1 Einführung

1.1 Naturwissenschaften und Physik

Die Naturwissenschaften beschäftigen sich ganz allgemein mit grundlegenden Phänomenen der uns umgebenden Natur. Sie versuchen, Modellsysteme aufzubauen, in die alle beobachtbaren Effekte eingeordnet werden können und aus denen heraus sich dann auch neue Möglichkeiten entwickeln lassen. Traditionell wird die klassische Naturwissenschaft in drei Hauptsäulen aufgeteilt:

- Die **Physik** untersucht die grundlegenden Phänomene der unbelebten Natur und trägt somit nicht nur entscheidend zu unserem Bild der Naturgesetze bei, sondern ist auch eine wichtige Basis für die technologische Entwicklung der letzen Jahrhunderte auf vielen Gebieten.
- Die **Chemie** beschäftigt sich mit dem Aufbau und vor allem mit der Umwandlung von Stoffen. Sie hat sich in den letzten zweihundert Jahren von einer sehr empirischen, halb esoterischen Disziplin („Alchimie") zu einer modernen Wissenschaft entwickelt, die ebenfalls enorm zum technologischen Fortschritt beiträgt.
- Die **Biologie** untersucht die belebte Welt der Pflanzen und Tiere und war für lange Zeit eine beschreibende, katalogisierende Disziplin, der es vor allem auf das Einsortieren aller Arten und Spezies in ein universelles System ankam. In den letzten Jahrzehnten hat sich das Gewicht stark dahin verlagert, allgemeine Prinzipien und Funktionsweisen zu untersuchen (z. B. Zellen, Gene etc.) und solche Systeme zu beeinflussen und weiterzuentwickeln. Dafür sind in hohem Maß Methoden aus der Physik (und auch Chemie und Informatik) erforderlich. Es ist absehbar, dass auch die moderne Biologie zunehmend technologische Entwicklungen nach sich ziehen wird (Stichwort „Biotechnologie").

- Die **Mathematik** ist keine Naturwissenschaft an sich, gibt aber die Regeln vor, mit denen in den Naturwissenschaften argumentiert wird – nicht nur die Regeln für alle Rechenmethoden, sondern viel allgemeiner für logisches, logisch in sich geschlossenes Vorgehen. Somit stellt die Mathematik jene „Sprache" zur Verfügung, in der man naturwissenschaftliche Erkenntnisse widerspruchsfrei formulieren kann, ohne auf sprachliche Nebenbedeutungen und Spitzfindigkeiten achten zu müssen.

Die Abgrenzung zwischen den Naturwissenschaften ist fließend und kann nicht eindeutig definiert werden. So gibt es in den Grenzbereichen eigene Teildisziplinen (Physikalische Chemie, Biophysik, Biochemie), in denen sich Methoden beider Fächer ergänzen. Sogar Kernbereiche der einzelnen Fächer können auch in einem anderen Fach enthalten sein (z. B. Atom- und Molekülphysik in der Chemie) oder starken Input erhalten (z. B. Physik der Weichen Materie aus der Biologie, oder Festkörperphysik aus der Chemie).

Der Begriff „Physik“ ist eng mit dem altgriechischen Begriff „physis“ verwandt (Bedeutung etwa: Natur, natürliche Ordnung). Das Wort wurde schon im antiken Griechenland verwendet, um die Gesamtheit aller beobachtbaren Phänomene zu beschreiben, manchmal im Gegensatz zur „Metaphysik“, mit der dann Phänomene bezeichnet wurden, die nicht empirisch fassbar sind.

Das grundsätzliche Ziel der Physik ist es, die uns umgebende Natur modellhaft zu beschreiben und alle Effekte auf möglichst wenige Grundprinzipien zurückzuführen. Dies wird immer dadurch gemacht, dass man die Naturphänomene gezielt und analytisch beobachtet. Man versucht dabei, komplizierte Effekte in einzelne Bestandteile zu zerlegen, deren Gesetzmäßigkeit man dann zu erkennen bemüht.

In den letzten Jahrhunderten hat sich die Physik in viele Teilgebiete aufgespalten, die aber alle dieselbe Methodik verwenden und auf dieselben Grundprinzipien zurückgreifen. Oft ergeben sich überraschende Querverbindungen und Parallelen zwischen Teilgebieten, die auf den ersten Blick nichts miteinander zu tun haben.

1.2 Die naturwissenschaftliche Methode

Die naturwissenschaftliche Methode ist ist ein logisches System, mit dem in allen Naturwissenschaften vorgegangen wird, um Wissen zu erwerben. Ganz grundsätzlich folgt man dabei folgenden Leitlinien:

- Reduktionismus: Alle Phänomene und ihre Erklärungen sollen auf eine kleine Anzahl von Grundprinzipien zurückgeführt werden (sogenannte „*basic principles*“). In der Physik wurde sogar immer wieder versucht, eine einzige „Weltformel“ zu finden, aus der unser gesamtes physikalisches Wissen abgeleitet werden kann.
- Vorhersagbarkeit: Alle Ereignisse und Phänomene innerhalb einer naturwissenschaftlichen Disziplin sollen aus den Grundprinzipien heraus richtig vorausgesagt werden können. Dazu braucht es Kausalzusammenhänge, also Regeln, wie dies konkret gemacht werden muss.
- Kommunikation: Essenziell für die moderne (Natur-)Wissenschaft ist es, dass neue Ideen und Erkenntnisse auf eine Art und Weise veröffentlicht werden, dass Fachkollegen aus aller Welt darauf Zugriff haben. Dies geschieht oft schon im Zustand der Entstehung einer neuen Idee, sodass Andere an der Weiter- und Fertigstellung mitwirken können. Ziel ist das Aufbau eines kollektiven Verständnisses über alle Teilbereiche der Naturwissenschaft.

Alle Naturwissenschaften und ihre Erkenntnisse beruhen, wie auch der Name sagt, auf der genauen und vorurteilslosen Beobachtung der Natur. Jede Theorie muss wieder und wieder durch Experimente überprüft werden und kann jederzeit durch experimentelle Ergebnisse falsifiziert (als falsch erkannt) werden: „Das Experiment ist der Prüfstein jeder Theorie“.

Physik wird zwar bereits seit über 2000 Jahren betrieben, aber erst seit etwa 500 Jahren nach dieser Maxime. Zuvor wurden immer wieder intuitive Thesen und philosophische

Ideen zu Lehrsätzen erklärt, ohne dass man die Notwendigkeit verspürt hätte, diese Thesen experimentell zu überprüfen.

Das Ziel naturwissenschaftlicher Forschung ist es, allgemeine Gesetzmäßigkeiten aufzufinden, um die unüberschaubare Vielzahl einzelner Fakten auf vergleichsweise wenige Grundprinzipien zurückführen zu können. Man versucht dazu, sich ein möglichst genaues Modell von der Natur zu machen, das durch Experimente überprüft und immer weiter verfeinert wird.

Der naturwissenschaftliche Erkenntnisgewinn erfolgt zyklisch in der wiederholten Abfolge von Experiment und Modellbildung:

- Experiment: In Experimenten wird gezielt der Zusammenhang zwischen verschiedenen messbaren Größen abgefragt. Dabei wird dafür gesorgt, dass alle Nebenbedingungen genau definiert und möglichst viele unerwünschte Einflüsse ausgeschaltet sind.
- Hypothese: Das Ergebnis eines oder mehrerer Experimente ist der Zusammenhang mehrerer Größen unter bestimmten Bedingungen. Daraus versucht man ein Modell zu erstellen, das diesen Zusammenhang allgemein beschreibt, meist in Form von mathematisch formulierten Beziehungen. Das Modell wird in diesem Stadium „Hypothese“ genannt.
  Der hier vorgenommene Schritt der Verallgemeinerung „vom Kleinen ins Große“, also hier von experimentellen Daten in einer konkreten Situation hin zu einem allgemein gültigen Zusammenhang, wird in der Logik **Induktion** genannt.
- Überprüfung: Jede Hypothese sollte durch weitere Experimente überprüft werden. Dazu werden aus der Hypothese heraus die Ergebnisse von Experimenten bei bestimmten Bedingungen vorausgesagt („wenn die Hypothese stimmt, sollte dies und jenes herauskommen“) und dann im Experiment überprüft.
  Dieser Schritt „vom Großen ins Kleine“, hier von einer allgemeinen Hypothese zu den Ergebnissen in einer ganz bestimmten Situation, heißt **Deduktion**.
- Bestätigung: Wenn das Experiment das vorausgesagte Ergebnis ergibt, ist gezeigt, dass die Hypothese auch für diesen speziellen Fall gilt.
  Wenn eine Hypothese in vielen verschiedenen Experimenten bestätigt wurde, nennt man sie **Theorie**. Beachten Sie, dass eine Theorie in der Physik also das derzeit beste Modell zu einem bestimmten physikalischen Sachverhalt darstellt (und nicht etwa eine von mehreren Möglichkeiten). Manchmal wird eine Theorie „Gesetz“ genannt, wie z. B. das Gravitationsgesetz, das durch eine Vielzahl an Experimenten in verschiedensten Zusammenhängen immer wieder überprüft und für richtig befunden wurde.
- Falsifizierung: Wenn ein Experiment nicht das vorhergesagte Ergebnis bringt, obwohl es nach allen Regeln fehlerfrei ausgeführt wurde, gilt die ganze Hypothese als „falsifiziert“: Offensichtlich kann sie nicht alle Aspekte der Wirklichkeit richtig modellieren. Die Hypothese muss daher verbessert oder ganz neu formuliert werden, um auch die neuen experimentellen Erkenntnisse richtig beschreiben zu können.

Beachten Sie, das Erkenntnisgewinn nach diesem Schema vor allem dann entsteht, wenn sich ein bestehendes Modell als nicht ganz korrekt erweist, also durch Falsifizierung eines vorhergesagten Ergebnisses. Dies führt in den meisten Fällen zu Korrekturen am vorhandenen Modell. Manchmal ist aber auch ein völliger Paradigmenwechsel notwendig: Dann muss das vorhandene Modell verworfen und durch ein ganz anderes ersetzt werden – spektakuläre Beispiele sind die Einführung der Quantenmechanik oder der Relativitätstheorie. Beachten Sie, dass das neue Modell dann nicht nur jene Daten erklären muss, für die das alte Modell falsch war, sondern auch alle anderen Daten, die mit dem alten Modell ohnehin richtig beschrieben wurden.

Experimente sind also der Schlüssel zur naturwissenschaftlichen Erkenntnis. Damit sie diesem Anspruch genügen, müssen sie einen hohen Standard erfüllen, der durch folgende Stichworte beschrieben wird:

- Reproduzierbarkeit: Ein Experiment muss mit gleichem Ergebnis wiederholt werden können, auch an einem anderen Ort und durch andere Experimentatoren. Dies ist das wichtigste Kriterium für verlässliche Erkenntnisse.
- Messbarkeit: Die Ergebnisse des Experiments, aber auch die Vorgaben und Nebenbedingungen müssen messbar sein – es muss also möglich sein, allen nötigen Variablen Zahlen zuzuweisen. Dazu müssen Messgeräte vorhanden sein oder entwickelt werden. Qualitative Angaben wie „der Stoff ändert seine Farbe von kirschrot zu zinnoberrot“ können höchstens in Vorversuchen nützlich sein.
- Variierbarkeit: Ein Experiment muss immer so aufgebaut sein, dass bestimmte Bedingungen („Eingangsvariablen“) gezielt verändert werden können, was dann zu einer Änderung der Ergebnisse führt („Ausgangsvariablen“). Die Feststellung solcher Abhängigkeiten ist das Hauptziel wissenschaftlicher Experimente: Wie genau hängt eine physikalische Größe von einer anderen ab?
- Professionalität: Das Ziel und die Voraussetzungen des Experiments müssen vorher bekannt und formuliert sein (kein „Schuss ins Blaue“). Die Experimentatoren müssen vom Wissen und vom technischen Geschick her in der Lage sein, alle Abläufe sicher zu kontrollieren. Das Experiment muss zu einem gewollten Zeitpunkt unter genau bekannten Bedingungen abgerufen werden können.
- Dokumentation: Ein erfolgreiches Experiment muss in allen Details ganz genau beschrieben werden, damit später (wenn z. B. Zweifel oder Fragen auftauchen) jeder Prozessschritt eindeutig belegt ist. Gute Dokumentation ist auch die Basis für die Reproduzierbarkeit des Experiments.

