3 Dynamik: Kraft und Bewegung

Warum bewegen sich Massen? Warum bremsen sie ab, warum bewegen sie sich um die Kurve? Und wie lässt sich das alles steuern und kontrollieren? Nach der bloßen Beschreibung von Bewegungen im vorigen Kapitel stellen wir hier nun die eigentlich physikalischen Fragen.

3.1 Die Newtonschen Axiome

Der englische Naturwissenschaftler, Mathematiker und Philosoph Isaac Newton formulierte Ende des 17. Jahrhunderts drei Grundsätze („Axiome"), aus denen heraus die Bewegung von Massen umfassend beschrieben werden kann. Diese drei Grundsätze bilden somit das Fundament der klassischen Mechanik. Sie eignen sich uneingeschränkt zur Beschreibung aller Bewegungen in unserem Umfeld. Sie gelten aber nicht in gleicher Weise bei extrem hohen Geschwindigkeiten nahe an der Lichtgeschwindigkeit (Beschreibung mittels spezieller Relativitätstheorie), im Umfeld extrem starker Massen (Beschreibung mittels allgemeiner Relativitätstheorie) und für extrem kleine Objekte (Beschreibung mittels Quantenmechanik).

Wir schreiben die Newtonschen Axiome hier an, ohne sie formal zu beweisen. Dies wird in der Vorlesung „Theoretische Mechanik" mit Methoden der Theoretischen Physik gemacht.

3.1.1 1. Axiom: Trägheitsprinzip

Das erste Newtonsche Axiom kann auf verschiedene Arten formuliert werden. Hier eine gängige Version:

> **1. Axiom: „Jeder Körper verbleibt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung, solange keine Nettokraft auf ihn wirkt"**

Mit der physikalischen Größe „Kraft" beschäftigen wir uns im folgenden Abschnitt und dann noch viel genauer im Teilkapitel 3.2. Wichtig ist vorerst, dass mit „Nettokraft" hier immer die Gesamtkraft gemeint ist, die auf den Körper wirkt, d. h. die Summe aller vorhandenen Kräfte.

Das Axiom sagt also aus, dass sich ein Körper, der in Ruhe ist, nur in Bewegung setzen kann, wenn auf ihn eine Kraft wirkt. Außerdem verbleibt ein Körper, der sich bewegt, immer im gleichen Bewegungszustand (gleiche Richtung und gleiche Geschwindigkeit: geradlinige Bewegung!), solange keine Kraft auf ihn wirkt.

Man nennt diese Eigenschaft eines Körpers (nämlich das Prinzip, ohne Kraft im gleichen Bewegungszustand zu verbleiben) die „Trägheit" des Körpers. Genauer gesagt ist die Trägheit eine Eigenschaft der Masse des Körpers (siehe folgender Abschnitt).

Das Trägheitsprinzip kann an vielen Stellen beobachtet werden, so z. B. in einem rasch bremsenden Bus, in dem Personen, die sich nicht festhalten, „im gleichen Bewegungszustand verbleiben“ und aus Sicht des bremsenden Busses durch den Gang fliegen, weil die Bremskraft nicht auf sie wirken kann.

Umgekehrt kann man immer, wenn man beobachtet, dass ein Körper sich mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig bewegt, sofort schlussfolgern, dass die Gesamtkraft, die auf diesen Körper wirkt, Null ist. Dies entspricht nicht immer unserer Intuition: Aus der Praxis wissen wir, dass Kraftaufwand notwendig ist, um sich mit konstanter Geschwindigkeit zu bewegen, z. B. mit dem Fahrrad. Die spürbar aufgewandte Kraft ist aber bei konstanter Geschwindigkeit genau gleich groß wie die entgegengerichteten Reibungskräfte, sodass die Gesamtkraft (Summe aller wirkenden Kräfte) tatsächlich genau Null ist.

3.1.2 2. Axiom: Aktionsprinzip

Das zweite Axiom beschäftigt sich damit, was geschieht, wenn die Gesamtkraft, die auf einen Körper einwirkt, nicht Null ist. In diesem Fall verändert der Körper seinen Bewegungszustand, und zwar nach einer einfachen Regel:

2. Axiom: „Die Beschleunigung eines Körpers ist direkt proportional zu der auf ihn wirkenden Nettokraft und invers proportional zu seiner Masse. Die Richtung der Beschleunigung ist gleich der Richtung der Nettokraft.“

Mathematisch formuliert erhält man die Beziehung

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \qquad \text{oder} \qquad \vec{F} = m \cdot \vec{a} \tag{3.1}$$

Diese Gleichung wird „Bewegungsgleichung“ genannt und ist die Grundlage aller Berechnungen zur Bewegung von Körpern. Man kann damit z. B. die Bahnkurve und die momentane Geschwindigkeit eines Körpers berechnen, wenn man die wirkenden Kräfte genau kennt. Damit werden wir uns im Verlauf dieser Vorlesung noch intensiv beschäftigen.

Die **Masse** in der Gleichung (3.1) ist die „träge Masse“ des beschleunigten Körpers, also ein direktes Maß für seine Trägheit. Je größer diese (träge) Masse ist, desto mehr Aufwand kostet es, ihren Bewegungszustand zu verändern.

Die physikalische Größe **Kraft** wird im Abschnitt 3.2 genau besprochen. Eine Kraft $\vec{F}$ im physikalischen Sinn (genauer gesagt: eine „dynamische Kraft“) hat genau eine Wirkung: Wenn sie auf einen Körper wirkt, dann beschleunigt sie diesen Körper genau in jene Richtung, in die die Kraft zeigt ($\vec{a} \parallel \vec{F}$).

Wenn mehrere Kräfte $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ usw. auf einen Körper mit der Masse m wirken, gilt das **Superpositionsprinzip**: Alle Kräfte wirken gemeinsam. Wir berechnen in diesem

Fall die gesamte auf den Körper wirkende Kraft $\vec{F}_{\text{ges}}$, indem wir alle einzelnen Kräfte vektoriell addieren, und berechnen dann die Wirkung der resultierenden Kraft:

$$\vec{F}_{\text{ges}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots \qquad \rightarrow \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{ges}}}{m}$$

Wir können aus dem Aktionsprinzip folgende Schlussfolgerungen ziehen:

- Immer, wenn eine resultierende Kraft auf einen Körper wirkt, wird der Körper in jene Richtung beschleunigt, in die die Kraft wirkt.
- Und umgekehrt: Immer, wenn man bemerkt, dass ein Körper beschleunigt wird, muss eine Kraft auf ihn wirken.

Unter Beschleunigung meinen wir hier wieder, wie in Abschnitt 2.1.3 definiert, jede Art von Geschwindigkeitsänderung, also auch Abbremsung oder eine reine Kurvenbahn.

Daraus ergibt sich (in Übereinstimmung mit dem 1. Axiom) die Feststellung: Auf jeden Körper, der in Ruhe ist (oder sich konstant bewegt), wirkt in Summe keine Kraft. Da in unserem Umfeld auf jeden Körper die Schwerkraft wirkt, muss auf jeden ruhenden Körper eine genau gleich große, nach oben wirkende Gegenkraft wirken („statische Kräfte“, siehe Abschnitt 3.2).

3.1.3 3. Axiom: Reaktionsprinzip

Das dritte Axiom beschreibt die aus unserem Umfeld bekannte Tatsache, dass man sich irgendwo abstoßen muss, um eine eine Kraft auf einen Körper ausüben zu können. Wer z. B. einen schweren rollenden Wagen abbremsen möchte, muss sich abstützen, um nicht überrollt zu werden. Es zeigt sich eine einfache Gesetzmäßigkeit:

3. Axiom: „Jede Kraft $\vec{F}$, die auf einen Körper wirkt, bewirkt an irgendeinem anderen Körper eine Gegenkraft $-\vec{F}$, die genau gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet ist.“

Dieses Prinzip wirkt sich manchmal störend aus (z. B. wenn man von einem Boot ans Ufer springt und dabei das Boot wegschiebt), wird aber auch praktisch ausgenützt (z. B. beim Rückstoßprinzip von Raketen: Schnell nach hinten ausgestoßene Materie beschleunigt den Flugkörper nach vorne).

Die Rückstoßkraft $\vec{F}_2$, die auf den zweiten Körper wirkt, führt dazu, dass auch dieser – abhängig von seiner Masse m_2 – beschleunigt wird:

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1 \qquad \rightarrow \quad m_2 \cdot \vec{a}_2 = -m_1 \cdot \vec{a}_1 \qquad \text{oder} \quad \vec{a}_2 = -\frac{m_1}{m_2} \cdot \vec{a}_1 \tag{3.2}$$

Wenn die beschleunigte Masse m_1 und die „Rückstoßmasse“ m_2 ähnliche Größe haben, werden beide Massen etwa gleich beschleunigt. Wenn eine bestimmte Kraft $\vec{F}$ zur Verfügung steht, teilt sich diese auf die eigentliche Kraft und die Rückstoßkraft auf, sodass die Beschleunigung $\vec{a}_1$ kleiner ist als $\vec{F}/m_1$. Dies wird mit der Betrachtung von Energie (in Kap. 4) und Impuls (in Kap. 4.4) bei solchen Vorgängen noch klarer und kann dann auch genau berechnet werden. Dass die Beschleunigung $\vec{a}_1$ kleiner ist als geplant, wird schmerzlich sichtbar, wenn man von einem kleinen Boot ans Ufer springen möchte.

Die Beschleunigung $\vec{a}_2$ ist hingegen vernachlässigbar, wenn man sich an einer sehr großen Masse $m_2 \gg m_1$ „abstößt". Sehr oft ist der zweite Körper die ganze Erde (bei der Beschleunigung von Fahrzeugen, beim Werfen von Bällen, Speeren etc., usw.), deren immense Masse von $M_E \approx 5,97 \cdot 10^{24}$ kg dazu führt, dass keinerlei Beschleunigung $\vec{a}_2$ bemerkbar ist.

3.2 Kräfte

3.2.1 Definition

Eine „Kraft" nennen wir, wie auf S. 32 eingeführt, jedes physikalische Phänomen, das in der Lage ist, eine Masse zu beschleunigen oder eine solche Beschleunigung zu verhindern. Die Definition folgt dem Aktionsprinzip in Gleichung (3.1):

$$\textbf{Kraft:} \qquad \vec{F} \;=\; m \cdot \vec{a} \tag{3.3}$$

$$\text{Dimension:} \qquad \dim\big(F\big) \;=\; \frac{\text{Masse} \times \text{Länge}}{\text{Zeit}^2}$$

$$\text{SI-Einheit:} \qquad [F] \;=\; 1\,\text{N} \;=\; 1\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2} \qquad \big(\text{Newton}\big)$$

Beachten Sie, dass das Wort „Kraft" im Sprachgebrauch breiter verwendet wird, z. B. in Begriffen wie Schaffens- oder Geisteskraft. In der Physik kann eine Kraft tatsächlich nur eines, nämlich den Bewegungszustand einer Masse verändern, also die Masse beschleunigen (oder einer solchen Beschleunigung entgegenwirken).

In der Natur gibt es eine sehr große Anzahl verschiedener Kräfte, die sich in vielen Punkten voneinander unterscheiden:

- Wovon wird eine bestimmte Kraft ausgelöst?
- Worauf wirkt eine bestimmte Kraft?
- Wie stark ist die Kraft in verschiedenen Entfernungen?

Alle Kräften haben aber gemeinsam, dass sie ausschließlich eine Wirkung haben, nämlich die Beschleunigung von Masse(n).

Wir besprechen im Folgenden einige spezielle Kräfte, auf die wir im Verlauf dieser Vorlesung noch zurückkommen werden. Weitere Kräfte werden in späteren Kapiteln und in weiterführenden Vorlesungen eingeführt.

Die beschleunigten Massen betrachten wir in diesem Kapitel vorerst immer als „Punktmassen“, also Massen ohne jegliche Ausdehnung (was nur für manche Elementarteilchen zutrifft). Bei realen Körpern ist zu bedenken, dass angreifende Kräfte auch zu Rotationsbewegung führen können (siehe Kap. 5), oder zu Deformation und internen Verformungen (Kap. 6). Hier lassen wir diese zusätzlichen Effekte vorerst weg und konzentrieren uns ausschließlich auf die Translationsbewegung des ganzen Körpers. Dazu denken wir uns seine ganze Masse in einen Punkt vereinigt und berechnen die Kraftwirkung und die Bewegung repräsentativ immer nur für diesen einen Punkt. Mathematisch ist es egal, welchen Punkt des Körpers man dafür verwendet. Physikalisch ist es aber sinnvoll, solche Berechnungen mit dem Massenmittelpunkt durchzuführen, der sich dadurch auszeichnet, dass jede Kraft, deren „Angriffslinie“ genau durch ihn läuft, den Körper nur in Translation versetzt und nicht in Rotation (siehe Kap. 5.3.4).

3.2.2 Die Gravitationskraft

(A) Definition

Die Gravitation wird als eine der vier fundamentalen Wechselwirkungen angesehen (siehe auch Abschnitt 3.2.7), kann also nicht aus anderen Kräften und Wechselwirkungen hergeleitet werden. Wir beschreiben damit die Eigenschaft von Materie, andere Materie anzuziehen. Dies führt zu einer Kraft F_G, von der in vielen Experimenten folgende Eigenschaften gezeigt wurden:

- Die Kraft F_G ist proportional zu jener Masse m_1, die eine andere Masse anzieht.
- Die Kraft F_G ist proportional zu jener Masse m_2, die von einer anderen Masse angezogen wird.
- Die Kraft F_G ist invers proportional zum Quadrat des Abstands r_{12} der Massen.

