4 Energie und Impuls

4.1 Arbeit

4.1.1 Definition

Die Größe Kraft, die im vorigen Kapitel im Detail besprochen wurde, kann allein nicht alle Aspekte zufriedenstellend beschreiben, die zu berücksichtigen sind, wenn Massen durch Kräfte bewegt werden.

Beispiel: Wenn eine Last (Masse m) im Schwerefeld festgehalten wird, ist dazu die Kraft $F_1 = F_g = m \cdot g$ aufzuwenden. Wenn dieselbe Last mit konstanter Geschwindigkeit v hochgehoben werden soll, ist exakt dieselbe Kraft notwendig: Damit die Geschwindigkeit konstant bleibt, muss die Gesamtkraft auf die Last Null sein, also muss genau die Schwerkraft kompensiert werden. Einziger Unterschied ist, dass die angewandte Kraft für kurze Zeit ein wenig größer sein muss, um die Last nach oben zu beschleunigen – doch dafür kann sie am Ende des Hebens für kurze Zeit ein wenig kleiner sein, damit sich die Last wieder abbremst.

Obwohl der Kraftaufwand in Summe derselbe ist, empfinden wir das Hochheben als deutlich schwieriger und anstrengender als das statische Festhalten. Wenn wir an technische Hilfsmittel denken, wird das besonders deutlich: Zum Festhalten einer Last im Schwerefeld brauchen wir z. B. ein Seil (also statische Kräfte): Nach der Installation kostet das überhaupt keinen Aufwand mehr. Zum Hochheben einer Last brauchen wir hingegen immer irgendeine Art von Motor: Einen Kran, eine Seilwinde etc. Der Aufwand während des Hebens ist beträchtlich. Um diesen zusätzlichen Aspekt zu beschreiben, gibt es eine weitere physikalische Größe:

$$\textbf{Arbeit:} \qquad W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \qquad \big(\text{engl. } \textit{work}\big) \tag{4.1}$$

$$\text{Dimension:} \qquad \dim\big(W\big) = \text{Kraft} \times \text{Weg} = \frac{\text{Masse} \times \text{Länge}^2}{\text{Zeit}^2}$$

$$\text{SI-Einheit:} \qquad [W] = 1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m} = 1\,\frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \quad \big(\text{Joule}\big)$$

Die Arbeit ist ein Maß dafür, wie viel Kraft entlang eines Weges zwischen den Punkten r_1 und r_2 aufzuwenden ist. Genauer gesagt geht es nur um jene Komponente der Kraft, die entlang des Weges gerichtet ist, daher das Skalarprodukt im Integral. Je nach Situation kann man die Größe Arbeit auch vereinfacht definieren:

$$W = \int F \cdot \mathrm{d}s \qquad \big(\text{Kraft ist überall in Richtung des Weges gerichtet}\big)$$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} \qquad \big(\text{gerader Weg und konstante Kraft}\big)$$

$$W = F \cdot s \qquad \big(\text{konstante Kraft; Kraft und Weg parallel}\big)$$

Die letzte dieser Beziehungen entspricht dem Merksatz „Arbeit = Kraft mal Weg", gilt in dieser einfachen Form aber nur dann, wenn die Kraft genau in Richtung des zurückgelegten Weges wirkt und während des ganzen Wegs konstant ist. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn eine Last über den Boden gezogen wird: Die Gleitreibung ist immer gleich und wirkt immer entgegen der momentanen Bewegung – es muss also eine konstante Kraft in Richtung des Weges ausgeübt werden. Das gilt auch dann, wenn der Weg Kurven enthält, solange es nur gelingt, die Weglänge s richtig zu bestimmen.

Beachten Sie, dass „Arbeit", wie zuvor schon „Kraft", ein Begriff ist, der im täglichen Sprachgebrauch Ähnliches bedeutet, aber nicht so präzise definiert ist wie in der Physik.

4.1.2 Beispiele

Arbeit wird geleistet, wann immer man eine Kraft ausübt und sich gleichzeitig in Richtung der Kraft bewegt. Die geleistete Arbeit wird dabei nach der Definition in Gleichung (4.1) berechnet, oder, wenn es die Situation erlaubt, nach einer der vereinfachten Beziehungen. Im Folgenden einige Beispiele:

(A) Arbeit im Schwerefeld (Erdoberfläche)

In unserem Lebensumfeld auf der Erdoberfläche wirkt überall die Schwerkraft $\vec{F}_g = m \cdot g \cdot (-\vec{e}_z)$. Wenn eine Last senkrecht um die Strecke h nach oben gehoben wird, muss dazu eine nach oben wirkende Kraft ausgeübt werden, die genau gleich groß ist wie die Schwerkraft. Diese Kraft ist konstant und in Richtung des Weges gerichtet. Deshalb erhalten wir:

$$\begin{aligned} \text{Hubkraft:} \quad \vec{F}_H &= -\vec{F}_g = m \cdot g \cdot \vec{e}_z \\ \text{Hubarbeit:} \quad W_H &= \left|\vec{F}_H\right| \cdot h = m \cdot g \cdot h \end{aligned} \tag{4.2}$$

Die geleistete Arbeit ist proportional zur gehobenen Höhe. Wenn die Last hingegen auf einem waagrechten Weg die Strecke s weit getragen wird, ergibt sich (gerader Weg und konstante Kraft):

$$\begin{aligned} \text{Hubkraft:} \quad \vec{F}_H &= m \cdot g \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{Wegstrecke} \quad \vec{s} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{Arbeit:} \quad W &= \vec{F}_H \cdot \vec{s} = 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Es ist klar, dass auch diese Tätigkeit anstrengend sein kann. Im physikalischen Sinn kostet es aber keine Arbeit, eine Last im Schwerefeld waagerecht zu tragen, solange keine Reibung auftritt. Reibung, egal nach welchem Prinzip, führt immer zu einer Kraft, die der Bewegungsrichtung entgegen wirkt. Sie muss also mit einer Gegenkraft in Bewegungsrichtung kompensiert werden, sodass dann auch in diesem Fall Arbeit geleistet werden muss.

(B) Arbeit im Gravitationsfeld

Die Gravitationskraft ändert sich mit dem Abstand der beiden sich anziehenden Massen. Dies spielt z. B. bei der Schwerkraft der Erde eine Rolle, wenn es um Objekte der Raumfahrt geht (Satelliten, Raketen zum Mond usw.). In solchen Fällen muss man die Arbeit W mit dem Integral berechnen. Die Vektordarstellung ist hingegen nicht notwendig: Arbeit wird ja nur verrichtet, wenn das Flugobjekt eine z-Komponente der Geschwindigkeit aufweist (genauer gesagt: eine Komponente parallel zur Richtung der Schwerkraft); die Komponenten normal dazu benötigen keine Arbeit.

Wenn sich ein Objekt der Masse m im Gravitationsfeld eines zweiten, schweren Objekts befindet (Masse M; z. B. Erde) und seinen Abstand von dessen Mittelpunkt von r_1 auf r_2 vergrößern soll, ist folgende Arbeit notwendig:

$$\begin{aligned} W_{\text{grav}} &= \int_{r_1}^{r_2} G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \mathrm{d}r = G \cdot M \cdot m \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} \\ &= G \cdot M \cdot m \cdot \left(-\frac{1}{r} \right) \Bigg|_{r_1}^{r_2} = G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \end{aligned} \tag{4.4}$$

Dies gilt nur, wenn das Gravitationsgesetz in Form von Gleichung (3.7) verwendet werden darf, also natürlich nur außerhalb des großen Objekts und nur dann, wenn dieses kugelförmig und innen kugelsymmetrisch ist. Sterne (auch die Sonne), Planeten und große Monde erfüllen diese Bedingungen hinreichend gut.

(C) Arbeit gegen eine Feder

Wenn eine Feder komprimiert oder gestaucht wird, reagiert sie immer mit einer Kraft F_F, die der Längenänderung entgegengerichtet ist. Diese Kraft muss kompensiert werden, und das kostet Arbeit. Beispiel: Eine Feder (Federkonstante D) soll von der Länge L_0 (Ausdehnung ohne Kraft) um ΔL auf die Länge L_1 gedehnt werden. Für die Arbeit erhalten wir:

$$\begin{aligned} W_{\text{feder}} &= \int_{L_0}^{L_1} D \cdot (L - L_0)\,\mathrm{d}L = D \cdot \left(\frac{L^2}{2} - L_0 \cdot L \right) \Bigg|_{L_0}^{L_1} \\ &= D \cdot \left(\left(\frac{{L_1}^2}{2} - L_0 \cdot L_1 \right) - \left(\frac{{L_0}^2}{2} - {L_0}^2 \right) \right) = D \cdot \left(\frac{{L_1}^2}{2} - L_0 \cdot L_1 + \frac{{L_0}^2}{2} \right) \\ &= \frac{D}{2} \cdot (L_1 - L_0)^2 = \frac{D \cdot (\Delta L)^2}{2} \end{aligned} \tag{4.5}$$

Beachten Sie, dass die Arbeit quadratisch mit der Dehnung zunimmt: Wenn eine Feder statt um ΔL doppelt so weit gedehnt werden soll, also um $2 \cdot \Delta L$, dann erfordert das am Ende die doppelte Kraft, insgesamt aber die vierfache Arbeit.

(D) Arbeit beim Beschleunigen einer Masse

Immer wenn der Betrag der Geschwindigkeit $|\vec{v}|$ einer Masse m vergrößert werden soll, muss eine Kraft $\vec{F}$ wirken, die zumindest eine Komponente $F_\parallel$ in Bewegungsrichtung hat. Diese Komponente führt zur Beschleunigung (= Tempo-Erhöhung) und verrichtet dabei Arbeit, da sie ja längs des Weges wirkt. Beachten Sie, dass die Normalkomponente der Kraft keine Arbeit leisten kann, weil sie ja nicht in Richtung der Bewegung wirkt. Wenn die Position und Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_1 als s_1 und v_1 angeschrieben werden und zum Zeitpunkt t_2 als s_2 und v_2, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} W_a &= \int_{s_1}^{s_2} F_\parallel \cdot \mathrm{d}s = m \cdot \int_{s_1}^{s_2} a_\parallel \cdot \mathrm{d}s = m \cdot \int_{s_1}^{s_2} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \cdot (v \cdot \mathrm{d}t) \\ &= m \cdot \int_{v_1}^{v_2} v \cdot \mathrm{d}v = \frac{m}{2} \cdot \left({v_2}^2 - {v_1}^2\right) \end{aligned} \tag{4.6}$$

Wenn wir annehmen, dass die Beschleunigung bei $v_1 = 0$ beginnt, sehen wir, dass die Arbeit zum Erreichen einer bestimmten Geschwindigkeit v_2 mit dem Quadrat der Geschwindigkeit skaliert – der Aufwand, hohe Geschwindigkeit zu erreichen, steigt also überproportional.

Beachten Sie, dass es egal ist, welchen zeitlichen Verlauf die Kraft hat, ob sie konstant ist oder irgendwie veränderlich: Das Ergebnis des Integrals ist immer gleich und hängt nur von der Anfangs- und Endgeschwindigkeit ab.

4.2 Energie

Die „Energie“ ist eine zentrales Konzept der Physik und wird in allen ihren Teilgebieten verwendet. Das Wichtigste daran ist, dass die Energie eine „Erhaltungsgröße“ ist: Energie liegt in vielen verschiedenen Formen vor, kann aber nicht erzeugt oder vernichtet, sondern nur aus einer in eine andere Form umgewandelt werden.

Darüber hinaus spielt die Energie eine herausragende Rolle in Politik, Wirtschaft und Gesellschaft: Die hinreichende Bereitstellung von verfügbarer Energie ist seit Beginn der Zivilisation ein entscheidender Parameter für die erfolgreiche Weiterentwicklung.

Obwohl wir den Begriff Energie täglich um uns haben, ist eine physikalisch eindeutige Definition nicht ganz einfach. Wir definieren die Energie hier aus der Größe „Arbeit“ heraus, was nicht ganz vollständig ist, aber für die Zwecke der Mechanik ausreicht.

4.2.1 Definition

Wenn beim den Einsatz einer Kraft Arbeit investiert wurde, dann ist diese Arbeit in vielen Fällen mit dem Ende des Krafteinsatzes nicht „weg“, sondern kann noch in anderer Weise verwendet werden. Beispiele:

- Wenn eine Feder komprimiert wurde, kann mit dieser gespannten Feder danach z. B. eine Masse beschleunigt werden (wie in der Federwurfmaschine).
- Wenn eine Masse hochgehoben wurde, kann man sie danach fallen lassen und ihr damit Geschwindigkeit verleihen.

Es gibt viele ähnliche Beispiele, die alle zeigen, dass mechanische Arbeit in gewisser Hinsicht gespeichert und später wieder abgerufen werden kann.

