Wichtigste stetige Verteilungen

Contents

Nachdem wir ausführlich über die Gaussverteilung gesprochen haben, wollen wir einen Überblick über einige der wichtigsten stetigen Verteilungen bekommen, ähnlich wie wir ihn bereits für diskrete Verteilungen gewonnen haben. Dazu benutzen wir das Python-Modul `scipy.stats`.

在详细谈论了高斯分布之后，我们想对一些最重要的连续分布做一个概述，这与我们在离散分布方面已经获得的东西类似。为此我们使用Python模块scipy.stats。

11.1. SciPy Statistics

```
import numpy as np
np.random.seed(12321)

import scipy.stats as st

# Zufallsvariable mit N(3,2^2)-Verteilung erzeugen:
X = st.norm(loc=3, scale=2)
# samples ziehen:
Xsamples = X.rvs(size=4)
print("some examples:",Xsamples)
```

```
some examples: [4.02801895 1.9033209  6.49477125 1.83362523]
```

```
# Verteilung checken:
Xsamples = X.rvs(size=1000)
print("mean:", np.mean(Xsamples), "expected", X.mean()) # 3
print("std:", np.std(Xsamples), "expected", X.std()) # 2
print("3rd moment:", X.moment(3))
print("4th moment:", X.moment(4))
print("entropy:", X.entropy())
```

```
mean: 3.0004822746684243 expected 3.0
std: 1.9994507762900595 expected 2.0
3rd moment: 62.99999999999999
4th moment: 344.99999999999994
entropy: 2.112085713764618
```

```
# Daten fitten:
mu, sigma = st.norm.fit(Xsamples)
print(mu, sigma)
```

```
3.0004822746684243 1.9994507762900595
```

Es gibt noch weitere praktische Methoden, etwa `st.norm.sf`, die ‚survival function', definiert als 1-cdf oder `st.norm.logpdf`, falls man direkt den Logarithmus der Dichtefunktion verwenden möchte (beide Methoden sind potentiell schneller, als das von Hand / zu Fuß auszurechnen).

还有其他实用的方法，比如st.norm.sf，定义为1-cdf的 "生存函数"，或者st.norm.logpdf，如果你想直接使用密度函数的对数（这两种方法都有可能比用手/脚来计算更快）。

11.2. Matplotlib

Wir werden uns von den Verteilungen jeweils Plots der Dichtefunktionen (pdf) und der kumulierten Verteilungsfunktionen (cdf) anschauen. Dazu verwenden wir das Python-Modul `matplotlib.pyplot`. Es emuliert das Verhalten von MATLAB. Wir werden uns noch ausführlicher

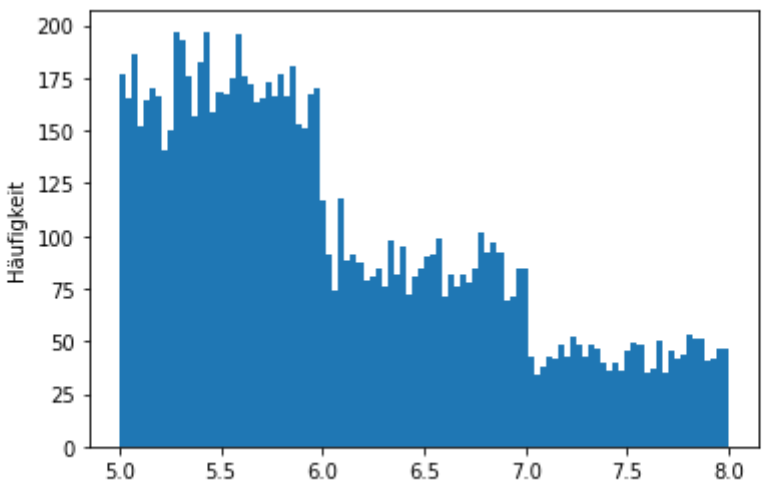
11.2 Matplotlib
我们将看一下每个分布的密度函数（pdf）和累积分布函数（cdf）的图。为此我们使用Python模块matplotlib.pyplot。它模拟了MATLAB的行为。我们将更详细地看一下

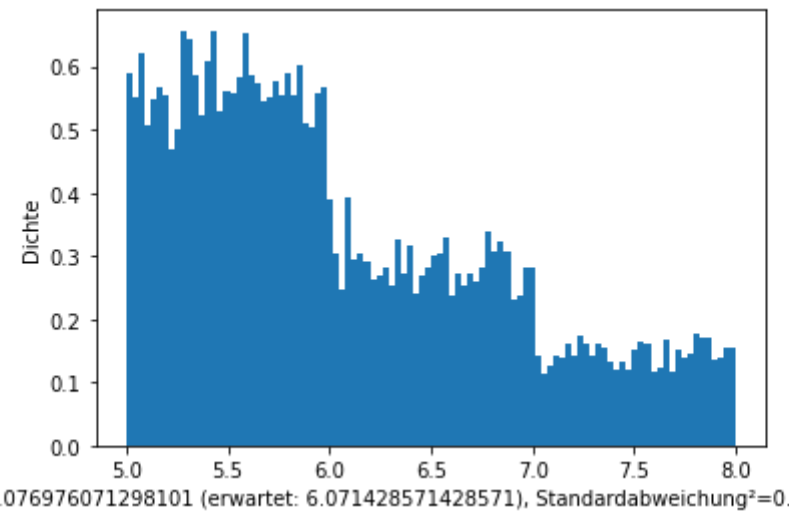
mit Matplotlib beschäftigen.

