentripetalkraft plötzlich endet (weil ein Seil reißt oder die Bodenhaftung weg ist, oder weil man einen Diskus oder Hammer loslässt), dann wird der Körper nicht vom Drehmittelpunkt weg nach außen geschleudert (wie einem das erscheinen mag), sondern fliegt geradlinig mit seiner letzten Geschwindigkeit weiter, weil es keine Kraft mehr gibt, die seine Richtung verändern könnte.

3.2.7 Die Grundkräfte der Physik

In der Natur tritt eine große Anzahl verschiedener Kräfte auf, die z.T. auf ganz verschiedene Art beschrieben werden müssen. Andererseits lässt sich aber – im Sinne des Reduktionismus (siehe Kap. 1.2: Alle Phänomena auf möglichst wenige Grundprinzipien zurückführen!) – zeigen, dass man alle bekannten Kräfte auf vier Grundkräfte zurückführen kann. Dies sind:

- Gravitationskraft: Anziehungskraft zwischen zwei oder mehreren Massen, wie sie in Abschnitt 3.2.2 beschrieben wird.
- Elektromagnetische Kraft: Die Wechselwirkungen zwischen ruhenden und bewegten elektrischen Ladungen sowie elektrischen und magnetischen Feldern. Diese

Wechselwirkung enthält zum Beispiel die elektrische Kraft zwischen geladenen Körpern oder die Kraft zwischen Magneten (siehe Vorlesung „Elektrizität und Magnetismus").

- Starke Wechselwirkung: Diese Kraft ist deutlich stärker als die elektromagnetische Kraft und bewirkt zum Beispiel den Zusammenhalt von Atomkernen, obwohl dort – neben neutralen – nur positiv geladene Teilchen vorliegen, die sich elektrisch abstoßen. Außerdem sorgt diese Kraft für den inneren Zusammenhalt von Protonen und Neutronen, die selbst aus jeweils drei Quarks bestehen.
- Schwache Wechselwirkung: Diese Kraft ist für die Umwandlung von Elementarteilchen verantwortlich, z. B. für die Entstehung eines Elektrons beim Beta-Zerfall von Atomkernen.

In der theoretischen Physik wurde lange die Idee verfolgt, auch diese vier Kräfte in eine einzige Beschreibung zusammenzuführen. Dies ist aber bisher nicht in sinnvoller Weise gelungen. In der Praxis verwendet man ohnehin jede Kraft mit ihrer eigenen Beschreibung und führt sie nicht auf die Grundkräfte zurück, weil das für konkrete Aufgaben bei Weitem praktischer ist.

3.3 Die Wirkung von Kräften

3.3.1 Rechnen mit Kräften

(A) Prinzip

Die Wirkung jeder Art von Kraft wird immer von der Bewegungsgleichung

$$\text{Bewegungsgleichung:} \qquad \vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{ges}}}{m} \tag{3.17}$$

beschrieben (siehe S. 34). Dabei ist für $\vec{F}_{\text{ges}}$ die Summe aller Kräfte einzusetzen, die auf die Masse m wirken.

Ein Hauptziel der Mechanik ist es, den Geschwindigkeitsverlauf und/oder die Bahnkurve des beschleunigten Körpers unter der Wirkung aller vorhandenen Kräfte zu berechnen. Dazu wird die Bewegungsgleichung im allgemeinen Fall als Differenzialgleichung formuliert, indem statt der Beschleunigung die Zeitableitung der Geschwindigkeit oder die zweite Zeitableitung der Position eingesetzt wird.

$$\vec{a(t)} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\vec{F}_{\text{ges}}(\vec{r}(t), t)}{m} \tag{3.18}$$

Eine Differenzialgleichung wie Gleichung (3.18) hat als Lösung nicht den Wert für eine Variable (also sowas wie $x = 4$), sondern eine Funktion, z. B. $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{a} \cdot t^2$. Hier wollen wir also im besten Fall als Ergebnis der Rechnung die Bahnkurve eines Körpers berechnen können, d. h. den zeitlichen Verlauf seiner Position.

Ob man es aber schafft, die Gleichung (3.18) zu lösen, hängt entscheidend davon ab, mit welcher Formel die Gesamtkraft $\vec{F}_{\mathrm{ges}}$ beschrieben werden muss (und ob das überhaupt bekannt ist!). Oft muss man sich auf die numerische Lösung beschränken. Manchmal gelingt es allerdings auch, aus der Gleichung wertvolle Informationen über die Bewegung zu gewinnen, ohne die Gleichung lösen zu müssen.

Im allgemeinen Fall, so wie das oben angeschrieben ist, hängt die Kraft erstens vom Ort $\vec{r}$ ab, der zweitens selbst von der Zeit t abhängt (der betrachtete Körper bewegt sich ja!), und drittens kann sich auch die Kraft selbst mit der Zeit t verändern. In einem solchen Fall ist es sehr anspruchsvoll und schwierig, die Gleichung zu lösen. Dies wird in fortgeschrittenen Vorlesungen für viele verschiedene Fälle gemacht. Hier beschränken wir uns auf einige einfache Beispiele, bei denen wir die Bewegungsgleichung zum Teil gar nicht brauchen, sondern nur den skalaren Zusammenhang $F = m \cdot a$ verwenden.

(B) Kräfte als Vektoren

Physikalische Größen, bei denen es nicht nur auf ihre Größe ankommt, sondern auch auf die Richtung, werden als Vektoren dargestellt (Beispiele: Geschwindigkeit oder magnetische Feldstärke; im Gegensatz zu skalaren Größen ohne Richtungsinformation wie Masse, Temperatur oder Frequenz). Die Kraft ist ebenfalls ein typisches Beispiel für eine vektorielle Größe. Selbstverständlich lässt man den Vektor weg und rechnet nur mit dem Betrag, wenn es auf die Richtung nicht ankommt – in vielen praktischen Fällen braucht man aber doch gerade die Vektoreigenschaften der Größe Kraft.