Umgekehrt ist es eine Erfahrungstatsache, dass das Aufwenden einer Kraft und vor allem das Leisten von Arbeit immer aus irgendeiner Art von „Reservoir“ gespeist werden müssen (Stromzufuhr, Treibstoff, Nahrung etc.). Dieses Reservoir entleert sich bis zu einem Punkt, an dem keine Arbeit mehr geleistet werden kann, wenn nicht speziell dafür gesorgt wird, dass es hinreichend voll bleibt.

Auch wenn sehr verschiedene Prinzipien hinter dieser Versorgung stehen können, lässt sich doch alles mit einer einzigen physikalischen Größe beschreiben:

Energie: Definition (vereinfacht):

„Die Energie *E* ist die Fähigkeit, Arbeit zu verrichten“

Dimension: $\dim(E) = \dim(W) = \text{Kraft} \times \text{Weg} = \dfrac{\text{Masse} \times \text{Länge}^2}{\text{Zeit}^2}$

SI-Einheit: $[E] = [W] = 1\,\text{J} = 1\,\text{N} \cdot \text{m} = 1\,\dfrac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$ (Joule)

Die Energie E ist ein Skalar (also kein Vektor) und wird immer für einen bestimmten „Bereich“ angegeben: für ein Teilchen (z. B. Elektron), für einen Körper oder Gegenstand (Rakete oder Batterie), für eine genau definierte Gruppe an Gegenständen oder für eine bestimmtes räumliches Gebiet.

Auch wenn jedem klar ist, was mit Energie ungefähr gemeint ist, ist eine strikte physikalische Definition schwierig. Die oben angeschriebene „vereinfachte Definition“ gilt immer dann, wenn nur dynamische Kräfte beteiligt sind. In vielen Fällen (z. B. wenn Reibung oder chemische Energie ins Spiel kommen), muss man die Definition erweitern zu „Die Energie E ist die Fähigkeit, Arbeit zu verrichten und Wärme hervorzurufen“ (der Begriff „Wärme“ wird in der Vorlesung „Thermodynamik“ genau besprochen). Auch diese Energie-Definition ist aber längst nicht vollständig.

Die Energie ist in allen Teilgebieten der Physik wichtig und tritt in sehr vielen verschiedenen Arten und Erscheinungsformen auf. Im Folgenden besprechen wir einige davon, viele weitere kommen später oder in anderen Vorlesungen.

4.2.2 Formen der Energie

(A) Mechanische Energie

Im Abschnitt 4.1.2 haben wir verschiedene Möglichkeiten betrachtet, wie Arbeit geleistet werden kann. Jede dieser Möglichkeiten führt auf eine spezielle Form von Energie:

- **Kinetische Energie:**
Jeder Körper mit Masse m, der sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, besitzt dadurch die Energie
$$E_{\text{kin}} = \frac{m \cdot v^2}{2} \tag{4.7}$$
Beachten Sie, dass es dabei nur auf den Betrag der Geschwindigkeit $\vec{v}$ ankommt, nicht aber auf die Richtung.

- **Potenzielle Energie im Schwerefeld („Lageenergie“):**
Wenn ein Körper mit Masse m um die Strecke Δh aufgehoben wird, muss dafür die Hubarbeit (Gleichung (4.2)) aufgebracht werden. Wenn der Körper dann oben ist, hat er genau diesen Betrag an potenzieller Energie gewonnen:
$$\Delta E_{\text{pot,h}} = W_H = m \cdot g \cdot \Delta h \tag{4.8}$$
Beachten Sie, dass man die potentielle Energie $E_{\text{pot,h}}$ nicht einfach als Absolutwert angeben kann – dazu muss willkürlich ein Nullpunkt für die Höhe h definiert werden, also $h_0 = 0$. Das kann z. B. die Anfangshöhe in einem bestimmten Problem sein, oder die Höhe der Erdoberfläche oder die Meereshöhe. Beachten Sie, das die potentielle Energie eines Körpers auch negativ sein kann, wenn er sich nämlich unterhalb des willkürlich gewählten Höhen-Nullpunkts befindet.

- **Potenzielle Energie im Gravitationsfeld:**
Im weiteren Umfeld eines großen, schweren Körpers (z. B. Erde) ist die Gravitationskraft nicht konstant. Die Arbeit, die man aufbringen muss, um einen Körper vom näheren Abstand r_1 zum weiteren Abstand r_2 zu bringen, wird deshalb mit der Gleichung (4.4) berechnet. Wieder hat der Körper danach um diesen Betrag mehr potenzielle Energie:
$$\Delta E_{\text{pot,g}} = W_{\text{grav}} = G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \tag{4.9}$$
Die aufgebrachte Arbeit ist also die Änderung der potenziellen Energie $E_{\text{pot,g}}$. Wenn ein Absolutwert angegeben werden soll, muss definiert werden, in welcher Höhe r die potenzielle Energie Null sein soll. Manchmal wird dafür die Oberfläche des schweren Körpers gewählt, im Falle der Erde also $r = R_E$.
Üblicher ist es aber, den Nullpunkt der potenziellen Energie „im Unendlichen“ zu wählen, also für $r = \infty$. Dann erhält man
$$\text{Potenzielle Energie im Gravitationsfeld:} \qquad E_{\text{pot,g}}(r) = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r} \tag{4.10}$$
Beachten Sie, dass dies für alle endlichen Werte von r einen negativen Wert ergibt, je näher am zentralen Objekt, desto negativer. Der Betrag dieses Werts gibt an, wie viel Arbeit nötig ist, um den Testkörper unendlich weit fortzuschaffen, also ihn endgültig aus dem Einflussbereich der Gravitation des zentralen Objekts zu entfernen.

- **Potenzielle Energie einer Feder:**
  Wenn eine Feder aus ihrer Ruhelage gestaucht oder gedehnt wird, kostet das in jedem Fall Arbeit, die dann als potenzielle Energie in der Feder vorliegt. Mit Gleichung (4.5) ergibt sich:

$$E_{\mathrm{pot,f}}(\Delta L) \;=\; W_{\mathrm{feder}}(\Delta L) \;=\; \frac{D \cdot \Delta L^2}{2} \tag{4.11}$$

  Beachten Sie, dass die Energiemenge gleich groß ist, wenn man die Feder um die gleiche Länge ΔL dehnt oder staucht.

Diese und weitere mechanische Energieformen können durch Arbeit immer wieder ineinander umgewandelt werden. Vorgänge, bei denen ausschließlich mechanische Energieformen im Spiel sind, heißen deshalb „reversibel“, weil sie sich – zumindest theoretisch – immer wieder total in den Ausgangszustand zurückführen lassen.

(B) Thermische Energie

Wenn eine Bewegung von Reibung gebremst wird, dann müssen wir Arbeit aufwenden, um sie zu überwinden. Diese Arbeit ist danach auch nicht weg, steckt aber in ganz unterschiedlichen Effekten, z. B. Erwärmung, Abrieb von Oberflächen oder Verwirbelung der Luftmoleküle.

Schlussendlich führt all das fast immer zu einer Temperaturerhöhung (z. B. beim Bremsen). Deshalb fassen wir all diese Effekte unter dem Begriff „thermische Energie“ E_{th} zusammen, der in der Vorlesung „Thermodynamik“ genau behandelt wird.

Wir beschreiben hier nur einen speziellen Fall: Die Energiemenge ΔE_{th} zur Temperaturerhöhung eines Körpers wird als Wärme Q bezeichnet und lässt sich leicht berechnen:

$$\text{Wärme zur Temperaturerhöhung:} \qquad \Delta E_{\mathrm{th}} \;=\; Q \;=\; c \cdot m \cdot \Delta T \tag{4.12}$$

Hier ist ΔT die Temperaturdifferenz in K oder °C und c die spezifische Wärmekapazität in $[c] = \mathrm{J/(kg \cdot K)}$. c ist eine Materialkonstante und gibt an, wie viel Energie notwendig ist, um 1 kg dieses Materials um $\Delta T = 1\,\mathrm{K}$ zu erwärmen (siehe auch Kap. 6.1.2).

Eine Besonderheit der thermischen Energie ist es, dass sie sich nicht leicht in andere Energieformen umwandeln lässt, jedenfalls niemals zu 100 %. Man nennt Vorgänge, bei denen thermische Energie entsteht, deshalb „irreversibel“, weil sie sich eben nicht völlig umkehren lassen.

(C) Weitere Energieformen

Energie kann in vielen weiteren Formen vorliegen. Hier einige Beispiele:

- **Elektrische Energie:**
  Wenn elektrische Ladungen getrennt werden, muss dazu Arbeit aufgebracht werden, die dann als elektrische Energie zur Verfügung steht. Die Trennung wird

z. B. in Kraftwerken vollzogen. Ein großer Vorteil dieser Energieform liegt darin, dass sie über große Strecken transportiert werden kann. Im Detail wird dieses Thema in der Vorlesung „Elektrizität und Magnetismus“ besprochen.

- **Elektromagnetische Energie:**
  Lichtwellen, die ja aus elektromagnetischen Feldern bestehen, enthalten Energie, die mit diesen Feldern transportiert wird. Diese Energie kann in verschiedener Weise auf Materie übertragen werden (thermische, elektrische, chemische, sogar mechanische Energie). Interessant ist, dass diese Energie in Form von kleinen, unteilbaren Energiepaketen vorliegt, den sogenannten Lichtquanten oder Photonen. Näheres dazu kommt in den Vorlesungen „Optik“, „Elektrodynamik“ und „Quantenmechanik“.

- **Chemische Energie:**
  Viele chemische Reaktionen verlaufen „exotherm“, d. h. dass im Verlauf der Reaktion Energie in Form von Wärme oder Arbeit abgegeben wird. Diese Energie ist vorher also gewissermaßen in den Ausgangsstoffen gespeichert. Dies nennt man chemische Energie. Oft werden solche Ausgangsstoffe in einer endothermen Reaktion hergestellt (das ist eine Reaktion, die nur funktioniert, wenn Energie zugegeben wird). Chemische Energie ermöglicht viele biologische Prozesse, Verbrennungsvorgänge, Batterien und vieles andere mehr.

- **Masse:**
  Mit seiner berühmten Gleichung $E = m\,c^2$ hat Einstein erstmals postuliert, dass Masse und Energie äquivalent sind. Anders gesagt: Masse kann auch als eine Form von Energie gesehen werden. Dies wird z. B. in Kernkraftwerken ausgenützt: Die Gesamtmasse aller beteiligen Teilchen und Atomkerne ist nach einer Kernspaltung geringfügig kleiner als davor. Dieser „Massendefekt“ Δm wird in der Reaktion in andere Energieformen umgesetzt ($\Delta E = \Delta m \cdot c^2$), zum großen Teil in kinetische Energie der beteiligten Teilchen, und kann zum Teil in elektrische Energie umgewandelt und somit nutzbar gemacht werden.

4.2.3 Energieerhaltung

Ein zentraler Satz der Physik betrifft die Erhaltung der Energie:

Die Gesamtenergie in einem abgeschlossenen System ist konstant.

Dabei meint ein „abgeschlossenes System“ einen Raumbereich, dessen Grenzen undurchlässig sind, sodass weder Materie, noch Energie, Strahlung usw. den Bereich verlassen oder betreten können.

Die Definition eines abgeschlossenen Systems ist weniger strikt als sie auf den ersten Blick klingt. Erstens können wir die Systemgrenzen ziehen, wie es uns gerade passt, zum Beispiel so weit entfernt, dass alles Relevante innerhalb des Systems bleibt. Zweitens dürfen durchaus Kräfte von außen ins System hinein wirken – die Schwerkraft der Erde macht das ja zum Beispiel immer. Wenn diese Kräfte dort Arbeit verrichten, wandeln sie Energie von einer Form in eine andere um. Solange aber beide Energieformen zum System gehören, ist das immer noch ein abgeschlossenes System.

Die Konstanz der Gesamtenergie ist immer dann besonders interessant, wenn Energie von einer Form in die andere umgewandelt wird. Diese Energieumwandlung erfolgt in der Mechanik immer über Krafteinsatz und Arbeit: Ein bestimmter Energiebetrag wird als mechanische Arbeit von einer Energieform in eine andere überführt.