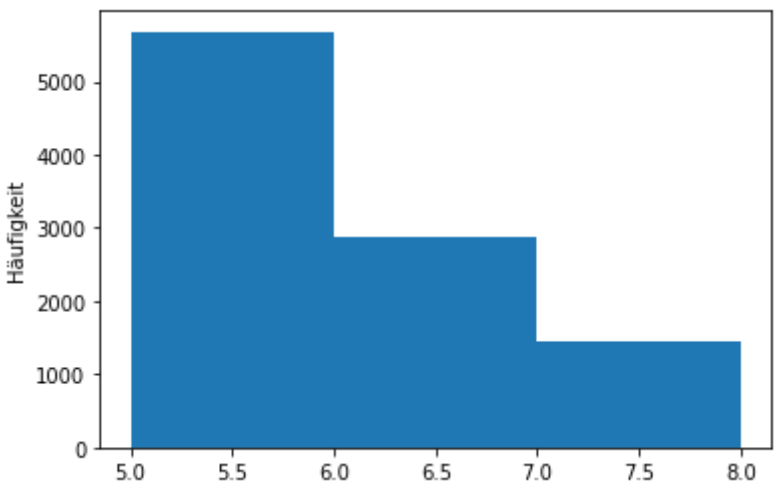
```
from matplotlib import pyplot as plt
```

```
# Größe der Plotausgabe anpassen:
plt.rcParams["figure.figsize"] = (16,9)

# Sample der Verteilung von einer früheren Übungsaufgabe:
sample = np.random.choice(3, 10000, p=[4/7,2/7,1/7]) + 5 + np.random.random(10000)
print("sample[:10] =", sample[:10])
# Histogramm plotten:
plt.hist(sample, bins=100)
plt.ylabel("Häufigkeit")
plt.xlabel("Mittelwert="+str(np.mean(sample))+" (erwartet: "+str(6+1/14)+"),
Standardabweichung²="+str(np.std(sample)**2))
plt.show()

plt.hist(sample, bins=100, density=True)
plt.ylabel("Dichte")
plt.xlabel("Mittelwert="+str(np.mean(sample))+" (erwartet: "+str(6+1/14)+"),
Standardabweichung²="+str(np.std(sample)**2))
plt.show()

# Histogramm mit wenig bins:
plt.hist(sample, bins=3)
plt.ylabel("Häufigkeit")
plt.show()
```

```
sample[:10] = [5.96301841 5.60942173 5.72908826 5.80068973 5.59819708 5.35377228
 6.093922   6.36189002 5.42430139 5.87334923]
```

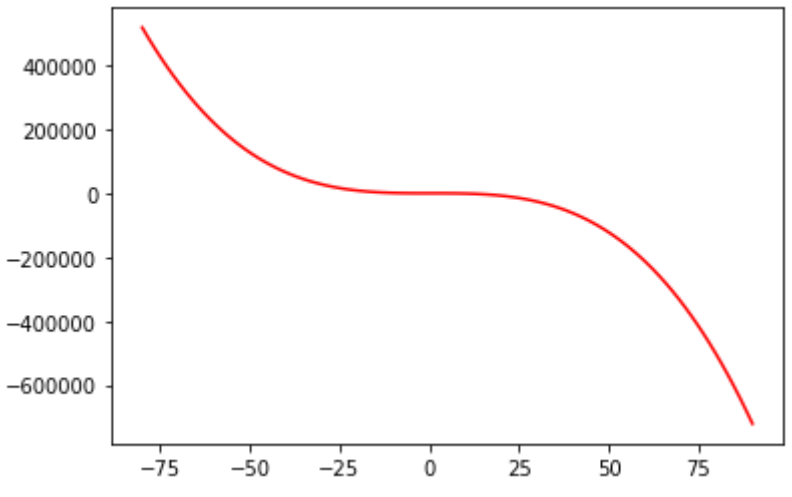






Zum Plotten einer Funktion definieren wir diese als Python-Methode und rechnen hinreichend viele Werte aus, zwischen denen dann interpoliert wird:

```
# Funktion x |-> 3+2x+x²-x³ auf Intervall [-80,90] plotten:
def f(x):
    return 3 + 2*x + x**2 - x**3

x = np.linspace(-80, 90, 100)
plt.plot(x, f(x), color='red')
plt.show()
```