Die Physik und die anderen Naturwissenschaften versuchen, ein vollständiges und objektives Bild der uns umgebenden Natur zu erstellen, und sie haben in den letzten Jahrhunderten und Jahrzehnten dank der naturwissenschaftlichen Methodik in allen Bereichen riesige Fortschritte erzielt. Bei aller Begeisterung für den Reichtum an Erkenntnissen sollte man sich aber doch immer vor Augen halten, dass es viele weitere Aspekte der Welt gibt, die von dieser Methode aus Prinzip nicht beschrieben werden können. Ganz allgemein sind dies Fragen nach dem „Warum ist alles, wie es ist?“ (im Gegensatz zum beschreibenden „Wie ist alles?“ der Naturwissenschaften), für die

die Philosophie, die Theologie und andere Fächer zuständig sind. Ebenso können alle Fragen, bei denen menschliche Meinungen, Vorlieben und Verhaltensweisen mitspielen, nicht mit naturwissenschaftlichen Methoden angegangen werden, sondern mit verschiedenen ganz anders aufgebauten Techniken aus den Geisteswissenschaften.

1.3 Physikalische Größen

1.3.1 Messgrößen und Einheiten

(A) Messgröße

Jedes physikalische Objekt (ein Körper, eine Welle, ein Medium etc.) wird durch quantitativ bestimmbare Eigenschaften definiert. Diese Eigenschaften nennt man „physikalische Größen". Wichtig ist dabei das Wort „quantitativ": Jede physikalische Größe kann durch Zahlenwerte ganz eindeutig in ihrem Ausmaß beschrieben werden.

Damit ein solcher Zahlenwert eindeutig und vergleichbar ist, verwendet man immer die Schreibweise mit Maßzahl und Einheit wie z. B.

$$L = 3,12\,\mathrm{m} \qquad \text{mit} \qquad \begin{aligned} L &\ldots \text{ Symbol der Messgröße} \\ 3,12 &\ldots \text{ Maßzahl} \\ \mathrm{m} &\ldots \text{ Einheit} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Dabei bedeutet die Angabe der Einheit, dass wir bei der Messung die konkrete Messgröße mit der Einheit vergleichen und dann angeben, um wie viel größer oder kleiner sie ist. Man schreibt im oberen Beispiel eigentlich auf, dass die Länge L 3,12-mal so lang ist wie die Einheit 1 m. Man könnte genau genommen schreiben: $L = 3,12 \cdot 1\,\mathrm{m}$.

Messen bedeutet also immer, dass zwei Größen miteinander verglichen werden. Dazu wird die Messgröße in der Regel mit der zuständigen Einheit verglichen, die in vielen Fällen mit einem Messgerät abgefragt wird.

(B) Größenart

Es gibt sehr viele physikalische Größen. Einige davon sind sich insofern ähnlich, als sie zur selben **Größenart** gehören: Die Größen „Höhe", „Wellenlänge", „Entfernung" usw. haben z. B. alle dieselbe Größenart „Länge". Das erkennt man daran, dass man all diese Größen im Prinzip mit demselben Messgerät messen kann (z. B. Maßband). Für ein- und dieselbe Größenart gibt es oft verschiedene Einheiten – so verwendet man für die Größenart Länge die Einheiten Meter, Meile, Lichtjahr und viele andere.

Verschiedene Messgrößen aus derselben Größenart können miteinander verglichen, addiert oder sonstwie kombiniert werden. Dazu ist es wichtig, diese Größen mit derselben

Einheit zu beschreiben, sobald man Zahlenwerte einsetzt. Prinzipiell unmöglich ist es hingegen, Größen verschiedener Größenart miteinander zu vergleichen (Aussagen wie „Mein Auto hat doppelt so viel Höchstgeschwindigkeit wie Leistung: 200 km/h, aber nur 100 kW“ sind Unsinn.)

(C) Basiseinheit

Zwischen vielen physikalischen Größen bestehen Beziehungen, die man als Formeln oder als Definitionsgleichungen aufschreiben kann. Deshalb hängen auch die Einheiten dieser physikalischen Größen miteinander zusammen.

Ein Beispiel ist die Größe Geschwindigkeit v, die mit Hilfe der Größen s (Wegstrecke, gemessen in Meter) und t (benötigte Zeit, gemessen in Sekunden) definiert ist, nämlich $v = s/t$. Daraus wird die Einheit für Geschwindigkeit abgeleitet, nämlich m/s (sprich: Meter pro Sekunde). Im Laufe dieser Vorlesung werden wir noch sehr viele weitere derartige Zusammenhänge besprechen.

Letztendlich zeigt sich, dass man alle physikalischen Größen auf sehr wenige Grundgrößen zurückführen kann. Seit vielen Jahrzehnten verwendet man in der Naturwissenschaft (fast) ausschließlich das SI (*Système international d'unités*), das auf folgenden sieben Grundgrößen aufgebaut ist, deren Größe mit den Basiseinheiten angegeben wird:

- Länge, gemessen in Meter (m)
- Masse, gemessen in Kilogramm (kg)
- Zeit, gemessen in Sekunde (s)
- Temperatur, gemessen in Kelvin (K)
- Stromstärke, gemessen in Ampere (A)
- Stoffmenge, gemessen in Mol (mol)
- Lichtstärke, gemessen in Candela (cd)

Für jede dieser Basiseinheiten muss eine genaue Regel angegeben werden, wie man sie „realisieren“ kann. Das bedeutet: Es muss irgendeine Methode definiert werden, mit der man feststellen kann, was z. B. genau $1,00000...$ m lang ist oder $1,00000...$ s lang dauert. Beachten Sie, dass alle Basisgrößen mehr oder weniger willkürlich von Menschen festgelegt wurden und sich nicht irgendwo in der Natur finden lassen.

Erst die präzise Festlegung der Einheiten, die jederzeit und überall nachgemacht werden kann, ermöglicht es, reproduzierbare und allgemeingültige Erkenntnisse zu gewinnen – nicht nur in den Naturwissenschaften, sondern auch in der Wirtschaft und in anderen Disziplinen.

Wir besprechen unten im Abschnitt 1.3.2 die Realisierungsvorschriften für die drei Basiseinheiten Meter, Kilogramm und Sekunde, die in der Mechanik verwendet werden. Die übrigen folgen in späteren Vorlesungen.

(D) Angabe von Einheiten

Im SI gibt es für jede physikalische Größenart genau eine Einheit, mit der ihre Größe quantitativ angegeben wird. Diese Einheiten sind oft mit einem eigenen Namen versehen (z. B. „Watt“ für die Größenart Leistung), aber nicht immer (z. B. „m/s“ für die Größenart Geschwindigkeit in der Physik). Jede Einheit hat ein Einheitensymbol – beachten Sie dabei die Groß- und Kleinschreibung!

Für viele Größenarten gibt es eine ganze Reihe weiterer Einheiten, die in der Technik, im täglichen Leben, in anderen Disziplinen oder auch in veralteten Physikbüchern verwendet werden. Bemühen Sie sich dennoch, im Zusammenhang mit Physik nur die Einheiten aus dem SI zu benutzen!

In der Naturwissenschaft kommen viele Größen in einem sehr weiten Zahlenbereich vor. Da es umständlich ist, viele Stellen vor oder nach dem Komma zu schreiben, gibt es zwei Möglichkeiten, die Größenangabe solcher Werte verkürzt darzustellen:

- Potenzschreibweise:
  Man verschiebt das Komma so, dass eine Stelle vor dem Komma bleibt und so viele Stellen nach dem Komma, wie es von der Genauigkeit her notwendig ist (siehe Abschnitt 1.3.3). Diese Zahl wird mit 10^x multipliziert, wobei der Exponent x angibt, um wie viele Stellen das Komma verschoben wurde. x ist positiv, wenn das Komma nach links geschoben wurde (also bei großen Zahlen) und negativ, wenn es nach rechts geschoben wurde. Beispiele:
  $$\begin{aligned} 13800000000000\,\mathrm{W} &= 1{,}38 \cdot 10^{13}\,\mathrm{W} \\ 0{,}0000002356\,\mathrm{m} &= 2{,}356 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m} \end{aligned}$$
- Präfixe (Vorsilben):
  Man versetzt das Komma um ein Vielfaches von 3 Stellen nach rechts oder links und setzt eine Vorsilbe vor die Einheit, die durch ein Symbol mit einem Buchstaben abgekürzt wird. Listen dieser Vorsilben finden sich in jedem Physikbuch. Die Beispiele von oben werden dann zu
  $$\begin{aligned} 1380000000000\,\mathrm{W} &= 13{,}8\,\mathrm{TW} \quad \text{(Terawatt)} \\ 0{,}0000002356\,\mathrm{m} &= 235{,}6\,\mathrm{nm} \quad \text{(Nanometer)} \end{aligned}$$

1.3.2 Basisgrößen der Mechanik

Für die Mechanik werden nur drei der sieben SI-Basisgrößen benötigt: Alle Größen, die wir im Laufe dieser Vorlesung verwenden, und ihre Einheiten lassen sich im SI auf die Basisgrößen Zeit (Sekunde), Länge (Meter) und Masse (Kilogramm) zurückführen.

(A) Die Zeit t

Die Zeit wird im SI in der Einheit Sekunde gemessen. Diese Einheit wird aus der Stunde abgeleitet, die – als Aufteilung des „hellen Tages“ in 12 gleiche Teile – bereits seit mehreren 1000 Jahren in Gebrauch ist. Auch die Minute (1/60 einer Stunde) und die Sekunde (1/60 einer Minute, also 1/3600 einer Stunde) werden bereits seit fast tausend Jahren verwendet.

Die Definition hat sich über die Jahrhunderte grundlegend verändert. Während die Sekunde früher mit Hilfe der Länge eines Tages oder später – wegen allzu großer Schwankungen – über die Länge eines Jahres definiert wurde („Ephemeridensekunde"), verwendet man heute die Frequenz von Mikrowellen, die aus einem genau definierten atomaren Übergang des chemischen Elements Cäsium (Cs) ausgesandt oder von diesem Übergang absorbiert werden.

Konkret wird das in der Cäsium-Atomuhr so umgesetzt, dass Mikrowellen erzeugt werden, die genau dieser Frequenz entsprechen. Dies wird permanent kontrolliert, indem man die Mikrowellen auf Cäsium-Atome strahlt, die mit den Mikrowellen nur dann in Wechselwirkung treten, wenn die Frequenz genau stimmt. Nur dann können die Mikrowellen die Cs-Atome in einen bestimmten magnetischen Zustand bringen (was man gut kontrollieren kann), und nur dann werden die Mikrowellen merkbar absorbiert. Falls sich die Frequenz der Mikrowellen verändert, nimmt die Stärke der Wechselwirkung ab, und man kann die Frequenz nachregeln.

Die aktuelle Definition für eine Sekunde lautet somit:

Eine Sekunde ist jenes Zeitintervall, in dem eine Cäsiumuhr genau 9.192.631.770,0 Schwingungen macht.

