EXPERIMENTELLE MECHANIK

Kapitel 6

Kontinuumsmechanik

(Grundbegriffe der Elasto- und Fluidmechanik)

6.1.1 Mikroskopische Kräfte

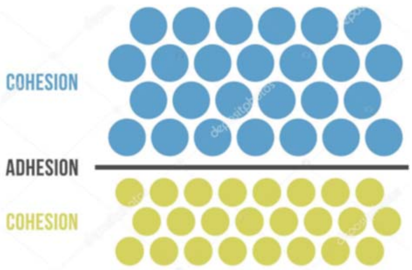
Mikroskopische statische Kräfte:

- **Kohäsion:** Anziehende Kräfte innerhalb eines Stoffs durch die Wechselwirkung gleicher Teilchen miteinander.

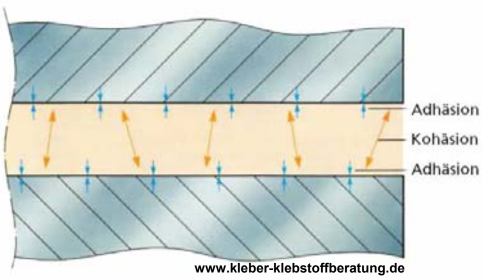
  Verantwortlich für:
  - Zusammenhalt eines Stoffes (Tropfen, Pfützen etc.)
  - Bildung glatter Flüssigkeitsoberflächen

- **Adhäsion:** Anziehende Kräfte von Teilchen eines Stoffs mit jenen eines anderen, benachbarten Stoffs.

  Verantwortlich für:
  - Benetzung einer Oberfläche mit Flüssigkeit
  - Verbindung mittels Klebstoff



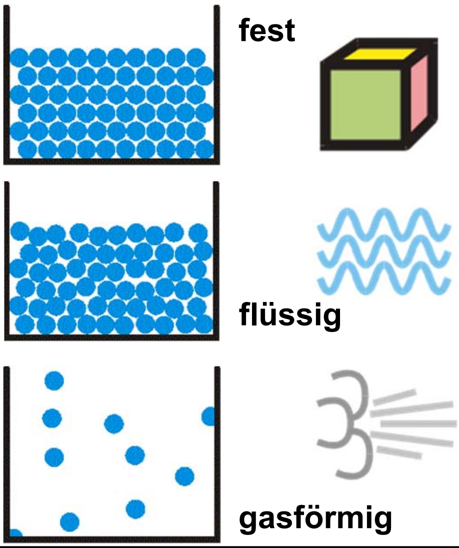
www.depositphotos.com

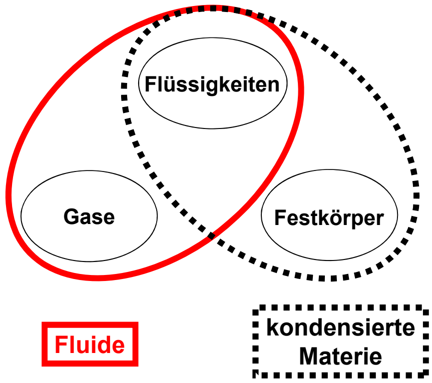


www.kleber-klebstoffberatung.de

6.1.1 atomistische Betrachtung der Aggregatzustände

Erscheinungsformen ausgedehnter Körper

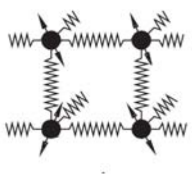




6.1.1 atomistische Betrachtung der Aggregatzustände

Mikroskopische Gestalt

Festkörper

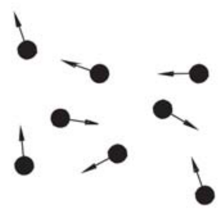


- Feste Bindungskräfte zwischen allen Atomen
- Dicht gepackt
- Feste Positionen
- Bewegung: Oszillationen

Flüssigkeit

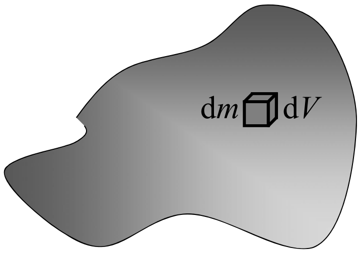
- Lose atomare Kräfte („van-der Waals-Kräfte“)
- Dicht gepackt
- Teilchen bewegen sich durch das Medium
- Sehr viele Teilchenstöße

Gas



- (Fast) keine Kräfte
- Sehr dünn gepackt
- Teilchen bewegen sich durch das Medium
- Kontakt nur durch Teilchenstöße

6.1.2 Wichtige Größen: Die Dichte ρ



Lokale Dichte: $\rho(\vec{r}) = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}$

Wenn der Körper homogen ist:

Globale Dichte: $\rho = \frac{M}{V}$

„Dichte ist Masse pro Volumen"

Dimension der Dichte:

Masse / Volumen = Masse / Länge³

SI-Einheit der Dichte:

1 kg/m³

(alt: 1 g/cm³ = 1000 kg/m³)

Beispiele:

Luft	1,3 kg/m³
Wasser	1 000 kg/m³
Blei	11 000 kg/m³
Gold, Uran	19 000 kg/m³

6.1.2 Wichtige Größen: Die spezifische Wärmekapazität c

Wärmezufuhr zu einem Medium führt in der Regel
zu Temperaturerhöhung:

Zusammenhang: $\Delta Q = c \cdot m \cdot \Delta T$

spezifische Wärmekapazität — Masse

Wärmezufuhr ΔQ (= thermische Energie)
führt zu Temperaturerhöhung ΔT

Definition: Die spezifische Wärmekapazität c eines Stoffes bezeichnet jene Wärmemenge ΔQ, die m = 1 kg dieses Stoffes zugeführt werden muss, um dessen Temperatur um ΔT = 1 K zu erhöhen.

Verwendung:
- Wie viel Energie ist notwendig, um eine bestimmte Stoffmenge auf eine best. Temperatur zu erwärmen?
- Um wie viel steigt die Temperatur eines Körpers, wenn eine bestimmte Wärmemenge zugeführt wird?

6.1.2 Wichtige Größen: Thermische Längenausdehnung

Festkörper dehnen sich aus, wenn die Temperatur steigt

Bei Festkörpern ist die relative Längenänderung $\Delta L/L$ proportional zur Temperaturänderung:

$$\frac{\Delta L}{L} = \alpha \cdot \Delta T \quad \longrightarrow \quad \Delta L = \alpha \cdot L(T_0) \cdot \Delta T \qquad L(T_0 + \Delta T) = L(T_0) \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T)$$

Die Konstante α heißt Längenausdehnungskoeffizient

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}l}{l} \cdot \frac{1}{\mathrm{d}T} \qquad [\alpha] = 1/\mathrm{K}$$

Beispiele für α (10^{-6} / K) bei 20 °C :

NaCl	40
Aluminium	23,2
Kupfer	16,5
Beton	10
Glas	7
Zerodur	0,02 (0°C – 50°C)
Kohlenstofffasern	-0,5

Meist ist $\alpha > 0$, ganz selten aber auch $\alpha < 0$ (dann zieht sich der Körper bei zunehmender Temperatur zusammen).

6.1.2 Wichtige Größen: Thermische Längenausdehnung

Festkörper dehnen sich aus, wenn die Temperatur steigt

Beispiel: Längenausdehnung einer Brücke

Länge L = 100 m,
Temperaturbereich ΔT = 50 K
Koeffizient $\alpha = 10 \cdot 10^{-6}$ / K

Längenvariation $\Delta L = \alpha \cdot L \cdot \Delta T$

→ ΔL = 5 cm

Dehnungsfuge

6.1.2 Wichtige Größen: Thermische Volumsausdehnung

Bei Fluiden ist die **relative Volumsänderung** $\Delta V / V$ proportional zur Temperaturänderung ΔT :

$$\frac{\Delta V}{V} = \gamma \cdot \Delta T \quad \longrightarrow \quad \Delta V = \gamma \cdot V(T_0) \cdot \Delta T \qquad V(T_0 + \Delta T) = V(T_0) \cdot (1 + \gamma \cdot \Delta T)$$

γ heißt ***Volumsausdehnungskoeffizient*** ([γ] = 1/K)

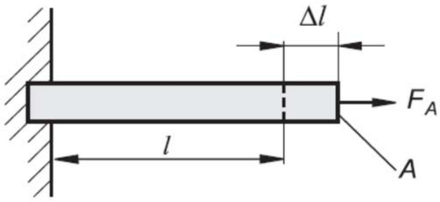
Der Koeffizient γ für verschiedene Flüssigkeiten:

Material	γ [10^{-6} / K] bei 20 °C	
Quecksilber	180	
Wasser	210	
Etylen	1100	
Gase	3661	(p = const, T = 0°C)

Bei Festkörpern gilt: $\gamma = 3 \cdot \alpha$

6.2.1 Dehnung

Verlängerung durch eine Kraft senkrecht zur Oberfläche



Zugspannung

$$\sigma = \frac{F_A}{A} \qquad [\sigma] = \text{N/m}^2$$

Relative Längenänderung („Dehnung“)

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \qquad [\varepsilon] = 1 \;\text{(Prozent)}$$

Für kleine Dehnung: Linearer Zusammenhang:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

(Hookesches Gesetz)

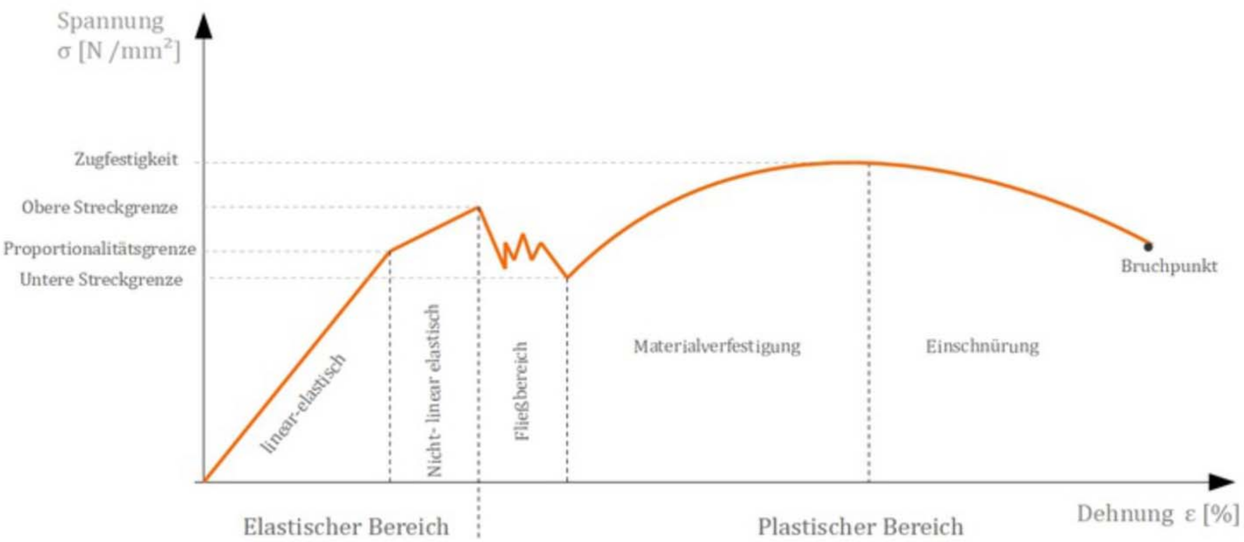
E: Elastizitätsmodul

$[E]$ = N/m²

Werte:

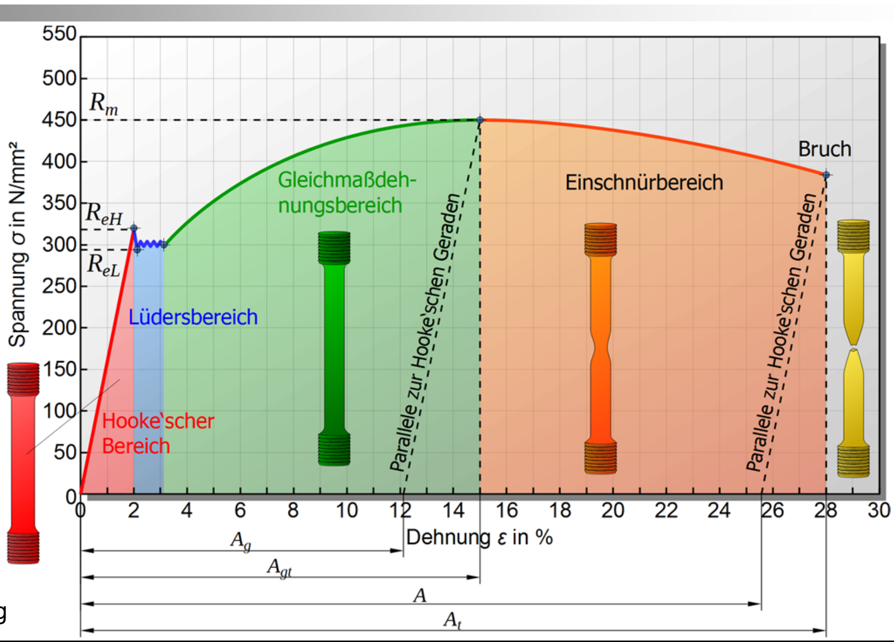
Diamant:	E = 800 kN/mm²
Eisen, Stahl:	200
Glas:	70
Beton:	25
Holz:	12
Gummi	0,5

6.2.1 Spannungs-Dehnungs-Diagramm



Schematische Darstellung für Kupfer

6.2.1 Spannungs-Dehnungs-Diagramm



Schematische Darstellung

6.2.1 Querkontraktion

Querkontraktion bei Dehnung

Poisson-Zahl:

$$\nu = -\frac{\Delta d / d}{\Delta l / l} \qquad [\nu] = 1$$

Relative Volumenänderung bei Dehnung

$$\frac{\Delta V}{V} = (1 - 2 \cdot \nu) \cdot \frac{\Delta l}{l}$$

Werte:

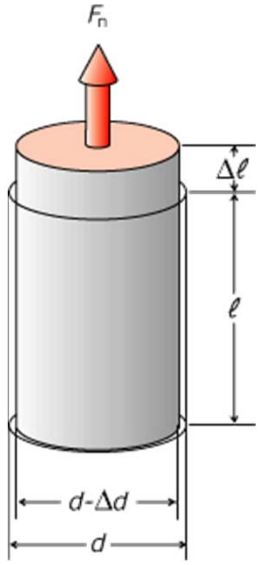
Kork:	ν = 0,00
Beton:	0,20
Stahl:	0,28
Kupfer:	0,35
Gummi:	0,50
Holz:	0,04 – 0,67

Bei Dehnung:

Kork bis Kupfer: V nimmt zu

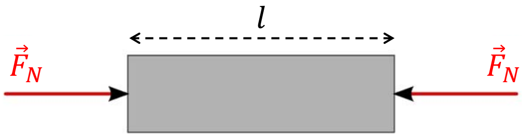
Gummi: V bleibt gleich

Holz: V nimmt ab



6.2.1 Stauchung

Verkürzung durch eine Kraft senkrecht zur Oberfläche



Druckspannung

$$\sigma_D = \frac{F_N}{A} \qquad (\sigma_D < 0)$$

Relative Verkürzung („Stauchung")

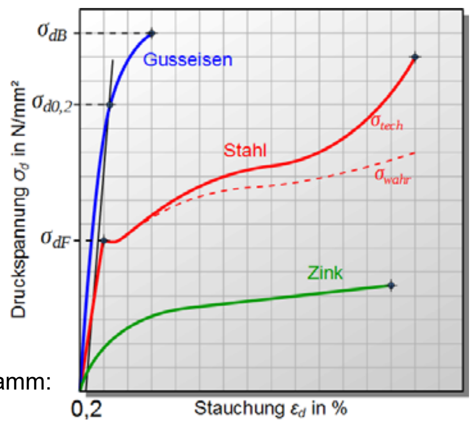
$$\varepsilon_D = \frac{\Delta l}{l} < 0$$

Für kleine Stauchungen: Proportionalität

$$\sigma_D = E \cdot \varepsilon_D$$

mit E: Elastizitätsmodul
gleich wie für Dehnung

Stauchungsdiagramm:



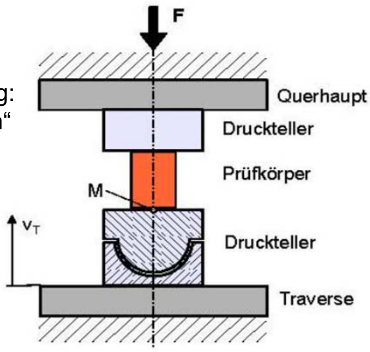
6.2.1 Stauchung

Verkürzung durch eine Kraft senkrecht zur Oberfläche

Druckspannung: $\sigma_D = \frac{F_N}{A}$

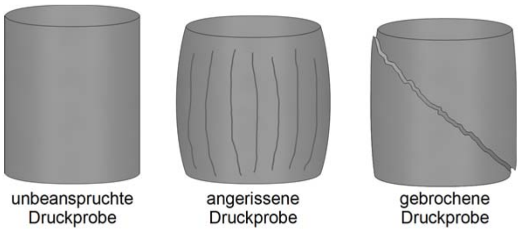
Stauchung: $\varepsilon_D = \frac{\Delta l}{l} < 0$

Materialprüfung: „Druckversuch“



Eine gestauchte Probe wird inhomogen deformiert

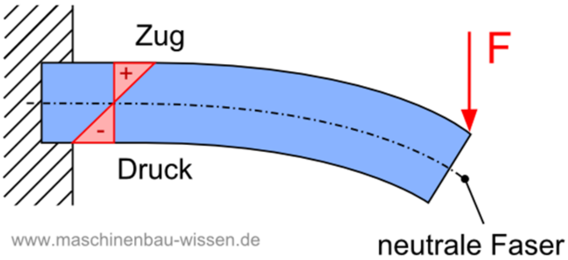
Verlauf eines „Druckversuchs“:



6.2.2 Biegung

Beispiel: Einseitig eingespannter Stab:

Mitte: „Neutrale Faser“ (konstante Länge)
Oben: Zugspannung (Verlängerung)
Unten: Druckspannung (Verkürzung)

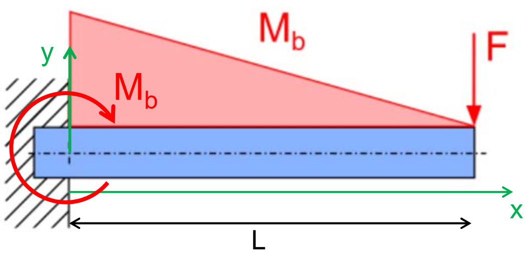


Biegemoment: $M_b(x) = F \cdot (L - x)$

maximal: $M_b = F \cdot L$

Biegespannung: $\sigma_b(y) = \frac{M_b}{I_h} \cdot y$

mit „Flächenträgheitsmoment“ I_h
(Maß für Biegesteifigkeit)



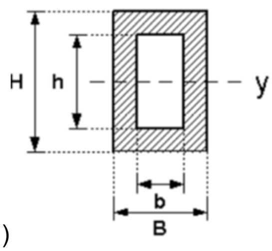
6.2.2 Biegung

Biegung: Flächenträgheitsmomente

Rechteck-Rohr:

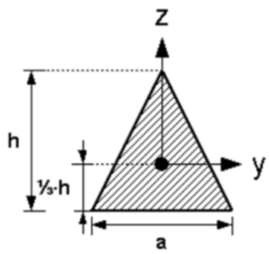
$$I_h = \frac{1}{12} \cdot (B \cdot H^3 - b \cdot h^3)$$

(volles Rechteck: $b = h = 0$)



Dreieck-Profil:

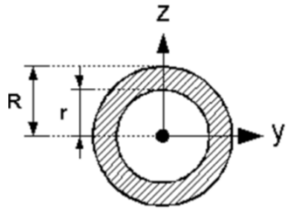
$$I_h = \frac{1}{36} \cdot (a \cdot h^3)$$

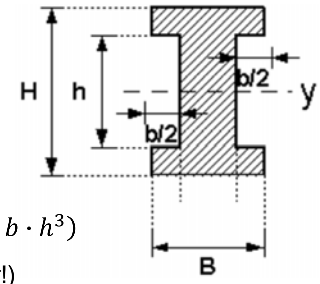


Kreis-Rohr:

$$I_h = \frac{\pi}{4} \cdot (R^4 - r^4)$$

(Vollkreis: $r = 0$)





I-Träger-Profil:

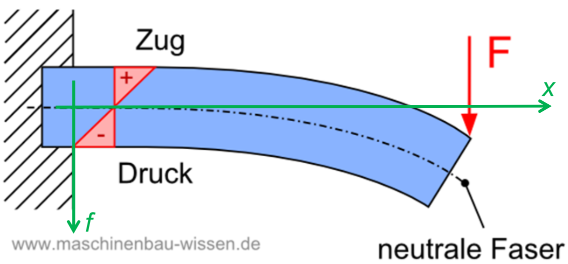
$$I_h = \frac{1}{12} \cdot (B \cdot H^3 - b \cdot h^3)$$

(wie Rechteck-Rohr!)

6.2.2 Biegung

Beispiel: Einseitig eingespannter Stab:

Mitte: „Neutrale Faser" (konstante Länge)
Oben: Zugspannung (Verlängerung)
Unten: Druckspannung (Verkürzung)



Biegemoment: $M_b(x) = F \cdot (L - x)$

maximal: $M_b = F \cdot L$

Biegespannung: $\sigma_b(y) = \frac{M_b}{I_h} \cdot y$

mit „Flächenträgheitsmoment" I_h
(Maß für Biegesteifigkeit)

Durchbiegung:

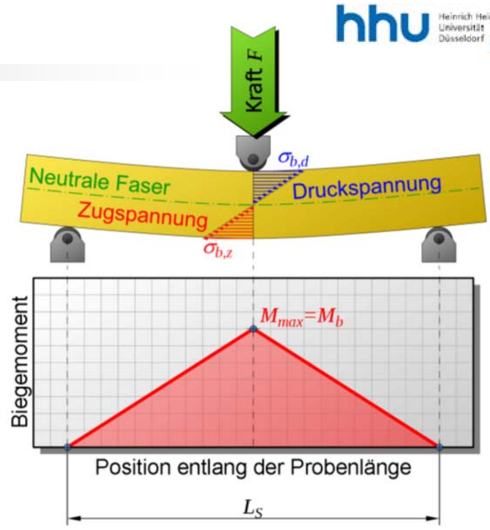
$$f(x) = \frac{F}{E \cdot I_h} \cdot \left(\frac{L \cdot x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)$$

Am Ende: $f(L) = \frac{F}{E \cdot I_h} \cdot \frac{L^3}{3}$

6.2.2 Biegung

Beispiel: Zweiseitig aufliegender Stab:

Mitte: „Neutrale Faser" (konstante Länge)
Oben: Druckspannung (Verkürzung)
Unten: Zugspannung (Verlängerung)



Max. Biegemoment: $M_{max} = \frac{F}{2} \cdot \frac{L_S}{2}$

Biegespannung: $\sigma_b(y) = \frac{M_b}{I_h} \cdot y$

Durchbiegung in der Mitte: $f(L_S/2) = \frac{F}{E \cdot I_h} \cdot \frac{{L_S}^3}{48}$