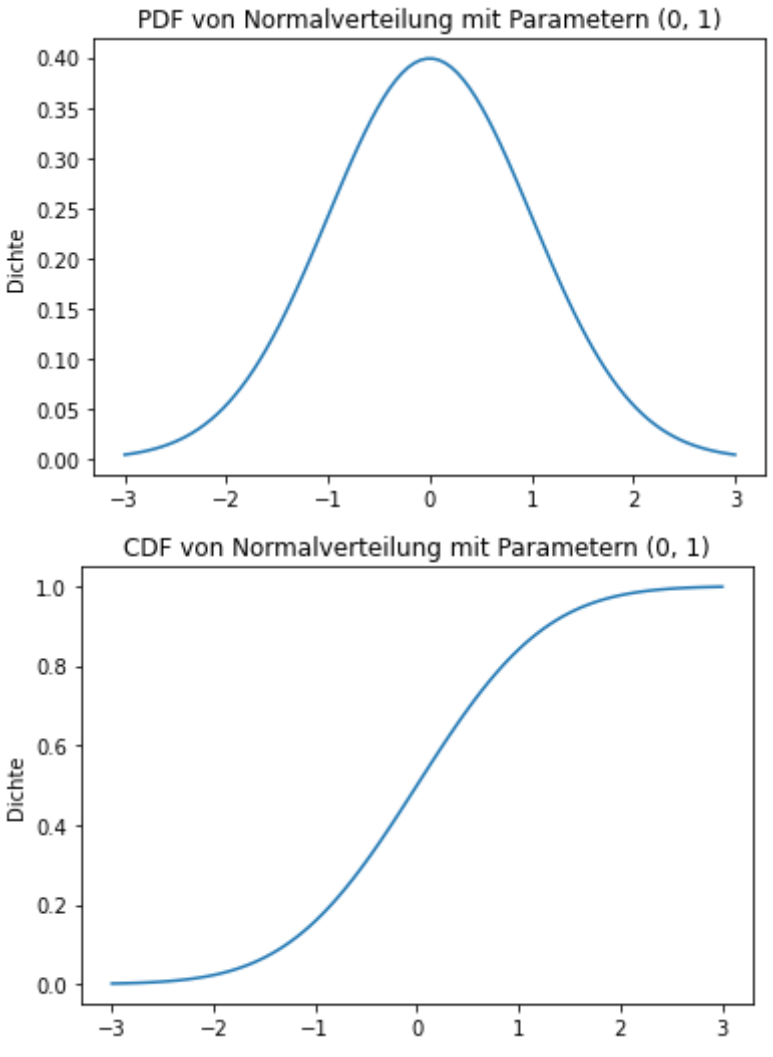


Damit kümmern wir uns nun um die wichtigsten stetigen Verteilungen:

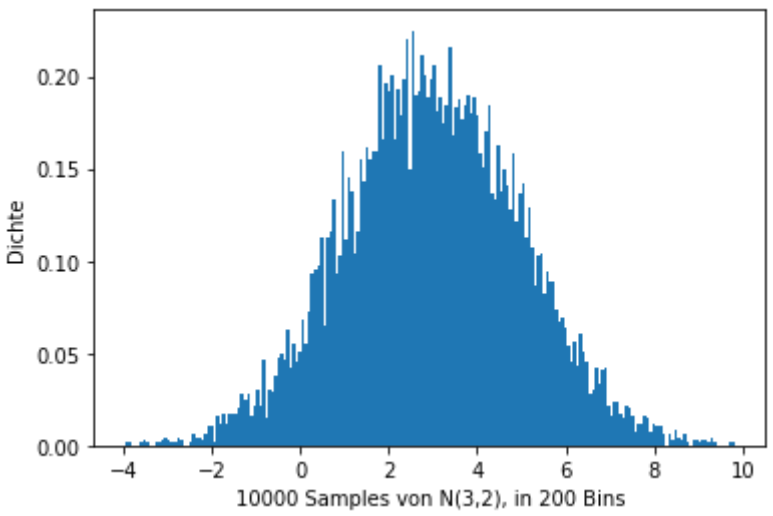
11.3. Normalverteilung

- Parameter μ, σ, Notation $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- Dichte $\phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
- Erwartungswert μ
- Varianz σ^2
- Höhere ungerade zentrale Momente sind alle 0
  (daher sind ungerade Momente ein Maß für nicht-Normalität)
- Maximale Entropie bei festem Erwartungswert und fester Varianz und Träger ganz $\mathbb{R}$
- ZGWS: Folge iid Zufallsvariablen X_i, dann $\sum_{i=1}^{N} X_i \xrightarrow{N\to\infty} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- Anwendungsbeispiele:
  - Messfehler in physikalischen Systemen
  - Fertigungsgenauigkeit
  - Biologische Größen (Körperlänge etc.)

```
# Für Plots:
def plotX(x, X, name, params):
    # Zuerst die Dichtefunktion:
    plt.plot(x, X.pdf(x))
    plt.ylabel('Dichte')
    plt.title("PDF von "+name+" mit Parametern "+repr(params))
    plt.show()
    # Dann die kumulative Verteilungsfunktion:
    plt.plot(x, X.cdf(x))
    plt.ylabel('Dichte')
    plt.title("CDF von "+name+" mit Parametern "+repr(params))
    plt.show()

x = np.linspace(-3,3,100)
mu, sigma = 0, 1
X = st.norm(loc=mu, scale=sigma)
name = "Normalverteilung"
plotX(x, X, name, (mu, sigma))
```




```
X = st.norm(loc=3, scale=2)
Xsamples = X.rvs(size=10000)
plt.hist(Xsamples, bins=200, density=True)
plt.xlabel("10000 Samples von N(3,2), in 200 Bins")
plt.ylabel("Dichte")
plt.show()
```



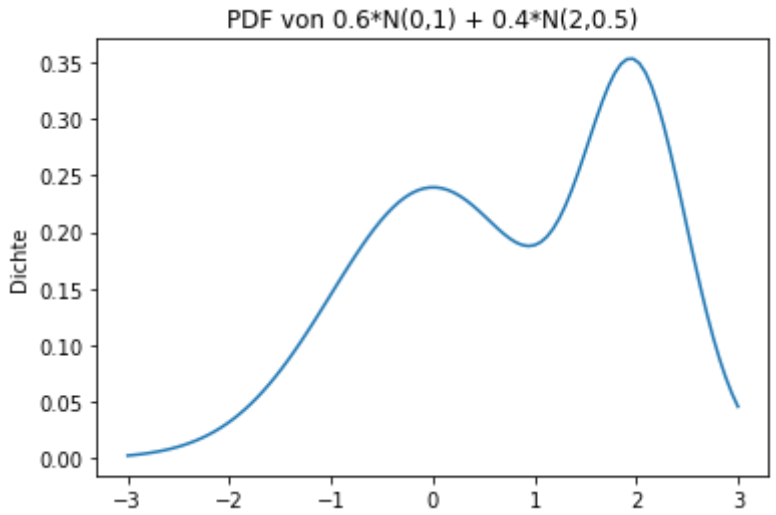
11.4. Kontaminierte Normalverteilung

Die kontaminierte Normalverteilung ist ein einfacher Fall eines sogenannten *gemischten Modells*, genauer einer *Gaussschen Mischung*.