Wir besprechen hier einige dieser typischen Vektoreigenschaften:

- Kräfte setzen sich entlang ihrer Richtung fort:
  Wenn eine Kraft entlang einer bestimmten Richtung wirkt, dann setzt sie sich in dieser Richtung fort, bis sie durch eine Gegenkraft kompensiert wird. So wirkt in einer Kette, die mit der Kraft F gespannt wird, auf jedes Kettenglied genau dieselbe Kraft F.
- Kräfte können addiert werden:
  Zwei Kräfte in derselben Richtung führen zu einer Kraft, deren Betrag die Summe der einzelnen Beträge ist. Die Addition von Kräften funktioniert aber auch vektoriell: Zwei entgegengesetzt angreifende Kräfte schwächen sich gegenseitig oder kompensieren sich komplett, wenn sie den selben Betrag haben.
  Zwei Kräfte, die unter einem Winkel α an einem Körper angreifen, erzeugen eine Gesamtkraft, die der Vektorsumme der beiden Kräfte entspricht.
- Eine Kraft $\vec{F}$ kann sich in Kräfte unterschiedlicher Richtung aufteilen:
  Allgemein kann jeder Vektor $\vec{A}$ in Teilvektoren $\vec{A}_1$, $\vec{A}_2$, …zerlegt werden, wenn die Summe der Teilvektoren wieder den ursprünglichen Vektor ergibt, also
  $$\vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \ldots \;=\; \vec{A}$$
  Mathematisch dürfen die Teilvektoren jede beliebige Richtung und Länge haben, solange sie nur die Summenbedingung erfüllen. In der Physik hat eine solche Zerlegung nur Sinn, wenn die Teilvektoren physikalischen Phänomenen entsprechen.

Oft ist die Wirkung einer Kraft (Beschleunigung einer Masse) nicht in jener Richtung möglich, in der die Kraft angreift. Wenn die Masse aber in anderer Richtung bewegt werden kann (Beispiel: in Richtung des Einheitsvektors $\vec{e}$), dann wird die Masse in diese Richtung beschleunigt, allerdings nur von einem Teil der Kraft. Um die Beschleunigung berechnen zu können, zerlegt man die Kraft $\vec{F}$ vektoriell in zwei Kräfte, die Beschleunigungskraft $\vec{F}_B$ und die Normalkraft $\vec{F}_N$:

$$\vec{F} = \vec{F}_B + \vec{F}_N \qquad \text{mit} \quad \vec{F}_B = \left(\vec{F} \cdot \vec{e}\right) \cdot \vec{e} \quad \text{und} \quad \vec{F}_N = \vec{F} - \vec{F}_B$$

Diese Zerlegung von Kräften ist an sehr vielen Stellen wichtig, z. B. beim Berechnen, wie ein Gegenstand eine schiefe Ebene hinab gleitet (siehe Abschnitt 3.3.3).

- Eine Kraft kann umgelenkt werden:
  Eine Kraft und ihre Wirkung, die Beschleunigung von Massen, können in ihrer Richtung verändert werden, wenn die Kraft z. B. an einem Seil angreift und dieses über eine Rolle läuft. So kann man eine schwere Last leichter hochheben, wenn sie an ein Seil gebunden wird, das oben von einer Rolle umgelenkt wird, weil sie dann mit Hilfe des eigenen Körpergewichts angehoben werden kann. Achtgeben muss man dann aber darauf, dass die Rolle gut befestigt ist: Sie muss das doppelte Gewicht tragen, weil außer der Last auch noch die Zugkraft nach unten wirkt.

Die Umlenkung und die Aufteilung von Kräften können auf viele Arten kombiniert werden. Ein Beispiel ist der **Flaschenzug**, ein uraltes Gerät zur Erleichterung beim Hochziehen von Lasten. In der einfachsten Version wird das Gewicht der Last durch eine Rolle in zwei Hälften geteilt: Eine Hälfte wird fixiert und somit von einer statischen Kraft „getragen“, die andere Hälfte muss gehalten werden. Wenn man dort zieht, braucht man nur die halbe Kraft, muss aber dafür die doppelte Distanz ziehen.

In vielen Flaschenzügen wird durch kluges Design eine viel höhere „Übersetzung“ erreicht. Immer ist es aber so, dass man um jenen Faktor x, um den man weniger Kraft aufwenden muss ($F = F_0/x$), mehr Zugweg investieren muss ($L = x \cdot L_0$), sodass das Produkt aus Kraft und Weg konstant bleibt. Dies ist eine Form der Energieerhaltung (siehe Kap. 4.2.3).

(C) Kompensation von Kräften

In vielen Fällen ist man daran interessiert, alle vorhandenen dynamischen Kräfte durch statische Kräfte so zu kompensieren, dass in Summe keine Gesamtkraft auftritt. Wenn das gelingt, kann es keine Beschleunigung von Massen geben und das vorhandene System bleibt stabil. Zur vollen Beurteilung derartiger Stabilität muss auch die Rotation betrachtet werden – wir besprechen das daher erst später im Kap. 5.4.2.

Hier überlegen wir kurz, wie man die Kompensation von Kräften betrachtet. Diese Analyse kann für jeden beliebigen Punkt einer Anordnung gemacht werden: Wenn die Summe aller Kräfte an diesem Punkt Null ist, kann sich dieser Punkt aus der Ruhelage nicht wegbewegen.

Wichtig zu wissen ist es, dass viele einfache Konstruktionen des täglichen Lebens bei der Kraft-Kompensation sehr hohe statische Belastungen erzeugen. Ein Beispiel ist eine einfache Wäscheleine, die straff gespannt an zwei Haken zwischen gegenüberliegenden Wänden hängt. Wenn auf dieser Leine Gegenstände mit der Masse M hängen, wirkt die Schwerkraft $F_g = M \cdot g$ auf die Leine. Der Einfachheit halber stellen wir uns vor, dass die gesamte Last genau in der Mitte der Leine hängt. Die Leine biegt sich durch (Winkel α zur Waagrechten), bleibt dann aber bewegungslos, was beweist, dass die Schwerkraft durch andere Kräfte kompensiert wird.

Wir betrachten den tiefsten Punkt der Leine: Die nach unten ziehende Gewichtskraft der Last kann nur nach beiden Seiten entlang der Leine kompensiert werden. Dazu muss jede der beiden Seilhälften die Hälfte der Schwerkraft aufnehmen, und zwar als z-Komponente. Weil die Kraft in jedem Seilstück aber entlang des Seils laufen muss, muss neben der erzwungenen z-Komponente auch eine viel größere x-Komponente vorliegen, mit dem Betrag $|F_x| = |F_z| \,/\, \tan\alpha$. Die beiden x Komponenten sind am Mittelpunkt des Seils entgegengerichtet und kompensieren sich gegenseitig. In jeder Hälfte des Seils wirkt nun eine Kraft

$$\text{Kompensationskraft:} \qquad F_K \;=\; \frac{F_g}{2} \cdot \frac{1}{\sin\alpha}\;.$$

So ist jede Kompensationskraft bei einem Winkel von $\alpha = 5°$ um $5,7$ mal größer als die Gewichtskraft. Bei einer hängenden Masse von $M = 15\,\mathrm{kg}$ führt das zu zwei Kräften von je $F_K \approx 850\,\mathrm{N}$ – das entspricht der Gewichtskraft einer Masse mit $M = 86\,\mathrm{kg}$.

