5.3 Beispiele für Drehbewegungen

5.3.1 Drehschwingungen

Es gibt viele Situationen, bei denen ein physikalisches System seinen Gleichgewichtszustand mit einer Drehbewegung verlassen kann, sodass ein rücktreibendes Drehmoment entsteht. Wenn dieses rücktreibende Moment D proportional zur momentanen Auslenkung ϕ ist, entsteht in einer solchen Situation immer eine harmonische Schwingung, konkret eine harmonische Drehschwingung.

Diese Situation ist ganz analog zu jener, die wir im Kap. 3.3.6 für eine lineare Feder besprochen haben: Wenn die Feder aus ihrer Gleichgewichtsposition ausgelenkt wird (durch Dehnen oder Stauchen), entsteht eine rücktreibende Kraft, die proportional zur Auslenkung ist ($F(z) \sim z$). Dies führt zu einer harmonischen Schwingung, die mit einer Cosinusfunktion beschrieben wird (Gleichung (3.39)). Wir besprechen im Folgenden einige Beispiele, bei denen dieser Formalismus auf Drehbewegungen angewandt wird.

(A) Torsionsschwingungen

Verschiedene Arten von Spiral- und Drehfedern haben die Eigenschaft, ein rücktreibendes Drehmoment zu erzeugen, sobald sie aus ihrer Gleichgewichtslage weggedreht werden, ebenso steife Metalldrähte. Dieses Verhalten ist ganz analog zu den linearen Federn (siehe Kap. 3.2.3): Das rücktreibende Drehmoment D ist negativ proportional zur Auslenkung (Winkel φ):

$$\text{Torsionsfeder:} \qquad D = -\kappa \cdot \varphi \qquad \text{mit dem Richtmoment } \kappa \tag{5.38}$$

Die Proportionalitätskonstante κ heißt Richtmoment (manchmal auch „Direktionsmoment“), und wird korrekt in $\mathrm{N\,m/rad}$ angegeben (oft wird dann nur $\mathrm{N\,m}$ geschrieben!), manchmal auch in $\mathrm{N \cdot m/°}$. κ gibt an, wie „stark“ eine spezielle Drehfeder ist (bzw. wie stark die Tendenz eines Fadens zum Sich-gerade-Ausrichten).

Es gibt viele Vorrichtungen, an denen diese Tendenz ausgenützt wird, zu einer bestimmten feste Orientierung zurückzukehren. Zwei Beispiele:

- Drehfeder: Das ist eine Spiralfeder, die an ihrem äußeren Ende fest montiert ist und in deren Zentrum eine vertikale Achse befestigt wird. An dieser Achse wird nun ein waagrechtes Objekt angebracht. Wenn dieses durch Drehung aus seiner wohldefinierte Ruhelage ausgelenkt wird, holt die Spiralfeder es zurück.
- Torsionsfaden (siehe auch Kap. 6.2.3): Metallfäden haben die Eigenschaft, dass sie, wenn sie als Aufhängung für eine Last dienen, in einer bestimmten Orientierung hängen. Wenn die Last gedreht wird, induziert der Faden ein rücktreibendes Moment, das die Last in Richtung auf die Ruhelage zurück dreht.

Das Verhalten von Drehfedern und Torsionsfäden ist ganz analog zu den linearen Federn (siehe Kap. 3.2.3): Je größer die Auslenkung (Winkel φ), desto größer das rücktreibende Drehmoment D. Man verwendet solche Drehfedern deshalb zur Messung von Drehmomenten (in Analogie zu „Federwaagen“ zur Messung von Kräften), weil ein bestimmtes Drehmoment zu einer wohldefinierten Verdrehung führt.

Wenn wir einen Körper an einer Drehfeder befestigen, dessen Trägheitsmoment I bezüglich der Feder-Drehachse bekannt ist, erhalten wir, sobald wir ihn auslenken, gemäß Gleichung (5.14) folgende Bewegungsgleichung:

$$D(t) \;=\; \alpha(t)\cdot I \;=\; -\kappa\cdot\varphi(t) \qquad \rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}^2\varphi(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\kappa}{I}\cdot\varphi(t) \;=\; 0 \tag{5.39}$$

Das ist die Schwingungsgleichung der Drehschwingung und hat – abgesehen von anderen Variablennamen – genau die gleiche Struktur wie die Schwingungsgleichung (3.38) für ein Federpendel: „Zweite Ableitung einer Funktion plus Konstante mal dieselbe Funktion gleich Null.“ Deshalb können wir die Lösung aus Kap. 3.3.6 analog übernehmen und erhalten

$$\varphi(t) \;=\; \varphi_0\cdot\cos\left(2\pi\cdot\frac{t}{T_0}\right) \;=\; \varphi_0\cdot\cos\left(\omega_0\cdot t\right) \tag{5.40}$$

$$\text{mit} \quad T_0 \;=\; 2\pi\cdot\sqrt{\frac{I}{\kappa}} \qquad \big(\text{Periodendauer einer Schwingung}\big)$$

$$\text{und} \quad \omega_0 \;=\; 2\pi\cdot\nu_0 \;=\; \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \qquad \big(\text{Kreisfrequenz der Schwingung}\big)$$

Verwechseln Sie die (konstante) Kreisfrequenz ω_0 der Drehschwingung nicht mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega(t) = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ des Körpers auf seinem Kreisbogen während der Schwingung (die sich andauernd verändert)! Beachten Sie, dass die Periodendauer T_0, die Frequenz ν_0 und die Kreisfrequenz ω_0 der Drehschwingung nicht von der Amplitude φ_0 der Schwingung abhängen, sondern nur vom Trägheitsmoment I (je größer, desto langsamer) und vom Richtmoment κ (je größer, desto schneller), wieder analog zur linearen Schwingung im Kap. 3.3.6.

Die Gleichung (5.40) beschreibt ungedämpfte Drehschwingungen, wie sie in unserem Lebensumfeld eigentlich nicht vorkommen. Dabei wird die Rotationsenergie E_{rot} zyklisch in potenzielle Federenergie $E_{\mathrm{pot}} = \kappa\cdot\varphi^2/2$ und wieder zurück umgewandelt. In Realität tritt zusätzlich immer Dämpfung auf, die auf Dauer zur Umwandlung der Schwingungsenergie in thermische Energie führt (Details dazu: Vorlesung „Optik“). Dem kann man entgegenwirken, indem laufend Energie zugeführt wird, idealerweise periodisch und (fast) genau mit der Frequenz ν_0 der Drehschwingung („resonante Anregung“). Dann reicht geringe Energiezufuhr aus, um eine solche Schwingung mit hoher Amplitude am Schwingen zu erhalten: Wenn die Energie phasenrichtig zugeführt wird, müssen ja nur die (meist kleinen) Verluste ausgeglichen werden.

Torsionsschwingungen werden zum Beispiel in mechanischen Uhren verwendet, um einen konstanten „Takt“ vorzugeben. Dazu wird ein kleiner Metallring („Unruh“ genannt) von einer Spiralfeder in eine Drehschwingung versetzt. Diese Drehschwingung bewegt den „Anker“ (einen beweglichen Metallhaken) in bestimmten Phasen hin und her. Der Anker greift dann für bestimmte Zeit in ein Zahnrad des Räderwerks ein und stoppt dieses. Wenn er durch die Drehschwingung bewegt wird, kann sich das Zahnrad um einen wohldefinierten kleinen Winkel weiterdrehen, bevor es wieder vom Anker gestoppt wird. Dieses Abbremsen überträgt andererseits genau so viel Energie auf die Drehschwingung, dass sie mit konstanter Amplitude weiterläuft und den Abbremsvorgang zyklisch mit immer derselben Wiederholrate durchführt. Die Antriebsenergie einer mechanische Uhr kommt typisch aus einer zweiten Spiralfeder, die täglich gespannt werden muss und ihre Energie langsam ans Räderwerk abgibt.

