

6 Kontinuumsmechanik

In diesem Kapitel werden Grundbegriffe der Elastomechanik sowie der Hydro- und Aerostatik und -dynamik eingeführt. Dabei geht es darum, wie Festkörper, Flüssigkeiten und Gase im Inneren auf die Einwirkung von Kräften reagieren.

6.1 Atomistische Betrachtung der Aggregatzustände

6.1.1 Die Aggregatzustände

Die einzelnen Atome und Moleküle eines Mediums üben in der Regel anziehende Kräfte aufeinander aus. Diese Kräfte innerhalb eines Mediums nennt man ganz allgemein „Kohäsionskräfte“, im Unterschied zu „Adhäsionskräften“, die an Grenzflächen zwischen angrenzenden Medien wirken. Hinter diesen Begriffen verbergen sich verschiedene konkrete Anziehungskräfte, die letztendlich fast immer elektrostatischer Natur sind. Die Kohäsion führt dazu, dass sich aus Atomen und Molekülen kompakte, geschlossene Stoff-Volumina bilden.

Bei einem sehr vereinfachenden Festkörpermodell geht man davon aus, dass die atomaren Teilchen (Atome, Moleküle oder Ionen, je nach Art des Festkörpers) in einem „Kristallgitter“ quasielastisch aneinander gebunden sind. Die Teilchen können diese Positionen nicht verlassen, schwingen aber jeweils um ihre Ruhelage (jene Position, die sie bei der Temperatur des absoluten Nullpunkts einnehmen würden). Die Amplitude dieser Schwingungen nimmt mit steigender Temperatur zu. Dies ändert aber vorerst nichts an der Festigkeit des Körpers.

Wenn ein Festkörper stark erhitzt wird, wird – beim Erreichen der Schmelztemperatur T_S – die Schwingungsenergie so groß, dass die Bindungskräfte (also die Kohäsionskräfte) überwunden werden und der Körper schmilzt. Es bildet sich eine Flüssigkeit, in der die atomaren Teilchen frei gegeneinander verschiebbar sind. Die Kohäsionskräfte sind dann immer noch vorhanden. Sie reichen nur nicht aus, um die einzelnen Teilchen an festen Positionen zu halten. Die Teilchen können sich also bewegen, werden dabei aber doch so weit zusammengehalten, dass sie auch in der Flüssigkeit dicht gepackt sind, fast so dicht wie im Festkörper.

Wird die Flüssigkeit nun ihrerseits noch weiter erhitzt, so werden die Kohäsionskräfte schließlich vollständig überwunden und die Flüssigkeit beginnt zu siedeln (bei der Siedetemperatur T_K). Hier erfolgt der Übergang in den gasförmigen Zustand, indem sich die Teilchen voneinander lösen, sodass sie ein wesentlich größeres Volumen ausfüllen können als in den beiden anderen Zuständen. Dieses Volumen ist im Wesentlichen leer und wird lediglich von den Atomen und Molekülen durchflogen, die fast als punktförmig angenommen werden können. Der „Platzbedarf“ eines Gases wird mit steigender Temperatur immer größer. Die Kräfte zwischen den atomaren Teilchen sind im Gas fast

(„reales Gas“) oder komplett („ideales Gas“) vernachlässigbar, letzteres vor allem bei hohen Temperaturen und geringen Dichten. Die gegenseitige Wechselwirkung der Teilchen erfolgt dann ausschließlich über elastische (und selten auch inelastische) Stöße.

Es gibt weitere Materiezustände, die aber nur außerhalb unserer Erfahrungswelt vorliegen und deshalb hier nicht besprochen werden. Ein Beispiel ist der „Plasmazustand“, der eintritt, wenn Materie extrem erhitzt wird: Dann werden die Atome und Moleküle zum Teil ionisiert: Sie verlieren Elektronen (elektrisch negativ geladen), die sich frei durchs Medium bewegen, und bleiben als positiv geladene Ionen zurück. Plasma hat durch diese freien elektrischen Ladungen ganz neue Eigenschaften.

6.1.2 Wichtige Größen

(A) Dichte

Für wohldefinierte feste Körper wird zur Angabe der Materiemenge die Masse M angegeben, die man sich oft im Massenmittelpunkt konzentriert denken kann, wenn es nämlich um die Trägheit oder um die Wirkung der Gravitation geht.

Bei kontinuierlichen Medien bezieht man die Masse auf ein bestimmtes Volumen und gibt sie dann als „Dichte“ an (genauer: „Massendichte“):

$$\begin{aligned} \text{Dichte:} \quad \rho(\vec{r}) &= \frac{dm}{dV} && (\text{lokale Dichte}) && (\text{engl. } density) \\ \rho &= \frac{M}{V} && (\text{globale Dichte}) \end{aligned}$$

$$\text{Dimension:} \quad \dim(P) = \frac{\text{Masse}}{\text{Länge}^3}$$

$$\text{SI-Einheit:} \quad [P] = 1 \text{ kg/m}^3$$

Die erste Definition wird immer dann verwendet, wenn sich die Dichte räumlich ändern könnte und wenn ganz allgemein die Geometrie des Körpers nicht gut bekannt ist (z. B. eventuelle Hohlräume usw.).

Aufgrund ihres mikroskopischen Aufbaus (viel freier Raum zwischen den Atomen und Molekülen) haben Gase erheblich geringere Dichte als kondensierte Materie (Flüssigkeiten und Festkörper). Außerdem hängt die Gasdichte von Druck und Temperatur ab. So beträgt die Dichte der uns umgebenden Luft

$$\begin{aligned} \text{Luftdichte:} \quad \rho_L &= 1,204 \text{ kg/m}^3 && \text{bei „Normalbedingungen“:} \\ &&& \text{Luftdruck} \quad p_0 = 101325 \text{ Pa} \\ &&& \text{Temperatur} \quad T = 20,0^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Die Dichten von Flüssigkeiten und Festkörper bewegen sich in relativ ähnlichen Bereichen (bei beiden liegen die atomaren Teilchen ja dicht gepackt vor) und hängen außerdem nur wenig von den Nebenbedingungen ab.

(B) Spezifische Wärmekapazität

Die Zufuhr von thermischer Energie auf Materie führt zu einer Temperaturerhöhung. Wie bereits auf S. 69 beschrieben, steigt die Temperatur dabei linear mit der zugeführten Energie:

$$\text{Wärme zur Temperaturerhöhung:} \quad \Delta E_{\text{th}} = c \cdot m \cdot \Delta T \quad (6.1)$$

Die spezifische Wärmekapazität c (mit $[c] = \text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$) ist eine Stoffkonstante und gibt an, wie viel thermische Energie von Wärme von einem Kilogramm ($m = 1 \text{ kg}$) des betreffenden Stoffes abgegeben oder aufgenommen wird, wenn sich seine Temperatur um ein Kelvin ($\Delta T = 1 \text{ K} = 1^\circ \text{C}$) ändert. Die konkreten Werte liegen für alle Stoffe grob innerhalb einer Größenordnung. Beispiele:

Wasser:	$c = 4,19 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$	Gold:	$c = 0,13 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$
Methanol:	$c = 2,40 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$	Stahl:	$c = 0,47 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$
Luft:	$c = 1,01 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$	Aluminium:	$c = 0,90 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$

(C) Thermische Ausdehnung

Jeder Stoff, dessen Temperatur sich erhöht, dehnt sich aus (bis auf ganz wenige Ausnahmen). Diese Ausdehnung lässt sich für kleine Temperaturänderungen in gute Näherung linear beschreiben.

Obwohl sich Festkörper in drei Dimensionen ausdehnen, beschreibt man ihre Ausdehnung in einer Richtung: Bei einer Temperaturänderung ΔT ändert sich jede Länge L um den zu beiden Größen proportionalen Betrag ΔL :

$$\text{Thermische Längenausdehnung:} \quad \Delta L = \alpha \cdot L \cdot \Delta T \quad (6.2)$$

Der Proportionalitätsfaktor α heißt Längenausdehnungskoeffizient und ist eine Stoffkonstante mit der Einheit $[\alpha] = 1/\text{K}$ oder $^{-1}$ (sprich „pro Kelvin“). Beispiele:

Aluminium:	$\alpha = 23 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$	PVC:	$\alpha = 50 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$
Stahl:	$\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$	Glas:	$\alpha = 8,5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$
Invar:	$\alpha \approx 0,7 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$	Zerodur:	$\alpha < 0,01 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$

Die beiden letzten Materialien haben besonders geringe Temperatúrausdehnung: Invar ist eine bestimmte Eisen-Nickel-Legierung und Zerodur eine spezielle Glaskeramik, die für Kochfelder („Ceran“), hitzefestes Kochgeschirr, Laborgefäße etc. verwendet wird.

Die thermische Ausdehnung macht in der Technik große Schwierigkeiten, weil Bauwerke, Maschinen usw. in der Regel auf einen Temperaturbereich von $\Delta T \approx 50 \text{ K}$ oder mehr auszulegen sind, in dem nennenswerte Längenänderungen stattfinden. Es muss deshalb dafür Sorge getragen werden, dass erstens diese Ausdehnung ohne Widerstand möglich ist (z.B. Dehnungsfugen in Brücken und Gebäuden) und dass zweitens die unterschiedliche Ausdehnung verschiedener Materialien nicht zu Rissen

und Deformationen führt.