Die Kompensation der Schwerkraft kann also zu Kräften führen, die dramatisch größer sind als die ursprüngliche Schwerkraft selbst. Dies führt zu erheblichen und oft unerwarteten Belastungen aller Komponenten (hier: Seil, Haken zur Aufhängung etc.).

3.3.2 Bewegung unter Einfluss der Reibung

(A) Geradeausfahrt

Wenn sich ein Fahrzeug mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v} = \text{const}$ bewegt, bedeutet das gemäß Trägheitsprinzip, dass auf das Fahrzeug in Summe keine Kraft wirkt: $\vec{F}_{\text{ges}} = 0$. Wir wissen aber, dass in der Regel eine konstante Antriebskraft $\vec{F}_A$ in Richtung der Bewegung aufgebracht werden muss, weil gleichzeitig immer auch Reibungskräfte $\vec{F}_R$ entgegen der Geschwindigkeit wirken. Dies erlaubt die Schlussfolgerung

$$\vec{F}_A \;=\; -\vec{F}_R \qquad \text{wenn} \quad \vec{v} \;=\; \text{const} \tag{3.19}$$

Die Motorkraft von Autos (oder die Muskelkraft von Radfahreren, Ruderern oder Läufern) wird also bei konstanter Geschwindigkeit ausschließlich zur Überwindung der Reibung verwendet – hauptsächlich Luft- und Rollreibung, aber auch innere Reibung in Getrieben, Muskeln etc.

(B) Abbremsen

Wenn ein Fahrzeug auf ebenem Untergrund abgebremst werden soll, wird dazu eine Kraft verwendet, die in der Regel vorerst auf die drehenden Räder einwirkt (Bremskraft) aber dazu führt, dass das ganze Fahrzeug langsamer wird (negative Beschleunigung, also lineare Bremskraft auf das Fahrzeug). Nach dem Reaktionsprinzip muss eine gleich große Gegenkraft auf die Umgebung übertragen werden. Dies ist nur über die Reifen möglich, da sonst ja nirgends Kontakt zur Umgebung besteht. In der Regel liegt immer ein kleines Stück des Reifenumfangs am Boden und ist über die Haftreibung mit dem Untergrund verbunden.

Beim Bremsen („Beschleunigungskraft“ nach hinten) muss die Reaktionskraft nach vorne wirken und wird durch die Reifen-Auflageflächen auf den Boden und somit auf die ganze Erde übertragen. Dadurch wird die maximal mögliche Bremsbeschleunigung festgelegt:

$$m \cdot a_{\mathrm{Br}} \;\leq\; F_{\mathrm{R,H}} \;=\; \mu_H \cdot F_N \;=\; \mu_H \cdot m \cdot g \qquad \rightarrow \quad a_{\mathrm{Br}} \;\leq\; \mu_H \cdot g$$

Als Normalkraft wird hier die gesamte Schwerkraft des Autos eingesetzt, die ja über die Reifen auf den Boden wirkt (egal, wie die Schwerkraft auf die einzelnen Reifen verteilt ist). Der Haftreibungskoeffizient μ_H zwischen Reifen und Asphalt liegt typisch im Bereich von $\mu_H \approx 0,7$, sodass die Bremsbeschleunigung nur Werte um $a_{\mathrm{Br}} \leq 7\,\mathrm{m/s^2}$ erreichen kann, klar weniger als die Erdbeschleunigung.

Wenn stärker gebremst wird ($F_B > F_{\mathrm{R,H}}$), kann die Haftreibung nicht genügend Gegenkraft zur Verfügung stellen und das das Fahrzeug beginnt zu rutschen. Beachten Sie, dass die Haftreibung nun schlagartig endet und die Gleitreibung die Rolle als Reaktionskraft „übernimmt“. Da die Gleitreibung aber kleiner ist als die Haftreibung, wird auch die Bremskraft schlagartig kleiner, egal wie fest man auf die Bremse steigt: Keine Kraft kann größer sein als ihre Reaktionskraft! Statt $F_B = F_{\mathrm{R,H}}$ wir nun plötzlich nur mit der kleineren Kraft $F_B = F_{\mathrm{R,G}}$ gebremst, was zu erheblicher Verlängerung des Bremswegs führen kann. Um dies zu verhindern, haben moderne Autos Antiblockiersysteme (ABS) eingebaut, die dafür sorgen, dass die Reifen beim Bremsen stets rollen (und somit auf der Straße aufliegen) und nicht rutschen.

(C) Beschleunigen

Zum Beschleunigen (Tempo-Erhöhung) muss die Reaktionskraft nach hinten wirken. Wieder wird sie durch die Haftreibung der Reifen auf die Straße übertragen. Da die meisten Autos Vorderradantrieb haben, machen nur zwei Reifen den Kraftschluss mit dem Boden, und die Normalkraft F_N ist nun nicht die gesamte Gewichtskraft des Fahrzeugs, sondern nur jener Anteil, der auf den angetriebenen Rädern ruht (in erster Näherung die Hälfte des Fahrzeuggewichts).

Analog zum Bremsen kann die Beschleunigungskraft höchstens so groß sein wie die Haftreibungskraft an den Antriebsrädern. Wenn mehr Kraft angelegt wird, drehen die Reifen durch, die schwächere Gleitreibung übernimmt und die Beschleunigung nimmt ab. Ein solcher „Kavalierstart“ mit durchdrehenden Reifen ist nicht nur verboten (unnötige Lärmbelastung), sondern auch langsamer als die Beschleunigung mit haftenden Antriebsrädern. In Autos gibt es verschiedene elektronische Systeme, die dafür sorgen, dass die Reifen beim Beschleunigen nicht durchdrehen.

Manche Fahrzeuge sind mit extra breiten Reifen ausgestattet, und oft herrscht die Meinung, dass damit besser beschleunigt und gebremst werden kann. Aus der Gleichung (3.14) für die Haftreibung wird sofort klar, dass dies in erster Näherung nicht stimmen kann: Die Reibung hängt nicht von der Auflagefläche ab.