- Parameter $\varepsilon, \mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2$, Notation $\varepsilon\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2) + (1-\varepsilon)\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$
- Dichte $\phi(x) = \frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} + \frac{1-\varepsilon}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$
- Erwartungswert $\varepsilon\mu_1 + (1-\varepsilon)\mu_2$
- Varianz $\varepsilon\sigma_1^2 + (1-\varepsilon)\sigma_2^2 + \varepsilon(1-\varepsilon)(\mu_1-\mu_2)^2$
- Anwendungsbeispiele: Ein zweistufiger Prozess, je nach Ausgang eines Bernoulli-Experiments wird eine andere Normalverteilung gesampelt. Ein konkreter Versuchsaufbau wäre etwa, in einer Informatikvorlesung die Körpergröße der Teilnehmer*innen zu messen. Das Geschlecht ist (näherungsweise!) Bernoulli-verteilt (voraussichtlich nicht gleichverteilt), innerhalb der Geschlechtergruppen ist die Körpergröße dann normalverteilt (aber mit verschiedenen Mittelwerten). An diesem Beispiel sieht man auch, dass jede Modellierung das Potential birgt, einen Teil der Realität unsichtbar zu machen, den man möglicherweise gar nicht unsichtbar machen möchte. Zum Glück kann man gemischte Modelle auch mit mehr als einem Parameter ε aufstellen.

1 2应用实例。一个两步的过程，根据伯努利实验的结果，对不同的正态分布进行采样。一个具体的实验设置是在计算机科学讲座中测量参与者的身高。性别是（近似！）伯努利分布（可能不是平均分布），在性别组内，身高则是正态分布（但均值不同）。这个例子还表明，任何建模都有可能使现实的一部分不可见，而人们可能根本不想使其不可见。幸运的是，混合模型也可以用一个以上的参数ε来设置。

```
name = "0.6*N(0,1) + 0.4*N(2,0.5)"
def f(x, epsilon=0.6, mu1=0, sigma1=1, mu2=2, sigma2=0.5):
    norm1 = st.norm(loc=mu1, scale=sigma1)
    norm2 = st.norm(loc=mu2, scale=sigma2)
    return epsilon*norm1.pdf(x) + (1-epsilon)*norm2.pdf(x)

x = np.linspace(-3,3,100)
plt.plot(x, f(x))
plt.ylabel('Dichte')
plt.title("PDF von "+name)
plt.show()
```



11.5. Dirac-Verteilung

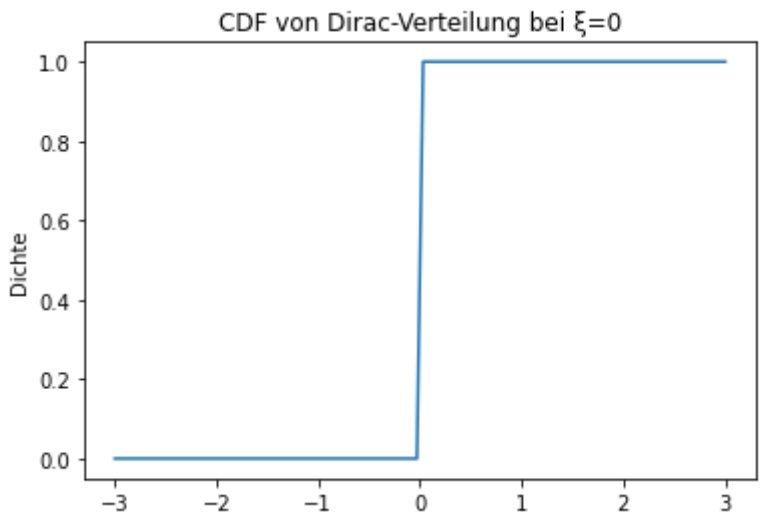
- Parameter ξ, Notation $\delta(\xi)$
- Ohne Dichte, aber $P(X = \xi) = 1$
- Erwartungswert ξ
- Varianz 0
- Entropie 0
- Anwendungsbeispiele:
  - ‚Dichtefunktionen' im stetigen Sinne für diskrete Verteilungen hinschreiben
  - Fotos vom Sternenhimmel (z.B. mit Hubble) - jeder Stern ist ein verschmierter Pixelhaufen (normalverteilt), aber die ‚eigentliche' Verteilung der Sterne dahinter ist eine Summe von Dirac-Maßen, denn jeder Stern ist an genau einem Punkt (die tatsächliche Ausdehnung des Sterns ist aufgrund der Entfernung irrelevant). Mit dieser Modellierung arbeiten manche Superresolution-Techniken.

为星空的离散分布写下连续意义上的'密度函数'照片（例如用哈勃）--每颗恒星是一个模糊的像素群（正态分布），但它背后的恒星'实际'分布是狄拉克计量的总和，因为每颗恒星正好在一个点上（由于距离问题，恒星的实际范围无关紧要）。一些超分辨率技术与这种建模方式一起工作。

Die Dirac-Verteilung ist strenggenommen unplotbar (denn es gibt ja keine Dichte). Manche zeichnen zur Illustration einen Pfeil der Länge 1 bei ξ ein. Die kumulative Verteilungsfunktion ist eine Heaviside-Step-Funktion:

严格来说，狄拉克分布是不可画的（因为没有密度）。为了说明问题，有人在ξ处画了一个长度为1的箭头。累积分布函数是一个Heaviside阶梯函数。

```
name = "Dirac-Verteilung bei ξ=0"
plt.plot(x, np.heaviside(x, 1))
plt.ylabel('Dichte')
plt.title("CDF von "+name)
plt.show()
```