Beachten Sie, dass die ersten beiden Aussagen in dieser Form nicht ganz eindeutig sind, weil man ja nicht sagen kann, wer anzieht und wer angezogen wird. Besser könnte man formulieren, dass dass die Kraft proportional zu den beiden Massen ist, die sich gegenseitig anziehen. Insgesamt kommt man zur Beziehung

$$\text{Newtonsches Gravitationsgesetz:} \quad F_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{{r_{12}}^2} \tag{3.4}$$

$$\text{mit der Gravitationskonstante} \quad G = (6{,}67408 \pm 0{,}00031) \cdot 10^{-11} \, \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2}$$

Hier sind m_1 und m_2 vorerst „Punktmassen“, also viel kleiner als ihr Abstand r_{12}. Der Wert der Gravitationskonstante G ist – verglichen mit den Präzisionsmessungen für andere Naturkonstanten – nur relativ ungenau bekannt. Dies liegt vor allem daran, dass die Gravitationskraft im Vergleich zu anderen Kräften sehr klein ist. Nennenswerte Beschleunigung wird nur erreicht, wenn riesige Massen im Spiel sind.

Deshalb spielt die Gravitationskraft im täglichen Leben auch nur als „Schwerkraft“ eine merkbare Rolle (Anziehung aller Objekte durch die Erde), nicht aber als gegenseitige

Anziehung verschiedener Gegenstände. Diese ist zwar vorhanden, aber im normalen Umfeld immer vernachlässigbar.

In der Gleichung (3.4) wird das Gravitationsgesetz skalar angeschrieben, also als Zahlen- und nicht als Vektorgleichung. Das kann man in den meisten Fällen so machen, muss dann aber darauf achten, die Richtung der Kraft für beide Massen richtig einzusetzen. Die Gravitationskraft ist immer anziehend: Jede der beiden Massen spürt genau jene Kraft, die man aus der Gleichung (3.4) berechnet, aber in entgegengesetzter Richtung – immer genau zur anderen Masse hin.

Wenn man die Gravitationskraft als Vektor anschreiben möchte, dann multipliziert man den Term F_G mit einem Einheitsvektor $\vec{e}$ (Länge 1: ändert nichts am Betrag der Kraft!), der zur anderen Masse hin zeigt. Es lohnt sich in diesem Fall, das Koordinatensystem so zu wählen, dass die Festlegung dieses Einheitsvektors einfach ist.

(B) Das Gravitationsfeld

Wenn sich zwei Massen im leeren Raum gegenseitig anziehen, kann man sich die Frage stellen, wie der eine Körper von dem anderen „weiß“. Was geht im Raum zwischen ihnen vor, um den Effekt der Gravitation vom einen zum anderen Körper zu „übertragen“? In der Quantenpyhsik wird das „Graviton“ postuliert, ein hypothetischen Teilchen, das die Gravitationskraft übertragen könnte. Bisher gibt es aber keinen experimentellen Nachweis für die Existenz von Gravitonen.

Weil die Frage, wie die Kraftübertragung funktioniert, im Moment in voller Tiefe nicht beantwortbar ist, wollen wir hier ein Modell einführen, das die Beschreibung der Kräfte erleichtert, die an jedem Punkt des Raums auftreten können.

Dazu geht man von der Vorstellung aus, dass eine oder mehrere Massen vorerst fest im Raum verteilt sind. Bringt man nun zusätzlich eine kleine Testmasse m_0 an einen bestimmten Punkt $\vec{r}$, so verspürt sie eine ganz bestimmte Kraft $\vec{F}_{\mathrm{G,m0}}(\vec{r})$ (sie selbst übt natürlich aufgrund des Reaktionsprinzips die genau gleich große Kraft auf die verteilten Massen aus, aber das ist hier vorerst ohne Belang). Diese Kraft hängt vom Ort ab, man kann sie also als eine „momentane Eigenschaft des Raums“ ansehen.

Diese „Eigenschaft“ beschreibt man mit dem Konzept des **Gravitationsfelds**. Ein Gravitationsfeld ist ein Zustand des Raums (vor allem im Bereich um große Massen), der sich dadurch auszeichnet, dass in diesen Bereich gebrachte Testmassen eine Gravitationskraft erfahren.

Da die Größe der Kraft $\vec{F}_{\mathrm{G,m0}}(\vec{r})$ proportional zur betrachteten Testmasse m_0 ist, teilt man durch m_0, um allgemeine Aussagen zu ermöglichen. Dadurch erhält man die Größe

$$\text{Gravitationsbeschleunigung:} \qquad \vec{g}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_{\mathrm{G,m0}}(\vec{r})}{m_0}\,, \tag{3.5}$$

die manchmal auch „Gravitationsfeldstärke“ genannt wird. Das Gravitationsfeld wird an jedem Punkt $\vec{r}$ im Raum durch den Vektor $\vec{g}$ charakterisiert, der die Beschleunigung angibt, die auf eine dorthin gebrachte Masse wirkt. Dies gilt insbesondere auch auf der Erdoberfläche, wo $\vec{g}$ senkrecht nach unten zeigt und den Betrag $g \approx 9,81\,\mathrm{m/s^2}$ hat.

Das Gravitationsfeld ist an jedem Punkt des Raums gegenwärtig, selbst wenn es dort keine Masse gibt, die darauf reagiert – es ist nur die Folge der in der Umgebung befindlichen Massenverteilung. Sobald sich aber eine punktförmige Testmasse m_0 am Ort $\vec{r}$ aufhält, erfährt sie dort die Kraft $F_{\mathrm{G,m0}}$. Wir stellen uns vor, dass diese Kraft durch das Feld $\vec{g}$ im Punkt $\vec{r}$ erzeugt wird. In diesem Bild ist es also das Gravitationsfeld, durch das die Massenverteilung ihre Wirkung an die Testmasse weitergibt.

Ein Gravitationsfeld wird wie alle physikalischen Felder bildlich durch **Feldlinien** beschrieben. Dies sind gedachte Kurven im Raum, deren Tangenten in den einzelnen Punkten des Raums die Richtung der dort auftretenden Kraft auf eine kleine Testmasse angeben. Die Feldliniendichte (also die Anzahl der Feldlinien pro Flächeneinheit senkrecht zu den Linien) an einem bestimmten Ort im Raum ist ein Maß für den Betrag der Feldstärke an dieser Stelle: Wo die Feldliniendichte hoch ist, ist die Feldstärke groß und umgekehrt. (Beachten Sie aber, dass die gezeichnete Feldliniendichte nicht genau proportional zur Feldstärke ist, weil man nur zweidimensional zeichnen kann.)

(C) Gravitation für ausgedehnte Massen

Das Gravitationsgesetz in Gleichung (3.4) gilt vorerst für Punktmassen, also für Massen, deren Ausdehnung im Vergleich zum Abstand r_{12} vernachlässigbar klein ist. In der Praxis spüren wir die Schwerkraft aber am meisten im Zusammenhang mit der Erde, für die diese Aussage ganz und gar nicht gilt.

Für die Anziehung einer kleinen Masse m durch eine ausgedehnte Masse M kann man sich diese im Geist in kleine Massenelemente $\mathrm{d}M$ zerlegt denken. Man berechnet dann für jedes Massenelement die Schwerkraft $\mathrm{d}\vec{F}$, mit der es die Testmasse anzieht. All diese Schwerkraftanteile kann man dann integriert vektoriell integrieren, um die gesamte Kraft zu erhalten. Für die Erde muss man diese Integration über eine Kugel ausführen.

Wir werden später eine Methode kennen lernen, mit der diese Rechnung mit Hilfe der Energie deutlich einfacher ausgeführt werden kann und schreiben hier vorerst nur das Ergebnis an:

Wir denken uns die Kugel zuerst wie eine Zwiebel in lauter dünne Schalen zerlegt und betrachten vorerst eine solche **Kugelschale** mit der Gesamtmasse M_S, dem Radius r und der überall gleichen Dicke Δr. Man erhält folgendes Ergebnis für die Anziehung der kleinen Testmasse m:

- Wenn sich die Testmasse innerhalb der Kugelschale befindet, wirkt keine Gravitationskraft, weil sich die Kräfte aus den verschiedenen Richtungen gegenseitig genau aufheben.
- Wenn sich die Testmasse außerhalb der Kugelschale befindet, und zwar im Abstand h oberhalb der Schalenoberfläche oder im Abstand $r + h$ vom Mittelpunkt

der Kugelschale, dann wirkt eine Anziehungskraft, die genau gleich groß ist, als wenn die gesamte Masse der Kugelschale in ihrem Mittelpunkt konzentriert wäre, also

$$F_G = G \cdot \frac{M_S \cdot m}{(r+h)^2}$$

Im zweiten Schritt betrachten wir eine Vollkugel mit Radius R und Masse M, in der die Masse radialsymmetrisch verteilt ist. Diese Kugel besteht aus vielen ineinander gelegten Kugelschalen (wie eine Zwiebel). Wir erhalten folgendes Ergebnis:

- Wenn sich die Testmasse im Mittelpunkt der Kugel befindet (also im Inneren aller Kugelschalen), dann wirkt keine Schwerkraft. Das ist auch deshalb logisch, weil dann ja die Anziehung nach allen Seiten gleich stark ist und sich somit kompensiert.
- Wenn sich die Testmasse irgendwo innerhalb der Kugel befindet (mit dem Abstand $0 < h < R$ zum Mittelpunkt) wird sie zum Mittelpunkt der Kugel hin angezogen. Für die Berechnung der Gravitationskraft dürfen nur jene Kugelschalen verwendet werden, deren Radius $r \leq h$ ist: Für diese Schalen dürfen wir annehmen, dass ihre Masse im Mittelpunkt der Kugel konzentriert ist.
- Wenn sich die Testmasse außerhalb der Kugel befindet (mit dem Abstand H zur Kugeloberfläche und dem Abstand $R + H$ zum Mittelpunkt) wird sie zur Kugel hin angezogen. Dabei kann man für die Rechnung so tun, als sei die gesamte Masse der Kugel in ihrem Mittelpunkt konzentriert.

Wenn wir davon ausgehen, dass die Masse innerhalb der Kugel gleichmäßig verteilt ist, berechnen wir die Dichte ρ der großen Kugel (siehe auch Kap. 6.1.2):

$$\rho = \frac{M}{V_K} = \frac{3}{4\,\pi} \cdot \frac{M}{R^3} \qquad \text{mit dem Kugelvolumen} \quad V_K = \frac{4\,\pi \cdot R^3}{3}$$

Dann ergibt sich für die Anziehung der Testmasse m:

Testmasse im Inneren (Abstand h vom Mittelpunkt):

$$M(h) = \rho \cdot V_h = \rho \cdot \frac{4\,\pi \cdot h^3}{3} = \frac{3}{4\,\pi} \cdot \frac{M}{R^3} \cdot \frac{4\,\pi \cdot h^3}{3} = M \cdot \frac{h^3}{R^3}$$

$$F(h) = G \cdot \frac{M_h \cdot m}{h^2} = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2} \cdot \frac{h}{R} \tag{3.6}$$

Testmasse außen (Abstand $R + H$ vom Mittelpunkt):

$$F(H) = G \cdot \frac{M \cdot m}{(R+H)^2} \tag{3.7}$$

Testmasse auf der Oberfläche (Abstand R vom Mittelpunkt):

$$F_0 = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2} \tag{3.8}$$

Wir sehen also, dass die Gravitationskraft innerhalb einer homogenen Kugel von innen ausgehend linear mit h zunimmt, an der Oberfläche ein Maximum erreicht und von da an quadratisch mit dem Abstand $R + H$ vom Kugelmittelpunkt wieder abnimmt.

(D) Die Gravitation der Erde

Im Fall der Erde ist die Dichte im Inneren zwar kugelsymmetrisch, aber nicht gleichmäßig verteilt: Die Erde ist in mehreren Schalen aufgebaut und wird von innen nach außen kontinuierlich und in mehreren Sprüngen immer weniger dicht. Dieser kugelymmetrische Schalenaufbau spielt keine Rolle für den Verlauf der Schwerkraft auf der Erdoberfläche und außerhalb der Erde, weil es dabei ja nur auf die Gesamtmasse ankommt, nicht aber auf deren Verteilung.

Die Schwerkraft verhält sich im Inneren aber deutlich anders als mit dem einfachen Modell für konstante Dichte: Die stärkste Gravitation herrscht beim Übergang zwischen dem dichten Kern und dem deutlich weniger dichten Mantel ungefähr beim halben Erdradius und beträgt dort etwa 109 % der Gravitationskraft an der Oberfläche und nicht, wie nach Gleichung (3.6) zu berechnen, ca. 50 %.

Auf der Erdoberfläche lässt sich die Schwerkraft einfacher mit Hilfe der Erdbeschleunigung g beschreiben, die aus der Gleichung (3.8) berechnet wird: Mit der Erdmasse $M_E = 5,9722 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$ und dem mittleren Erdradius $R_E = 6371,0\,\mathrm{km}$ erhält man

$$F_0 = G \cdot \frac{M_E \cdot m}{{R_E}^2} = m \cdot g \qquad \rightarrow \quad g = G \cdot \frac{M_E}{{R_E}^2} = 9,8200\,\mathrm{m/s^2} \tag{3.9}$$

Allerdings ist g nicht ganz konstant, sondern kann je nach Ort kann um bis zu $0,05\,\mathrm{m/s^2}$ vom oben angegebenen Wert abweichen. In Deutschland variiert g zwischen 9,8070 (Oberbayern) und $9,8130\,\mathrm{m/s^2}$ (Norddeutschland). In Düsseldorf hat die Erdbeschleunigung den Wert $g = 9,811\,\mathrm{m/s^2}$. Die Erdbeschleunigung nimmt mit der Höhe um ca. $0,003\,\mathrm{m/s^2}$ pro 1000 m ab. Für fast alle praktischen Zwecke ist es in unseren Breiten hinreichend genau, mit dem bekannten Wert $g = 9,81\,\mathrm{m/s}$ zu rechnen.