Es gibt Bestrebungen, die Definition der Sekunde noch beträchtlich genauer zu machen, indem andere Atome oder Moleküle verwendet werden, bei denen es einen passenden Übergang gibt, der viel höhere Frequenz hat.

Zur Messung der Zeit braucht man immer irgendeinen „Referenzvorgang", von dem man genau weiß, wie er zeitlich verläuft und mit dem man den interessierenden Vorgang vergleichen kann.

In den meisten Fällen verwendet man periodisch ablaufende Effekte als Referenz, also Vorgänge, die sich in festen Zeitabständen wiederholen. Historisch waren das der Herzschlag (Ruhepuls) oder Pendel, später auch Feder-Drehschwingungen („Unruhe" einer mechanischen Uhr). Heutzutage werden die Resonanzschwingungen eines kleinen Quarzkristalls verwendet, die ein konstantes elektrisches Taktsignal erzeugen. Für Präzisionsanwendungen gibt es Atomuhren, die nach dem Prinzip der Cäsiumuhr funktionieren und zum Teil sogar erheblich genauer sind.

Die Zeitmessung benutzt den vorgegebenen Takt dann, indem abgezählt wird, wie viele „Taktschläge" stattgefunden haben, während das Ereignis abläuft, dessen Dauer man kennen möchte. Zur Messung sehr kurzer Ereignisse braucht man also immer Uhren mit einem inneren Takt, der noch viel kürzer ist als das kurze Ereignis.

Manchmal werden auch nicht-periodische Vorgänge als „Zeitmaß" verwendet. Ein Beispiel ist die ^{14}C-Methode, mit der in der Archäologie das Alter biologischer Substanzen abgeschätzt werden kann. Das Verfahren beruht darauf, dass lebende Pflanzen und Organismen aus der Luft stetig das radioaktive Kohlenstoff-Isotop ^{14}C aufnehmen, das sich dann im Körper zu einem gewissen sehr kleinen Prozentsatz neben dem „normalen“ Isotop ^{12}C anlagert. Nach dem Tod des Organismus wird kein neuer Kohlenstoff aufgenommen und das ^{14}C zerfällt mit einer Halbwertszeit von $\tau_{1/2} \sim 5700\,\mathrm{y}$. Aus der Bestimmung des relativen ^{14}C-Gehalts kann also auf das Alter geschlossen werden.

Beachten Sie zur Größe „Zeit“ noch Folgendes:

- „Zeit“ kann zwei Bedeutungen haben:
  - Zeitpunkt: Wird typisch als Datum und Uhrzeit angegeben. Die korrekte Angabe beruht darauf, dass man sich auf ein gültiges Referenzsystem geeinigt hat („Wann ist es genau 0 Uhr?“).
  - Zeitdauer: Beschreibt die Länge eines Ereignisses oder den Abstand zwischen zwei Vorfällen.
- In der speziellen Relativitätstheorie wird gezeigt, dass die Zeit unterschiedlich schnell vergeht, wenn sich zwei Körper mit sehr stark unterschiedlicher Geschwindigkeit bewegen. Wie schnell die Zeit konkret abläuft, hängt davon ab, aus welchem System man die Situation beobachtet. Es zeigt sich also, dass die Zeit keine absolute Größe ist. Man nennt diesen Effekt „Zeitdilatation“.
- In der speziellen Relativitätstheorie wird außerdem gezeigt, dass nicht eindeutig geklärt werden kann, ob zwei Ereignisse gleichzeitig stattfinden, wenn sie weit voneinander entfernt sind. („Relativität der Gleichzeitigkeit“).
- In der allgemeinen Relativitätstheorie wird gezeigt, dass die Zeit in einem starken Gravitationsfeld langsamer vergeht als außerhalb.

(B) Die Länge s

Die Länge wird im SI in der Einheit Meter gemessen. Diese Einheit stammt aus der Zeit der französischen Revolution und wurde ursprünglich auf die Erde bezogen (1 m sollte der 40-millionste Teil des Erdumfangs sein), was sich jedoch als nicht hinreichend genau herausstellte.

In der Folge gab es andere, zunehmend genauere Definitionen: Erst den „Urmeter“, dann den „Meterprototyp“ (jeweils eine Metallstange mit genauer Länge), später den Bezug auf die Wellenlänge einer bestimmten charakteristischen Strahlung, so wie bei der Definition der Sekunde.

Seit 1973 gilt die aktuelle Definition, die auf der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit c_0 beruht, weil diese als absolute Konstante erkannt wurde. Zwei wichtige Fakten dazu:

- Materie kann sich nie schneller als c_0 bewegen.
- Licht bewegt sich relativ zu einem Beobachter im Vakuum immer genau mit c_0, egal wie schnell der Beobachter selbst unterwegs ist.

Man wies der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit also einen festen Wert zu, der den bis dahin genauesten Messwerten entspricht, nämlich $c_0 = 299\,792\,458$ m/s. Damit wird nun aktuell die Einheit Meter definiert:

Ein Meter ist jene Strecke, die Licht im Vakuum während des Zeitintervalls 1/299 792 458 s zurücklegt.

Beachten Sie, dass die Definition des Meters hier auf die Definition einer Sekunde zurückgreift. Darüber hinaus verlässt man sich darauf, dass die Naturkonstante „Lichtgeschwindigkeit“ tatsächlich konstant ist. Beachten Sie, dass wir es mit dieser Definition gar nicht bemerken könnten, wenn sich c_0 im Lauf der Zeit verändern würde.

Zur Messung von Längen gibt es eine immense Menge an verschiedenen Methoden, je nach Längenbereich und gewünschter Genauigkeit. Einige Beispiele:

- Vergleich mit einem vorgefertigen Maßstab (Maßband, Zollstock etc.).
- Vergleich mit der Wellenlänge von Licht (Laser-Interferometer).
- Messung der Umdrehungen eines Rades (Kilometerzähler).
- Messung der Laufzeit von Licht (Radar, Laser-Entfernungsmesser, GPS).

Zur Messung alltäglicher Längen sind vielerorts nicht-SI-Einheiten in Gebrauch, z. B. 1 mil $= 25,4\,\mu$m, 1 Zoll (inch) $= 2,54$ cm, 1 Meile ≈ 1609 m oder 1 Seemeile $= 1852$ m. Auch für sehr große Entfernungen gibt es alternativ definierte Einheiten, so z. B. das Lichtjahr, das jene Entfernung definiert, die Licht im Vakuum in einem Jahr zurücklegt ($1\,\text{ly} = 365,24 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot c_0 \approx 9,46 \cdot 10^{15}\,\text{s}$).

Beachten Sie, dass auch die Größe Länge nicht absolut und eindeutig bestimmt werden kann, sobald große Geschwindigkeiten im Spiel sind: Die spezielle Relativitätstheorie beschreibt, dass die Länge jedes Objekts kleiner wird, wenn sich das Objekt relativ zur Messposition bewegt. Dieser Effekt heißt „relativistische Längenkontraktion“ und spielt bei Geschwindigkeiten nahe an der Lichtgeschwindigkeit eine Rolle, z. B. in Teilchenbeschleunigern.

(C) Die Masse m

Die Masse beschreibt die Menge an Materie, die in einem bestimmten Körper vorhanden ist. Sie wird in der Einheit Kilogramm gemessen, die in der Zeit der französischen Revolution eingeführt wurde. Ursprünglich wurde die Einheit 1 Gramm als Masse von 1 cm^3 Wasser definiert. Bald stellte sich aber heraus, dass diese Menge zu klein für eine genaue Definition ist. Außerdem eignet sich Wasser sehr schlecht als Mess-Standard, wegen Eigenschaften wie Temperaturausdehnung, Verdunstung, Oberflächenbenetzung, Reinheit usw.

In Anlehnung an die Wasser-Definition wurden also ein Metallstück hergestellt, das sogenannte „Urkilogramm“, dessen Masse als $m = 1,00000...$ kg festgelegt wurde. Darauf beruht die Definition der Basiseinheit Kilogramm, die bis ins Jahr 2019 gültig war: „Ein Kilogramm ist die Masse des Internationalen Kilogrammprototyps (eines Zylinders aus einer Platin-Iridium-Legierung, der in Paris als Massennormal aufbewahrt wird).“

Diese Definition wurde mehr und mehr problematisch, weil Zweifel daran bestanden, dass die Masse des Prototyps mit der heute benötigten Genauigkeit konstant bleibt. Effekte wie Abrieb, Verdunstung, Einlagerung fremder Atome, Kernumwandlungen usw. könnten die Masse geringfügig verändern. Tatsächlich gab es Unstimmigkeiten und Diskrepanzen beim Vergleich des eigentlichen Prototyps mit Kopien, die eigentlich genau massengleich sein sollten: Über einige Jahrzehnte entwickelten sich Unterschiede bis zu einigen $10\,\mu$g.

Seit 20. Mai 2019 ist eine neue Definition des Kilogramm in Kraft:

Ein Kilogramm beruht darauf, dass die Naturkonstante „Plancksches Wirkungsquantum“ genau den Wert $h = \mathbf{6{,}626\,070\,15 \cdot 10^{-34}}$ Js hat. Dabei ist die Einheit $\mathbf{1\,Js = 1\,kg \cdot 1\,m^2 / 1\,s}$, wobei Meter und Sekunde nach den SI-Definitionen realisiert werden müssen.

Das Plancksche Wirkungsquantum h verknüpft die Frequenz ν und die Energie E eines Photons (oder „Lichtquants“) nach der Formel $E = h \cdot \nu$ und ist eine der zentralen Größen der Quantenmechanik. h wurde bisher nach verschiedenen Methoden immer genauer gemessen, wurde aber nun mit dem oben angegebenen festen Wert definiert (so wie auch die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit).

Die Kilogramm-Definition legt nicht fest, mit welchem konkreten Experiment die Masseneinheit festgelegt werden muss. Im Prinzip sind all jene Experimente dazu geeignet, mit denen bis vor Kurzem versucht wurde, den genauen Wert der Konstante h zu bestimmen: Da der Zahlenwert für h nun festgelegt wurde, ergibt ein solches verbessertes Experiment also keinen genaueren Wert für h, sondern eine präzisere Definition der Masseneinheit Kilogramm.

Im Moment gibt es zwei ganz unterschiedliche Experimente, mit denen versucht wird, das Kilogramm sehr viel genauer und verlässlicher als bisher zu definieren:

- Watt-Waage:
  Hier wird die Schwerkraft, die auf ein Massestück wirkt, durch eine elektromagnetische Kraft kompensiert. Diese wiederum kann auf komplizierte Art auf das Plancksche Wirkungsquantum zurückgeführt werden. Als Messgrößen bleiben eine Geschwindigkeit und die Erdbeschleunigung, die mittels bekannter SI-Einheiten bestimmt werden können, sodass die Masse des Testobjekts ohne weitere Annahmen eindeutig festgelegt werden kann.
- Avogadro-Projekt:
  Als Testobjekt fungiert eine Kugel aus hochreinem Silizium (genauer gesagt: aus dem Silizium-Isotop ^{28}Si). In dieser Kugel kann die Anzahl an Silizium-Atomen extrem genau bestimmt werden. Die Masse eines Atoms kann auf Naturkonstanten zurückgeführt werden, u.a. auf das Plancksche Wirkungsquantum, sodass man ganz präzise den SI-Zahlenwert für die Masse dieser Kugel bestimmen kann.