(B) Das mathematische Pendel

Das mathematische Pendel ist eine Idealisierung, die in der Praxis nie vollständig erreicht werden kann, aber in vielen Fällen doch nahezu: Wir betrachten eine „punktförmige“ Masse m (keine Ausdehnung), die an einem „masselosen“ Faden der Länge R hängt. Wenn man die Masse anschubst, pendelt sie auf einem Kreisbogen hin und her – der Mittelpunkt dieses Bogens ist der Aufhängepunkt des Fadens.

Da sich die Bewegung auf einem Kreisbogen abspielt, benutzen wir zur Beschreibung den Formalismus der Drehbewegungen, konkret den veränderlichen Winkel $\varphi(t)$ zur Beschreibung der Position. Der Radius der Kreisbewegung ist hier die Pendellänge L.

- Auslenkung s (Länge des Kreisbogens): $s(t) = L \cdot \varphi(t)$
- Beschleunigung a $\quad a(t) = \dfrac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2} = L \cdot \alpha(t) = L \cdot \dfrac{\mathrm{d}^2 \varphi(t)}{\mathrm{d}t^2}$
- Rücktreibende Kraft F_B (Komponente in Richtung des Kreisbogens):

$$F_B(t) = -m \cdot g \cdot \sin\varphi(t) \approx -m \cdot g \cdot \varphi(t)$$

Beachten Sie, dass die letzte Näherung nur zulässig ist, wenn der Winkel φ hinreichend klein ist (und natürlich nur, wenn er in Radiant angegeben wird!): Bei Winkeln unter $5°$ ist der Fehler unter $0,1\,\%$, bei $20°$ hingegen schon $2\,\%$.

Nun können wir die Bewegungsgleichung aufstellen („Angetriebene Masse mal entstehende Beschleunigung ist gleich treibende Kraft“)

$$m \cdot a(t) = F_B(t) \quad \rightarrow \quad m \cdot L \cdot \frac{\mathrm{d}^2\varphi(t)}{\mathrm{d}t^2} = -m \cdot g \cdot \varphi(t)$$

$$\rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2\varphi(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{L} \cdot \varphi(t) = 0 \tag{5.41}$$

Das ist wieder eine Schwingungsgleichung mit der Lösung

$$\text{Kreisfrequenz:} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \rightarrow \quad \text{Frequenz:} \quad \nu_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{L}} \tag{5.42}$$

$$\text{Periodendauer:} \quad T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} \tag{5.43}$$

Wir sehen, dass die Schwingungsfrequenz nur von der Fadenlänge L und der Erdbeschleunigung g abhängt, nicht jedoch von der angehängten Masse, von der Amplitude der Schwingung und von irgendwelchen anderen Größen. Ein solches Pendel kann also verwendet werden, um einen konstanten Takt anzugeben, z. B. für Uhren.

Beachten Sie aber, dass dieses Ergebnis nur durch mehrere Näherungen zustande kommt (z. B. masseloser Faden, Masse ohne Volumen, sehr kleine Auslenkung, keine Reibung). Der dadurch eingeführte Fehler ist in der Regel klein; wenn ein mathematisches Pendel jedoch für Präzisionsmessungen verwendet werden soll, muss man die Berechnung genauer machen.

(C) Das physikalische Pendel

Ein physikalisches Pendel ist ein starrer Körper (Masse M), der sich um irgendeine beliebige Achse frei drehen kann. Das Trägheitsmoment I um diese Achse sei bekannt. Wichtig ist nur, dass die Achse nicht den Schwerpunkt des Körpers enthält – vielmehr sei der Schwerpunkt um den Abstand d von der Achse entfernt.

Wenn den Körper an seiner Achse befestigt ist und frei hängt, wird er sich so drehen, dass sein Schwerpunkt genau senkrecht unter der Achse zu liegen kommt. Das ist die Gleichgewichtsstellung des Pendels.

Wird der Körper nun aus der Gleichgewichtsposition ausgelenkt, dann ist die Verbindungslinie zwischen Schwerpunkt und Achse nicht mehr vertikal, sondern hat einen Winkel φ zur Vertikalen. Deshalb kann die Schwerkraft $F_g = m \cdot g$, die am Schwerpunkt angreift, gemeinsam mit der entgegengesetzt wirkenden Kompensationskraft an der Achse ein Drehmoment D bewirken, das den Körper in eine Drehbewegung versetzt. Zur Beschreibung der Dynamik stellen wir die Bewegungsgleichung der Rotationsbewegung auf:

$$D \;=\; I \cdot \frac{\mathrm{d}^2\varphi(t)}{\mathrm{d}t^2} \;=\; -F_g \cdot d \cdot \sin\varphi$$

Wieder verwenden wir die Näherung $\sin\varphi \approx \varphi$ (für kleine Winkel φ; Winkel in Radiant einsetzen!) und erhalten eine Schwingungsgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{M \cdot g \cdot d}{I} \cdot \varphi \;=\; 0\;,$$

deren Kreisfrequenz ω_0 sofort abgelesen werden kann:

$$\omega_0 \;=\; \sqrt{\frac{M \cdot g \cdot d}{I}} \qquad \rightarrow \qquad \text{Frequenz:} \quad \nu_0 \;=\; \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{M \cdot g \cdot d}{I}} \tag{5.44}$$

$$\text{Periodendauer:} \quad T_0 \;=\; 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I}{M \cdot g \cdot d}} \tag{5.45}$$

Die Schwingungsdauer T_0 hängt also – neben der Erdbeschleunigung g – von mehreren Parametern des Körpers ab: vom Trägheitsmoment I, von der Gesamtmasse M und vom Achsabstand d. Wenn man die Periodendauer des physikalischen Pendels mit jener eines mathematischen Pendels vergleicht (Gleichung (5.43)), dann sieht man, dass ein mathematisches Pendel gleich schnell schwingt, wenn es die Länge

$$L = L_{\text{red}} = \frac{I}{M \cdot d} \qquad \big(\text{reduzierte Pendellänge}\big) \tag{5.46}$$

hat. Man kann die Pendelschwingung also ganz gleich beschreiben, wenn man sich die gesamte Masse des physikalischen Pendels in einem Punkt konzentriert denkt, der sich im Abstand L_{red} von der gewählten Drehachse befindet. Beachten Sie, dass dieser sogenannte „Schwingungsmittelpunkt“ nicht der Schwerpunkt des Körpers ist, sondern – vom Drehpunkt aus gesehen – immer hinter dem Schwerpunkt liegt.