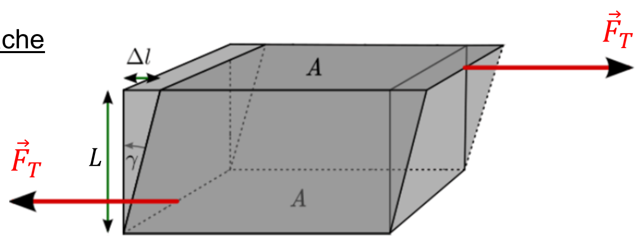
6.2.3 Scherung

Verformung durch eine Kraft parallel zur Oberfläche

Scherspannung $\tau = \frac{F_T}{A}$ $[\tau]$ = N/m²

Verkippung („Scherung ")

$\gamma \approx \tan\gamma = \frac{\Delta l}{L}$ ← Horizontale Deformation, ← Vertikale Länge



Im elastischen Bereich:

$\tau = G \cdot \gamma$ mit G: Schubmodul $G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$

6.2.3 Torsion

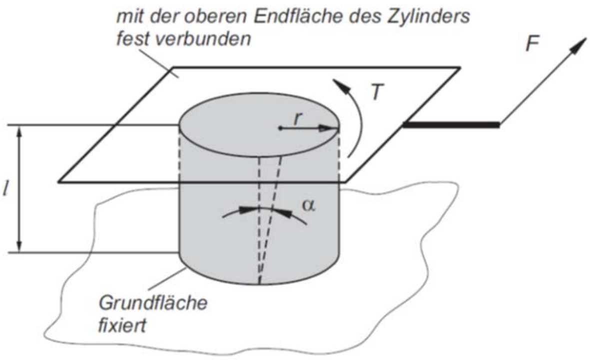
Verdrehung durch Drehmoment in den Oberflächen

Elastische Torsion

$$D = -\kappa \cdot \varphi$$

Richtmoment:

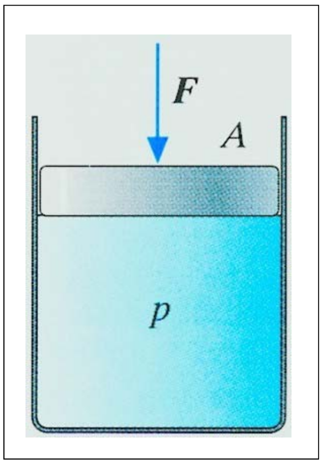
$$\kappa = \frac{\pi}{2} \cdot G \cdot \frac{r^4}{l} \qquad [\kappa] = \text{Nm}$$



6.3.1 Der Druck p

Definition: Wirkt auf eine Fläche A die Kraft $\boldsymbol{F}$, dann nennt man die Größe $p = \dfrac{F}{A}$ den auf diese Fläche wirkenden **Druck.**

Dies gilt ganz allgemein, für alle Aggregatzustände und Situationen.



Dimension des Drucks: **Kraft / Fläche**

SI-Einheit des Drucks: **1 Pa = 1 N / m² = 1 kg/(m·s²)** (**Pascal**)

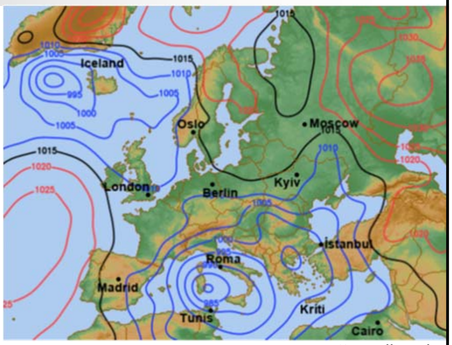
Wirkt auf eine Fläche von $A = 1$ m² eine Kraft von $F = 1$ N, dann beträgt der Druck $p = 1$ Pa

1 Pa ist eine kleine Einheit!

Blaise Pascal (1623 – 1662)

6.3.1 Der Druck p

„Wetterkarte“: Isobaren



www.wetteronline.de

<u>Weitere gebräuchliche Einheiten</u>

1 bar („Bar“) = 10^5 Pa = 100 000 Pa

1 mbar = 100 Pa = 1 hPa („Hektopascal“)

1 torr = 133,32 Pa (→ 750 torr = 1 bar)

1 atm = 1013,25 mbar („Atmosphäre“)
= 760 torr (Standardluftdruck)

„1 mm Hg“ = 1 torr = 133,32 Pa

„1 mm $H_2$0“ = 9,807 Pa

Anzeige eines Blutdruckmessers

Anzeigeeinheit für einen Hochdruck-Durchflussregler

6.3.1 Der Druck p

Der Druck eines Gases gibt die **mechanische Energiedichte** w an, die darin gespeichert ist.

<u>Dimension:</u>

$$\text{E-dichte} = \frac{\text{Energie}}{\text{Volumen}} = \frac{\text{Kraft} \cdot \text{Weg}}{\text{Fläche} \cdot \text{Länge}} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} = \text{Druck}$$

<u>Einheit:</u>

$$[w] = 1\ \text{J}/\text{m}^3 = 1\ \text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2) = 1\ \text{Pa} = [p]$$

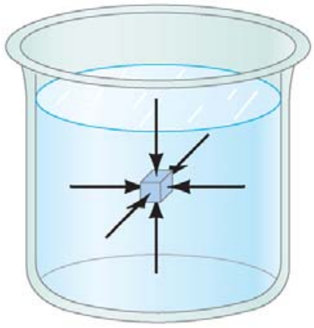
In vielen technischen Anwendungen wird ein großer Teil dieser Energiedichte genutzt

<u>Beispiel:</u> Drucklufthammer

6.3.1 Der Druck p

Isotropie des Drucks:

- Der Druck ist ein Skalar und kein Vektor
- Der Druck hat keine Richtung
- Der Druck auf ein kleines Volumenelement ist von allen Seiten gleich.
- Druck in ruhenden Flüssigkeiten und Gasen: Auf jede Fläche wirkt eine Kraft und eine gleich große Gegenkraft.

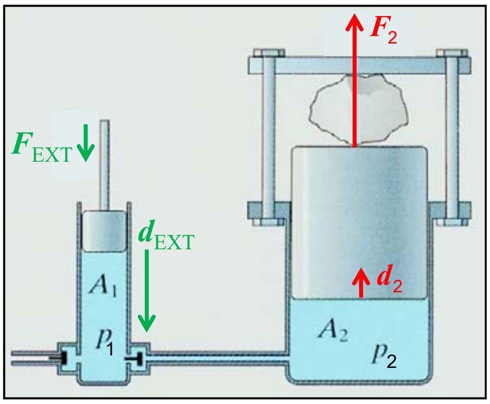


„Allseitige Gleichheit des Drucks“:

Der Druck im Inneren eines Gefäßes und an den Grenzflächen ist überall gleich groß, unabhängig von der Form des Gefäßes (abgesehen vom Schwerdruck).

6.3.1 Der Druck p

Anwendung der Druck-Isotropie: Hydraulische Presse



Druck: $p_1 = p_2 \quad \rightarrow \quad \frac{F_{EXT}}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$

$\Rightarrow$ Kraftverstärkung $F_2 = \frac{A_2}{A_1} \cdot F_{EXT} \gg F_{EXT}$

Arbeit: $W = F_{EXT} \cdot d_{EXT} = p \cdot \Delta V$ (Volumen gegen Druck komprimieren)

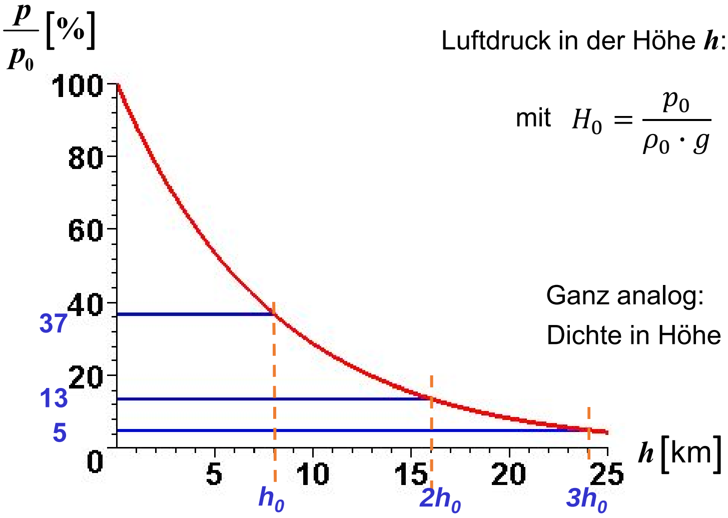
Energieerhaltung: $F_{EXT} \cdot d_{EXT} = F_2 \cdot d_2$

$\Rightarrow d_2 = \frac{A_1}{A_2} \cdot d_{EXT} \ll d_{EXT}$

Prinzip: **kleine Kraft** auf **langem Weg** bewirkt **große Kraft** auf **kurzem Weg**

6.3.2 Der Schweredruck von Gasen

Die barometrische Höhenformel



Luftdruck in der Höhe h: $\boxed{p(h) = p_0 \cdot \mathrm{e}^{-(h/H_0)}}$

mit $H_0 = \dfrac{p_0}{\rho_0 \cdot g} = 7995\ \mathrm{m}$ $\quad p_0$ = 101 325 Pa, ρ_0 = 1,292 kg/m^{3}2 (0°C)

$= 8580\ \mathrm{m}$ $\quad \rho_0$ = 1,204 kg/m^{3}2 (20°C)

Ganz analog:

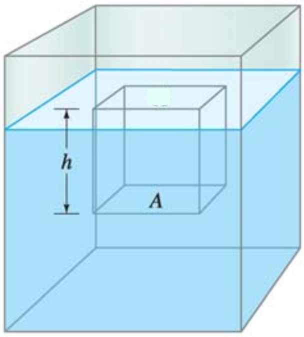
Dichte in Höhe h: $\boxed{\rho(h) = \rho_0 \cdot \mathrm{e}^{-(h/H_0)}}$

6.3.2 Der Schweredruck von Gasen

Luftdruck und Vakuum

Die „Magdeburger Halbkugeln“ (Otto von Guericke, 1657)

6.3.2 Der Schweredruck von Flüssigkeiten



Druck in einer Tiefe h :

Masse des Wassers darüber: $m = \rho \cdot V = \rho \cdot A \cdot h$

Gewichtskraft: $F_g(h) = m \cdot g$

Druck auf die Fläche A : $p_g = \frac{F_g}{A} = \frac{m \cdot g}{A} = \frac{\rho \cdot A \cdot h \cdot g}{A}$

Schweredruck einer Flüssigkeit $\boxed{p_g = \rho \cdot g \cdot h}$

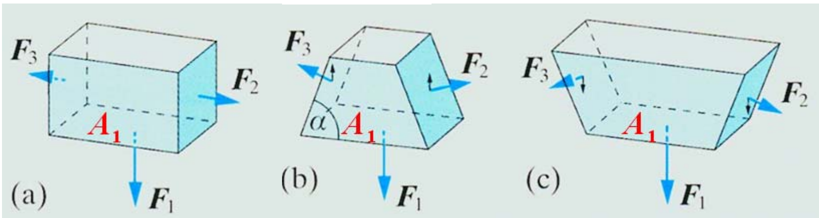
Der Schweredruck …
… wirkt nach allen Seiten gleich
… nimmt linear mit der Tiefe zu

Bsp.: Wassersäule, 10 m hoch:

p_g(10 m) = 1000 kg/m³ · 9,81 m/s² · 10 m
≈ 10^5 Pa = 1 bar (Standard-Luftdruck)