Die Größe „Masse“ beschreibt zwei ganz verschiedene Eigenschaften von Materie:

- „Schwere Masse“:
  Diese Eigenschaft ist dafür verantwortlich, dass jeder Körper alle anderen Körper mittels Gravitationskraft anzieht (siehe Abschnitt 3.2.2). Auf der Erdoberfläche fühlen wir die Anziehung aller Massen durch die Masse der Erde und nennen diese Anziehung „Gewichtskraft“. Aus der Messung der Gewichtskraft kann ziemlich genau auf die Masse eines Körpers geschlossen werden – dies ist die Standardmethode zur konkreten Bestimmung von Massen („Wiegen“).
- „Träge Masse“:
  Diese Eigenschaft beschreibt die Tatsache, dass Materie immer im momentanen Bewegungszustand verbleibt, solange keine Kraft auf sie wirkt siehe Abschnitt 3.1.3). Der „Aufwand“, den Bewegungszustand zu ändern (also die nötige Kraft), ist proportional zu dieser trägen Masse. Auch diese Eigenschaft kann zur Messung der Masse verwendet werden.

Es gibt vorerst keinen Grund, dass die schwere Masse und die träge Masse eines Körpers denselben Wert haben. In vielen grundlegenden Experimenten ist aber gezeigt worden, dass der Zahlenwert mit hoher Genauigkeit gleich ist. Damit ist empirisch gezeigt, dass die physikalische Größe Masse m die beiden Eigenschaften Trägheit und Gravitation in sich trägt, die sonst nichts miteinander zu tun haben.

Die Masse eines Körpers nimmt zu, wenn seine Geschwindigkeit in die Nähe der Lichtgeschwindigkeit kommt, allerdings nur aus Sicht eines ruhenden Beobachters. Im System des bewegten Körpers misst man immer die Ruhemasse. Dies ist zum Beispiel in Teilchenbeschleunigern von Bedeutung.

1.3.3 Messfehler und Genauigkeit

Die Messung physikalischer Größen ist zwangsläufig nicht unendlich genau, sondern immer mit einer bestimmten Unsicherheit verbunden. Diese Unsicherheit wird „Messfehler“ genannt. Dieser Begriff ist missverständlich, weil man damit ein Fehlverhalten der Experimentatoren verbinden könnte. Das ist aber nicht gemeint! Wir beschreiben damit vielmehr die Genauigkeit, mit der eine physikalische Größe in einem konkreten Fall bestimmt werden kann.

Jede physikalische Größe, egal ob sie gemessen, aus gemessenen Größen berechnet oder aus theoretischen Überlegungen ausgerechnet wird, sollte immer mit ihrem Fehler angegeben werden, sodass wir die Schreibweise in Gleichung (1.1) eigentlich erweitern müssen zu

$$\begin{aligned} & L \;=\; \big(3,12 \pm 0,14\big)\,\mathrm{m} && \text{mit dem Fehler } \Delta L \;=\; 0,14\,\mathrm{m} \\ \text{oder}\quad & L \;=\; 3,12\,\mathrm{m} \pm 4,5\,\% && \text{mit dem Fehler } \Delta L \;=\; 0,045 \cdot L \end{aligned} \tag{1.2}$$

Wie hier gezeigt, wird ein Messwert entweder mit dem absoluten Fehler ΔL oder mit dem relativen Fehler $\Delta L/L$ angegeben, wobei die Fehlerangabe immer als Abschätzung zu sehen ist und somit keinen Anspruch auf Präzision hat.

In vielen praktischen Fällen ist die Bestimmung des Messfehlers mindestens ebenso schwierig wie die Gewinnung der Messwerte. Unverzichtbar sind diese Fehler aber spätestens dann, wenn man die gewonnenen Messdaten mit einem theoretischen Modell vergleicht, wie das im Kap. 1.2 besprochen wird. Man muss dann entscheiden, ob die Messwerte zum Modell passen oder nicht. Das Kriterium ist immer, ob die theoretisch ermittelte Kurve jene Bereiche schneidet, die durch die Fehler um die Messwerte festgelegt werden.

Die zwangsläufigen Ungenauigkeit aller physikalischen Daten durch Messfehler führt dazu, dass man bei der Angabe von Zahlenwerten immer darauf achten muss, dass nur sinnvolle Information dargestellt wird. Als Faustregel gilt:

- Der Fehler wird mit zwei signifikanten Stellen angegeben, manchmal nur mit einer.
- Der Messwert wird so genau angeschrieben, dass die letzten beiden Ziffern den Dezimalstellen des Fehlers entsprechen.
- Dezimalstellen, die darüber hinaus ermittelt wurden, werden gerundet.

Beispiele:

Richtig: $L = 12,5612 \pm 0,0042\,\mathrm{m}$, falsch: $L = 12,5 \pm 0,0042\,\mathrm{m}$.

Richtig: $p = 84300 \pm 2900\,\mathrm{Pa}$, falsch: $p = 84321 \pm 2883\,\mathrm{Pa}$.

Richtig: $P = 121 \pm 12\,\mathrm{W}$, falsch: $P = 121,356 \pm 12\,\mathrm{W}$.

Wenn physikalische Daten ohne Fehler angegeben sind, geht man immer davon aus, dass die letzte angegebene Ziffer noch verlässlich ist. Die Angabe $t = 13,4\,\mathrm{s}$ bedeutet also ungefähr $t = 13,40 \pm 0,05\,\mathrm{s}$. Geben Sie also acht: Die Angabe $L = 2\,\mathrm{m}$ bedeutet in der Physik eigentlich $L = 2,0 \pm 0,5\,\mathrm{m}$. Wenn „genau 2 m“ gemeint ist, muss man schreiben $L = 2,00\,\mathrm{m} = 200\,\mathrm{cm}$ oder sogar $L = 2,000\,\mathrm{m} = 200,0\,\mathrm{cm}$, je nachdem, wie genau der Wert bekannt ist.

Beim Berechnen physikalischen Größen ist analog vorzugehen. Als Grundregeln merkt man sich:

- Ein Rechenergebnis kann nie genauer sein als die Ausgangszahlen, die man in die Formeln einsetzt.
- Die ungenaueste Eingangszahl definiert die Genauigkeit des Ergebnisses.
- Die Genauigkeit jeder Zahl wird durch die Anzahl an signifikanten Stellen festgelegt. Das sind jene Ziffern, die quantitative Information tragen. Beispiel: die Zahlen 0,00237, 3520000 und $4,17 \cdot 10^{22}$ haben in diesem Sinn alle die gleiche Genauigkeit, nämlich drei signifikante Stellen.

2 Kinematik: Die Beschreibung von Bewegungen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns damit, die Bewegung von „Punktmassen“ zu beschreiben. Eine Punktmasse ist entweder ein sehr kleiner Körper oder – allgemeiner – ein Körper, dessen gesamte Masse wir uns in einem Punkt vereinigt denken, dem sogenannten Schwerpunkt (siehe Kap. 5.3.4). Wir beschreiben hier nur die „Bahn“ des Körpers, nicht aber, was er sonst noch macht, z. B. sich drehen, taumeln, schwingen, deformieren: solche Dinge kommen später ab dem Kap. 5.

Wir beschäftigen uns hier vorerst nur mit der Beschreibung der Bewegung – dies nennt man Kinematik. Die Ursachen von Bewegungen, sowie Methoden, die Bewegung von Körpern zu beeinflussen („Dynamik“), besprechen wir im folgenden Kap. 3.

2.1 Größen zur Beschreibung von Bewegung

Wenn man die Bewegung eines Körpers beschreiben will, folgt man einer Regel, die man zur Beschreibung aller physikalischen Phänomene anwendet:

So einfach wie möglich und so kompliziert wie notwendig.

Im Fall von bewegten Körpern heißt das zum Beispiel, dass wir uns in jedem Fall vorerst überlegen sollten, wie viele Dimensionen zur Beschreibung notwendig sind. Wir beginnen hier immer mit der kompliziertesten Beschreibung (voll 3D), zeigen aber immer wieder, wie man dies für sehr viele Fälle vereinfachen kann.

2.1.1 Die Position

(A) Koordinatensystem

Die momentane Position einer Punktmasse wird als dreidimensionaler Vektor angegeben. Bevor wir dies tun können, brauchen wir ein passendes Koordinatensystem. Meist verwendet man kartesische Koordinaten, also drei zueinander orthogonale Achsen, die man als x-, y- und z-Achse bezeichnet. Dieses Koordinatensystem kann man in vielen Fällen selbst definieren und zwar am besten so, dass es gut zur Situation passt, die wir beschreiben wollen. Konkret wird benötigt:

- **Koordinatenursprung:**
  Jener Punkt im Raum, von dem das Koordinatensystem ausgeht.
- **3 orthogonale Achsen (Rechtssystem!):**
  Achten Sie bei den Richtungen der Achsen darauf, dass sie ein „Rechtssystem“

bilden! Wenn Ihr Koordinatensystem kein Rechtssystem ist, dann berechnen Sie z. B. Drehbewegungen (ab Kap. 5) falsch.
Kontrolle: Drehen Sie Ihre **rechte Hand** so, dass der Daumen in Richtung der x-Achse zeigt und der gestreckte Zeigefinger in Richtung der y-Achse. Dann muss die z-Achse in Richtung des halb gekrümmten Mittelfingers zeigen. Wenn das nicht funktioniert, muss die Richtung genau einer Achse umgedreht werden.

Auf der Erdoberfläche wählt man in der Regel ein Koordinatensystem, dessen Richtungen an Landkarten angelehnt sind: x zeigt nach Osten (rechts), y nach Norden (nach hinten) und z senkrecht nach oben. Beachten Sie, dass diese Koordinatenwahl ein Rechtssystem bildet. Der Ursprung wird auf der Erdoberfläche gewählt, an einer Position, die für das gegebene Problem nützlich ist.

(B) Position: Definition

Die Position eines Massenpunktes zum Zeitpunkt t wird als Vektor angegeben:

$$\text{Ortsvektor:} \qquad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

Die Koordinaten $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$ beschreiben jeweils die Position in einer Dimension (z. B. x: rechts-links, y: hinten-vorne, z: oben-unten) und können sich unabhängig voneinander mit der Zeit verändern. Jede Koordinate des Ortsvektors hat die Dimension „Länge“. Beachten Sie, dass oft auch andere Variablennamen verwendet werden, um Positionen anzugeben.

In der Physik werden Vektoren für die Darstellung häufig nach Betrag und Richtung zerlegt. Für den Ortsvektor $\vec{r}(t)$ bedeutet das:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= r(t) \cdot \vec{e}_r(t) \qquad \text{mit} && (2.2) \\ r(t) &= |\vec{r}(t)| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2} \qquad \big(\text{Entfernung vom Ursprung}\big) \\ \vec{e}_r(t) &= \frac{\vec{r}(t)}{|\vec{r}(t)|} = \frac{\vec{r}(t)}{r(t)} \qquad \big(\text{Einheitsvektor zur Richtungsangabe}\big) \end{aligned}$$

Der Betrag $r(t)$ ist ein Skalar mit der Größenart Länge und gibt die Entfernung des Massenpunktes vom Koordinatenursprung an, enthält aber keine Information über die Richtung. Der Einheitsvektor $\vec{e}_r(t)$ hat genau die Länge 1 und keine physikalische Einheit. Er gibt nur die Richtung vom Koordinatenursprung zum Massenpunkt hin an. Diese Schreibweise kann für alle physikalischen Größen zur Darstellung verwendet werden und erlaubt es, rasch den Zahlenwert der Größe zu erkennen (Betrag). Wenn mit den Vektoren gerechnet wird, muss man immer die Koordinatendarstellung verwenden (wie hier in Gleichung (2.1)).

In vielen Fällen wird die Positionsangabe vereinfacht, zum Beispiel:

- Wenn der Massenpunkt immer in einer Ebene bleibt, kann man einen zweidimensionalen Ortsvektor verwenden:

$$\text{2D-Ortsvektor:} \qquad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

  Die Ebene, die durch die Koordinaten x und y beschrieben wird, kann dabei irgendwie windschief im Raum liegen.