Es gibt aber zwei Gründe, warum mit breiten Reifen doch ein kleiner Vorteil entstehen kann: Erstens verschleißen breite Reifen nicht so schnell wie schmale, weil es beim Verschleiß auch auf die Auflagefläche ankommt. Deshalb werden für Breitreifen manchmal weichere Gummimischungen verwendet, die nicht ganz so lange halten wie die normalen, deren Haftreibungskoeffizient μ_H aber (geringfügig) höher ist als der übliche. Zweitens sind die erheblichen Quermomente, die beim schnellen Kurvenfahren auf die Achse ausgeübt werden, mit breiteren Reifen kleiner.

Für extreme Beschleunigung von Fahrzeugen ist also in erster Linie ein guter „Kraftschluss“ mit dem Untergrund erforderlich (hohe Motorleistung, die darüber hinaus geht, bringt hier nichts). Theoretisch ist Vierradantrieb für hohe Beschleunigung vorteilhaft, weil dann – wie beim Bremsen – alle Räder beitragen können. Im sogenannten „Motorsport“ wird versucht, hohe Beschleunigung über deutlich größere Haftreibung zu erreichen, mit Hilfe von Reifen-Gummimischungen, die deutlich weicher sind und besser haften, aber sehr schnell verschleißen.

3.3.3 Gleiten auf einer schiefen Ebene

Wenn ein Körper mit der Masse m auf einer schiefen Ebene liegt, dann wirkt vorerst nur die Schwerkraft $F_g = m \cdot g$, die den Körper einerseits auf die Unterlage drückt und ihn andererseits bergab beschleunigt. Um auszurechnen, was genau passiert, verwenden wir die oben beschriebene Methode der Vektorzerlegung. Wenn die schiefe Ebene den Winkel φ zur Waagrechten hat, können wir leicht ausrechnen, wie sich die Schwerkraft aufteilt:

$$\text{Normalkraft:} \quad F_N = \left|\vec{F_N}\right| = F_g \cdot \cos\varphi \tag{3.20}$$

$$\text{Beschleunigungskraft:} \quad F_B = \left|\vec{F_B}\right| = F_g \cdot \sin\varphi \tag{3.21}$$

$$\text{Summe:} \quad \sqrt{{F_N}^2 + {F_B}^2} = F_g \cdot \sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi} = F_g$$

Aus der Normalkraft können wir nun die Reibung berechnen. Wenn der Körper in Ruhe ist und die Haftreibung größer ist als die Beschleunigungskraft F_B, dann bleibt der Körper ohne Bewegung liegen. Wenn sich der Körper hingegen bewegt, wird er von der Gleitreibung gebremst und von der Beschleunigungskraft F_B beschleunigt – die tatsächliche Beschleunigung berechnet sich aus der Differenz der beiden Kräfte. Es treten also folgende Fälle auf:

$$\begin{aligned}
\text{Körper in Ruhe:} \quad & F_B < F_{R,H} && \rightarrow \quad F_g \cdot \sin\varphi < \mu_H \cdot F_g \cdot \cos\varphi \\
\text{Körper startet:} \quad & F_B > F_{R,H} && \rightarrow \quad F_g \cdot \sin\varphi > \mu_H \cdot F_g \cdot \cos\varphi \\
\text{Körper gleitet:} \quad & F_{\text{ges}} = F_B - F_{R,G} && = \quad F_g \cdot \sin\varphi - \mu_G \cdot F_g \cdot \cos\varphi
\end{aligned}$$

Im letzten Fall – wenn der Körper einmal gleitet – spielt die Haftreibung $F_{R,H}$ keine Rolle, weil sie eine statische Kraft ist und somit nur verhindern kann, dass sich ein Körper in Bewegung setzt. Sobald und solange der Körper gleitet, wird er von der Gleitreibung $F_{R,G}$ gebremst. Die Haftreibung $F_{R,H}$ übernimmt erst wieder dann, wenn der Körper stehen bleiben sollte.

Die Bewegung wird nun gemäß Gleichung (3.17) mit Hilfe der Gesamtkraft F_{ges} berechnet. Weil die Bewegungsrichtung ja fest steht (entlang der schiefen Ebene hinunter), machen wir die Rechnung eindimensional entlang dieser Richtung:

$$a = \frac{F_{\text{ges}}}{m} = \frac{F_g \cdot \sin\varphi - \mu_G \cdot F_g \cdot \cos\varphi}{m} = g \cdot (\sin\varphi - \mu_G \cdot \cos\varphi) \tag{3.22}$$

Diese Rechnung hat natürlich nur Sinn, solange sich der Körper bewegt, weil es ja nur dann Gleitreibung gibt. Beachten Sie, dass die Beschleunigung $a = \text{const}$ ist. Wir können also mit den Gleichungen (2.26) und (2.28) den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit (linear!) und der Position (quadratisch!) entlang der schiefen Ebene berechnen. Wenn a positiv ist, wird der Körper nach unten beschleunigt, wenn a negativ ist, wird er gebremst.

3.3.4 Bewegung auf einer Kreisbahn

Immer, wenn sich ein Körper mit Masse m und Geschwindigkeit $v = |\vec{v}|$ auf einer Kreisbahn mit Radius R bewegt, muss eine Zentripetalkraft wirken, die genau in Richtung auf den Kreismittelpunkt zeigt und deren Betrag mit Gleichung (3.16) berechnet werden kann:

$$\text{Zentripetalkraft:} \qquad \left|\vec{F}_{\text{ZP}}\right| = m \cdot \frac{v^2}{R} \tag{3.23}$$

Dies gilt auch, wenn der Körper keine Kreisbahn beschreibt, sondern eine beliebig geformte Kurve: In jedem Moment kann man einen Kreis an die derzeitige Bahn schmiegen. Die Zentripetalkraft (Richtung und Stärke) entspricht dann für einen Moment jener auf genau diesem Kreis.

Die Zentripetalkraft muss von irgendeiner realen Kraft aufgebracht werden. Wir besprechen im Folgenden einige Szenarien.

(A) Kreisbahn im Gravitationsfeld

Der Mond und sehr viele Satelliten befinden sich im Gravitationsfeld der Erde und stürzen nur deshalb nicht ab, weil sie auf einer gekrümmten Bahn um die Erde laufen.