6.3.2 Der Schweredruck von Flüssigkeiten

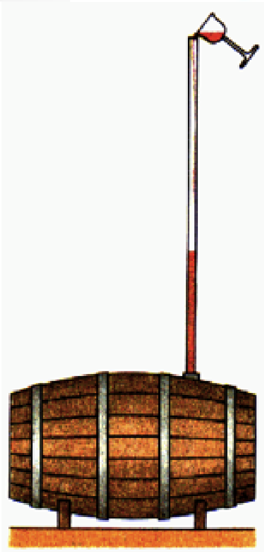
Das „hydrostatische Paradoxon“:



Der Druck auf den Gefäßboden $p_g = \rho \cdot g \cdot h$

ist abhängig von
- Höhe h der Wassersäule
- Dichte ρ der Flüssigkeit
- Erdbeschleunigung g,

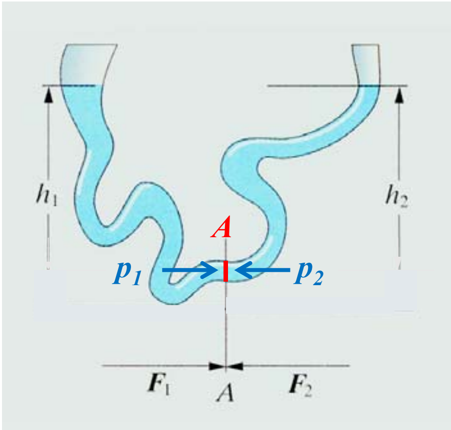
unabhängig von
- Form des Gefäßes



B. Pascal, 1648: Weinfass platzt durch Kapillare>

6.3.2 Der Schweredruck von Flüssigkeiten

„Kommunizierende Röhren“:



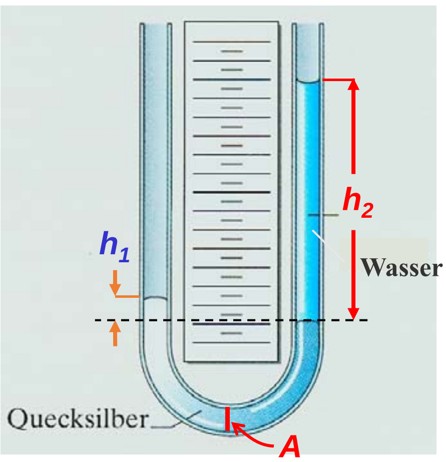
Gleichgewicht nur, wenn an jeder Querschnittsfläche A Druck von beiden Seiten identisch:

$$p_1 = p_2 \quad \Rightarrow \quad h_1 = h_2$$

Beide Schenkel sind gleich hoch gefüllt !

6.3.2 Der Schweredruck von Flüssigkeiten

„Kommunizierende Röhren“:



Unterschiedliche, nicht-mischende Flüssigkeiten:

U-Rohr-Schenkel im Kräfte-Gleichgewicht,

wenn $F_{g,1} = F_{g,2}$

$$A \cdot p_1 = A \cdot p_2$$

$$A \cdot h_1 \cdot \rho_1 \cdot g = A \cdot h_2 \cdot \rho_2 \cdot g$$

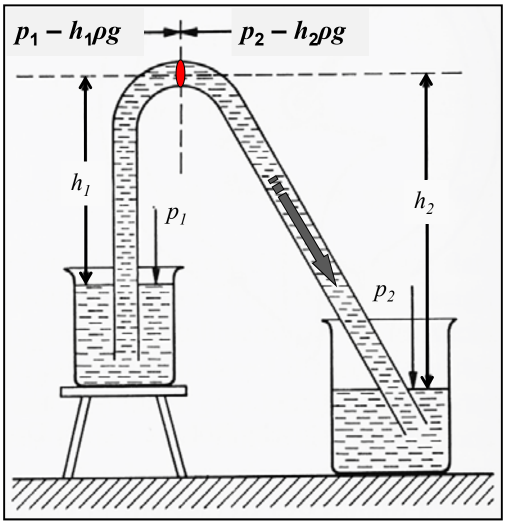
$$\boxed{h_1 \cdot \rho_1 = h_2 \cdot \rho_2}$$

z.B. Dichtebestimmung:

$$\rho_{\text{LEICHT}} = \frac{h_{\text{SCHWER}}}{h_{\text{LEICHT}}} \cdot \rho_{\text{SCHWER}}$$

6.3.2 Der Schweredruck von Flüssigkeiten

„Wie entleert man ein Aquarium?“



1. $p_1 \approx p_2 = p$
   Luftdruckänderung über Höhe h_2-h_1 ist vernachlässigbar.

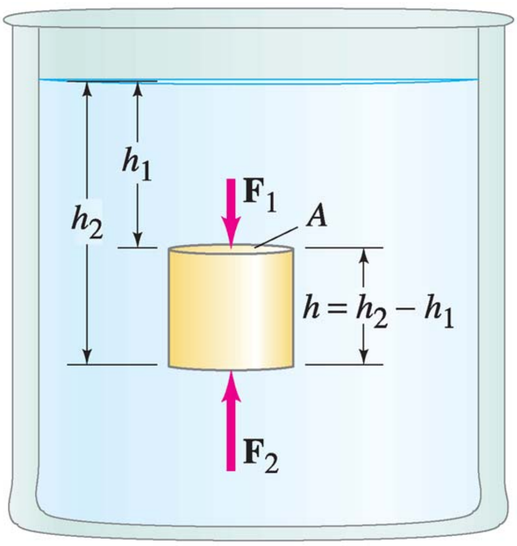
2. Druck an der „Grenzfläche“ (rot):

   links: $p_{\text{links}} = p_1 - h_1\,\rho\,g$

   rechts: $p_{\text{rechts}} = p_2 - h_2\,\rho\,g$

   $p_{\text{links}} > p_{\text{rechts}} \Rightarrow$ Wasser fließt aus

6.3.3 Auftrieb



Kraft auf die obere Fläche:

$$F_1 = -p_1 \cdot A \qquad p_1 = \rho \cdot g \cdot h_1$$
$$F_1 = -\rho \cdot g \cdot h_1 \cdot A$$

- Kraft auf die untere Fläche:

$$F_2 = +\rho \cdot g \cdot h_2 \cdot A$$

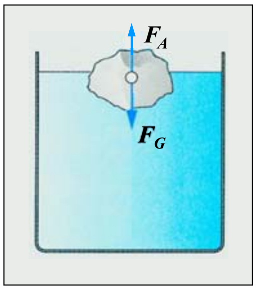
- Gesamtkraft auf den Körper:

$$F_{\text{ges}} = F_g + F_1 + F_2$$
$$= -g \cdot M + g \cdot \rho \cdot (h_2 - h_1) \cdot A$$
$$= -g \cdot (M - M_{\text{FL}})$$

Archimedisches Prinzip:
Die auftreibende Kraft (der Auftrieb) entspricht der Gewichtskraft des verdrängten Fluids.
$$F_A = \rho_{\text{FL}} \cdot V_K \cdot g$$

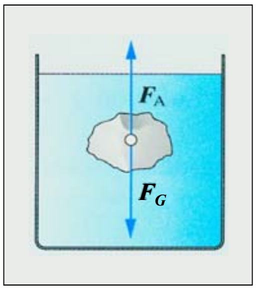
6.3.3 Auftrieb

Schwimmen:



$$\boxed{F_A = -F_G}$$

Schweben:



mittlere Dichte! $\rho_{KÖRPER} < \rho_{FL}$

mittlere Dichte! $\rho_{KÖRPER} = \rho_{FL}$

Körper taucht ein, bis Gewichtskraft des verdrängten Fluids der eigenen Gewichtskraft entspricht

Körper besitzt gleiche *mittlere* Dichte wie Fluid.

6.3.3 Auftrieb

Schwimmen:

Im Gleichgewicht gilt immer:

$$\boxed{F_A = -F_g}$$

Totes Meer: Salz im Wasser erhöht die Dichte ρ_{FL} und damit den Auftrieb

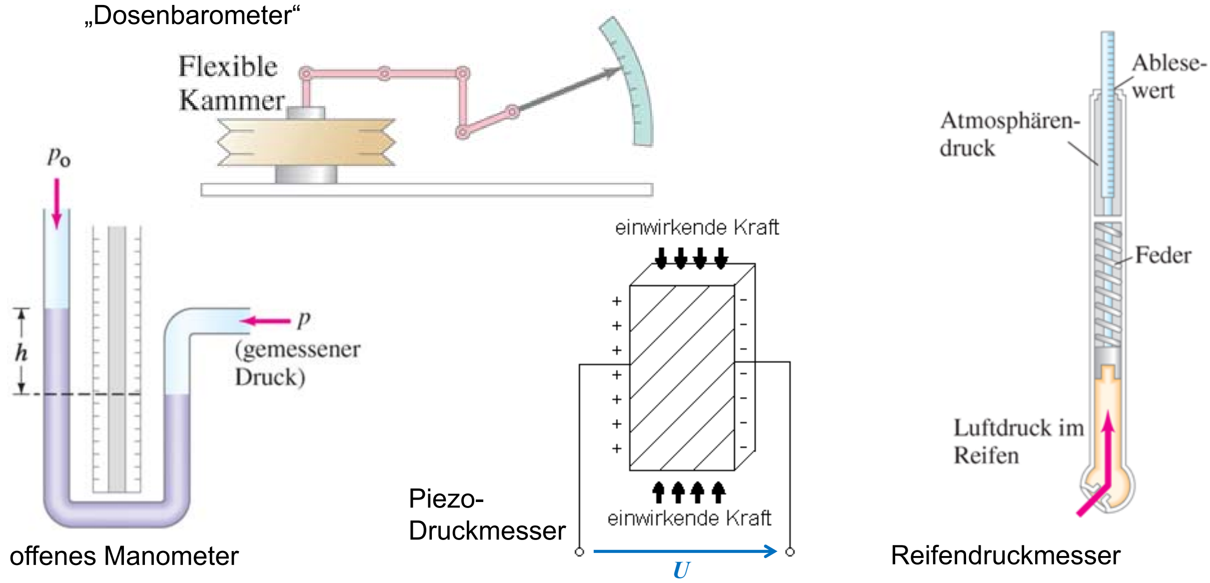
→ weniger Volumen V nötig, um F_g zu kompensieren

$$\boxed{F_A = \rho_{FL} \cdot V \cdot g = -F_g}$$

Passagierschiff mit viel Hohlraum hat eine geringe Dichte

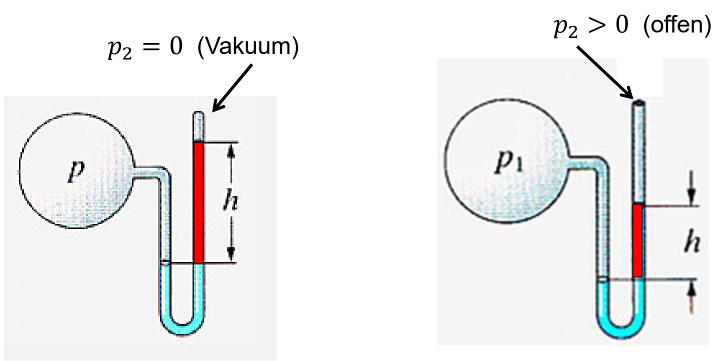
Beladenes Lastschiff: Hohe Dichte

6.3.4 Druckmessung



6.3.4 Druckmessung

Manometer: (a) absolut (b) differenziell



Messung des Drucks p durch Vergleich mit Vakuum ($p_2 = 0$). p kann auch der Luftdruck sein.