Beispiele:

- Hinunterfallen:
  Wenn ein Körper frei fallen gelassen wird (Luftreibung vorerst vernachlässigt!), hat er nach der Fallhöhe Δh die Geschwindigkeit v erreicht. Wie groß v ist, kann auf zwei Arten berechnet werden:

$$\begin{array}{lll} \text{Dynamik:} & v = g \cdot t \quad \text{und} \quad \Delta h = \frac{g}{2} \cdot t^2 & \rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2\,\Delta h}{g}} \\ & v = \sqrt{2 \cdot \Delta h \cdot g} & \\ \text{Energie:} & \Delta E_{\text{pot}} + \Delta E_{\text{kin}} = 0 & \rightarrow \quad m \cdot g \cdot (-\Delta h) + \frac{m \cdot v^2}{2} = 0 \\ & v = \sqrt{2 \cdot \Delta h \cdot g} & \end{array}$$

  In diesem konkreten Fall ist das Rechnen mit der konstanten Energie kein großer Vorteil. In vielen anderen ähnlichen Fällen aber schon, z. B. wenn der Körper entlang einer komplizierten Bahn nach unten fällt: Dann ändert sich die Beschleunigung andauernd und die „Dynamik"-Methode wird extrem schwierig. Bei der Energie-Methode kommt es nur auf den Anfangs- und Endzustand an, was die Rechnung in solchen Fällen enorm erleichtert.

- Federpendel:
  Wenn eine Masse an einer Spiralfeder hängt ($z = 0$) und dann um z_0 nach oben oder unten aus der Ruhelage ausgelenkt wird, dann beginnt die Masse zu schwingen, wie wir das in Kap. 3.3.6 ausgerechnet haben. Diese Schwingung beschreibt ein periodisches Hin- und Herwandern der Energie von der potenziellen Energie der deformierten Feder (Gleichung (4.11)) zur kinetischen Energie (Gleichung (4.7)) und zurück. An zwei bestimmten Positionen erhalten wir:

$$\begin{array}{rlll} \text{Volle Auslenkung:} & z = z_0 & E_{\text{pot},1} = \frac{D \cdot {z_0}^2}{2} & \text{und} \quad E_{\text{kin},1} = 0 \\ \text{Ruhelage:} & z = 0 & E_{\text{pot},2} = 0 & \text{und} \quad E_{\text{kin},2} = \frac{m \cdot {v_{\max}}^2}{2} \end{array}$$

  Unter der Annahme, dass keine thermische Energie erzeugt wird (was näherungsweise stimmt, aber nicht ganz), können wir aus der Energieerhaltung sofort die Maximalgeschwindigkeit $v_{\max}$ berechnen:

$$E_1 = E_2 : \quad \frac{D \cdot {z_0}^2}{2} = \frac{m \cdot {v_{\max}}^2}{2} \quad \rightarrow \quad v_{\max} = \sqrt{\frac{D}{m}} \cdot z_0$$

Als Probe berechnen wir diese Geschwindigkeit auch aus der Schwingungsgleichung (3.39):

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = z_0 \cdot \left(-\sin\left(2\,\pi \cdot \frac{t}{T_0}\right)\right) \cdot \frac{2\pi}{T_0} = -z_0 \cdot \sqrt{\frac{D}{m}} \cdot \sin\left(2\,\pi \cdot \frac{t}{T_0}\right)$$
$$= -v_0 \cdot \sin\left(2\,\pi \cdot \frac{t}{T_0}\right) \qquad \text{mit} \quad v_0 = v_{\max} = \sqrt{\frac{D}{m}} \cdot z_0$$

Die Schwingungsenergie $E_S = E_1 = E_2$ muss am Anfang ins System gesteckt werden, z. B. indem Arbeit verrichtet wird, um die Feder zu spannen. Diese Energie wird dann immer wieder hin und her umgewandelt, und jedes Mal wird Arbeit geleistet: Einmal leistet die gespannte Feder Beschleunigsarbeit an der Masse, kurz danach leistet die beschleunigte Masse im Gegenzug Kompressions- oder Ausdehnungsarbeit an der Feder, immer hin und her.

Wenn Energie ausschließlich in mechanischen Energieformen steckt, kann sie immer wieder hin und zurück ineinander umgewandelt werden. Dafür muss jedes Mal Arbeit aufgewendet werden; beachten Sie aber, dass diese Arbeit keine Energie verbraucht, sondern lediglich von einer Form in die andere umwandelt.

In unserem täglichen Lebensumfeld ist immer auch thermische Energie im Spiel, die vor allem durch Reibung erzeugt wird. Der Energieerhaltungssatz lautet dann

$$E_{\mathrm{mech},1} = E_{\mathrm{mech},2} + \Delta E_{\mathrm{th}} \qquad \text{mit} \quad E_{\mathrm{mech}} = E_{\mathrm{kin}} + E_{\mathrm{pot}} + \ldots$$

In manchen wenigen Fällen (wenn die Reibungskraft bekannt und berechenbar ist) kann der Zuwachs an thermischer Energie korrekt berechnet werden. Sehr oft ist ΔE_{th} aber unbekannt. In der Praxis gibt es viele „reibungsarme“ Vorgänge, bei denen man die Umwandlung in thermische Energie in erster Näherung vernachlässigt. Dann kann man $E_{\mathrm{mech}} = \mathrm{const}$ annehmen, was viele Berechnungen deutlich vereinfacht.

Auf der Skala einzelner Atome und Moleküle ist die mechanische Energieerhaltung immer erfüllt, weil es dort keine Reibung gibt. Man spricht auf dieser Skala überhaupt nicht von thermischer Energie, weil diese durch andere Energieformen ausgedrückt werden kann, z. B. als kinetische Energie der einzelnen Teilchen (siehe Vorlesung „Thermodynamik“). Im Vakuum kann ebenfalls oft mechanische Energieerhaltung angenommen werden, z. B. bei der Bewegung von Himmelskörpern.

4.2.4 Potenzial

(A) Konservative Kräfte

Wir stellen sich vor, dass sich ein Testkörper in einem Kraftfeld (z. B. im Gravitationsfeld, siehe S. 36) von einem Punkt A zu einem Punkt B bewegt, oder allgemeiner: dass auf den Körper entlang des gesamten Weges eine bestimmte Kraft wirkt (z. B. eine Reibungskraft). Oft ist es auf vielen verschiedenen Wegen möglich, vom Start- zum

Zielpunkt zu gelangen. Wir können dann in jedem Fall die Arbeit berechnen, die für diesen Weg unter dem Einfluss der Kraft zu leisten ist:

$$W_1 = \int\limits_{\text{Weg1}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{s}, \qquad W_2 = \int\limits_{\text{Weg2}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{s}, \qquad \text{usw.}$$

Wenn wir das tun, gebt es zwei mögliche Resultate:

- Wenn die Arbeit W für diese beiden und beliebige andere Wege immer gleich ist, also $W_1 = W_2 = \ldots$, nennen wir die Kraft eine **konservative Kraft**. Ein typisches Beispiel ist die Gravitation.
  - Im Einflussbereich einer konservativen Kraft ist es erstens egal, welchen Weg man zwischen zwei Punkten nimmt. Die aufzuwendende Arbeit ist immer dieselbe: Beim Besteigen eines Berges kostet – aus physikalischer Sicht – der steile, kurze Weg gleich viel Arbeit wie der flache, lange Weg.
  - Zweitens ist die Arbeit entlang eines bestimmten Weges genau gleich, aber negativ, wenn man denselben Weg in der Gegenrichtung zurücklegt. Die Arbeit, die beim Besteigen eines Berges investiert werden muss, erhält man beim Abstieg zurück und könnte sie z. B. in kinetische Energie umsetzen.
  - Drittens kostet es keine Arbeit ($W_{\text{ges}} = 0$), in diesem Kraftfeld einen Rundgang zu unternehmen. Wenn man den Weg 1 von oben zum Hinweg benutzt, kostet das die Arbeit W_1. Der Weg 2 für den Rückweg kostet die Arbeit $W_2 = -W_1$. Insgesamt erhalten wir also $W_{\text{ges}} = W_1 + (-W_1) = 0$. Das bedeutet, dass wir die Arbeit, die entlang einer Teilstrecke zu leisten ist ($W > 0$), auf einem anderen Teil des Weges zurückbekommen ($W < 0$). Nach dieser Logik kostet eine gesamte Bergtour (Auf- und Abstieg) also im Gesamten keine Energie, egal auf welchen man geht, solange man am Ende zum Ausgangspunkt zurückkehrt.
- Wenn die Arbeit im Kraftfeld davon abhängt, welchen Weg man wählt, sprechen wir von einer **nichtkonservativen Kraft**. Ein typisches Beispiel ist die Gleitreibung, für die die Arbeit immer positiv und proportional zur Weglänge ist.
  - Hier ist es erstens nicht egal, welchen Weg man zwischen zwei Punkten wählt: Der kürzeste Weg macht am wenigsten Arbeit.
  - Dafür spielt es zweitens keine Rolle, in welcher Richtung ein Weg beschritten wird: Immer ist Arbeit gegen die Reibung zu leisten.
  - Drittens erfordert ein Rundweg im Feld einer nichtkonservativen Kraft immer Arbeit.

Es gibt nicht besonders viele konservative Kräfte. Neben der Gravitation gehört die elektrische Kraft dazu (die sogenannte Coulomb-Kraft), die die Anziehung und Abstoßung elektrischer Ladungen beschreibt, oder auch elastische Kräfte wie die Federkraft, außerdem weitere Feldkräfte (siehe spätere Vorlesungen).

Konservative Kräfte sind deshalb wichtig, weil bei ihrer Wirkung die mechanische Energie vollständig erhalten bleibt, während beim Vorhandensein nicht-konservativer Kräfte immer ein Teil der mechanischen Energie in andere Energieformen umgewandelt wird, fast immer in thermische Energie.

(B) Das Gravitationspotenzial

Für konservative Kräfte wird in der Physik eine allgemeinere Schreibweise für die Kraft und die potenzielle Energie verwendet. Die Kraft in der Umgebung Umkreis der „Ursache" der Kraft kann dann immer als Kraftfeld beschrieben werden, wie wir es ab S. 36 für das Gravitationsfeld beschrieben haben: Das Kraftfeld wird als „Eigenschaft des Raumes" angesehen, die beschreibt, welche Kraft auf eine Testmasse wirkt, die an eine bestimmte Position gebracht wird. In Skizzen wird ein Kraftfeld mit Hilfe von „Feldlinien" visualisiert, die an jeder Stelle in Richtung der Kraftwirkung zeigen, die eine Masse dort verspürt.

Für die potenzielle Energie in einem konservativen Kraftfeld gehen wir analog zur Kraft vor: Auch hier können wir eine Größe einführen, die unabhängig von der betrachteten Testmasse m ist Diese Größe ist das

$$\textbf{Potenzial} \qquad \phi(\vec{r}) = \frac{E_{\text{pot}}(m,\vec{r})}{m} \,. \tag{4.13}$$

Das Gravitationspotenzial wird in $\mathrm{m^2/s^2}$ gemessen. Die Größe ϕ ist ein Skalar und überall im Raum definiert, egal ob sich dort eine Testmasse aufhält oder nicht. Man kann das Potenzial also auch als eine „Eigenschaft des Raums" ansehen. Die Größe des Potenzials an einem bestimmten Ort gibt die potenzielle Energie an, die eine Einheitsmasse (also $M_0 = 1\,\mathrm{kg}$) an der selben Position hätte.

Wenn man an einer Position $\vec{r}$ das Potenzial $\phi(\vec{r})$ kennt, kann man sich für jede beliebige Masse m die potenzielle Energie ausrechnen, die sie an diesem Punkt im Raum besitzt: $E_{\text{pot}}(m,\vec{r}) = m \cdot \phi(\vec{r})$.

In ähnlicher Weise wie das Gravitationsfeld mittels Feldlinien visualisiert wird, können wir das Gravitationspotenzial in verschiedenen Punkten graphisch durch sogenannte Äquipotenzialflächen veranschaulichen. Eine Äquipotenzialfläche ist eine (gedachte) dreidimensionale Fläche, die dadurch bestimmt ist, dass das Potenzial ϕ überall auf dieser Fläche den gleichen Wert hat.

Wenn eine Testmasse m auf einer Äquipotenzialfläche bewegt wird, bleibt die potenzielle Energie $E_{\text{pot}} = m \cdot \phi$ konstant – es wird also keine Arbeit verrichtet. Daraus folgt, dass die Gravitationskraft $m \cdot \vec{g}$ (und somit auch das Gravitationsfeld) keine Komponente in Richtung der Äquipotenzialflächen hat. Feldlinien und Äquipotenzialflächen stehen immer und überall senkrecht aufeinander.

Die Höhenlinien in topographischen Karten sind im Wesentlichen die Schnittkurven bestimmter Äquipotenzialflächen mit der realen Erdoberfläche. Wenn eine Masse längs einer Höhenlinie bewegt wird, ist die potenzielle Energie konstant, weil die Höhe konstant ist. Die Gravitationskraft wirkt hingegen immer normal auf die Höhenlinien. An Stellen, an denen diese Linien eng benachbart sind, ändert sich das Potenzial stark, das Gelände ist also steil.