Eine Reihe von Effekten trägt zur Variation von g bei:

- Abweichung der Erde von der Kugelform: Der Erdradius beträgt am Äquator 6378 km, an den Polen hingegen nur etwa 6357 km, weswegen die Schwerkraft an den Polen größer ist, weil man der Erdmasse im Schnitt näher kommt.
- Erdrotation: Ein Teil der Gravitation wird aufgewandt, um die Zentripetalkraft zur Verfügung zu stellen (siehe Abschnitt 3.2.6). Dieser Effekt ist am Äquator maximal ($a_{zp,max} \approx 0,033\,\mathrm{m/s^2}$) und an den Polen überhaupt nicht vorhanden.
- Masseverteilung innerhalb der Erde: Die inhomogene Verteilung von Masse innerhalb der Erdkruste führt zu örtlichen Unterschieden in der Erdbeschleunigung mit einer Größenordnung bis zu $\sim 1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m/s^2}$. Dies kann auch dazu verwendet werden, Erz-, Erdöl- oder Gasvorkommen zu orten: Dazu muss g aber mindestens auf 5 Nachkommastellen genau gemessen werden.
- Gezeiten: Die Schwerkraft des Mondes ist auf der Erde unterschiedlich groß: Zwischen dem mondnächsten und dem mondfernsten Punkt auf der Erdoberfläche liegt ein Unterschied $\Delta L = 2R_E \approx 1,27 \cdot 10^7\,\mathrm{m}$, immerhin 3,3 % des mittleren Mondabstands von $L \approx 3,84 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$. Mit der Mondmasse $M_M = 7,35 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$ ergibt sich ein Unterschied von $g_M \approx 2,20 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m/s^2}$.

Beachten Sie, dass die Schwerkraft des Mondes im Schwerpunkt der Erde genau als Zentripetalkraft für die Bewegung um den gemeinsamen Massenmittelpunkt wirkt (sonst würden Mond und Erde ja aufeinander stürzen, siehe Abschnitt 3.2.6 und Kap. 5.3.2). Hier geht es um den Unterschied: Auf der mondzugewandten Seite wird die Mond-Schwerkraft durch die Fliehkraft nicht ganz kompensiert: Deshalb fühlen wir die Erd-Schwerkraft abgeschwächt. Auf der mondabgewandten Seite wird seine Gravitation hingegen überkompensiert, sodass die Erd-Schwerkraft ebenfalls abgeschwächt wirkt.
Deshalb gibt es pro Tag ca. zwei Zeiten, an denen die Erdbeschleunigung um maximal $\Delta g \approx 1 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m/s^2}$ kleiner ist. Dies reicht aus, um das Wasser der Weltmeere so umzuverteilen, dass es zweimal pro Tag zur Flut kommt und dazwischen (wenn die Mond-Gravitation horizontal wirkt) zur Ebbe.
Derselbe Effekt wird auch von der Sonne ausgeübt. Obwohl ihre Gravitationskraft auf die Erde ca. 200 Mal größer ist als jene des Mondes, ist die Gezeitenkraft (scheinbare Änderung der Erdbeschleunigung) nur knapp halb so groß, weil sich die Sonnengravitation entlang des Erddurchmessers wegen des viel größeren Abstands nur wenig verändert. Wichtig ist das Zusammenspiel von Mond und Sonne: Bei Vol- und Neumond (wenn Sonne, Erde und Mond grob in einer Linie angeordnet sind) fallen die Effekte von Sonne und Mond zusammen, sodass die Unterschiede zwischen Ebbe und Flut deutlich größer ausfallen.

(E) Messung der Gravitationskonstante

Die Gravitationskraft lässt sich gut und recht genau messen, wenn man die Anziehung zwischen verschiedenen Objekten und der Erde betrachtet.

Hier kann einerseits durch Wiegen die sogenannte Gewichtskraft bestimmt werden, die zwischen einem beliebigen Objekt und der Erde vorliegt. Dies ist die Standardmethode zur Messung von Massen. Andererseits kann durch Beobachtung der Planetenbahnen auf die Gravitationskraft der Sonne und ihrer Planeten geschlossen werden. Dadurch kann die $1/R^2$-Abhängigkeit der Gravitationskraft bestätigt werden.

All diese Messungen von Kräften enthalten das Produkt $G \cdot M$, und solange die Masse M der Erde bzw. der Sonne nicht bekannt ist, lässt sich auf diese Art auch die Gravitationskonstante G nicht bestimmen. Somit muss G in präzisen Laborexperimenten gemessen werden, bei denen die Anziehung zwischen zwei bekannten Massen beobachtet wird. Dies ist extrem schwierig, weil die Anziehung jeder Masse mit der Erde um ein Vielfaches größer ist als die gegenseitige Anziehung.

Das klassische Experiment ist die Cavendish-Waage, bei der zwei Massen an einer waagrechten Stange befestigt sind, die an einem Torsionsfaden hängt. Ein Torsionsfaden ist ein Faden, der sich in seine Ruhestellung zurückdreht, wenn man ihn verdreht (siehe Kap. 5). Wenn jede der beiden Massen von einer weiteren Masse angezogen wird, verdreht sich die Stange so weit, wie es der Torsionsfaden zulässt. Damit lässt sich die Stärke der Gravitationskraft messen und somit – weil die Massen bekannt sind – die Gravitationskonstante G.

3.2.3 Die Federkraft

Viele Festkörper lassen sich durch Krafteinwirkung in einem gewissen Maß komprimieren oder in die Länge ziehen und kehren in die Ausgangslage zurück, wenn die Kraftwirkung endet. Diese Eigenschaft heißt Elastizität und wird im Kap. 6.2 genauer besprochen.

Wichtig ist hier vorerst, dass bei elastischen Körpern die Stärke der Deformation proportional zur wirkenden Kraft ist (Hookesches Gesetz). Typisch ist die Deformation ΔL aber klein im Vergleich zur Gesamtlänge L, höchstens im Bereich von einigen Prozenten, oft noch deutlich kleiner.

In **Federn** wird die Eigenschaft der elastischen Dehnung und Stauchung durch kluge Bauweise so verstärkt, dass sehr große relative Längenänderungen möglich sind. Neben Drehfedern (Kap. 5) gibt eine große Vielfalt an Federn, die eine Längenänderung ermöglichen, z. B. Spiral-, Blatt- oder Sprungfedern. Für diese Federn gilt die Proportionalität von Längenänderung ΔL und Kraft F_F:

$$\text{Federkraft:} \qquad F_F = -D \cdot \Delta L \qquad \text{mit der Federkonstante } D \tag{3.10}$$

Die Federkonstante D wird in N/m angegeben und hat für jede Feder einen speziellen Zahlenwert. Sie gibt theoretisch an, welche Kraft F (in N) notwendig wäre, um die Feder um $\Delta L = 1\,\mathrm{m}$ zu dehnen (was meist nicht möglich ist). Große Zahlenwerte für D beschreiben also eine „starke Feder“.

Das Minuszeichen in Gleichung (3.10) soll anzeigen, dass die Kraft F_F und die Ausdehnung ΔL immer in die entgegengesetzte Richtung zeigen: Die Kraft ist eine „rücktreibende Kraft“, die versucht, den Ursprungszustand herzustellen. Für Berechnungen kann das Minuszeichen weggelassen werden.

Die Gleichung (3.10) gilt für jede Feder in einem bestimmten Bereich von Dehnung und Kraft: Zu starke Dehnung sorgt für dauerhafte Verformung, und Stauchung ist nur bis zu einem gewissen Wert möglich. Innerhalb des elastischen Bereichs erhält man strenge Proportionalität zwischen ΔL und der rücktreibenden Federkraft F_F. Beachten Sie, dass die Kraft proportional zur Verlängerung ΔL ist, nicht aber zur Länge L!

Diese Proportionalität wird in der **Federwaage** ausgenützt, die zur Messung von Kräften verwendet wird, z. B. von Gewichtskräften und somit Massen: Man kann die Kraft, die auf die Feder wirkt, direkt an einer linearen Skala ablesen, weil eine bestimmte Kraft zu einer genau proportionalen Verlängerung der Feder führt.

3.2.4 Reibungskräfte

(A) Definiton

Reibungskräfte sind im täglichen Leben allgegenwärtig und führen dazu, dass jede Bewegung abgebremst wird, meist bis zum Stillstand. Andererseits ist Reibung in vielen

Effekten nützlich, z. B. zum gezielten Abbremsen von Bewegung, oder weil dadurch viele Körper aneinander haften können, ohne sich verbinden zu müssen.

Reibungskräfte haben ganz besondere Eigenschaften, durch die sie sich von den meisten anderen Kräften unterscheiden:

- Reibung kann Bewegungen nur abbremsen, nicht beschleunigen.
- Die Reibungskraft wirkt immer genau in die Gegenrichtung zur vorliegenden (Relativ-)Geschwindigkeit.

Deshalb muss jede Art von Reibung vektoriell immer abhängig von der Geschwindigkeit dargestellt werden

$$\vec{F}_R \;=\; -F_R \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \;=\; -F_R \cdot \vec{e}_v \qquad \text{mit dem Einheitsvektor} \quad \vec{e}_v \;=\; \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Das Minus sorgt dafür, dass die Kraft entgegen der Geschwindigkeit wirkt, und $\vec{e}_v$ ist ein Vektor, der genau in die Richtung der Geschwindigkeit zeigt, aber die Länge 1 hat. Somit wird die Stärke der Kraft allein vom skalaren Term F_R beschrieben. Dieser Term enthält dann die Beschreibung jener Zusammenhänge, die einem konkreten Fall zur Reibung führen.

Je nach Situation gibt es ganz unterschiedliche Arten von Reibung, die mit völlig verschiedenen formelmäßigen Zusammenhängen beschrieben werden müssen. Wir besprechen im Folgenden die einige wichtige Reibungsarten.

(B) Gleitreibung (Coulomb-Reibung oder trockene Reibung)

Wenn man zwei feste Körper aufeinander gleiten lässt, muss eine konstante Kraft aufgewandt werden, um die Reibung zwischen den gleitenden Flächen zu kompensieren. Dies kommt in erster Linie von der Oberflächenrauigkeit, die dazu führt, dass sich die gleitenden Flächen mikroskopisch ineinander verhaken. Bei der Bewegung müssen die verhakten Strukturen immer wieder auseinander gebracht werden. Dies kann auch dazu führen, dass die rauen Strukturen zum Teil abgeschmirgelt werden. All dies erfordert eine Kraft, die wir in Summe als Gleitreibungskraft bezeichnen. Beachten Sie, dass auch scheinbar glatte Oberflächen auf kleiner Skala rau sind, zumindest auf atomarem Niveau. Es zeigt sich, dass diese Reibungskraft einfach zu beschreiben ist:

$$\text{Gleitreibung:} \qquad F_{R,G} \;=\; \mu_G \cdot F_N \tag{3.11}$$

Hier ist F_N der Betrag der Normalkraft: Das ist jene Kraft, die normal auf die gleitende Fläche wirkt und die beiden Körper aufeinander drückt. μ_G ist der Gleitreibungskoeffizient, eine Zahl, die die Stärke der Reibungskraft angibt und für verschiedene Materialpaare tabelliert ist.

Beachten Sie, dass die Gleitreibung von zwei Parametern **nicht** abhängt, die man intuitiv im Verdacht haben könnte:

- Die Größe der Kontaktfläche spielt für diese Art der Reibungskraft in erster Näherung keine Rolle: Die Kraft in Gleichung (3.11) hat immer den gleichen Wert, egal, wie Sie den bewegten Körper auf seine Unterlage stellen: Ob der Körper auf einer großen oder auf einer kleinen Fläche liegt oder sogar auf einer Kante steht, ist egal.
- Die Geschwindigkeit des bewegten Körpers ist ebenfalls irrelevant.

Die letzte Aussage stimmt für hohe Geschwindigkeiten nicht immer: Hier kann es einerseits geschehen, dass an den Grenzflächen mehr Material abgerieben wird, wodurch die aufzuwendende Kraft größer wird. Andererseits kann der Körper zum Teil „springen“, worurch er sich zeitweilig durch die Luft uns somit deutlich reibungsärmer bewegt. Diese Fälle werden von der Gleichung (3.11) nicht beschrieben.

Die **Haftreibung**, die im Abschnitt Abschnitt 3.2.5 über statische Kräfte besprochen wird, ist eng mit der Gleitreibung verwandt. Sie beschreibt die Kraft, die aufgewandt werden muss, um einen Festkörper, der auf einem anderen liegt, in Bewegung zu setzen. Diese Kraft wird mit der analogen Beziehung $F_{R,H,max} = \mu_H \cdot F_N$ beschrieben (Gleichung (3.15)) und ist somit ebenso unabhängig von der Größe der Kontaktfläche zwischen den beiden Körpern. Beachten Sie, dass es nicht ums Beschleunigen geht, sondern nur darum, den Körper aus seiner Ruhelage in Bewegung zu setzen.