- Wenn der Massenpunkt immer auf einer Linie bleibt (egal, wie diese orientiert ist), kann man die Position skalar beschreiben (also mit einer Zahl):

$$\text{1D-Positionsbeschreibung:} \qquad x(t)$$

  In diesem Fall ist die Positionsmessung wesentlich einfacher (km-Zähler etc.).

- Auf einer Kugeloberfläche kann es günstig sein, die Position in sphärischen Koordinaten mit Hilfe von zwei Winkeln anzugeben. Dies wird zum Beispiel bei GPS-Positionsdaten auf der Erdoberfläche gemacht. So hat z. B. der Hörsaal 5L an der HHU die Koordinaten

$$\text{Hörsaal 5L:} \qquad 51^\circ\, 11'\, 14{,}0''\ \text{N}, \quad 6^\circ\, 47'\, 50{,}4''\ \text{O}$$

  Das ist eine Angabe in Grad, Bogenminuten ($60' = 1^\circ$) und Bogensekunden ($60'' = 1'$). Sie bezieht sich in der Nord-Süd-Richtung auf den Äquator und in der West-Ost-Richtung auf den Meridian (Längenkreis), der durch das Observatorium von Greenwich läuft (Stadtteil von London).

(C) Position: Messung

In der Praxis kann man die Position $\vec{r}(t)$ eines bewegten Körpers auf verschiedene Arten messen. Dazu müssen zu bestimmten Zeitpunkten alle drei Koordinatenwerte bestimmt werden. Beispiele:

- In der Umgebung von Flughäfen werden die Positionen aller an- und abfliegenden Flugzeuge mit Hilfe von Radar-Techniken bestimmt: Das Gerät sendet gerichtete Mikrowellenpulse aus und misst die vom Objekt zurückreflektierten Anteile. Daraus können Richtung und Entfernung des Flugzeugs bestimmt werden.
- Bei der GPS-Positionsbestimmung (Mobiltelefone, Navigationsgeräte usw.) werden von mehreren Satelliten Funksignale ausgesandt, die ein präzises Zeitsignal sowie Informationen übe die Position des Satelliten enthalten. Wenn von mindestens drei (besser vier) dieser Satelliten gleichzeitig Signale empfangen werden, lässt sich die Position des Empfängers auf einige Meter genau berechnen.

Man kann die Position $\vec{r}(t)$ eines bewegten Körpers aber auch berechnen, wenn man seine Startposition und -geschwindigkeit kennt sowie alle Kräfte, die unterwegs auf ihn wirken. Damit beschäftigen wir uns im Kap. 3.

2.1.2 Die Geschwindigkeit

(A) Definition

Wenn sich ein Massenpunkt bewegt, dann verändert sich sein Ortsvektor $\vec{r}$ mit der Zeit. Die momentane Veränderung wird durch die Ableitung nach der Zeit t beschrieben und heißt Geschwindigkeit:

$$\textbf{Geschwindigkeit:} \qquad \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

$$\text{Dimension:} \quad \dim(v) = \frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}} \qquad \text{SI-Einheit:} \quad [v] = \text{m/s}$$

Bemerkung: Der Punkt auf einer Variable ist in der Physik allgemein eine Kurz-Schreibweise für die Ableitung dieser Variable nach der Zeit. Der dritte und der vierte Term in Gleichung (2.3) bedeuten somit genau dasselbe.

Der Vektor $\vec{v}(t)$ gibt die momentane Geschwindigkeit des Massenpunktes an, also sowohl die momentane Richtung als auch den momentanen Betrag:

$$\vec{v} = v \cdot \vec{e}_v \qquad \text{mit} \quad v = |\vec{v}| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2} \qquad \big(\text{Betrag der Geschwindigkeit}\big)$$

$$\vec{e}_v = \frac{\vec{v}}{v} \qquad \big(\text{Einheitsvektor zur Richtungsangabe}\big)$$

Beachten Sie, dass wir im Deutschen mit dem Begriff „Geschwindigkeit“ sowohl den Vektor $\vec{v}$ bezeichnen als auch den Betrag $|\vec{v}|$, was zu Verwirrung führen kann. Wenn man sprachlich klar trennen möchte, kann man für den Betrag der Geschwindigkeit den Begriff „Tempo“ verwenden. Im Englischen wird meist klarer unterschieden: Der physikalische Begriff $\vec{v}$ heißt *velocity*, während der Betrag *speed* genannt wird.

Der Betrag der Geschwindigkeit eines Massenpunktes ist nach oben begrenzt. Materie kann sich nie schneller bewegen als die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit c_0:

$$\text{Obere Grenze:} \qquad |\vec{v}| < c_0 = 299\,792\,458 \text{ m/s} \approx 300\,000 \text{ km/s}$$

Diese Grenze wurde erstmals von Albert Einstein in der Speziellen Relativitätstheorie postuliert und seither in keinem Experiment widerlegt.

Wenn die Geschwindigkeit eines Massenpunktes konstant ist (konstant in Richtung und Betrag), nennt man seine Bewegung eine **gleichförmige Bewegung**, in jedem anderen Fall spricht man von einer beschleunigten Bewegung.

(B) Messung

Die Geschwindigkeit wird in der Praxis in verschiedenen Einheiten angegeben, z. B.

- $1\,\text{km/h} = 0{,}2778\,\text{m/s}$ oder umgekehrt $1\,\text{m/s} = 3{,}6\,\text{km/h}$ (Straßenverkehr)

- $1\,\text{mph} = 0,447\,\text{m/s} = 1,609\,\text{km/h}$ (miles per hour; Straßenverkehr in den USA)
- $1\,\text{kn} = 0,514\,\text{m/s} = 1,852\,\text{km/h}$ (1 Knoten ist eine Seemeile pro Stunde: Nautik)
- $\vec{\beta} = \vec{v}/c_0$ (Bezug auf die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit)

Die Messung der vektoriellen Geschwindigkeit $\vec{v}$ (Betrag und Richtung) ist kompliziert und erfolgt oft mit Hilfe der Definitionsgleichung (2.3), indem die Position mehrmals hintereinander in drei Dimensionen gemessen wird (z. B. mit Radar oder GPS) und daraus die Geschwindigkeit berechnet wird. Eine andere Möglichkeit ist die getrennte Messung von Betrag und Richtung, z. B. mit Tachometer und Kompass.

Wenn nur das „Tempo“ (Betrag von $\vec{v}$) gemessen werden soll, gibt es eine Reihe von Methoden, die von der Geschwindigkeit und dem umgebenden Medium abhängen:

- Tachometer zur Messung der Geschwindigkeit von Räderfahrzeugen beruhen fast immer auf einer Messung der Umdrehungsfrequenz ν_R der Räder (in Umdrehungen pro Sekunde), die mit $v = U_R \cdot \nu_R$ in die Geschwindikgkeit umgerechnet wird (siehe Kap. 5.1.3). Dazu muss der Außenumfang des Rades $U_R = 2\pi \cdot R_R$ oder der Radium R_R bekannt sein.
- Radar-Geschwindigkeitsmesser beruhen auf dem Doppler-Effekt, weil Wellen, die an einem bewegten Objekt reflektiert werden, ihre Frequenz verändern.
- Die Geschwindigkeit von Wasserfahrzeugen wurde früher relativ zum umgebenden Wasser gemessen. Die dazu verwendeten Geräte werden „Log“ genannt. Dies ist allerdings wegen der Wasserströmungen als Absolutmessung sehr ungenau, sodass heute fast ausschließlich GPS-Verfahren verwendet werden.
- Die Geschwindigkeit von Luftfahrzeugen wird mit sogenannten „Fahrtmessern“ bestimmt, die darauf beruhen, dass sich der statische Druck eines Gases reduziert, wenn es sich relativ zum Messgerät bewegt (siehe Kap. 6.4.3). Damit kann man allerdings nur die Geschwindigkeit relativ zur umgebenden Luft bestimmen.

2.1.3 Die Beschleunigung

(A) Definition

Wenn sich die Geschwindigkeit eines Massenpunktes verändert, dann nennen wir diese Veränderung „Beschleunigung“:

$$\textbf{Beschleunigung:} \quad \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{v}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} \qquad (2.4)$$

$$\text{Dimension:} \quad \dim\bigl(a\bigr) = \frac{\text{Länge}}{(\text{Zeit})^2} \qquad \text{SI-Einheit:} \quad [a] = \text{m/s}^2$$

Auch die Beschleunigung kann mit $\vec{a} = a \cdot \vec{e}_a$ in Betrag und Richtung zerlegt werden.

Wir wissen, dass jeder Körper, der im Bereich der Erdoberfläche frei gelassen wird, nach unten beschleunigt wird. Dabei tritt immer die gleiche Beschleunigung auf:

$$\text{Erdbeschleunigung} \qquad a \;=\; g \;\approx\; 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$$

Im Abschnitt 3.2.2 besprechen wir die Gravitationskraft und können dann auch begründen, warum gerade dieser Zahlenwert auftritt. Die Angabe von g sagt uns, dass die Geschwindigkeit eines frei und ungehindert fallenden Körpers in jeder Sekunde um $\Delta v = 9{,}81\,\mathrm{m/s}$ nach unten zunimmt. Wenn man zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 also z. B. die Geschwindigkeit $v_0 = 5{,}00\,\mathrm{m/s}$ misst, dann wird man zum Zeitpunkt $t_1 = t_0 + 1{,}00\,\mathrm{s}$ die Geschwindigkeit $v_1 = 14{,}81\,\mathrm{m/s}$ messen.

In manchen Zusammenhängen wird die Beschleunigung auch anders angegeben, z. B. bei Fahrzeugen, wo man auf Angaben wie „von 0 auf 100 in 6,3 Sekunden“ stößt. Um eine solche Angabe vergleichbar zu machen, rechnet man am besten auf die SI-Einheit um: 100 km/h entsprechen $v_1 = 100/3{,}6 = 27{,}8\,\mathrm{m/s}$, sodass man für die mittlere Beschleunigung $\bar{a} = \Delta v/\Delta t = 27{,}8/6{,}3 \approx 4{,}4\,\mathrm{m/s^2}$ erhält.

Beachten Sie, dass wir die Größe a in der Physik immer „Beschleunigung“ nennen, auch wenn die Geschwindigkeit kleiner wird („negative Beschleunigung“) oder wenn sich der Massenpunkt mit konstanter Geschwindigkeit um eine Kurve bewegt („Radial- oder Normalbeschleunigung“: Nur die die Richtung der Geschwindigkeit verändert sich, nicht aber Ihr Betrag).

Wenn man die Definitionsgleichungen (2.3) und (2.4) kombiniert, sieht man sofort, dass die Beschleunigung die zweite Ableitung der Position nach der Zeit ist („Änderung der Positionsveränderung“):

$$\vec{a}(t) \;=\; \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}\right) \;=\; \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} \;=\; \ddot{\vec{r}}(t)$$

Wenn man also die Position des Massenpunktes über längere Zeit genau misst, sodass der zeitliche Verlauf $\vec{r}(t)$ seiner Position bekannt ist, kann man daraus durch einfache Ableitung gemäß Gleichung (2.3) die jeweilige Geschwindigkeit berechnen und durch zweifache Ableitung die jeweilige Beschleunigung.

