EXPERIMENTELLE MECHANIK

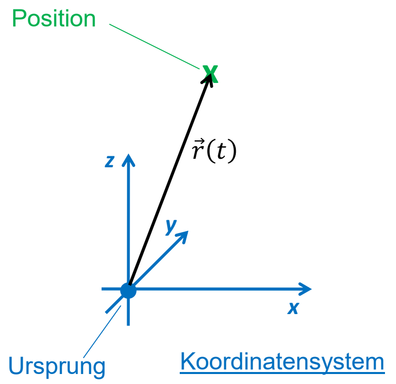
Kapitel 2
Kinematik: Die Beschreibung von Bewegungen

2.1. Größen zur Beschreibung von Bewegungen

2.1.1. Position

Ortsvektor $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

Der Ortsvektor beschreibt die Position eines Massenpunkts relativ zu einem Ursprung zu einem bestimmten Zeitpunkt *t*



Koordinatensystem:

3D-kartesisch: Rechtssystem der Achsen!

Rechte Hand: x Daumen
y Zeigefinger
z Mittelfinger

2D-kartesisch: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

1-dimensional: $x(t)$

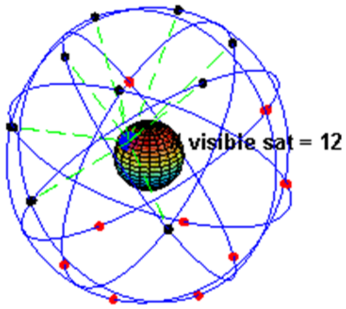
Kugelkoordinaten: z.B. Hörsaal 5L:
51° 11‘ 14,0“ N, 6° 47‘ 50,4“ O

2.1.1. Position

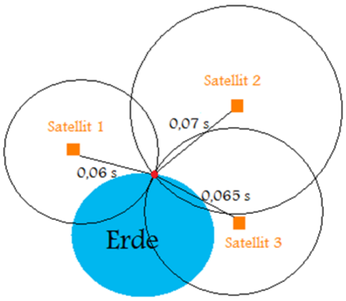
Messung der Position eines bewegten Körpers:

GPS (global positioning system)

26 (38) Satelliten mit genau bekannter Bahn



Aussendung von Signalen mit präziser Zeitmarke



Zeitunterschied beim Auftreffen ermöglicht präzise Berechnung der 3D-Position

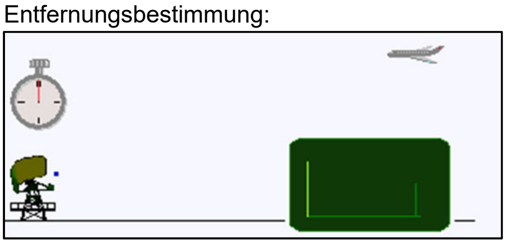
2.1.1. Position

Messung der Position eines bewegten Körpers:

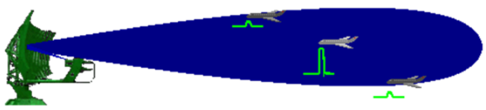
GPS (global positioning system)

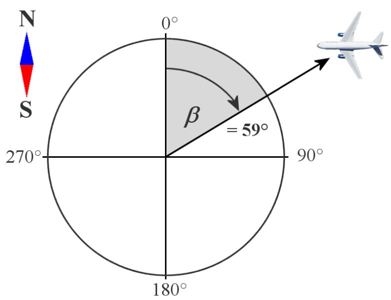
Positionsradar (z.B. Flugsicherung)

Entfernungsbestimmung:



Richtungsbestimmung:





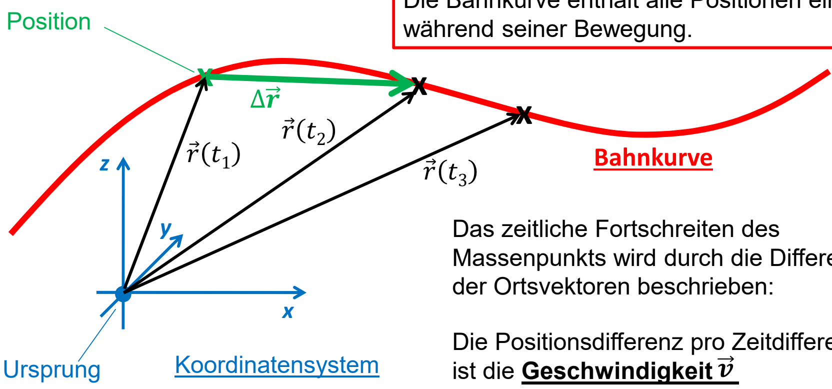
www.radartutorial.eu

2.1.1. Position

Ortsvektor $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

Der Ortsvektor beschreibt die Position eines Massenpunkts relativ zu einem Ursprung zu einem bestimmten Zeitpunkt *t*

Die Bahnkurve enthält alle Positionen eines Massenpunkts während seiner Bewegung.



Das zeitliche Fortschreiten des Massenpunkts wird durch die Differenz der Ortsvektoren beschrieben:

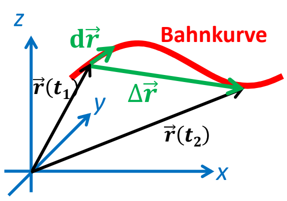
$$\boxed{\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1}$$

Die Positionsdifferenz pro Zeitdifferenz ist die **Geschwindigkeit $\vec{v}$**

$$\vec{v} \approx \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

2.1.2. Geschwindigkeit

Geschwindigkeit $\vec{v} \approx \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ (mittlere Geschwindigkeit)



$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ (momentane Geschwindigkeit)

Die Geschwindigkeit ist die **Änderung der Position pro Zeit**

„Tempo“ (Betrag der Geschwindigkeit): $v = |\vec{v}| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}$

Richtung der Geschwindigkeit: $\vec{e}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ (Einheitsvektor)

Dimension: Länge pro Zeit

SI-Einheit $[v] = \mathrm{m/s}$

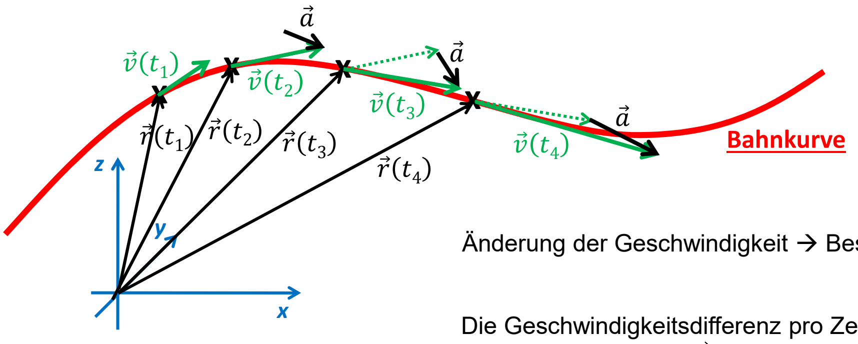
Andere Einheiten:
$1\ \mathrm{km/h} = 1000\ \mathrm{m} / 3600\ \mathrm{s} = 0{,}278\ \mathrm{m/s}$
$1\ \mathrm{mph} = 1609\ \mathrm{m} / 3600\ \mathrm{s} = 0{,}447\ \mathrm{m/s}$
$\mathrm{Mach}\ 1 \approx 343\ \mathrm{m/s}\ (20°\mathrm{C})$

Maximal mögliche Geschwindigkeit: $v \leq c_0 = 299\,792\,458\ \mathrm{m/s}$

2.1.3. Beschleunigung

Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}$

Der Geschwindigkeitsvektor beschreibt die zeitliche Änderung des Ortsvektors



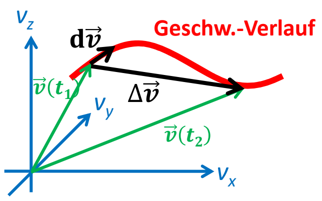
Änderung der Geschwindigkeit → Beschleunigung