Der Haftreibungskoeffizient μ_H ist für alle Stoffkombinationen größer als der Gleitreibungskoeffizient μ_G. Dies kann dadurch erklärt werden, dass sich zwei ruhende Oberflächen fester miteinander „verhaken“ als bewegte, weil sie beim Stehenbleiben an jeder Stelle gleichsam in der tiefsten Position verbleiben. Außerdem können sich – je nach Stoffkombination – auch verstärkt Anziehungskräfte zwischen den Stoffen bilden (z. B. durch chemische Veränderungen), die beim Starten aufgebrochen werden müssen.

(C) Rollreibung

Ein rollendes Objekt hat wesentlich weniger Widerstand als ein gleitendes. So wird eine rollende Eisenkugel auf einer Kunststoff-Fläche (Boden) wesentlich weiter kommen als eine gleich schwere, gleich schnell gleitende Eisenplatte.

Dennoch muss auch ein rollendes Objekt gegen eine Bremskraft ankommen, die man Rollreibung nennt. Beachten Sie, dass bei diesem Vorgang nichts passiert, was wir klassisch als „Reibung“ bezeichnen würden. Die Rollreibung wird in erster Line dadurch bewirkt, dass sich sowohl der rollende Körper als auch die Unterlage leicht verformt. Dies wird dadurch erleichtert, dass beim Rollen immer nur eine sehr kleine Fläche den Boden berührt, sodass dort hoher Druck herrscht.

Diese Verformung ist zwar zum Teil elastisch, kostet aber in Summe Energie, sodass kontinuierlich eine Kraft wirkt, die den Rollvorgang abbremst. In erster Näherung beschreibt man diese „Rollreibungskraft“ analog zur Gleitreibung:

$$\text{Rollreibung:} \qquad F_{R,R} = \mu_R \cdot F_N \tag{3.12}$$

Auch diese Kraft ist proportional zur Normalkraft, die das rollende Objekt auf die Unterlage drückt. Der Proportionalitätsfaktor μ_R heißt Rollreibungszahl und ist um mindestens eine Größenordnung kleiner (bei gleichen Materialien) als die Gleitreibungszahl. Dies ist ein Hauptgrund dafür, dass man z. B. Achsen nicht in ihrem Lager gleiten lässt, sondern mittels Kugellagern festhält.

Auch hier hängt die bremsende Reibungskraft nicht von der Auflagefläche ab: Es ist also egal, ob eine Kugel oder eine Walze rollt. Außerdem ist die Rollreibung laut Gleichung (3.12) nicht von der Geschwindigkeit abhängig, was bei höheren Rollgeschwindigkeiten aber in vielen Fällen nicht ganz richtig ist.

(D) Strömungswiderstand

Wenn sich ein Körper in einer Flüssigkeit oder einem Gas bewegt, widersetzt sich dieses Medium der Bewegung: Es muss verdrängt werden, was nur durch Krafteinsatz möglich ist. Letztendlich führt dies dazu, dass auf den Körper eine bremsende Kraft F_W wirkt, die allgemein als Strömungswiderstand bezeichnet wird.

Wichtig ist, dass diese Kraft von der Geschwindigkeit abhängt, mit der sich ein Körper durch das Medium bewegt. Die Zusammenhänge sind im Allgemeinen kompliziert (siehe auch Kap. 6.4). Es gibt aber zwei gut beschreibbare Grenzfälle.

Laminare Reibung (Stokes-Reibung):
Wenn sich kleine Objekte langsam durch Flüssigkeiten bewegen (selten auch durch Gase), bildet sich im Medium eine laminare Strömung um das bewegte Objekt aus (genauer: Kap. 6.4). Das heißt, dass es keine Wirbel gibt, sondern kontinuierliche, einigermaßen geradlinige Stromlinien. In diesem Fall ist der Strömungswiderstand proportional zur Geschwindigkeit und hängt außerdem von der Form der bewegten Objekts und von der Flüssigkeit ab:

$$\begin{aligned} \text{Stokes-Reibung:} \qquad \vec{F}_S &= -\kappa \cdot \eta \cdot \vec{v} \\ \text{Kugel:} \qquad \vec{F}_S &= -6\,\pi \cdot r \cdot \eta \cdot \vec{v} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Hier ist η die Zähigkeit des Mediums (siehe Kap. 6.4), κ (der griechische Buchstabe kappa) enthält Informationen zur Form des Körpers, und das Minus zeigt an, dass die Kraft der Geschwindigkeit entgegen wirkt. Für eine Kugel mit dem Radius r gilt: $\kappa = 6\pi \cdot r$. Wichtig ist, dass diese Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit v ist, im Gegensatz zur Gleitreibung ($F \neq f(v)$) und turbulenten Reibung ($F \sim v^2$).

Turbulente Reibung (Newtonsche Reibung):
Wenn sich Objekte durch Gase oder schnell durch Flüssigkeiten bewegen, entstehen um das Objekt und vor allem dahinter Wirbel und Turbulenzen im Medium. Dies führt zu einem Strömungswiderstand, der in guter Näherung proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit ist:

$$\text{Turbulente Reibung:} \qquad \vec{F}_T = -\frac{1}{2} \cdot c_w \cdot A \cdot \rho \cdot v^2 \cdot \vec{e}_v \tag{3.14}$$

A ist die Querschnittsfläche des bewegten Objekts in Bewegungsrichtung und ρ die Dichte des Mediums. c_w ist der „Widerstandsbeiwert", eine Zahl, die ein Maß für die „Windschnittigkeit" des bewegten Objekts liefert. c_w hängt nur von der Form, nicht aber von der Größe des Objekts ab – die Größe steckt ja in der Querschnittsfläche A. c_w-Werte sind einigermaßen konstant (aber nicht ganz...) und nicht einfach zu messen. Daher gibt es leicht unterschiedliche Angaben. Einige Werte:

flache Platte:	$c_w = 1{,}10$	Kugel:	$c_w = 0{,}40$
Mensch, stehend:	0,78	Mensch, liegend:	1,20
Halbkugelschale, konvex:	0,34	Halbkugelschale, konkav:	1,33
Radfahrer (aufrecht):	0,8	LKW (optimiert):	0,75
Cabrio, offen:	0,5	moderner PKW:	0,30
Formel 1-Rennwagen:	1,2	Pinguin:	0,02

Beachten Sie, dass diese Art der Reibung (auch „Luftwiderstand" genannt), quadratisch mit der Geschwindigkeit zunimmt – zur Aufrechterhaltung einer höheren Geschwindigkeit muss also überproportional viel Kraft aufgewandt werden.

3.2.5 Statische Kräfte

Es gibt eine große Anzahl von Kräften, die einen Körper weder beschleunigen noch abbremsen, sondern lediglich festhalten können. Solche Kräfte nennt man statische Kräfte. Darunter fallen die **Adhäsionskräfte**, die für den Zusammenhalt zwischen verschiedenen Stoffen sorgen (z. B. Klebekräfte), die **Kohäsionskräfte** (innerer Zusammenhalt innerhalb eines Stoffs), aber auch die Haftreibung (z. B. auch zum Festhalten von Schrauben oder Nägeln) und viele andere mehr.

Typisch ist man vor allem daran interessiert, bis zu welcher Belastung eine statische Kraft anderen Kräften standhalten kann, ab wann sie also versagt, sodass eine dauerhafte Beschädigung des Materials eintritt oder die Verbindung sogar völlig zerstört wird. In den meisten Fällen sind die Vorgänge bei Belastung sehr kompliziert. Für elastische Materialien besprechen wir das in Kap. 6.2.

Für viele Materialien und Verbindungen werden Belastungs-Grenzwerte angegeben, oft in der Größe „Spannung":

$$\text{(mechanische) Spannung:} \qquad \sigma = \frac{F}{A} \qquad [\sigma] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^2} = \mathrm{Pa} \quad \text{(Pascal)}$$

(σ ist der griechische Buchstabe sigma.) Beim Auftreten bekannter Kräfte F muss die Querschnittsfläche A der Klebung oder des Materials so groß gewählt werden, dass die auftretenden Spannungen σ immer deutlich kleiner sind als die in Tabellen aufgelisteten kritischen Spannungen, ab denen dauerhafte Schädigung zu befürchten ist.

Eine wichtige statische Kraft ist die **Haftreibung**, die immer dann auftritt, wenn zwei Körper lose und ohne Klebeverbindung aufeinander liegen. Die Haftreibung sorgt z. B.

dafür, dass Schuhsohlen oder die Räder von Fahrzeugen hinreichend fest auf dem Boden haften, damit Beschleunigungs- oder Bremskräfte ausgeübt werden können. Ohne Haftreibung wäre es fast unmöglich, sich bergauf zu bewegen. Alles, was wir festhalten, kann uns nur aufgrund der Haftreibung nicht entgleiten, usw. Die Berechnung funktioniert ganz analog zur Gleitreibung:

$$\text{Haftreibung:} \qquad F_{R,H} \;\leq\; F_{R,H,max} \;=\; \mu_H \cdot F_N \tag{3.15}$$

F_N ist die Normalkraft, also jene Kraft, die die beiden Körper aufeinander drückt, und μ_H der der Haftreibungskoeffizient, der die Stärke der Reibungskraft definiert. μ_H ist für Paare von je zwei (glatten) Materialien in Tabellen zu finden, hängt aber auch stark von der Oberflächenbeschaffenheit ab. Wie schon auf S. 43 ausgeführt, ist die Haftreibungskraft immer größer als die Gleitreibungskraft.

Die Haftreibung kann eine Kraft F_P kompensieren, die parallel zur Grenzfläche der beiden Körper wirkt, und somit verhindern, dass sich einer von beiden in Bewegung setzt und auf dem anderen gleitet. Dies funktioniert, solange $F_P < F_{R,H,max}$. Sobald die parallele Kraft aber größer wird als die maximale Haftreibung, setzt sich ein Körper gegenüber dem anderen in Bewegung. Nun wirkt nicht mehr die Haft- sondern die Gleitreibung der Kraft F_P entgegen. Da die Gleitreibung kleiner ist als die maximale Haftreibung, steht ein Teil der Kraft zur Beschleunigung zur Verfügung, sodass die Bewegung nicht mehr aufzuhalten ist (siehe auch Abschnitte 3.3.3 und 3.3.4).

Dies ist zum Beispiel zu bemerken, wenn ein Fahrzeug auf der Fahrbahn zu rutschen beginnt, weil die Brems- oder die Zentripetalkraft, die durch Haftreibung auf den Boden übertragen werden muss, größer ist als die die Haftreibung. Die Bodenhaftung kann dann nur wiederhergestellt werden, indem die Bremskraft für kurze Zeit unter die Gleitreibung abgesenkt wird. Dies wird in vielen Autos durch ein ABS (Antiblockier-System) gemacht.

Beachten Sie, dass die Gleitreibung immer der aktuellen Bewegung entgegengerichtet ist, während die Haftreibung eine Bewegung in jede beliebige Richtung verhindert.

3.2.6 Die Zentripetalkraft

Wenn sich ein Körper mit der Geschwindigkeit $v = |\vec{v}|$ um eine Kurve bewegen soll, kann man die Kurve zu jedem Moment als Kreisbahn mit dem Radius $R(t)$ annähern. Zur Beschreibung der Kurvenbahn ist eine Normalbeschleunigung $\vec{a}_\perp$ vonnöten, die genau zum Krümmungsmittelpunkt des Näherungskreises zeigt und den Betrag

$$|\vec{a}_\perp| \;=\; a_{\mathrm{ZP}} \;=\; \frac{v^2}{R} \qquad \big(\text{Zentripetalbeschleunigung}\big) \tag{3.16}$$

hat (siehe Gleichung (2.30)). Diese Beschleunigung muss von irgendeiner Kraft erzeugt werden, die man in dieser Funktion „Zentripetalkraft“ nennt. Wenn der kurvende Körper die Masse m hat, muss die Zentripetalkraft genau den Betrag

$$\left|\vec{F}_{\mathrm{ZP}}\right| \;=\; m \cdot \frac{v^2}{R} \qquad \big(\text{Zentripetalkraft}\big) \tag{3.17}$$

haben und genau in Richtung des Kreisbogen-Mittelpunkts zeigen. Beachten Sie, dass die Zentripetalkraft kein eigener Kraft-Typ ist, sondern von jeder beliebigen Kraft zur Verfügung gestellt werden kann, also z. B. von der Gravitation (Planeten), der Haftreibung (Auto um die Kurve) oder anderen statischen Kräften (Karussell).

Eine Kurvenbahn mit bestimmtem Radius und Tempo ist also nur dann möglich, wenn die Zentripetalkraft in der richtigen Größe vorhanden ist. Wenn die Zentripetalkraft zu klein ist, wird der Radius größer, und wenn es gar keine Zentripetalkraft gibt, kann sich der Körper nach dem Newtonschen Trägheitsprinzip nur geradlinig weiter bewegen.

Immer, wenn man sich um eine Kurve bewegt, fühlt man die „**Zentrifugalkraft**“, die das Bestreben hat, einen aus der Kurve hinaus zu befördern. Die Zentrifugalkraft fühlt sich sehr real an und hat auch durchaus Wirkung. Dennoch ist sie eine **Scheinkraft**, weil sie nicht die Definition aus Abschnitt 3.2.1 erfüllt: Die Zentrifugalkraft übt keine Beschleunigung auf einen Körper aus.