Die Darstellung mit Feld und Potenzial kann für alle konservativen Kräfte verwendet werden und sieht dann in der graphischen Darstellung mit Feldlinien und Äquipotenzialflächen immer sehr ähnlich aus, so z. B. in der Elektrizitätslehre im Umfeld freier Ladungen oder in der Atomphysik zur Beschreibung von Bindungen.

4.3 Leistung

4.3.1 Definition

Wir haben im Abschnitt 4.1.1 festgestellt, dass die Kraft F allein nicht ausreicht, um alle Aspekte von Bewegung zu beschreiben: in vielen Fällen hat es Sinn, zusätzlich die Arbeit W zu betrachten, um festzustellen, wie viel Energie man investieren muss.

In der Praxis ist noch eine weitere Differenzierung wichtig: Wenn eine bestimmte Arbeit W geleistet wird, macht es einen großen Unterschied, wie schnell das geschieht. Dies beschreiben wir mit der Größe „Leistung", die als „Arbeit pro Zeit" definiert ist:

$$\textbf{Leistung:} \qquad P = \frac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \big(\text{momentane Leistung}\big) \qquad \big(\text{engl. } \textit{power}\big) \tag{4.14}$$

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \qquad \big(\text{durchschnittliche Leistung}\big)$$

$$\text{Dimension:} \qquad \dim\big(P\big) = \frac{\text{Arbeit}}{\text{Zeit}} = \frac{\text{Masse} \times \text{Länge}^2}{\text{Zeit}^3}$$

$$\text{SI-Einheit:} \qquad [P] = 1\,\mathrm{W} = 1\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = 1\,\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^3} \qquad \big(\text{Watt}\big)$$

Der physikalische Begriff Leistung entspricht also ziemlich genau dem Sprachgebrauch im täglichen Leben: Wer die gleiche Arbeit in kürzerer Zeit erledigt (oder mehr Arbeit in derselben Zeit), der leistet mehr.

Die Funktion $W(t)$ in der Gleichung (4.14) beschreibt die gesamte Arbeit, die ab einem bestimmten Zeitpunkt in ein System investiert wurde. Die Leistung ist als momentane Zunahme dieser Arbeit definiert. Dabei spielt es keine Rolle, ab welchem Zeitpunkt die Arbeit betrachtet wird, da es für die Leistung nur um die momentane Änderung geht.

Wenn das System Arbeit an der Umgebung leistet (auch nur für kurze Zeit), kommt die Leistung negativ heraus. Bei vielen Motoren, die im Ganzen Arbeit leisten, muss im Verlauf jedes Zyklus kurz Arbeit investiert werden – in diesem Zeitraum ist die Leistung negativ.

Das Vorzeichen ist hier immer Sache der Betrachtungsrichtung: Da beim Verrichten von Arbeit in der Regel zwei Kräfte vorliegen, die sich gegenseitig zum Teil kompensieren (siehe Beispiel auf S. 63: Hochheben einer Masse mit konstanter Geschwindigkeit), hängt es davon ab, von welcher Seite man einen Vorgang betrachtet: Wer eine Feder komprimiert, muss eine Kraft aufwenden, die in Richtung der Bewegung wirkt, verrichtet also (positive) Arbeit und Leistung. Aus Sicht der Feder findet eine Bewegung entgegen der Federkraft statt, sodass die „von der Feder geleistete Arbeit" negativ ist und ebenso die erbrachte Leistung aus Sicht der Feder. Beachten Sie aber, dass die potenzielle Energie der Feder bei dieser Aktion zunimmt, weil sie ja jene Arbeit ins System dazu bekommt, die an ihr geleistet wurde.

Wenn der zeitliche Verlauf $P(t)$ der erbrachten Leistung bekannt ist, kann daraus die Arbeit W_{12} berechnet werden, die in einem bestimmten Zeitraum zwischen t_1 und t_2

insgesamt aufgewendet wurde:

$$P(t) \;=\; \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \qquad \leftrightarrow \qquad W \;=\; \int_{t_1}^{t_2} P(t')\,\mathrm{d}t' \tag{4.15}$$

Auf dieser Definition beruht die Energieeinheit „kWh“ (Kilowattstunde), die von Energieversorgern zur Abrechnung der gelieferten Mengen verwendet wird:

Nicht-SI-Energieeinheit „Kilowattstunde“: $1\,\mathrm{kWh} \;=\; 1000\,\mathrm{W}\cdot 3600\,\mathrm{s} \;=\; 3,600\,\mathrm{MJ}$

4.3.2 Beispiele

(A) Leistung beim Beschleunigen

Wenn die Geschwindigkeit eines Fahrzeugs mit der konstanten Beschleunigung a erhöht werden soll, muss dafür – unter Vernachlässigung der Reibung – eine konstante Kraft F_a aufgebracht werden. Aus der dazu nötigen Arbeit kann schließlich die Leistung berechnet werden:

$$\mathrm{d}W \;=\; F_a\cdot\mathrm{d}s \qquad\rightarrow\qquad P(t) \;=\; \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \;=\; F_a\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \;=\; F_a\cdot v(t)$$

Die notwendige Leistung nimmt also proportional zur erreichten Geschwindigkeit zu und ist nicht etwa – wie die eingesetzte Kraft – konstant.

Ganz allgemein gilt (ohne Reibung), dass die beim Beschleunigen zugeführte Arbeit voll in die kinetische Energie des Fahrzeugs geht. Es gilt also zu jedem Zeitpunkt t:

$$\begin{aligned} P(t) \;&=\; \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \;=\; \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{kin}}(t)}{\mathrm{d}t} \;=\; \frac{\mathrm{d}\left(m\cdot v(t)^2/2\right)}{\mathrm{d}t} \;=\; \frac{m}{2}\cdot 2\,v(t)\cdot\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \;=\; m\cdot v(t)\cdot a(t) \\ &=\; F(t)\cdot v(t) \qquad\rightarrow\qquad F(t) \;=\; \frac{P(t)}{v(t)} \end{aligned} \tag{4.16}$$

Wenn mit konstanter Leistung $P = \mathrm{const}$ beschleunigt werden soll, z. B. mit der maximal verfügbaren Motorleistung, dann nimmt die verfügbare Kraft mit zunehmender Geschwindigkeit immer mehr ab. Somit wird auch die maximal mögliche Beschleunigung mit steigender Geschwindigkeit immer kleiner.

Dieser Effekt wird noch dadurch verstärkt, dass der Luftwiderstand (den wir bisher vernachlässigt haben) bei steigender Geschwindigkeit stark zunimmt. Deshalb wird ein zunehmend großer Anteil der Kraft zur Überwindung dieser Luftreibung gebraucht und die Beschleunigung wird mit steigender Geschwindigkeit noch deutlich geringer.

(B) Leistung bei Fahrt mit konstanter Geschwindigkeit

Wenn ein Fahrzeug mit konstanter Geschwindigkeit $v = \mathrm{const}$ fährt, muss eine Kraft aufgebracht werden, die genau alle Reibungskräfte kompensiert – in der Regel ist das hauptsächlich der Luftwiderstand (siehe Gleichung (3.14)). Aus der Gleichung (4.16) ergibt sich für die benötigte Leistung:

$$P = F_{R,L} \cdot v = \frac{1}{2} \cdot c_w \cdot A \cdot \rho \cdot v^3$$

Beachten Sie, dass die Leistung hier von der 3. Potenz der Geschwindigkeit v abhängt und sonst nur von konstanten Größen. So erforderte eine um 10 % höhere konstante Geschwindigkeit eine Motorleistung, die um 33 % höher ist.

(C) Leistungsbilanz des Menschen

Der menschliche Körper setzt zum Aufrechterhalten seiner Grundfunktionen eine Leistung von grob $P_0 \sim 70 - 80\,\mathrm{W}$ um. Dieser sogenannte „Grundumsatz“ wird ohne jegliche Aktivität benötigt (also etwa im Schlaf), um die Atmung, den Blutkreislauf, die Verdauung sowie die Funktion aller Organe und des Gehirns zu gewährleisten, und vor allem auch, um die Körpertemperatur auf $36,5 - 37,0\,^\circ\mathrm{C}$ konstant zu halten. Die eingesetzte Energie wird letztendlich ausschließlich in Wärme verwandelt und an die Umgebung abgegeben. Der Grundumsatz hängt von Alter, Geschlecht, körperlicher Gesundheit und Umgebung ab und kann mit verschiedenen empirischen Formeln individuell grob berechnet werden.

Der tatsächliche Energiebedarf lässt sich abschätzen, indem man den errechneten Grundumsatz mit einem Aktivitätsfaktor multipliziert, dem sogenannten PAL (*physical activity level*). Für „normale“ Büroarbeit ohne nennenswerte körperliche Belastung beträgt der PAL-Wert etwa $1,3 - 1,5$, für körperlich anstrengende Arbeit $1,8 - 2,4$.

Wenig trainierte Menschen können mit einem Arm $P = 10\,\mathrm{W}$ und mit einem Bein $P = 100\,\mathrm{W}$ mechanische Leistung verrichten (grobe Werte für länger andauernde Leistung). Spitzensportler kommen über mehrere Stunden auf $P > 300\,\mathrm{W}$ (Radfahrer) und können für einige Sekunden $P > 3000\,\mathrm{W}$ aufbringen (z. B. Gewichtheber).

Die im Körper verwendete Energie wird ausschließlich über die Nahrung zugeführt. Für alle Lebensmittel wird dazu der „physiologische Brennwert“ angegeben, das ist jene Energie, die bei der Verstoffwechslung für den Körper verfügbar wird. Wenn vom Körper mechanische Arbeit bekannter Größe geleistet werden soll (z. B. Gewichte heben, bestimmte Höhendifferenz überwinden etc.), dann muss im Körper typisch etwa das Zehnfache dieser Energie bereitgestellt werden: Nur etwa 10 % des zugeführten Brennwerts können „mechanisch nutzbar“ gemacht werden. Der Rest wird in Wärme umgewandelt und muss an die Umgebung abgegeben werden, was besonders bei starker Anstrengung durch Schwitzen unterstützt wird.

Der physiologische Brennwert wird in kJ angegeben und meistens auch der alten Einheit kcal ($1\,\mathrm{kcal} = 4,19\,\mathrm{kJ}$, oft salopp „Kalorie“ ausgesprochen). Ein Mensch, der über den Tag durchschnittlich die Leistung $\bar{P} = 100\,\mathrm{W}$ umsetzt, benötigt also die Energie $E = 3600 \cdot 24 \cdot 100 \approx 8600\,\mathrm{kJ} \approx 2050\,\mathrm{kcal}$. Bei höherer körperlicher Aktivität wird dementsprechend mehr gebraucht.

4.4 Impuls

4.4.1 Die Größe Impuls

(A) Definition

Die kontinuierlichen Bewegungsänderungen eines Körpers unter dem Einfluss einer Kraft können mit den Methoden aus dem Kap. 3 gut beschrieben werden. Schwieriger ist das bei ruckartigen Bewegungen, wie z. B. dem Aufspringen eines elastischen Körpers am Boden (Gummiball etc.) oder bei Stößen von Metallkugeln.

Streng gesehen sind auch solche scheinbar schlagartigen Bewegungsänderungen bei genauer Betrachtung kontinuierlich: Zur Beobachtung braucht man nur eine sehr hoch aufgelöste Zeitlupe. Und selbstverständlich werden auch diese Bewegungsänderungen von Kräften erzeugt: Laut dem 2. Newtonschen Prinzip (Kap. 3.1.2) muss die Änderung eines Bewegungszustands immer von einer Kraft ausgelöst werden.

Es ist allerdings schwierig, die wirkenden Kräfte bei einem kurzen Stoß genau zu beschreiben: Meist hängt der zeitliche Kraftverlauf auf komplizierte Art von der Struktur der beteiligten Körper ab und ist wegen der kurzen Zeitskalen experimentell kaum bestimmbar. Andererseits ist der genaue zeitliche und räumliche Verlauf der Bewegungsänderung während eines Stoßes in den allermeisten Fällen egal: Man will lediglich aus dem Anfangszustand (Bewegung der Stoßpartner vor dem Stoß) auf den Endzustand schließen können (Bewegungszustand nach dem Stoß) – die Details dazwischen sind fast immer uninteressant.

Für diese vorher-nachher-Betrachtung ist es zweckmäßig, eine weitere Größe zur Beschreibung der Bewegung einzuführen:

$$\textbf{Impuls:} \quad \vec{p} = m \cdot \vec{v} \qquad \big(\text{engl. } \textit{momentum}\big) \tag{4.17}$$

$$\text{Dimension:} \quad \dim\big(p\big) = \frac{\text{Masse} \times \text{Länge}}{\text{Zeit}}$$

$$\text{SI-Einheit:} \quad [p] = 1\,\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

Der Impuls eines Körpers ist ein Vektor, der immer in Richtung der Geschwindigkeit $\vec{v}$ zeigt. Der Impuls ist umso größer, je mehr Masse ein Körper hat und je schneller er sich bewegt. Man kennt diese Größe auch im täglichen Leben und bezeichnet sie dort als „Wucht“ oder manchmal „Schwung“.