Flüssigkeiten und Gase breiten sich ebenfalls aus, wenn die Temperatur steigt. Weil sie keine feste Form haben, wird hier Ausdehnung des Volumens beschrieben:

$$\text{Thermische Volumsausdehnung:} \quad \Delta V = \gamma \cdot V \cdot \Delta T \quad (6.3)$$

Der Faktor γ (Volumsausdehnungskoeffizient) ist wieder eine Stoffkonstante mit der Einheit $[\gamma] = 1/\text{K}$. Beispiele:

$$\begin{array}{ll} \text{Aceton: } \alpha = 1,46 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1} & \text{Wasser (0 °C): } \alpha = -0,07 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1} \\ \text{Heizöl: } \alpha = 0,85 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1} & \text{Wasser (20 °C): } \alpha = 0,21 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1} \end{array}$$

Gase dehnen sich noch stärker aus als Flüssigkeiten. Alle „idealen Gase“ (eine sehr gute Näherung für alle Gase in unserem Umfeld) dehnen sich bei einer bestimmten Temperatur genau gleich aus, nämlich mit dem Koeffizienten

$$\begin{aligned} \text{Ideales Gas: } \quad \gamma &= \frac{1}{T} \quad (T \text{ in Kelvin}) & (6.4) \\ \gamma &= 3,661 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1} \quad \text{für } T = 0^\circ\text{C} \\ \gamma &= 3,230 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1} \quad \text{für } T = 30^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Der Grund für diese einfache Beziehung wird in der Vorlesung „Thermodynamik“ erläutert. Beachten Sie, dass diese Temperatúrausdehnung mit steigender Temperatur abnimmt.

Für Festkörper wird die Ausdehnung des Volumens mit der Temperatur mit Gleichung (6.2) aus der Längenausdehnung berechnet:

$$\begin{aligned} V + \Delta V &= (L + \Delta L)^3 = L^3 + 3 \cdot L^2 \cdot \Delta L + 3 \cdot L \cdot (\Delta L)^2 + (\Delta L)^3 \\ &\approx L^3 + 3 \cdot L^2 \cdot \Delta L = L^3 \cdot \left(1 + 3 \cdot \frac{\Delta L}{L}\right) = V + 3 \cdot V \cdot \alpha \cdot \Delta T \\ &\rightarrow \gamma = 3\alpha \end{aligned} \quad (6.5)$$

6.2 Grundlegendes zur Elastomechanik

In Festkörpern sind die Abstände zwischen den einzelnen Atomen sehr gering; sie haben daher ein gut definiertes Volumen, das sich kaum verändern lässt. Allerdings lässt sich die Gestalt eines Festkörpers ändern: Beispielsweise kann ein Metalldraht durch Einwirken einer Zugkraft in kleinem Maß gedehnt, gestaucht oder „geschert“ (in seiner Form verändert) werden. Noch einfacher ist die Biegung oder Verdrillung länglicher Festkörper (Stangen, Drähte). Ob die Gestalt des Festkörpers in die alte Form zurück geht, wenn die einwirkende Kraft nachlässt („elastische Verformung“) oder ob sie bestehen bleibt („plastische Verformung“), ist vom Material und vor allem von der Größe der verformenden Kraft abhängig.

Wir besprechen im Folgenden die wichtigsten Arten der Festkörper-Deformation.

6.2.1 Dehnung und Stauchung

(A) Dehnung

Im Allgemeinen kann jeder Festkörper zu einem gewissen Grad elastisch gedehnt werden, wenn an gegenüberliegenden Enden eine Zugkraft wirkt. Zur Beschreibung betrachten wir einen Stab, der überall denselben Querschnitt hat (Querschnittsfläche A). Wenn sich Länge l durch die Zugbelastung um ein bestimmtes Stück Δl verlängert, beschreibt man dies mit der Größe

$$\text{(relative) Dehnung:} \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (6.6)$$

Die Zugkraft wird auf die Querschnittsfläche A bezogen und wir erhalten die

$$\text{Zugspannung:} \quad \sigma = \frac{F_N}{A} \quad (6.7)$$

Dabei ist F_N jene Kraft, die normal auf die Querschnittsfläche an den Enden des Stabs anzieht. Beachten Sie, dass an jedem Ende des Stabs eine Kraft F_N wirken muss; oft ist eine davon die aktiv angelegte Kraft und die andere eine statische Reaktionskraft, wenn der Stab dort z.B. fest eingespannt ist. Die Spannung wird in N/m^2 , oft auch in kN/mm^2 oder in Pa (Pascal; siehe später) angegeben.

Wenn der Festkörper aus der Ruhelage heraus gedehnt wird, verformt er sich elastisch: Nach Ende der Belastung kehrt er zu seinem ursprünglichen Maß zurück. In diesem Bereich gilt:

$$\text{Hookesches Gesetz:} \quad \sigma = E \cdot \varepsilon \quad \text{mit dem Elastizitätsmodul } E \quad (6.8)$$

Spannung und Dehnung sind also im elastischen Bereich proportional. Der Proportionalitätsfaktor E ist eine Materialkonstante und gibt an, wie schwer es ist, ein bestimmtes Material zu dehnen, ganz analog zur Federkonstante in Kap. 3.2.3. E hat dieselbe SI-Einheit wie die Spannung σ , also N/m^2 oder Pa.

Wird der Festkörper weiter gedehnt, so bildet sich die Verformung bei einem Nachlassen der Zugkraft nur noch teilweise oder sogar überhaupt nicht mehr zurück; die Verformung bleibt also bestehen. Man nennt dies eine „plastische Verformung“. Hier gibt es keine Proportionalität zwischen σ und ε : Das Hookesche Gesetz ist hier also nicht mehr gültig. Bei genauerer Untersuchung findet man mit steigender Zugspannung der Reihe nach

- den „elastischen Bereich“, in dem der Körper nach Ende der Zugspannung wieder in seine Ausgangslänge zurückkehrt. Im unteren Teil dieses Bereichs gilt immer das Hookesche Gesetz (Proportionalität von Spannung und Dehnung); zu größeren Spannungen hin gibt es bei manchen Materialien auch einen nichtlinearen, aber dennoch elastischen Bereich.
- den „Fließbereich“, in dem sich der Festkörper umstrukturiert;

- den plastischen „Gleichmaßdehnungsbereich“, in dem der Stab länger und dabei überall entlang seiner Länge gleichmäßig dünner wird;
- den „Einschnürungsbereich“, in dem der Stab immer länger und dabei an einer Stelle immer dünner wird;
- den Bruchpunkt, an dem der Körper an der Einschnürungsstelle auseinanderbricht.

Die angegebenen Bereiche lassen sich nicht in allen Stoffen klar identifizieren und abgrenzen, am ehesten noch bei Metallen. Der genaue Verlauf ist für viele Materialien graphisch in Spannungs-Dehnungs-Diagrammen angegeben. Dabei wird üblicherweise die „nominelle Zugspannung“ angegeben, die auf die Anfangs-Querschnittsfläche A_0 bezogen wird. Beachten Sie, dass durch die Querschnittsverengung real eine größere Zugspannung anliegt (die „wahre Zugspannung“), die mit wachsender Dehnung monoton ansteigt, aber schwer zu messen ist.

In der Technik werden Werkstoffe mit Hilfe eines „Zugversuchs“ auf ihre Belastbarkeit untersucht. Dabei ermittelt man u.a. folgende Parameter:

- Die Streckgrenze R_e ist jene Zugspannung, die das Ende der Hookeschen Gerade kennzeichnet. Für Spannungen $\sigma < R_e$ dehnt sich der Werkstoff also elastisch und vollständig reversibel.
- Die Zugfestigkeit $R_m = F_m/A_0$ gibt die maximale nominelle Zugspannung an, die auf ein Material wirken kann. Wichtig ist vor allem die maximale Zugkraft F_m , die auf eine Stange mit der ursprünglichen Querschnittsfläche A_0 wirken darf, bevor sie sich einschnürt und bricht.
- Die 0,2 %-Dehngrenze wird bei Stoffen angegeben, in denen der elastische Bereich nicht gut vom plastischen getrennt ist, sondern kontinuierlich übergeht. Als Maß für die maximale Spannung für einigermaßen elastische Dehnung gibt man dann jene Spannung an, bei der der Werkstoff nach Beendigung der Dehnung um $\varepsilon = 0,2\%$ verlängert bleibt.

(B) Querkontraktion

Bei der Dehnung eines Festkörpers kann man in den meisten Fällen neben der Längenzunahme Δl auch eine Verringerung des Querschnitts feststellen, und zwar so, dass das Volumen des Festkörpers nur geringfügig zunimmt. Diese so genannte Querkontraktion wird mit Hilfe der Poissonzahl oder Querkontraktionszahl beschrieben

$$\text{Poissonzahl:} \quad \nu = -\frac{\Delta d/d}{\Delta l/l} \quad (6.9)$$

Wir setzen also die relative Längenänderung in Querrichtung (d ist bei runden Stäben der Durchmesser, bei rechteckigen eine Seitenlänge) zur Dehnung ε in Zugrichtung

ins Verhältnis. Die Poissonzahl ist dimensionslos. Für die Volumenänderung bei einer Zugspannung in Längsrichtung gilt somit näherungsweise:

$$\text{relative Volumenänderung: } \frac{\Delta V}{V} \approx (1 - 2 \cdot \nu) \cdot \varepsilon \quad (6.10)$$

Die Werte der Querkontraktionszahl ν liegen üblicherweise im Bereich $0 < \nu < 0,5$, bei Metallen z. B. meist zwischen 0,3 und 0,4. Dies bedeutet, dass das Volumen unter Zugbelastung zunimmt, sodass die Dichte ρ abnimmt. Mikroskopisch ist dies dadurch zu erklären, dass die Anzahl von atomaren Fehlstellen (winzige Hohlräume) im Material zunimmt. Gummi hat den Wert $\nu = 0,5$: hier bleibt das Volumen bei Dehnung genau konstant. Einige Verbundwerkstoffe haben Poissonzahlen $\nu > 0,5$, ebenso Holz unter bestimmter Zugrichtung: Hier wird das Volumen bei Dehnung kleiner.