Wir nehmen vorerst an, dass das eine Kreisbahn sei, wie es für viele künstliche Satelliten der Fall ist (im Allgemeinen laufen Planeten und Satelliten auf Ellipsenbahnen, was wir im Kap. 5.3.2 besprechen werden).

Ein Objekt mit Masse m, das sich im Abstand r vom Erdmittelpunkt befindet, wird mit der Gravitationskraft F_G angezogen (Gleichung (3.4)), die quadratisch kleiner wird, je weiter das Objekt von der Erde entfernt ist. Wenn dieses Objekt also auf einer Kreisbahn mit dem Radius r um die Erde laufen soll, muss die Gravitation dort genau gleich groß sein wie die benötigte Zentripetalkraft:

$$F_G(r) \; = \; F_{\text{zp}}(r) \qquad \rightarrow \quad G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \; = \; m \cdot \frac{v^2}{r} \qquad \rightarrow \quad v \; = \; \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} \tag{3.24}$$

Wir erhalten eine Bedingung für die Geschwindigkeit: Wie schnell muss ein Objekt fliegen, um im Abstand r vom Erdmittelpunkt kreisen zu können? Beachten Sie: Für jeden Abstand r ist nur genau eine Geschwindigkeit v möglich, unabhängig von der Masse m des Objekts (die sich wegkürzt).

Als Beispiel betrachten wir die Internationale Raumstation ISS, die in ca. $h = 400\,\text{km}$ Höhe über der Erdoberfläche um die Erde kreist. Der Radius ist also $r = R_E + h = 6770\,\text{km}$. Daraus erhält man mit Gleichung (3.24) die Geschwindigkeit $v = 7670\,\text{m/s} = 27600\,\text{km/h}$ – die Raumstation braucht ungefähr 90 min, um die Erde einmal zu umkreisen.

Die Gleichung (3.24) sagt aus, dass die Gravitationskraft auf der ISS vollständig dafür verwendet wird, die Raumstation permanent auf ihrer Kreisbahn zu halten. Die Beschleunigung wirkt immer genau im rechten Winkel auf die Geschwindigkeit und führt daher ausschließlich zu einer Richtungsänderung. Dies gilt ebenso für alles, was sich auf der Station befindet, z. B. auch für alle Personen.

Bekanntlich erlebt man auf der ISS perfekte „Schwerelosigkeit". Beachten Sie, dass dieser Begriff nicht bedeutet, dass es dort keine Schwerkraft gibt. Im Gegenteil: Nach den Gleichungen (3.4) und (3.8) beträgt die „Erdbeschleunigung" in der Höhe $h = 400\,\text{km}$ über dem Boden etwa $g(400\,\text{km}) \approx 8,7\,\text{m/s}^2$. Diese Beschleunigung wirkt auch tatsächlich und dreht die Raumstation permanent in die Kurve, und ebenso ihre Besatzung. Warum man sich schwerelos fühlt, liegt daran, dass der gesamte menschliche Körper (also jeder Körperteil, sogar jedes Molekül und Atom im Körper) in gleicher Weise beschleunigt wird und nicht, wie auf dem Boden, durch eine Gegenkraft die Erdbeschleunigung verhindern muss.

(B) Kurvenfahrt auf ebener Fahrbahn

Wenn mit einem Fahrzeug eine Kurve gefahren wird, muss die Zentripetalkraft F_{zp} von der Haftreibungskraft zwischen Reifen und Straße aufgebracht werden, wie auch beim Bremsen und Beschleunigen. Bei einer Kurve mit Radius R gilt:

$$F_{\text{zp}} \; \leq \; F_{\text{R,H}} \qquad \rightarrow \quad v \; \leq \; \sqrt{R \cdot \mu_H \cdot g}$$

Wenn die benötige Zentripetalkraft größer ist als die maximal vorhandene Haftreibung, kann das Fahrzeug der Lenkbewegung nicht folgen und gleitet geradeaus aus der Kurve. Die Gleitreibung der eingeschlagenen, voll drehenden Vorderräder kann die Richtung ein wenig beeinflussen (sodass man in einem Bogen von der Straße fliegt), aber nie so stark wie die Haftreibung.

Zur formalen Analyse betrachten wir vorerst alle dynamischen Kräfte, die hier wirken, In diesem Fall ist das nur die Schwerkraft $\vec{F}_g$, die vom Schwerpunkt des Fahrzeugs senkrecht nach unten wirkt. Da wir wissen, dass letztendlich auch die Zentripetalkraft $\vec{F}_{\text{zp}}$ auf den Schwerpunkt wirken muss, zerlegen wir die Schwerkraft als einzige verfügbare Kraft in die Zentripetalkraft und eine „Restkraft“ $\vec{F}_x$:

$$\text{Zerlegung:} \qquad \vec{F}_g = \vec{F}_{\text{zp}} + \vec{F}_x \qquad \rightarrow \qquad \text{Restkraft} \quad \vec{F}_x = \vec{F}_g - \vec{F}_{\text{zp}}$$

Die „Restkraft“ $\vec{F}_x$ zeigt schräg nach unten und nach außen aus der Kurve. Diese Kraft wird über die Reifen auf den Boden übertragen und muss dort kompensiert werden, damit die Reifen an ihrer Auflagefläche mit dem Boden verbunden bleiben. Die Kompensationskraft $-\vec{F}_x$ hat erstens eine Komponente $\vec{F}_S$, die normal zum Boden auf das Fahrzeug wirkt. Das sind statische Kräfte in der Fahrbahn, die hier senkrecht nach oben wirken und deshalb in diesem speziellen Fall genau die Schwerkraft des Fahrzeugs kompensieren. Zweitens wirkt eine Komponente parallel zur Fahrbahn, nämlich die Haftreibungskraft $\vec{F}_{\text{R,H}}$. Wir erhalten:

$$\text{Kompensation am Boden:} \qquad -\vec{F}_x = \vec{F}_{\text{S}} + \vec{F}_{R,H}$$

Wir betrachten noch einmal die gesamte Situation:

- Die Schwerkraft, die auf den Schwerpunkt des Fahrzeugs wirkt, wird durch die statische Kraft in der Fahrbahndecke völlig kompensiert: Es gibt keine resultierende Beschleunigung nach unten.
- Die Zentripetalkraft wird hingegen nicht kompensiert, sondern ist in Betrag und Richtung gleich groß wie die Haftreibungskraft: Es gibt also eine Beschleunigung in radialer Richtung, die zur Kurvenfahrt führt.