(B) Änderung des Impulses

Wenn sich ein Körper mit der Masse m mit dem Impuls $\vec{p}$ bewegt, dann schreiben wir eine zeitliche Änderung des Impulses als

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m \cdot \vec{a} \tag{4.18}$$

Wir sehen sofort, dass sich der Impuls des Körpers nur ändern kann, wenn eine Beschleunigung $\vec{a}$ vorliegt, was laut Newtons zweitem Axiom nur möglich ist, wenn eine Kraft $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ auf den Körper wirkt.

Diese Erkenntnis schreiben wir als erweiterte Form der Bewegungsgleichung (3.1) an:

$$\text{Newtonsche Bewegungsgleichung:} \quad \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\,(m \cdot \vec{v})}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{\text{ges}} \tag{4.19}$$

Diese Gleichung zeigt uns nicht nur an, dass eine Änderung des Impulses immer von einer Kraft hervorgerufen werden muss (und gar nicht anders möglich ist), sondern auch, dass die zeitliche Impulsänderung genau dasselbe ist wie die Kraft, die diese hervorruft (Gleichheitszeichen!).

Bei konstanter Masse kann m aus der Ableitung herausgezogen werden und man erhält genau die schon bekannte Art der Bewegungsgleichung, wie oben in Gleichung (4.18). Es zeigt sich aber, dass die Schreibweise in Gleichung (4.19) noch allgemeiner gültig ist: Bei sehr hohen Geschwindigkeiten (v nahe an der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit c_0) ändert sich bei Einwirkung einer Kraft nicht nur die Geschwindigkeit v, sondern auch die Masse m. Dies wird von der speziellen Relativitätstheorie beschrieben: Ein extrem schneller Körper wird bei weiterer Zufuhr von Energie („Beschleunigung“) kaum schneller, sondern hauptsächlich schwerer.

Dieser Effekt tritt zum Beispiel in Teilchenbeschleunigern auf: So sind die Elektronen im FLASH-Beschleuniger am DESY in Hamburg bis zu 3000 Mal schwerer als ein ruhendes Elektron und fliegen dann mit 99,9999944 % der Lichtgeschwindigkeit. Wenn auf diese Teilchen eine Kraft $\vec{F}$ wirkt, wird ihre Wirkung auf den Impuls mit der Gleichung (4.19) korrekt beschrieben. Zur Feststellung, um wie viel sich die Masse und die Geschwindigkeit verändern, ist allerdings eine weitere Beziehung erforderlich, die in der speziellen Relativitätstheorie definiert wird (später).

(C) Impulserhaltung

Laut Newtons Reaktionsprinzip (Kap. 3.1.3) muss es für jede Kraft $\vec{F}_1$, die auf einen Körper wirkt, eine genau gleich große Gegenkraft $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ geben, die auf einen anderen Körper wirkt. Wenn die beiden Körper innerhalb eines physikalischen Systems liegen (oder wenn wir die Systemgrenzen so wählen, dass dies erfüllt ist), dann gilt:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_2}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_2 = -\vec{F}_1 = -\frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t} \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\,(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{\mathrm{d}t} = 0\,, \qquad (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \text{const}$$

Wir sehen, dass sich die einzelnen Impulse natürlich verändern, aber genau gegengleich, sodass die Gesamtsumme der Impulse gleich bleibt.

Das gleiche Ergebnis erhält man, wenn man mehrere Körper betrachtet, die alle irgendwelche Kräfte aufeinander ausüben: Obwohl sich die Impulse aller Körper durch die Kraftwirkungen eventuell auf komplizierte Art verändern, bleibt die vektorielle Gesamtsumme aller Impulse konstant, solange es keine Kräfte gibt, deren Gegenkraft außerhalb des Systems angreift. Das Argument ist auch hier das Reaktionsprinzip, nach dem je zwei Kräfte genau gegengleich sein müssen. Aus dieser Erkenntnis lässt sich das wichtige Prinzip der Impulserhaltung formulieren:

Der Gesamtimpuls in einem abgeschlossenen System ist immer konstant.

Dieser Satz gilt – anders als die Energieerhaltung – ohne weitere Bedingung. Der Gesamtimpuls muss auch dann erhalten bleiben, wenn Deformation oder Reibung im Spiel sind, z. B. bei der Kollision zweier Fahrzeuge. Oft wird der Impuls allerdings „an die Erde“ abgegeben, sodass die Wirkung des Gegenimpulses nicht merkbar ist, z. B. wenn wir springen, laufen, bremsen oder um Kurven fahren.

Im Folgenden besprechen wir an verschiedenen Beispielen, wie Bewegungsänderungen mit Hilfe des Prinzips der Erhaltung des Gesamtimpulses beschrieben und verstanden werden können.

4.4.2 Rückstoß

(A) Schwimmen

Wie oben festgestellt wurde, gibt es keine Impulsänderung, die nicht anderswo eine genau gegengleiche Impulsänderung hervorruft. In vielen praktischen Fällen fällt das nicht auf, weil die Erde zur Verfügung steht, um den Gegenimpuls aufzunehmen. Schwieriger ist die Situation beim Schwimmen, wenn der Gegenimpuls vom Wasser aufgenommen werden muss. Anders gesagt: Ein Schwimmer muss sich „vom Wasser abstoßen“, um voran zu kommen. Dazu gibt es verschiedene Strategien:

- Rudern:
  Wenn man mit einem Ruder, mit der flachen Hand oder einer Flosse das Wasser nach hinten schiebt, erzeugt man dadurch einen Impuls nach vorne. Das Ruder muss dann ohne größeren Impulsübertrag nach vorne befördert werden, damit es den nächsten Schub erzeugen kann. Dazu kann das Ruder an der Luft zurückgeführt werden (Rudern, Paddeln, Kraulen), oder es wird so verdreht, dass es bei der Rückführung kaum Kraft auf das Wasser ausübt (Brustschwimmen, drehbare Flossen bei Fischen).
- Undulation:
  Würmer und längliche Fische „schlängeln“ sich durchs Wasser. Das bedeutet, dass kontinuierlich eine Welle von vorne nach hinten durch das Tier läuft. Die Körperbewegung überträgt dabei an jeder Stelle einen Impuls ans Wasser, der immer eine longitudinale Komponente nach hinten hat, sodass sich das Tier kontinuierlich nach vorne abstößt. Beim Delfinschwimmen wird der Arm- und Beinschlag durch eine vertikale Wellenbewegung des ganzen Körpers unterstützt.
- Oszillation:
  Das Hin- und Herbewegen der Schwanzflosse allein führt nicht zu einem Vortrieb. Wichtig ist dabei, dass sich die Flosse immer so verbiegt, dass eine longitudinale Kraftkomponente auf das Wasser übertragen werden kann.

- Rückstoß:
  Manche Wassertiere bewegen sich mittels Rückstoß voran, z. B. Quallen oder Tintenfische. Dazu wird an der Hinterseite Wasser in eine Körperhöhlung eingesaugt und dann wieder ausgestoßen. Damit das zu einer Netto-Vorwärtsbewegung führt, müssen sich der Einsaug- und der Ausstoßvorgang deutlich unterscheiden. Die Kraft durch den Rückstoß ist näherungsweise

  $$F \approx \frac{\Delta m \cdot v_x}{\Delta t}$$

  mit der verwendeten Wassermenge Δm pro Zyklus (beim Einsaugen und Ausstoßen gleich), der Zeit Δt für den Einsaug- oder Ausstoßvorgang (Beobachtungen zeigen: beide sind etwa gleich) und der Geschwindigkeitskomponente v_x in Bewegungsrichtung. In diesem letzten Parameter steckt der Unterschied: Beim Einsaugen ist die Öffnung groß und das Wasser kommt aus allen Richtungen. Beim Ausstoßen wird die Öffnung klein gemacht, sodass durch den Düseneffekt eine hohe und außerdem gerichtete Geschwindigkeit entsteht.

(B) Impulsübertragung bei Flugzeugen

Das „Abstoßen“ an Luft ist noch einmal deutlich schwieriger als an Wasser, weil die Dichte fast ums Tausendfache kleiner ist. Dennoch muss die Impulsbilanz stimmen, damit Bewegungsänderungen möglich sind.

Betrachten wir vorerst ein Flugzeug, das mit konstanter Geschwindigkeit fliegt: Von vorne wirkt der Luftwiderstand (Kraft $\vec{F}_\mathrm{R}$ gegen die Flugrichtung), dessen Reaktionskraft $\vec{F}_1 = -\vec{F}_\mathrm{R}$ die Luft nach vorne beschleunigt. Damit das Flugzeug nicht langsamer wird, muss permanent die Motorkraft $\vec{F}_\mathrm{M} = -\vec{F}_\mathrm{R}$ in Flugrichtung aufgebracht werden. Diese Kraft wiederum braucht eine Reaktionskraft $\vec{F}_2 = -\vec{F}_\mathrm{M}$, die die Luft nach hinten beschleunigt. Beachten Sie, dass alle vier beteiligten Kräfte denselben Betrag haben.

Wenn das Flugzeug konstante Geschwindigkeit hat, ändert sich sein Impuls nicht. Deshalb kann sich auch der Impuls der Luft in Summe nicht verändern. Beachten Sie, dass ein Flugzeug gewaltige Wirbelschleppen hinter sich her zieht und weitreichende Strömungen erzeugt: Die gesamte mechanische Arbeit der Motoren wird in die Energie dieser Effekte umgewandelt. Gleichzeitig erhält die Luft in Summe aber keinen Impuls übertragen: Die Impulse der einzelnen Bereiche in den Wirbeln und Strömungen müssen sich im Ganzen vollständig zu Null kompensieren.

Wenn das Flugzeug beschleunigt, wird sein Impuls nach vorne größer, und deshalb muss sich auch der Impuls der Luft verändern: In Summe entsteht eine Strömung nach hinten. Diese Strömung verteilt sich zwar mit der Zeit auf immer weitere Bereiche, kann aber erst dann zur Ruhe kommen, wenn eine weitere Kraft wirkt (z. B. Kräfte durch Druckdifferenzen, die in der Atmosphäre Wind erzeugen).

Ebenso ist es beim „Bremsen“, wenn also die Motorkraft gedrosselt wird, sodass $\left|\vec{F}_\mathrm{M}\right| < \left|\vec{F}_\mathrm{R}\right|$. Nun nimmt der Impuls des Flugzeugs ab und muss, da er insgesamt konstant bleiben muss, zum Teil von der Luft übernommen werden: Es entsteht also eine Nettoströmung nach vorne.

(C) Das Raketenprinzip

Schon in der Luft ist es schwierig, genügend Materie aufzutreiben, an der man sich „abstoßen" kann, um starke Beschleunigung eines festen Flugkörpers zu erreichen. Im Vakuum ist dies völlig unmöglich, sodass als einzige Möglichkeit zur Beschleunigung der Ausstoß von mitgeführter Materie bleibt, egal nach welchem Prinzip dieser Ausstoß erfolgt. (Bemerkung: In Science-Fiction-Filmen mit Weltraum-Flugkörpern wird gerne auf dieses Prinzip der Impulserhaltung verzichtet).

Wir überlegen uns das Raketenprinzip vorerst anhand eines Gedankenexperiments: Eine Person sitzt auf einem Wagen, der sich mit Geschwindigkeit v_0 bewegt und auf dem auch ein Stein mit Masse m_S liegt (Gesamtmasse des Wagens: M_0). Die Person kann einen solchen Stein auf festem Boden mit der Geschwindigkeit v_W abwerfen. Wie schnell bewegt sich der Wagen, nachdem die Person den Stein vom fahrenden Wagen nach hinten abgeworfen hat?

Wir berechnen die Situation in einem Koordinatensystem, in dem Geschwindigkeiten in Richtung des fahrenden Wagens positiv sind. Entscheidend ist, dass der Gesamtimpuls des Systems vor und nach dem Wurf gleich sein muss:

$$\begin{aligned}
M_0 \cdot v_0 &= M_1 \cdot v_1 + m_S \cdot v_S \qquad \text{mit} \quad M_1 = M_0 - m_S\,, \quad v_S = v_1 - v_W \\
M_0 \cdot v_0 &= M_0 \cdot v_1 - m_S \cdot v_1 + m_S \cdot v_1 - m_S \cdot v_W = M_0 \cdot v_1 - m_S \cdot v_W \\
v_1 &= v_0 + \frac{m_S}{M_0} \cdot v_W
\end{aligned}$$

Wenn mehrere Steine an Bord sind, die nacheinander abgeworfen werden, muss man berücksichtigen, dass sich nicht nur die Geschwindigkeit, sondern auch die Masse des Wagens für jeden Wurf verändert.