Messung des Drucks p_1 durch Vergleich mit dem Luftdruck p_2

Ergebnis: Druckdifferenz

bekannt? Messgröße

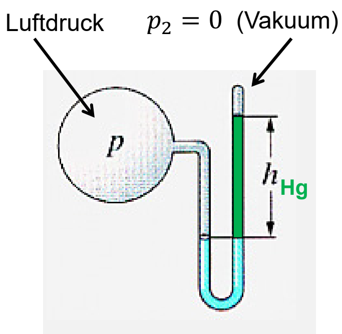
$$p_1 - p_2 = \rho \cdot g \cdot h$$

Konstante

Materialkonstante

6.3.4 Druckmessung

Barometer: Luftdruckmessung



Messung des Drucks p durch Schweredruck einer Flüssigkeit

Messflüssigkeit Wasser (H_2O):

$$p = \rho_{\mathrm{H2O}} \cdot g \cdot h_{\mathrm{Hg}}$$

Messflüssigkeit Quecksilber (Hg):

$$p = \rho_{\mathrm{Hg}} \cdot g \cdot h_{\mathrm{Hg}}$$

$$h_{\mathrm{Hg}} = \frac{p}{\rho_{\mathrm{Hg}} \cdot g}$$

g = 9,81 m/s²

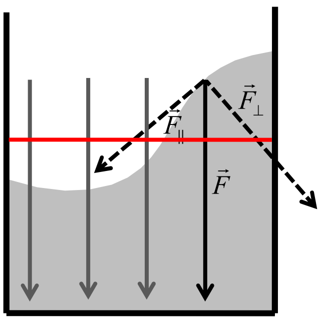
ρ_{Hg} = 13 593 kg/m³

$\boxed{h_{\mathrm{Hg}}(p = 1013\ \text{mbar}) = 760\ \text{mm}}$

$\boxed{h_{\mathrm{H2O}}(p = 1013\ \text{mbar}) = 10{,}33\ \text{m}}$

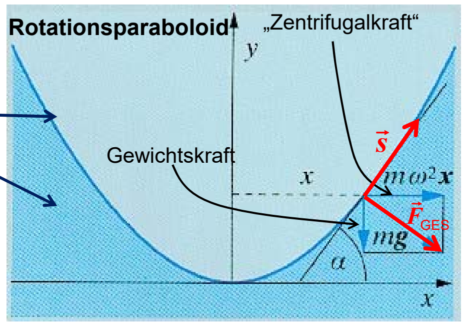
Historisches Wasserbarometer

6.3.5 Flüssigkeitsoberflächen



Wirken Kraftkomponenten parallel zur Flüssigkeitsoberfläche, werden Teilchen verschoben.

→ „Form" der Flüssigkeit ist erst dann im Gleichgewicht, wenn die Oberfläche überall senkrecht auf die örtlich wirkende Kraft steht.



Gesamte Kraft

$$\vec{F}_{\mathrm{GES}} = \begin{pmatrix} m\omega^2 x \\ -mg \end{pmatrix}$$

Vektor in Richtung der Oberfläche (es muss gelten: $\vec{F} \cdot \vec{s} = 0$): $\vec{s} = \begin{pmatrix} g \\ \omega^2 x \end{pmatrix}$

Oberfläche beschrieben durch Funktion $y = f(x)$

Steigung ist bekannt: $f'(x) = \frac{s_y}{s_x} = \frac{\omega^2}{g} \cdot x$

$$\rightarrow \quad f(x) = y_0 + \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g} \cdot x^2 \qquad \text{(Parabel)}$$

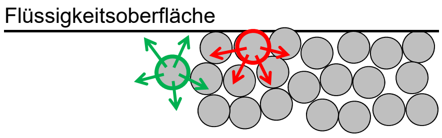
6.3.5 Flüssigkeitsoberflächen

Bei jedem Flüssigkeitsteilchen, das an der Oberfläche liegt, heben sich die Kräfte von den Nachbarn **nicht** auf:

→ Oberflächenteilchen: Größere potentielle Energie.

Flüssigkeit „versucht“, potentielle Energie zu minimieren.

→ Oberfläche wird minimiert.

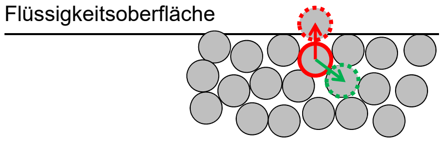


Teilchen **innerhalb** der Flüssigkeit verschieben:
Von allen Seiten gleich große Anziehungskraft.

→ (fast) keine Arbeit notwendig.

Teilchen **über** die Oberfläche bewegen:
Anziehungskraft muss überwunden werden.

→ Arbeit aufzuwenden.

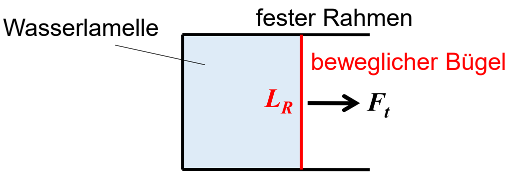


6.3.5 Oberflächenspannung

<u>Definition</u> der Oberflächenspannung:

$$\boxed{\sigma_O = \frac{F_t}{L_R}}$$

F_t ... tangentiale Kraft
L_R ... Länge des Rands

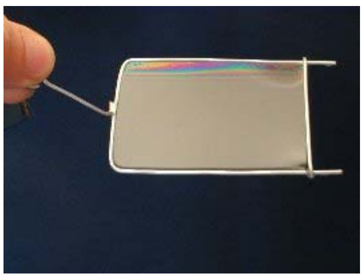


<u>Dimension</u>: **Kraft / Länge** oder **Masse / Zeit²**

<u>SI-Einheit</u>: 1 **N / m** = 1 **kg / s²**

<u>Beispiele:</u>

Ethanol: σ_O = 0,023 N/m
Wasser: σ_O = 0,073 N/m (bei T = 20°C)
Quecksilber: σ_O = 0,470 N/m (bei T = 20°C)



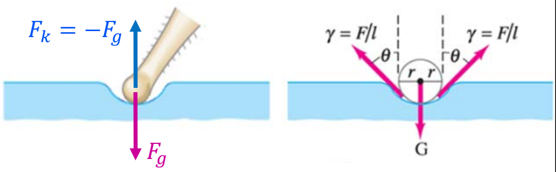
6.3.5 Oberflächenspannung

Bildung von Tropfen:

Zusammenwirken von innerer Wechselwirkung und Schwerkraft

Nur innere Kräfte: Kugelform

Wasserläufer



Kompensation der Schwerkraft durch Oberflächenspannung

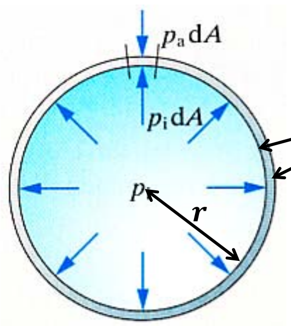
6.3.5 Oberflächenspannung

Beispiel: Seifenblasen

Kugelförmige Oberfläche von Seifenblasen als Gleichgewicht zwischen Überdruck (innen) und Oberflächenspannung

Beim „Aufblasen“:
Arbeit verrichten, um Oberfläche zu vergrößern.

- Oberfläche ist bestrebt, Blasenradius zu verringern
- Innendruck steigt
- Kräfte-Gleichgewicht zwischen Innendruck p_i
  Außendruck p_a
  Oberflächenspannung σ



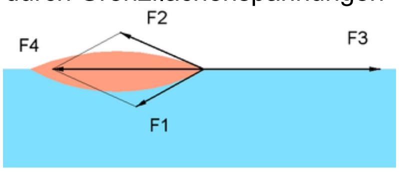
2 Oberfächen!

$$p_i = p_a + 2 \cdot \frac{2\sigma}{r}$$

6.3.5 Grenzflächenspannungen

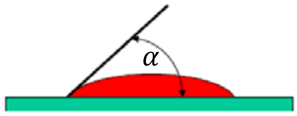
Beispiel: Fettaugen auf Wasser

Prinzip: Wechselspiel der Kräfte durch Grenzflächenspannungen

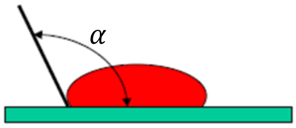


Beispiel: Tropfenform auf Festkörper

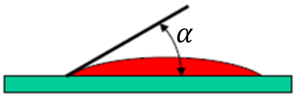
Die Benetzungseigenschaften erkennt man am Randwinkel (Kontaktwinkel) α



Randwinkel α > 90°:
schlechte Benetzung



Randtwinkel α < 90°:
gute Benetzung



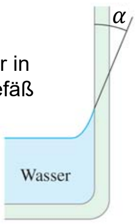
Randwinkel α = 0°:
perfekte Benetzung

6.3.5 Grenzflächenspannungen

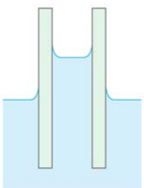
Gut benetzende Flüssigkeiten:

Große Grenzfläche Flüssigkeit – Festkörper ist energetisch günstiger als Grenzfläche Luft – Festkörper

Wasser in Glasgefäß

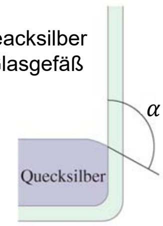


Glasröhrchen in Wasser

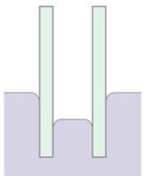


Flüssigkeitsfilm statt Tropfen

Queacksilber in Glasgefäß



Glasröhrchen in Quecksilber



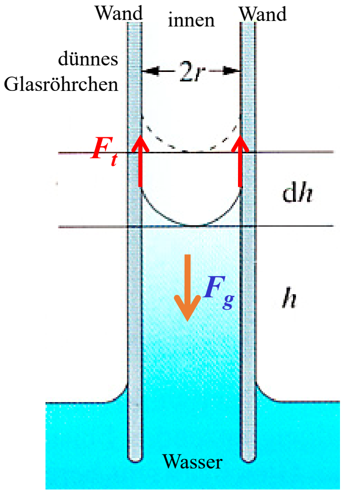
Tropfenbildung

Schlecht benetzende Flüssigkeiten:

Grenzfläche Luft – Festkörper ist aus Sicht der Gesamtenergie günstiger als die Grenzfläche Flüssigkeit – Festkörper

6.3.5 Kapillarität

Kapillaraszension



⇒ Flüssigkeit steigt innen

Zwei Effekte spielen zusammen:

(1) benetzende Flüssigkeit:
Flüssigkeit benetzt die Kapillarwand

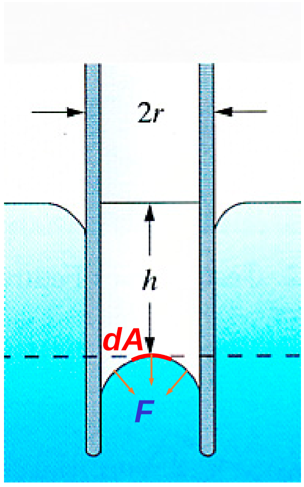
(2) Oberflächenspannung σ verringert Fläche durch Hochziehen von Wasser.
Gleichgewicht, wenn Kraft durch σ genau Gewichtskraft kompensiert.

$$\boxed{h = \frac{2 \cdot \sigma}{r \cdot \rho \cdot g}}$$

(1) Nicht-benetzende Flüssigkeit:
Wandfläche wird von Luft besetzt.

(2) Oberflächenspannung σ verringert Oberfläche durch Absenken.