(C) Stauchung

Bei einer Stauchung wirken Kräfte senkrecht auf die Oberflächen eines Körpers ein. Dabei verkürzt sich die Länge des Materials, auf die der Druck einwirkt; bei ausreichend großen Drücken lässt sich auch eine geringfügige Abnahme des Volumens feststellen. Der Probekörper kann sich bei einer Stauchung – je nach Form und Festigkeit – auch verbiegen oder umknicken, wenn die maximale Belastbarkeit überschritten wird. Typische Beispiele für Stauchungen sind das Zusammenpressen einer Schuhsohle oder eines Brückenpfeilers unter der einwirkenden Gewichtskraft.

Die Ursache der Formänderung wird wieder durch eine Spannung beschrieben

$$\text{Druckspannung: } \sigma_d = \frac{F_N}{A} \quad \text{mit} \quad [\sigma_d] = \text{N/m}^2, \quad (6.11)$$

und die Auswirkung mit einer relativen Längenänderung

$$\text{(relative) Stauchung: } \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (6.12)$$

In diesem Fall werden beide Größen negativ gesetzt. Für eine elastische Stauchung gilt das Hookesche Gesetz (Gleichung (6.8)) mit demselben Elastizitätsmodul wie bei der Dehnung und mit einer ähnlichen Poissonzahl (Gleichung (6.9)), die hier die Querausdehnung eines gestauchten Stabs beschreibt.

Wenn der elastische Bereich verlassen wird, kommt es auch hier zur plastischen Verformung. Ein gestauchter zylindrischer Stab dehnt sich in der Mitte mehr aus als an den Endflächen sodass eine Ausbauchung entsteht und der Stab bei starker Stauchung fassartig wirkt. Dies führt typisch zu Rissen, die außen beginnen und sich ins Volumen ausdehnen, bis das Werkstück bricht, oft entlang diagonaler Bruchkanten.

Bei Werkstofftests in „Druckversuchen“ ermittelt man u.a. folgende Parameter:

- Die Quetschgrenze (oder Druck-Fließgrenze) σ_{dF} ist jene Druckspannung, bis zu der sich der Werkstoff völlig elastisch verhält und nach der Belastung seine ursprüngliche Geometrie einnimmt.

- Die Druckfestigkeit σ_{dB} gibt jene Druckspannung an, bei der erste Risse im Material sichtbar werden.
- Die 0,2 %-Stauchgrenze wird in Analogie zur Dehnung bei Stoffen ohne eindeutige Grenze des elastischen Bereichs angegeben. Bei dieser Spannung $\sigma_{d0,2}$ bleibt nach Entlastung eine Stauchung $\varepsilon = -0,2\%$ zurück.

Für viele praktisch verwendete Materialien (z. B. Stein, Beton, Keramik oder Gusseisen) ist die Druckfestigkeit σ_{dB} wesentlich größer als die Zugfestigkeit R_m .

6.2.2 Biegung

Wenn ein Stab oder ein dünnes Blech an einer Seite fest eingespannt ist, von dort an waagrecht ins Freie ragt und am äußersten Ende mit einer Kraft F belastet wird, dann biegt sich das Werkstück in Form eines Bogens, solange die Kraft nicht allzu groß ist (elastischer Bereich). Bei größerer Kraft bildet sich nahe am Einspannpunkt ein Knick aus (plastischer Bereich), was bis zu Schädigungen und Zerstörung führen kann.

Wir besprechen hier die elastische Biegung. Die Bildung einer Biegung nach unten erfordert es, dass der Stab im oberen Teil gedehnt und im unteren Teil gestaucht wird. Genau in der Mitte verläuft die „neutrale Faser“, deren Länge unverändert bleibt.

Zur Berechnung der Biegung überlegen wir, dass die Verbiegung durch ein Drehmoment hervorgerufen wird, das die einzelnen Querschnittsebenen des Stabs gegeneinander verkippt, das sogenannte Biegemoment D_b (in der Technik oft als M_b bezeichnet). Dieses Drehmoment ist am Endpunkt (wo die Kraft wirkt) $D_b = 0$ (genau dort biegt sich der Stab nicht) und hat sein Maximum am Einspannpunkt. Das Biegemoment berechnet man mit dem Abstand $(L - x)$ von der wirkenden Kraft als „Kraftarm“:

$$\text{Biegemoment (einseitig eingespannter Stab):} \quad M_b(x) = F \cdot (L - x) \quad (6.13)$$

In unserem Beispiel ist das Biegemoment am Einspannpunkt ($x = 0$) maximal und sinkt linear bis zum Ende des Stabs, wo die senkrechte Kraft wirkt. Zur Berechnung der Zug- und Druckspannungen im Inneren des Stabs verwendet man nun die Beziehung

$$\text{Biegespannung innerhalb des Stabs:} \quad \sigma_b(y) = \frac{M_b}{I_h} \cdot y, \quad (6.14)$$

wobei y der Normalabstand von der neutralen Faser ist. I_h heißt „Flächenträgheitsmoment“ und ist ein Maß für die geometrische Steifigkeit des untersuchten Stabs, also für seinen Widerstand gegen Verbiegung. Verwechseln Sie diese Größe nicht mit dem (Massen-)Trägheitsmoment I (Kap. 5.1.2), das ein Maß für die Rotationsträgheit ist, also für den Widerstand, den ein Körper Drehbewegungen entgegensetzt. Das Flächenträgheitsmoment wird aus der Form der Querschnittsfläche berechnet und ist umso kleiner, je flacher der zu biegende Körper ist. Beispiele:

$$\begin{array}{ll} \text{Kreisprofil:} & I_h = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \quad \text{mit Kreisdurchmesser } d \\ \text{Rechteckprofil:} & I_h = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad \text{mit Breite } b \text{ und Höhe } h \end{array}$$

Das Rechteckprofil beschreibt auch ein flaches Blech; hier setzt man für die Höhe h die Dicke des Blechs ein.

Im elastischen Bereich kann man nun aus der Biegespannung die Durchbiegung des Stabs berechnen. Im Fall des hier besprochenen Beispiels (einseitig eingespannter waagrecht Stab) ergibt sich eine Durchbiegung f , die mit dem Abstand x vom Einspannpunkt stark steigt:

$$\text{Durchbiegung (einseitig eingespannt):} \quad f(x) = \frac{F}{E \cdot I_h} \cdot \left(\frac{L \cdot x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \quad (6.15)$$

$$\text{Durchbiegung am Ende:} \quad f(L) = \frac{F}{E \cdot I_h} \cdot \frac{L^3}{3} \quad (6.16)$$

Die Biegung kommt dadurch zustande, dass der Stab oben gedehnt und unten gestaucht wird. Wenn diese Dehnung und Stauchung über den elastischen Bereich hinaus geht, kommt es zu dauerhafter Verformung: An jener Stelle, wo die Belastung maximal ist, entsteht ein Knick. Im Fall des einseitig eingespannten Stabs entsteht der Knick nahe am Einspannpunkt, wo das Biegemoment maximal ist. Sobald die plastische Verformung beginnt, wird alles bisher Gesagte ungültig: Da Dehnung und Stauchung des verformten Materials weniger Spannung braucht als für Material im elastischen Bereich, führt die ab hier ausgeübte Kraft hauptsächlich zu einem Stärkerwerden des Knicks.

Die Form und Größe der Durchbiegung hängt von der Geometrie ab. Wenn wir als zweites Beispiel einen Balken betrachten, der beidseitig aufliegt und in der Mitte mit der Kraft F belastet wird, nimmt das Biegemoment von den Auflagepunkten zur Mitte hin zu. Bei Überbelastung tritt in diesem Fall ein Knick genau dort auf, wo die belastende Kraft angreift, weil hier das Biegemoment maximal ist. Biegemoment und Durchbiegung in der Mitte eines solchen Balkens folgen den Beziehungen

$$x = \frac{L_S}{2} : \quad \text{Biegemoment:} \quad M_{\max} = \frac{F}{2} \cdot \frac{L_S}{2} \quad (6.17)$$

$$\text{Durchbiegung:} \quad f(L/2) = \frac{F}{E \cdot I_h} \cdot \frac{L^3}{48} \quad (6.18)$$

Beachten Sie, dass sich jeder feste Körper durchbiegt, wenn er sich zwischen Auflagepunkten erstreckt. Dazu reicht bereits das Eigengewicht. Bei Belastung ändert sich die Durchbiegung, was durch Versteifungen reduziert, aber nie ganz verhindert werden kann.

6.2.3 Scherung und Torsion

Bei Scherungen und Torsionen werden parallel zueinander liegende Oberflächen gegeneinander verschoben oder verdreht. Die Länge des Gegenstands sowie sein Querschnitt bleiben dabei unverändert.

(A) Die Scherung von Festkörpern

Bei einer Scherung wird durch Krafteinwirkung eine Seite eines Körpers (mit Fläche A) gegenüber der gegenüber liegenden Seite parallel verschoben; die scherenden Kräfte F_T wirken dabei stets tangential zur Materialoberfläche. Eine scherende Kraft kann ein Material biegen, verschieben oder verdrehen. Ein typisches Beispiel für Scherungsbeanspruchungen sind Kräfte, die auf Schrauben in Regalträgern einwirken. Ebenso können Zugkräfte auf Platten, die durch Nieten zusammengehalten werden, Scherspannungen hervorrufen. Auch die Schneidekanten von Scheren bewirken eine Scherung im zu zerschneidenden Material (daher kommt wohl der Name).