Bei einer Rakete ist das alles ganz ähnlich. Hier werden kontinuierlich heiße Verbrennungsgase nach hinten ausgestoßen, mit einer Rate $\mu = \mathrm{d}m/\mathrm{d}t$ (gemessen in kg/s) und einer Relativgeschwindigkeit v_{rel}. Wir betrachten hier einen Zeitraum $\mathrm{d}t$, in dem die Masse $\mathrm{d}m = \mu \cdot \mathrm{d}t$ die Rakete mit der Geschwindigkeit $v_S = v(t) - v_{\mathrm{rel}}$ nach hinten verlässt. Die Rakete wird um dieselbe Masse $\mathrm{d}m$ leichter, während sich gleichzeitig ihre Geschwindigkeit $v(t)$ so erhöht, dass der Gesamtimpuls gleich bleibt:

$$M(t) \cdot v(t) = (M(t) - \mathrm{d}m) \cdot (v(t) + \mathrm{d}v) + \mathrm{d}m \cdot (v(t) - v_{\mathrm{rel}})$$

Die Gleichung wird ausmultipliziert und der Term $\mathrm{d}m \cdot \mathrm{d}v$ weggelassen (ein Produkt aus zwei infinitesimal kleinen Größen ist so klein, dass es keine Rolle spielt). Wir erhalten:

$$M(t) \cdot \mathrm{d}v = \mathrm{d}m \cdot v_{\mathrm{rel}} = \mu \cdot \mathrm{d}t \cdot v_{\mathrm{rel}} \qquad \rightarrow \qquad M(t) \cdot \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \mu \cdot v_{\mathrm{rel}}$$

$$\text{Erste Raketengleichung:} \qquad a(t) = \frac{\mu \cdot v_{\mathrm{rel}}}{M(t)} \tag{4.20}$$

Wir wollen nun noch feststellen, welche Endgeschwindigkeit die Rakete erreichen kann. Dazu verwenden wir die Tatsache, dass die Raketenmasse um die ausgestoßene Masse kleiner wird, also $\mathrm{d}M = -\mathrm{d}m$. Wenn wir dies oben einsetzen, erhalten wir eine Differenzialgleichung, die sofort integriert werden kann:

$$\mathrm{d}v = -v_{\text{rel}} \cdot \frac{\mathrm{d}M}{M} \qquad \rightarrow \qquad \int_{v_0}^{v_1} \mathrm{d}v = -v_{\text{rel}} \cdot \int_{M_0}^{M_1} \frac{\mathrm{d}M}{M}$$

$$\text{Zweite Raketengleichung:} \qquad v_1 = v_0 + v_{\text{rel}} \cdot \ln\left(\frac{M_0}{M_1}\right) \tag{4.21}$$

Wir erhalten hier für die Rakete den Zusammenhang zwischen der Zunahme ihrer Geschwindigkeit v und der Abnahme ihrer Gesamtmasse M. Je höher der Anteil, der unterwegs ausgestoßen wird, desto schneller fliegt der Rest am Ende. Konkret kommt es darauf an, um wie viel größer die Anfangsmasse M_0 ist als die endgültige Nutzlast M_1. Für das Verhältnis $M_0 : M_1 = 10$ steigt die Geschwindigkeit um Beispiel um das 2,3-fache der Ausstoßgeschwindigkeit v_{rel} an.

Raketen können enorm hohe Geschwindigkeiten erreichen, sind aber aus zwei Gründen nicht besonders effizient: Erstens kann wie gesagt nur ein kleiner Teil der Startmasse als „Nutzlast“ irgendwohin transportiert werden, während der viel größere Teil als Treibstoff verwendet werden muss. Zweitens muss ein großer Teil des gewonnenen Impulses dazu verwendet werden, den Treibstoff zu beschleunigen, der später ohnehin ausgestoßen wird.

Bei realen Raketen treten zusätzliche Schwierigkeiten auf:

- Es muss dafür gesorgt werden, dass die ausgestoßene Materie die Rakete möglichst genau entgegen ihrer Bewegungsrichtung verlässt. Quer gerichtete Impuls-Anteile führen nicht zur gewünschten Beschleunigung, sondern heben sich meist gegenseitig auf. Man versucht also, den Materiestrahl durch Düsen möglichst parallel auszurichten, was aber nie perfekt möglich ist.
- Nicht nur der Treibstoff muss als Zusatzlast über weite Strecken mitbeschleunigt werden: Ein beträchtlicher Teil der Nutzlast besteht aus den Tank- und Antriebssystemen der Rakete. Um hier zu sparen, werden viele Raketen mehrstufig gebaut. Dann kann nach dem Verbrauchen der ersten Stufe der ganze dazugehörige Apparat abgekoppelt werden und im besten Fall kontrolliert zum Boden zurückkehren. Mondraketen sind typisch dreistufig, Raketen für die Reise zu anderen Planeten vierstufig. Die Endgeschwindigkeit setzt sich aus den Geschwindigkeitszunahmen der einzelnen Stufen zusammen, z. B. für drei Stufen:

$$v_{\text{end}} = v_{\text{rel},1} \cdot \ln\left(\frac{M_{\text{start}}}{M_1}\right) + v_{\text{rel},2} \cdot \ln\left(\frac{M_1{}'}{M_2}\right) + v_{\text{rel},3} \cdot \ln\left(\frac{M_2{}'}{M_{\text{end}}}\right) \tag{4.22}$$

  Hier meint $M_1{}'$ die Masse nach dem Abtrennen der ersten Stufe, analog $M_2{}'$.

- Im Normalfall starten Raketen auf der Erdoberfläche und müssen gegen das Gravitationspotential anfliegen. Zur Berechnung müssen wir die Gleichung (4.20) erweitern:
$$a(t) = \frac{\mu \cdot v_{\text{rel}}}{M(t)} - g(\vec{r})$$
Unter der Annahme, dass sich das Graviationsfeld g während der Beschleunigung nicht allzu sehr verändert, kann man einen Mittelwert $\bar{g}$ einsetzen und erhält dann
$$\mathrm{d}v = -v_{\text{rel}} \cdot \frac{\mathrm{d}M}{M} - \bar{g} \cdot \mathrm{d}t \qquad \to \qquad v_1 = v_0 + v_{\text{rel}} \cdot \ln\left(\frac{M_0}{M_1}\right) - g \cdot \tau \tag{4.23}$$
mit der Brenndauer τ. Wenn der Beschleunigungsvorgang dann abgeschlossen ist, wirkt nur mehr die Gravitation, die die Rakete mehr und mehr abbremst.

Wenn eine Rakete das Gravitationsfeld der Erde komplett verlassen soll, um z. B. zu einem anderen Planeten zu gelangen, muss ihre kinetische Energie ausreichen, um das Gravitationspotenzial der Erde zu verlassen. In der Schreibweise von Gleichung (4.9) (negatives Potenzial!) ergibt sich die Bedingung:

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} \geq 0 \qquad \to \qquad \frac{m \cdot {v_f}^2}{2} - G \cdot \frac{M \cdot m}{r} \geq 0$$
$$v_f(r) \geq \sqrt{2 \cdot \frac{G \cdot M}{r}} \qquad \big(\text{Fluchtgeschwindigkeit beim Radius } r\big) \tag{4.24}$$

Wenn ein Körper schon im Bereich der Erdoberfläche die entsprechende Geschwindigkeit nach oben hat (also für $r = R_E$ und $(G \cdot M)/R_E = g_0 \cdot R_E$), dann kann er den Graviationsbereich der Erde ohne weiteren Antrieb verlassen. Man nennt diese Fluchtgeschwindigkeit an der Erdoberfläche

$$\text{2. kosmische Geschw.:} \quad v_{k2} = v_f(R_E) = \sqrt{2 \cdot g_0 \cdot R_E} \approx 11,18\,\text{km/s} \tag{4.25}$$

Körper, die mit weniger Geschwindigkeit von der Erdoberfläche starten, kommen früher oder später wieder zur Erde zurück.

Bemerkungen:

- Als 1. kosmische Geschwindigkeit bezeichnet man jene waagrechte Geschwindigkeit, die ein Körper auf Bodenniveau haben müsste, um eine Kreisbahn um die Erde zu fliegen ($v_{k1} \approx 7,9\,\text{km/s}$; ohne Luftreibung!).
- Die 3. kosmische Geschwindigkeit auf der Erdoberfläche würde das Verlassen des Sonnensystems erlauben ($v_{k3} \approx 16,6\,\text{km/s}$). Dabei muss sowohl das Gravitationspotenzial der Erde als auch jenes der Sonne verlassen werden; allerdings „hilft“ jene kinetische Energie, die ein Flugkörper wegen der Kreisbahn der Erde um die Sonne bereits zur Verfügung hat.

4.5 Kinematische Stöße

Stöße zwischen zwei Körpern treten in vielen Bereiche des täglichen Lebens und der Physik auf, vor allem aber auch bei einzelnen Teilchen, wie den Atomen und Molekülen in Gasen. Mit „Stoß“ meinen wir konkret eine Wechselwirkung zwischen zwei Massen, die ruckartig vonstatten geht und zu einer Änderung der Bewegungszustände führt. Damit kann ein „harter Stoß“ gemeint sein (Stoß zweier Metallkugeln) oder ein „Stoß mit Deformation“ wie ein hüpfender Gummiball, oder auch eine rasche Ablenkung beim dichten Vorbeiflug geladener Teilchen (z. B. „Rutherford-Streuung“).

Wenn wir Stöße untersuchen, geht es nur um den kurzen Zeitraum des Stoßes selbst. Zusätzlich wirkende Kräfte wie Schwerkraft, Reibung etc. sind also unerheblich, weil sie in diesem kurzen Moment keine Wirkung erzeugen können.

Zur Berechnung der Auswirkungen eines Stoßes verwenden wir immer die Impulserhaltung, also die Tatsache, dass der gesamte Impuls aller beteiligten Massen vor und nach dem Stoß konstant sein muss. Darüber hinaus ist wichtig, was mit der kinetischen Energie passiert: Wenn die gesamte kinetische Energie vor und nach dem Stoß konstant ist, nennen wir einen Stoß „elastisch“. Wenn die kinetische Energie hingegen zum Teil (oder manchmal sogar ganz) in andere Energieformen umgewandelt wird, sprechen wir von einem „inelastischen Stoß“.

4.5.1 Elastische Stöße

(A) Elastische Stöße in einer Dimension

Wir betrachten vorerst den eindimensionalen Fall. Zwei Körper bewegen sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten entlang einer Geraden. Wir verwenden folgende Konventionen und Variablen:

- Koordinatensystem: Alle Geschwindigkeiten werden „nach rechts“ positiv und „nach links“ negativ notiert.
- Körper 1: Masse m_1, Geschwindigkeit v_1, Impuls p_1 usw.
- Körper 2: Masse m_2, Geschwindigkeit v_2 usw.
- Nach dem Stoß: Alle Größen, die sich ändern, werden mit Strich dargestellt: $v_1 \to {v_1}'$ usw.