Interessanterweise erhält man genau dieselbe Schwingungsdauer, wenn man eine Achse verwendet, die genau durch diesen Schwingungsmittelpunkt geht – dann ist der vormalige Drehpunkt der neue Schwingungsmittelpunkt. Die Schwingungsdauer T_2 in diesem Fall ist gleich wie die Schwingungsdauer T_0 um den vorigen Drehpunkt, was man folgendermaßen zeigen kann:

$$\begin{aligned}
\text{Abstand } d_2 \text{ vom Schwerp.:} \quad d_2 &= L_{\text{red}} - d = \frac{I - M \cdot d^2}{M \cdot d} = \frac{I_0}{M \cdot d} \\
\text{Neues Trägheitsmoment:} \quad I_2 &= I_0 + M \cdot {d_2}^2 = I - M \cdot d^2 + M \cdot {d_2}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Neue Periodendauer:} \quad T_2 &= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I_2}{M \cdot g \cdot s_2}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I + M \cdot ({s_2}^2 - s^2)}{M \cdot g \cdot I_0/(M \cdot s)}} \\
&= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I \cdot M \cdot s^2 + (I - M \cdot s^2)^2 - s^2 \cdot M^2 \cdot s^2}{M \cdot s \cdot g \cdot (I - M \cdot s^2)}} \\
&= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{M \cdot s^2 + (I - M \cdot s^2)}{M \cdot s \cdot g}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I}{M \cdot g \cdot s}}
\end{aligned}$$

Wenn man also ein physikalisches Pendel um einen bestimmten Achspunkt schwingen lässt, dann kann man auf der Linie durch den Schwerpunkt immer einen zweiten Achspunkt finden, um den das Pendel mit genau derselben Periodendauer schwingt. Der Abstand L_{red} zwischen diesen beiden Punkten heißt „reduzierte Pendellänge“ und ist jene Länge, die ein mathematisches Pendel haben müsste, um mit genau derselben Periodendauer zu schwingen.

Dies kann dazu verwendet werden, die lokale Erdbeschleunigung mit hoher Präzision zu vermessen: Man braucht dazu ein „Reversionspendel“, das ist ein Körper mit zwei Achsen, deren Abstand x präzise bekannt ist. Dann muss das Trägheitsmoment so verändert werden, dass die Schwingungsdauer um beide Achsen gleich ist. Dies gelingt durch Zugabe, Verschieben oder Wegnehmen von Masse. Die Erdbeschleunigung ergibt sich dann aus der Gleichung (5.43):

$$g = \frac{4\,\pi^2 \cdot x}{{T_0}^2}$$

wobei nur die um beide Achsen gleiche Periodendauer T_0 und der Achsenabstand x gemessen werden müssen (beides sehr genau möglich), nicht aber Masse oder Trägheitsmoment. Diese Methode zur g-Bestimmung ist wesentlich genauer als mit einem mathematischen Pendel, weil – außer der genau quantifizierbaren Kleinwinkelnäherung – keine Vernachlässigungen nötig sind („punktförmige Masse“ etc.).

5.3.2 Planetenbewegung

Seit Jahrtausenden beschäftigt sich die Menschheit mit Himmelsmechanik, also mit Versuchen, die beobachteten Bewegungen der Objekte am Nachthimmel zu erklären. Dabei geht es besonders um die Bewegung der Planeten und Kometen („Wandelsterne“ genannt), die sich dramatisch von der viel einfacheren scheinbaren Bewegung des Sternenhintergrunds absetzt („Fixsterne“).

Die komplizierten und sehr ausgereiften empirischen Modelle im geozentrischen System (Annahme der Rotation aller Objekte um die Erde) wurden ab dem 16. Jahrhundert langsam vom heliozentrischen System abgelöst (Bewegung der Erde und der anderen Planeten um die Sonne), dessen Modelle anfangs aber ungenauer waren und deshalb schlecht akzeptiert wurden. Erst Keplers viel präziseres Modell brachte dem heliozentrischen System den Durchbruch.

(A) Die Keplerschen Gesetze

Die Bewegung der Planeten um die Sonne lässt sich durch Energie- und Drehimpulserhaltung beschreiben. Schon bevor dies bekannt war, hat Johannes Kepler Anfang des 17. Jahrhunderts viele genaue Beobachtungsdaten in drei Sätze zusammengefasst, die als die drei „Keplerschen Gesetze“ bekannt sind:

1. Die Bahnen der Planeten sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt sich die Sonne befindet.
2. Die Verbindungslinie zwischen Sonne und Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleich große Flächen.
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten haben das gleiche Verhältnis wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen ihrer jeweiligen Ellipsen.

Diese Gesetze gelten für alle Trabanten, die um eine viel schwerere Zentralmasse „kreisen“, also auch für Satelliten, den Mond usw., solange ihre Gesamtenergie nicht ausreicht, das Gravitationsfeld zu verlassen. Darüber hinaus beschreiben sie auch die Bahnen elektrisch geladener Körper, weil die elektrische Kraft formal gleich beschrieben wird wie die Gravitation ($1/r^2$-Abhängigkeit vom Abstand).

Im Folgenden besprechen wir die einzelnen „Gesetze“ genauer.

(B) Das erste Kepler-Gesetz: Ellipsenbahnen

Eine Ellipse ist ein symmetrisch in die Länge gezogener Kreis. Sie wird durch zwei Brennpunkte F_1 und F_2 auf der Hauptachse definiert, die gleich weit vom Mittelpunkt M entfernt sind. Zur quantitativen Beschreibung verwendet man folgende Parameter:

- Große Halbachse a: Halber Durchmesser der Ellipse an der größten Stelle.
- Kleine Halbachse b: Halber Durchmesser der Ellipse an der schmalsten Stelle.
- Exzentrizität e: Abstand jedes Brennpunkts vom Mittelpunkt, mit $e^2 = a^2 - b^2$

Eine Ellipse kann auf verschiedene Arten definiert werden:

- Für jeden Punkt P auf der Ellipse gilt: Die Summe der Abstände zum einen und zum anderen Brennpunkt ergibt $2\,a$.
- Mit kartesischen Koordinaten um den Mittelpunkt M liegen alle jene Punkte (x, y) auf der Ellipse, für die gilt

$$\text{Ellipsengleichung:} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{oder} \quad y = \pm\frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \tag{5.47}$$

- Die Ellipse kann auch, ähnlich wie ein Kreis, mit einem Parameter θ beschrieben werden (Winkel vom Mittelpunkt M ausgehend gegen die Hauptachse):

$$x(\theta) = a \cdot \cos(\theta)\,, \quad y(\theta) = b \cdot \sin(\theta) \quad \text{mit } 0 \le \theta \le 2\pi \tag{5.48}$$

- Darstellung in Polarkoordinaten (r_p, φ_p) bezüglich eines Brennpunkts:

$$r_p(\varphi_p) = \frac{a^2 - e^2}{a \pm e \cdot \cos\varphi_p} = \frac{p}{1 \pm \varepsilon \cdot \cos\varphi_p} \tag{5.49}$$

$$\text{mit} \quad p = b^2/a = (a^2 - e^2)/a \qquad \big(\text{Halbparameter}\big)$$
$$\varepsilon = e/a \qquad \big(\text{numerische Exzentrizität}\big)$$

  Das Vorzeichen $\pm$ ist hier einzusetzen, je nach dem, welcher Brennpunkt als Koordinatenursprung gewählt wird.

Die letzte Darstellung ist noch deutlich allgemeiner als die anderen: Sie beschreibt eine Ellipse, wenn $\varepsilon < 1$; für $\varepsilon = 1$ ist es eine Parabel und für $\varepsilon > 1$ eine Hyperbel.