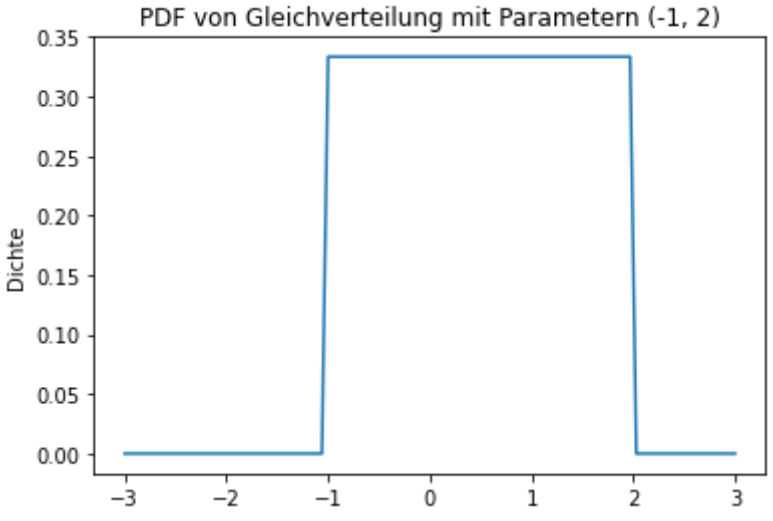
11.6. Stetige Gleichverteilung

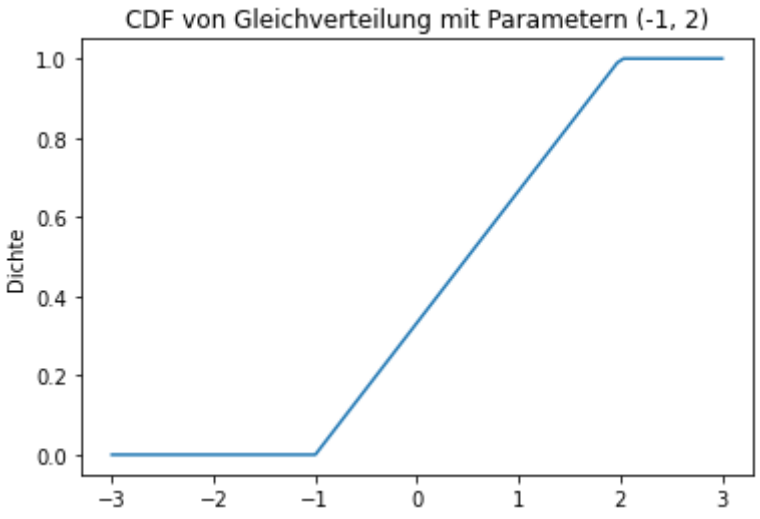
- Parameter a, b, Notation $Uni(a, b)$
- Dichte $\frac{1}{b-a}$
- Erwartungswert $\frac{a+b}{2}$
- Varianz $\frac{(a-b)^2}{12}$
- Maximale Entropie unter allen Verteilungen mit Träger $[a, b]$
- Anwendungsbeispiele:
  - Wenn ein Bus an Ihrer Haltestelle extrem pünktlich jede Stunde kommt, Sie aber nicht wissen, wann er das letzte Mal gefahren ist, so ist ihre Wartezeit an der Haltestelle in Minuten gleichverteilt in $[0, 60]$.
  - Die Temperatur ihrer CPU ab der dritten Nachkommastelle `(T * 100 - int(T * 100))` ist annähernd gleichverteilt.

如果一辆公共汽车每小时都非常准时地来到你的车站，但你不知道它最后一次离开是什么时候，你在车站的等待时间（以分钟为单位）在[0, 60]中平均分布。
你的CPU的温度从小数点后第三位开始（T * 100 - int(T * 100)）大约是平均分布的。

```
a, b = -1, 2
X = st.uniform(loc=a, scale=b-a)
print(X.mean(), X.var())
name = "Gleichverteilung"
plotX(x, X, name, (a, b))
```

```
0.5 0.75
```

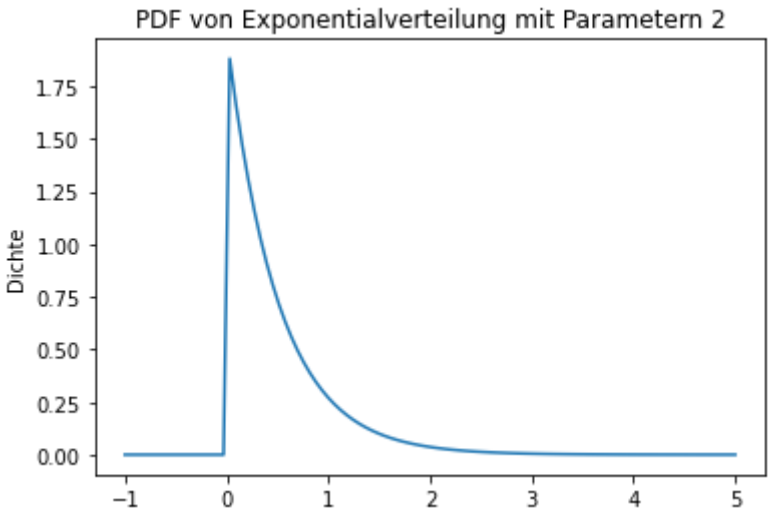




11.7. Exponentialverteilung

- Parameter λ, Notation $Exp(\lambda)$
- Dichte $\lambda e^{-\lambda x}$
- Erwartungswert $\frac{1}{\lambda}$
- Varianz $\frac{1}{\lambda^2}$
- Maximale Entropie unter allen Verteilungen mit Träger $[0, \infty)$ und Erwartungswert $\frac{1}{\lambda}$
- Anwendungsbeispiele:
  - Wie lange dauert es, bis auf dem Server das nächste Paket ankommt?

