5 Drehbewegungen

In diesem Kapitel betrachten wir Drehbewegungen. Dazu gehören einerseits länger andauernde Rotationen, wie sie z. B. bei den Rädern von Fahrzeugen oder in Maschinen vorkommen. Andererseits beschreiben wir hier auch Hebelbewegungen, die immer dann aufreten, wenn ein Punkt eines Körpers drehbar befestigt ist – z. B. gehört ein Großteil der Bewegungsmöglichkeiten des menschlichen Körpers zu diesem Typ.

5.1 Rotationsdynamik

Im Kap. 3 haben wir die Dynamik von Körpern beschrieben, haben uns aber im Wesentlichen auf Punktmassen konzentriert (Körper ohne nennenswerte Ausdehnung) und auf Fälle, bei denen die Kräfte „auf den ganzen Körper gleich" wirken, sodass man immer den Schwerpunkt als „Angriffspunkt" aller Kräfte verwenden kann.

Hier betrachten wir nun ausgedehnte starre Körper. Mit „ausgedehnt" ist gemeint, dass die räumliche Ausdehnung explizit eine Rolle spielt, und „starr" bedeutet, dass die einzelnen Punkte des Körpers unverrückbar konstante Abstände haben.

5.1.1 Die Beschreibung von Drehbewegungen

Zur „Rotationskinetik", also zur Beschreibung von Drehbewebungen wird ein Satz von Variablen verwendet, der ganz analog zu den Variablen der bisher beschriebenen Translationsbewegungen ist.

(A) Winkel

Der Winkel wird in der Physik wie auch im täglichen Leben in der Einheit Grad gemessen. Sobald Winkel aber in Formeln und Beziehungen eingesetzt werden, verwendet man sie fast ausschließlich im **Bogenmaß**. Dazu wird ein Winkel durch die Länge l_B jenes Kreisbogens definiert, der den Winkel außen abschließt:

Winkel im Bogenmaß: $$\varphi = \frac{l_B}{r} \qquad \big(\text{engl. } \textit{angle}\big) \tag{5.1}$$

Dimension: $\dim\big(\varphi\big) = 1 \quad \big(\text{dimensionslos}\big)$

Einheit: $[\varphi] = 1\,\mathrm{rad} \quad \big(\text{Radiant}\big)$

Dabei ist r der Radius des Kreises, entlang dessen der Kreisbogen gezeichnet wird. Die Definition wird oft auf einen „Einheitskreis" bezogen: Das ist ein Kreis, dessen Radius die Länge $r = 1$ hat, was $1\,\mathrm{m}$ bedeuten kann oder jede beliebige andere Einheit. Dann ist der Winkel genau die Maßzahl der Bogenlänge.

Winkel werden meist mit griechischen Kleinbuchstaben angegeben. Im Bogenmaß muss eigentlich keine Einheit genannt werden, da der Winkel ja dimensionslos ist. Es empfiehlt sich aber dennoch, die Einheitenangabe „rad“ konsequent anzuschreiben. Wenn der Winkel in Grad angegeben wird, muss die Einheit angegeben werden (z. B. $\alpha = 5°$, englisch auch „deg“ für *degrees*).

Ein Vollwinkel (360°, einmal im Kreis herum) hat die Größe $\varphi = 2\,\pi\,\mathrm{rad}$, weil die Bogenlänge dann ja genau dem Kreisumfang $U = 2\,r \cdot \pi$ entspricht. Dementsprechend ist ein Halbwinkel $\varphi = \pi\,\mathrm{rad} = 180°$ und ein rechter Winkel $\varphi = \pi/2\,\mathrm{rad} = 90°$. Bei solchen Winkeln ist es üblich, die Größe wie hier mit dem Symbol π zu schreiben und keine Zahlen einzusetzen: $3\,\pi/2\,\mathrm{rad}$ ist anschaulicher als $4,712\,\mathrm{rad}$.

Sehr kleine Winkel werden im Bogenmaß als mrad und μrad angegeben. Hier hat man den Vorteil, dass Winkelfunktionen einfach genähert werden können:

$$\text{Für kleine Winkel im Bogenmaß:} \qquad \sin\varphi \;=\; \tan\varphi \;=\; \varphi$$

Diese Näherung kann oft verwendet werden, um Gleichungen zu vereinfachen, weil man damit Winkelfunktionen los wird. Umgekehrt kann man mit dieser Näherung einen kleinen Winkel ganz leicht mit verschiedenen Längen in Verbindung bringen: Zwei Strahlen, die mit einem Winkel von $\varphi = 3\,\mathrm{mrad}$ starten, sind nach einer Strecke von $L = 1\,\mathrm{m}$ um $L \cdot \varphi = 3\,\mathrm{mm}$ getrennt.

Bei der Beschreibung von Drehbewegungen dient der Winkel zur Beschreibung, wie weit sich ein Körper bereits gedreht hat. Man spricht in in diesem Zusammenhang von der

$$\textbf{Winkelposition:} \qquad \varphi(t) \qquad\qquad [\varphi(t)] = \mathrm{rad}$$

Beachten Sie, dass die Winkelposition die Drehung eines ganzen Körpers in gleicher Weise beschreibt: Jeder Punkt des Körpers hat sich in einem bestimmten Moment t um denselben Winkel $\varphi(t)$ weitergedreht.

Die Winkelkoordinaten werden bei Drehbewegungen immer so gewählt, dass der Koordinatenursprung auf der momentanen Drehachse liegt. Der Nullpunkt und die Richtung des Winkels müssen definiert werden. Im zweidimensionalen Fall wählt man oft die Richtung der x-Achse als Winkel-Nullpunkt und misst die Winkelposition von dort weg im Gegenuhrzeigersinn.

Wenn wir einen Punkt betrachten, der im Radius r rotiert, können wir mit Hilfe der Winkelposition $\varphi(t)$ den Weg $s(t)$ angeben, den dieser Punkt zurückgelegt hat: Dieser Weg entspricht genau der Bogenlänge

$$\textbf{zurückgelegter Weg (Bogenlänge):} \qquad s(t) \;=\; \varphi(t) \cdot r \tag{5.2}$$

Dieser Weg ist natürlich für jeden Punkt eines rotierenden Körpers anders und taugt daher nicht zur allgemeinen Beschreibung der Drehbewegung.

(B) Winkelgeschwindigkeit

Die Drehgeschwindigkeit eines rotierenden Körpers könnte über die Geschwindigkeit v eines bestimmten Punktes auf dem Körper festgelegt werden. Das gilt dann aber nur für diesen einen Punkt und ist keine allgemeine Aussage. Man beschreibt die Drehgeschwindigkeit also mit dem Fortschreiten der Winkelposition $\varphi(t)$, weil dies für den ganzen Körper in gleicher Weise gilt. Man erhält die wichtige Größe

$$\textbf{Winkelgeschwindigkeit:} \qquad \omega \;=\; \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \qquad \big(\text{engl. } \textit{angular velocity}\big) \tag{5.3}$$

$$\text{Dimension:} \qquad \dim\big(\omega\big) \;=\; \frac{\text{Winkel}}{\text{Zeit}}$$

$$\text{Einheit:} \qquad [\varphi] \;=\; 1\,\text{rad/s} \quad \big(\text{oder } \; \text{s}^{-1}\,\big)$$

Die Winkelgeschwindigkeit gibt an, welcher Winkel (in Radiant) pro Sekunde zurückgelegt wird. Die Angabe $\omega = 1,57\,\text{rad/s}$ bedeutet zum Beispiel, dass pro Sekunde eine Vierteldrehung erfolgt ($1,57\,\text{rad} = \pi/2\,\text{rad} = 90°$). Die Winkelgeschwindigkeit wird immer in rad/s angegeben (nicht in Grad pro Sekunde).

In dieser Definition ist ω ein **Skalar**, der die zeitliche Veränderung der Winkelposition beschreibt. Die Richtung der Drehung ergibt sich aus der Definition der Winkelkoordinaten. Wie bei anderen differenziellen Größen kann anstelle der Zeitableitung (momentane Winkelgeschwindigkeit) auch ein mittlerer Wert über ein bestimmte Zeitintervall Δt angegeben werden: $\bar{\omega} = \Delta\varphi/\Delta t$.

Wenn Drehbewegungen in drei Dimensionen behandelt werden, wird die Winkelgeschwindigkeit besser als **Vektor** $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{e}_\omega$ angegeben:

- Der Betrag $\omega = |\vec{\omega}|$ gibt an, wie schnell sich die Winkelposition verändert.
- Der Einheitsvektor $\vec{e}_\omega$ ist entlang der Drehachse orientiert, also genau aus der Drehebene hinaus.
- Die Richtung des Einheitsvektors $\vec{e}_\omega$ gibt den Drehsinn um die Achse an und wird mit der „rechte-Hand-Regel“ bestimmt: Wenn der Daumen der halb geöffneten rechten Hand in Richtung dieses Vektors zeigt, dann geben die vier übrigen Finger die Drehrichtung an.