Die Scherspannung ist wiederum definiert als Verhältnis der einwirkenden Kraft, hier der Tangentialkraft F_T , zur verschobenen Fläche A des Materials. Für eine elastische Scherung gilt:

$$\text{Scherspannung:} \quad \tau = \frac{F_T}{A} = G \cdot \frac{\Delta l}{l} \quad \text{mit} \quad [\tau] = \text{N/m}^2, \quad (6.19)$$

Hier meint Δl die Verscherung der Deck- und Grundfläche des Körpers in Richtung der tangentialen Kraft F_T , während l für den Abstand der Deck- von der Grundfläche steht (Δl und l stehen hier also normal aufeinander!). Der Proportionalitätsfaktor G heißt Schubmodul, wieder mit der Einheit $[G] = \text{N/m}^2$. G ist fast immer deutlich kleiner als das Elastizitätsmodul E . Bei isotropen Materialien gilt

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)},$$

sodass G Werte von $E/3$ bis $E/2$ annimmt, je nach der Größe der Poissonzahl ν .

Die Scherung $\Delta l/l$ kann auch durch den Scherwinkel γ ausgedrückt werden mit

$$\text{Scherwinkel:} \quad \gamma \approx \tan \gamma = \frac{\Delta l}{l}$$

Auch hier ist es so, dass Scherung nur bis zu einem bestimmten Maß elastisch erfolgt: Nach Ende der Krafteinwirkung nimmt der Körper wieder seine ursprüngliche Gestalt an. Wenn die wirkende Kraft zu groß wird, gibt es inelastische Prozesse, die zu einer dauerhaften Deformation bis hin zur Zerstörung des Materials führen.

(B) Die Torsion von Festkörpern

Als Torsion wird eine Verdrillung eines Körpers, beispielsweise eines zylindrischen Stabes, unter der Einwirkung eines äußeren Drehmoments bezeichnet, das auf eine Endfläche des Stabes wirkt. Bei dieser Art von Deformation handelt es sich prinzipiell ebenfalls um eine Scherung: Die verschiedenen Ebenen normal zur Symmetrieachse werden gegeneinander verdreht, sodass kleine Flächenelemente dA dieser Ebenen gegen ihre Nachbarebenen verschert (= parallel verschoben) werden.

Im elastischen Bereich ist der Verdrillungswinkel φ proportional zur antreibenden Drehmoment D ist. Für die elastische Torsion eines Rundstabes (oder runden Drahtes) mit Länge l und Radius r gilt:

$$\text{elastische Torsion: } D = -\kappa \cdot \varphi \quad \text{mit dem Richtmoment} \quad \kappa = \frac{\pi}{2} \cdot G \cdot \frac{r^4}{l} \quad (6.20)$$

Das Richtmoment ist direkt proportional zum Schubmodul G . Dieses kann daher durch Messung von κ bestimmt werden (was einfacher zu bewerkstelligen ist als eine wohldefinierte Scherung), idealerweise durch Messung der Periodendauer T_0 einer Torsionsschwingung (siehe Gleichung (5.40)).

6.3 Elementare Grundgesetze der Hydro- und Aerostatik

In der Hydro- und Aerostatik beschreiben wir die Eigenschaften von Flüssigkeiten und Gasen in Ruhe. Bewegungseffekte kommen im Kapitel über Hydro- und Aerodynamik.

6.3.1 Der Druck eines Fluids

(A) Die Größe Druck

In Flüssigkeiten und Gasen können wegen der Verschiebbarkeit der Teilchen statisch keine Zug- oder Schubspannungen auf Festkörperoberflächen übertragen werden. Es treten nur Druckspannungen auf. Man spricht in diesem Fall (Druckspannung eines Fluids auf Festkörper) von „Druck“.

Allgemein bezeichnet man als Druck das Verhältnis einer Kraft F_N zu jener Fläche A , auf die die Kraft senkrecht einwirkt: „Druck ist Kraft pro Fläche“:

$$\begin{aligned} \text{Druck:} \quad p &= \frac{dF_N}{dA} && (\text{lokaler Druck}) && (\text{engl. } pressure) && (6.21) \\ p &= \frac{F_N}{A} && (\text{durchschnittlicher Druck}) \end{aligned}$$

$$\text{Dimension:} \quad \dim(p) = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} = \frac{\text{Energie}}{\text{Volumen}} = \frac{\text{Masse}}{\text{Zeit} \times \text{Länge}^2}$$

$$\text{SI-Einheit:} \quad [W] = 1 \text{ Pa} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{J}}{\text{m}^3} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} \quad (\text{Pascal})$$

Wichtig: Der Druck p ist eine skalare Größe (kein Vektor), hat also keine Richtung, sondern beschreibt vielmehr einen „Zustand“ des Mediums. Der Druck kann aber von Ort und Zeit abhängen, also $p(\vec{r}, t)$. Die im Abschnitt 6.2 verwendeten Spannungen (z. B. die Zugspannung σ in Gleichung (6.7)) haben dieselbe Dimension und werden oft auch in der Einheit Pa angegeben.

Immer wenn in einem Fluid ein bestimmter Druck p vorliegt, wirkt auf umgebende Festkörper (z. B. Wand und Boden eines Gefäßes, aber auch eingetauchte Gegenstände usw.) eine Kraft \vec{F} , die an jeder Stelle normal zur Oberfläche in den Festkörper hinein zeigt. Wenn wir eine bestimmte Fläche A betrachten, hat die Kraft auf diese Fläche den Betrag $F = p \cdot A$. Vektoriell schreibt man $\vec{F} = -p \cdot A \cdot \vec{e}_n$ mit dem Normal-Einheitsvektor \vec{e}_n , der in der Regel vom Festkörper nach außen zeigt (deshalb das Minuszeichen für die Kraft).

(B) Druckeinheiten

Die Druckeinheit Pascal ist eine relativ kleine Größe, sodass in vielen praktischen Anwendungen große Zahlen notwendig werden. Deshalb – und auch aus historischen Gründen – wird eine Reihe weiterer Druckeinheiten verwendet:

- 1 bar = 10^5 Pa (Bar) entspricht einigermaßen dem mittleren Luftdruck auf Meereshöhe. Zum Beispiel wird so der Druck in Überdruckgefäßen angegeben (Gasdruckflaschen im Druckbereich von ca. 1 – 500 bar). Für die Angabe des Luftdrucks zu Zwecken der Wetterbeschreibung ist in vielen Ländern die abgeleitete Einheit mbar (Millibar) in Verwendung (1 mbar = 1 hPa (Hektopascal)).
- 1 atm = 101325 Pa = 1013,250 mbar (Atmosphäre) wird im technischen Bereich synonym zum bar verwendet (bei der dort erreichbaren Messgenauigkeit kann man die beiden Einheiten tatsächlich als gleich ansehen)
- 1 at = 98066,5 Pa (Technische Atmosphäre) ist eine veraltete Einheit, die den Druckzuwachs unter einer Wassersäule von $\Delta h = 10,000$ m beschreibt (siehe Abschnitt 6.3.2). In diesem Zusammenhang wurde auch die Bezeichnung „1 atü“ verwendet (für „1 Atmosphäre Überdruck“), z. B. bei Anlagen zum Aufpumpen von Reifen, wo es auf die Druckdifferenz zwischen Reifen und Außenwelt ankommt.
- 1 mm Wassersäule wird als Einheit nicht mehr verwendet. Diese Größe entspricht 980,665 Pa und war in Manometern (siehe Abschnitt 6.3.4) historisch bei der Bestimmung kleiner Druckdifferenzen im Einsatz, weil sie gut als Höhendifferenz zweier Wassersäulen ablesbar ist.
- 1 mm Hg (Quecksilbersäule) = 1 torr (Torr, benannt nach Evangelista Torricelli, der das erste funktionierende Barometer konstruierte). Die Einheit ist durch die Höhe einer Quecksilbersäule definiert, die dem „Normal-Luftdruck“ auf Meereshöhe entspricht: 760 torr = 101325 Pa. Daraus folgt, dass 1 torr = 133,3 Pa. Die Einheit wird zum Messen des Blutdrucks verwendet: Eine Angabe wie „Blutdruck 120 zu 80“ bedeutet, dass sich der Überdruck im Blutkreislauf gegenüber dem Luftdruck periodisch zwischen $p_{\max} = 120$ torr („Systole“) und $p_{\min} = 80$ torr („Diastole“) bewegt. Die Einheit Torr wird außerdem häufig in der Vakuumtechnik verwendet.
- 1 psi ≈ 6875 Pa $\approx 1/14,5$ bar („pounds per square inch“) ist eine nicht-SI-Einheit, die vor allem in den USA im technischen Bereich weit verbreitet ist.

(C) Druck als Energiedichte

Eingehende Überlegungen zeigen, dass der Druck eines Fluids immer anzeigt, dass und wieviel mechanische Energie in diesem Fluid „gespeichert“ ist. Dies wird in der Vorlesung „Experimentelle Thermodynamik“ im Detail besprochen und hergeleitet.

Hier nur die Quintessenz: Der Druck p eines Fluids ist gleichbedeutend mit der Energiedichte w :

$$\text{Druck (in Pa)} \quad p = w = \frac{E}{V} \quad \text{Energiedichte (in J/m}^3\text{)} \quad (6.22)$$

Die Tatsache, dass in komprimierten Gasen, die unter hohem Druck stehen, Energie gespeichert ist, wird in vielen technischen Anwendungen eingesetzt, z. B. in Pressluft-Werkzeugen, Luftdruckgewehren, aber auch in Kraftwerken, Motoren und vielem anderen. Die Berechnung der Energieumwandlung vom Druck in mechanische Energie involviert die Temperatur und wird in Thermodynamik besprochen.