Kapillardepression



⇒ Flüssigkeit sinkt innen

6.3.5 Kapillarität

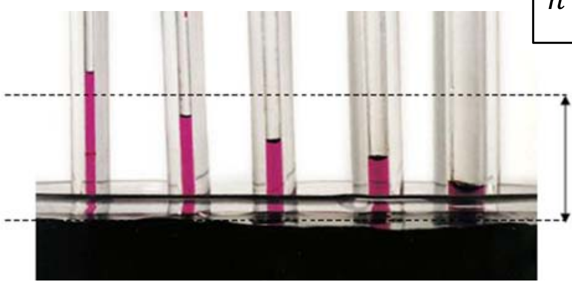
Füllfeder

Geschmolzenes Wachs im Docht

Wasser in Baumkrone (für Höhen über 10 Meter)

$$\boxed{h = \frac{2 \cdot \sigma}{r \cdot \rho \cdot g}}$$

Flüssigkeits-Chromatographie



$h \sim 1/r$

6.4 Grundlagen der Hydro- und Aerodynamik

Die Fluid-Dynamik beschäftigt sich mit der Bewegung von Fluiden,
also mit der Strömung von Flüssigkeiten und Gasen.

Fragen:
- Welche Kräfte bringen Fluide in Bewegung?
- Welche Bewegungsformen stellen sich ein?

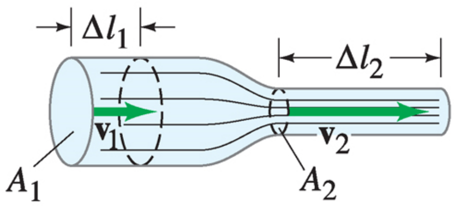
Begriffe:
- **kompressible Fluide:** Volumen (Dichte) kann sich leicht verändern (Gase in Ruhe)
- **inkompressible Fluide:** Volumen (Dichte) bleibt im wesentlichen konstant (Flüssigkeiten in Ruhe sowie Gase und Flüssigkeiten in Bewegung)
- **ideale Fluide:** intern reibungsfrei: Wechselwirkung zwischen den Teilchen vernachlässigbar
- **viskose Fluide:** Viskosität („innere Reibung") spielt eine wesentliche Rolle

7.4.1 Grundlagen der Hydro- und Aerodynamik

Die Kontinuitätsgleichung

Situation:
- Inkompressibles Fluid („Flüssigkeit")
- ohne Quellen und Senken („Abzweigungen
- fließt durch ein Rohr, dessen Querschnitt sich ändert

$\Rightarrow$ durch jeden Querschnitt A muss pro Zeit $\mathrm{d}t$ dasselbe Volumen V durchfließen



$V = V_1 = V_2$ mit

$V_1 = A_1 \cdot \Delta l_1 , \quad V_2 = A_2 \cdot \Delta l_2$

$\Delta l_1 = v_1 \cdot \mathrm{d}t \quad \Delta l_2 = v_2 \cdot \mathrm{d}t$

$\Rightarrow A_1 \cdot v_1 \cdot \mathrm{d}t = A_2 \cdot v_2 \cdot \mathrm{d}t$

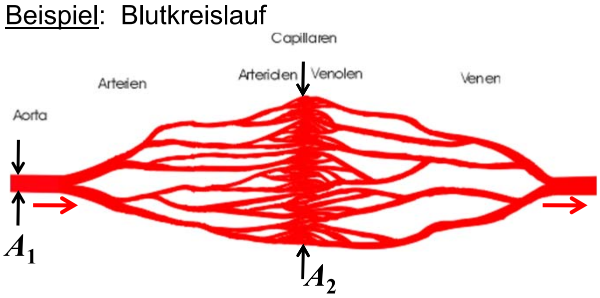
$$\boxed{A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2}$$

Fazit: Flüssigkeiten fließen an „Engstellen" schneller.

7.4.1 Grundlagen der Hydro- und Aerodynamik

Die Kontinuitätsgleichung

Beispiel: Blutkreislauf

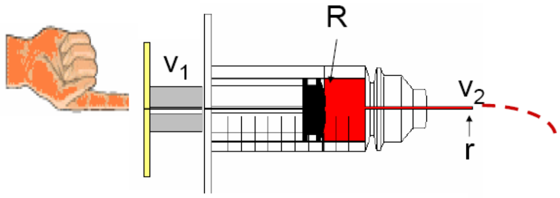


Gesamtquerschnitt A_2 aller Kapillaren zusammen ist wesentlich größer als Querschnitt A_1 der Aorta

⇒ Blut fließt langsam durch Kapillaren (für Diffusion nötig!)

Zahlen: $A_1 \approx 4\ \mathrm{cm}^2$, $A_2 \approx 4000\ \mathrm{cm}^2$,
$v_1 \approx 0{,}2\ \mathrm{m/s}$ → $v_2 \approx 0{,}2\ \mathrm{mm/s}$

Beispiel: Spritze



$$v_2 = \frac{R^2}{r^2}\cdot v_1 = \frac{1\,\mathrm{cm}^2}{0.05\,\mathrm{cm}^2}\cdot v_1 = 400\cdot v_1$$

Trotz geringer Kolbengeschwindigkeit v_1: hohe Strömungsgeschw. v_2 an der Öffnung!

$$\boxed{A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2}$$

Fazit: Flüssigkeiten fließen an „Engstellen" schneller.

6.4.1 Hydrodynamik idealer Fluide

Strömungen in idealen, inkompressiblen Fluiden

Bedingungen: $\eta = 0$ Ideales Fluid:
Fluid ist nicht-viskos (keine innere Reibung)

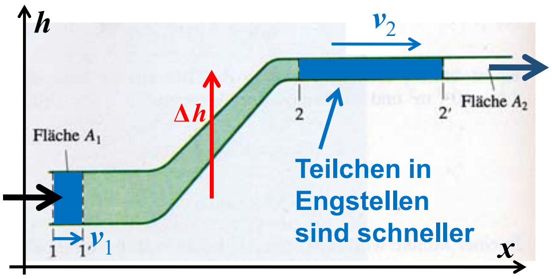
$\kappa = 0$ Inkompressibles Fluid:
Diese Annahme gilt für alle Flüssigkeiten und für alle realen Gase, wenn die Strömungsgeschw. kleiner ist als die Schallgeschwindigkeit

Frage: Welche Strömungen treten auf, wenn die Kräfte der inneren Reibung für die Bewegung des Fluids vernachlässigbar sind?

Welche Auswirkungen hat eine Strömung auf die Umgebung?

6.4.1 Hydrodynamik idealer Fluide

Beispiel: Energiebetrachtung im Fluid



Frage: Wie ist die Erhaltung der Energie gewährleistet?

(1) Potentielle Energie für jedes Teilchen nimmt zu:

$$m \cdot g \cdot h \quad \rightarrow \quad m \cdot g \cdot (h + \Delta h)$$

Übergang von einzelnen Teilchen auf Kontinuum:

Energie → Energiedichte: $E \rightarrow w = E/V$

Masse → Massendichte: $m \rightarrow \rho = m/V$

Potentielle Energiedichte nimmt zu:

$$\boxed{\rho \cdot g \cdot h \quad \rightarrow \quad \rho \cdot g \cdot (h + \Delta h)}$$

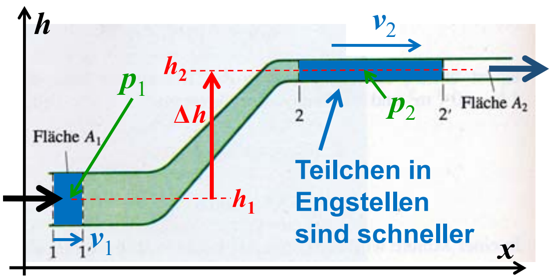
(2) Kinetische Energiedichte nimmt zu:

Teilchenzahlerhaltung,
Inkompressibilität:
→ Kontinuitätsgleichung $\frac{v_2}{v_1} = \frac{A_1}{A_2} \rightarrow v_2 > v_1$

$$\boxed{\frac{\rho}{2} \cdot {v_1}^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\rho}{2} \cdot (v_1 + \Delta v)^2}$$

6.4.1 Hydrodynamik idealer Fluide

Beispiel: Energiebetrachtung im Fluid



Energieerhaltung (hier für Energiedichte w):

$$\Delta w_{\text{kin}} + \Delta w_{\text{pot}} + \Delta w_{\text{druck}} = 0$$

$$\frac{\rho}{2} \cdot ({v_2}^2 - {v_1}^2) + \rho \cdot g \cdot (h_2 - h_1) + (p_2 - p_1) = 0$$

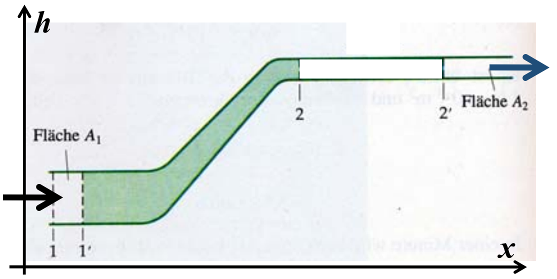
$$\underbrace{\frac{\rho \cdot {v_2}^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_2}_{\text{größer}} + p_2 = \underbrace{\frac{\rho \cdot {v_1}^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_1}_{\text{kleiner}} + p_1$$

Hier: $p_2 < p_1$

Bernoulli-Gleichung: $\boxed{\frac{\rho \cdot v^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h + p_{\text{stat}} = \text{const}}$

(Energieerhaltungssatz für inkompressible ideale Fluide)

6.4.1 Hydrodynamik idealer Fluide



Die Bernoulli-Gleichung:

$$\frac{\rho \cdot v^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h + p_{\text{stat}} = \text{const}$$

„Staudruck“
der bewegten Flüssigkeit
(kinet. Energiedichte)

„Schweredruck“
der Flüssigkeit im Schwerefeld der Erde
(pot. Energiedichte)

„statischer Druck“
Fähigkeit, Kraft auf eine Grenzfläche auszuüben
(innere Energiedichte)

Konstante
kann aus einem beliebigen leicht beschreibbaren Grenzfall ermittelt werden

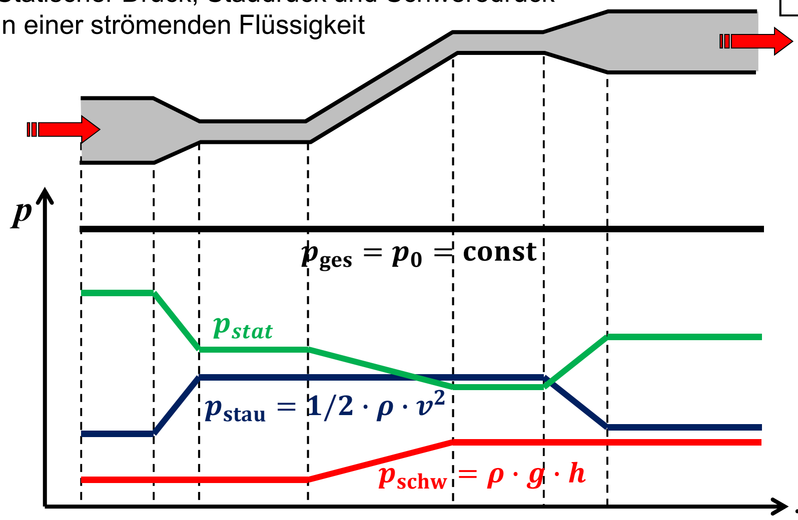
z.B.:
$h = 0,\ v = 0:$
$\rightarrow \ \text{const} = p_0$

6.4.1 Hydrodynamik idealer Fluide

Die Bernoulli-Gleichung

Statischer Druck, Staudruck und Schweredruck in einer strömenden Flüssigkeit

$$\boxed{\frac{\rho \cdot v^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h + p_{\text{stat}} = p_0}$$