Aus der Winkelgeschwindigkeit kann man für jeden Punkt auf dem rotierenden Körper seine Geschwindigkeit v berechnen, wenn man seinen Abstand r zur Drehachse kennt:

$$\textbf{Bahngeschwindigkeit:} \qquad v(t) \;=\; \omega(t) \cdot r \;=\; \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{5.4}$$

Im dreidimensionalen Fall wird dieser Zusammenhang vektoriell angegeben. Dazu wird noch der Radiusvektor $\vec{r}$ benötigt, der immer von der Achse zum betrachteten Punkt zeigt. Die Bahngeschwindigkeit wird dann als Vektor-Kreuzprodukt berechnet

$$\vec{v}(t) \;=\; \vec{\omega}(t) \times \vec{r} \qquad \big(\text{oder umgekehrt: } \vec{\omega}(t) \;=\; \vec{r} \times \vec{v}(t)\big) \tag{5.5}$$

Die Richtungen dieser Vektoren hängen – wie immer beim Vektor-Kreuzprodukt – über die Dreifingerregel zusammen:

- $\vec{v}$: Daumen der rechten Hand (Ergebnis)
- $\vec{\omega}$: Zeigefinger der rechten Hand (erster Multiplikand)
- $\vec{r}$: Mittelfinger der rechten Hand (zweiter Multiplikand)

Beachten Sie, dass das Vorzeichen des Ergebnisses von Gleichung (5.5) nur dann verlässlich richtig herauskommt, wenn Folgendes richtig gemacht wird;

- Die Multiplikanden in Gleichung (5.5) stehen in der richtigen Reihenfolge
- Die Multiplikandenvektoren haben das korrekte Vorzeichen
- Das verwendete Koordinatensystem ist ein Rechtssystem (siehe S. 14)

Aus Kap. 3.2.6 wissen wir, dass sich Materie mit der Masse m nur um die Kurve bewegen kann, wenn eine hinreichend starke Zentripetalkraft F_{zp} vorhanden ist, die bei rotierenden Körpern in der Regel von statischen Kräften aufgebracht wird. Wir können die Zentripetalkraft auch mit Hilfe der Winkelgeschwindigkeit ausdrücken:

$$\text{Zentripetalbeschleunigung:} \quad a_{\text{ZP}} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r \tag{5.6}$$

$$\text{Zentripetalkraft:} \quad F_{\text{ZP}} = m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot \omega^2 \cdot r \tag{5.7}$$

Zentripetalbeschleunigung und Zentripetalkraft können auch als Vektoren angegeben werden, die genau zur Drehachse zeigen. Man muss also die oben angegebenen Beziehungen mit dem Einheitsvektor $-\vec{e}_r$ multiplizieren.

Die Winkelgeschwindigkeit wird vor allem zur Beschreibung länger andauernder Rotationsbewegungen verwendet. Hier sind auch noch andere Größen üblich:

- Die Frequenz ν gibt bei kontinuierlichen Drehbewegungen an, wie viele volle Umdrehungen pro Sekunde stattfinden (ν ist ein griechischer Buchstabe, sprich *„nü“*). Weil eine volle Umdrehung dem Winkel $\varphi = 2\pi\,\text{rad}$ entspricht, können wir die Frequenz mit der Winkelgeschwindigkeit verknüpfen:

$$\textbf{Frequenz:} \quad \nu = \frac{\omega}{2\,\pi\,\text{rad}} \qquad \big(\text{engl. } \textit{frequency}\big) \tag{5.8}$$

$$\text{Dimension:} \quad \dim\big(\nu\big) = \frac{1}{\text{Zeit}}$$

$$\text{Einheit:} \quad [\nu] = 1\,\text{Hz} = 1/\text{s} \qquad \big(\text{Hertz}\big)$$

Die Frequenz wird nicht nur bei Drehbewegungen, sondern allgemein bei periodischen Vorgängen dazu verwendet anzugeben, wie viele dieser Vorgänge pro Sekunde stattfinden.
Beachten Sie, dass die Winkelgeschwindigkeit ω in diesem Zusammenhang oft als „Kreisfrequenz“ bezeichnet wird. Dieser Begriff darf nicht mit der Größe Frequenz verwechselt werden – es handelt sich um verschiedene Größenarten mit verschiedener Dimension (Winkel pro Sekunde bzw. Umdrehungen pro Sekunde). Es ist daher sehr ratsam, ω immer in „rad/s“ anzugeben und ν in „Hz“ – dies wird in der Literatur nicht überall konsequent gemacht.

- Die Periodendauer T gibt an, wie lange eine volle Umdrehung dauert:

$$\textbf{Periodendauer:} \qquad T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\,\pi\,\mathrm{rad}}{\omega} \qquad \big(\text{engl. } \textit{period}\big) \tag{5.9}$$

$$\text{Dimension:} \quad \dim\big(T\big) = \text{Zeit} \qquad \text{Einheit:} \quad [T] = 1\,\mathrm{s}$$

  Auch diese Größe wird bei periodisch wiederkehrenden Prozessen dafür verwendet anzugeben, wie lange ein ganzer Vorgang („1 Periode") dauert.

In manchen Fällen verwendet man die Winkelgeschwindigkeit auch zur Beschreibung der gekurvten Bahn eines Körpers. Dazu kann man in jedem Moment einen Kreisbogen an die Bahn anpassen und dessen Radius $r(t)$ bestimmen. ω wird dann mit der bekannten Geschwindigkeit $v(t)$ aus der Gleichung (5.4) ermittelt: $\omega(t) = v(t)/r(t)$.

(C) Winkelbeschleunigung

Wenn sich die Drehgeschwindigkeit verändert, gibt man – ganz analog zu den Translationsbewegungen – die zeitliche Änderung der Winkelgeschwindigkeit ω an:

$$\textbf{Winkelbeschleunigung:} \qquad \alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} \qquad \big(\textit{angular acceleration}\big) \tag{5.10}$$

$$\text{Dimension:} \quad \dim\big(\alpha\big) = \frac{\text{Winkel}}{\text{Zeit}^2}$$

$$\text{Einheit:} \quad [\alpha] = 1\,\mathrm{rad/s^2} \quad \big(\text{oder } \mathrm{s^{-2}}\big)$$

Auch diese Größe wird zur Beschreibung von Rotation in drei Dimensionen oft als Vektor angegeben: $\vec{\alpha} = \alpha \cdot \vec{e}_\alpha$. Solange die Rotation in einer konstanten Ebene bleibt (feste Achse), zeigt dieser Vektor in Achsrichtung und gibt an, um wieviel der Vektor der Winkelgeschwindigkeit (der ja auch in Achsrichtung zeigt) pro Sekunde länger oder kürzer wird.

Wenn sich während der Rotation die Drehachse verändert (z. B. bei einem taumelnden Kreisel, siehe später), dann hat α eine Komponente normal zu ω, mit der diese Änderung der Achse beschrieben wird.

Aus der Winkelbeschleunigung kann man für jeden Punkt auf dem rotierenden Körper die longitudinale Beschleunigung a berechnen, wenn man den Abstand r des Punktes zur Drehachse kennt:

$$\textbf{Bahnbeschleunigung:} \qquad a(t) = \alpha(t) \cdot r = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} \tag{5.11}$$

$$\text{dreidimensional:} \qquad \vec{a}(t) = \vec{\alpha}(t) \times \vec{r} \tag{5.12}$$

Beachten Sie, dass diese Bahnbeschleunigung nur die Parallelkomponente der Beschleunigung beschreibt, die aufgrund des Schneller- oder Langsamerwerdens der Drehbewegung zustande kommt oder durch die Veränderung der Drehachse.

Diese Beschleunigung hat nichts mit der Zentripetalbeschleunigung a_{zp} zu tun (Gleichung (5.6)), die immer zur Drehachse hin gerichtet ist und wirken muss, damit der betrachtete Massenpunkt auf der gekrümmten Bahn bleibt.

5.1.2 Drehmoment und Trägheitsmoment

Wir haben im Kap. 3.1.2 das zweite Newtonsche Prinzip formuliert, nach dem eine Änderung des Bewegungszustands einer Masse nur durch die Wirkung einer Kraft möglich ist. Dies gilt natürlich auch für Drehbewegungen: Ohne Kraft keine Bewegungsänderung. Es zeigt sich aber, dass es kompliziert ist, Rotationsbewegungen mit dem Formalismus aus dem Kap. 3 zu beschreiben und zu berechnen. Deshalb werden hier neue, passende Größen eingeführt, um die Beschreibung zu vereinfachen.

(A) Die Bewegungsgleichung der Rotation

Als erstes Beispiel für Drehbewegungen beschreiben wir die Dynamik eines ganz einfachen starren Körpers mit der Masse M:

Wir betrachten eine masselose Stange (Länge $L = 2\,R$), an deren beiden Enden jeweils eine punktförmige Masse $m = M/2$ befestigt ist. „Masselos“ bedeutet hier, dass die Masse der Stange im Vergleich zu den Punktmassen vernachlässigbar ist, und „punktförmig“ heißt, dass die Ausdehnung der Massen gegenüber der Länge der Stange keine Rolle spielt. Der Körper sei genau an seinem Schwerpunkt (also in der Mitte der Stange) an einer festen Achse befestigt, so dass er sich zwar drehen, aber nicht fortbewegen kann. Wir nehmen nun an, dass dieser Körper anfangs in Ruhe ist und dann eine Kraft $\vec{F}$ auf eine der beiden Massen wirkt. Was dadurch passiert, hängt von der Richtung dieser Kraft ab:

Wenn die Kraft genau radial in Richtung der Stange wirkt, gibt es keinerlei Bewegung: Die Kraft $\vec{F}$ wirkt entlang der Stange auf die Achse und wird dort von einer statischen Gegenkraft $-\vec{F}$ kompensiert.

Auch wenn die Kraft $\vec{F}$ genau normal auf die Verbindungsstange an einer der Massen angreift, kann sich der Körper im Gesamten nicht fortbewegen: Die „angegriffene“ Masse bewegt sich in die Kraftrichtung, die andere aber genau in die Gegenrichtung. In Summe wird der Körper also nicht beschleunigt, zumindest nicht so, wie wir das aus der Bewegungsgleichung (3.1) erwarten würden („eine Kraft $\vec{F}$ erzeugt eine Beschleunigung $\vec{a}$ in Richtung der Kraft“). Eine geradlinige Beschleunigung des Körpers wird wieder durch die Gegenkraft $-\vec{F}$ verhindert, die an der Achse angreift.

Gleichzeitig wissen wir, dass der Körper durch die angelegte Kraft in Drehung versetzt wird. Beide Massen (also insgesamt $2 \cdot M/2 = M$) werden durch die Kraft $\vec{F}$ in Bewegung versetzt, also wirkt auf jede der beiden Massen die Beschleunigung $a = F/M$. Die Drehung der beiden Massen hat den Radius $R = L/2$, sodass wir uns mit der Gleichung (5.11) die Winkelbeschleunigung ausrechnen können:

$$\alpha = \frac{a}{r} = \frac{F}{M \cdot R} \tag{5.13}$$

Wenn man die Situation genauer untersucht, stellt man Folgendes fest:

- Wenn die gleiche Kraft $\vec{F}$ an einer anderen Stelle der Stange angreift, nämlich im Abstand r_F von der Achse anstelle R, dann ist die Winkelbeschleunigung proportional zu diesem Abstand:

$$\alpha \propto F \cdot r_F$$

- Wenn die Kraft $\vec{F}$ an einer festen Position an der Stange angreift, aber beide Massen entlang der Stange an den Abstand r_m von der Achse verschoben werden, sinkt die Winkelbeschleunigung proportional zum Quadrat dieses Abstands:

$$\alpha \propto \frac{1}{M \cdot {r_m}^2}$$

- Wenn die Kraft $\vec{F}$ schräg angreift (im Winkel $\beta > 0°$ zur Normalen auf die Stange), dann teilt sich ihre Wirkung auf: Der Anteil $F \cdot \sin\beta$ wirkt entlang der Stange und wird von einer Gegenkraft an der Achse kompensiert, und nur der Anteil $F \cdot \cos\beta$ treibt die Drehung an.