(D) Isotropie des Drucks

Druck als Eigenschaft eines Fluids hat keine Richtung. Erst wenn der Druck in Beziehung zu einer Fläche gesetzt wird, kommt eine Richtung ins Spiel: Wir erhalten eine Kraft, die immer im rechten Winkel auf die Fläche wirkt. Dies kann als Gedankenexperiment für jede beliebige Fläche innerhalb des Fluids gesehen werden, was für Argumente zum Gleichgewicht verwendet werden kann: Wenn eine (gedachte) Fläche innerhalb einer Flüssigkeit oder eines Gases an ihren beiden Seiten unterschiedlichen Druck verspürt, bedeutet das, dass es eine Netto-Kraft auf die Fläche gibt, die zu Bewegung des Fluids normal auf die betrachtete Fläche führt. Dies ist das Hauptargument für die Bewegung von Flüssigkeiten und Gasen im Kap. 6.4.

Umgekehrt kann man festhalten: Wenn sich eine Flüssigkeit oder ein Gas in Ruhe befindet, muss der Druck an allen Positionen innerhalb des Fluids, die sich in derselben Höhe befinden, gleich groß sein, weil sich sonst ja Strömungen bilden würden, die dem Druckunterschied folgen (von hohem Druck zu tiefem Druck), bis der Druck ausgeglichen und überall gleich ist.

Wichtig ist die Kraftwirkung vor allem dann, wenn ein Fluid an einen Festkörper grenzt, z. B. an Gefäßwänden: Die Druckkraft an jeder Wand wirkt immer normal auf die Wand und vom Fluid auf den Festkörper, egal, in welcher Richtung diese Wand geneigt oder wie sie geformt ist. Vor allem ist diese Kraft betragsmäßig gleich groß, wenn sie auf eine gleich große Fläche A wirkt, egal ob es sich um eine Seitenwand, eine Bodenfläche oder den Bereich um eine Kante handelt: Der überall im Fluid gleich große Druck sorgt auch für gleich große Druckkräfte an allen Wänden.

6.3.2 Schweredruck

In jedem ausgedehnten Fluid, das seitlich abgeschlossen ist, führt das Gewicht der oben befindlichen Fluidanteile dazu, dass der Druck nach unten hin zunimmt. Die Beschreibung ist für Flüssigkeiten und Gase unterschiedlich, weil Flüssigkeiten kaum, Gase jedoch sehr gut komprimiert werden können.

(A) Der Schweredruck eines Gases

Gas ist – im Gegensatz zu Flüssigkeiten und Festkörpern – gut komprimierbar. Dies bedeutet, dass seine Dichte steigt (und das Volumen einer bestimmten Gasmenge kleiner wird), wenn Druck auf das Gas wirkt. Im Schwerfeld der Erde drücken höhere Luftschichten auf tiefer liegende, sodass die Luftdichte und der Luftdruck von oben nach unten kontinuierlich zunehmen.

Bei genauerer Analyse (Vorlesung „Thermodynamik“) stellt man fest, dass die Zusammenhänge wegen der Temperaturabhängigkeiten recht kompliziert sind. Zum Erhalt einer einfachen Beziehung nimmt man an, dass die Temperatur in allen Höhen gleich sei (was definitiv nicht stimmt!). Unter dieser Annahme erhält man für die Abhängigkeit von Druck p und Luftdichte ρ_L von der Höhe h die Beziehungen

$$\text{Barometrische Höhenformeln: } p(h) = p_0 \cdot e^{-h/H_0} \quad \text{mit} \quad H_0 = \frac{p_0}{\rho_{L,0} \cdot g} \quad (6.23)$$

$$\rho_L(h) = \rho_{L,0} \cdot e^{-h/H_0} \quad (6.24)$$

p_0 ist der aktuelle Luftdruck auf Meereshöhe oder auf jener Höhe, von der weg h gemessen wird. $\rho_L(h)$ ist die Luftdichte auf Meereshöhe (oder auf dem Mess-Nullpunkt) und ist stark temperaturabhängig: So verhält sich die Luftdichte beim Normaldruck ($p_0 = 101325 \text{ Pa}$) nach Gleichung (6.4) invers proportional zur Temperatur:

$$\rho_L(T) = \rho_L(T_0) \cdot \frac{T_0}{T} \quad \text{mit} \quad \rho_L(T = 0^\circ\text{C} = 273,15 \text{ K}) = 1,292 \text{ kg/m}^3$$

Der Luftdruck übt enorme Kräfte auf jede Fläche aus, die ihm ausgesetzt ist, nämlich auf Meereshöhe etwa 10 N/cm^2 , was also einer Schwerebelastung mit einer Masse von einem Kilogramm pro Quadratzentimeter entspricht. Wir sind darauf eingerichtet, dieser Druckbelastung standzuhalten.

Man kann die Größe der Luftdruck-Kräfte aber deutlich spüren, wenn man ein Gefäß leer pumpt und Vakuum erzeugt: Dann werden die Druckkräfte nicht kompensiert, sodass z. B. Deckel mit enormer Kraft auf die Öffnungen solcher Vakuumgefäße gedrückt werden. Das erste Mal wurde der Effekt von Otto von Guericke in der Mitte des 17. Jahrhunderts gezeigt: Er evakuierte den Raum zwischen zwei dicht aneinander gepressten Halbkugelschalen („Magdeburger Halbkugeln“) und vermochte diese dann mit zwei Gespannen von je 8 Pferden nicht zu trennen.

Der Luftdruck auf Meereshöhe kann in geeigneten Experimenten das Gewicht einer Wassersäule von gut 10 m Höhe bzw. einer Quecksilbersäule von $h = 760 \text{ mm}$ kompensieren. Dies wird z. B. in Saugpumpen verwendet, um Wasser aus einem Brunnen

hochzupumpen: Die Pumpe erzeugt oben Unterdruck, sodass der Luftdruck, der unten im Brunnen auf die Wasseroberfläche drückt, das Wasser zur Pumpe hoch schiebt. Die Pumpe saugt also gewissermaßen nicht das Wasser hoch, sondern entfernt lediglich die Luft, die sonst durch ihren Druck das Hochschieben verhindert. Diese Pumpmethode funktioniert aber maximal bis zur Höhe von ~ 10 m (in der Praxis und effizient eher nur bis ca. 7 m). Für größere Steighöhen muss eine Tauchpumpe verwendet werden, die sich unten im Brunnen befinden muss und nicht auf den Luftdruck vertraut, sondern das Wasser aktiv nach oben schiebt.

(B) Der Schweredruck einer Flüssigkeit

Flüssigkeiten sind nahezu inkompressibel: Auch wenn sehr viel Druck auf eine Flüssigkeit ausgeübt wird, bleibt ihr Volumen nahezu konstant und somit auch ihre Dichte. Dies bedeutet, dass ein bestimmtes Flüssigkeitsvolumen immer gleich viel Gewicht hat, egal wie tief es sich innerhalb der Flüssigkeit befindet.

Deshalb addiert sich die Gewichtskraft der oben liegenden Flüssigkeitsvolumina auf tiefer liegende Bereiche, und wir erhalten einen linearen Zusammenhang mit der Flüssigkeitstiefe. Wenn wir eine waagrechte Fläche A in der Tiefe h betrachten, befindet sich ein Quader mit dem Volumen $V = A \cdot h$ über dieser Fläche, der die Gewichtskraft $m \cdot g = V \cdot \rho_{Fl} \cdot g$ auf die Fläche ausübt. Dies führt zum Druck

$$\text{Schweredruck von Flüssigkeiten:} \quad p_g = \frac{F_g}{A} = \frac{h \cdot A \cdot \rho_{Fl} \cdot g}{A} = \rho_{Fl} \cdot g \cdot h \quad (6.25)$$

In der Tiefe h unterhalb des Flüssigkeitsspiegels herrscht immer genau dieser Druck p_g , egal, ob es einen geraden Weg vom betrachteten Punkt zur Oberfläche gibt oder nicht: Wegen der Isotropie des Drucks ist der Druck überall in einer bestimmten Tiefe gleich. Es kommt vor auch darauf an, welche Form ein Gefäß hat, in der sich eine Flüssigkeit befindet. Ob ein Gefäß oben weit ausladend ist (sodass „viel Wasser auf einen kleinen Boden drückt“) oder ob sich das Gefäß im Gegenteil oben stark verjüngt: Der Flüssigkeitsdruck in einer bestimmten Tiefe unterhalb des Flüssigkeitsspiegels hängt immer nur von der Tiefe ab, unabhängig von der Gefäßform. Dieses auf den ersten Blick verblüffende Tatsache wird manchmal „hydrostatisches Paradoxon“ genannt.

Der Druck von Wasser mit seiner Dichte von $\rho_W \approx 1000 \text{ kg/m}^3$ nimmt pro $\Delta h = 1$ m Wassertiefe um $\Delta p = \rho_W \cdot g \cdot \Delta h \approx 10^4 \text{ Pa}$ zu. Bereits in dieser Tiefe wirkt also eine Kraft von 1 N/cm^2 auf die Seitenwände eines Gefäßes. Dazu kommt in unserem Lebensumfeld immer noch der Luftdruck, der auf Oberfläche drückt und deshalb überall innerhalb der Flüssigkeit zusätzlich zum Schweredruck der Flüssigkeit vorhanden ist. Der Gesamtdruck verdoppelt sich also in ca. 10 m Wassertiefe von 1 auf 2 bar.