Im allgemeinen Fall hat die Beschleunigung („Änderung der Geschwindigkeit“) eine andere Richtung als die Geschwindigkeit. Um die Wirkung der Beschleunigung zu beurteilen, verwendet man die Vektorzerlegung und zerlegt den Beschleunigungsvektor $\vec{a}$ in einen Vektor $\vec{a}_\parallel$ parallel zur Geschwindigkeit und einen Vektor $\vec{a}_\perp$ normal dazu:

$$\text{Vektorzerlegung:} \qquad \vec{a} \;=\; \vec{a}_\parallel + \vec{a}_\perp \qquad \text{mit} \tag{2.5}$$

$$\text{Parallelkomponente:} \qquad \vec{a}_\parallel \;=\; (\vec{a}\cdot\vec{e}_v)\cdot\vec{e}_v \qquad \text{mit} \quad \vec{e}_v \;=\; \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \tag{2.6}$$

$$\text{Normalkomponente:} \qquad \vec{a}_\perp \;=\; \vec{a} - \vec{a}_\parallel \tag{2.7}$$

Für $\vec{a}_\parallel$ muss man die Projektion der Beschleunigung auf die Geschwindigkeitsrichtung ermitteln (das ist der Anteil in der Klammer: Skalarprodukt von $\vec{a}$ mit dem Einheitsvektor $\vec{e}_v$ in Geschwindigkeitsrichtung) und mit $\vec{e}_v$ multiplizieren (um die Richtung festzulegen). Die Normalkomponente $\vec{a}_\perp$ ist dann der Rest des Beschleunigungsvektors, also alles, was nicht parallel zur Geschwindigkeit ist.

Der Parallelvektor $\vec{a}_\parallel$ gibt an, wie sich der Betrag der Geschwindigkeit verändert (Geschwindigkeitsvektor wird länger oder kürzer), während der Normalvektor $\vec{a}_\perp$ angibt, wie sich die Richtung der Geschwindigkeit verändert (Geschwindigkeitsvektor wird gedreht, siehe S. 29).

Wenn die Beschleunigung eines bewegten Massenpunktes in Betrag und Richtung konstant ist (wie z. B. bei frei fallenden Körpern im Bereich der Erdoberfläche), spricht man von einer **gleichförmig beschleunigten Bewegung**.

(B) Messung

Die Beschleunigung, die auf einen Körper wirkt, kann mit hoher Genauigkeit mit sogenannten Beschleunigungssensoren bestimmt werden. Das Messprinzip ist immer, dass sich eine definierte Masse nach dem Trägheitsprinzip (siehe Kap. 3.1.1) jeder Beschleunigung widersetzt. Dies führt zu einer Kraft, die gemessen werden kann. Oft wird die Verbiegung von Piezokristallen verwendet, die zu einer wohldefinierten elektrischen Spannung führt.

Solche Sensoren können auf mikroskopischer Skala gebaut werden (Größe: nur einige 10 μm) und sind standardmäßig in vielen elektronischen Geräten verbaut (Smartphones, Navigationsgeräte usw.).

(C) Änderung der Beschleunigung

In der Praxis ist die Beschleunigung oft nicht konstant. Die zeitliche Änderung der Beschleunigung kann wieder durch die zeitliche Ableitung beschrieben werden:

$$\textbf{Ruck:} \qquad \vec{j}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{a}(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{a}}(t) = \frac{\mathrm{d}^3\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^3} = \dddot{\vec{r}}(t) \tag{2.8}$$

$$\text{Dimension:} \quad \dim(j) = \frac{\text{Länge}}{(\text{Zeit})^3} \qquad \text{Einheit:} \quad [a] = \mathrm{m/s^3}$$

Diese Größe wird nicht oft verwendet. In der Praxis spürt man den „Ruck“, wenn eine konstante Beschleunigung plötzlich beginnt oder endet, z. B. beim Abbremsen eines Zugs (konstante negative Beschleunigung), das plötzlich endet, wenn der Zug zum Stehen kommt.

2.1.4 Der Zusammenhang zwischen $\vec{r}$, $\vec{v}$ und $\vec{a}$

Wir fassen hier zusammen, wie die Größen Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Massenpunktes zusammenhängen.

(A) Position $\vec{r}(t)$ bekannt

Wenn es Daten für die Position eines Massenpunktes während seiner Bewegung gibt, kann man daraus die Geschwindigkeit berechnen. Wie das genau geht, hängt davon ab, in welcher Form die Positionsdaten vorliegen:

Wenn die Position zu vielen Zeitpunkten $t_1, t_2, t_3, \ldots$ gemessen wird, kennt man die Orte $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$, $\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$ usw. Daraus kann man zu jedem Zeitpunkt näherungsweise die Geschwindigkeit berechnen, nämlich als Veränderung der Position geteilt durch die vergangene Zeit („Weg durch Zeit"):

$$\text{Geschwindigkeit aus Differenzen:} \qquad \vec{v}(t_i) \approx \frac{\Delta\vec{r}_i}{\Delta t_i} = \frac{r_i - r_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \tag{2.9}$$

Wenn es gelingt, eine Funktion $\vec{r}(t)$ zu finden, auf der hinreichend genau alle Positions-Messpunkte liegen, oder wenn eine solche Funktion aus theoretischen Gründen angenommen wird, kann man die Geschwindigkeit $v(t)$ zu jedem Zeitpunkt aus der Zeitableitung dieser Funktion berechnen (siehe Gleichung (2.3)):

$$\text{Geschwindigkeit aus der Zeitableitung:} \qquad \vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} \tag{2.10}$$

Beachten Sie, dass die beiden Beziehungen dasselbe bedeuten: Die Geschwindigkeit ist die Änderung der Position in einem bestimmten Zeitintervall. Der Unterschied ist nur, dass man mit der Differenz den Mittelwert der Geschwindigkeit in einem bestimmten Zeitraum Δt erhält, während die Zeitableitung (bei der man ja ein infinitesimales, also unendlich kleines Zeitintervall $\mathrm{d}t$ betrachtet) die exakte momentane Geschwindigkeit ergibt.

Wenn die Funktion der Geschwindigkeit $v(t)$ nach Gleichung (2.10) berechnet wurde, kann man durch nochmalige Ableitung auch die Beschleunigung berechnen:

$$\text{Beschleunigung aus der zweiten Zeitableitung:} \qquad \vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} \tag{2.11}$$

(B) Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ bekannt

Ganz analog kann man aus der Geschwindigkeit die Beschleunigung berechnen, wieder auf zwei Arten: Wenn die Geschwindigkeit zu verschiedenen Zeitpunkten bekannt ist, also $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ ... zu den Zeitpunkten t_1, t_2 usw., dann erhält man die Beschleunigung als Geschwindigkeitsänderung in einem Zeitintervall:

$$\text{Beschleunigung aus Differenzen:} \qquad \vec{a}(t_i) \approx \frac{\Delta\vec{v}_i}{\Delta t_i} = \frac{v_i - v_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}\,. \tag{2.12}$$

Wenn für den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit eine Funktion $\vec{v}(t)$ bekannt ist, verwendet man zur Berechnung der Beschleunigung die Zeitableitung:

$$\text{Beschleunigung aus der Zeitableitung:} \qquad \vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} \tag{2.13}$$

Aus bekannten Werten für die Geschwindigkeit lässt sich andererseits auch ausrechnen, um wie viel sich die Position verändert hat. Wenn einzelne Datenpunkte vorhanden sind, macht man das näherungsweise zwischen zwei Messpunkten:

$$\Delta\vec{r}_i \;\approx\; \vec{v}(t_i)\cdot\Delta t_i \qquad \rightarrow \qquad \vec{r}(t_i) \;\approx\; \vec{r}(t_{i-1}) + \vec{v}(t_i)\cdot(t_i - t_{i-1}) \tag{2.14}$$

oder, wenn für die Geschwindigkeit die Funktion $\vec{v}(t)$ bekannt ist, an jedem Zeitpunkt exakt aus dem Integral:

$$\mathrm{d}r \;=\; \vec{v}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \rightarrow \qquad \vec{r}(t_2) \;=\; \vec{r}(t_1) + \int\limits_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t)\,\mathrm{d}t \tag{2.15}$$

Wenn Vektoren integriert werden wie hier in Gleichung (2.15), dann wird das Integral für jede Koordinate separat berechnet. Ob sich diese Integrale analytisch lösen lassen oder nicht, hängt hier konkret von der Form der Funktion $\vec{v}(t)$ ab. In den meisten praktischen Fällen geht das nicht, besonders dann, wenn die Funktionen aus Messdaten zusammengesetzt sind. Man kann dann versuchen, den zeitlichen Verlauf mit einer integrierbaren Funktion anzunähern. In der Praxis verzichtet man darauf und löst man die Integrale unter Verwendung der Messdaten numerisch.

(C) Beschleunigung $\vec{a}(t)$ bekannt

Wenn Messdaten für die Beschleunigung des bewegten Massenpunkts aufgenommen werden (wie das z. B. in Navigationsgeräten oder Mobiltelefonen gemacht wird), ist also zu bestimmten Zeitpunkten t_i bekannt, um wie viel sich die Geschwindigkeit pro Zeiteinheit verändert. Ganz konkret kann man dann näherungsweise berechnen, um wie viel sich die Geschwindigkeit von einem Messpunkt bis zum nächsten verändert hat:

$$\Delta\vec{v}_i \;\approx\; \vec{a}(t_i)\cdot\Delta t_i \qquad \rightarrow \qquad \vec{v}(t_i) \;\approx\; \vec{v}(t_{i-1}) + \vec{a}(t_i)\cdot(t_i - t_{i-1}) \tag{2.16}$$

Wenn die Beschleunigung als Funktion $\vec{a}(t)$ bekannt ist, macht man im Prinzip genau dasselbe, nur formuliert man die Gleichung dann als Integral:

$$\mathrm{d}v \;=\; \vec{a}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \rightarrow \qquad \vec{v}(t_2) \;=\; \vec{v}(t_1) + \int\limits_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t)\,\mathrm{d}t \tag{2.17}$$

Daraus kann man dann auch noch die Position des bewegten Körpers berechnen, indem man das Ergebnis aus Gleichung (2.17) in die Gleichung (2.15) einesetzt:

$$\vec{r}(t_2) \;=\; \vec{r}(t_1) + \int\limits_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \vec{r}(t_1) + \vec{v}(t_1)\cdot(t_2 - t_1) + \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\int\limits_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}t \tag{2.18}$$

Ob die Integrale lösbar sind, hängt hier von der Form der Funktion $\vec{a}(t)$ ab. Man kann aber immer versuchen, sie numerisch zu berechnen.

2.2 Die Bahnkurve eines bewegten Massenpunktes

2.2.1 Allgemeine Beschreibung

Als „Bahnkurve" eines bewegten Massenpunktes bezeichnet man jene Kurve im Raum, die der Massenpunkt im Lauf der Zeit durchläuft. Man beschreibt die Bahnkurve mit dem zeitabhängigen

$$\text{Ortsvektor:} \qquad \vec{r}(t) \;=\; \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Der Ortsvektor zeigt zu jedem Moment vom willkürlich gewählten Koordinatenursprung zum momentanen Aufenthaltsort der Masse. Deshalb kann durch Angabe von $\vec{r}(t)$ nicht direkt auf die geometrische Form der Bahnkurve geschlossen werden.