Die Ellipsenform kann analytisch gezeigt werden, wenn man den Energieerhaltungssatz für einen Planeten (Masse m) im Schwerefeld der Sonne (Masse M) anschreibt:

$$E_{\text{ges}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{m \cdot v^2}{2} - G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$$

Beachten Sie, dass die Gesamtenergie E_{ges} negativ ist, damit der Planet dauerhaft im Schwerefeld der Sonne „gefangen“ ist. Die Energieerhaltung zeigt unmittelbar, dass der Planet schneller wird, wenn er näher an die Sonne gelangt (kleinere potenzielle Energie, also größere kinetische) und umgekehrt. Diese größere Geschwindigkeit erfordert aber mehr Zentripetalkraft, als an Gravitation zur Verfügung steht, sodass der Planet nicht in die Sonne stürzt, sondern nach außen beschleunigt wird und sich wieder entfernt.

Wenn man die Energiegleichung auf Polarkoordinaten umschreibt und den Drehimpuls L des Planeten in Form von Gleichung (5.30) einsetzt, kann man die Gleichung so umformen, dass sie formal gleich ist wie die Darstellung in Gleichung (5.49). Man erhält dann

$$\varepsilon \;=\; \sqrt{1+\frac{2\,E_{\mathrm{ges}}\cdot L^2}{G^2\cdot M^2\cdot m^3}} \qquad \text{und} \quad p \;=\; \frac{L^2}{G\cdot M\cdot m^2} \tag{5.50}$$

Man kann also die Ellipsenform berechnen, wenn die Sonnenmasse, der Drehimpuls und die Gesamtenergie bekannt sind. Beachten Sie, dass die Planetenmasse m keine Rolle spielt, weil Energie und Drehimpuls dazu proportional sind. In Realität ist es umgekehrt: Wenn aus Beobachtungen die Bahnform ermittelt wird, kann man daraus die Größen M, E_{ges}/m und L/m bestimmen.

Der sonnenfernste Punkt auf der Ellipse ($r = a + e$) wird Perihel genannt, der sonnennächste Punkt ($r = a - e$) Aphel. Die Planeten im Sonnensystem laufen auf Bahnen, die nur schwach elliptisch sind – so beträgt die Exzentrizität der Erde nur etwa $e \approx 0{,}017\cdot a$, sodass sich Perihel und Aphel nur um $3{,}4\,\%$ unterscheiden. Am stärksten ausgeprägt ist die Elliptizität bei Merkur mit $e \approx 0{,}20\cdot a$.

(C) Das zweite Kepler-Gesetz: Bahngeschwindigkeit

Wie vorne auf S. 112 gezeigt, muss der Drehimpuls $\vec{L}$ einer Punktmasse immer konstant bleiben, wenn auf den Körper nur eine Zentralkraft wirkt.

Für einen Planeten, der sich um die Sonne bewegt, folgt daraus erstens, dass seine Bahn immer in derselben Ebene bleiben muss, die normal auf die (konstante) Richtung des Drehimpulses steht. Zweitens kann man daraus sofort das zweite Keplersche Gesetz ableiten (Flächensatz):

$$\vec{L} \;=\; \text{const} \qquad \rightarrow \qquad m\cdot\vec{r}\times\vec{v} \;=\; r\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\cdot\sin\theta \;\approx\; 2\cdot\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} \;=\; \text{const}$$

Hier ist θ der Winkel zwischen Radius und Bahn, s der zurückgelegte Weg auf der Bahn und A die vom Vektor $\vec{r}$ überstrichene dreieckige Fläche.

Die direkt merkbare Konsequenz des Flächensatzes ist, dass die Normalkomponente der Bahngeschwindigkeit eines Planeten genau invers proportional zu seinem Abstand von der Sonne ist: Die höchste Geschwindigkeit wird am Aphel erreicht, nimmt ab dann kontinuierlich ab und erreicht ihr Minimum im Perihel.

(D) Das dritte Kepler-Gesetz: Umlaufdauer

Wenn man die verschiedenen Planeten im Sonnensystem vergleicht, erkennt man schnell, dass ihre Umlaufdauer umso größer wird, je größer ihre Bahn ist. Für den vereinfachten Fall einer Kreisbahn haben wir im Kap. 3.3.4 berechnet, dass sich für den

Radius r im Gravitationsfeld eine konstante Bahngeschwindigkeit $v(r) = \sqrt{G \cdot M/r}$ ergibt. Daraus können wir die Umlaufzeit berechnen:

$$T(r) = \frac{2r\,\pi}{v} = \frac{2\pi}{\sqrt{G \cdot M}} \cdot \sqrt{r^3} \qquad \rightarrow \qquad \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M} = C_K \tag{5.51}$$

Das Verhältnis aus T^2 und r^3 ist also für ein bestimmtes Zentralgestirn konstant. Die Konstante C_K heißt Kepler-Konstante und hat für die Sonne den Wert $C_{K,S} = 2,98 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{s}^2/\mathrm{m}^3$ und für die Erde $C_{K,E} = 9,83 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{s}^2/\mathrm{m}^3$. Die Umlaufdauern zweier verschiedener Planeten mit verschiedenem Radius folgen dann offensichtlich genau dem dritten Keplerschen Gesetz

$$\frac{{T_1}^2}{{T_2}^2} = \frac{{r_1}^3}{{r_2}^3}$$

Mit einigem Aufwand kann gezeigt werden, dass die Keplerkonstante auch für Ellipsenbahnen gilt, wenn der Kreisradius r durch die große Halbachse a ersetzt wird. Die Umlaufdauer T ist also für jede Ellipsenbahn gleich, die dieselbe große Halbachse hat, egal wie groß die kleine Halbachse b ist.

(E) Kometenbahnen

Alle Himmelskörper ohne eigenen Antrieb folgen den Keplerschen Gesetzen. Zum Sonnensystem gehören außer den Planeten eine Vielzahl anderer Objekte, darunter Kleinplaneten und Asteroiden, die wie die Planeten auf Kreis-ähnlichen Ellipsenbahnen laufen, oft aber mit sehr starker Auslenkung aus der Ebene der Planetenbahnen.

Kometen sind kleine Objekte, die der Sonne für kurze Zeit sehr nahe kommen und nur im sonnennahen Teil ihrer Bahn beobachtet werden können. Man beschreibt die Bahnen in der Polarbeschreibung (Gleichung (5.49)) und findet aus der Beobachtung meistens Werte von $\varepsilon \approx 1$. Werte von $\varepsilon < 1$ bedeuten, dass der Komet auf einer sehr großen, langgestreckten Ellipsenbahn unterwegs ist, mit Umlaufdauern von vielen 10 bis vielen 100 Jahren und mehr.

Werte von $\varepsilon > 1$ bedeuten, dass das Objekt auf einer Hyperbelbahn unterwegs ist und nicht zurückkehren wird. Wie man aus der Gleichung (5.50) entnehmen kann, ist das nur möglich, wenn die Gesamtenergie positiv ist: In diesem Fall reicht die kinetische Energie also aus, um dem Gravitationsfeld der Sonne zu entkommen. In vielen Fällen ist es nicht einfach, den Wert von ε hinreichend genau zu bestimmen, um eine eindeutige Aussage für oder gegen das Verlassen des Sonnensystems abgeben zu können, weil sich Ellipsen und Hyperbeln im sonnennahen Teil der Bahn sehr stark ähnlich sind.

(F) Die Erdbahn

Die Erde umläuft die Sonne auf einer Ellipsenbahn mit folgenden Parametern:

- Große Halbachse $a = 149,598 \cdot 10^9\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{AE}$. Diese Größe wird „astronomische Einheit“ genannt (englisch: 1 au, *astronomical unit*).