Die Geschwindigkeitsdifferenz pro Zeit ist die **Beschleunigung $\vec{a}$** des Massenpunkts $\vec{a} \approx \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}$

Der Beschleunigungsvektor beschreibt die zeitliche Änderung des Geschwindigkeitsvektors

2.1.3. Beschleunigung

Beschleunigung: $\vec{a} \approx \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ (mittlere Beschleunigung)



Geschwindigkeitsraum

$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t}$ (momentane Beschleunigung)

Die Beschleunigung ist die **Änderung der Geschwindigkeit pro Zeit**

Betrag der Beschleunigung: $a = |\vec{a}| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}$

Richtung der Beschleunigung: $\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ (Einheitsvektor)

Dimension: Länge pro Zeit²

Angabe relativ zur Erdbeschleunigung:

z.B. $5\,\mathrm{g} = 5 \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \approx 50\ \mathrm{m/s^2}$

SI-Einheit $[a] = \mathrm{m/s^2}$

Richtungen: $\vec{a} \parallel \vec{v}$: Nur Tempo ändert sich; Richtung von $\vec{v}$ bleibt konstant.

$\vec{a} \perp \vec{v}$: Nur Richtung von $\vec{v}$ ändert sich; Tempo bleibt konstant.

2.1.3. Beschleunigung

Beispiele:

Porsche 918 Spyder

Beschleunigung:
„in 2,7 s von 0 auf 100 km/h“

Im SI: 100 km/h = 27,78 m/s
wird in 2,7 s erreicht

→ a = 10,3 m/s²

Erdbeschleunigung

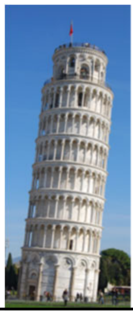
Freie Körper werden auf der Erdoberfläche mit der

Erdbeschleunigung $\boxed{g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}}$

durch die Erdanziehungskraft in Richtung zum "Erdmittelpunkt" beschleunigt.

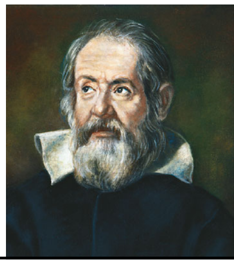
Nach 1 Sekunde freien Falls bewegt sich ein Körper mit

$v = g \cdot t = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot 1\ \mathrm{s} = 9{,}81\ \mathrm{m/s}\ \ (= 35{,}3\ \mathrm{km/h})$



Messung der Erdbeschleunigung

Erstmalig um 1590 in Pisa
Galileo Galilei (1564–1642)



2.1.3. Änderung der Beschleunigung: „Ruck“

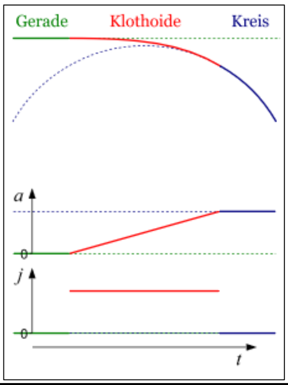
Definition: Ruck $\vec{j}(t) = \dfrac{\mathrm{d}\vec{a}(t)}{\mathrm{d}t}$

Dimension: Länge pro Zeit³

SI-Einheit $[j] = \mathrm{m/s^3}$

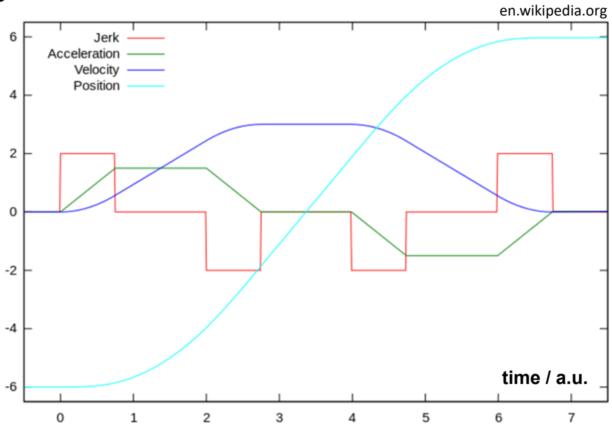
Auftreten: Eisenbahn: Ende des Bremsvorgangs