Konstanter Gesamtdruck:
Kennt man ihn einmal, dann kennt man ihn überall

Einzige Messgröße:
Kraft auf eine Fläche

Gesamtdruck

Statischer Druck

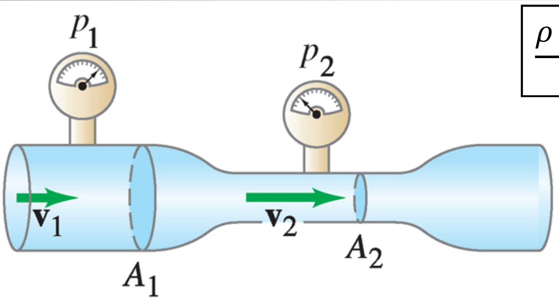
Staudruck

Schweredruck

6.4.1 Hydrodynamik idealer Fluide

$$\frac{\rho \cdot v^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h + p_{stat} = p_0$$

Der statische Druck



Venturimeter misst den statischen Druckabfall $\Delta p_{stat} = p_1 - p_2$ in der Verengung eines Rohrs

Wenn $h = \text{const}$: Rückschluss auf Geschwindigkeit der Strömung: $\Delta p_{stat} = -\Delta p_{schw}$

$$\Delta p_{stat} = \frac{\rho}{2} \cdot (v_2{}^2 - v_1{}^2) \quad \text{mit } A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 \quad \rightarrow \quad v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p_{stat}}{\rho} \cdot \frac{A_2{}^2}{A_1{}^2 - A_2{}^2}}$$

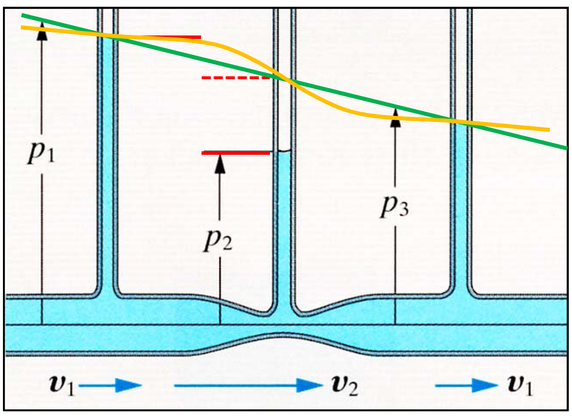
Achtung: Gase sind kompressibel → Venturimeter funktioniertfür Gase nur näherungsweise.

6.4.1 Hydrodynamik idealer Fluide

$$\frac{\rho \cdot v^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h + p_{stat} = p_0$$

Strömung durch kommunizierende Gefäße

Wie erklärt sich unterschiedlicher Flüssigkeitsstand in den Kapillaren?



Im Rohr: $h = \text{const}$

$$\rightarrow \frac{\rho \cdot v^2}{2} + p_{stat} = p_0 + \rho \cdot g \cdot h = \text{const}$$

angezeigt: p_1, p_2, p_3 (hydrostatischer Druck)

wegen Staudruck in der Engstelle (hohes Tempo):

$p_2 < p_1$ und $p_2 < p_3$

In Wirklichkeit: reale Flüssigkeit, also $\eta \neq 0$

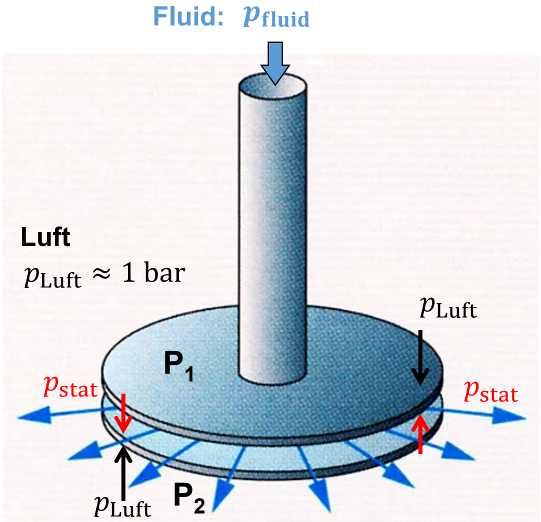
→ wegen Viskosität: $p_3 < p_1$

Genaue Betrachtung: komplizierterer Verlauf!

6.4.1 Hydrodynamik idealer Fluide

Das hydrodynamische Paradoxon

$$\frac{\rho \cdot v^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h + p_{\text{stat}} = p_0$$



Frage: Werden die Platten **P$_1$** und **P$_2$** angezogen oder abgestoßen?

(1) Gesamtdruck muss überall gleich sein:
$p_0 = p_{\text{Luft}} = p_{\text{fluid}}$

(2) Im strömenden Fluid:
Gesamtdruck enthält Staudruck
$p_{\text{fluid}} = p_{\text{stat}} + p_{\text{stau}}$

(3) Statischer Druck in der Strömung kleiner:
Luft: $p_{\text{stat}} = p_{\text{Luft}} = p_0$
Fluid: $p_{\text{stat}} = p_0 - p_{\text{Stau}} < p_{\text{Luft}}$

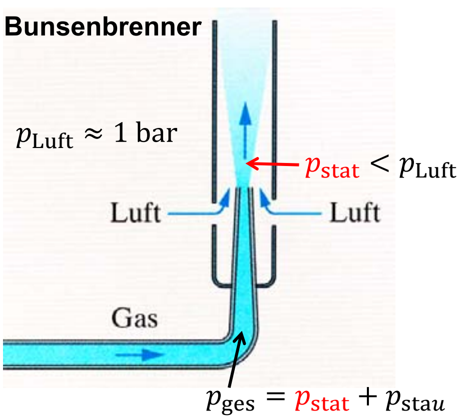
$\Rightarrow$ Platten **P$_1$** und **P$_2$** werden angezogen!

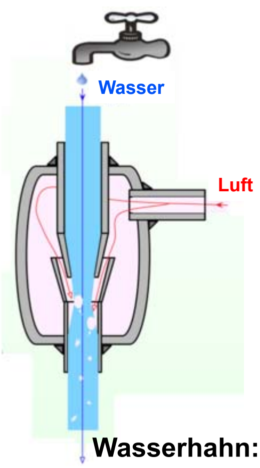
6.4.1 Hydrodynamik idealer Fluide

Bernoulli-Gleichung: Anwendungen

$$\frac{\rho \cdot v^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h + p_{\text{stat}} = p_0$$

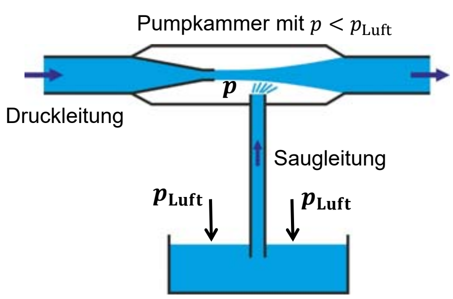
Bunsenbrenner





Wasserhahn: Mischdüse

Wasserstrahlpumpe



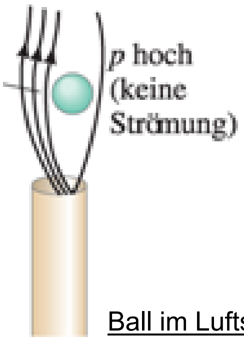
Prinzip: $\boxed{p_{\text{stat}} < p_{Luft}}$

6.4.1 Hydrodynamik idealer Fluide

$$\frac{\rho \cdot v^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h + p_{\text{stat}} = p_0$$

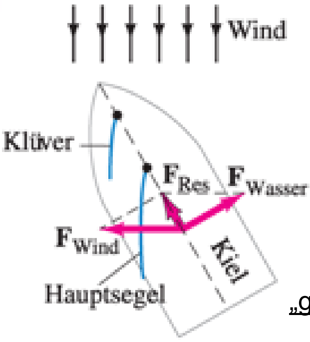
Bernoulli-Gleichung: Anwendungen

Zerstäuber



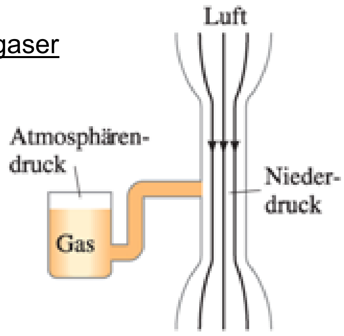
Ball im Luftstrom

Prinzip: $\boxed{p_{\text{stat}} < p_{Luft}}$



„gegen den Wind segeln“

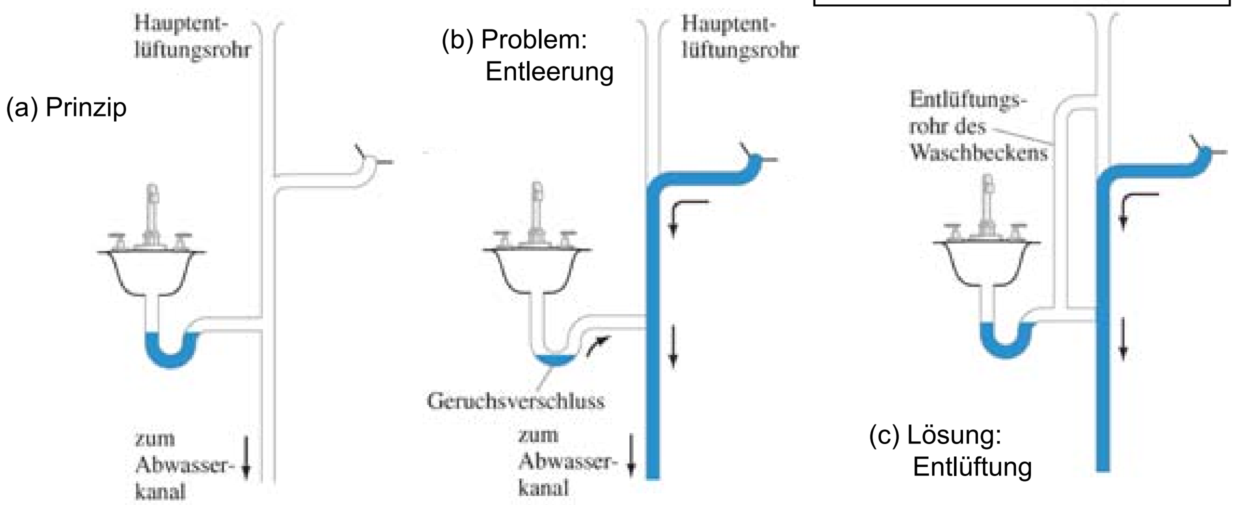
Vergaser



6.4.1 Hydrodynamik idealer Fluide

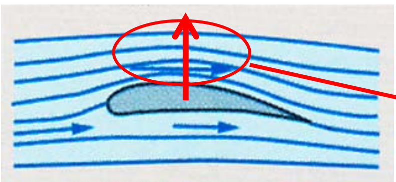
$$\frac{\rho \cdot v^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h + p_{\text{stat}} = p_0$$

Entlüftung von Abflussrohren:

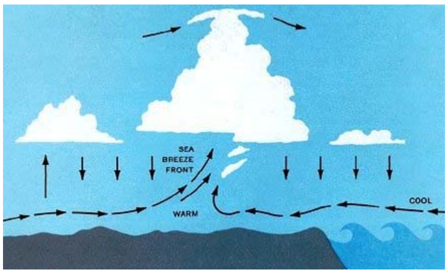


7.4.3 Hydrodynamik idealer Fluide

Hydrodynamischer Auftrieb:



Aerostatischer Druck über kleiner als unter der Tragfläche
⇒ aero- bzw. hydro-dynamischer Auftrieb



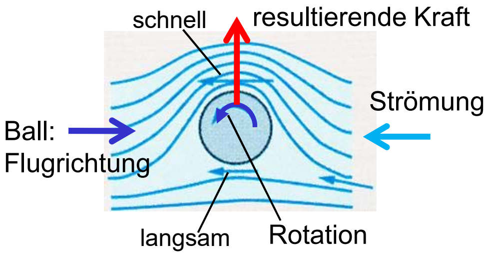
Segelflugzeug: „Fliegen“ ohne Motor ... gelingt nur unter Ausnützung von Aufwinden

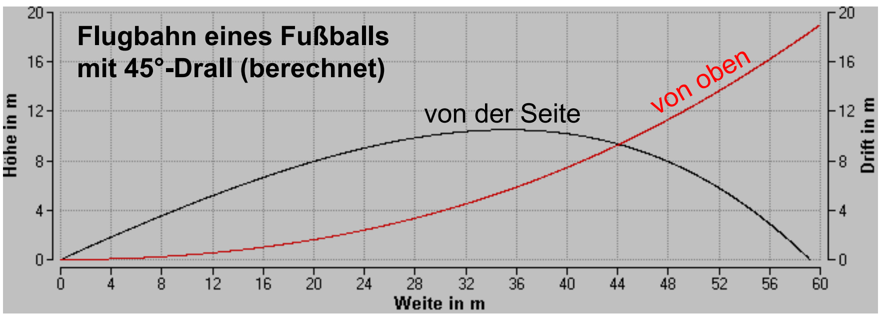
6.4.1 Hydrodynamik idealer Fluide

Der Magnus-Effekt:

Rotierende Körper werden von einer Strömung in Normalrichtung abgelenkt.