Vielmehr ist die Zentrifugalkraft eine anschauliche Demonstration des Newtonschen Trägheitsprinzips: Jeder Körper bewegt sich geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit weiter, wenn keine Kraft auf ihn wirkt. Wenn ein Körper um eine Kurve gelenkt werden soll, muss auf ihn die Zentripetalkraft wirken. Bei einer Kurve im Auto wird diese Kraft (eine Normalkraft, also zur Seite gerichtet!) über den Autositz auf den menschlichen Körper übertragen (besser gesagt: auf Teile des Körpers). Da jeder Körperteil ‚träge‘ ist und danach strebt, sich geradeaus weiterzubewegen, ist aktives Übertragen der Zentripetalkraft auf alle Körperteile notwendig, damit sie sich nach innen in die Kurve mitbewegen. Dies fühlt man als Kraft nach außen, der man aktiv begegnen muss – ein Irrtum!

Wenn die Zentripetalkraft plötzlich endet (weil ein Seil reißt oder die Bodenhaftung weg ist, oder weil man einen Diskus oder Hammer loslässt), dann wird der Körper nicht vom Drehmittelpunkt weg nach außen geschleudert (wie einem das erscheinen mag), sondern fliegt geradlinig mit seiner letzten Geschwindigkeit weiter, weil es keine Kraft mehr gibt, die seine Richtung verändern könnte.

3.2.7 Die Grundkräfte der Physik

In der Natur tritt eine große Anzahl verschiedener Kräfte auf, die auch auf ganz verschiedene Art beschrieben werden müssen. Andererseits lässt sich aber – im Sinne des Reduktionismus (siehe Kap. 1.2: Alle Phänomena auf viele wenige Grundprinzipien zurückführen!) – zeigen, dass man alle bekannten Kräfte auf vier Grundkräfte zurückführen kann. Dies sind:

- Gravitationskraft: Anziehungskraft zwischen zwei oder mehreren Massen, wie sie in Abschnitt 3.2.2 beschrieben wird.
- Elektromagnetische Kraft: Die Wechselwirkungen zwischen ruhenden und bewegten elektrischen Ladungen sowie elektrischen und magnetischen Feldern. Diese

Wechselwirkung enthält zum Beispiel die elektrische Kraft zwischen geladenen Körpern oder die Kraft zwischen Magneten (siehe Vorlesung „Elektrizität und Magnetismus“).

- Starke Wechselwirkung: Diese Kraft ist deutlich stärker als die elektromagnetische Kraft und bewirkt zum Beispiel den Zusammenhalt von Atomkernen, obwohl dort – neben neutralen – nur positiv geladene Teilchen vorliegen, die sich elektrisch abstoßen. Außerdem sorgt diese Kraft für den inneren Zusammenhalt von Protonen und Neutronen, die selbst aus jeweils drei Quarks bestehen.
- Schwache Wechselwirkung: Diese Kraft ist für die Umwandlung von Elementarteilchen verantwortlich, z. B. für die Entstehung eines Elektrons beim Beta-Zerfall von Atomkernen.

In der theoretischen Physik wurde lange die Idee verfolgt, auch diese vier Kräfte in eine einzige Beschreibung zusammenzuführen. Dies ist aber bisher nicht in sinnvoller Weise gelungen. In der Praxis verwendet man ohnehin jede Kraft mit ihrer eigenen Beschreibung und führt sie nicht auf die Grundkräfte zurück, weil das für konkrete Aufgaben bei Weitem praktischer ist.

3.3 Die Wirkung von Kräften

3.3.1 Rechnen mit Kräften

(A) Prinzip

Die Wirkung jeder Art von Kraft wird immer von der Bewegungsgleichung

$$\text{Bewegungsgleichung:} \qquad \vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{ges}}}{m} \tag{3.18}$$

beschrieben (siehe S. 32). Dabei ist für $\vec{F}_{\text{ges}}$ die Summe aller Kräfte einzusetzen, die auf die Masse m wirkt.

Ein Hauptziel der Mechanik ist es, den Geschwindigkeitsverlauf und/oder die Bahnkurve des beschleunigten Körpers unter der Wirkung aller vorhandenen Kräfte zu berechnen. Dazu wird im allgemeinen Fall die Bewegungsgleichung als Differenzialgleichung formuliert, indem statt der Beschleunigung die Zeitableitung der Geschwindigkeit oder die zweite Zeitableitung der Position eingesetzt wird.

$$\vec{a(t)} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\vec{F}_{\text{ges}}(\vec{r}(t), t)}{m} \tag{3.19}$$

Eine Differenzialgleichung wie Gleichung (3.19) hat als Lösung nicht den Wert für eine Variable (also sowas wie $x = 4$), sondern eine Funktion, z. B. $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{a} \cdot t^2$. Hier wollen wir also im besten Fall als Ergebnis der Rechnung die Bahnkurve eines Körpers berechnen können, d. h. den zeitlichen Verlauf seiner Position.

Ob man es aber schafft, die Differenzialgleichung (3.19) zu lösen, hängt entscheidend davon ab, mit welcher Formel die Gesamtkraft $\vec{F}_{\text{ges}}$ beschrieben werden muss (und ob das überhaupt bekannt ist!). Oft muss man sich auf die numerische Lösung beschränken. Manchmal gelingt es allerdings auch, aus der Gleichung wertvolle Informationen über die Bewegung zu gewinnen, ohne die Gleichung lösen zu müssen.

Im allgemeinen Fall, so wie das oben angeschrieben ist, hängt die Kraft erstens vom Ort $\vec{r}$ ab, der zweitens selbst von der Zeit t abhängt (der betrachtete Körper bewegt sich ja!), und drittens kann sich auch die Kraft selbst mit der Zeit t verändern. In einem solchen Fall ist es sehr anspruchsvoll und schwierig, die Gleichung zu lösen. Dies wird in fortgeschrittenen Vorlesungen für viele verschiedene Fälle gemacht. Hier beschränken wir uns auf einige einfache Beispiele, bei denen wir die Bewegungsgleichung zum Teil gar nicht brauchen, sondern nur den skalaren Zusammenhang $F = m \cdot a$ verwenden.

(B) Kräfte als Vektoren

Physikalische Größen, bei denen es nicht nur auf ihre Größe ankommt, sondern auch auf die Richtung, werden als Vektoren dargestellt (Beispiele: Geschwindigkeit oder magnetische Feldstärke; im Gegensatz zu skalaren Größen ohne Richtungsinformation wie Masse, Temperatur oder Lichtstärke). Die Kraft ist ebenfalls ein typisches Beispiel für eine vektorielle Größe. Selbstverständlich lässt man den Vektor weg und rechnet nur mit dem Betrag, wenn es auf die Richtung nicht ankommt – in vielen praktischen Fällen braucht man aber doch gerade die Vektoreigenschaften der Größe Kraft.

Wir besprechen hier einige dieser typischen Vektoreigenschaften:

- Kräfte setzen sich entlang ihrer Richtung fort:
  Wenn eine Kraft entlang einer bestimmten Richtung wirkt, dann setzt sie sich in dieser Richtung fort, bis sie durch eine Gegenkraft kompensiert wird. So wirkt in einer Kette, die mit der Kraft F gespannt wird, auf jedes Kettenglied genau dieselbe Kraft F.
- Kräfte können addiert werden:
  Zwei Kräfte in derselben Richtung führen zu einer Kraft, deren Betrag die Summe der einzelnen Beträge ist. Die Addition von Kräften funktioniert aber auch vektoriell: Zwei entgegengesetzt angreifende Kräfte schwächen sich gegenseitig oder kompensieren sich komplett, wenn sie den selben Betrag haben.
  Zwei Kräfte, die unter einem Winkel α an einem Körper angreifen, erzeugen eine Gesamtkraft, die der Vektorsumme der beiden Kräfte entspricht.
- Eine Kraft $\vec{F}$ kann sich in Kräfte unterschiedlicher Richtung aufteilen:
  Allgemein kann jeder Vektor $\vec{A}$ in Teilvektoren $\vec{A}_1$, $\vec{A}_2$, …zerlegt werden, wenn die Summe der Teilvektoren wieder den ursprünglichen Vektor ergibt, also

  $$\vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \ldots \;=\; \vec{A}$$

  Mathematisch dürfen die Teilvektoren jede beliebige Richtung und Länge haben, solange sie nur die Summenbedingung erfüllen. In der Physik hat eine solche Zerlegung nur Sinn, wenn die Teilvektoren physikalischen Phänomenen entsprechen.

Oft ist die Wirkung einer Kraft (Beschleunigung einer Masse) nicht in jener Richtung möglich, in der die Kraft angreift. Wenn die Masse aber in anderer Richtung bewegt werden kann (Beispiel: in Richtung des Einheitsvektors $\vec{e}$), dann wird die Masse in diese Richtung beschleunigt, allerdings nur von einem Teil der Kraft. Um diese Beschleunigungskraft zu berechnen, zerlegt man die Kraft $\vec{F}$ vektoriell in zwei Kräfte:

$$\vec{F} \;=\; \vec{F}_B + \vec{F}_N \qquad \text{mit} \quad \vec{F}_B \;=\; \left(\vec{F} \cdot \vec{e}\right) \cdot \vec{e} \quad \text{und} \quad \vec{F}_N \;=\; \vec{F} - \vec{F}_B$$

Diese Zerlegung von Kräften ist an sehr vielen Stellen wichtig, z. B. beim Berechnen, wie ein Gegenstand eine schiefe Ebene hinab gleitet (siehe Abschnitt 3.3.3).

- Eine Kraft kann umgelenkt werden:
  Eine Kraft und ihre Wirkung, die Beschleunigung von Massen, können in ihrer Richtung verändert werden, wenn die Kraft z. B. an einem Seil angreift und dieses über eine Rolle läuft. So kann man eine schwere Lasten leichter hochheben, wenn sie an ein Seil gebunden wird, das oben von einer Rolle umgelenkt wird, weil sie dann mit Hilfe des eigenen Körpergewichts angehoben werden kann. Achtgeben muss man dann aber darauf, dass die Rolle gut befestigt ist: Sie muss das doppelte Gewicht tragen, weil außer der Last auch noch die Zugkraft nach unten wirkt.

Die Umlenkung und die Aufteilung von Kräften können auf viele Arten kombiniert werden. Ein Beispiel ist der **Flaschenzug**, ein uraltes Gerät zur Erleichterung beim Hochziehen von Lasten. In der einfachsten Version wird das Gewicht der Last durch eine Rolle in zwei Hälften geteilt: Eine Hälfte wird fixiert und somit von einer statischen Kraft „getragen“, die andere Hälfte muss gehalten werden. Wenn man dort zieht, braucht man nur die halbe Kraft, muss aber dafür die doppelte Distanz ziehen.

In vielen Flaschenzügen wird durch kluges Design eine viel höhere „Übersetzung“ erreicht. Immer ist es aber so, dass man um jenen Faktor x, um den man weniger Kraft aufwenden muss ($F = F_0/x$), mehr Zugweg investieren muss ($L = x \cdot L_0$), sodass das Produkt aus Kraft und Weg konstant bleibt. Dies ist eine Form der Energieerhaltung (siehe Kap. 4.2.3).

3.3.2 Bewegung unter Einfluss der Reibung

(A) Geradeausfahrt

Wenn sich ein Fahrzeug mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v} = \text{const}$ bewegt, bedeutet das gemäß Trägheitsprinzip, dass auf das Fahrzeug in Summe keine Kraft wirkt, also $\vec{F}_{\text{ges}} = 0$. Wir wissen aber, dass in der Regel eine konstante Antriebskraft $\vec{F}_A$ in Richtung der Bewegung aufgebracht werden muss, weil gleichzeitig immer auch Reibungskräfte $\vec{F}_R$ entgegen der Geschwindigkeit wirken. Dies erlaubt die Schlussfolgerung

$$\vec{F}_A \;=\; -\vec{F}_R \qquad \text{wenn} \quad \vec{v} \;=\; 0 \tag{3.20}$$

Die Motorkraft von Autos (oder die Muskelkraft von Radfahreren, Ruderern oder Läufern) wird also bei konstanter Geschwindigkeit ausschließlich zur Überwindung der Reibung verwendet (hauptsächlich Luft- und Rollreibung, aber auch innere Reibung in Getrieben, Muskeln etc.).

(B) Abbremsen

Wenn ein Fahrzeug auf ebenem Untergrund abgebremst werden soll, wird dazu eine Kraft verwendet, die in der Regel vorerst auf die drehenden Räder einwirkt (Bremskraft) aber dazu führt, dass das ganze Fahrzeug langsamer wird (negative Beschleunigung, also lineare Bremskraft auf das Fahrzeug). Nach dem Reaktionsprinzip muss eine gleich große Gegenkraft auf die Umgebung übertragen werden. Dies ist nur über die Reifen möglich, da sonst ja nirgends Kontakt zur Umgebung besteht. In der Regel liegt immer ein kleines Stück des Reifenumfangs am Boden und ist über die Haftreibung mit dem Untergrund verbunden.