- Kleine Halbachse $b = 149,577 \cdot 10^9\,\text{m}$ $\rightarrow$ Exzentrizität $e = 2,507 \cdot 10^9\,\text{m}$.
- Numerische Exzentrizität $\varepsilon = e/a = 0,0167$.
- Aphel-Entfernung (sonnenfernster Punkt): $152,10 \cdot 10^9\,\text{m}$.
- Perihel-Entfernung: (sonnennächster Punkt): $147,09 \cdot 10^9\,\text{m}$.

Der Unterschied zwischen großer und kleiner Halbachse ist so klein (nur $0,014\,\%$!), dass die Erdbahn de facto ein Kreis ist. Die Sonne steht aber nicht in seinem Mittelpunkt, sondern ist um $1,67\,\%$ entlang der großen Halbachse verschoben, sodass der Abstand zwischen Erde und Sonne variiert. Das Perihel (sonnennächster Punkt) wird jedes Jahr am 3. Januar erreicht, das Aphel am 3. Juli.

Die Bahnellipse der Erde dreht sich selbst um die Sonne. Dieser Effekt wird „Perihelpräzession" genannt und hat eine Periode von etwa 22000 Jahren. Verwechseln Sie diese Bewegung nicht mit der Präzession der geneigten Erdachse (Periode: ~ 25850 Jahre, siehe Abschnitt 5.2.3)!

Durch den unregelmäßigen Einfluss der anderen Planeten variieren fast alle Parameter der Erdbahn auf langen Zeitskalen, so z. B. die Exzentrizität, die Lage der Bahnebene (Ekliptik), die Neigung der Achse gegen die Ekliptik u.a.

(G) Uhrzeit und Erdbahn: Die Zeitgleichung

Obwohl die Ellipsenbahn der Erde fast kreisförmig ist, führt sie gemeinsam mit der Neigung der Erdachse dazu, dass Uhrzeitangaben auf der Erde nicht genau mit dem Sonnenstand korrelieren. So sollte in Düsseldorf die Sonne jeden Tag um 12:33 Uhr MEZ genau im Süden stehen (Man nennt dies „wahrer Mittag"). Das kommt daher, dass Düsseldorf auf $6,8°$ östlicher Länge liegt. Die mitteleuropäische Zeitzone hat ihr Zentrum bei $15°$ ö.L., (ca. in Prag oder Graz), sodass dort der „wahre Mittag" (Sonne genau im Süden) präzise um 12:00 Uhr stattfinden sollte. Das stimmt aber so nicht: Je nach Jahreszeit differiert der Zeitpunkt der genauen Südrichtung der Sonne um bis zu $\pm 15\,\text{min}$. Dies hat zwei Gründe:

- Exzentrizität der Erdbahn:
  Die Erde dreht sich in ca. 23 Stunden und 56 Minuten einmal um $360°$ um ihre Achse. Diesen Zeitraum nennt man „Sterntag", weil die Fixsterne dann wieder an derselben Position stehen. Um die Sonne wieder an derselben Position zu sehen, muss sich die Erde noch um $360°/365,24 \approx 1°$ weiterdrehen, weil sie inzwischen ja auf ihrer Bahn um die Sonne weitergelaufen ist. Das dauert ungefähr 4 min und macht insgesamt die Dauer eines „Sonnentages".
  Die Kompensation vom Stern- zum Sonnentag ist aber unterschiedlich lange, je nachdem, wo sich die Erde auf ihrer Bahn um die Sonne befindet: Im Perihel ist die Bahngeschwindigkeit größer und somit muss sich die Erde weiter drehen, um wieder zur Sonne ausgerichtet zu sein. Die genaue Südposition der Sonne wird also dann mit jedem Tag ein wenig später erreicht. Im Aphel ist es umgekehrt: Hier braucht die Erde weniger als genau 24 Stunden für eine Umdrehung bezogen auf die Sonne.

- Verkippung der Erdachse:
  Wegen der Schiefstellung der Erdachse muss sich die Erde unterschiedlich weit weiterdrehen, um vom Stern- zum Sonnentag zu kommen: An den Tag- und Nachtgleichen ist weniger Drehung nötig, an den Sonnenwenden mehr.

Die beiden Effekte können zusammengefasst und berechnet werden. Das Ergebnis wird „Zeitgleichung“ genannt und gibt die die Abweichung der wahren Sonnenzeit von der mittleren Sonnenzeit an: Um wie viele Minuten zu früh wird der wahre Mittag erreicht?

So steigt zum Beispiel um die Wintersonnenwende (kürzester Tag: 22. Dezember) die Verspätung des wahren Mittags stark an. Dies führt dazu, dass der früheste Sonnenuntergang ca. am 13. Dezember stattfindet, der späteste Sonnenaufgang hingegen um den 31. Dezember.

5.3.3 Motoren und Getriebe

(A) Motorleistung und -drehmoment

Ein Motor, egal ob Verbrennungs- oder Elektromotor, liefert seine Leistung mittels Rotation ab. Zur Charakterisierung werden drei Größen angegeben, die miteinander zusammenhängen:

- Drehmoment D in Nm
- Motorleistung P in W
- Drehzahl N in U/min (Umdrehungen pro Minute)

Beachten Sie, dass mit dem Begriff „Drehzahl“ keine Zahl, sondern eine Frequenz gemeint ist. Für Berechnungen muss N oft in ν (Frequenz in Hz) oder ω (Winkelgeschwindigkeit in rad/s) umgerechnet werden.

Um die verfügbare Kraft eines Motors zu berechnen (z. B. zur Beschleunigung eines Fahrzeugs, zum Heben von Lasten etc.), muss bekannt sein, wie aus der Rotation der Achse die benötigte lineare Kraft erzeugt wird. Das funktioniert immer dann, wenn das bereitgestellte Drehmoment als Kräftepaar dargestellt werden kann, wobei dann eine der beiden Kräfte nutzbar ist und die zweite kompensiert werden muss. Beispiele:

- Hubkraft: Im Wesentlichen wird ein Seil auf eine drehende Rolle aufgewickelt. Man erhält ein Kräftepaar: Eine Hubkraft entlang des Seils, die in der Achse der Rolle kompensiert werden muss. Bei gegebenem Drehmoment D hängt die verfügbare Kraft F vom Radius r der Seilrolle ab:

  $$F = \frac{D}{r}$$

  Je kleiner die Seilrolle, desto größer ist die verfügbare Kraft.

- Beschleunigungskraft: Wenn das Drehmoment auf die Achse eines Reifens wirkt, erhält man eine tangentiale Kraft auf dem Reifenumfang, die durch Haftreibung kompensiert werden muss, und eine gleich große Vortriebskraft auf die Achse. Wieder ist die Kraft proportional zum Drehmoment und invers proportional zum Radius des Reifens.

Bei den meisten Motoren hängt das verfügbare Drehmoment aus konstruktiven Gründen nicht allzu stark von der Drehzahl ab, sondern ist über weite Bereiche einigermaßen konstant. Die Wirkung des Drehmoments ist bei kleinen Drehzahlen deutlich stärker zu spüren als bei großen: D führt zu einer Winkelbeschleunigung α (siehe Gleichung (5.14), also zu einer Erhöhung der Winkelgeschwindigkeit ω. Ein bestimmter Zuwachs $\Delta\omega$ ist bei kleiner Drehzahl viel deutlicher merkbar als bei großer.