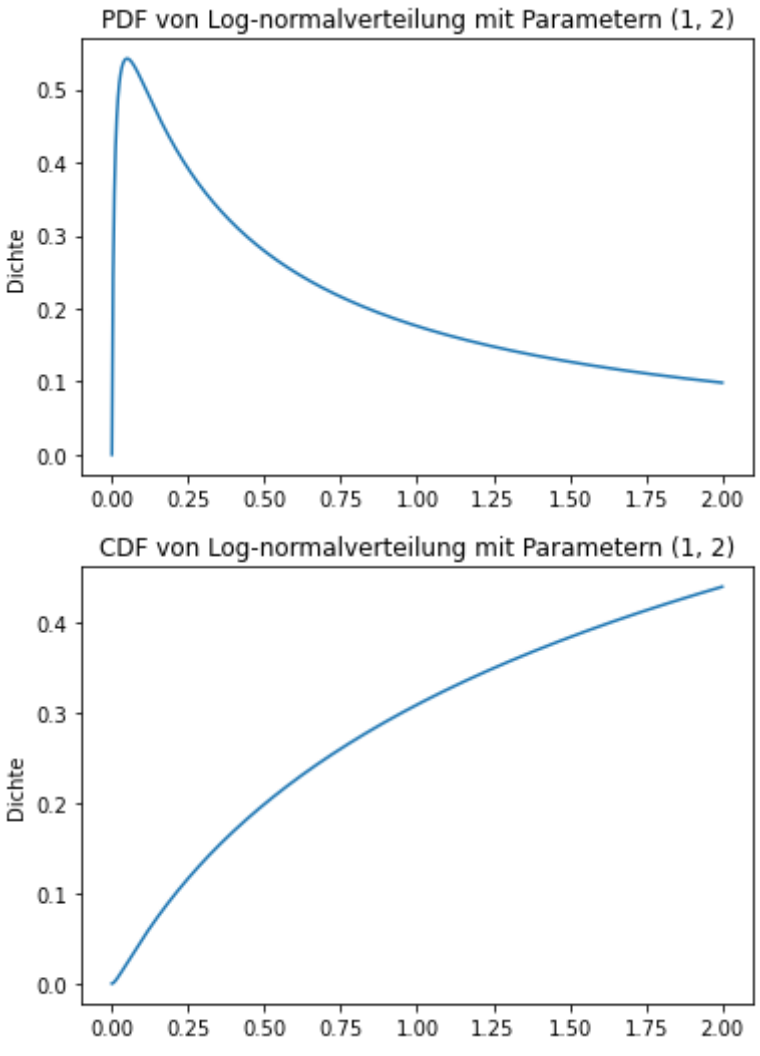
```
name = "Exponentialverteilung"
lamda = 2
X = st.expon(scale = 1/lamda)
x = np.linspace(-1,5,100)
plotX(x,X,name,(lamda))
```



11.8. Lognormalverteilung

- Parameter μ, σ, Notation $Lognormal(\mu, \sigma^2)$
- Dichte $\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(log(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
- Erwartungswert $e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$ aber $\mathbb{E}(logX) = \mu$
- Varianz $(e^{\sigma^2}-1)e^{2\mu+\sigma^2}$ aber $\mathbb{V}(logX) = \sigma^2$
- Maximale Entropie unter allen Verteilungen mit Träger $(0, \infty)$ und $\mathbb{E}(\log X) = \mu$ und $\mathbb{V}(\log X) = \sigma^2$
- Anwendungsbeispiele:
  - Die Länge eines Schachspiels ist log-normalverteilt
  - Viele (!) weitere Beispiele hat die Wikipedia zur Lognormalverteilung

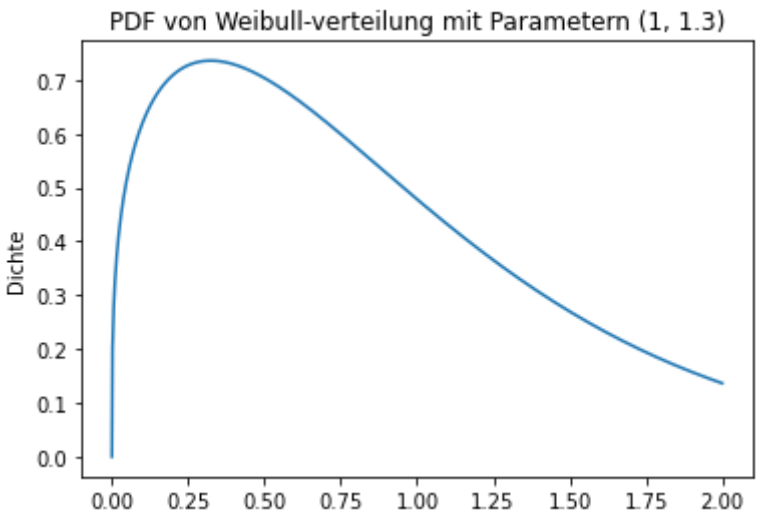
```
name = "Log-normalverteilung"
mu, sigma = 1, 2
X = st.lognorm(s=sigma, scale = np.exp(mu))
x = np.linspace(0,2,1000)
plotX(x,X,name,(mu, sigma))
```