Die momentane Richtung der Bahnkurve wird durch die momentane Geschwindigkeit angegeben (also die Änderung des Ortsvektors):

$$\text{Richtung der Bahnkurve:} \qquad \vec{v}(t) \;=\; \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} \;=\; \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

Umgekehrt kann man ein kleines Stück des Weges auf der Bahnkurve ausrechnen, wenn man die momentane Geschwindigkeit kennt:

$$\text{infinitesimales Bahnelement:} \qquad \mathrm{d}\vec{r}(t) \;=\; \vec{v}(t) \cdot \mathrm{d}t \tag{2.20}$$

Wenn man entlang der Bahn kontinuierlich die Geschwindigkeit $v(t)$ misst, kann man – ausgehend vom Startpunkt $\vec{r}(t_1)$ – beliebige Punkte auf der Bahnkurve rekonstruieren, indem man alle Bahnelemente $\mathrm{d}\vec{r}(t)$ addiert:

$$\vec{r}(t_2) \;=\; \vec{r}(t_1) + \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}\vec{r}(t) \;=\; \vec{r}(t_1) + \int\limits_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t)\, \mathrm{d}t \tag{2.21}$$

Oft will man die Länge s der zurückgelegten Wegstrecke entlang der Bahnkurve wissen. Dazu rechnet man mit den Beträgen: Man integriert infinitesimale Wegstücke, die man aus dem momentanen „Tempo" berechnet:

$$s \;=\; \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}s \;=\; \int\limits_{t_1}^{t_2} |\vec{v}(t)|\; \mathrm{d}t \;=\; \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{\big(v_x(t)\big)^2 + \big(v_y(t)\big)^2 + \big(v_z(t)\big)^2}\; \mathrm{d}t \tag{2.22}$$

Daraus enthält man dann zum Beispiel die

$$\text{Durchschnittsgeschwindigkeit entlang der Bahn:} \qquad \bar{v} \;=\; \frac{s}{t} \tag{2.23}$$

Die hier oben infinitesimal beschriebenen Größen kann man näherungsweise auch so berechnen, dass man anstelle der Differenziale Differenzen berechnet, die zwischen zwei nahe aneinander liegenden Zeitpunkten t_1 und t_2 auftreten. Dann erhält man die Näherungen

$$\begin{aligned} \text{Luftlinie :} \qquad \Delta\vec{r} &= \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) \qquad \big(|\Delta\vec{r}| \;\leq\; s\big) \\ \text{Geschwindigkeit:} \qquad \vec{v} &\approx \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad \big(|\vec{v}| \;\leq\; \bar{v}\big) \end{aligned}$$

Die aus den Differenzen berechneten Werte sind fast immer kleiner als die tatsächlichen, weil sie ja „Abkürzungen“ darstellen (außer wenn die Bahn gerade ist).

Ganz analog zur Gleichung (2.19) berechnet man aus der zeitlichen Ableitung der Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ auf der Bahnkurve die momentane Beschleunigung:

$$\text{Beschleunigung:} \qquad \vec{a}(t) \;=\; \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} \;=\; \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} \;=\; \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

Umgekehrt kann man, wenn man den Zeitverlauf der Beschleunigung des bewegten Körpers kennt, mit Hilfe der Gleichungen (2.17) und (2.18) die Änderung der Geschwindigkeit und der Position berechnen. Dies wird im Kap. 3 besonders wichtig, wo wir diskutieren, wie wir aus den wirkenden Kräften die momentane Beschleunigung ermitteln können, aus der man dann auch die anderen Größen erhält.

2.2.2 Gleichförmig beschleunigte Bewegung

Wir beschäftigen uns hier mit einem wichtigen Sonderfall, wenn nämlich die Beschleunigung eines Massenpunktes zeitlich konstant ist, also $\vec{a} = \text{const} \neq f(t)$. Dieser Fall kommt in der Praxis eigentlich nur selten vor; viele Bewegungen lassen sich aber näherungsweise so beschreiben, zum Beispiel Bewegungen unter dem Einfluss der Schwerkraft ($a = g \approx 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} = \text{const}$), bei denen die (Luft-)Reibung vernachlässigt werden kann.

Wir betrachten mehrere Fälle einer solchen Bewegung mit konstanter Beschleunigung und verwenden diese Fälle dazu, uns genauer zu überlegen, wie man in der Physik bei der Beschreibung konkreter Situationen vorgeht.

(A) Gleichförmig beschleunigte Bewegung in einer Dimension

Wir betrachten hier den Fall, dass die Beschleunigung in derselben Richtung wirkt wie die Geschwindigkeit. Dann bleibt die Bewegung immer in derselben Dimension und wir brauchen zur Beschreibung der Situation keine Vektoren, sondern können alles in 1D mit skalaren Größen beschreiben:

$$\begin{aligned}
\text{Position:} \quad & x(t)\,, && \text{mit} \quad x(t=t_1) \;=\; x_1 \\
\text{Geschwindigkeit:} \quad & v(t) \;=\; \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,, && \text{mit} \quad v(t=t_1) \;=\; v_1 \\
\text{Beschleunigung:} \quad & a \;=\; \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \;=\; \text{const} \;\neq\; f(t) &&
\end{aligned}$$

Die konstante Beschleunigung führt dazu, dass sich die Geschwindigkeit mit konstanter Rate verändert. Den konkreten Wert $v(t_2)$ der Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt t_2 erhält man, indem man die zeitliche Veränderung der Geschwindigkeit über die Zeit aufsummiert. Für den allgemeinen 3D-Fall wird das mit dem Integral in Gleichung (2.17) gemacht. Hier brauchen wir nur in einer Dimension zu integrieren, und wegen des konstanten Werts von a lässt sich das Integral leicht lösen:

$$v(t_2) \;=\; v(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} a\,\mathrm{d}t \;=\; v(t_1) + a \cdot (t_2 - t_1) \tag{2.25}$$

Oft wählt man die Zeit so, dass die Anfangszeit $t_1 = 0$ gesetzt wird. Die Geschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt (die natürlich nicht Null sein muss) bezeichnet man dann als Anfangsgeschwindigkeit v_0. Dann ergibt sich

$$v(t) \;=\; v_0 + a \cdot t \tag{2.26}$$

Beachten Sie, dass die Geschwindigkeit gleichförmig zunimmt (oder abnimmt): In jeder Sekunde kommt der gleiche Betrag dazu, nämlich genau so viel, wie es der Zahlenwert der Beschleunigung angibt. So steigt bei ungebremstem freiem Fall die Geschwindigkeit pro Sekunde um den Wert $\Delta v = 9,81\,\mathrm{m/s}$. Das stimmt natürlich nur, solange kein Luftwiderstand wirkt, durch den in Realität eine zunehmende Bremsbeschleunigung dazu kommt (siehe Kap. 3.3.4).

Wenn wir die momentane Position der beschleunigten Punktmasse wissen wollen, müssen wir die Geschwindigkeit aus der Gleichung (2.25) noch einmal nach der Zeit integrieren, so wie es im allgemeinen 3D-Fall mit der Gleichung (2.18) gemacht wird. Wenn die Position zum Zeitpunkt $t = t_1$ bekannt ist, dann kommt in jedem kurzen Moment (Länge $\mathrm{d}t$) das Wegstück $\mathrm{d}x = v(t) \cdot \mathrm{d}t$ dazu. Diese Wegstücke werden über den ganzen interessierenden Zeitraum aufsummiert, was als Integral formuliert wird:

$$\begin{aligned}
r(t_2) \;&=\; r(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t \;=\; r(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \left(v(t_1) + a \cdot (t - t_1)\right)\,\mathrm{d}t \\
&=\; r(t_1) + v(t_1) \cdot (t - t_1) + \frac{a}{2} \cdot (t - t_1)^2
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Wenn man für den Beginn des Vorgangs wieder $t = t_0 = 0$ setzt, außerdem für Ort und Geschwindigkeit zu Beginn x_0 und v_0, dann erhält man

$$x(t) \;=\; x_0 + v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2 \tag{2.28}$$

Wir haben nun zwei „Beziehungen“ (= physikalische Formeln) zur Beschreibung der gleichförmig beschleunigten 1D-Bewegung vorliegen, nämlich die Gleichungen (2.26) und (2.28). Diese Formeln gelten allgemein, also für jede beliebige gleichförmig beschleunigte Bewegung in einer Dimension. Um zu berechnen, was in einem ganz konkreten Fall passiert, reichen sie aber nicht aus. Dazu sind auch konkrete Zahlenangaben notwendig, in der Physik fast immer Messwerte.

Was wir eigentlich wollen, ist eine „vollständige Beschreibung“ der Situation – wir wollen „alles“ über eine bestimmte gleichmäßig beschleunigte Bewegung wissen. Also z.B.: Wo ist der Massenpunkt nach $t = 3\,\mathrm{s}$? Wann wird er die Position $x = 3,5\,\mathrm{m}$ erreichen? Wie schnell ist er dann? Usw. Eine solche vollständige Beschreibung ist in allen Bereichen der Physik das, was wir anstreben: Wir wollen alles über ein bestimmtes konkretes Problem wissen und alle Möglichkeiten ausrechnen können.

Wie gelingt eine „vollständige Beschreibung“)? Was alles brauchen wir dafür? Dabei hilft ein allgemeiner Satz aus der Mathematik:

Zur Bestimmung von N Unbekannten braucht man
N unabhängige Informationen.

Dabei gilt jede Gleichung als „eine Information“ – wir haben hier zwei davon. In den Gleichungen gibt es aber insgesamt 6 Unbekannte, nämlich t, $x(t)$, $v(t)$, $a = \mathrm{const}$, x_0 und v_0. Es werden also vier zusätzliche Informationen benötigt. In der Physik verwendet man Messdaten als „weitere Informationen“, die konkret beschreiben, welche Situation vorliegt (neben der allgemeinen Beschreibung durch die Gleichungen, die für alle gleichförmig beschleunigten Bewegungen gilt). Messdaten könnten hier z. B. sein:

- Ein Zahlenwert für die konstante Beschleunigung a (z. B. $a = g = 9,81\,\mathrm{m/s^2}$).
- Die Position x_0 zum Zeitpunkt $t = 0$. (z. B. sind eventuell die Koordinaten so gewählt, dass $x_0 = 0$).
- Die Anfangsgeschwindigkeit v_0 zum Zeitpunkt $t = 0$.
- Die gemessene Position $x(t_x)$ zu einem bestimmten gemessenen Zeitpunkt t_x (z. B. $x(2,43\,\mathrm{s}) = 3,62\,\mathrm{m}$.
- Die gemessene Geschwindigkeit $v(t_y)$ zu einem gemessenen Zeitpunkt t_y.
- Die Fortbewegung $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$ im Zeitraum zwischen t_1 und t_2.
- usw.

Konkretes Beispiel: Ein kleiner Ball („Massenpunkt“) wird senkrecht nach oben in die Luft geworfen. Wenn angegeben ist, dass die Erdbeschleunigung wirkt ($a = -9,81\,\mathrm{m/s^2}$ nach unten) und dass der Ball zu Beginn ($t = 0$) an der Position $x_0 = 0$ ist und die Geschwindigkeit $v_0 = 15,0\,\mathrm{m/s}$ hat (nach oben), dann kann man für den Zeitpunkt $t_1 = 2,00\,\mathrm{s}$ mit den Gleichungen (2.26) und (2.28) Geschwindigkeit und Position berechnen:

$$
\begin{aligned}
v(t_1) &= v_0 + a \cdot t \;=\; 15,0 - 9,81 \cdot 2,00 \;=\; -4,62\,\mathrm{m/s} \quad \big(\text{nach unten}\big) \\
x(t_1) &= x_0 + v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2 \;=\; 15,0 \cdot 2,00 - 0,5 \cdot 9,81 \cdot 4,00 \;=\; 10,4\,\mathrm{m} \quad \big(\text{hoch}\big)
\end{aligned}
$$

Wenn gefragt ist, zu welchem Zeitpunkt der Ball sich $x = 10,0\,\mathrm{m}$ hoch befindet, brauchen wir die Gleichung (2.26) nicht (Geschwindigkeit spielt keine Rolle), sondern nur die Gleichung (2.28), die wir in eine quadratische Gleichung umformen müssen, um den gesuchten Zeitpunkt t zu erhalten:

$$
\begin{aligned}
x &= x_0 + v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2 \qquad \to \qquad t^2 + 2 \cdot \frac{v_0}{a} \cdot t + 2 \cdot \frac{x_0 - x}{a} = 0 \\
t &= -\frac{v_0}{a} \pm \sqrt{\frac{{v_0}^2}{a^2} - 2 \cdot \frac{x_0 - x}{a}} = (1,53 \pm 0,55)\ \mathrm{s} \\
&\text{Ergebnis:} \qquad t_1 = 0,98\,\mathrm{s} \qquad \text{und} \quad t_2 = 2,08\,\mathrm{s}
\end{aligned}
$$

Wie bei jeder quadratischen Gleichung erhalten wir zwei Ergebnisse. Wenn alle Annahmen richtig getroffen sind (hier z. B. : konstante Beschleunigung nach unten), darf man nicht einfach eines der beiden Resultate auswählen, sondern muss überlegen, warum es zwei Ergebnisse gibt. In diesem Fall wird die Höhe $x = 10,0\,\mathrm{m}$ beim Hochfliegen und noch einmal beim Herunterfallen erreicht – beide Lösungen sind also sinnvoll und richtig. Wenn man die beiden Zeiten in Gleichung (2.26) einsetzt, erhält man die momentanen Geschwindigkeiten $v(t_1) = +5,5\,\mathrm{m/s}$ und $v(t_2) = -5,5\,\mathrm{m/s}$.