Die Analyse beruht darauf, dass sich erstens der Gesamtimpuls durch den Stoß nicht verändert und dass zweitens beim elastischen Stoß auch die gesamte kinetische Energie gleich bleibt. Wir erhalten:

$$\begin{array}{llcl}
\text{Impuls:} & p_{\text{ges}} = {p_{\text{ges}}}' & \rightarrow & m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot {v_1}' + m_2 \cdot {v_2}' \\
\text{Energie:} & E_{\text{kin}} = {E_{\text{kin}}}' & \rightarrow & \dfrac{m_1 \cdot {v_1}^2}{2} + \dfrac{m_2 \cdot {v_2}^2}{2} = \dfrac{m_1 \cdot ({v_1}')^2}{2} + \dfrac{m_2 \cdot ({v_2}')^2}{2}
\end{array}$$

Das sind zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten ${v_1}'$ und ${v_2}'$. Zur Lösung eliminieren wir eine der beiden Variablen (hier ${v_1}'$) und erhalten eine Gleichung für die zweite Variable (hier ${v_2}'$):

$$
\begin{aligned}
({v_1}')^2 &= {v_1}^2 + \frac{m_2}{m_1}\cdot\left({v_2}^2 - ({v_2}')^2\right) \qquad \text{und} \quad {v_1}' = v_1 + \frac{m_2}{m_1}\cdot(v_2 - {v_2}')\Big|^2 \\
{v_1}^2 + \frac{m_2}{m_1}\cdot\left({v_2}^2 - ({v_2}')^2\right) &= {v_1}^2 + 2\,v_1\cdot\frac{m_2}{m_1}\cdot(v_2 - {v_2}') + \frac{{m_2}^2}{{m_1}^2}\cdot(v_2 - {v_2}')^2 \\
\left({v_2}^2 - ({v_2}')^2\right) &= 2\,v_1\cdot(v_2 - {v_2}') + \frac{m_2}{m_1}\cdot(v_2 - {v_2}')^2 \\
v_2 + {v_2}' &= 2\,v_1 + \frac{m_2}{m_1}\cdot(v_2 - {v_2}') \\
\rightarrow \quad {v_2}'\cdot(m_1 + m_2) &= 2\,m_1\cdot v_1 + v_2\cdot(m_1 - m_2)
\end{aligned}
$$

Daraus können wir die Geschwindigkeit ${v_2}'$ berechnen und ganz analog auch die Geschwindigkeit ${v_1}'$. Wir erhalten:

$$
\begin{aligned}
\text{erster Körper nach dem Stoß:} \qquad {v_1}' &= \frac{2\,m_2\cdot v_2 + m_1\cdot v_1 - m_2\cdot v_1}{m_1 + m_2} \\
\text{zweiter Körper nach dem Stoß:} \qquad {v_2}' &= \frac{2\,m_1\cdot v_1 + m_2\cdot v_2 - m_1\cdot v_2}{m_1 + m_2}
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

Daraus kann man sofort berechnen, welcher Bewegungszustand unmittelbar nach dem Stoß herrscht. Beachten Sie, dass wir als Bedingungen nur die vollständige Erhaltung der Energie und die Beschränkung auf eine Dimension angenommen haben. Wenn dies erfüllt ist, müssen zwei Körper auf einen Stoß immer genau so reagieren wie hier berechnet.

Wir besprechen im Folgenden einige Sonderfälle:

- Gleiche Massen ($m_1 = m_2 = m$):
  Aus den Gleichungen (4.26) folgt sofort, dass die Körper ihre Geschwindigkeiten austauschen (in Betrag und Richtung!):

  $$\text{Für } m_1 = m_2: \qquad {v_1}' = v_2 \qquad \text{und} \qquad {v_2}' = v_1$$

  Wegen der gleichen Masse bedeutet das, dass die beiden Körper auch ihre kinetische Energie und ihren Impuls austauschen. Wenn z. B. einer der beiden Körper vor dem Stoß in Ruhe war, dann übernimmt er die gesamte Bewegungsenergie des zweiten Körpers, während dieser nach dem Stoß ruht.

- Ein Körper zu Beginn in Ruhe ($v_2 = 0$):
  Mit $v_2 = 0$ ergibt sich für die Endgeschwindigkeiten:

  $$\text{Für } v_2 = 0: \qquad {v_1}' = v_1\cdot\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \qquad {v_2}' = v_1\cdot\frac{2\,m_1}{m_1 + m_2}$$

  Bei gleicher Masse ($m_2 = m_1$) übernimmt der ruhende Körper die gesamte kinetische Energie. Wenn der zweite Körper leichter ist, bewegen sich beide Körper nach dem Stoß in dieselbe Richtung; m_2 ist deutlich schneller. Im anderen Fall ($m_2 > m_1$) wird der leichte Körper „reflektiert“ und bewegt sich in die Gegenrichtung.

- Kollision mit gleicher Geschwindigkeit ($v_2 = -v_1$):

$$\text{Für } v_2 = -v_1: \qquad {v_1}' \;=\; v_1 \cdot \frac{m_1 - 3 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \qquad {v_2}' \;=\; v_1 \cdot \frac{3\,m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$

  Wenn eine Masse deutlich größer ist als die andere, also z. B. $m_1 \gg m_2$, dann wird diese Masse kaum gebremst, während die andere Masse im Grenzfall mit der dreifachen Anfangsgeschwindigkeit in die Gegenrichtung geschleudert wird.

Bei elastischen Stößen in einer Dimension sind die Endzustände eindeutig durch die Anfangszustände festgelegt: Die gleichzeitig Erhaltung des gesamten Impulses und der gesamten kinetischen Energie lässt keine Freiheit für Variationen. Das Studium dieser Stöße ermöglicht ungefähre Aussagen auch bei anderen Stoßtypen.

Beachten Sie aber, dass elastische 1D-Stöße in der Praxis so gut wie nie vorkommen: In unserer makroskopischen Welt gibt es immer Verlust-Effekte, sodass ein Teil der kinetischen in thermische Energie umgewandelt wird. In der Teilchenphysik gibt es zwar oft elastische Stöße, aber immer in drei Dimensionen. Diese Erweiterung wird im Folgenden besprochen.

(B) Elastische Stöße in mehreren Dimensionen

In der Realität finden elastische Stöße zweier Körper fast immer in mehreren Dimensionen statt: Erstens treffen die Stoßpartner in der Regel nicht genau entlang einer Linie aufeinander, sondern schief. Zweitens erfolgt der Stoß in den meisten Fällen so, dass die Stoßpartner entlang anderer Richtungen wegfliegen, als sie ankommen.

Man kann sich dies anhand kollidierender Kugeln vorstellen: Der Impulsübertrag, also die Kraftwirkung zwischen den beiden Kugeln, geschieht nur im Moment des Kontakts und kann nur entlang der Normalen auf die Kontaktflächen erfolgen. Jede Kugel prallt somit an einer windschiefen Kontaktfläche ab. Zur korrekten Beschreibung eines solchen Stoßes braucht man in der Regel drei Dimensionen.

Als Unbekannte sind 6 Größen zu berechnen, nämlich die beiden Geschwindigkeiten nach dem Stoß mit jeweils drei Koordinaten. Als Beziehungen haben wir erstens drei Gleichungen für die Impulserhaltung: eine Gleichung für jede Koordinate des vektoriellen Impulses. Außerdem gibt es – da wir hier elastische Stöße beschreiben – eine Gleichung für die Erhaltung der gesamten kinetischen Energie (nur eine Gleichung, weil die Energie ja ein Skalar ist). Das macht vier Beziehungen für sechs Unbekannte: Wir brauchen noch zwei zusätzliche Informationen. Typisch gibt man noch die Richtung für einen der beiden wegfliegenden Stoßpartner an, woraus sich der Einheitsvektor bestimmen lässt. Dann bleibt also nur mehr Betrag dieser Geschwindigkeit unbekannt sowie die drei v-Koordinaten für den anderen Stoßpartner.

Die dreidimensionale Berechnung solcher Stoßvorgänge ist rechnerisch im Allgemeinen aufwändig und hängt sehr stark von der Wahl des Koordinatensystems ab. Man sollte also vor der Rechnung sorgfältig abwägen, welches Koordinatensystem für das jeweilige System ideal ist. Dabei können auch bewegte Koordinatensysteme nützlich sein: Das sind Systeme, die sich mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{V} = \text{const}$ bewegen). In der Praxis werden vor allem die folgende zwei Koordinatensysteme verwendet:

- **Laborsystem:**
  Das ist ein festes rechtwinkeliges Koordinatensystem, bei dem man eventuell die Achsenrichtungen so wählen kann, dass die Rechnungen vereinfacht werden z. B. wenn ein Körper anfangs ruht: Eine Achse in Richtung der Anfangsbewegung des anderen Körpers). Ein Vorteil des Laborsystems ist es, dass Bewegungsrichtungen, Streuwinkel usw. in der Praxis fast immer in einem solchen ruhenden Koordinatensystem gemessen werden.
- **Schwerpunktsystem:**
  Oft ist das Rechnen deutlich einfacher, wenn der gemeinsame Schwerpunkt der beteiligten Massen als Koordinatenursprung gewählt wird. Da sich dieser Punkt in der Regel bewegt, bewegt sich somit auch das Koordinatensystem mit konstanter Geschwindigkeit. Alle Geschwindigkeiten, Richtungen und Winkel müssen vom Laborsystem in dieses bewegte System umgerechnet und am Ende wieder zurück transformiert werden. Im Folgenden besprechen wir die Stoßanalyse in diesem System genauer.

Der **Schwerpunkt** eines Körpers (korrekter: „Massenmittelpunkt“) ist jener Punkt, in dem wir uns die ganze Masse konzentriert denken, sodass wir die Bahnkurve eines komplizierteren Körpers stellvertretend für diesen einen „Punkt“ berechnen können. Die genauere Bedeutung und die Berechnung des Schwerpunkts werden im Kap. 5 genau besprochen. Hier verwenden wir den gemeinsamen Schwerpunkt zweier Körper, der folgendermaßen berechnet wird:

$$\begin{aligned} &\text{Schwerpunkt:}\quad \text{Ortsvektor:} & \vec{R} &= \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2}{M} \qquad \text{mit} \quad M = m_1 + m_2 \\ &\text{Geschwindigkeit:} & \vec{V} &= \frac{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2}{M} \end{aligned} \tag{4.27}$$

Die Größen für den Schwerpunkt schreiben wir hier immer in Großbuchstaben. Wir können nun die Geschwindigkeiten der beteiligen Körper im Schwerpunktsystem ausdrücken (Index „S“):

$$\text{Geschwindigkeiten:} \qquad \vec{v}_{1,S} = \vec{v}_1 - \vec{V} \qquad \text{und} \quad \vec{v}_{2,S} = \vec{v}_2 - \vec{V} \tag{4.28}$$

Daraus ergeben sich zwei wichtige Vereinfachungen für die Berechnungen. Erstens können wir den Impuls im Schwerpunktsystem berechnen, indem wir die Geschwindigkeiten nach Gleichung (4.28) einsetzen. Für den gesamten Impuls ergibt sich dann:

$$(1) \qquad \text{Gesamtimpuls:} \qquad \vec{p}_{\text{ges,S}} = m_1 \cdot \vec{v}_{1,S} + m_2 \cdot \vec{v}_{2,S} = 0 \tag{4.29}$$

Wir sehen: Im Schwerpunktsystem ist der Gesamtimpuls aller Massen, für die wir den Schwerpunkt berechnet haben, immer Null, sowohl vor als auch nach dem Stoß. Dies kann man auch folgendermaßen anschreiben:

$$\vec{p}_{1,S} \;=\; -\vec{p}_{2,S} \qquad \rightarrow \qquad \vec{v}_{2,S} \;=\; -\frac{m_1}{m_2}\cdot\vec{v}_{1,S} \qquad \text{und} \quad \vec{v}_{2,S}{}' \;=\; -\frac{m_1}{m_2}\cdot\vec{v}_{1,S}{}'$$

Weil wir einen elastischen Stoß betrachten, muss die kinetische Energie insgesamt erhalten sein. Das gilt auch auch im Schwerpunktsystem:

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} \;&=\; \frac{v_{1,S}{}^2\cdot m_1}{2}+\frac{v_{2,S}{}^2\cdot m_2}{2} \;=\; \frac{v_{1,S}{}'^2\cdot m_1}{2}+\frac{v_{2,S}{}'^2\cdot m_2}{2} \;=\; E'_{\text{kin}}\\ \frac{v_{1,S}{}^2\cdot m_1}{2}\cdot\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right) \;&=\; \frac{v_{1,S}{}'^2\cdot m_1}{2}\cdot\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\end{aligned}$$

$$(2) \qquad \text{Kinetische Energie:} \qquad \frac{v_{1,S}{}^2\cdot m_1}{2} \;=\; \frac{v_{1,S}{}'^2\cdot m_1}{2} \qquad \rightarrow \qquad |\vec{v}_{1,S}| \;=\; |\vec{v}_{1,S}{}'|$$

Dies ist die zweite wichtige Aussage: Im Schwerpunktsystem bleibt nicht nur die Gesamtsumme der kinetischen Energie konstant, sondern sogar die kinetische Energie jedes einzelnen Stoßpartners und somit auch der Betrag jeder Geschwindigkeit.

Als **Beispiel** nehmen wir einen Körper mit Masse $m_1 = m$, der mit Geschwindigkeit v_1 auf einen zweiten Körper zufliegt. Dieser hat die Masse $m_2 = 3\,m$ und ist in Ruhe ($v_2 = 0$). Wir wissen außerdem, dass ein elastischer Stoß stattfindet und dass der erste Körper durch diesen Stoß um 90° von seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt wird.