Wenn man diese Befunde zusammenführt, kann die Gleichung (5.13) neu formuliert werden:

$$\textbf{Bewegungsgleichung der Rotation:} \qquad I \cdot \vec{\alpha} = \vec{D} \tag{5.14}$$

$$\begin{array}{lllll} \text{mit} & I \ldots \text{Trägheitsmoment} & \text{Hier:} & I = M \cdot {r_M}^2 \\ & \vec{D} \ldots \text{Drehmoment} & \text{Hier:} & \vec{D} = \vec{r}_F \times \vec{F} \end{array}$$

Diese Gleichung ist von der Struktur her genau gleich wie die Newtonsche Bewegungsgleichung für Translationsbewegungen: Das Drehmoment $\vec{D}$ ist hier die Größe, die die Stärke des Antriebs beschreibt (wie die Kraft $\vec{F}$ bei Newton). Das Trägheitsmoment I gibt an, wie sehr sich das System durch seine Trähgheit gegen die Änderung des Bewegungszustands „wehrt“, wie die träge Masse m bei der Translation. Die Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha}$ beschreibt schließlich die Reaktion des Systems, nämlich die Veränderung der Rotationsgeschwindigkeit, analog zur Beschleunigung $\vec{a}$ im linearen Fall.

Die Größen $\vec{D}$ und I werden in den folgenden Abschnitten im Detail besprochen.

(B) Das Drehmoment

Immer dann, wenn zwei Kräfte $\vec{F_1}$ und $\vec{F_2} = -\vec{F}$ auf einen Körper wirken, die also gleichen Betrag haben, aber genau entgegengesetzt gerichtet sind, und wenn diese Kräfte nicht entlang einer Linie wirken, dann nennt man die beiden Kräfte ein **Kräftepaar**.

Ein solches Kräftepaar entsteht erstens dann, wenn eben zwei gleich große Kräfte von außen entgegengesetzt an einem Körper angreifen (z. B. wenn Sie einen Stift zwischen zwei Fingern rollen). Viel öfter kommt es aber vor, dass eine Kraft, die auf einen Körper einwirkt, zwar kompensiert wird, aber nicht entlang ihrer Wirkungslinie. Dann spielt die Kompensationskraft die Rolle der zweiten Kraft und wir haben wieder ein

Kräftepaar (Beispiel: Wenn Sie oben an einem stehenden Körper anschieben, bildet die Haftreibungskraft am Boden des Körpers die zweite Kraft des Kräftepaars).

Ein Kräftepaar führt nicht zu einer geradlinigen Beschleunigung $\vec{a}$ des Körpers, weil sich die beiden Kräfte ja in Summe genau kompensieren. Wie im Beispiel oben entsteht aber eine Drehbewegung, die durch das Kräftepaar angetrieben wird. Wie Sie aus eigener Anschauung wissen, wird die Drehung umso leichter angetrieben, je weiter die beiden Kräfte voneinander entfernt angreifen oder genauer gesagt: je größer der Abstand der Wirkungslinien der beiden Kräfte ist.

Es gibt zwei Möglichkeiten, diesen Abstand in die Rechnung einzubringen:

- Wir definieren einen Vektor $\vec{r}_{21}$ von der Wirkungslinie der Kraft $\vec{F}_2$ zur Wirkungslinie der ersten Kraft $\vec{F}_1$.
- Wir bestimmen den Normalabstand l zwischen den parallelen Wirkungslinien der beiden Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ (das ist dann ein Skalar).

Damit können wir die Größe Drehmoment definieren:

Drehmoment: vektoriell: $$\vec{D} = \vec{r}_{21} \times \vec{F}_1 \qquad \big(\text{engl. } \textit{torque}\big) \tag{5.15}$$

skalar: $$D = l \cdot F \tag{5.16}$$

$$\text{Dimension:} \quad \dim\big(D\big) = \text{Weg} \times \text{Kraft}$$

$$\text{SI-Einheit:} \quad [D] = 1\,\text{N} \cdot \text{m} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2} \qquad \big(\text{sprich: „Newtonmeter“}\big)$$

Beachten Sie Folgendes:

- Leider ist kein einheitliches Symbol für das Trägheitsmoment in Gebrauch. In der englischsprachigen Literatur findet sich oft $\vec{\tau}$, auf Deutsch neben $\vec{D}$ oft auch $\vec{M}$.
- Die Dimension des Drehmoments ist (zufällig!) gleich wie die der Energie. Es handelt sich aber um verschiedene Größenarten! Wir dürfen also niemals E und D vergleichen, addieren etc. Ebenso darf niemals die Energieeinheit Joule für das Drehmoment verwendet werden (obwohl die SI-Basiseinheiten gleich sind).
- Obwohl ein Kräftepaar wirkt, wird zur Berechnung der Drehmoments nur eine der beiden Kräfte eingesetzt.
- Achten Sie bei der vektoriellen Definition (Gleichung (5.15)) akribisch auf Richtungen und Reihenfolgen! Erster Multiplikand ist der Vektor $\vec{r}_{21}$ zwischen den beiden Kraftlinien, zweiter Multiplikand ist jene Kraft zu deren Wirkungslinie der dieser Abstandsvektor zeigt.
- Der Vektor $\vec{r}_{21}$ muss von der Wirkungslinie der zweiten Kraft zur Wirkungslinie jener Kraft hinführen, die dann im Kreuzprodukt eingesetzt wird. Wie der Vektor zwischen den Kraftlinien liegt (schräg oder genau normal) ist egal, weil es im Kreuzprodukt ohnehin nur auf die Normalkomponente ankommt. Oft wird es so gemacht, dass dieser Vektor die „Angriffspunkte“ der beiden Kräfte verbindet.

- Der Drehmoment-Vektor $\vec{D}$ zeigt aus der Drehebene hinaus. Wenn der Daumen der rechten Hand in Richtung des Vektors $\vec{D}$ zeigt, ergeben die übrigen Finger die Richtung der dadurch bewirkten Winkelbeschleunigung („rechte-Hand-Regel“, wie immer beim Kreuzprodukt).

Die Größe Drehmoment spielt in der Technik eine enorme Rolle. So liefern fast alle Motoren Kraft in Form von Rotation, sodass vorerst immer ein bestimmtes Drehmoment zur Verfügung steht (siehe Abschnitt 5.3).

(C) Das Hebelgesetz

Wenn ein länglicher Körper (z. B. eine Stange etc.) um eine Achse drehbar ist, kann er als Hebel verwendet werden. Wir gehen davon aus, dass alle wirkenden Kräfte durch Gegenkräfte an der Achse kompensiert werden, sodass keine Translation einsetzen kann.

Dann führt jede Kraft, die auf den Hebel wirkt, zu einem Kräftepaar, also zu einem Drehmoment $\vec{D}$, das den Hebel um die Achse zu drehen beginnt. Bei mehreren Kräften erzeugt jede von ihnen ein Drehmoment, die man alle addieren kann, um das Gesamtdrehmoment $\vec{D}_{\text{ges}}$ zu ermitteln. Wenn $\vec{D}_{\text{ges}} = 0$, ändert sich der Rotationszustand des Hebels nicht: Er bleibt in Ruhe oder dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit.

Das ist genau die Situation, für die das Hebelgesetz formuliert wird: Wenn eine Last (Masse M_L, also Schwerkraft $F_L = M_L \cdot g$) an einer Stelle des Hebels befestigt ist (im Abstand R_L von der Achse), die mit Hilfe einer Kraft F (im Abstand R_F von der Achse) gehalten oder hochgehoben werden soll, dann müssen sich in erster Linie die beiden Drehmomente kompensieren. Wenn somit Gleichgewicht hergestellt ist, reicht ein infinitesimaler Drehmomentüberschuss auf einer Seite, um die Last kontrolliert aufzuheben oder hinunterzulassen. Wir nehmen vorerst an, dass die beiden Kräfte normal auf die Hebelstange angreifen. Dann gilt die vereinfachte skalare Form

$$\begin{aligned} D_F \;=\; D_L \qquad \rightarrow \qquad F \cdot R_F \;&=\; F_L \cdot R_L \qquad \big(\text{Hebelgesetz, vereinfacht}\big) \\ \text{Kraft x Kraftarm} \;&=\; \text{Last x Lastarm} \end{aligned} \tag{5.17}$$

Dabei spielt es keine Rolle, ob Last und Kraft auf derselben Seite der Achse wirken (dann muss die Kraft F nach oben zeigen) oder auf der entgegengesetzten Seite angreifen (dann zeigen beide Kräfte nach unten): In jedem Fall muss die aktive Kraft F ein Drehmoment D_F erzeugen, das genau das Last-Drehmoment D_L aufhebt.

Im allgemeineren Fall, wenn die beiden Kräfte nicht unbedingt normal auf die Hebelstange angreifen, formulieren wir das Hebelgesetz als Gleichgewicht der vektoriellen Drehmomente:

$$\text{Hebelgesetz:} \qquad \vec{R}_F \times \vec{F} + \vec{R}_L \times \vec{F}_L \;=\; 0 \tag{5.18}$$

Dabei werden die Vektoren $\vec{R}_F$ und $\vec{R}_F$ jeweils von der Achse zum Angriffspunkt der Kraft eingezeichnet.