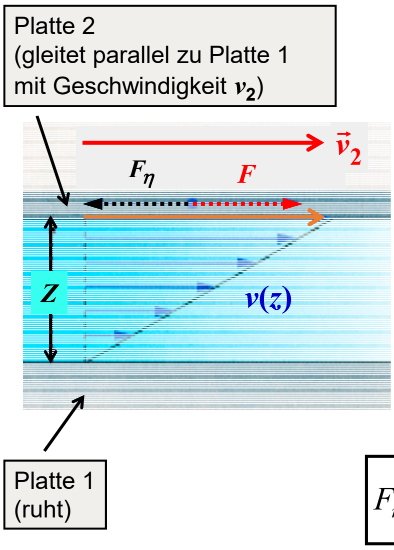
Bsp. Sport: Bälle mit Drall





6.4.2 Hydrodynamik viskoser Fluide

Die Viskosität (Zähigkeit)



Fluidteilchen an der Grenzfläche haften an der Festkörperoberfläche.

Fluidteilchen im Fluid haften aneinander

$\Rightarrow$ Strömungsgeschwindigkeit variiert senkrecht zur Bewegungsrichtung: $v = v(z)$

Einzelne Fluid*schichten* bewegen sich mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten und „reiben" aneinander, da die Fluidteilchen miteinander wechselwirken.

Zur Aufrechterhaltung der Bewegung von Platte 2 mit v_2 :
Kraft $\vec{F} = -\vec{F}_\eta$ in Richtung der Bewegung muss auf Platte 2 wirken!

$$\boxed{F_\eta = -\eta \cdot \frac{v \cdot A}{z}}$$

η heißt **Viskosität** des Fluids

6.4.2 Hydrodynamik viskoser Fluide

Die Viskosität (Zähigkeit)

$$F_\eta = -\eta \cdot \frac{v \cdot A}{z}$$

$$\boxed{\eta = -F_\eta \cdot \frac{z}{v \cdot A}}$$

- die Dimension der Viskosität ist:
  Kraft × Weg / (Geschwindigkeit × Fläche) oder **Masse / (Zeit × Weg)**
- die SI-Einheit der Viskosität ist „ **kg/(m·s)** " = Pa·s
- alternative Einheit (*nicht-SI* !): 1 P = 0,1 kg/(m·s) (1 Poise)
- bei einer Flüssigkeit mit η = 1 kg/(m·s) ist eine Kraft von $F = 1$ N notwendig, um eine Platte ($A = 1$ m²) im Abstand von $z = 1$ m über dem Boden mit v = 1 m/s = const vorwärts zu ziehen.

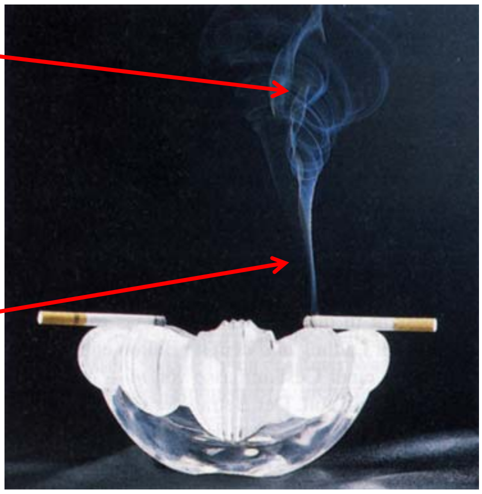
Beispiele:

Wasser:	η =	1,0 mPa·s (bei T = 20°C)
Pentan:	η =	0,23 mPa·s
Blut:	$\eta \approx$	20 mPa·s
Olivenöl:	$\eta \approx$	100 mPa·s
Glycerin:	η =	1480 mPa·s

6.4.2 Hydrodynamik viskoser Fluide

Laminare Strömungen:

- Eine Strömung ist **laminar**, solange
  - die innere Reibung (d.h. Viskosität) die Bewegung der einzelnen Teilchen bestimmt.
  - die Strömungsgeschwindigkeit klein genug ist, so dass einzelne Fluidschichten aneinander vorbei gleiten, ohne sich zu "verwirbeln"
- bei zu hohen Flußgeschwindigkeiten verwirbeln einzelne Fluidschichten, die Strömung ist dann **turbulent**.



6.4.2 Hydrodynamik viskoser Fluide

Laminare und turbulente Strömungen:

Die **Reynolds-Zahl** Re

$$Re = \frac{r \cdot \rho \cdot v}{\eta}$$

r - typische Quer-Längenskala der Strömung (z.B. Rohrdurchmesser)
ρ - Dichte des Fluids
v - Strömungsgeschwindigkeit
η - Viskosität des Fluids

gibt an, ob viskose Strömung *laminar* oder *turbulent* ist.

Z.B.: Für Strömung in einem Rohr mit Radius r:

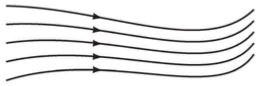
Re << 1200	Strömung laminar
Re $\approx$ 1200	Unbestimmt
Re >> 1200	Strömung turbulent

Für jede geometrische Situation gibt es einen eigenen Grenzwert!

6.4.2 Hydrodynamik viskoser Fluide

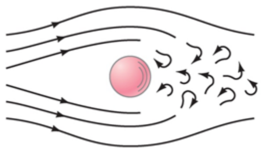
Laminare und turbulente Strömungen:

Strömung laminar

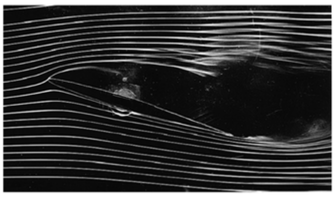


(a)

Strömung turbulent



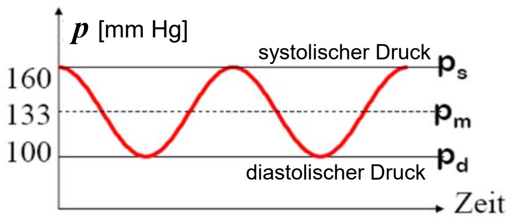
(b)

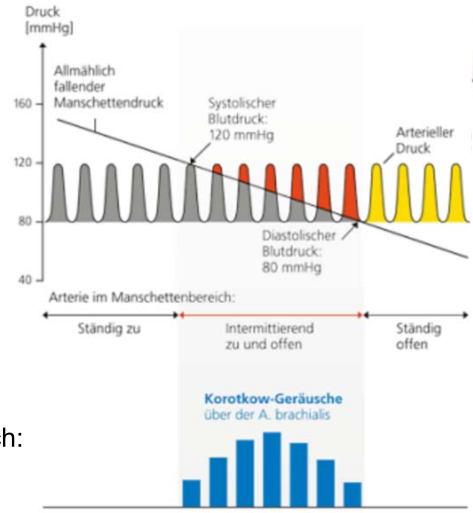


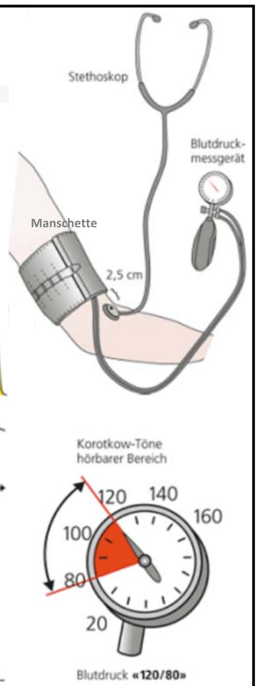
6.4.2 Hydrodynamik viskoser Fluide

Anwendung: Blutdruckmessung

Bei jedem Herzschlag wird eine Pulswelle entlang der Arterien erzeugt:







Das Blut fließt in der Regel laminar.

Wenn die Arterie so komprimiert ist, dass Durchfluss nur beim höchsten Druck möglich:

→ turbulente Strömung

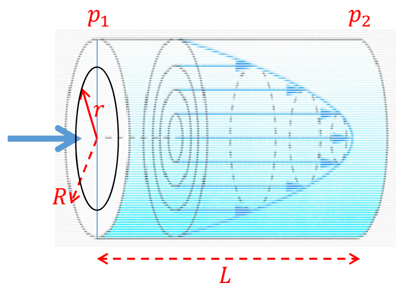
6.4.2 Hydrodynamik viskoser Fluide

Laminare Strömung durch ein kreisrundes Rohr

Antrieb: Druckdifferenz $(p_1 - p_2)$
Widerstand: Laminare Reibung

⟶ Geschwindigkeitsprofil im Rohr:

$$v(r) = \frac{1}{4 \cdot \eta} \cdot \frac{p_1 - p_2}{L} \cdot (R^2 - r^2)$$



Volumenfluss: $$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \int v(r) \cdot \mathrm{d}A = \int_0^R v(r) \cdot 2r\pi \cdot dr$$

$\left[\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right]$ = l/s, m³/s

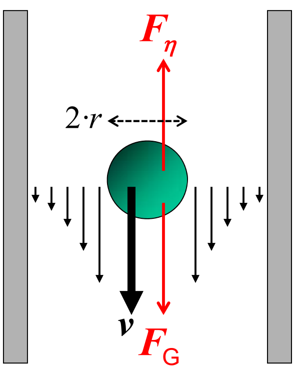
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi}{8 \cdot \eta} \cdot \frac{p_1 - p_2}{L} \cdot R^4}$$

Gesetz von Hagen-Poiseuille

Volumenfluss ist
- proportional zur Druckdifferenz zwischen den Enden
- umgekehrt proportional zur Länge des Rohres
- umgekehrt proportional zur Viskosität
- proportional zur vierten Potenz des Rohrradius, d.h. Halbierung des Rohrdurchmessers reduziert Volumenstrom auf $(1/2)^2 = 1/16$!

6.4.2 Hydrodynamik viskoser Fluide

Laminare Strömung um eine Kugel



Gesetz von Stokes

$$\boxed{F_\eta = -6\pi \cdot \eta \cdot v \cdot r}$$

(Reibungskraft auf eine Kugel mit Geschwindigkeit v)

Im Gleichgewicht: $F_\eta + (F_g - F_A) = 0$

Kompensation durch Gewichtskraft (minus Auftrieb)

Kugelfall-Viskosimeter

Verwendung zur Bestimmung der Viskosität eines Fluids:
Wenn sich $F_\eta = -F_g$ eingestellt hat (Auftrieb vernachlässigt):

Konstante Fallgeschwindigkeit $v = \frac{m \cdot g}{6\pi \cdot \eta \cdot r}$

→ Viskosität: $\eta = \frac{m \cdot g}{6\pi \cdot v \cdot r}$