Die Angaben stammen natürlich alle aus dem **Laborsystem**. Wir können den Stoß auch direkt dort berechnen. Wir definieren die Koordinaten so, dass der Körper 1 vor dem Stoß in die positive x-Richtung und danach in die positive y-Richtung fliegt. Dann können wir in einer Ebene rechnen (zweidimensionale Vektoren):

$$\begin{aligned} \text{Impulssatz:} \qquad \vec{p}_1 \;&=\; \vec{p}_1{}'+\vec{p}_2{}' \qquad \rightarrow \qquad \vec{p}_2' \;=\; \vec{p}_1-\vec{p}_1{}' \;=\; m\cdot\begin{pmatrix}v_1\\0\end{pmatrix}-m\cdot\begin{pmatrix}0\\v_1{}'\end{pmatrix}\\ \vec{p}_2{}' \;&=\; m\cdot\begin{pmatrix}v_1\\-v_1{}'\end{pmatrix} \;=\; 3\,m\cdot\vec{v}_2{}' \qquad \rightarrow \qquad \vec{v}_2{}' \;=\; \begin{pmatrix}v_1/3\\-v_1{}'/3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Energiesatz:} \quad E_{\text{kin},1} \;&=\; E'_{\text{kin},1}+E'_{\text{kin},2}\\ \frac{m}{2}\cdot v_1{}^2 \;&=\; \frac{m}{2}\cdot v_1{}'^2+\frac{3\,m}{2}\cdot\left(\frac{v_1{}^2}{9}+\frac{v_1{}'^2}{9}\right) \;=\; \frac{m}{2}\cdot v_1{}'^2+\frac{m}{6}\cdot v_1{}^2+\frac{m}{6}\cdot v_1{}'^2\\ v_1{}'^2 \;&=\; \frac{v_1{}^2}{2} \qquad \rightarrow \quad v_1{}' \;=\; \frac{v_1}{\sqrt{2}} \qquad \text{und} \quad \vec{v}_1' \;=\; 0{,}707\cdot v_1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\ \vec{v}_2{}' \;&=\; v_1\cdot\begin{pmatrix}1/3\\-1/(3\sqrt{2})\end{pmatrix} \;=\; 0{,}408\cdot v_1\cdot\begin{pmatrix}+0{,}816\\-0{,}577\end{pmatrix}\end{aligned}$$

In diesem Fall kann man den Stoß offensichtlich im Laborsystem gut berechnen. Trotzdem ist es natürlich auch möglich, das Problem ins **Schwerpunktsystem** zu transformieren. Dazu berechnen wir die Schwerpunktgeschwindigkeit $\vec{V}$ nach Gleichung (4.27):

$$\vec{V} \;=\; \frac{m_1\cdot\vec{v}_1+m_2\cdot\vec{v}_2}{m_1+m_2} \;=\; \frac{m\cdot\vec{v}_1}{4\,m} \;=\; \frac{v_1}{4}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \;=\; \text{const}$$

Die Geschwindigkeiten der beiden Massen im Schwerpunktsystem werden mittels Gleichung (4.28) mit den Geschwindigkeiten im Laborsystem verknüpft:

$$\vec{v}_{1,S} = \vec{v}_1 - \vec{V} = \frac{3}{4} \cdot v_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{v}_{2,S} = \vec{v}_2 - \vec{V} = \frac{v_1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_{1,S}{}' = \vec{v}_1{}' - \vec{V} = \begin{pmatrix} -v_1/4 \\ v_1{}' \end{pmatrix}$$

Für die erste Masse verwenden wir die Erkenntnis von oben, dass $|\vec{v}| = \text{const}$:

$$\frac{3}{4} \cdot v_1 = \sqrt{\frac{v_1{}^2}{16} + v_1{}'^2} \qquad \rightarrow \qquad v_1{}'^2 = \frac{9}{16} \cdot v_1 - \frac{1}{16} \cdot v_1$$

$$v_1{}' = \frac{v_1}{\sqrt{2}} \qquad \rightarrow \qquad \vec{v}_{1,S}{}' = \begin{pmatrix} -v_1/4 \\ v_1{}' \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \cdot v_1 \cdot \begin{pmatrix} -0,333 \\ +0,943 \end{pmatrix}$$

Nun verwenden wir noch die Tatsache, dass der Gesamtimpuls Null sein muss:

$$\vec{p}_{2,S}{}' = 3 \cdot m \cdot \vec{v}_{2,S}{}' = -\vec{p}_{1,S}{}' = -m \cdot \vec{v}_{1,S}{}'$$

$$\rightarrow \qquad \vec{v}_{2,S}{}' = \frac{\vec{v}_{1,S}{}'}{3} = \frac{v_1}{4} \cdot \begin{pmatrix} +0,333 \\ -0,943 \end{pmatrix}$$

Das Ergebnis muss am Schluss wieder ins Laborsystem zurücktransformiert werden:

$$\vec{v}_1{}' = \vec{v}_{1,S}{}' + \vec{V} = \frac{v_1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ +2,829 \end{pmatrix} = 0,707 \cdot v_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2{}' = \vec{v}_{2,S}{}' + \vec{V} = \frac{v_1}{4} \cdot \begin{pmatrix} +1,333 \\ -0,943 \end{pmatrix} = 0,408 \cdot v_1 \cdot \begin{pmatrix} +0,816 \\ -0,577 \end{pmatrix}$$

Das Ergebnis ist gleich – ganz allgemein ist es immer egal, in welchem Koordinatensystem man rechnet. Man sollte nur überlegen, in welchem System die Rechnung einfacher zu machen ist. In diesem Beispiel ist das eher das Laborsystem, oft aber – besonders bei windschiefen Vektoren – ist das Schwerpunktsystem die bessere Wahl.

Beachten Sie, dass sich beim Wechsel des Koordinatensystems nicht nur die Koordinaten und Geschwindigkeiten, sondern auch andere Größen verändern. Zum Beispiel die kinetische Energie (hier mit den Zahlen vom Beispiel oben):

$$\text{Laborsystem:} \qquad E_{\text{kin}} = \frac{m \cdot v_1{}^2}{2}$$

$$\text{Schwerpunktsystem:} \quad E_{\text{kin,S}} = \frac{m \cdot \vec{v}_{1,S}{}^2}{2} + \frac{3\,m \cdot \vec{v}_{2,S}{}^2}{2}$$

$$= \frac{m \cdot v_1{}^2}{2} \cdot \left(\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{m \cdot v_1{}^2}{2}$$

Die fehlende Energie steckt im der Bewegung des Schwerpunktsystems selbst:

$$E_{\text{kin,SPS}} = \frac{(m + 3\,m) \cdot V}{2} = 4 \cdot \frac{m \cdot v_1{}^2}{2} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4} \cdot \frac{m \cdot v_1{}^2}{2}$$

Ähnlich ist es mit dem Impuls: Der Gesamtimpuls aller Körper im Laborsystem steckt in der Bewegung des Schwerpunktsystems, sodass der Gesamtimpuls innerhalb dieses Systems Null ist.

4.5.2 Inelastische Stöße

In unserer Umgebung gibt es keine elastischen Stöße: Ein Teil der kinetischen Energie geht immer „verloren“, sodass der Erhaltungssatz für E_{kin} nicht angewandt werden kann.

Immer gültig ist aber der Impulserhaltungssatz: Solange alle beteiligten Kräfte innerhalb des Systems wirken, bleibt der Gesamtimpuls konstant. Dabei sind besonders die „Reaktionskräfte“ zu beachten, die laut Reaktionsprinzip mit jeder beobachtbaren Kraft einhergehen müssen: Solange sich kein Körper an der Außenwelt „abstößt“, bleibt der Gesamtimpuls konstant.

Beachten Sie, dass dies auch bei drastischen Änderungen der kinetischen Energie gilt. Beispiele:

- Bei einem Verkehrsunfall wird ein Großteil der kinetischen Energie gut sichtbar in Deformationsenergie umgewandelt (letzten Endes eine Form von thermischer Energie). Dennoch ist der Gesamtimpuls aller Teile unmittelbar vor und nach einem Crash unverändert, solange nicht die Umgebung Impuls aufnimmt (ein Baum, ein Gebäude etc.). Die Reibung, die alle Teile am Ende abbremst, spielt während des kurzen Moments des Zusammenstoßes keine Rolle.
- Wenn ein Körper in der Luft explodiert, werden schlagartig große Mengen an Energie „freigesetzt“. Dennoch und trotz der hohen Geschwindigkeiten der ausgeworfenen Fragmente bleibt der Gesamtimpuls konstant. Das bedeutet also, dass in einem solchen Fall zwangsläufig Teile nach allen Richtungen fliegen müssen. All dies gilt auch hier nicht, wenn ein Teil der Rückstoßkraft an die Umgebung abgeführt werden kann, wenn die Explosion also zum Beispiel am Boden oder an einer festen Wand passiert.

Im **eindimensionalen Fall** gibt es zwei Unbekannte (die Geschwindigkeiten $v_1{}'$ und $v_2{}'$ nach dem Stoß), aber nur eine Gleichung (Impulserhaltung in einer Dimension). Für eine erfolgreiche Berechnung muss eine weitere Information verfügbar sein. Dazu gibt es in der Praxis verschiedene Möglichkeiten, zum Beispiel:

- Die beiden Körper haften nach dem Stoß aneinander, also $v_1{}' = v_2{}'$.
  In diesem Fall reicht die eine verfügbare Gleichung, um die Endgeschwindigkeit zu berechnen:
  $$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 \;=\; (m_1 + m_2) \cdot v' \qquad \rightarrow \qquad v' \;=\; \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$$
  Damit kann dann zum Beispiel berechnet werden, wie viel kinetische Energie beim Stoß verloren ging.
- Manchmal ist genau bekannt, welcher Energiebetrag ΔE_V beim Stoß von kinetischer Energie in eine andere Form überführt wird. Dann hat man wieder zwei Gleichungen zur Verfügung Dies ist zum Beispiel bei vielen Stößen von Atomen und anderen Teilchen der Fall: Bei derartigen mikroskopischen Effekten gibt es keine Verluste durch thermische Energie – es kann aber ein genau definierter

Energiebetrag abgegeben werden, um ein Atom anzuregen, ein Molekül zu dissoziieren, ein Elektron abzulösen, eine best. Kernreaktion auszulösen usw. (Dies sind allerdings in der Regel dreidimensionale Stöße!). Wenn ΔE bekannt ist, kann man die Gleichung für die Energieerhaltung verwenden und damit beide Geschwindigkeiten berechnen.
Im Schwerpunktsystem (das man im 1D-Fall ganz analog zur 3D-Betrachtung auf S. 88 verwenden kann) erhält man:

$$\begin{aligned} \text{Impulssatz:} \quad v_{2,S} &= -\frac{m_1}{m_2} \cdot v_{1,S} \qquad \text{und} \quad {v_{2,S}}' = -\frac{m_1}{m_2} \cdot {v_{1,S}}' \\ \text{Energiesatz:} \quad {v_{1,S}}'^2 &= {v_{1,S}}^2 - \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{2\,\Delta E_V}{m_1 + m_2} \\ {v_{2,S}}'^2 &= {v_{2,S}}^2 - \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{2\,\Delta E_V}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeitsabnahme teilt sich also im Schwerpunktsystem invers proportional auf die beiden Massen auf: Die große Masse bekommt wenig abgezogen und die kleine viel. Beispiel: Wenn $m_1 \gg m_2$, bleibt $v_{1,S}$ wegen des kleinen Faktors m_2/m_1 fast gleich, während $v_{2,S}$ deutlich mehr abnimmt.

- Ganz analog ist vorzugehen, wenn die kinetische Energie beim Stoß nicht„verschwindet“, sondern dazukommt. Dies kann wieder mit Atomen und anderen Teilchen passieren, wo z. B. die wohldefinierte Energie ΔE_G eines „angeregten Zustands“ durch den Stoß in kinetische Energie der Stoßpartner übergeht. Die Endgeschwindigkeiten können wie oben berechnet werden, wenn statt des Energieverlusts ΔE_V der Energiegewinn ΔE_G eingesetzt wird (dann mit Minus-Vorzeichen: „negativer Verlust“).

Im **dreidimensionalen Fall** (schiefer Stoß) braucht man auch beim elastischen Stoß zusätzliche Informationen, um den Zustand nach dem Stoß berechnen zu können (siehe S. 87). Beim inelastischen Stoß muss – weil die Erhaltung der kinetischen Energie nicht gewährleistet ist – zusätzlich noch eine Information mehr bereit gestellt werden.

Einfach ist die Situation dann, wenn beide Körper nach dem schiefen Stoß aneinander haften und gemeinsam weiterfliegen: Die Endgeschwindigkeit $\vec{v}\,'$ kann dann einfach aus der Impulserhaltung berechnet werden:

$$\vec{v}\,' = \frac{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Somit ist der Endzustand völlig beschrieben und man kann dann zum Beispiel auch den umgewandelten Anteil an kinetischer Energie berechnen.

Wenn bekannt ist, welcher Energiebetrag ΔE_V beim Stoß von kinetischer Energie in eine andere Form übertragen wird (wie z. B. bei atomaren Stößen, siehe oben), ist dennoch weitere Information notwendig, z. B. die genaue Richtung, in die einer der beiden Stoßpartner wegfliegt.