Wenn eine Last mittels Hebel bewegt wird, muss die eingesetzte Arbeit W_F betragsmäßig gleich sein wie jene Arbeit W_L, die an der Last geleistet wird. Das Vorzeichen ist unterschiedlich, weil die eingesetzte Kraft $\vec{F}$ und deren Weg $\vec{s}_F$ in dieselbe Richtung gehen, die Last hingegen entgegen der Kraftwirkung bewegt wird:

$$W_F + W_L \;=\; 0 \qquad \rightarrow \qquad \vec{F} \cdot \vec{s}_F \;=\; -\vec{F}_L \cdot \vec{s}_L \tag{5.19}$$

Wenn also mit dem Hebel eine schwere Last mit reduzierter Kraft $\vec{F}$ gehoben werden kann, dann muss mit dieser Kraft ein deutlich größerer Weg s_F zurückgelegt werden als jener Weg s_L, um den sich die Last bewegt: „Kleine Kraft erfordert großen Weg“.

Hebel sind als Werkzeug seit Jahrtausenden in Gebrauch und haben es z. B. schon in prähistorischer Zeit ermöglicht, schwere Steinblöcke zu bewegen. Auch heute sind viele Werkzeuge so gebaut, dass sie die „Kraftverstärkung“ durch Hebel verwenden, z. B. Zangen, Schraubenschlüssel, Flaschenöffner, Wagenheber, Schubkarren und viele andere mehr.

Der Bewegungsapparat im menschlichen Körper funktioniert ausschließlich über Drehbewegungen, die durch die Kontraktion von Muskeln erzeugt werden. Für jede mögliche Bewegung sind also zwei Muskeln vorhanden, nämlich ein Beuge- und ein Streckmuskel. Bei den Hebeln im Körper ist der Lastarm wesentlich größer als der Kraftarm. Die Muskeln müssen also deutlich mehr Kraft aufbieten als für die Last real zur Verfügung steht. Dies ist deshalb vorteilhaft, weil für Muskeln nur vergleichsweise kurze Kontraktionswege s_F möglich sind.

(D) Das Trägheitsmoment

Das Trägheitsmoment I ist das Maß dafür, wie sehr sich die Trägheit eines Körpers dem Ingangsetzen einer Drehbewegung entgegensetzt. Neben der Masse und Form des Körpers ist dafür ganz entscheidend, um welche Achse der Körper gedreht werden soll. Man kann also für keinen Körper von vorne herein das Trägheitsmoment angeben (so wie man z. B. seine Masse angibt), solange nicht bekannt ist, wie er sich drehen soll.

Oben haben wir in der Gleichung (5.14) schon formuliert, dass für eine Punktmasse m im Normalabstand R von einer Drehachse immer gilt

$$\text{Trägheitsmoment einer Punktmasse:} \qquad I \;=\; m \cdot R^2 \tag{5.20}$$

Wir sehen, dass sich der Trägheits-Widerstand gegen Rotation linear mit der Masse m und quadratisch mit dem Drehradius R verändert.

Aus dieser Beziehung kann man die Trägheitsmomente beliebiger Körper berechnen, wenn man den inneren Aufbau des Körpers genau kenn: Man zerlegt den Körper im Geist in infinitesimale Punktmassen $\mathrm{d}m$, für die man jeweils den Normalabstand R zur Drehachse ermittelt. Bei bekannter Dichteverteilung $\rho(\vec{r})$ kann das Massenelement auf ein Volumenelement zurückgeführt werden: $\mathrm{d}m = \rho(\vec{r})\,\mathrm{d}V$. Für das Trägheitsmoment des ganzen Körpers integriert man dann alle gemäß Gleichung (5.20) berechneten

Trägheitsmomente der einzelnen Massenelemente. Oft vereinfacht sich diese Rechnung, weil die Dichte im ganzen Körper konstant ist ($\rho(\vec{r}) = \rho = \text{const}$).

$$\textbf{Trägheitsmoment:} \qquad I \;=\; \int_M R^2(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}m \;=\; \int_V R^2(\vec{r}) \cdot \rho(\vec{r})\, \mathrm{d}V \tag{5.21}$$

Englisch: *angular mass* oder *moment of inertia*

$$\begin{array}{lrcl} \text{Dimension:} & \dim\big(I\big) & = & \text{Masse} \times \text{Länge}^2 \\ \text{SI-Einheit:} & [I] & = & 1\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2 \end{array}$$

Ob das Volumenintegral in der Definitionsgleichung (5.21) berechenbar ist, hängt erstens davon ab, wie der Körper geometrisch geformt ist und zweitens davon, wie die Drehachse liegt. In manchen Fällen ist es möglich, das Integral in Teilintegrale für die einzelnen Koordinaten aufzuspalten. Dazu wird das Volumenelement zerlegt, z. B. in kartesischen Koordinaten: $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$. Wenn es nun gelingt, den Drehradius $R(\vec{r})$ und die Dichteverteilung $\rho(\vec{r})$ in Abhängigkeit von diesen Koordinaten darzustellen, kann das Integral lösbar werden.

Wenn der rotierende Körper axialsymmetrisch ist (Kugel, Scheibe, Stange etc.), ist es vorteilhaft, das Trägheitsmoment in Zylinderkoordinaten zu berechnen. Dann wird aus dem Volumenelement $\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}r \cdot \mathrm{d}h$. Dann erhalten wir ein Dreifachintegral, das nacheinander für jede Koordinate gelöst wird. Als Beispiel berechnen wir das Trägheitsmoment einer homogenen Scheibe (Radius R_S, Dicke D_S), die um ihre Symmetrieachse rotiert (homogen heißt: überall gleich, also hier: konstante Dichte ρ):

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \mathrm{d}I(\vec{r}) \;=\; \int_V R^2(\vec{r}) \cdot \rho \cdot \mathrm{d}V \;=\; \int_0^{D_S}\int_0^{R_S}\int_0^{2\pi} r^2 \cdot \rho \cdot r\,\mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}r \cdot \mathrm{d}h \\ &= \rho \cdot \int_0^{D_S}\int_0^{R_S}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \cdot r^3\,\mathrm{d}r \cdot \mathrm{d}h \;=\; \rho \cdot 2\pi \cdot \int_0^{D_S}\int_0^{R_S} r^3\,\mathrm{d}r \cdot \mathrm{d}h \\ &= \rho \cdot 2\pi \cdot \frac{{R_S}^4}{4} \cdot \int_0^{D_S} \mathrm{d}h \;=\; \rho \cdot 2\pi \cdot \frac{{R_S}^4}{4} \cdot D_S \;=\; \frac{{R_S}^2}{2} \cdot \big(\rho \cdot {R_S}^2\,\pi \cdot D_S\big) \end{aligned}$$

$$I_1 \;=\; \frac{M_S}{2} \cdot {R_S}^2 \qquad \text{mit} \quad M_S \;=\; \rho \cdot {R_S}^2\,\pi \cdot D_S \quad \big(\text{Masse der Scheibe}\big) \tag{5.22}$$

Das Trägheitsmoment einer Vollscheibe ist also im den Faktor $1/2 = 0,5$ kleiner als für eine Punktmasse M_S, die im Radius R_S rotiert (siehe Gleichung (5.20)), weil sich in der Scheibe ein Großteil der Masse auf kleinerem Radius $r < R_S$ um die Achse dreht, was weniger „Trägheit“ mit sich bringt. Wenn die Masse der Scheibe nicht homogen verteilt ist, sondern zum Großteil ganz außen beim Radius $r \approx R_S$ sitzt, ist das Trägheitsmoment deutlich größer als in Gleichung (5.22) und im Grenzfall (fast) so groß wie für die rotierende Punktmasse in Gleichung (5.20). Das ist zum Beispiel beim Rad eines Fahrrads der Fall ist: die meiste Masse ist in der Felge und im Reifen ganz außen konzentriert; die Speichen enthalten viel weniger Masse.

Deutlich schwieriger ist die Integration bei einer homogenen Scheibe, wenn die Drehachse genau normal auf die rotationssymmetrische Achse durch den Schwerpunkt verläuft, also parallel zur Boden- und Deckfläche der Scheibe. Hier das Ergebnis:

$$I_2 = \frac{M_S}{12} \cdot \left(3\,{R_S}^2 + {D_S}^2\right) = \frac{M_S}{2} \cdot \frac{3\,{R_S}^2 + {D_S}^2}{6} \tag{5.23}$$

Wenn die Dicke der Scheibe kleiner ist als der Radius, ist dieses Trägheitsmoment I_2 deutlich kleiner als das oben berechnete Trägheitsmoment I_1 um die rotationssymmetrische Achse, weil dort ein beträchtlicher Teil der Masse mit großem Radius rotieren muss. Für große Dicken D_S (dann ist das eher eine Stange als eine Scheibe!) ist es hingegen umgekehrt: Nun ist $I_2 > I_1$, weil viele Massenanteile weiter als der Radius R_S von der Achse entfernt sind.

Formeln für die Trägheitsmomente um die Symmetrieachsen wichtiger geometrischer Körper sind in Tabellen zusammengefasst in Büchern und online zu finden.

Ganz allgemein gilt für alle Körper, auch für unregelmäßig geformte, dass es immer eine Achse durch den Schwerpunkt gibt, um die das Trägheitsmoment maximal ist. Das ist die sogenannte stabile Hauptträgheitsachse: Wenn der Körper um diese Achse rotiert, gibt es keine Unwucht und die Richtung der Achse bleibt bestehen, auch wenn es leichte Störungen gibt. Das Trägheitsmoment bei der Rotation um diese Achse ist eines der **drei „Hauptträgheitsmomente“**.

Im allgemeinen Fall gibt es zwei weitere Hauptträgheitsachsen, die aufeinander und auf die stabile Hauptträgheitsachse normal stehen. Auch bei Drehung um diese beiden Achsen rotiert der Körper ohne Unwucht. Um eine dieser Achsen, die „labile Hauptträgheitsachse“, ist das Trägheitsmoment minimal. Bei Störungen verändert sich die Rotation derart, dass diese Drehachse verlassen wird und der Körper sich mehr und mehr in Richtung auf eine Rotation um die stabile Hauptträgheitsachse bewegt. Ähnlich verhält es sich mit der dritten Hauptträgheitsachse. Wenn ein Körper Symmetrieachsen hat, fallen die Hauptträgheitsachsen mit diesen Symmetrieachsen zusammen.

Für alle anderen Drehachsen durch den Schwerpunkt kann die Rotation nicht durch ein skalares Trägheitsmoment beschrieben werden. Man muss dann einen Tensor zweiter Stufe verwenden, den sogenannten **Trägheitstensor**, der nicht nur die „Dreh-Trägheit“ des Körpers beschreibt, sondern auch die Drehmomente, die bei der Rotation um diese Achsen auftreten und versuchen, den Körper so auszurichten, dass er um die stabile Hauptträgheitsachse rotiert.