Die Leistung, die ein Motor abgeben kann, wird analog zur Gleichung (4.16) bei linearen Bewegungen ($P = F \cdot v$) aus Drehmoment D und Drehzahl N berechnet:

$$\text{Motorleistung:} \qquad P = D \cdot \omega = D \cdot (2\,\pi\,\mathrm{rad}) \cdot \nu = D \cdot \frac{2\,\pi\,\mathrm{rad}}{60\,\mathrm{s/min}} \cdot N \tag{5.52}$$

Wenn man konstantes Drehmoment annimmt, steigt die Leistung also proportional mit der Drehzahl an: Für Motoren gilt immer, dass die höchste Leistung mit hoher Drehzahl erreicht wird.

(B) Getriebe und Übersetzungen

Ein Getriebe ist ein mechanisches Bauteil, mit dem die Drehzahl verändert werden kann, sodass Motor und Nutzer mit unterschiedlicher Drehzahl laufen können. Ein ideales Getriebe überträgt die Motorleistung verlustfrei (Leistung ist Energie pro Zeit; dies bedeutet also zum Beispiel, dass Reibung keine Rolle spielt). Deshalb wird das Drehmoment D invers proportional zur Drehzahl übertragen:

$$\text{Getriebe:} \qquad N_1 \to N_2 \qquad \text{und} \quad P_1 = P_2 \qquad \to \quad D_2 = D_1 \cdot \frac{N_1}{N_2} \tag{5.53}$$

So kann ein Motor bei hoher Drehzahl (und somit hoher Leistung) betrieben werden, auch wenn die Anwendung kleine Drehzahl braucht.

Beispiel: Beim Anfahren eines Autos oder beim Bergauf-Fahren wird ein niedriger Gang verwendet, bei dem hohe Motordrehzahl verwendet werden kann, damit hohe Leistung abgerufen werden kann. Die Reifen hingegen drehen sich nur langsam – für sie steht bei gleicher Leistung ein stark vergrößertes Drehmoment zur Verfügung. Mit einem hohen Gang müsste der Motor ähnlich langsam drehen wie die Reifen und könnte deutlich weniger Leistung abgeben. Für die Reifen steht dann nur das Motordrehmoment zur Verfügung, ohne Vergrößerung durch das Getriebe.

Getriebe werden in ganz verschiedenen technischen Ausführungen gebaut. Immer erhält man ein Übersetzungsverhältnis k, das angibt, um wie viel die Drehzahl des angetriebenen Objekts größer ist als jene des Motors. Wenn $k < 1$ ist, spricht man oft von

„Untersetzung“. Das Drehmoment am Ausgang ist immer um den Faktor $1/k$ anders als jenes des Motors. Beispiele:

- Fahrrad-Kettenschaltung:
  An der Kurbel (Pedale) sind $1-3$ „Kettenblätter“ befestigt (relativ große Zahnräder), am Hinterrad $1-9$ „Ritzel“ (verschiedene kleinere Zahnräder), die durch eine Kette verbunden sind, die vorne und hinten auf je einem Zahnrad läuft. Weil die Zähne der Zahnräder alle im selben Abstand angeordnet sind, wird das Übersetzungsverhältnis k als Verhältnis der Anzahlen von Zähnen angegeben. Bei Mountain-Bikes wird k bis etwa Faktor 7 variiert (z. B. von $k = 0,6$ bis $k = 4,2$).
- Fahrrad-Nabenschaltung:
  Das Getriebe ist in einer Kassette um die Nabe des Hinterrads eingebaut und funktioniert nach dem Prinzip des Planetengetriebes: Im Zentrum befindet sich ein feststehendes Zahnrad („Sonne“). Die Außenkassette hat innen eine Zahnung („Hohlrad“) und ist fest mit der hinteren Felge verbunden. Zwischen Sonne und Hohlrad laufen drei bis vier Zahnräder um („Planeten“), die sich gemeinsam mit dem von der Fahrradkette angetriebenen Ritzel um die Sonne drehen Weil sie dabei innen im Hohlrad aufliegen, drehen sie dieses mit erhöhter Drehzahl. Eine solche Schaltung kann mehrere Sonnen und Planetensysteme enthalten, zwischen denen umgeschaltet werden kann. Mit einer Nabenschaltung kann das Übersetzungsverhältnis k bis zu etwa Faktor 3,5 variiert werden.

5.3.4 Rotationsgleichgewicht

Wie für lineare Kräfte ist es auch für Drehmomente in vielen praktischen Fällen von Interesse, alle wirkende Drehmomente durch Gegendrehmomente zu kompensieren, damit keine Rotationsbewegungen auftreten. Ein Anwendungsbeispiel haben wir schon auf S. 101 besprochen, mämlich das Hebelgesetz, bei dem es genau darauf ankommt, dass sich die Drehmomente am Kraft- und am Lastarm gegenseitig aufheben. Hier folgen weitere Betrachtungen zum Thema Rotationsgleichgewicht.

(A) Der Massenmittelpunkt eines Körpers

Der Massenmittelpunkt eines Körpers (oft auch „Schwerpunkt“ genannt) ist sein mit der Masse gewichteter geometrischer Mittelpunkt.

Der geometrische Mittelpunkt ohne Gewichtung berechnet sich mittels

$$\vec{r}_G = \frac{\int \vec{r}\,\mathrm{d}V}{\int \mathrm{d}V} = \frac{\int \vec{r}\,\mathrm{d}V}{V} \qquad \text{Geometrischer Mittelpunkt} \qquad (5.54)$$

Um daraus den Massenmittelpunkt zu erhalten, muss jedes Volumselement $\mathrm{d}V$ mit der lokalen Dichte $\varrho(\vec{r})$ „gewichtet“ werden (gewichten heißt hier: schwere Teile des

Körpers mit hoher Dichte zählen viel, leichte Teile zählen wenig). Das ergibt

$$\vec{r}_s = \frac{\int \vec{r}\,\rho \cdot \mathrm{d}V}{\int \rho \cdot \mathrm{d}V} = \frac{\int \vec{r} \cdot \mathrm{d}m}{M} \qquad \text{Schwerpunkt} \tag{5.55}$$

Für homogene Körper (Dichte ρ an jeder Stelle gleich) fallen der Schwerpunkt und der geometrische Mittelpunkt zusammen. Für regelmäßig geformte Körper lässt sich die Position dieses Punktes dann mittels Gleichung (5.55) bzw. Gleichung (5.54) berechnen. So muss der Massenmittelpunkt z. B. bei symmetrischen Körpern immer auf der Symmetrieachse liegen, was die Berechnung seiner Position sehr vereinfacht.