Wenn man wissen möchte, zu welchem Zeitpunkt der Ball sich $x = 15,0\,\mathrm{m}$ hoch befindet, erhält man in der Lösung unter der Wurzel eine negative Zahl. Das bedeutet, dass dieser Fall nicht möglich ist. Auch das ist korrekt: Wenn man die Geschwindigkeit in Gleichung (2.26) null setzt, erhält man $t = 1,53\,\mathrm{s}$ als Zeitpunkt des Umkehrpunkts. Einsetzen in Gleichung (2.28) ergibt, dass der Ball dann die Maximalhöhe $x_{\max} = 11,5\,\mathrm{m}$ erreicht, und somit niemals 15 m hoch sein wird.

(B) Gleichförmig beschl. Bewegung in mehreren Dimensionen

Die Bewegung eines Massenpunktes wird im allgemeinen Fall so wie oben im Abschnitt 2.2.1 mit dreidimensionalen Vektoren beschrieben. Fürs praktische Rechnen ist dabei angenehm, dass vorerst jede Koordinatenrichtung für sich beschrieben werden kann. Die einzelnen Richtungen sind voneinander unabhängig und können – jede für sich – mit dem 1D-Formalismus behandelt werden. Bei komplizierten Bewegungen kann die Beschreibung durch richtige Wahl des Koordinatensystems wesentlich vereinfacht werden, wenn man die Koordinaten zum Beispiel so definiert, dass die Beschleunigung nur in einer Koordinatenrichtung stattfindet.

Jeder kennt aus dem täglichen Leben die Bewegung unter Einfluss der Schwerkraft – die Erdbeschleunigung wirkt konstant nach unten. Mit dem üblichen Koordinatensystem (siehe S. 15) ist das die $(-z)$-Richtung. Wenn keine weitere Beschleunigung vorliegt (Reibung, also Luftwiderstand sei vernachlässigbar), kann sich nur die z-Komponente der Geschwindigkeit zeitlich verändern. In den anderen Koordinatenrichtungen muss die Geschwindigkeit jeweils konstant bleiben, da ja z. B. $\mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t = a_x = 0$.

Ein typisches Beispiel ist der „waagrechte Wurf“: Ein Ball werde mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 12,0\,\mathrm{m/s}$ waagrecht aus einem Fenster geworfen, das sich in einem hohen Haus $h = 20{,}0\,\mathrm{m}$ über dem flachen Erdboden befindet. Wie weit vom Haus entfernt trifft der Ball auf den Boden?

Zur Lösung wählt man vorerst ein zweckmäßiges Koordinatensystem, z. B. so: x in die Anfangsflugrichtung, y normal dazu nach rechts, z senkrecht nach unten (das ist Rechtssystem!), Koordinatenursprung am Startpunkt des Balls genau in der Fensteröffnung, Zeit $t = 0$ beim Abwurf. (Beachten Sie, dass das Koordinatensystem keinen Einfluss auf das Ergebnis hat! Wenn Sie den Ursprung am Boden unter dem Fenster wählen, x nach rechts, y nach vorne und z nach oben, kommt exakt dasselbe heraus, nur vielleicht etwas komplizierter zu rechnen.)

Wie entwickelt sich die Bewegung?

- In y-Richtung kann überhaupt nichts passieren (keine Anfangsgeschwindigkeit, keine Beschleunigung): Der Ball bleibt immer an der gleichen Position, diese Richtung muss also nicht weiter behandelt werden.
- In x-Richtung bewegt sich der Ball mit konstanter Geschwindigkeit $v_x = v_0$, da in dieser Richtung ja keine Beschleunigung vorhanden ist, die den Ball bremsen oder beschleunigen könnte. In unserem Beispiel bewegt sich der Ball also in jeder Sekunde um $\Delta x = v_x \cdot \Delta t = 12\,\mathrm{m}$ vorwärts.
- In z-Richtung liegt eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung vor, die wir mit Gleichung (2.28) beschreiben können, mit $z_0 = 0$, $v_{z,0} = 0$ und $a_z = g$.

Wir können zwei Gleichungen aufstellen:

$$x\text{-Richtung:} \quad x(t) = v_x \cdot t \qquad \text{und} \qquad z\text{-Richtung:} \quad z(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2$$

Daraus lässt sich nun erstens die Zeit t_a des Aufpralls bestimmen

$$z(t_a) = h \qquad \rightarrow \quad t_a = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}\,, \qquad \text{hier:} \quad t_a \approx 2{,}0\,\mathrm{s}\,,$$

zweitens die Entfernung des Auftreffpunkts vom Haus

$$x_a = x(t_a) = v_x \cdot t_a\,, \qquad \text{hier:} \quad x_a \approx 24{,}0\,\mathrm{m}\,,$$

und drittens die Form der Flugbahn, die sogenannte „Wurfparabel“:

$$t = \frac{x}{v_x} \qquad \text{und} \quad z = \frac{g}{2} \cdot t^2 = \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{{v_x}^2} \qquad \rightarrow \quad z = \left(\frac{g}{2 \cdot {v_x}^2}\right) \cdot x^2$$

Beachten Sie, dass die z-Koordinate quadratisch von der x-Koordinate abhängt – in der Physik sagt man: „z skaliert quadratisch mit x“. Solche Abhängigkeiten zeigen viel über den allgemeinen Charakter eines Phänomens (hier: des waagrechten Wurfs), ohne dass man Zahlen einsetzen muss. Hier können wir z. B. sofort sagen, dass der Ball, wenn er doppelt so weit vom Haus weg ist wie vorher, gleichzeitig viermal so tief ist.

Das „Aufdröseln“ des Problems in einzelne Gleichungen für die einzelnen Koordinaten ist typisch für die allgemeine physikalische Vorgehensweise, nämlich große Probleme in kleine Einzelprobleme aufzuteilen und aus den Lösungen wieder eine Lösung für das „große Ganze“ zusammenzusetzen.

(C) Gleichförmige Normalbeschleunigung

Wir besprechen hier den häufigen Fall, dass die Beschleunigung auf eine bewegte Masse betragsmäßig konstant bleibt und außerdem immer im rechten Winkel auf die aktuelle Geschwindigkeit steht:

$$|\vec{a}(t)| \;=\; \text{const} \qquad \text{und} \qquad \vec{a}(t) \;\equiv\; \vec{a}_\perp(t) \;\perp\; \vec{v}(t)$$

Die Beschleunigung wirkt also immer normal auf die Geschwindigkeit, sodass der Betrag von $\vec{v}$ unverändert bleiben muss, die Richtung von $\vec{v}$ sich aber andauernd verändert. Beachten Sie, dass der Beschleunigungsvektor selbst in diesem Fall nicht konstant ist: Er muss vielmehr ebenfalls andauernd seine Richtung ändern, um immer noch normal auf den Geschwindigkeitsvektor zu stehen.

Wir analysieren nun, welche Art von Bewegung zustande kommt, wenn eine derartige „gleichförmige Normalbeschleunigung“ auf ein bewegtes System wirkt:

Innerhalb eines kurzen Zeitraums Δt geschieht Folgendes:

- Der Massenpunkt bewegt sich um $\Delta s = \vec{v} \cdot \Delta t$ weiter.
- Die Geschwindigkeit ändert ihre Richtung $\vec{v}(t + \Delta t) \approx \vec{v}(t) + \vec{a} \cdot \Delta t$

Dadurch bewegt sich der Massenpunkt auf einem kleinen Kreisbogen. Den Radius R dieses Kreisbogens erhält man durch folgende Überlegungen:

- Der Radius muss an jeder Stelle normal auf die Bahnrichtung stehen.
- Wenn man den Radius zum Zeitpunkt t normal auf $\vec{v}(t)$ einzeichnet und zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ von der neuen Position aus normal auf $\vec{v}(t+\Delta t)$, dann schneiden sich diese beiden Linien im Kreismittelpunkt und man erhält ein Dreieck.
- Dieses Dreieck ist ähnlich (gleiche Winkel!) zu einem Dreieck aus $\vec{v}(t)$, $\vec{v}(t + \Delta t)$ und $\vec{a} \cdot \Delta t$.
- Aus dieser Ähnlichkeit erhält man die Beziehung

$$\frac{|\vec{v} \cdot \Delta t|}{R} \;=\; \frac{|\vec{a} \cdot \Delta t|}{|\vec{v}|} \qquad \rightarrow \qquad \frac{v}{R} \;=\; \frac{a}{v}$$

Daraus erhalten wir das Ergebnis: Ein Massenpunkt, der sich mit der konstanten Geschwindigkeit v bewegt und auf den konstant die Normalbeschleunigung a wirkt, läuft auf einer Kreisbahn mit dem

$$\text{Bahnradius} \qquad R \;=\; \frac{v^2}{a} \tag{2.29}$$

Dies gilt auch viel allgemeiner: Sobald auf einen bewegten Massenpunkt eine Beschleunigung $\vec{a}$ wirkt, die eine Normalkomponente $\vec{a}_\perp \neq 0$ hat, läuft der Massenpunkt auf einer Kurve, die mit einem Kreisbogen mit Radius R angenähert werden kann.

Wenn sich die Normalbeschleunigung und/oder Geschwindigkeit verändert, dann ändert sich auch dieser Radius, sodass insgesamt kein Kreis, sondern eine Kurvenbahn mit variablem Radius $R(t)$ durchlaufen wird. Dieser Radius kann zu jedem Zeitpunkt t kann aus den aktuellen Werten $|\vec{v}(t)|$ und $|\vec{a}_\perp(t)|$ berechnet werden.

Umgekehrt können wir feststellen, dass ein Massenpunkt nur dann auf einer Kurve läuft, wenn es eine Normalkomponente $\vec{a}_\perp$ seiner Beschleunigung gibt (das bedeutet ja genau, dass die Geschwindigkeit ihre Richtung ändert). Diese Normalkomponente heißt in diesem Kontext

$$\text{Zentripetalbeschleunigung} \qquad a_{\text{ZP}} = \frac{v^2}{R} \tag{2.30}$$

Die Zentripetalbeschleunigung zeigt zu jedem Moment genau in Richtung auf den Mittelpunkt des Kreisbogens, auf dem der Massenpunkt gerade läuft. Im Kap. 3.2.6 beschäftigen wir uns genau damit, wie eine derartige Beschleunigung bereit gestellt werden kann.