Beim Bremsen („Beschleunigungskraft“ nach hinten) muss die Reaktionskraft nach vorne wirken und wird durch die Reifen-Auflageflächen auf den Boden und somit auf die ganze Erde übertragen. Dadurch wird die maximal mögliche Bremsbeschleunigung festgelegt:

$$m \cdot a_{\mathrm{Br}} \;\leq\; F_{\mathrm{R,H}} \;=\; \mu_H \cdot F_N \;=\; \mu_H \cdot m \cdot g \qquad \rightarrow \quad a_{\mathrm{Br}} \;\leq\; \mu_H \cdot g$$

Als Normalkraft wird hier die gesamte Schwerkraft des Autos eingesetzt, die ja über die Reifen auf den Boden wirkt (egal, wie die Schwerkraft auf die einzelnen Reifen verteilt ist). Der Haftreibungskoeffizient μ_H zwischen Reifen und Asphalt liegt typisch im Bereich von $\mu_H \approx 0,7$, sodass die Bremsbeschleunigung nur Werte um $a_{\mathrm{Br}} \leq 7\,\mathrm{m/s^2}$ erreichen kann, jedenfalls immer weniger als die Erdbeschleunigung.

Wenn stärker gebremst wird ($F_B > F_{\mathrm{R,H}}$), kann die Haftreibung nicht genügend Gegenkraft zur Verfügung stellen und das das Fahrzeug beginnt zu rutschen. Beachten Sie, dass die Haftreibung nun schlagartig endet und die Gleitreibung die Rolle als Reaktionskraft „übernimmt“. Da die Gleitreibung aber kleiner ist als die Haftreibung, wird auch die Bremskraft schlagartig kleiner, egal wie fest man auf die Bremse steigt: Keine Kraft kann größer sein als ihre Reaktionskraft! Statt $F_B = F_{\mathrm{R,H}}$ wir nun plötzlich nur mit der kleineren Kraft $F_B = F_{\mathrm{R,G}}$ gebremst, was zu erheblicher Verlängerung des Bremswegs führen kann. Um dies zu verhindern, haben moderne Autos Antiblockiersysteme (ABS) eingebaut, die dafür sorgen, dass die Reifen beim Bremsen stets rollen (und somit auf der Straße aufliegen) und nicht rutschen.

(C) Beschleunigen

Zum Beschleunigen (Tempo-Erhöhung) muss die Reaktionskraft nach hinten wirken. Wieder wird sie durch die Haftreibung der Reifen auf die Straße übertragen. Da die meisten Autos Vorderradantrieb haben, machen nur zwei Reifen den Kraftschluss mit dem Boden, und die Normalkraft F_N ist nun nicht die gesamte Gewichtskraft des Fahrzeugs, sondern nur jener Anteil, der auf den angetriebenen Rädern ruht (in erste Näherung die Hälfte des Fahrzeuggewichts).

Analog zum Bremsen kann die Beschleunigungskraft höchstens so groß sein wie die Haftreibungskraft an den Antriebsrädern. Wenn mehr Kraft angelegt wird, drehen die Reifen durch, die schwächere Gleitreibung übernimmt und die Beschleunigung nimmt ab. Ein solcher „Kavalierstart“ mit durchdrehenden Reifen ist nicht nur verboten (unnötige Lärmbelastung), sondern auch langsamer als die Beschleunigung mit haftenden Antriebsrädern. In Autos gibt es verschiedene elektronische Systeme, die dafür sorgen, dass die Reifen beim Beschleunigen nicht durchdrehen.

Manche Fahrzeuge sind mit extra breiten Reifen ausgestattet, und oft herrscht die Meinung, dass damit besser beschleunigt und gebremst werden kann. Aus der Gleichung (3.15) für die Haftreibung wird sofort klar, dass dies in erster Näherung nicht stimmen kann: Die Reibung hängt nicht von der Auflagefläche ab.

Es gibt aber zwei Gründe, warum doch ein kleiner Vorteil entstehen kann: Erstens verschleißen breite Reifen nicht so schnell wie schmale, weil es beim Verschleiß auch auf die Auflagefläche ankommt. Deshalb werden für Breitreifen manchmal weichere Gummimischungen verwendet, die nicht ganz so lange halten wie die normalen, deren Haftreibungskoeffizient μ_H aber (geringfügig) höher ist als der übliche. Zweitens sind die erheblichen Quermomente, die beim schnellen Kurvenfahren auf die Achse ausgeübt werden, mit breiteren Reifen kleiner.

Für extreme Beschleunigung von Fahrzeugen ist also in erster Linie ein guter „Kraftschluss“ mit dem Untergrund erforderlich (hohe Motorleistung, die darüber hinaus geht, bringt hier nichts). Theoretisch ist Vierradantrieb für hohe Beschleunigung vorteilhaft, weil dann – wie beim Bremsen – alle Räder beitragen können. Im Motor„sport“ wird versucht, hohen Beschleunigung über deutlich größere Haftreibung zu erreichen, mit Hilfe von Reifen-Gummimischungen, die deutlich weicher sind, besser haften, aber sehr schnell verschleißen.

3.3.3 Gleiten auf einer schiefen Ebene

Wenn ein Körper mit der Masse m auf einer schiefen Ebene liegt, dann wirkt vorerst nur die Schwerkraft $F_g = m \cdot g$, die den Körper einerseits auf die Unterlage drückt und ihn andererseits bergab beschleunigt ihn. Um auszurechnen, was genau passiert, verwenden wir die oben beschriebene Methode der Vektorzerlegung. Wenn die schiefe Ebene den Winkel φ zur Waagrechten hat, können wir leicht ausrechnen, wie sich die Schwerkraft aufteilt:

$$\text{Normalkraft:} \quad F_N = \left|\vec{F_N}\right| = F_g \cdot \cos\varphi \tag{3.21}$$

$$\text{Beschleunigungskraft:} \quad F_B = \left|\vec{F_B}\right| = F_g \cdot \sin\varphi \tag{3.22}$$

$$\text{Summe:} \quad \sqrt{{F_N}^2 + {F_B}^2} = F_g \cdot \sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi} = F_g$$

Aus der Normalkraft können wir nun die Reibung berechnen. Wenn der Körper fest liegt und die Haftreibung größer ist als die Beschleunigungskraft F_B, dann bleibt der Körper ohne Bewegung liegen. Wenn sich der Körper hingegen bewegt, wird er von der Gleitreibung gebremst und von der Beschleunigungskraft F_B beschleunigt – die tatsächliche Beschleunigung berechnet sich aus der Differenz der beiden Kräfte. Es treten also folgende Fälle auf:

$$\begin{aligned}
\text{Körper in Ruhe:} \quad & F_B < F_{R,H} \quad \rightarrow \quad F_g \cdot \sin\varphi < \mu_H \cdot F_g \cdot \cos\varphi \\
\text{Körper startet:} \quad & F_B > F_{R,H} \quad \rightarrow \quad F_g \cdot \sin\varphi > \mu_H \cdot F_g \cdot \cos\varphi \\
\text{Körper gleitet:} \quad & F_{\text{ges}} = F_B - F_{R,G} = F_g \cdot \sin\varphi - \mu_G \cdot F_g \cdot \cos\varphi
\end{aligned}$$

Im letzten Fall – wenn der Körper einmal gleitet – spielt die Haftreibung $F_{R,H}$ keine Rolle, weil sie eine statische Kraft ist und somit nur verhindern kann, dass sich ein Körper in Bewegung setzt. Sobald und solange der Körper gleitet, wird er von der Gleitreibung $F_{R,G}$ gebremst. Die Haftreibung $F_{R,H}$ übernimmt erst wieder dann, wenn der Körper stehen bleiben sollte.

Die Bewegung wird nun gemäß Gleichung (3.18) mit Hilfe der Gesamtkraft F_{ges} berechnet. Weil die Bewegungsrichtung ja fest steht (entlang der schiefen Ebene hinunter), machen wir die Rechnung eindimensional entlang dieser Richtung:

$$a = \frac{F_{\text{ges}}}{m} = \frac{F_g \cdot \sin\varphi - \mu_G \cdot F_g \cdot \cos\varphi}{m} = g \cdot (\sin\varphi - \mu_G \cdot \cos\varphi) \tag{3.23}$$

Diese Rechnung hat natürlich nur Sinn, solange sich der Körper bewegt, weil es ja nur dann Gleitreibung gibt. Beachten Sie, dass die Beschleunigung $a = \text{const}$ ist. Wir können also mit den Gleichungen (2.26) und (2.28) den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit (linear!) und der Position (quadratisch!) entlang der schiefen Ebene berechnen. Wenn a positiv ist, wird der Körper nach unten beschleunigt, wenn a negativ ist, wird er gebremst.

3.3.4 Bewegung auf einer Kreisbahn

Immer, wenn sich ein Körper mit Masse m und Geschwindigkeit $v = |\vec{v}|$ auf einer Kreisbahn mit Radius R bewegt, muss eine Zentripetalkraft wirken, die genau in Richtung auf den Kreismittelpunkt zeigt und deren Betrag mit Gleichung (3.17) berechnet werden kann:

$$\text{Zentripetalkraft:} \qquad \left|\vec{F}_{\text{ZP}}\right| = m \cdot \frac{v^2}{R} \tag{3.24}$$

Dies gilt auch, wenn der Körper keine Kreisbahn beschreibt, sondern eine beliebig geformte Kurve: In jedem Moment kann man einen Kreis an die derzeitige Bahn schmiegen. Die Zentripetalkraft (Richtung und Stärke) entspricht dann für einen Moment jener auf genau diesem Kreis.

Die Zentripetalkraft muss von irgendeiner realen Kraft aufgebracht werden. Wir besprechen im Folgenden einige Szenarien.

(A) Kreisbahn im Gravitationsfeld

Der Mond und sehr viele Satelliten befinden sich im Gravitationsfeld der Erde und stürzen nur deshalb nicht ab, weil sie auf einer gekrümmten Bahn um die Erde laufen. Wir nehmen vorerst an, dass das eine Kreisbahn sei, wie es für viele künstliche Satelliten der Fall ist (im Allgemeinen laufen Planeten und Satelliten auf Ellipsenbahnen, was wir im Kap. 5.3.2 besprechen werden).

Ein Objekt mit Masse m, das sich im Abstand r vom Erdmittelpunkt befindet, wird mit der Gravitationskraft F_G angezogen (Gleichung (3.4)), die quadratisch kleiner wird, je weiter das Objekt von der Erde entfernt ist. Wenn dieses Objekt also auf einer Kreisbahn mit dem Radius r um die Erde laufen soll, muss die Gravitation dort genau gleich groß sein wie die benötigte Zentripetalkraft:

$$F_G(r) \;=\; F_{\mathrm{zp}}(r) \qquad \rightarrow \quad G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \;=\; m \cdot \frac{v^2}{r} \qquad \rightarrow \quad v \;=\; \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} \tag{3.25}$$

Wir erhalten eine Bedingung für die Geschwindigkeit: Wie schnell muss ein Objekt fliegen, um im Abstand r vom Erdmittelpunkt kreisen zu können? Beachten Sie: Für jeden Abstand r ist nur genau eine Geschwindigkeit v möglich, unabhängig von der Masse m des Objekts (die sich wegkürzt).

Als Beispiel betrachten wir die Internationale Raumstation ISS, die in ca. $h = 400\,\mathrm{km}$ Höhe über der Erdoberfläche um die Erde kreist. Der Radius ist also $r = R_E + h = 6770\,\mathrm{km}$. Daraus erhält man mit Gleichung (3.25) die Geschwindigkeit $v = 7670\,\mathrm{m/s} = 27600\,\mathrm{km/h}$ – die Raumstation braucht ungefähr 90 min, um die Erde einmal zu umkreisen.

Die Gleichung (3.25) sagt aus, dass die Gravitationskraft auf der ISS vollständig dafür verwendet wird, die Raumstation permanent auf ihrer Kreisbahn zu halten. Die Beschleunigung wirkt immer genau im rechten Winkel auf die Geschwindigkeit und führt daher ausschließlich zu einer Richtungsänderung. Dies gilt ebenso für alles, was sich auf der Station befindet, z. B. auch für alle Personen.

Bekanntlich erlebt man auf der ISS perfekte „Schwerelosigkeit“. Beachten Sie, dass dieser Begriff nicht bedeutet, dass es dort keine Schwerkraft gibt. Im Gegenteil: Nach Gleichung (3.7) beträgt die „Erdbeschleunigung“ in der Höhe $h = 400\,\mathrm{km}$ über dem Boden etwa $g(400\,\mathrm{km}) \approx 8,7\,\mathrm{m/s^2}$. Diese Beschleunigung wirkt auch tatsächlich und dreht die Raumstation permanent in die Kurve, und ebenso ihre Besatzung. Warum man sich schwerelos fühlt, liegt daran, dass der gesamte menschliche Körper (also jeder Körperteil, sogar jedes Molekül und Atom im Körper) in gleicher Weise beschleunigt wird und nicht, wie auf dem Boden, durch eine Gegenkraft die Erdbeschleunigung verhindern muss.

(B) Kurvenfahrt auf ebener Fahrbahn

Wenn mit einem Fahrzeug eine Kurve gefahren wird, muss die Zentripetalkraft F_{zp} von der Haftreibungskraft zwischen Reifen und Straße aufgebracht werden, wie auch beim

Bremsen und Beschleunigen. Bei einer Kurve mit Radius R gilt:

$$F_{\mathrm{zp}} \leq F_{\mathrm{R,H}} \qquad \rightarrow \quad v \leq \sqrt{R \cdot \mu_H \cdot g}$$

Wenn die benötige Zentripetalkraft größer ist als die maximal vorhandene Haftreibung, kann das Fahrzeug der Lenkbewegung nicht folgen und gleitet geradeaus aus der Kurve. Die Gleitreibung der eingeschlagenen, voll drehenden Vorderräder kann die Richtung ein wenig beeinflussen (sodass man in einem Bogen von der Straße fliegt), aber nie so stark wie die Haftreibung.