Als ganz einfaches Beispiel betrachten wir einen Körper aus zwei Massenpunkten, die sich an den Endpunkten einer starren „masselosen Stange“ befinden (Positionen $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$), und wir setzen willkürlich $m_1 > m_2$. Der Massenmittelpunkt M der beiden Massen liegt zwangsläufig irgendwo auf der Verbindungsstange zwischen den beiden Punktmassen (Symmetrieachse) und ergibt sich mit Gleichung (5.55) zu

$$\vec{r}_s = \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Wenn auf diesen Modellkörper die Schwerkraft wirkt und man hängt ihn genau im Schwerpunkt auf, dann erzeugen die beiden Massen (um den Schwerpunkt als Drehpunkt) die Drehmomente

$$\vec{D}_1 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_s) \times (m_1 \cdot \vec{g}) \qquad \text{und} \qquad \vec{D}_2 = (\vec{r}_2 - \vec{r}_s) \times (m_2 \cdot \vec{g}) \;,$$

die sich insgesamt genau kompensieren:

$$\begin{aligned} \vec{D}_{\text{ges}} &= m_1 \cdot \vec{r}_1 \times \vec{g} - m_1 \cdot \vec{r}_s \times \vec{g} + m_2 \cdot \vec{r}_2 \times \vec{g} - m_2 \cdot \vec{r}_s \times \vec{g} \\ &= [m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2 - (m_1 + m_2)\,\vec{r}_s] \times \vec{g} \;=\; 0 \;, \end{aligned}$$

weil die eckige Klammer genau die Definition des Schwerpunkts enthält. Wir sehen also, dass wir die Wirkung der Schwerkraft auf den gesamten Körper durch eine Gegenkraft im Schwerpunkt kompensieren können. Genau dann wird nicht nur die Kraft kompensiert, sondern auch alle auftretenden Drehmomente. Beachten Sie, dass das nur im Schwerpunkt gilt: Wenn der Körper an einem anderen Punkt befestigt wird, gibt es immer ein resultierendes Drehmoment. Dies gilt in gleicher Weise auch für komplizierter geformte Körper: Wenn ein Körper in seinem Schwerpunkt festgehalten wird, wirkt die Schwerkraft natürlich trotzdem auf alle einzelnen Massenelemente $\mathrm{d}m$. Der Körper beginnt sich aber nicht zu drehen, weil sich die links- und rechtsgerichteten Drehmomente um den Schwerpunkt genau aufheben.

Umgekehrt können wir die Wirkung der Gravitationskraft auf alle Teile des Körpers auf eine gemeinsam Kraft im Schwerpunkt zusammenfassen: Wenn sich ein Körper im homogenen Schwerefeld der Erde befindet, wirkt auf jedes Massenelement die Schwerkraft $\mathrm{d}F = \mathrm{d}m \cdot g$. Nach der Argumentation von oben kann man all diese Kräfte zusammenfassen zu einer einzigen Kraft $F = M \cdot g$, die genau im Massenmittelpunkt angreift, so wie wir das ab Kap. 3 häufig gemacht haben.

Bemerkung: In den seltenen Fällen, in denen ein Körper so groß ist, dass sich das Gravitationsfeld in seinem Inneren räumlich verändert, fällt der Schwerpunkt (Angriffspunkt der Schwerkraft auf die gesamte Körpermasse M) nicht mit dem Massenmittelpunkt (räumlich gewichteter Mittelpunkt der Körpermasse) zusammen. Das ist zum Beispiel bei Doppelsternsystemen der Fall.

Der Massenmittelpunkt eines kompliziert geformten Körpers kann experimentell recht einfach bestimmt werden. Wenn man den Körper an irgendeinem Punkt aufhängt, wird er sich so lange drehen, bis sich der Schwerpunkt genau senkrecht unter dem Aufhängepunkt befindet, weil sonst Drehmomente wirklen. Diese senkrechte Linie wird markiert. Anschließend macht man dasselbe für einen zweiten Aufhängepunkt. Die Schnittpunkte der ermittelten Schwerlinien ergeben den Massenmittelpunkt.

Der Schwerpunkt spielt eine große Rolle bei der Beschreibung der Bewegungen von Körpern. Dabei gilt der sogenannte „Schwerpunktsatz“: Der Schwerpunkt eines Körpers bewegt sich so, als ob die gesamte Masse dort vereinigt wäre und die Summe aller äußeren Kräfte dort angreifen würde.

- Die Translationsbewegung eines Körpers kann also immer als Bewegung des Schwerpunkts beschrieben werden.
- Das stimmt auch bei nichtstarren Körpern (z. B. menschlichen Körpern), bei denen sich die Lage des Schwerpunkts relativ zum Körper im Zuge der Bewegung ändert: Solange es keine äußeren Kräfte gibt, die nur auf einzelne Körperteile wirken, folgt der Schwerpunkt den dynamischen Gesetzen aus Kap. 3.
- Die Eigenrotation eines freien Körpers erfolgt immer um eine Achse durch den Schwerpunkt.

So können kompliziert wirkende Bewegungen immer in die Translationsbewegung des Schwerpunkts, die Eigenrotation um den Schwerpunkt und eventuelle Deformationsbewegungen des Körpers zerlegt werden, was die Beschreibung insgesamt sehr vereinfacht.

(B) Mechanisches Gleichgewicht

In vielen technischen Anwendungen geht es darum, dass mechanische Konstruktionen stabil stehen bleiben, z. B. im Bauwesen oder im Maschinenbau. Dazu ist es notwendig, dass alle Kräfte und alle Drehmomente, die auf ein System und innerhalb eines Systems wirken, sicher kompensiert sind. Anders formuliert: In Summe wirkt auf einen Körper (und auf alle seine beweglichen Teile) weder eine Kraft noch ein Drehmoment.

$$\text{Mechanisches Gleichgewicht:} \qquad \sum \vec{F}_i = 0 \quad \text{und} \quad \sum \vec{D}_i = 0$$

Es gibt drei Arten von Gleichgewicht:

- **Stabiles Gleichgewicht**:
  Wenn das physikalisches System aus einem stabilen Gleichgewicht verdrängt wird, wirken Kräfte und/oder Drehmomente, die es in die Richtung des Gleichgewichts

zurück bewegen. Dies ist z. B. immer dann der Fall, wenn sich eine (bewegliche) Masse am tiefsten Punkt ihrer Umgebung befindet, oder wenn ein Körper so hängt, dass sich sein Schwerpunkt genau unter dem Aufhängepunkt befindet. Ein stabiles Gleichgewicht bedeutet immer, dass die potenzielle Energie des Systems ein lokales Minimum aufweist:

$$\text{Stabiles Gleichgewicht:} \qquad E_{\text{pot}} = \text{min} \tag{5.56}$$

Um das System aus dem Gleichgewicht zu entfernen, muss die potenzielle Energie erhöht werden, indem Arbeit zugeführt wird. Sehr oft führt die Energiezufuhr an ein System im stabilen Gleichgewicht zur Ausbildung einer Schwingung um den Gleichgewichtspunkt: Die zugeführte Energie ΔE steht als Schwingungsenergie zur Verfügung und wird periodisch hin und her umgewandelt (siehe Kap. 4.2.3).

- **Labiles Gleichgewicht**:
  Im Umfeld eines labilen Gleichgewichts wirken wirken Kräfte und/oder Drehmomente, die das System weiter vom Gleichgewicht weg beschleunigen. Dies ist z. B. dann der Fall, wenn eine (bewegliche) Masse auf dem höchsten Punkt einer konkaven Fläche liegt. Im labilen Gleichgewicht hat die potenzielle Energie des Systems ein lokales Maximum:

$$\text{Labiles Gleichgewicht:} \qquad E_{\text{pot}} = \text{max} \tag{5.57}$$

  Sobald das System – schon durch minimalen Krafteinsatz – aus dem Gleichgewicht entfernt wird, nimmt die potenzielle Energie ab und wird in andere Energieformen umgewandelt, meist in kinetische Energie, die das System noch weiter vom Gleichgewicht entfernt.

- **Indifferentes Gleichgewicht**:
  Ein indifferentes Gleichgewicht liegt vor, wenn in einem größeren Bereich rund um das betrachtete System weder Kräfte noch Drehmomente wirken, wenn also z. B. eine Kugel auf einer ebenen Fläche liegt oder ein drehbarer Körper an einer Achse befestigt ist, die genau durch seinen Schwerpunkt verläuft. Die potenzielle Energie des Systems ist in diesem Fall

$$\text{Indifferentes Gleichgewicht:} \qquad E_{\text{pot}} = \text{const} \tag{5.58}$$

  Ein Körper im indifferenten Gleichgewicht verbleibt in Ruhe oder behält seinen Bewegungszustand bei, auch wenn er aus seiner Position entfernt wird.