Der menschliche Körper kann hohem Druck standhalten (bis zu einige bar, also einige 10 m Wassertiefe), wenn einige Maßnahmen ergriffen werden. Erstens muss für Druckausgleich im Ohr gesorgt werden, damit das Trommelfell innen und außen ähnlichem Druck ausgesetzt ist (über die eustachsche Röhre zum Rachenraum). Zweitens sind beim Auftauchen längere Pausen zwingend erforderlich, weil sich bei hohem Druck viel

Gas im Blut und im Gewebe gelöst wird (vor allem Stickstoff), das bei Senkung des Drucks nur langsam über die Lunge abgegeben werden kann. Andernfalls bilden sich Gasbläschen im Blut.

6.3.3 Auftrieb

Jeder Festkörper, der sich in einer Flüssigkeit befindet, fühlt sich „leichter“ an, weil ein Teil seiner Gewichtskraft (oder alles) vom Auftrieb der Flüssigkeit kompensiert wird.

Wir stellen uns einen Quader mit waagrecht Grundfläche A und Höhe h vor, der ganz in eine Flüssigkeit eingetaucht ist. Der Auftrieb kommt dadurch zustande, dass die Druckkraft, die auf der Deckfläche nach unten drückt, kleiner ist als jene, die von unten auf die Grundfläche wirkt. Der Unterschied kommt vom unterschiedlich großen Schweredruck und lautet

$$\begin{aligned} F_A &= F_B - F_D = p_2 \cdot A - p_1 \cdot A = \rho_{Fl} \cdot g \cdot h_2 \cdot A - \rho_{Fl} \cdot g \cdot h_1 \cdot A \\ &= \rho_{Fl} \cdot g \cdot h \cdot A = \rho_{Fl} \cdot V_K \cdot g \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck bedeutet, dass die Auftriebskraft genau jener Gewichtskraft entspricht, die auf eine Flüssigkeitsmenge (Dichte ρ_{Fl} !) mit dem Volumen des Körpers V_K wirkt. Anders gesagt: Die Auftriebskraft ist exakt die Gewichtskraft der vom Quader verdrängten Flüssigkeit. Wie sich zeigen lässt, gilt diese Aussage ganz allgemein:

$$\begin{aligned} \text{Auftriebskraft:} \quad F_A &= \rho_{Fl} \cdot V_K \cdot g \\ \text{mit } m_V &= \rho_{Fl} \cdot V_K : \quad \text{Masse der verdrängten Flüssigkeit} \end{aligned} \quad (6.26)$$

Was die Auftriebskraft genau bewirkt, hängt vom Verhältnis der Dichten des betrachteten Körpers $\bar{\rho}_K$ und der Flüssigkeit ρ_{Fl} ab. Dabei ist $\bar{\rho}_K$ die mittlere Dichte des Körpers – wenn dieser z. B. Hohlräume enthält, ist $\bar{\rho}_K$ deutlich kleiner als die reine Materialdichte. Wir unterscheiden folgende Fälle:

- $\bar{\rho}_K > \rho_{Fl}$: Der Körper geht unter und sinkt bis auf den Grund der Flüssigkeit; seine Gewichtskraft ist aber reduziert und beträgt nur

$$\text{Gewicht unter Wasser:} \quad F_{\text{red}} = F_g - F_A = (\bar{\rho}_K - \rho_{Fl}) \cdot V_K \cdot g \quad (6.27)$$

- $\bar{\rho}_K = \rho_{Fl}$: Der Körper verspürt unter Wasser überhaupt keine Gewichtskraft, weil das Eigengewicht vom Auftrieb perfekt kompensiert wird. Fische oder auch U-Boote können ihre mittlere Dichte variieren und so einstellen, dass dieser „Schwebzustand“ erreicht wird.
- $\bar{\rho}_K < \rho_{Fl}$: Der Körper kann nicht ganz in die Flüssigkeit eintauchen, sondern schwimmt an der Oberfläche. Er taucht genau so weit ein (Volumen V_T), dass der Auftrieb der dann verdrängten Flüssigkeit sein komplettes Eigengewicht kompensiert. Der Rest des Körpervolumens befindet sich oberhalb des Flüssigkeitsspiegels.

Der letzte Fall beschreibt unter anderem das Schwimmen von Schiffen, die meist aus Metall bestehen ($\rho > \rho_{Fl}$), viel Fracht aufnehmen können und dennoch schwimmen, solange nur die mittlere Dichte hinreichend klein bleibt. Es ist aber dafür zu sorgen, dass sich die verbleibenden Hohlräume nicht mit Wasser füllen (z. B. durch Lecks), weil die Bedingung sonst nicht mehr erfüllt ist. Bei der Konstruktion eines Schiffs muss außerdem darauf geachtet werden, dass es sich immer im stabilen Gleichgewicht befindet: Besonders bei Leerfahrten ohne Fracht kann der Schwerpunkt hoch über der Wasserlinie liegen, was die Gefahr des Kenterns stark erhöht. Diese Gefahr muss oft durch Aufnehmen von Ballast entschärft werden.

Auch in Gasen macht der Auftrieb jeden Festkörper scheinbar leichter. Der Effekt ist sehr schwach und wird in der Praxis fast immer vernachlässigt, weil sich die Dichten von Festkörpern und Gasen um ca. drei Größenordnungen unterscheiden. Manchmal muss der Auftrieb aber berücksichtigt werden, zum Beispiel wenn präzise absolute Massenbestimmungen durch Abwiegen durchgeführt werden sollen.

6.3.4 Druckmessung

Der Druck ist eine wichtige Kenngröße jedes Fluids. Dementsprechend gibt es sehr viele Möglichkeiten zur Messung. Man unterscheidet dabei grundsätzlich zwischen Messgeräten für den Druck von Gasen und von Flüssigkeiten. Speziell für Gase gibt es je nach Druckbereich verschiedene Bauformen und Messprinzipien:

- Niederdruck- und Vakuum-Messgeräte:
Das sind Apparaturen zur Messung sehr kleiner Druckwerte deutlich unterhalb des normalen Luftdrucks. Sie funktionieren oft indirekt, z. B. mittels Wärmeleitung oder elektrischer Leitfähigkeit im dünnen Medium.
- „Barometer“ zur Bestimmung des aktuellen Luftdrucks:
Diese Geräte haben einen Messbereich um 800 – 1200 hPa und dienen oft der Wetterbeobachtung. Für diesen Zweck wird die Anzeige meist so einjustiert, dass nicht der tatsächliche Luftdruck angezeigt wird, sondern jener auf Meereshöhe, damit wetterrelevante Vergleichbarkeit besteht („Hoch-“ oder „Tiefdruck“).
- Hochdruck-Messgeräte („Barometer“):
Zum Messen hohen Drucks (einige bis einige 100 bar) wird meist die Kraft gemessen, die vom Medium auf eine Fläche ausgeübt wird. Die Kraftmessung (besser gesagt: die Kompensation der Druckkraft durch eine wohldefinierte Gegenkraft) kann durch starke Federn, Gewichte oder elektrische Methoden erfolgen. Ähnlich misst man auch den Druck von Flüssigkeiten.

Auch wenn der Druck im Inneren eines abgeschlossenen Volumens gemessen werden soll, (Vakuumkammer, Druckgasflasche etc.), ist doch immer zu bedenken, dass außen herum in der Regel der „normale“ Luftdruck wirkt. Es gibt deshalb zwei Typen von Druckmessungen:

- Differenzmessungen:

Der gesuchte Druck wird als Differenz zum Außendruck gemessen. Dies passiert z. B. automatisch, wenn die Kraft gemessen wird, die auf ein (bewegliches) Stück der Außenwand des Druckgefäßes wirkt, weil auf dieses Wandstück von außen der Luftdruck wirkt, sodass nur mehr der Rest kompensiert werden muss.

Das direkte Ergebnis einer solchen Messung ist also ein Wert für den Über- oder Unterdruck innerhalb eines Mediums im Vergleich zur Umgebung. Für Absolutwerte muss in diesem Fall der im Moment der Messung vorliegende Außenluftdruck bekannt sein.

- Absolutmessungen:

Wenn der absolute Druck in einem Medium direkt gemessen werden soll, muss die Kraft, die der Druck ausübt, ohne Einfluss des Luftdrucks bestimmt werden. Idealerweise muss auf der Gegenseite einer Platte, auf der der unbekannte Druck eine Kraft ausübt, Vakuum herrschen, sodass die Kompensation der vollen Druckkraft bemessen wird.

Eine historische Variante zur Druckmessung ist das Flüssigkeitsmanometer: Wenn sich in einem U-Rohr eine Flüssigkeit befindet und an den beiden Enden unterschiedliche Drücke p_1 und p_2 herrschen (hier angenommen: $p_1 < p_2$), dann steht die Flüssigkeit in den beiden Schenkeln des U-Rohrs unterschiedlich hoch. Der Höhenunterschied Δh der beiden Flüssigkeitsspiegel ist genau so groß, dass die höhere Flüssigkeit den höheren Druck auf der anderen Seite kompensiert. Man erhält also

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \rho_{Fl} \cdot g \cdot \Delta h \quad (6.28)$$

Ablesen des Höhenunterschieds führt also direkt zur Bestimmung der Druckdifferenz. Entscheidend ist dabei die Dichte ρ_{Fl} der Flüssigkeit: So führt eine Druckdifferenz um $\Delta p = 0,010$ bar (10 hPa, also ca. 1,0 % des Luftdrucks) mit Wasser ($\rho_{Fl} \approx 1000 \text{ kg/m}^3$) zu einer Höhendifferenz von $\Delta h = 10$ cm, während sich mit Quecksilber (flüssiges Metall mit $\rho_{Fl} \approx 13500 \text{ kg/m}^3$) nur $\Delta h = 7,5$ mm einstellt.