Zur formalen Analyse betrachten wir vorerst alle dynamischen Kräfte, die hier wirken, In diesem Fall ist das nur die Schwerkraft $\vec{F}_g$, die vom Schwerpunkt des Fahrzeugs senkrecht nach unten wirkt. Da wir wissen, dass letztendlich auch die Zentripetalkraft $\vec{F}_{\mathrm{zp}}$ auf den Schwerpunkt wirken muss, zerlegen wir die Schwerkraft als einzige verfügbare Kraft in die Zentripetalkraft und eine „Restkraft“ $\vec{F}_x$:

$$\text{Zerlegung:} \qquad \vec{F}_g = \vec{F}_{\mathrm{zp}} + \vec{F}_x \qquad \rightarrow \quad \text{Restkraft} \quad \vec{F}_x = \vec{F}_g - \vec{F}_{\mathrm{zp}}$$

Die „Restkraft“ $\vec{F}_x$ zeigt schräg nach unten und nach außen aus der Kurve. Diese Kraft wird über die Reifen auf den Boden übertragen und muss dort kompensiert werden, damit die Reifen an ihrer Auflagefläche mit dem Boden verbunden bleiben. Die Kompensationskraft $-\vec{F}_x$ hat erstens eine Komponente $\vec{F}_S$, die normal zum Boden auf das Fahrzeug wirkt. Das sind statische Kräfte in der Fahrbahn, die hier senkrecht nach oben wirken und deshalb in diesem speziellen Fall genau die Schwerkraft des Fahrzeugs kompensieren. Zweitens wirkt eine Komponente parallel zur Fahrbahn, nämlich die Haftreibungskraft $\vec{F}_{\mathrm{R,H}}$. Wir erhalten:

$$\text{Kompensation am Boden:} \qquad -\vec{F}_x = \vec{F}_{\mathrm{S}} + \vec{F}_{R,H}$$

Wir betrachten noch einmal die gesamte Situation:

- Die Schwerkraft, die auf den Schwerpunkt des Fahrzeugs wirkt, wird durch die statische Kraft in der Fahrbahndecke völlig kompensiert: Es gibt keine resultierende Beschleunigung nach unten.
- Die Zentripetalkraft wird hingegen nicht kompensiert, sondern ist in Betrag und Richtung gleich groß wie die Haftreibungskraft: Es gibt also eine Beschleunigung in radialer Richtung, die zur Kurvenfahrt führt.

Beachten Sie, dass $F_{\mathrm{zp}} = F_{\mathrm{R,H}}$ meist deutlich kleiner ist als die maximal mögliche Haftreibung $F_{\mathrm{R,H,max}} = \mu_H \cdot F_N$. Sobald diese aber überschritten wird, klappt die Haftung nicht mehr und somit auch nicht die Kurvenfahrt.

Besonders gefährlich ist es, in einer Kurve zu bremsen, wenn man nahe am Zentripetalkraftlimit $F_{\mathrm{zp}} = F_{\mathrm{R,H,max}}$ unterwegs ist, weil dadurch die Kraft, die auf die Straße übertragen wird, noch größer wird: Die Bremskraft F_{Br} (nach hinten) und die Zentripetalkraft F_{zp} (radial nach innen) müssen vektoriell addiert werden und gemeinsam von der Haftreibung „gehalten“ werden.

(C) Kurvenfahrt auf geneigter Fahrbahn

Die meisten Kurven von Straßen und Schienenwegen sind nach innen geneigt. Dies soll die Gefahr des „aus-der-Kurve-Fliegens“ verringern und höhere Kurvengeschwindigkeiten ermöglichen. Bei richtig gewählter Geschwindigkeit wäre es dann sogar ohne jegliche Reibung möglich, um die Kurve zu kommen.

Wie die Kräfte zusammenspielen, überlegt man sich gleich wie oben: Auf das Fahrzeug wirkt vorerst nur die Schwerkraft. Da aber eine Zentripetalkraft benötigt wird, wird die Schwerkraft in diese und eine „Restkraft“ $\vec{F}_x$ aufgeteilt. Diese ist gleich groß wie im im Fall der ebenen Fahrbahn und muss wie dort an den Reifen kompensiert werden.

Zur Beschreibung der Kompensation zerlegen wir die Gegenkraft $-\vec{F}_x$ in eine Normalkraft F_S, die im rechten Winkel zur Unterlage steht, und die Haftreibung $F_{R,H}$, die in der Straßenebene wirkt. Die Haftreibung wird mit Hilfe der Normalkraft F_S berechnet, die hier größer ist als die Gewichtskraft des Autos.

Je nach Neigung der Unterlage kann der für die Kompensation benötigte Anteil der Reibungskraft deutlich kleiner werden, bei richtiger Einstellung (wenn $\vec{F}_x$ genau in Richtung der Flächennormalen zeigt) auch ganz verschwinden. Der Parallelanteil der Restkraft (und somit die Zentripetalkraft) wird in diesem Fall durch die Neigung der Fläche von der Normalkraft bereit gestellt. Bei starker Neigung und/oder niedrigem Tempo kann es sogar geschehen, dass die benötigte Haftreibung nicht ins Kurveninnere zeigt, sondern nach außen – dann wird die Haftreibung gebraucht, um zu verhindern, dass das Fahrzeug auf der geneigten Fläche nach innen abrutscht.

(D) Kurvenfahrt von Zweirädern

Fahrräder, Motorräder usw. „legen sich in die Kurve“, wenn sie eine Richtungsänderung durchführen. Wenn Geschwindigkeit v und Kurvenradius R gegeben sind, liegt dieser Neigungswinkel fest und kann nicht etwa frei gewählt werden.

Die Analyse funktioniert ganz ähnlich wie bei vierrädrigen Gefährten: Als dynamische Kraft steht nur die Schwerkraft zur Verfügung. Da klar ist, dass eine Zentripetalkraft vorhanden sein muss, wird die Schwerkraft in diese und in eine Restkraft $\vec{F}_x$ aufgeteilt. Diese Restkraft muss vom Schwerpunkt geradeaus zu den Reifen laufen und dort von der Straße kompensiert werden, damit die Situation stabil ist. Dies ist nur möglich, wenn der Neigungswinkel genau der Richtung dieser Restkraft entspricht: Der Winkel α gegen die Senkrechte ist also

$$\text{Neigungswinkel:} \qquad \tan\alpha = \frac{F_{\text{zp}}}{F_g} \qquad \rightarrow \qquad \alpha = \arctan\left(\frac{v^2}{R\cdot g}\right) \tag{3.26}$$

Die Kompensation am Kontaktpunkt zwischen Reifen und Straße ist dann wieder gleich wie bei Autos: Die Restkraft wird durch eine statische Kraft (normal zur Straße) und die Haftreibungskraft (parallel zur Straße) kompensiert. Letzteres funktioniert nur, wenn die maximal mögliche Wert der Haftreibung nicht überschritten wird.

3.3.5 Bewegung unter Einfluss des Strömungswiderstands

(A) Stokes-Reibung

Wir beginnen mit dem selteneren Fall der viskosen Reibung, der vor allem in Flüssigkeiten auftritt und auch dort nur bei kleinen Objekten und eher langsamem Tempo. In diesem Fall wird Bewegung durch die Stokes-Reibung gebremst (Gleichung (3.13)), deren Stärke proportional zur momentanen Geschwindigkeit v ist (damit ist die Relativgeschwindigkeit zwischen Medium und bewegtem Körper gemeint).

Was dann passiert, besprechen wir hier anhand eines Beispiels: Eine Kugel (Masse m, Radius r) fällt in einer zähen Flüssigkeit mit der Viskosität η (ein Maß für die Dickflüssigkeit; siehe Kap. 6.4) nach unten. Die Anfangsgeschwindigkeit sei $v_0 = 0$. Die Frage ist, wie sich die Geschwindigkeit mit der Zeit entwickelt (also die Funktion $v(t)$), und wann die Kugel in welcher Tiefe angelangt sein wird ($z(t)$).

Berechnungen dieser Art beginnen immer mit der Bewegungsgleichung (3.18). Dabei kommt es auf $\vec{F}_{\text{ges}}$ an, die Summe aller wirkenden Kräfte. Hier haben wir die Schwerkraft nach unten und, sobald eine Geschwindigkeit nach unten vorhanden ist, die viskose Reibung nach oben. Die Situation spielt sich offensichtlich in einer Dimension ab (oben-unten). Wir verzichten also auf Vektoren und wählen eine Koordinatenachse z vom Startpunkt der Kugel nach unten. Dann erhalten wir aus der Bewegungsgleichung den Ansatz

$$m \cdot a(t) \;=\; F_{\text{ges}}(t) \;=\; m_{\text{eff}} \cdot g - 6\,\pi \cdot r \cdot \eta \cdot v(t) \tag{3.27}$$

Für die Kugelmasse in der Flüssigkeit muss m_{eff} eingesetzt werden, die durch den Auftrieb verminderte Masse (siehe Kap. 6.3.3), die aber bekannt ist. Unbekannt sind hier nur die zeitlichen Verläufe von Beschleunigung und Geschwindigkeit, die wir ermitteln wollen. Wir verwenden die Definition der Beschleunigung als zeitliche Änderung der Geschwindigkeit (Gleichung (2.4)) und erhalten die Differenzialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \;=\; \frac{m_{\text{eff}}}{m} \cdot g - \frac{6\,\pi \cdot r \cdot \eta}{m} \cdot v(t) \tag{3.28}$$

Als Lösung einer solchen Differenzialgleichung wird eine Funktion gesucht, hier konkret eine Funktion $v(t)$, die die Gleichung erfüllt, wenn man sie einsetzt. Vorerst kann man aus einer dieser Gleichung auch ohne Lösung eine Menge ablesen:

- Zu Beginn, wenn $v = v_0 = 0$ ist, wird das Objekt ungefähr mit g beschleunigt.
- Sobald dann die Geschwindigkeit zunimmt, wird die Beschleunigung mehr und mehr reduziert.
- Bei einer bestimmten Geschwindigkeit ist die gesamte Beschleunigung $a = 0$:

$$\text{Endgeschwindigkeit} \qquad v_\infty \;=\; \frac{m_{\text{eff}} \cdot g}{6\,\pi \cdot r \cdot \eta} \tag{3.29}$$

- Wenn die Geschwindigkeit $v > v_\infty$ ist, wird die Kugel gebremst ($a < 0$).

Wenn man v_∞ in die Differenzialgleichung (3.28) einetzt, erhält man

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \;=\; \frac{6\,\pi \cdot r \cdot \eta}{m} \cdot (v_\infty - v(t)) \tag{3.30}$$

Mit Methoden aus der Mathematik ergibt sich daraus der Zeitverlauf

$$v(t) \;=\; v_\infty \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{6\,\pi \cdot r \cdot \eta}{m} \cdot t\right)\right) \tag{3.31}$$

Hier bedeutet „$\exp(x)$" die Exponentialfunktion e^x. Wir sehen, dass sich die Geschwindigkeit mit der Zeit immer näher an die Endgeschwindigkeit annähert.

(B) Newton-Reibung

Deutlich häufiger ist der Fall, dass bewegte Objekte durch turbulente Reibung gebremst werden. Dann ist in die Gesamtkraft – neben etwaigen beschleunigenden Kräften – die Newtonsche Reibungskraft nach Gleichung (3.14) einzusetzen.

Als Beispiel untersuchen wir hier den Fall, dass sich ein Körper im freien Fall durch die Luft bewegt. Im allgemeinen Fall ist für die Geschwindigkeit $\vec{v}$ die Relativgeschwindigkeit des bewegten Körpers gegen das ihn umgebende Medium einzusetzen. Wenn es Seitenwind gibt, hat die Reibungskraft auf den fallenden Körper also auch eine seitliche Komponente. Wir nehmen hier der Einfachheit halber an, dass es windstill ist, und können dann in einer Dimension arbeiten (entlang der z-Achse nach unten):

$$m \cdot a(t) \;=\; F_{\mathrm{ges}}(t) \;=\; m \cdot g - \frac{1}{2} \cdot c_w \cdot A \cdot \rho \cdot v^2 \tag{3.32}$$

Die Dichte der Luft hängt stark von Temperatur und Druck ab. Bei $T = 20\,°\mathrm{C}$ und dem „Normaldruck" auf Meereshöhe $p_0 = 1013,25\,\mathrm{mbar}$ beträgt sie $\rho = \rho_L = 1,204\,\mathrm{kg/m^3}$. Darüber hinaus tragen die Masse m, die Querschnittsfläche A und der c_w-Wert des fallenden Körpers zum Luftwiderstand bei. Wir setzen die Beschleunigung als Zeitableitung der Geschwindigkeit ein und erhalten

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \;=\; g - \frac{c_w \cdot A \cdot \rho}{2\,m} \cdot v(t)^2 \tag{3.33}$$

Wieder lässt sich Einiges aus der Gleichung selbst ablesen. Dazu nehmen wir an, dass die Anfangsgeschwindigkeit unseres fallenden Körpers $v_0 = 0$ ist:

- Zu Beginn, wenn $v = v_0 = 0$ ist, wird das Objekt mit g beschleunigt.
- Sobald die Geschwindigkeit zunimmt, wird die Beschleunigung stark reduziert.
- Bei einer best. Geschwindigkeit v_∞ ist die gesamte Beschleunigung $a = 0$:

$$\text{Endgeschwindigkeit} \qquad v_\infty \;=\; \sqrt{\frac{2\,m \cdot g}{c_w \cdot A \cdot \rho}} \tag{3.34}$$

- Wenn die Geschwindigkeit $v > v_\infty$ ist, wird der Körper gebremst ($a < 0$).