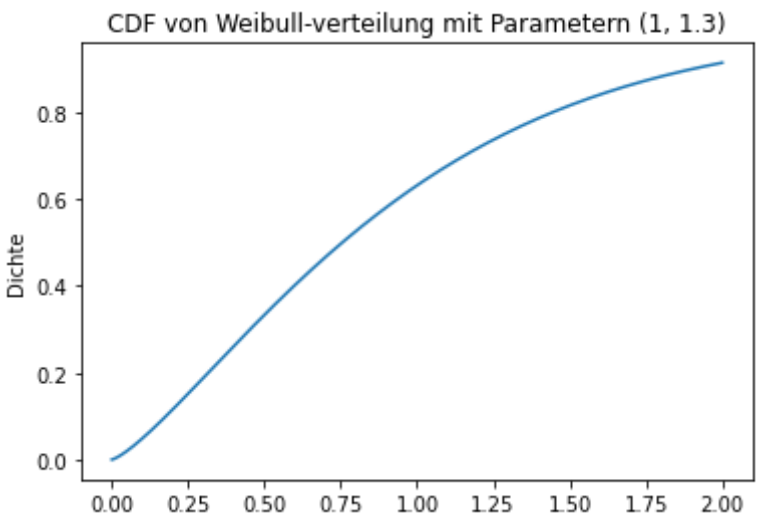


11.9. Weibull-Verteilung

- Parameter $\lambda > 0, k > 0$, Notation $Weibull(\lambda, k)$
- Dichte $f(x) = \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}$ für $x \geq 0$
  und $f(x) = 0$ für $x < 0$
- Erwartungswert $\lambda\Gamma(1 + \frac{1}{k})$ (wobei $\Gamma(n+1) = n!$)
- Maximale Entropie unter allen Verteilungen mit einer Bedingung an alle Momente:
  $\mathbb{E}(X^n) = \lambda^n$ und einer Bedingung an $\mathbb{E}(\log X)$.
- Anwendungsbeispiele:
  - Wie lange läuft eine Wärmepumpe, bis sie kaputt geht?
  - Wie hoch ist die Windgeschwindigkeit?
  - Was ist die höchste Niederschlagsmenge an einem einzelnen Tag im Jahr?

```
name = "Weibull-verteilung"
lamda, k = 1, 1.3
X = st.weibull_min(c=k, loc=0, scale = lamda)
x = np.linspace(0,2,1000)
plotX(x,X,name,(lamda, k))
```





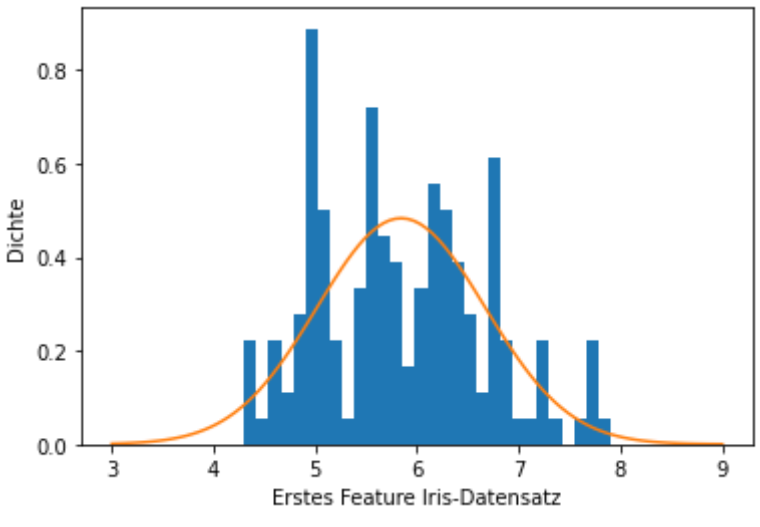
Damit wir ein bisschen üben können, Daten zu plotten und Verteilungen auf Daten zu fitten (und das dann wiederum im Plot zu visualisieren), brauchen wir Spielzeugdaten.

Ein sehr einfacher und daher sehr instruktiver Datensatz ist Fisher-Anderson's ‚iris flower dataset', den wir z.B. über Scikit-Learn beziehen können:

```
from sklearn import datasets
iris = datasets.load_iris()
print(iris["data"][:5])
```

```
[[5.1 3.5 1.4 0.2]
 [4.9 3.  1.4 0.2]
 [4.7 3.2 1.3 0.2]
 [4.6 3.1 1.5 0.2]
 [5.  3.6 1.4 0.2]]
```

```
first_feature = iris["data"][:,0]
plt.hist(first_feature, bins=30, density=True)
# Jetzt die best-fitting-Normalverteilung rein:
mu, sigma = st.norm.fit(first_feature)
X = st.norm(loc=mu, scale=sigma)
x = np.linspace(3,9,100)
plt.plot(x, X.pdf(x))
plt.xlabel("Erstes Feature Iris-Datensatz")
plt.ylabel("Dichte")
plt.show()
```



Eine Quelle für relativ gut gepflegte Spielzeugdaten, die auch viel diskutiert werden, ist Kaggle. Um diese Daten zu verarbeiten, muss man meist CSV-Dateien in Numpy-Arrays verwandeln. Besonders entspannt geht das mit Pandas (das auf Numpy aufbaut), womit wir uns noch beschäftigen werden. Für den Anfang reicht auch Numpy's eingebautes `np.genfromtxt`.

Der deutsche Wetterdienst DWD hat mit dem Climate Data Center eine große Sammlung gut dokumentierter, teilweise täglich aktualisierter Wetter- und Klimadaten. Darin sind Variablen mit räumlicher Verteilung und Zeitreihen verschiedenster physikalischer Größen und statistischer Verteilungen zu finden. Interessant (und beantwortbar) ist z.B. die Frage, ob Starkregenereignisse in Düsseldorf in den letzten Jahrzehnten zugenommen haben.

通过气候数据中心，德国气象局DWD收集了大量有据可查的天气和气候数据，其中一些数据每天都在更新。它包含具有空间分布的变量和各种物理量和统计分布的时间序列。有趣的是（也是可以回答的），例如，在过去的几十年里，杜塞尔多夫的暴雨事件是否有所增加。

Schauen Sie sich diese (und andere!) Daten an, finden Sie heraus, wie die Variablen verteilt sein könnten, plotten und fitten Sie Verteilungen. Besonders durch den Vergleich des Histogramms mit der Dichtefunktion der gefitteten Verteilung sehen Sie, wie nah wir liegen.