Wenn ein Körper also um eine Achse rotieren soll, die keine Hauptträgheitsachse ist, wirken starke Drehmomente auf Achse und Achslager. Dies ist zum Beispiel bei Autoreifen gefährlich und kann zu Schäden führen. Deshalb werden Autoreifen, die z. B. wegen Material-Inhomogenitäten unwuchtig sein können, durch Aufbringen kleiner Gewichte „ausgewuchtet“, sodass die stabile Hauptträgheitsachse tatsächlich genau mit der geometrischen Drehachse zusammenfällt.

Bisher haben wir nur die Rotation eines Körpers um Achsen durch den Schwerpunkt besprochen. Bei Rotation um eine exzentrische Achse ist die direkte Berechnung des Trägheitsmomentes nach Gleichung (5.21) meist sehr schwierig. Hier benutzt man den „Satz von Steiner“: Man berechnet das Trägheitsmoment I_a um eine beliebige Achse aus dem Trägheitsmoment I_S um die dazu parallele Achse durch den Schwerpunkt:

$$\textbf{Satz von Steiner:} \qquad I_a = I_S + a^2 \cdot M \tag{5.24}$$

mit a ... Normalabstand der Achsen
M ... Masse des Körpers

Der Anteil $a^2 \cdot M$, der hier dazu kommt, beschreibt genau jenes Trägheitsmoment, das eine punktförmige Masse M hat, die im Abstand a von einer Achse rotiert. Wir sehen also, dass wir die Rotation eines ausgedehnten Körpers um eine exzentrische Achse in zwei Drehungen zerlegen können, deren Trägheitsmomente wir hier addieren: Erstens die Drehung des Schwerpunkts um die exzentrische Achse und zweitens die Drehung des Körpers um seinen Schwerpunkt.

Wenn wir die Scheibe vom oberen Beispiel um eine Achse drehen sollen, die parallel zur Symmetrieachse verläuft, aber ganz am Rand der Scheibe (sodass $a = R_S$ ist), dann ist ihre Trägheitsmoment um diese Achse mit dem Steinerschen Satz

$$I_a = I_1 + a^2 \cdot M = \frac{M_S}{2} \cdot {R_S}^2 + M_S \cdot {R_S}^2 = \frac{3\,M_S}{2} \cdot {R_S}^2 = 3 \cdot I_1 \tag{5.25}$$

Mit Hilfe des Satzes von Steiner kann man auch das Trägheitsmoment komplizierter Körper berechnen, die man oft in Teilstücke mit einfacher Geometrie zerlegen kann. Das Trägheitsmoment jedes Teilstücks kann dann mit dem Satz von Steiner berechnet werden, und die Summe aller Teil-Trägheitsmomente ergibt das gesamte Trägheitsmoment.

5.1.3 Die Rollbewegung

(A) Beschreibung

Rollende Reifen und Räder sind in Verkehr und Technik extrem wichtig. Die Rollbewegung besteht aus einer fest gekoppelten Kombination von Rotation und Translation. Zur Beschreibung benötigt man den Radius R des Rades, und wie immer hängt sie von der Wahl des Koordinatensystems ab.

Im „mitbewegten System“ (Koordinatenursprung fest im Mittelpunkt der Achse) führt das rollende Rad eine reine Rotationsbewegung aus und dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Der Untergrund zieht mit der Geschwindigkeit $v = \omega \cdot R$ nach hinten: Das ist genau die Geschwindigkeit des Rad-Umfangs am tiefsten Punkt, an dem der Untergrund zu jedem Moment fest mit dem Rad verbunden ist.

In der Regel beschreibt man die Bewegung aber im „Laborsystem“, in dem der Untergrund in Ruhe ist und sich die Achse des Rades folglich mit der Geschwindigkeit

$v = \omega \cdot R$ nach vorne bewegt. Dieser konstanten Vorwärtsbewegung ist die Rotation überlagert.

Weil der Umfang des Rades auf dem Untergrund abrollt, hängen der zurückgelegte Weg, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung über den Radius mit der Winkelposition (Gleichung (5.2)), Winkelgeschwindigkeit (Gleichung (5.4)) und Winkelbeschleunigung (Gleichung (5.11)) zusammen:

$$\begin{aligned} \text{zurückgelegter Weg:} \quad & s(t) = \varphi(t) \cdot R \qquad \big(\text{„Rollbedingung“}\big) \\ \text{Geschwindigkeit:} \quad & v(t) = \omega(t) \cdot R \\ \text{Beschleunigung:} \quad & a(t) = \alpha(t) \cdot R \end{aligned}$$

Wesentlich schwieriger ist die Beschreibung der Bahnen und Geschwindigkeiten eines Punkts auf dem rollenden Rad. Auf dem äußeren Umfang des Rades addieren sich immer zwei Geschwindigkeiten mit gleichem Betrag, nämlich die immer nach vorne gerichtete Translationsgeschwindigkeit $\vec{v}_t$ und die Rotationsgeschwindigkeit $\vec{v}_r$, die kontinuierlich ihre Richtung ändert. Wenn man konstante Geschwindigkeit annimmt und einen Punkt betrachtet, der zum Zeitpunkt $t = 0$ ganz oben auf dem Rad sitzt, ergibt sich für seine Geschwindigkeit

$$\vec{v}_P(t) = \vec{v}_t(t) + \vec{v}_r(t) = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ v \cdot \sin(\omega \cdot t) \end{pmatrix} = v \cdot \begin{pmatrix} 1 + \cos(\omega \cdot t) \\ \sin(\omega \cdot t) \end{pmatrix}$$

Die Geschwindigkeit eines Punkts am Umfang variiert von $v_P = 2 \cdot v$ oben am Rad bis $v_P = 0$ am Kontaktpunkt ganz unten. Dabei legt dieser Punkt eine komplizierte Kurve zurück, die Zykloide genannt wird, mit einem weiten Bogen oben und einer Spitze am unteren Ende. Punkte, die weiter innen am Rad sind, haben eine kleinere Rotationsgeschwindigkeit und somit eine geringere Variationsbreite der Gesamtgeschwindigkeit.

(B) Dynamik der Rollbewegung

Beim Beschleunigen und Abbremsen müssen Translation und Rotation immer gekoppelt betrachtet werden. Grundsätzlich gibt es zwei Möglichkeiten, eine Rollbewegung zu beschleunigen oder abzubremsen:

- Eine horizontale Kraft $\vec{F}$ zieht an der Achse und setzt nicht nur die Translation, sondern auch die Rotation in Gang. Das ist z. B. bei den nicht angetriebenen Rädern von Fahrzeugen der Fall. Die angelegte Kraft muss aufgeteilt werden, um beide Aufgaben erfüllen zu können: $F = F_T + F_R$. Wir erhalten dann:

$$\begin{aligned} \text{Rotation:} \quad I \cdot \alpha &= D \quad \rightarrow \quad I \cdot \frac{a}{R} = F_R \cdot R \\ F &= F_T + F_R = m \cdot a + I \cdot \frac{a}{R^2} = a \cdot \left(m + \frac{I}{R^2}\right) \\ a &= F \cdot \frac{R^2}{m \cdot R^2 + I} \qquad \text{und} \quad F_R = F \cdot \frac{I}{m \cdot R^2 + I} \end{aligned}$$

Die Haftreibung $F_{R,H}$ zwischen Untergrund und Rad muss größer sein als die Kraft F_R, die als Teil des Kräftepaars die Rotation antreibt. Falls das nicht erfüllt ist, steht für das Kräftepaar nur die kleinere Gleitreibung $F_{R,G}$ zur Verfügung. Die Kraft F_R wird also kleiner und F_T dementsprechend größer. In diesem Fall wird kein sauberes Rollen angetrieben: Das Rad bewegt sich schneller vorwärts und dreht sich langsamer, sodass es auf dem Untergrund rutscht.

- Ein Drehmoment $\vec{D}$ wirkt auf das Rad und setzt nicht nur die Rotation, sondern auch die Translation in Gang. Das geschieht z. B. bei den angetriebenen Rädern von Fahrzeugen. Das Drehmoment muss aufgeteilt werden, um beide Aufgaben erfüllen zu können: $D = D_R + D_T$. Wir erhalten

$$\text{Translation:} \quad m \cdot a = F_T = \frac{D_T}{R} \qquad \text{Rotation:} \quad I \cdot \alpha = I \cdot \frac{a}{R} = D_R$$

$$D = D_R + D_T = I \cdot \frac{a}{R} + m \cdot a \cdot R = a \cdot \left(\frac{I}{R} + m \cdot R \right)$$

$$a = D \cdot \frac{R}{m \cdot R^2 + I} \qquad \text{und} \quad F_T = D \cdot \frac{R}{R^2 + I/m}$$

Die Vorwärtsbewegung funktioniert nur dann richtig, wenn man „die Kraft auf die Straße bekommt“, wenn also die Kraft F_T, die das Rad nach vorne beschleunigt, am Boden von der Haftreibung $F_{R,H}$ kompensiert wird. Wenn die Haftreibung nicht ausreicht, steht nur die Gleitreibung zur Verfügung und $F_T = F_{R,G} < F_{R,H}$. In diesem Fall steht ein größerer Teil des Drehmoments zum Antreiben der Rotation zur Verfügung: Das Rad dreht sich schneller und kommt dabei langsamer voran als bei ausreichender Haftreibung. Wieder haben wir kein sauberes Rollen: Die Räder drehen durch.

Die hier berechneten Zusammenhänge gelten nur für einen Rollkörper allein (Rad, Walze, Kugel etc.). In der Praxis verwendet man Räder etc. in Verbindung mit einer nicht-drehenden Last. Dann muss in die oberen Beziehungen für m die Gesamtmasse eingesetzt werden. Dadurch wird der Kraft- bzw. Drehmomentanteil, der für die Rotation einzusetzen ist, im Vergleich viel kleiner. Im Fall des Antriebs durch Drehmoment kann man den Term I/m im Vergleich zu R^2 oft vernachlässigen, sodass die Beschleunigungskraft $F_T \approx D/R$ fast das ganze Drehmoment „verbraucht“.