Lift: Start- und Stop-Phase
Regel: $j \le 2\ \mathrm{m/s^3}$



Quer-Ruck:
Einleiten von Kurven

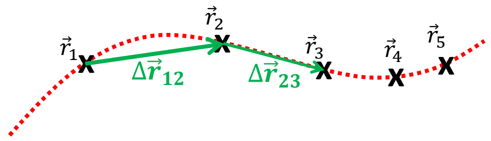
en.wikipedia.org



2.1.4. Zusammenhang von $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ und $\vec{a}(t)$

Die zeitliche Verlauf der Position $\vec{r}$ sei bekannt:

(a) an einzelnen Messpunkten $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$ usw.



Geschwindigkeit: $\vec{v}_{12} \approx \frac{\Delta\vec{r}_{12}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$

Beschleunigung: $\vec{a}_{13} \approx \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_{23} - \vec{v}_{12}}{\Delta t}$

(b) als Funktion $\vec{r}(t)$

Geschwindigkeit: $\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}$

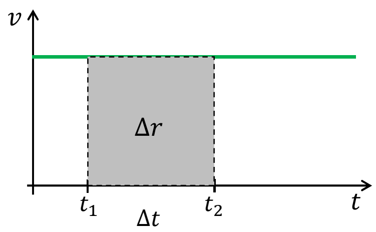
Beschleunigung: $\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2}$

Die **Geschwindigkeit** ist die erste Zeitableitung der **Position**.
Die **Beschleunigung** ist die zweite Zeitableitung der **Position**.

2.1.4. Zusammenhang von $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ und $\vec{a}(t)$

Die zeitliche Verlauf der Geschwindigkeit $\vec{v}$ sei bekannt:

(a) Die Geschwindigkeit ist konstant



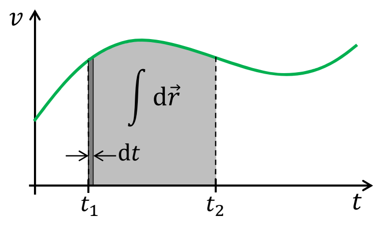
$$\Delta\vec{r} = \vec{v} \cdot \Delta t$$

$$\vec{r}(t_2) = \vec{r}(t_1) + \vec{v} \cdot \Delta t$$

Beispiel: v = 20 m/s, Δt = 4,5 s

→ $\Delta r = v \cdot \Delta t$ = 20·4,5 = 90 m

(a) Die Geschwindigkeit verändert sich



$$\mathrm{d}\vec{r}(t_1) = \vec{v}(t_1) \cdot \mathrm{d}t$$

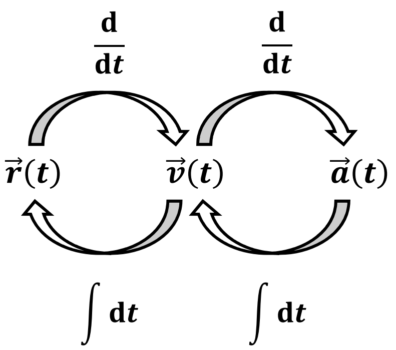
$$\vec{r}(t_2) = \vec{r}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}\vec{r}(t) = \vec{r}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t) \cdot \mathrm{d}t$$

Die **Position** ist das Zeitintegral der **Geschwindigkeit**.

2.1.4. Zusammenhang von $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ und $\vec{a}(t)$

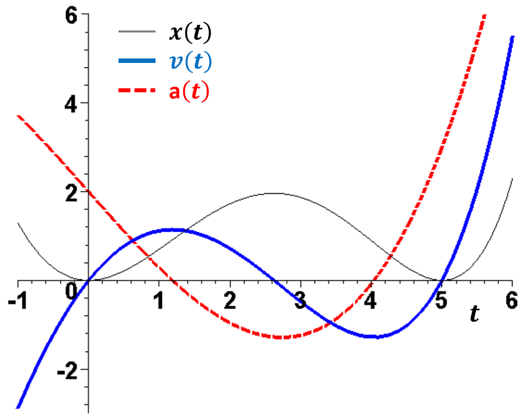
Zusammenfassung:

Momentane Veränderung → **Ableitung!**

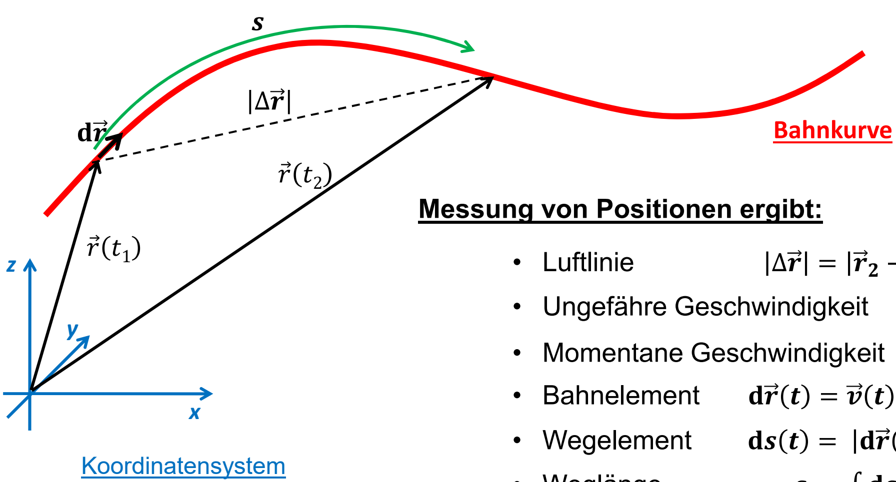


Summe der Änderungen: → **Integral!**

Beispiel:



2.2.1. Beschreibung der Bahnkurve



Messung von Positionen ergibt:

- Luftlinie $|\Delta\vec{r}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$
- Ungefähre Geschwindigkeit $\vec{v}(t) \approx \Delta\vec{r}/\Delta t$
- Momentane Geschwindigkeit $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$
- Bahnelement $\mathrm{d}\vec{r}(t) = \vec{v}(t) \cdot \mathrm{d}t$
- Wegelement $\mathrm{d}s(t) = |\mathrm{d}\vec{r}(t)| = |\vec{v}(t)| \cdot \mathrm{d}t$
- Weglänge $s = \int \mathrm{d}s(t) = \int |\vec{v}(t)| \cdot \mathrm{d}t$
- Bahngeschw. $\bar{v} = s/t = \frac{\int |\vec{v}(t)| \cdot \mathrm{d}t}{t}$

2.2.2. Gleichförmig beschleunigte Bewegung

Sei $\vec{a} = \mathrm{const}$ und bekannt:

Geschwindigkeit:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a} \cdot \mathrm{d}t' = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$$

Geschwindigkeit des Körpers nimmt linear mit der Zeit zu.

Position:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(t') \cdot \mathrm{d}t'$$

$$= \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{\vec{a} \cdot t^2}{2}$$

Zurückgelegte Strecke nimmt ca. quadratisch mit der Zeit zu.

In einer Dimension:

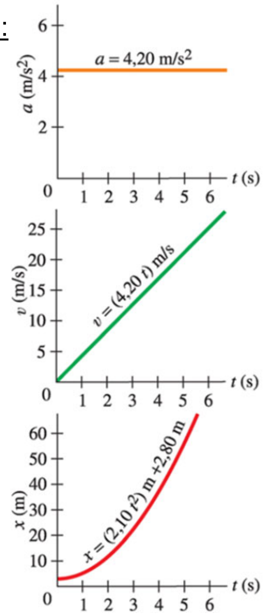
Geschwindigkeit:

$$v(t) = v_0 + a \cdot t$$

Position:

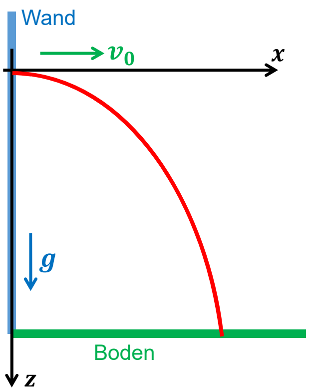
$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$$

Beispiel:



2.2.2. Gleichförmig beschleunigte Bewegung

In zwei Dimensionen: Beispiel „waagrechter Wurf“



Anfangsbedingungen:

$x_0 = 0 \quad v_{x0} = v_0 \quad a_x \equiv 0$

$z_0 = 0 \quad v_{z0} = 0 \quad a_z = g = const$

Grundsatz: Die Bewegungen in x-, y- und z- Richtung sind völlig unabhängig und beeinflussen einander nicht.