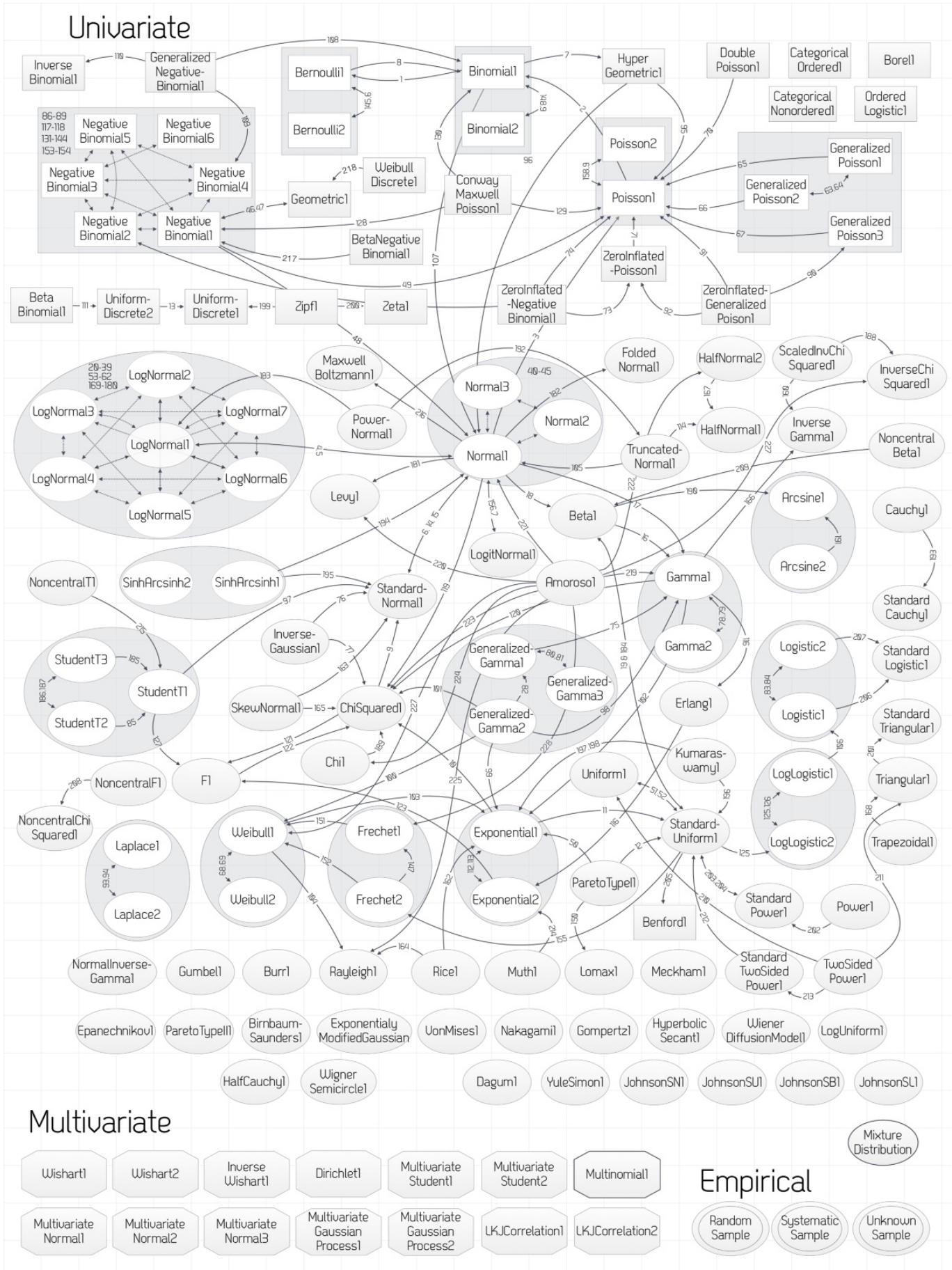
看看这个（和其他！）数据，找出变量可能的分布，绘制和拟合分布图。特别是通过比较直方图和拟合分布的密度函数，你可以看到我们是多么接近。

Da sehr viele Daten nicht einer der hier aufgezählten Verteilungen genügen, benötigen wir noch komplexere Modelle. Diese sind allerdings zumeist mehrstufig aus den einfachen Modellen zusammengesetzt, wie bei der kontaminierten Normalverteilung. Eines der wichtigsten Modelle wird später die Mischung multivariater Normalverteilungen sein, anhand dessen wir einige Prinzipien des maschinellen Lernens betrachten können.

由于很多数据不符合这里列出的分布之一，我们需要更复杂的模型。然而，这些大多是由简单模型组成的多层次模型，如污染的正态分布的情况。以后最重要的模型之一是多变量正态分布的混合物，我们可以用它来研究机器学习的一些原理。

Wenn Sie sich weiter mit den Zusammenhängen zwischen den Verteilungen beschäftigen wollen, und dabei nicht übersehen haben, dass sich einige Verteilungen durchaus verschieden parametrisieren lassen (z.B. die Normalverteilung mit μ, σ aber auch mit μ, σ^2), könnte ProbOnto das Richtige sein. Es handelt sich dabei um eine Ontologie und Wissensbasis, die ursprünglich für die Pharmakologie entwickelt wurde. Die Übersichtsgrafik ist bereits eine gute Gedächtnisstütze:

如果你想进一步研究分布之间的关系，不要忽视一些分布确实可以用不同的参数化（例如，正态分布有μ、σ，但也有μ、σ2），ProbOnto可能是正确的事情。它是一个最初为药理学开发的本体论和知识库。概述图已经是一个很好的记忆帮助。



ProbOnto 2.5 CC-BY-SA Wikipedia user Fuzzyrandom