5.1.4 Bewegung im rotierenden System

Laut Relativitätsprinzip, das von Einstein, vor ihm aber auch schon von anderen formuliert wurde (z. B. Galileo Galilei), sind alle naturwissenschaftlichen Beobachtungen in allen Inertialsystemen gleich. Ein Inertialsystem ist ein physikalisches Umfeld, das sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt oder in Ruhe ist. Aus Beobachtungen innerhalb eines solchen Systems lässt sich also nicht feststellen, ob das System in Ruhe oder in gleichförmiger Bewegung ist.

Im Gegensatz dazu ist ein rotierendes System (z. B. eine rotierende Kreisscheibe oder die Erde) kein solches Inertialsystem: In diesem Fall kann man durch Beobachtungen innerhalb des Systems feststellen, dass und sogar wie schnell sich das System dreht. Wir besprechen zwei Beispiele:

(A) Zentrifugalkraft

Im Kap. 3.2.6 haben wir geklärt, dass eine Kreisbewegung nur möglich ist, wenn eine hinreichend große Zentripetalkraft $\vec{F}_{\mathrm{ZP}}$ wirkt, die die notwendige Normalbeschleunigung für die Kurvenbahn aufbringen kann.

Wenn man sich in einem rotierenden System befindet, nimmt man die Notwendigkeit der Zentripetalkraft als „Zentrifugalkraft“ $\vec{F}_{\mathrm{ZF}}$ wahr, die radial nach außen wirkt (also der Zentripetalkraft entgegen) und genau denselben Betrag hat. Aus der Sicht des rotierenden Beobachters ist das eine reale Kraft, deren Ursache ohne Kenntnis der Rotation nicht aufzuklären ist. In Vektorschreibweise wird die Zentrifugalkraft (oder „Fliehkraft“) als doppeltes Kreuzprodukt angeschrieben:

$$\vec{F}_{\mathrm{ZF}} = m \cdot a_{\mathrm{ZF}} = m \cdot \vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega}) \tag{5.26}$$

Dabei ist $\vec{r}$ der Ortsvektor des betrachteten Punkts im bewegten System (mit dem Koordinatenursprung auf der Drehachse). Die Zentrifugalkraft zeigt immer von der Drehachse weg, wie man mit der Dreifingerregel leicht überprüfen kann.

Da die Erde ein rotierendes System ist, gibt es hier diesen Fliehkraft-Effekt, der besonders stark am Äquator auftritt (größter Drehradius). Die Zentrifugalbeschleunigung hat dort die Größe

$$a_{\mathrm{ZF,äq}} = \omega^2 \cdot R_E = \left(\frac{2\pi}{24 \cdot 3600\,\mathrm{s}}\right)^2 \cdot 6370\,\mathrm{km} = 0{,}034\,\mathrm{m/s^2}$$

Die Beschleunigung $a_{\mathrm{ZF,äq}}$ zeigt nach „außen“ und mindert die Erdbeschleunigung, die somit am Äquator um gut $0{,}3\,\%$ kleiner ist als an den Polen.

Ein Beobachter von außen deutet die Minderung der Gravitationskraft so, dass ein kleiner Teil der Schwerkraft als Zentripetalkraft zur Verfügung stehen muss, sodass nur mehr der (große) Rest als Anziehungskraft wahrgenommen wird.

(B) Coriolis-Kraft

Jedes rotierende System hat bei konstanter Winkelgeschwindigkeit je nach Position unterschiedliche Bahngeschwindigkeiten $v(R) = \omega \cdot R$. Wenn man sich innerhalb dieses Systems bewegt und in Bereiche mit anderer Bahngeschwindigkeit gelangt, nimmt man dies als Querbeschleunigung wahr.

So wird ein Gegenstand, der am Äquator genau senkrecht hochgeschossen wird (ohne Reibung), in der Höhe nach Westen abgelenkt: Er behält die Bahngeschwindigkeit vom Boden (Drehradius R_0) auch in größerer Höhe (Radius $R > R_0$), wo zum Mitlaufen mit der Rotation $v(R) > v(R_0)$ erforderlich wäre. Der senkrecht hochgeworfene Körper bleibt als gegenüber dem Boden zurück. Umgekehrt wird jeder fallende Körper nach Osten abgelenkt, weil er aus der Starthöhe eine größere Bahngeschwindigkeit mitbringt als sie der Boden hat.

Diese Effekte werden innerhalb des rotierenden Systems als Wirkung einer Kraft gedeutet, da sich ja offensichtlich die Richtung der Geschwindigkeit verändert. Diese Kraft berechnet sich als

$$\vec{F}_\mathrm{C} \;=\; m \cdot \vec{a}_\mathrm{C} \;=\; m \cdot 2 \cdot (\vec{v} \times \vec{\omega}) \tag{5.27}$$

Hier ist $\vec{v}$ der Geschwindigkeitsvektor innerhalb des rotierenden Systems. Die Corioliskraft führt dazu, dass geradlinige Bewegung innerhalb eines rotierenden Systems in eine gekrümmte Bahn überführt wird, außer die Bewegung verläuft parallel zur Drehachse (also bei konstantem Drehradius).

Der Effekt ist auf der Erde eigentlich schwach, hat aber doch Bedeutung auf Strömungen in der Atmosphäre und in den Meeren. Bei Bewegung parallel zur Erdoberfläche erfolgt die Ablenkung aus der Bewegungsrichtung auf der Nordhalbkugel immer nach rechts, auf der Südhalbkugel nach links.

Dies führt dazu, dass die Luft zum Druckausgleich nicht einfach von einem Hoch- zu einem Tiefdruckgebiet strömen kann, weil sie unterwegs abgelenkt wird. Aus dem Zusammenspiel von Druckunterschieden und Corioliskraft entstehen Spiralformen, bei denen auf der Nordhalbkugel die ausströmende Luft im Uhrzeigersinn um Hochdruckgebiete umläuft (von oben aus gesehen), während die Luft, die in Tiefdruckgebiete einströmt, gegen den Uhrzeigersinn umläuft. Auf der Südhalbkugel ist das genau umgekehrt.

Kleinskalige Bewegungen werden von der Corioliskraft nicht beeinflusst, weil der erreichbare Krümmungsradius viel zu klein ist. So werden weder Tornados noch die Wirbel in abfließendem Wasser von der Corioliskraft in ihrer Richtung definiert.

Wenn ein Pendel mit relativ großer Masse an einer langen Schnur schwingt, verändert sich langsam seine Schwingungsebene. Im Idealfall wirkt außer der Gravitation keine Kraft auf das Pendel. Auch die unvermeidliche Reibung ist symmetrisch und kann diese systematische Verdrehung nicht erklären. Der Effekt kommt vielmehr daher, dass sich die Erde unter dem Pendel wegdreht und ihre Drehung nicht auf das Pendel übertragen kann. An einem Pol ist das leicht zu verstehen. An anderen Orten (mit der geographischen Breite φ) wirkt nur der radiale Anteil $\omega_R \;=\; \omega_E \cdot \sin\varphi$ der Erdrotation, sodass eine vollständige Umdrehung $T = 24\,\mathrm{h}/\sin\varphi$ lang dauert.

Ein Pendel, das diesen Effekt zeigen kann, wird nach seinem Entdecker **Foucaultsches Pendel** genannt. In der Praxis ist der Effekt schwer quantitativ zu realisieren: Erstens muss die Aufhängung so gebaut sein, dass sie keine Schwingungsrichtung bevorzugt, was mit der hier nötigen hohen Präzision schwierig ist. Zweitens muss kontinuierlich Energie eingekoppelt werden, um trotz Reibungsverlusten die langen Schwingungsdauern zu realisieren, was ebenfalls die Gefahr in sich trägt, dass diese „neue“ Energie eine bestimmte Schwingungsrichtung bevorzugt.

5.2 Rotationsenergie und Drehimpuls

5.2.1 Rotationsenergie

(A) Definition

Wenn ein Körper in Rotation versetzt wird, muss dafür Arbeit aufgebracht werden, die dann als „Rotationsenergie“ in der Drehbewegung steckt. Die Rotationsenergie gehört zu den mechanischen Energieformen und kann – zumindest theoretisch – durch den Einsatz von Arbeit vollkommen in andere Energieformen umgewandelt werden.

Mikroskopisch betrachtet ist die Rotationsenergie die Summe der kinetischen Energien aller Massenelemente des Körpers. Jedes dieser Massenelemente bewegt sich – zumindest während eines kleinen Zeitschritts $\mathrm{d}t$ – mit seiner eigenen Geschwindigkeit $v(R) = \omega \cdot R$ entlang einer Kreisbahn. Zum Berechnen der Rotationsenergie integrieren wir die Energiebeiträge aller Massenelemente:

$$E_{\mathrm{rot}} \;=\; \int \frac{v^2 \cdot \mathrm{d}m}{2} \;=\; \int \frac{\omega^2 \cdot R^2 \cdot \rho(\vec{r})\,\mathrm{d}V}{2} \;=\; \frac{\omega^2}{2} \cdot \int\limits_V R(\vec{r})^2 \cdot \rho(\vec{r})\,\mathrm{d}V$$

Das Integral im letzten Term ist genau die Definitionsgleichung für das Trägheitsmoment aus der Definitionsgleichung (5.21), deshalb erhalten wir schließlich

$$\textbf{Rotationsenergie:} \qquad E_{\mathrm{rot}} \;=\; \frac{I \cdot \omega^2}{2} \tag{5.28}$$

Beachten Sie, dass diese Beziehung ganz ähnlich zu jener für kinetische Energie bei der Translationsbewegung ist: Die Rotation ist proportional zum Trägheitsmoment sowie zum Quadrat der Winkelgeschwindigkeit.

Die Arbeit, um die Rotation eines Körpers zu verändern, wird durch ein Drehmoment D aufgebracht, das entlang des Winkels φ wirkt:

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{rot}} \;&=\; \int D \cdot \mathrm{d}\varphi \;=\; I \cdot \int \alpha \cdot \mathrm{d}\varphi \;=\; I \cdot \int \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \cdot (\omega \cdot \mathrm{d}t) \\ &=\; I \cdot \int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} \omega \cdot \mathrm{d}\omega \;=\; \frac{I}{2} \cdot \left({\omega_2}^2 - {\omega_1}^2\right) \end{aligned}$$

Dieses Drehmoment kann wiederum durch eine Kraft F erzeugt werden, die außen tangential am Körper angreift (in der Entfernung R von der Achse). Dann kann man die Arbeit auch aus dem Integral dieser Kraft mal der zurückgelegten Bogenlänge berechnen.

