Ex1. Bayesian linear regression

$p(w) = \mathcal{N}(w \mid w_0, V_0)$

$p(y \mid X, w) = \mathcal{N}(y \mid Xw, \Sigma)$ $\qquad V_n = (X^T \Sigma^{-1} X + V_0^{-1})^{-1}$

$\rightarrow p(w \mid X, y) = \mathcal{N}(w \mid w_n, V_n)$ mit $w_n = V_n(V_0^{-1} w_0 + X^T \Sigma^{-1} y)$

① $p(w \mid y, x) = \dfrac{p(y \mid X, w) \cdot p(w)}{p(y \mid x)}$ weil $p(y \mid x)$ unabhängig mit $w \Rightarrow$ sei $p(y \mid x) = \frac{1}{a}$

Dann:

② $$p(w \mid y, x) = a \cdot \exp\left(\left(-\tfrac{1}{2}\left((y - Xw)^T \Sigma^{-1} (y - Xw)\right)\right) \cdot \exp\left(-\tfrac{1}{2}\left((y - w_0)^T V_0^{-1} (y - w_0)\right)\right)\right.$$

$$= a \cdot \exp\left(-\tfrac{1}{2}\left((y - Xw)^T \Sigma^{-1} (y - Xw) + (y - w_0)^T V_0^{-1} (y - w_0)\right)\right)$$

$$= a \cdot \exp\left(-\tfrac{1}{2}\left(y \Sigma^{-1} y - y^T \Sigma^{-1} Xw - (Xw)^T \Sigma^{-1} y + (Xw)^{-1} \Sigma^{-1} Xw + y^T V_0^{-1} y - y^T V_0^{-1} w_0 - w_0^T V_0^{-1} y + w_0^T V_0^{-1} w_0\right)\right)$$

$$= a \cdot \exp\left(-\tfrac{1}{2} w^T (V_0^{-1} + X^T \Sigma^{-1} X) w - w^T \cdot V_n (V_0^{-1} w_0 + X^T \Sigma^{-1} y) \cdot X + c\right)$$

Dann: $V_n^{-1} = (X^T \Sigma^{-1} X + V_0^{-1})$

$V_n^{-1} \cdot w_n = V_n (V_0^{-1} w_0 + X^T \Sigma^{-1} y)$

$\Leftrightarrow p(w \mid y, x) = \mathcal{N}(w \mid w_n, V_n)$ mit $V_n = (X^T \Sigma^{-1} X + V_0^{-1})^{-1} = \Lambda^{-1}$

$w_n = V_n (V_0^{-1} w_0 + X^T \Sigma^{-1} y) = V_n J$ $\quad \square$