Beachten Sie, dass $F_{\text{zp}} = F_{\text{R,H}}$ meist deutlich kleiner ist als die maximal mögliche Haftreibung $F_{\text{R,H,max}} = \mu_H \cdot F_N$. Sobald diese aber überschritten wird, klappt die Haftung nicht mehr und somit auch nicht die Kurvenfahrt.

Besonders gefährlich ist es, in einer Kurve zu bremsen, wenn man nahe am Zentripetalkraftlimit $F_{\text{zp}} = F_{\text{R,H,max}}$ unterwegs ist, weil dadurch die Kraft, die auf die Straße übertragen wird, noch größer wird: Die Bremskraft F_{Br} (nach hinten) und die Zentripetalkraft F_{zp} (radial nach innen) müssen vektoriell addiert werden und gemeinsam von der Haftreibung „gehalten“ werden.

(C) Kurvenfahrt auf geneigter Fahrbahn

Die meisten Kurven von Straßen und Schienenwegen sind nach innen geneigt. Dies soll die Gefahr des „aus-der-Kurve-Fliegens“ verringern und höhere Kurvengeschwindigkeiten ermöglichen. Bei richtig gewählter Geschwindigkeit wäre es dann sogar ohne jegliche Reibung möglich, um die Kurve zu kommen.

Wie die Kräfte zusammenspielen, überlegt man sich gleich wie oben: Auf das Fahrzeug wirkt vorerst nur die Schwerkraft. Da aber eine Zentripetalkraft benötigt wird, wird die Schwerkraft in diese und eine „Restkraft“ $\vec{F_x}$ aufgeteilt. Diese ist gleich groß wie im im Fall der ebenen Fahrbahn und muss wie dort an den Reifen kompensiert werden.

Zur Beschreibung der Kompensation zerlegen wir die Restkraft $-\vec{F_x}$ in eine Normalkraft F_S, die im rechten Winkel zur Fahrbahn steht, und die Haftreibung $F_{R,H}$, die in der Fahrbahnebene wirkt. Die Haftreibung wird mit Hilfe der Normalkraft F_S berechnet, die hier größer ist als die Gewichtskraft des Autos.

Je nach Neigung der Fahrbahn kann der für die Kompensation benötigte Anteil der Reibungskraft deutlich kleiner werden, bei richtiger Einstellung (wenn $\vec{F_x}$ genau in Richtung der Flächennormalen zeigt) auch ganz verschwinden. Der Parallelanteil der Restkraft (und somit die Zentripetalkraft) wird in diesem Fall durch die Neigung der Fläche von der Normalkraft bereit gestellt. Bei starker Neigung und/oder niedrigem Tempo kann es sogar geschehen, dass die benötigte Haftreibung nicht ins Kurveninnere zeigt, sondern nach außen – dann wird die Haftreibung gebraucht, um zu verhindern, dass das Fahrzeug auf der geneigten Fläche nach innen abrutscht.

(D) Kurvenfahrt von Zweirädern

Fahrräder, Motorräder usw. „legen sich in die Kurve“, wenn sie eine Richtungsänderung durchführen. Wenn Geschwindigkeit v und Kurvenradius R gegeben sind, liegt dieser Neigungswinkel fest und kann nicht etwa frei gewählt werden.

Die Analyse funktioniert ganz ähnlich wie bei vierrädrigen Gefährten: Als dynamische Kraft steht nur die Schwerkraft zur Verfügung. Da klar ist, dass eine Zentripetalkraft vorhanden sein muss, wird die Schwerkraft in diese und in eine Restkraft $\vec{F_x}$ aufgeteilt. Diese Restkraft muss vom Schwerpunkt geradeaus zu den Reifen laufen und dort von der Straße kompensiert werden, damit die Situation stabil ist. Dies ist nur möglich, wenn der Neigungswinkel genau der Richtung dieser Restkraft entspricht: Der Winkel α gegen die Senkrechte ist also

$$\text{Neigungswinkel:} \qquad \tan\alpha = \frac{F_{\mathrm{zp}}}{F_g} \qquad \to \qquad \alpha = \arctan\left(\frac{v^2}{R\cdot g}\right) \tag{3.25}$$

Die Kompensation am Kontaktpunkt zwischen Reifen und Straße ist dann wieder gleich wie bei Autos: Die Restkraft wird durch eine statische Kraft (normal zur Fahrbahn) und die Haftreibungskraft (parallel zur Fahrbahn) kompensiert. Letzteres funktioniert nur, wenn der maximal mögliche Wert der Haftreibung nicht überschritten wird.

3.3.5 Bewegung unter dem Einfluss eines Strömungswiderstands

(A) Stokes-Reibung

Wir beginnen mit dem selteneren Fall der viskosen Reibung, der vor allem in Flüssigkeiten auftritt und auch dort nur bei kleinen Objekten und eher langsamem Tempo. In diesem Fall wird Bewegung durch die Stokes-Reibung gebremst (Gleichung (3.12)), deren Stärke proportional zur momentanen Geschwindigkeit v ist (damit ist die Relativgeschwindigkeit zwischen Medium und bewegtem Körper gemeint).

Was dann passiert, besprechen wir hier anhand eines Beispiels: Eine Kugel (Masse m, Radius r) fällt in einer zähen Flüssigkeit mit der Viskosität η (ein Maß für die Dickflüssigkeit; siehe Kap. 6.4) nach unten. Die Anfangsgeschwindigkeit sei $v_0 = 0$. Die Frage ist, wie sich die Geschwindigkeit mit der Zeit entwickelt (also die Funktion $v(t)$), und wann die Kugel in welcher Tiefe angelangt sein wird ($z(t)$).