Geschwindigkeit:

$v_x = v_0 = const \qquad v_z = g \cdot t$

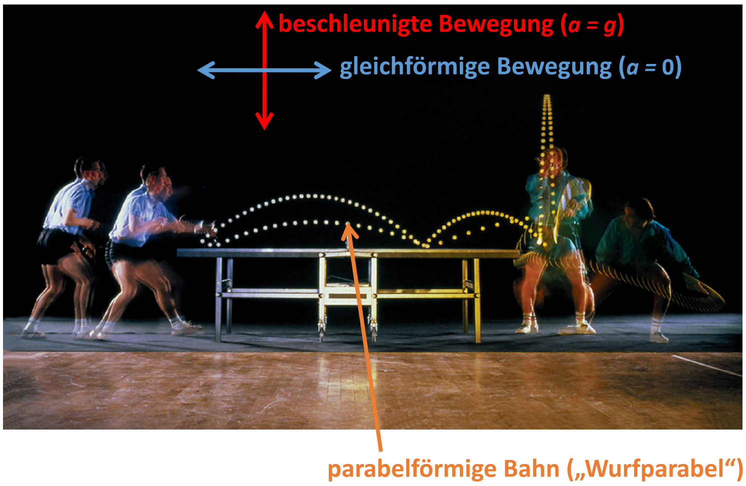
Position:

$x = v_0 \cdot t \qquad z = \frac{g \cdot t^2}{2} \qquad z = \frac{g}{2 \cdot {v_0}^2} \cdot x^2$

„Wurfparabel“

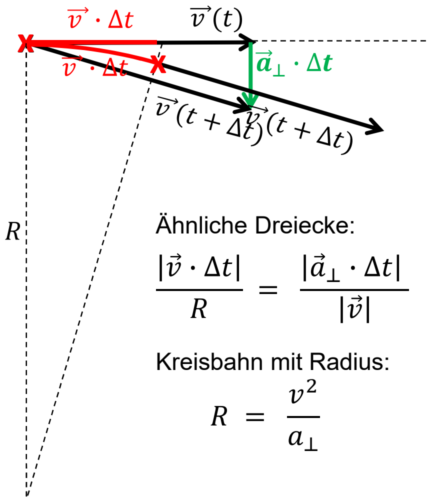
2.2.2. Gleichförmig beschleunigte Bewegung

Überlagerte Bewegungen in mehreren Dimensionen



2.2.2. Normalbeschleunigung

Die Normalbeschleunigung $\vec{a}_\perp$



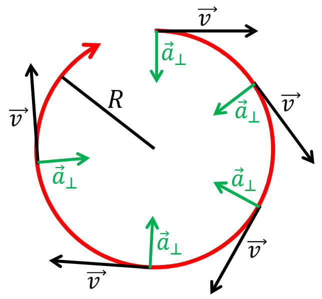
Ähnliche Dreiecke:

$$\frac{|\vec{v}\cdot\Delta t|}{R} = \frac{|\vec{a}_\perp\cdot\Delta t|}{|\vec{v}|}$$

Kreisbahn mit Radius:

$$R = \frac{v^2}{a_\perp}$$

Konstante Normalbeschleunigung $\vec{a}_\perp$ führt zu Bewegung auf einer Kreisbahn mit Radius R



Umgekehrt:

Bewegung auf einem Kreisbogen benötigt die Normalbeschleunigung $a_{ZP} = \frac{v^2}{R}$

Man nennt diese Beschleunigung **Zentripetalbeschleunigung a_{ZP}**