Wenn ein Schenkel am Ende verschlossen ist und bis zum Ende mit Flüssigkeit gefüllt ist, und wenn dieser Schenkel immer höher und höher gezogen wird (z. B. mit einem biegsamen U-Rohr oder einem Schlauch), ohne dass unten Luft eindringen kann, dann kann die Höhendifferenz zum Flüssigkeitsspiegel im anderen, offenen Schenkel nur steigen, solange die überstehende Flüssigkeitssäule vom aktuellen Luftdruck gehalten werden kann. Beim Standardluftdruck $p_0 = 1013,25$ hPa ist das mit Wasser bei $\Delta h \approx 10,3$ m erreicht, mit Quecksilber bei $\Delta h \approx 760$ mm.

Wenn man den geschlossenen Schenkel noch weiter verlängert, bleibt die genannte Höhendifferenz bestehen: Im geschlossenen Schenkel bildet sich ein Flüssigkeitsspiegel, oberhalb dessen Vakuum besteht (genauer: Ein dünnes Gas aus dem Material der Flüssigkeit, dessen Druck dem Dampfdruck der Flüssigkeit entspricht. Bei $T = 20^\circ$ ist das für Wasser $p_D = 23,4$ hPa, für Quecksilber $p_D = 0,24$ Pa). Das Vakuum übt keine Kraft auf „seinen“ Flüssigkeitsspiegel aus, während der Luftdruck auf den zweiten Spiegel wirkt, was durch das Gewicht der überstehenden Flüssigkeitssäule kompensiert wird. Messung dieser Höhendifferenz gibt also einen Absolutwert für den äußeren Luftdruck.

6.3.5 Oberflächeneffekte

Flüssigkeiten zeichnen sich dadurch aus, dass sie frei beweglich und verformbar sind. Gleichzeitig haben sie aber im Kontakt mit Luft und anderen Gasen eine wohldefinierte Oberfläche, die die Flüssigkeit gleichsam wie eine „Haut“ vom umgebenden Gas abtrennt. In diesem Kapitel besprechen wir die Mechanik dieser Grenzflächen.

(A) Die Form einer Flüssigkeitsoberfläche

Jede Flüssigkeitsoberfläche stellt sich im Gleichgewicht immer so ein, dass sie normal auf die aktive Gesamtkraft steht, die an dieser Stelle auf die Oberfläche wirkt. Aktive Kräfte, die normal auf die Oberfläche wirken, werden aus der Flüssigkeit heraus dadurch kompensiert, dass die Atome und Moleküle nicht dichter komprimiert werden können. Aktive Kraftkomponenten, die parallel zur Oberfläche wirken, führen aber zu einer Strömung und zu einer Verformung der Oberfläche, die so lange anhält, bis diese Kraftkomponente verschwindet. Daraus entstehen verschiedene Formen, in denen Flüssigkeiten vorliegen, z. B. :

- Ebene Oberfläche ruhender Flüssigkeiten: Jede Aufwölbung führt zu einer tangentialen Komponente der Schwerkraft, die die Aufwölbung zunichte macht. In der Regel führt dies zur Entstehung einer Welle.
- Parabelform der Oberfläche in einem rotierenden Gefäß: Die gefühlte Zentrifugalkraft wird immer größer, je weiter entfernt man von der Drehachse ist ($F_z = \omega^2 \cdot r$). Dies erfordert eine linear zunehmende Steigung der Oberfläche, damit sie normal auf die Gesamtkraft steht (Schwerkraft + Zentrifugalkraft).

Zusätzlich wirken mikroskopische Kräfte, z. B. die Oberflächenspannung (siehe unten), die z. B. dafür sorgen, dass sich Tropfen bilden oder dass sich Flüssigkeiten in Gefäßen am Rand hochziehen oder entlang des Randes absinken. Immer gilt auch hier, dass die Oberfläche einer ruhenden Flüssigkeit an jeder Stelle normal auf die lokal wirkende Gesamtkraft steht (Schwerkraft + weitere Kräfte), sodass man immer sofort auf die Orientierung dieser Kraft schließen kann.

(B) Die Oberflächenspannung von Flüssigkeiten

Unter dem Begriff Oberflächenspannung versteht man das Bestreben einer Flüssigkeit, ihre Oberfläche möglichst klein zu halten. Ursache dafür sind die Kohäsionskräfte: Während auf ein atomares Teilchen im Inneren einer Flüssigkeit von allen Seiten Kräfte wirken, die sich gegenseitig aufheben, verspürt ein Teilchen an der Oberfläche eine einwärts gerichtet resultierende Kraft. Dieser mikroskopische Sachverhalt führt im Ganzen zu Kräften, die tangential in der Oberfläche wirken und diese zu verkleinern versuchen. Eine Flüssigkeitsoberfläche kann man sich in diesem Sinn wie eine elastisch gespannte Gummimembran vorstellen, z. B. in einem Trampolin: Innerhalb der Membran wirken Kräfte, die parallel zur Oberfläche gerichtet sind mit dem Bestreben, die Fläche

zu verkleinern. Gleichzeitig verhindern diese Kräfte aber auch Ausbuchtungen oder Eindrückungen der Fläche, weil ja auch diese die Oberfläche vergrößern würden.

Die physikalische Größe Oberflächenspannung ist folgendermaßen definiert:

$$\textbf{Oberflächenspannung:} \quad \sigma_O = \frac{F_O}{L_R} \quad (\text{engl. } surface\ tension) \quad (6.29)$$

$$\text{Dimension:} \quad \dim(\sigma_O) = \frac{\text{Kraft}}{\text{Länge}}$$

$$\text{SI-Einheit:} \quad [\sigma_O] = \frac{\text{N}}{\text{m}} = \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$$

Dabei ist F_O die entlang des Randes der Flüssigkeit angreifende statische Kraft (tangential zur Oberfläche und normal auf den Rand in die Flüssigkeit hinein), und L_R ist die Gesamtlänge des Randes.

Die Oberflächenspannung ist eine Stoffkonstante. Beispiele bei $T = 20^\circ\text{C}$: Ethanol: $\sigma_O = 2,3 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}$, Wasser: $\sigma_O = 7,3 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}$, Quecksilber: $\sigma_O = 4,7 \cdot 10^{-1} \text{ N/m}$. Die Oberflächenspannung ist stark temperaturabhängig: Fast immer nimmt sie mit steigender Temperatur deutlich ab. σ_O kann sich durch Verunreinigungen stark verändern. So sinkt die Oberflächenspannung von Wasser dramatisch, wenn Tenside zugegeben werden (Seife, Waschmittel etc.).

Wenn ein Teil des Randes einer Flüssigkeitsoberfläche verschoben werden kann (Länge L_V), dann muss auf diesen verschiebbaren Rand die Kraft $F_V = \sigma_O \cdot L_V$ wirken, damit er an seiner Position bleibt. Wenn dieser verschiebbare Rand um die Strecke d nach außen gezogen wird, sodass sich die Oberfläche vergrößert, dann wird dabei die Arbeit $W = F_V \cdot d$ geleistet, die am Ende als „Oberflächenenergie“ (genauer: -energiedichte) in der neu geschaffenen Oberfläche $A = d \cdot L_V$ steckt:

$$\textbf{Oberflächenenergie (-dichte):} \quad w_O = \frac{W}{A} = \frac{F_V \cdot d}{L_V \cdot d} = \frac{\sigma_O \cdot L_V \cdot d}{L_V \cdot d} \quad (6.30)$$

$$\text{Dimension:} \quad \dim(w_O) = \frac{\text{Energie}}{\text{Fläche}}$$

$$\text{SI-Einheit:} \quad [w_O] = \frac{\text{J}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$$

Die Oberflächenenergie gibt jene Energie an, die man pro Fläche aufwenden muss, um Moleküle gegen die Kohäsionskräfte aus dem Volumen an die Oberfläche der Flüssigkeit zu bringen. Beachten Sie, dass w_O und σ_O dieselbe Dimension und sogar denselben Zahlenwert haben.

Mehrere Methoden zur Bestimmung der Oberflächenspannung von Flüssigkeiten beruhen darauf, dass die Kraft F bestimmt wird, mit der die Tendenz zur Verkleinerung der Oberfläche gerade kompensiert werden kann. Ein Beispiel ist die Bügelmethode: Ein dünner waagrecht Draht (Länge L) ist zwischen zwei senkrechten Drähten gespannt und wird langsam aus der Flüssigkeit gezogen. Dadurch bildet sich eine dünne

Flüssigkeitslamelle mit zwei Oberflächen (vorne und hinten). Wenn der Draht um die Strecke Δs hochgezogen wird, muss die Energie $\Delta E_O = w_O \cdot \Delta A$ aufgewandt werden, was durch die Arbeit $\Delta W = F \cdot \Delta s$ beim Hochziehen gemacht wird:

$$\Delta E_O = w_O \cdot \Delta A = \sigma_O \cdot 2 \cdot L \cdot \Delta s = F \cdot \Delta s \quad \rightarrow \quad F = 2 L \cdot \sigma_O \quad (6.31)$$

Die hier berechnete Kraft F ist genau jene Kraft, die im Gleichgewicht notwendig ist. mit einer kleineren Kraft bildet sich lediglich eine Aufwölbung über dem Draht. Wenn die Kraft größer ist, reißt die Flüssigkeitslamelle sofort ab. Wenn genau die oben berechnete Kraft anliegt, kann die Oberfläche im Prinzip nach Belieben vergrößert und verkleinert werden. In der Praxis wird die Kraft vorsichtig vergrößert und jener konstante Wert abgelesen, bei dem sich die Oberfläche vergrößert, bevor sie abreißt.