Berechnungen dieser Art beginnen immer mit der Bewegungsgleichung (3.17). Dabei kommt es auf $\vec{F}_{\text{ges}}$ an, die Summe aller wirkenden Kräfte. Hier haben wir die Schwerkraft nach unten und, sobald eine Geschwindigkeit nach unten vorhanden ist, die viskose Reibung nach oben. Die Situation spielt sich in einer Dimension ab (oben-unten). Wir verzichten also auf Vektoren und wählen eine Koordinatenachse z vom Startpunkt der Kugel nach unten. Dann erhalten wir aus der Bewegungsgleichung den Ansatz

$$m \cdot a(t) \;=\; F_{\text{ges}}(t) \;=\; m_{\text{eff}} \cdot g - 6\,\pi \cdot r \cdot \eta \cdot v(t) \tag{3.26}$$

Für die Kugelmasse in der Flüssigkeit muss m_{eff} eingesetzt werden, die durch den Auftrieb verminderte Masse (siehe Kap. 6.3.3), die aber bekannt ist. Unbekannt sind hier nur die zeitlichen Verläufe von Beschleunigung und Geschwindigkeit, die wir ermitteln wollen. Wir verwenden die Definition der Beschleunigung als zeitliche Änderung der Geschwindigkeit (Gleichung (2.4)) und erhalten die Differenzialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \;=\; \frac{m_{\text{eff}}}{m} \cdot g - \frac{6\,\pi \cdot r \cdot \eta}{m} \cdot v(t) \tag{3.27}$$

Als Lösung dieser Differenzialgleichung wird eine Funktion $v(t)$ gesucht, die die Gleichung erfüllt, wenn man sie einsetzt. Vorerst ist das aber gar nicht unbedingt nötig: Wir können aus dieser Gleichung auch ohne Lösung eine Menge ablesen:

- Zu Beginn, wenn $v = v_0 = 0$ ist, wird das Objekt ungefähr mit g beschleunigt. (Etwas weniger, weil die schwere Masse $_{\text{eff}}$ kleiner ist als die träge Masse m.)
- Sobald die Geschwindigkeit zunimmt, wird die Beschleunigung reduziert.
- Bei einer bestimmten Geschwindigkeit ist die Beschleunigung $a = 0$:

$$\text{Endgeschwindigkeit} \qquad v_\infty \;=\; \frac{m_{\text{eff}} \cdot g}{6\,\pi \cdot r \cdot \eta} \tag{3.28}$$

- Wenn die Geschwindigkeit $v > v_\infty$ ist, wird die Kugel gebremst ($a < 0$).

Wenn man v_∞ in die Differenzialgleichung (3.27) einsetzt, erhält man

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \;=\; \frac{6\,\pi\cdot r\cdot\eta}{m}\cdot(v_\infty - v(t)) \tag{3.29}$$

Mit Methoden aus der Mathematik ergibt sich daraus der Zeitverlauf

$$v(t) \;=\; v_\infty\cdot\left(1-\exp\left(-\frac{6\,\pi\cdot r\cdot\eta}{m}\cdot t\right)\right) \tag{3.30}$$

Hier bedeutet „$\exp(x)$“ die Exponentialfunktion e^x. Wir sehen, dass sich die Geschwindigkeit mit der Zeit immer näher an die Endgeschwindigkeit annähert.

(B) Newton-Reibung

Deutlich häufiger ist der Fall, dass bewegte Objekte durch turbulente Reibung gebremst werden. Dann ist in die Gesamtkraft – neben etwaigen beschleunigenden Kräften – die Newtonsche Reibungskraft nach Gleichung (3.13) einzusetzen.

Als Beispiel untersuchen wir hier den Fall, dass sich ein Körper im freien Fall durch die Luft bewegt. Im allgemeinen Fall ist für die Geschwindigkeit $\vec{v}$ die Relativgeschwindigkeit des bewegten Körpers gegen das ihn umgebende Medium einzusetzen. Wenn es Seitenwind gibt, hat die Reibungskraft auf den fallenden Körper also auch eine seitliche Komponente. Wir nehmen hier der Einfachheit halber an, dass es windstill ist, und können dann in einer Dimension arbeiten (entlang der z-Achse nach unten):

$$m\cdot a(t) \;=\; F_{\text{ges}}(t) \;=\; m\cdot g - \frac{1}{2}\cdot c_w\cdot A\cdot\rho\cdot v^2 \tag{3.31}$$

Die Dichte der Luft hängt stark von Temperatur und Druck ab. Bei $T = 20\,°\mathrm{C}$ und dem „Normaldruck“ auf Meereshöhe $p_0 = 1013{,}25\,\mathrm{mbar}$ beträgt sie $\rho = \rho_L = 1{,}204\,\mathrm{kg/m^3}$. Darüber hinaus tragen die Masse m, die Querschnittsfläche A und der c_w-Wert des fallenden Körpers zum Luftwiderstand bei. Wir setzen die Beschleunigung als Zeitableitung der Geschwindigkeit ein und erhalten

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \;=\; g - \frac{c_w\cdot A\cdot\rho}{2\,m}\cdot v(t)^2 \tag{3.32}$$

Wieder lässt sich Einiges aus der Gleichung selbst ablesen. Dazu nehmen wir an, dass die Anfangsgeschwindigkeit unseres fallenden Körpers $v_0 = 0$ ist:

- Zu Beginn, wenn $v = v_0 = 0$ ist, wird das Objekt mit g beschleunigt.
- Sobald die Geschwindigkeit zunimmt, wird die Beschleunigung stark reduziert.
- Bei einer best. Geschwindigkeit v_∞ ist die gesamte Beschleunigung $a = 0$:

$$\text{Endgeschwindigkeit} \qquad v_\infty \;=\; \sqrt{\frac{2\,m\cdot g}{c_w\cdot A\cdot\rho}} \tag{3.33}$$

- Wenn die Geschwindigkeit $v > v_\infty$ ist, wird der Körper gebremst ($a < 0$).

Wir setzen v_∞ in die Gleichung (3.32) ein und erhalten

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{c_w \cdot A \cdot \rho}{2\,m} \cdot \left({v_\infty}^2 - v(t)^2\right) \tag{3.34}$$

Diese Gleichung ist schwer zu lösen. Für unseren Sonderfall ($v_0 = 0$) ergibt sich

$$v(t) = v_\infty \cdot \tanh\left(\frac{g}{v_\infty} \cdot t\right) \tag{3.35}$$

Die Funktion $\tanh(x)$ (Tangens hyperbolicus) hat für x-Werte nahe Null Funktionswerte $\tanh(x) \approx x$ (steigt also linear). Für $x \gg 1$ nähert sich die Funktion dem Wert $\tanh(x) \sim 1$ (ist also konstant). Die Funktion für $v(t)$ beschreibt also genau, dass die Fallgeschwindigkeit anfangs mit $a \approx g$ zunimmt. Dann wird die Zunahme immer langsamer und nähert sich schließlich immer mehr dem Endwert v_∞ an.