Dies ist zum Beispiel auch dann interessant, wenn Rotation durch eine Reibungsbremse verlangsamt werden soll. Dann wirkt die konstante Reibungskraft F_R in einem Abstand R_R von der Drehachse. Zum völligen Abbremsen muss Arbeit von der Größe der Rotationsenergie geleistet werden, also

$$E_{\mathrm{rot}} \;=\; F_R \cdot s \;=\; F_R \cdot N \cdot 2\pi \cdot R_R \qquad \rightarrow \qquad N \;=\; \frac{E_{\mathrm{rot}}}{2\pi \cdot F_R \cdot R_R} \quad \text{Umdrehungen}$$

(B) Anwendung: Energie beim Rollen

Wenn ein Körper rollt, enthält er Energie in zwei Formen:

- Kinetische Energie (Translationsenergie), die dem Voranschreiten des Schwerpunkts entspricht.
- Rotationsenergie, die für die Drehung um eine feste Achse nötig ist.

Beim Rollen sind Translation und Rotation über den Radius R verknüpft, sodass wir die Energie zusammenfassen können:

$$E_{\text{roll}} = \frac{v^2}{2} \cdot \left(m + \frac{I}{R^2}\right) \tag{5.29}$$

Wir sehen daraus, dass es für die Dynamik des Rollens – anders als beim Gleiten oder Fallen – auf die Form des rollenden Körpers ankommt, weil die Parameter I und R beteiligt sind.

Wenn ein Körper z. B. eine schiefe Ebene hinunter rollt, lässt sich die Endgeschwindigkeit v_{end} aus dem Energieerhaltungssatz berechnen:

$$m \cdot g \cdot \Delta h = \frac{{v_{\text{end}}}^2}{2} \cdot \left(m + \frac{I}{R^2}\right) \qquad \rightarrow \qquad v_{\text{end}} = \sqrt{2\,g \cdot \Delta h \cdot \frac{m}{m + I/R^2}}$$

Wir sehen, dass die Endgeschwindigkeit kleiner ist als beim reibungsfreien Gleiten ($v_{\text{end}} = \sqrt{2\,g \cdot \Delta h}$), weil ein Teil der vorhandenen Energie für die Drehung benötigt wird, aber umso weniger, je kleiner I ist.

5.2.2 Drehimpuls

(A) Der Drehimpuls einer Punktmasse

Im Kapitel Kap. 4.4 haben wir den Impuls $\vec{p}$ besprochen, ein Maß für die „Wucht“ einer linearen Bewegung, mit dem eine Reihe an Fragestellungen elegant gelöst werden kann. Für Drehbewegungen gibt es eine ähnliche Größe, den Drehimpuls, der die „Wucht“ einer Drehbewegung beschreibt und bei der Eigenrotation eines Körpers manchmal als „Drall“ bezeichnet wird.

Für eine Punktmasse ist der Drehimpuls folgendermaßen definiert:

$$\text{Drehimpuls einer Punktmasse:} \qquad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \cdot \vec{r} \times \vec{v}\,, \tag{5.30}$$

mit dem Ortsvektor $\vec{r}$ und der momentanen Geschwindigkeit $\vec{v}$. Diese Definition ist ganz allgemein: Man kann damit jeder bewegten Punktmasse einen abstrakten „Drehimpuls“ zuordnen, egal ob er sich auf einer Kreisbahn, auf einer Geraden oder irgendwie anders bewegt. Dies wird in der Vorlesung „Theoretische Mechanik“ genau besprochen.

Beachten Sie, dass die Größe $\vec{L}$ in dieser Definition entscheidend von der Wahl des Koordinatensystems abhängt: So hat eine gleichförmige Bewegung ($\vec{v}$ = const) den konstanten Drehimpuls $\vec{L} = 0$, wenn sich der Koordinatenursprung irgendwo auf der Bahn befindet, weil dann $\vec{r}$ und $\vec{p}$ immer parallel sind, sodass das Kreuzprodukt in Gleichung (5.30) Null ergibt. Wenn der Ursprung neben der geraden Bahn liegt, erhält der Betrag $|\vec{L}|$ an jeder Stelle den Wert Normalabstand der Bahn mal Impuls, weil fürs Kreuzprodukt ja nur die Normalkomponenten der Vektoren berücksichtigt werden.

Man kann sich merken, dass der Drehimpuls einer Punktmasse angibt, „wie sich die Punktmasse drehen muss, um immer zum Koordinatenursprung zu schauen, gewichtet mit der aktuellen Entfernung“. Der Vektor $\vec{L}$ steht daher normal auf die momentane Geschwindigkeit und auf den Verbindungsvektor $\vec{r}$ vom Koordinatenursprung zur Punktmasse.

Wenn man die zeitliche Änderung des Drehimpulses betrachtet, zerlegt man die Ableitung nach der Multiplikationsregel in zwei Anteile:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r} \times \vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} \tag{5.31}$$

Der erste Term ist Null, weil $\vec{v}$ und $\vec{p}$ immer parallel sind. Der zweite Term entspricht exakt der Definition des Drehmoments $\vec{D}$ in Gleichung (5.15). Wir erhalten also das Ergebnis

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{D} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{5.32}$$

Die Größe Drehimpuls kann sich nur verändern, wenn ein Drehmoment wirkt oder umgekehrt: Ein Drehmoment führt immer zur Änderung des Drehimpulses. Beachten Sie, dass dies ganz analog zur Newtonschen Bewegungsgleichung (4.19) für Translationsbewegungen ist: Der Impuls $\vec{p}$ kann sich nur ändern, wenn eine Kraft wirkt.

Aus der Gleichung (5.32) und der Definition des Drehmoments $\vec{D}$ sehen wir sofort, dass sich der Drehimpuls nicht ändern kann, wenn die Kraft zum Koordinatenurprung zeigt, weil dann $\vec{r}$ und $\vec{F}$ parallel sind und das Kreuzprodukt verschwindet. Das bedeutet, dass sich in „Zentralkraftfeldern“ (mit $\vec{F} = F \cdot \vec{e}_r$) der Drehimpuls bewegter Objekte nicht verändern kann. Ein Beispiel ist das Gravitationsfeld der Erde oder eines anderen Himmelskörpers: Der Drehimpuls eines Satelliten kann sich durch die Gravitation nicht verändern (was zur Beschreibung der möglichen Bahnen wichtig ist, siehe Abschnitt 5.3.2), sondern nur durch eine Extra-Kraft (Triebwerke!), die in anderer als radialer Richtung wirkt.

(B) Der Drehimpuls eines ausgedehnten Körpers

Für ausgedehnte rotierende Körper wird der Drehimpuls L mit folgenden Annahmen definiert

- Wir betrachten vorerst nur Bewegungen, die als Umdrehung um um eine feste Achse beschrieben werden können.

- Wir wählen unser Koordinatensystem so, dass die Drehachse eine der Koordinatenachsen ist.
- Die Drehachse ist eine Hauptträgheitsachse des Körpers oder eine Parallele dazu, sodass das Trägheitsmoment als Skalar I dargestellt werden kann.

Wir denken uns den Körper in infinitesimale Puntkmassen dm zerlegt und betrachten eine davon, die um den Radiusvektor $\vec{r}$ von der Drehachse entfernt ist. Für diese Punktmasse beschreiben wir den Drehimpuls mit Gleichung (5.30) und ersetzen die Geschwindigkeit $\vec{v}$ durch die Definition in Gleichung (5.5):

$$\text{Drehimpuls einer Punktmasse:} \qquad \mathrm{d}\vec{L} = \mathrm{d}m \cdot \vec{r} \times \vec{v} = \mathrm{d}m \cdot \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$\mathrm{d}\vec{L} = \mathrm{d}m \cdot r^2 \cdot \vec{\omega} = \mathrm{d}I \cdot \vec{\omega} \tag{5.33}$$

$$\text{wegen} \quad \vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \vec{B} \cdot \left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right) - \vec{C} \cdot \left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right)$$

$$\text{und} \quad \vec{\omega} \perp \vec{r} \quad \rightarrow \quad \left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right) = 0$$

Diese Definition gilt für jede Punktmasse des Körpers. Weil die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ für den ganzen Körper gleich ist, können wir in der Gleichung (5.33) rechts und links integrieren und erhalten den Drehimpuls des ganzen Körpers:

$$\textbf{Drehimpuls:} \qquad \vec{L} = I \cdot \vec{\omega} \qquad \text{Englisch: } \textit{angular momentum} \tag{5.34}$$

$$\text{Dimension:} \qquad \dim\left(L\right) = \text{Trägheitsmoment } \times \text{Winkelgeschwindigkeit}$$

$$\text{SI-Einheit:} \qquad [I] = 1\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{s}$$

Der Drehimpuls $\vec{L}$ ist eine vektorielle Größe und zeigt in unserem Fall (skalares Trägheitsmoment!) immer in dieselbe Richtung wie die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$.

Wenn ein Körper mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ rotiert und diese ändert sich, dann ändert sich auch sein Drehimpuls $\vec{L}$:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = I \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = I \cdot \vec{\alpha} = \vec{D} \tag{5.35}$$

Hier ist angenommen, dass das Trägheitsmoment I konstant bleibt. Es zeigt sich, dass darüber hinaus der rechte und linke Teil der Gleichung ganz allgemein gültig sind, sodass die Rotations-Bewegungsgleichung (5.14) verallgemeinert werden kann:

$$\text{Verallgemeinerte Dreh-Bewegungsgleichung:} \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(I \cdot \vec{\omega}\right)}{\mathrm{d}t} = \vec{D}_{\mathrm{ges}} \tag{5.36}$$

Analog zum Impuls bei der Translationsbewegung (Gleichung (4.19)) sehen wir hier, dass der Drehimpuls eines Körpers nur von einem Drehmoment verändert werden kann, ganz analog zur Gleichung (5.32) für eine Punktmasse. Außerdem ist das Drehmoment genau die zeitliche Änderung des Drehimpulses: Immer wenn ein Drehmoment auf einen Körper wirkt, ändert sich dadurch instantan der Drehimpuls, und die momentane Änderungsrate ist genau $\vec{D}$.