Wir setzen v_∞ in die Gleichung (3.33) ein und erhalten

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{c_w \cdot A \cdot \rho}{2\,m} \cdot \left({v_\infty}^2 - v(t)^2\right) \tag{3.35}$$

Diese Gleichung ist schwer zu lösen. Für unseren Sonderfall ($v_0 = 0$) ergibt sich

$$v(t) = v_\infty \cdot \tanh\left(\frac{g}{v_\infty} \cdot t\right) \tag{3.36}$$

Die Funktion $\tanh(x)$ (Tangens hyperbolicus) hat für x-Werte nahe Null Funktionswerte $\tanh(x) \approx x$ (steigt also linear). Für $x \gg 1$ nähert sich die Funktion dem Wert $\tanh(x) \sim 1$ (ist also konstant). Die Funktion für $v(t)$ beschreibt also genau, dass die Fallgeschwindigkeit anfangs mit $a \approx g$ zunimmt. Dann wird die Zunahme immer langsamer und nähert sich schließlich immer mehr dem Endwert v_∞ an.

Wie groß die Endgeschwindigkeit im freien Fall an Luft tatsächlich wird, hängt vom Zusammenspiel der Größen Masse m, Widerstandsbeiwert c_w und Querschnitt A ab. So erhält man z. B. für einen Fallschirm ($m = 80\,\mathrm{kg}$, $c_w = 1{,}3$, $A = 32\,\mathrm{m}^2$) eine Endgeschwindigkeit $v_\infty = 5{,}6\,\mathrm{m/s} \approx 20\,\mathrm{km/h}$, für eine Stahlkugel mit 5 cm Durchmesser ($m = 514\,\mathrm{g}$, $c_w = 0{,}40$, $A = 19{,}6\,\mathrm{cm}^2$) hingegen $v_\infty = 103\,\mathrm{m/s} \approx 370\,\mathrm{km/h}$.

Wie schon in Abschnitt 3.3.2 besprochen, wird die Antriebskraft eines Fahrzeugs, das sich mit konstanter Geschwindigkeit v_1 fortbewegt, vor allem für die Überwindung des Luftwiderstands verwendet. Die Geschwindigkeit v_1 muss dabei gegen das Medium gemessen werden: Bei gleichem Tempo gegenüber der Straße ist bei Gegenwind eine größere, bei Rückenwind eine kleinere Kraft aufzubringen. Da die Luftreibung mit dem Quadrat des Widerstands skaliert, führen auch relativ geringe Unterschiede von v_1 zu merkbaren Unterschieden in der aufzuwendenden Kraft.

3.3.6 Bewegung unter Einfluss der Federkraft

Wir betrachten eine senkrecht hängende Spiralfeder (Federkonstante D), an die die Masse m angehängt wird. Die Masse der Feder selbst sei vernachlässigbar. Nach dem Anhängen der Masse stellt sich ein Kräftegleichgewicht ein, wenn die Feder genau um eine bestimmte Strecke ΔL_0 verlängert ist, sodass sich die Federkraft $F_{F,0} = -D \cdot \Delta L_0$ (nach oben) und die Schwerkraft $F_g = m \cdot g$ (nach unten) genau kompensieren:

$$F_g + F_{F,0} = 0 = m \cdot g - D \cdot \Delta L_0 = 0 \qquad \rightarrow \quad \Delta L_0 = \frac{m \cdot g}{D}$$

Die Länge, die die Feder nun eingenommen hat, definiert den Gleichgewichtszustand des Systems. Wir messen ab nun die Position z der Masse von diesem Gleichgewichtspunkt aus, und zwar als $z = \Delta L$, die Verlängerung oder Verkürzung der Feder. $z = 0$ bedeutet also, dass die Masse an der Ruheposition ist, bei $z < 0$ ist sie höher und die Feder ist gestaucht, bei $z > 0$ ist die Masse tiefer und die Feder ist gedehnt.

Wenn die Masse von der Ruhelage in eine andere Position gebracht wird, bleibt die Schwerkraft gleich, während sich die Federkraft ändert, sodass insgesamt die Kraft

$$F(z) \;=\; F_g + (F_{F,0} + F_F(z)) \;=\; F_F(z) \;=\; -D \cdot z$$

auf die Masse wirkt. Beachten Sie, dass die Summe aus der Schwerkraft F_g und der Federkraft $F_{F,0}$ im Gleichgewicht genau Null ist (siehe oben): Deshalb wirkt im Ganzen nur jener Anteil der Federkraft $F_F(z)$, der durch die Auslenkung z entsteht. Zur Untersuchung der Bewegung müssen wir diese Gesamtkraft in die Bewegungsgleichung (3.18) einsetzen:

$$m \cdot a \;=\; F(z) \;=\; -D \cdot z \tag{3.37}$$

Das ist wieder eine 1D-Betrachtung, weil die Bewegung strikt nur nach oben und unten verläuft. Aus der Gleichung (3.37) sehen wir, dass die Beschleunigung a immer negativ proportional zur Position z ist: Wenn die Position positiv ist (gespannte Feder), wird die Masse negativ beschleunigt (nach oben), und umgekehrt.

Zur Berechnung, was nun genau geschieht, müssen wir den zeitlichen Verlauf berücksichtigen. In der Gleichung (3.37) wird eine Momentaufnahme zu einem bestimmten Zeitpunkt gezeigt. Sowohl Position z als auch Beschleunigung a ändern sich aber mit der Zeit. Außerdem können wir einsetzen, dass die Beschleunigung die zweite Ableitung der Position nach der Zeit ist (siehe S. 19). Damit erhalten wir

$$\text{Schwingungsgleichung:} \qquad a(t) \;=\; \frac{\mathrm{d}^2 z(t)}{\mathrm{d}t^2} \;=\; -\frac{D}{m} \cdot z(t) \tag{3.38}$$

Das ist eine Differenzialgleichung für die Position: Als Lösung wird eine passende Funktion $z(t)$ gesucht, für die Gleichung immer stimmt (für alle möglichen Zeiten t !), wenn man sie und ihre zweite Ableitung einsetzt.

In der Mathematik gibt es eine Reihe von Methoden, solche Differenzialgleichungen zu lösen, also alle passenden Funktionen $z(t)$ aufzufinden. Wir schreiben hier nur eine von vielen möglichen Lösungen an:

$$\text{Harmonische Schwingung:} \qquad z(t) \;=\; z_0 \cdot \cos\left(2\,\pi \cdot \frac{t}{T_0}\right) \tag{3.39}$$

$$\text{mit der Periodendauer} \qquad T_0 \;=\; 2\,\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} \tag{3.40}$$

Das Argument der Cosinusfunktion $(2\,\pi \cdot t/T_0)$ steht hier in der Einheit Radiant (siehe Kap. 5). Wenn die Zeit größer und größer wird, wird dieses Argument immer größer und der Cosinus variiert seinen Wert zyklisch zwischen 1 und -1. Das bedeutet, dass die z-Position der Masse, die an der Feder hängt, immer wieder zwischen den Positionen $+z_0$ und $-z_0$ hin und her schwingt.

Die Periodendauer T_0, also die Dauer einer ganzen Schwingung (z. B. zwischen einem und dem folgenden Hochpunkt der Masse), hängt von der schwingenden Masse m (große Masse $\rightarrow$ langsame Schwingung) und von der Federkonstante D ab (starke Feder $\rightarrow$ schnelle Schwingung). Schwingungen und die damit eng zusammenhängenden Wellen werden in allen Details in der Vorlesung „Optik“ besprochen.

3.3.7 Statik

(A) Prinzip

Die Statik beschäftigt sich mit ruhenden Systemen und mit den Bedingungen, die notwendig sind, damit ein solches Gleichgewicht bestehen bleibt. Damit ist die Statik eigentlich das genaue Gegenteil der Dynamik, die ja bewegte Körper beschreibt. Wir besprechen sie trotzdem kurz in diesem Kapitel, weil die Methoden gleich sind.

Die Statik ist ein essentieller Bestandteil des Bauwesens, aber auch im Fahrzeug- und Maschinenbau wichtig. Dabei geht es immer darum, dass Bauwerke und Konstruktionen für lange Zeit stehen bleiben, obwohl Kräfte auf sie wirken. Immer vorhanden ist die Schwerkraft auf die Bestandteile des Bauwerks, oft aber auch Kräfte durch die Benützung („Traglast“), durch Wind, Wasser oder Rückstoßkräfte.

Da sich am statischen Gerüst eines Bauwerks nichts bewegen soll (keine Beschleunigung!) müssen nach dem Trägheitsprinzip (Abschnitt 3.1.1) an jedem Punkt alle vorhandenen Kräfte kompensiert sein. Typische Tragwerke setzen sich aus geraden Elementen (Stangen, Balken etc.) zusammen, entlang derer die Kräfte wirken können. Man baut die Elemente dann so zusammen, dass alle Kräfte am Ende „abgeführt“ werden, d. h. auf feste Fundamente oder die Umgebung wirken und dort durch statische Kräfte kompensiert werden.

Was wir hier besprechen, ist noch unvollständig: Neben der Kompensation aller dynamischen Kräfte müssen immer auch alle Drehmomente kompensiert werden („Kräfte- und Momentengleichgewicht“): Dies wird im Kap. 5.3.4 besprochen.

(B) Beispiel: Baukonstruktion

Im Bauwesen hat man mit dem Problem zu tun, dass hochliegende Bauteile (Gewölbe, Dachstuhl etc.) von der Schwerkraft angezogen werden. Diese Schwerkraft muss über tiefer liegende Bauteile sicher in den Boden „abgeführt“ werden.

Ein einfacher Weg dafür sind waagrechte Tragstrukturen (Holzbalken, Stahlträger) auf senkrechten, durchgehenden Mauern. Dann werden alle Kräfte, die von oben auf die waagrechten Strukturen wirken, an den Auflagepunkten auf die senkrechten Mauern verteilt, ohne störende und gefährliche schräg wirkende Kräfte.

Sobald schräge Konstruktionselemente ins Spiel kommen (Dachstuhl, Gewölbe etc.), werden Kräfte entlang dieser Elemente abgeführt, was zwangsläufig neben den senkrechten auch waagrechte Kraftkomponenten mit sich bringt, die typisch aus dem Gebäude hinaus zeigen und die senkrechten Wände auseinander drücken.

Dagegen müssen konstruktive Maßnahmen ergriffen werden:

- Dachstühle mit ihren schrägen Balken werden durch Querbalken so gebaut, dass sie in sich steif sind. Somit wird die gesamte Schwerkraft senkrecht nach unten abgeführt.

- Rundbogen-Gewölbe wurden schon in historischer Zeit (und werden noch heute) oft durch Zuganker stabilisiert. Das sind Metallstangen, die quer durch die Rundung laufen und an beiden Wänden außen großflächig befestigt sind, um ein Auseinanderdrücken zu verhindern.
- Spitzbogengewölbe im gotischen Stil sind besonders anfällig für zerstörerische Querkräfte, weil dort außerdem wegen großer Fenster nur relativ kleine stützenden Wandflächen vorhanden sind. Daher wurden außen aufwändige Stützkonstruktionen angebaut, die die nach außen drängenden Kräfte abfangen können.

(C) Beispiel: Wäscheleine

Viele einfache Konstruktionen des täglichen Lebens erzeugen hohe statische Belastungen. Ein Beispiel ist eine einfache Wäscheleine, die straff gespannt an zwei Haken zwischen gegenüberliegenden Wänden hängt. Wenn auf dieser Leine Gegenstände mit der Masse M hängen, wirkt die Schwerkraft $F_g = M \cdot g$ auf die Leine. Der Einfachheit halber stellen wir vor, dass die gesamte Last genau in der Mitte der Leine hängt. Die Leine biegt sich durch (Winkel α zur Waagrechten), bleibt dann aber bewegungslos, was beweist, dass die Schwerkraft durch andere Kräfte kompensiert wird.

Wir betrachten den tiefsten Punkt der Leine: Abgesehen von der Last können Kräfte nur nach beiden Seiten entlang der Leine wirken. Damit die Schwerkraft der Last kompensiert werden kann, muss jede der beiden Seilhälften die Hälfte davon aufnehmen, und zwar als z-Komponente. Weil die Kraft in jedem Seilstück aber entlang des Seils laufen muss, muss neben der erzwungenen z-Komponente auch eine viel größere x-Komponente vorliegen, mit dem Betrag $|F_x| = |F_z| \,/\, \tan\alpha$. Die beiden x Komponenten sind am Mittelpunkt des Seils entgegengerichtet und kompensieren sich gegenseitig. In jeder Hälfte des Seils wirkt nun eine Kraft

$$\text{Kompensationskraft:} \qquad F_K \;=\; \frac{F_g}{2} \cdot \frac{1}{\sin\alpha}\ .$$

So ist jede Kompensationskraft bei einem Winkel von $\alpha = 5°$ um $5,7$ mal größer als die Gewichtskraft. Bei einer hängenden Masse von $M = 15\,\mathrm{kg}$ führt das zu zwei Kräften von je $F_K \approx 850\,\mathrm{N}$ – das entspricht der Gewichtskraft einer Masse mit $M = 86\,\mathrm{kg}$.

Die Kompensation der Schwerkraft kann zu Kräften führen, die dramatisch größer sind als die ursprüngliche Schwerkraft selbst. Dies führt zu erheblichen und oft unerwarteten Belastungen aller Komponenten (hier: Seil, Haken zur Aufhängung etc.).