(C) Standfestigkeit

Auch wenn sich ein Körper im stabilen Gleichgewicht befindet, ist es doch in vielen Fällen von Interesse zu beurteilen, wie sicher sich der Körper im Gleichgewicht befindet. Besonders wichtig ist dies bei aufrecht stehenden Gegenständen, für die die Möglichkeit besteht, dass sie umfallen könnten. In diesem Fall geht man folgendermaßen vor:

1. Die „Standfläche“ wird ermittelt: Dazu sucht man alle Punkte, mit denen der fragliche Körper den Boden berührt, und verbindet sie mit geraden Linien.
2. Die Lage des Schwerpunkts wird grob ermittelt.
3. Kriterium für Stehen: Der Schwerpunkt muss sich vertikal über der Standfläche befinden. Wenn das nicht erfüllt ist, befindet sich der Körper nicht im Gleichgewicht: Die Schwerkraft (die im Schwerpunkt angreift) und die Kompensationskraft (die irgendwo in der Standfläche angreifen muss) bilden ein Kräftepaar, das den Körper umkippt.
4. Beurteilung für „sicheres Stehen“: Es sollte möglichst viel Energie nötig sein, um den Schwerpunkt aus seiner Lage über der Standfläche in eine Lage neben der Standfläche zu bewegen. Dabei helfen folgende Überlegungen:
   - Die Standfläche sollte möglichst groß sein.
   - Der Schwerpunkt sollte sich möglichst mittig über der Standfläche befinden und nicht nah über einem der Ränder.
   - Der Schwerpunkt des Körpers sollte tief liegen. Dann muss er beim Kippen steil nach oben bewegt werden, was viel Energie kostet. Zum Beispiel sollten deshalb in der Praxis schwere Gegenstände immer unten in einem Schrank gelagert werden und leichte oben.

Für die konkrete Beurteilung der Standfestigkeit eines Körpers muss berechnet werden, wie viel Energie nötig ist, um ihn aus dem stabilen Gleichgewicht herauszuführen. Dazu muss der Weg des Schwerpunkts bis genau über die am nächsten liegende Kante der Standfläche bestimmt werden.

Nichtstarre Körper (wie z. B. Menschen) müssen zum stabilen Stehen ebenfalls ihren Schwerpunkt über der relativ kleinen Standfläche halten (Standfläche ist der Umriss der Schuhe sowie die Fläche dazwischen). Menschen haben den Vorteil, dass durch Körperbewegungen einerseits die Position des Schwerpunkts und andererseits die Größe und Lage der Standfläche verändert werden kann. Dies macht man intuitiv und kann somit z. B. auch beim Tragen schwerer Lasten immer standfest bleiben.

(D) Statik mit Kräften und Momenten

Im Kap. 3.3.7 haben wir Statik im Sinne von Kräftegleichgewicht besprochen. In vielen praktischen Situationen muss man bedenken, dass nicht nur alle Kräfte, sondern auch alle möglichen Drehmomente sicher kompensiert sein müssen, damit eine Konstruktion stabil bleibt. Dieses zusätzliche Momentengleichgewicht ist immer dann zu berücksichtigen, wenn nicht alle wirkenden Kräfte durch eine Gegenkraft auf ihrer Angriffslinie kompensiert werden können.

In der Praxis analysiert man das Kräfte- und Momentengleichgewicht für jedes einzelne Element einer Konstruktion (jeden Balken, Pfeiler, Strebe etc.). Ziel ist es meistens festzustellen, an welcher Stelle welche statischen Kräfte benötigt werden, welche Auflagepunkte also wie stark belastet sind usw. Man geht folgendermaßen vor:

- Es werden alle Kräfte notiert, die auf das betrachtete Element wirken.
- Man legt willkürlich einen „Drehpunkt“ fest. Das muss kein realer Achspunkt sein: Da wir ja Statik betrachten, dreht sich ohnehin nichts, und somit kann jeder beliebige Punkt die Rolle dieser virtuellen Achse spielen. Fürs Ergebnis ist es ganz egal, welcher Punkt als Drehpunkt verwendet wird – geschickte Wahl kann aber die Rechnungen sehr vereinfachen.
- Alle Drehmomente werden notiert, die – bezüglich des gewählten Achspunkts – auf das betrachtete Element wirken. Jede vorhandene Kraft erzeugt ein solches Drehmoment – aktive Kräfte und statische Kräfte. Für jedes Drehmoment denken wir uns eine zweite gegengleiche Kraft im Achspunkt, sodass als „Kraftarm“ jeweils der Vektor von der Achse zur Wirkungslinie der Kraft eingesetzt wird. Unberücksichtigt bleiben nur Kräfte, die in der gewählten Achse angreifen.

Nun muss die Summe aller Kräfte und die Summe aller Momente für jede Richtung Null ergeben. Je nach Situation und Dimensionalität des Problems sind also bis zu 6 Gleichungen möglich, mit denen bis dahin unbekannte Kräfte berechnet werden können.

Zum konkreten Rechnen gibt es zwei Möglichkeiten:

- Korrekte Rechnung mit Vektoren:
  - Jede Kraft wird als dreidimensionaler Vektor $\vec{F}_i$ angesetzt. Wichtig dabei ist, dass das immer jene Kräfte sind, die auf das betrachtete Element wirken und nicht jene, die vom Element auf die Umgebung wirken.
  - Ebenso wird jedes Drehmoment als Vektor $\vec{D}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ definiert (richtige Reihenfolge wichtig!), mit dem Verbindungsvektor $\vec{r}_i$ zwischen Achspunkt und Angriffspunkt der Kraft $\vec{F}_i$ (richtige Orientierung wichtig!).
  - Die beiden Gleichgewichte ergeben sich dann aus den Vektorsummen

$$\sum \vec{F}_i \;=\; 0 \qquad \text{und} \qquad \sum \vec{D}_i \;=\; 0$$

- Vereinfachte Rechnung mit Beträgen:
  - In jeder Dimension wird der Betrag für jede wirkende Kraft bzw. für jede Kraftkomponente in dieser Richtung als Formelzeichen notiert, wobei Kräfte, die in die Koordinatenrichtung wirken, mit ein Plus- und entgegengesetzte ein Minuszeichen erhalten. Für jede Koordinatenrichtung muss die Summe aller Kräfte Kraftkomponenten Null ergeben.
  - Für Drehungen wird in jeder Dimension willkürlich eine Drehrichtung definiert. Jedes mögliche Drehmoment wird ebenfalls als Betrag angeschrieben (Kraft mal Kraftarm, die aufeinander normal stehen müssen!). In der Momentengleichung steht jedes Drehmoment mit einem Pluszeichen, wenn es eine Drehung in Richtung der vorgegebenen Drehrichtung anstößt, sonst mit Minuszeichen. Dies muss, wenn Drehmomente in verschiedenen Dimensionen möglich sind, für jede Koordinatenrichtung gemacht werden.

Die Methode mit den Beträgen verwendet man für eher einfache, gut durchschaubare Probleme, z. B. wenn alle Kräfte in einer Dimension wirken. In komplizierten Fällen empfiehlt sich immer die formale Vorgehensweise mit den Vektoren. In jedem Fall ist große Sorgfalt bei Vorzeichen und Richtungen geboten.