Eine Folgeerscheinung der Oberflächenspannung ist, dass in Flüssigkeitstropfen wegen der Tendenz, die Flüssigkeitsoberfläche klein zu halten, innen ein Überdruck entsteht. Diesen Überdruck kann man durch folgende Überlegung berechnen: Die Oberfläche eines kugelförmigen Tropfens mit Radius r ist $A = 4\pi r^2$. Die Arbeit zum Vergrößern der Oberfläche um dA ist

$$\begin{aligned} dW &= F \cdot ds = p \cdot A \cdot dr = p \cdot 4\pi r^2 \cdot dr = w_O \cdot dA \\ \text{mit } dA &= 4(r + dr)^2 \pi - 4r^2 \pi = 4\pi \cdot (r^2 + 2rdr + (dr)^2 - r^2) \approx 8\pi \cdot r dr \\ w_O &= \sigma_O = \frac{dW}{dA} = \frac{p \cdot 4\pi r^2 \cdot dr}{8\pi \cdot r dr} \quad \rightarrow \quad p = \frac{2 \cdot \sigma_O}{r} \end{aligned}$$

Ähnlich ist es in Gasblasen innerhalb einer Flüssigkeit: Außer dem hydrostatischen Druck wirkt auch noch der Druck der Oberflächenspannung. In Seifenblasen ist der Überdruck sogar doppelt so groß, weil die umschließende Flüssigkeitslamelle aus zwei Oberflächen besteht (außen und innen), die beide die Tendenz haben, sich selbst und somit das Innenvolumen zu verkleinern.

(C) Benetzbarkeit und Randwinkel

Die Oberflächenspannung ist nur ein spezieller Fall der sogenannten Grenzflächenspannungen. Grundsätzlich treten an jeder Mediengrenze derartige Kräfte auf. Wenn Flüssigkeiten an andere flüssige Medien oder Festkörper grenzen, ist die entstehende geometrische Form der flüssigen Grenzflächen durch das Zusammenspiel der verschiedenen Grenzflächenspannungen bedingt.

So sammeln sich bestimmte Flüssigkeiten, deren Dichte kleiner ist als die Dichte von Wasser, auf der Wasseroberfläche in linsenförmigen Gebilden, z. B. Fettaggen auf Brühe. An jeder Stelle, wo alle drei Oberflächen aufeinander treffen (1: Wasser–Luft, 2: Fett–Luft, 3: Wasser–Fett), also am Umfang des Fettagges, müssen sich die drei Grenzflächenspannungen im Gleichgewicht vektoriell genau kompensieren: $\vec{\sigma}_2 + \vec{\sigma}_3 = -\vec{\sigma}_1$. Dadurch stellen sich bestimmte Winkel ein, mit denen der Tropfen von seinem Rand weg nach oben und unten hin dicker wird. Das Gleichgewicht ist aber nicht möglich, wenn $|\vec{\sigma}_2| + |\vec{\sigma}_3| < |\vec{\sigma}_1|$: Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn sich ein Öltropfen auf einer

Wasseroberfläche befindet – die Oberflächenspannung des Wassers zieht den Öltropfen dann unaufhaltsam auseinander, sodass das Öl als sehr dünne Schicht auf dem Wasser schwimmt, im Grenzfall als monomolekularer Film.

Bei den Grenzflächen zwischen einer Flüssigkeit, einer festen Wand und Luft muss im statischen Fall ebenfalls ein Gleichgewicht bestehen, also zum Beispiel immer dann, wenn sich eine Flüssigkeit in einem oben offenen Gefäß befindet. Wir unterscheiden grundsätzlich zwei Fälle: Eine „benetzende Flüssigkeit“ zieht sich am festen Rand nach oben, sodass sich ein konkaver Rand bildet, während die Oberfläche einer „nichtbenetzenden Flüssigkeit“ zum Rand hin absinkt. Beachten Sie, dass die Attribute benetzend und nichtbenetzend streng genommen immer für eine Kombination aus Flüssigkeit und Festkörper vergeben werden müssen – so ist Wasser auf Glas benetzend, auf Teflon hingegen nichtbenetzend.

Die „Stärke“ der Benetzbarkeit wird im konkreten Fall mit Hilfe des **Randwinkels** α bestimmt, das ist der Winkel innerhalb der Flüssigkeit, der am Berührungspunkt der Oberfläche mit dem Festkörper gemessen wird. Das Gleichgewicht entlang der Festkörperoberfläche erfordert dann, dass

$$|\vec{\sigma}_1| \cdot \cos \alpha + |\vec{\sigma}_2| = |\vec{\sigma}_3| , \quad (6.32)$$

mit 1: Flüssigkeit–Luft, 2: Flüssigkeit–Festkörper, 3: Festkörper–Luft. Gut benetzende Flüssigkeiten haben Randwinkel $\alpha < 90^\circ$. Dies führt dazu, dass die Flüssigkeit in einem Gefäß am Rand hochgezogen wird. Wenn die sogenannte Haftspannung σ_3 (die Tendenz die Oberfläche Festkörper–Luft klein zu machen) größer ist als die Summe der beiden anderen Spannungen, ist die Flüssigkeit völlig benetzend und zieht sich über die gesamte Festkörperoberfläche.

Wenn der Randwinkel $\alpha > 90^\circ$ ist, spricht man von einer schlecht benetzenden Flüssigkeit. In einem Gefäß bildet sich dann zum Rand hin eine Absenkung der Flüssigkeit, und bei Tropfen ist die Kontaktfläche kleiner als ihre maximale Fläche.

(D) Kapillarität

Der Begriff Kapillarität beschreibt das Ansteigen (oder Absinken) des Flüssigkeitsspiegels in einem dünnen Röhrchen („Kapillare“) wegen der Oberflächenspannung der Flüssigkeit gegen Luft und guter (oder schlechter) Benetzbarkeit der Rohrrinnenfläche. Insgesamt ausschlaggebend für die Stärke und Richtung des Effekts sind letztlich die drei Grenzflächenspannungen und der Durchmesser des Röhrchens.

Die Kapillaraszension (Ansteigen des Wasserspiegels) ist zum Beispiel immer dann zu beobachten, wenn Kapillarröhrchen aus Glas (Innenradius r_i) von oben in Wasser eingetaucht werden. Wasser benetzt sauberes Glas fast zu 100 %, sodass wir davon ausgehen können, dass die gesamte Glasoberfläche von einem dünnen Wasserfilm überzogen ist, sobald das Röhrchen das Wasser berührt. Die Oberflächenspannung versucht, die Innenoberfläche klein zu machen und zieht das Wasser deshalb so lange nach oben,

bis die Gewichtskraft des „zu hoch“ befindlichen Wassers die Kraft durch die Oberflächenspannung kompensiert:

$$\begin{aligned}
 F_O &= \sigma_O \cdot L_R = \sigma_O \cdot 2\pi \cdot r_i & \text{und} & \quad F_g = m \cdot g = r_i^2 \pi \cdot \Delta h \cdot \rho_W \cdot g \\
 F_O &= F_g & \rightarrow & \quad 2\sigma_O = r_i \cdot \Delta h \cdot \rho_W \cdot g \\
 \Delta h &= \frac{2\sigma_O}{r_i \cdot \rho_W \cdot g} & (\text{Steighöhe in der Kapillare}) & \quad (6.33)
 \end{aligned}$$

Die Kapillaraszension spielt in Natur und Technik für verschiedenste Arten des Flüssigkeitstransports eine große Rolle, z. B. bei der Wasserversorgung von Pflanzen, im Blutkreislauf, beim Kerzendocht oder für die Schmierung komplizierter mechanischer Vorrichtungen.

Die Steighöhe einer Flüssigkeit in einer Kapillare kann dazu verwendet werden, die Oberflächenspannung σ_O der Flüssigkeit zu bestimmen. Bedingung dafür ist, dass Flüssigkeit für das Material der Kapillare völlig benetzend ist (Randwinkel $\alpha \approx 0$).

Bei der Kapillardepression (Absinken des Flüssigkeitsspiegels) ist der einzige Unterschied, dass das Röhrchen völlig nicht-benetzend ist: Auch hier bildet sich also innerhalb des Röhrchens eine sehr große Flüssigkeitsoberfläche aus, diesmal nach unten entlang der Wand. Diese große Oberfläche wird dadurch verkleinert, dass die Oberflächenspannung die Flüssigkeitssäule nach unten zieht, gegen die Druck-Ausgleichskraft (also die inverse Schwerkraft), die den Flüssigkeitsspiegel überall in derselben Höhe zu halten versucht.

Die Kapillardepression kann in der Praxis vor allem dadurch erreicht werden, dass feste Oberflächen mit unbenetzenden Stoffen imprägniert werden, sodass Wasser darauf Tropfen bildet, aber keinesfalls ein dünner Wasserfilm entstehen kann, der das Wasser dann in feine Poren ziehen würde. So können feinporige Textilien oder Leder im Inneren trocken bleiben. Ähnlich ist es beim Gefieder von Wasservögeln in das kein Wasser in feine Spalte eindringen soll, ein gewisser Gasaustausch aber möglich sein muss.

6.4 Hydro- und Aerodynamik

6.4.1 Allgemeines zur Bewegung von Fluiden

Die Bewegung von Fluiden ist im Allgemeinen deutlich komplizierter als jene von Festkörpern, weil sich die Stoffe wegen der frei beweglichen Einzelteilchen in ihrer Form verändern, ausweichen und zurückströmen können. Trotzdem gibt es Gesetzmäßigkeiten, vor allem dann, wenn das Fluid in gewisser Weise eingeschlossen ist, z.B. in einem Rohr. Wir beginnen hier mit der Definition der Größen zur Beschreibung von Fluid-Dynamik.