Wie groß die Endgeschwindigkeit im freien Fall an Luft tatsächlich wird, hängt vom Zusammenspiel der Größen Masse m, Widerstandsbeiwert c_w und Querschnitt A ab. So erhält man z. B. für einen Fallschirm ($m = 80\,\mathrm{kg}$, $c_w = 1,3$, $A = 32\,\mathrm{m}^2$) eine Endgeschwindigkeit $v_\infty = 5,6\,\mathrm{m/s} \approx 20\,\mathrm{km/h}$, für eine Stahlkugel mit 5 cm Durchmesser ($m = 514\,\mathrm{g}$, $c_w = 0,40$, $A = 19,6\,\mathrm{cm}^2$) hingegen $v_\infty = 103\,\mathrm{m/s} \approx 370\,\mathrm{km/h}$.

Wie schon in Abschnitt 3.3.2 besprochen, wird die Antriebskraft eines Fahrzeugs, das sich mit konstanter Geschwindigkeit v_1 fortbewegt, vor allem für die Überwindung des Luftwiderstands verwendet. Die Geschwindigkeit v_1 muss dabei gegen das Medium gemessen werden: Bei gleichem Tempo gegenüber der Straße ist bei Gegenwind eine größere, bei Rückenwind eine kleinere Kraft aufzubringen. Da die Luftreibung mit dem Quadrat des Widerstands skaliert, führen auch relativ geringe Unterschiede von v_1 zu merkbaren Unterschieden in der aufzuwendenden Kraft.

3.3.6 Bewegung unter dem Einfluss der Federkraft

Wir betrachten eine senkrecht hängende Spiralfeder (Federkonstante D), an die die Masse m angehängt wird. Die Masse der Feder selbst sei vernachlässigbar. Nach dem Anhängen der Masse stellt sich ein Kräftegleichgewicht ein, wenn die Feder genau um eine bestimmte Strecke ΔL_0 verlängert ist, sodass sich die Federkraft $F_{F,0} = -D \cdot \Delta L_0$ (nach oben) und die Schwerkraft $F_g = m \cdot g$ (nach unten) genau kompensieren:

$$F_g + F_{F,0} = 0 = m \cdot g - D \cdot \Delta L_0 = 0 \qquad \rightarrow \quad \Delta L_0 = \frac{m \cdot g}{D}$$

Die Länge, die die Feder nun eingenommen hat, definiert den Gleichgewichtszustand des Systems. Wir messen ab nun die Position z der Masse von diesem Gleichgewichtspunkt aus, und zwar als $z = \Delta L$, die Verlängerung oder Verkürzung der Feder. $z = 0$ bedeutet also, dass die Masse an der Ruheposition ist, bei $z < 0$ ist sie höher und die Feder ist gestaucht, bei $z > 0$ ist die Masse tiefer und die Feder ist gedehnt.

Wenn die Masse von der Ruhelage in eine andere Position gebracht wird, bleibt die Schwerkraft gleich, während sich die Federkraft ändert, sodass insgesamt die Kraft

$$F(z) \;=\; F_g + (F_{F,0} + F_F(z)) \;=\; F_F(z) \;=\; -D \cdot z$$

auf die Masse wirkt. Beachten Sie, dass die Summe aus der Schwerkraft F_g und der Federkraft $F_{F,0}$ im Gleichgewicht genau Null ist (siehe oben): Deshalb wirkt im Ganzen nur jener Anteil der Federkraft $F_F(z)$, der durch die Auslenkung z entsteht. Zur Untersuchung der Bewegung müssen wir diese Gesamtkraft in die Bewegungsgleichung (3.17) einsetzen:

$$m \cdot a \;=\; F(z) \;=\; -D \cdot z \tag{3.36}$$

Das ist wieder eine 1D-Betrachtung, weil die Bewegung strikt nur nach oben und unten verläuft. Aus der Gleichung (3.36) sehen wir, dass die Beschleunigung a immer negativ proportional zur Position z ist: Wenn die Position positiv ist (gespannte Feder), wird die Masse negativ beschleunigt (nach oben), und umgekehrt.

Zur Berechnung, was nun genau geschieht, müssen wir den zeitlichen Verlauf berücksichtigen. In der Gleichung (3.36) wird eine Momentaufnahme zu einem bestimmten Zeitpunkt gezeigt. Sowohl Position z als auch Beschleunigung a ändern sich aber mit der Zeit. Außerdem können wir einsetzen, dass die Beschleunigung die zweite Ableitung der Position nach der Zeit ist (siehe S. 21). Damit erhalten wir

$$\text{Schwingungsgleichung:} \qquad a(t) \;=\; \frac{\mathrm{d}^2 z(t)}{\mathrm{d}t^2} \;=\; -\frac{D}{m} \cdot z(t) \tag{3.37}$$

Das ist wieder eine Differenzialgleichung, diesmal für die Position z. Als Lösung wird eine passende Funktion $z(t)$ gesucht, für die Gleichung immer stimmt (für alle möglichen Zeiten t !), wenn man sie und ihre zweite Ableitung einsetzt.

In der Mathematik gibt es eine Reihe von Methoden, solche Differenzialgleichungen zu lösen, also alle passenden Funktionen $z(t)$ aufzufinden. Wir schreiben hier nur eine von vielen möglichen Lösungen an:

$$\text{Harmonische Schwingung:} \qquad z(t) \;=\; z_0 \cdot \cos\left(2\,\pi \cdot \frac{t}{T_0}\right) \tag{3.38}$$

$$\text{mit der Periodendauer} \qquad T_0 \;=\; 2\,\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} \tag{3.39}$$

Das Argument der Cosinusfunktion $(2\,\pi \cdot t/T_0)$ steht hier in der Einheit Radiant (siehe Kap. 5). Wenn die Zeit größer und größer wird, wird dieses Argument immer größer und der Cosinus variiert seinen Wert zyklisch zwischen 1 und -1. Das bedeutet, dass die z-Position der Masse, die an der Feder hängt, immer wieder zwischen den Positionen $+z_0$ und $-z_0$ hin und her schwingt.

Die Periodendauer T_0, also die Dauer einer ganzen Schwingung (z. B. zwischen einem und dem folgenden Hochpunkt der Masse), hängt von der schwingenden Masse m (große Masse → langsame Schwingung) und von der Federkonstante D ab (starke Feder → schnelle Schwingung). Schwingungen und die damit eng zusammenhängenden Wellen werden in allen Details in der Vorlesung „Optik“ besprochen.