(C) Drehimpulserhaltung

Der Drehimpuls $\vec{L}$ ist eine wichtige „Erhaltungsgröße“ der Physik, genau wie der Impuls $\vec{p}$ und die Gesamtenergie E_{ges}. Das heißt, dass der gesamte Drehimpuls eines abgeschlossenen Systems konstant bleiben muss, solange nicht von außen ein Drehmoment ins System hinein wirkt:

Der Gesamt-Drehimpuls in einem abgeschlossenen System ist konstant.

Verschiedene Körper eines physikalischen Systems können natürlich miteinander in Wechselwirkung treten und, z. B. durch Stöße, Drehmomente aufeinander ausüben. Diese Drehmomente sind aber – ganz analog zu Newtons Reaktionsprinzip im Kap. 3.1.3 – innerhalb des Systems immer kompensiert: Wenn ein Drehmoment $\vec{D}_1$ auf einen Körper wirkt, dann muss auf irgendeinen anderen Körper ein genau großes, aber entgegengerichtetes Drehmoment $\vec{D}_2 = -\vec{D}_1$ wirken, sodass ihre Summe Null ist und somit auch die gesamte Änderung des Drehimpulses.

Bei den Experimenten auf dem Drehstuhl ist es nicht möglich, vertikalen Drehimpuls vom „System“ (Drehstuhl + Person + alles, was die Person festhält) auf die Umgebung abzugeben. Deshalb beginnt sich die Person zu drehen, wenn sie ein Rad abbremst, das sich um eine vertikale Achse dreht. Noch stärker ist der Effekt, wenn die Achse des drehenden Rads um 180° umgedreht wird, sodass sich die Drehrichtung umkehrt und somit auch sein Drehimpuls.

Beachten Sie aber, dass Drehimpuls mit horizontaler Achsrichtung sehr wohl auf die Umgebung übergehen kann. Wenn die Person ein rotierendes Rad mit vertikaler Achse um 90° kippt, beginnt sich der Drehstuhl um seine vertikale Achse zu drehen, weil der vertikale Drehimpulsanteil im System erhalten sein muss. Er kippt aber nicht um eine horizontale Achse, obwohl es im System nun plötzlich einen horizontalen Drehimpuls des Rades gibt: Dieser Anteil kann über die Außenwelt kompensiert werden, indem ein Drehmoment auf die Erde übertragen wird.

Ein einzelner starrer Körper hat keine Möglichkeit, seinen Drehimpuls zu verändern (und somit Betrag und Richtung seiner Winkelgeschwindigkeit), solange kein Drehmoment auf ihn wirkt: Die Rotationsbewegung eines starren Körpers bleibt ohne äußere Einflüsse unverändert ($\vec{\omega} = \text{const}$), so wie eine Translationsbewegung ohne äußere Kraft mit konstanter Geschwindigkeit weiter läuft.

Wenn ein isoliert rotierender Körper aber in der Lage ist, sein Trägheitsmoment zu verändern, ist die Erhaltung des Drehimpulses besonders interessant, so z. B. wenn ein Eisläufer, der am Stand rotiert, seine gestreckten Arme an den Körper zieht oder eine Turnerin, die gestreckt abspringt, in der Luft in die Hocke geht: Bei beiden wird das Trägheitsmoment kleiner, weil Masse näher an die Drehachse gezogen wird. Der Drehimpuls L bleibt während dieser Aktion aber konstant, weil ja kein äußeres Drehmoment wirkt. Deshalb muss bei abnehmendem Trägheitsmoment im gleichen Maß die Winkelgeschwindigkeit steigen:

$$\vec{L}_1 I_1 \cdot \vec{\omega}_1 \; = \; \vec{L}_2 \; = \; I_2 \cdot \vec{\omega}_2 \qquad \rightarrow \quad \omega_2 \; = \; \frac{I_1}{I_2} \cdot \omega_1$$

Beachten Sie, dass die Änderung der Größen Winkelgeschwindigkeit ω und Trägheitsmoment I Einfluss auf die Rotationsenergie hat:

$$E_{\mathrm{rot},2} = \frac{I_2}{2} \cdot {\omega_2}^2 = \frac{I_2}{2} \cdot \frac{{I_1}^2}{{I_2}^2} \cdot {\omega_1}^2 = \frac{I_1}{I_2} \cdot \frac{I_1}{2} \cdot {\omega_1}^2 = \frac{I_1}{I_2} \cdot E_{\mathrm{rot},1}$$

Im Gegensatz zum Drehimpuls bleibt also die Rotationsenergie nicht konstant, wenn sich das Trägheitsmoment eines rotierenden Körpers verändert. Wenn I kleiner wird, vergrößert sich E_{rot}: Dies kommt daher, dass Arbeit aufgebracht werden muss, um beim Verkleinern des Trägheitsmoments Masse gegen die „Fliehkraft“ an die Drehachse heranzuziehen.

Diese Möglichkeit der Veränderung der Drehgeschwindigkeit wird im Sport in verschiedenen Disziplinen verwendet. Beachten Sie, dass z. B. ein Turmspringer, der einen dreifachen Salto mit doppelter Schraube zeigt, den gesamten notwendigen Drehimpuls beim Absprung „mitnehmen“ muss. Durch richtige Körper-„Deformation“ wird dieser Drehimpuls dann in hohe oder niedrige Rotationsgeschwindigkeit umgewandelt, im gegebenen Beispiel sogar um zwei verschiedene Körperachsen.

5.2.3 Kreisel und Präzessionsbewegung

(A) Wirkung eines Drehmoments auf eine Rotationsbewegung

Wenn auf einen Körper, der um eine körperfeste Drehachse rotiert, ein Drehmoment $\vec{D}$ wirkt, ändert sich der Drehimpuls $\vec{L}$. Zur Beschreibung der Wirkung zerlegen wir das Drehmoment in seine Komponenten parallel und normal zur Winkelgeschwindigkeit:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \vec{D}_{\parallel} + \vec{D}_{\perp} \\ \text{mit} \quad \vec{D}_{\parallel} &= \left(\vec{D} \cdot \vec{e}_{\omega}\right) \cdot \vec{e}_{\omega} \quad \text{(Parallelkomponente)} \\ \vec{D}_{\perp} &= \vec{D} - \vec{D}_{\parallel} \qquad \text{(Normalkomponente)} \end{aligned}$$

Die **Parallelkomponente** $\vec{D}_{\parallel}$ führt zu einer Änderung des Betrags von ω. Diesen Fall haben wir zum Beispiel immer dann, wenn ein Motor eine Achse antreibt (Drehmoment auf die Achse), oder wenn ein rotierendes Rad abgebremst wird (Drehmoment durch Reibungskraft außen auf dem Rad und Kompensationskraft auf die Drehachse). Den Effekt – Beschleunigung oder Abbremsung der Rotation – berechnen wir mit Hilfe der Dreh-Bewegungsgleichung (5.14).

Die **Normalkomponente** $\vec{D}_{\perp}$ ändert die Richtung der Drehachse, nicht aber den Betrag der Winkelgeschwindigkeit. Damit ein solches Drehmoment wirken kann, muss erstens die Drehachse an einem Punkt festgehalten werden und zweitens an einem andern Punkt der Drehachse eine Kraft $\vec{F}$ normal zur Drehachse wirken. Dadurch entsteht (gemeinsam mit der Kompensationskraft $-\vec{F}$ im festen Punkt) ein Kräftepaar und somit ein Drehmoment.

(B) Präzession

Im Folgenden untersuchen wir die Vorgänge beim Vorliegen einer Normalkomponente $\vec{D}_\perp$ des Drehimpulses auf ein rotierendes System. Mit der Gleichung (5.36) erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\,(I \cdot \vec{\omega})}{\mathrm{d}t} = \vec{D}_\perp$$

Beachten Sie, dass diese Drehimpulsänderung in eine andere Richtung geht, als man es intuitiv erwarten würde! Die Rotation, die das Drehmoment für einen ruhenden Körper erzeugen würde, läuft in der Normalebene des Drehmomentvektors $\vec{D}_\perp$. Wenn der Körper hingegen bereits rotiert, wird der Drehimpulsvektor in die Richtung des Drehmomentvektors „geschoben" und mit ihm die Drehachse.

Man kann sich diese Richtung der Achsdrehung dadurch veranschaulichen, dass man überlegt, welche Bahn einzelne Massenpunkte des rotierenden Körpers durchlaufen. Dabei sieht man, dass es – durch Mitnahme des Impulses – eine Corioliskraft auf diese Punkte gibt, die in Summe eine Drehung des Körpers in eine andere Richtung erzeugt.

Wenn sich der Normal-Drehmomentvektor $\vec{D}_\perp$ über längere Zeit mit der induzierten Bewegung der Drehachse mitbewegt (siehe Beispiele unten), entsteht eine Drehung der Drehachse. Diese Drehung nennt man **Präzessionsbewegung**. Sie erfolgt mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_P, die wir leicht berechnen können:

$$\omega_P = \frac{\mathrm{d}\varphi_P}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}L}{L}\right) = \frac{D_\perp}{L} \tag{5.37}$$

Diese Beziehung mit den Beträgen der Vektoren gilt, wenn $\vec{D}_\perp$ und L normal aufeinander stehen (was wir ja so angenommen haben). Außerdem muss gelten, dass $\omega_P \ll \omega$: Die Rotationsgeschwindigkeit muss viel größer sein als die Präzession. Das Weiterschreiten des Winkels der Drehachse wird als $\mathrm{d}\varphi_P = \mathrm{d}L/L$ angesetzt ($\tan\varphi \approx \varphi$).

(C) Beispiele für Präzession

Präzession tritt beim klassischen „Kinderkreisel" auf, der um seine Symmetrieachse rotiert, etwas schräg steht und Kreise beschreibt, bei denen sich die Orientierung der Achse verändert. Was man hier vorrangig sieht, ist genau die Präzessionsbewegung.

Der rotierende schräg stehende Kreisel fällt durch den Einfluss der Schwerkraft nicht etwa um, wie es ohne Eigenrotation geschehen würde, sondern weicht in die Präzession aus. Die Schwerkraft $F_g = m \cdot g$ greift im Schwerpunkt an und bildet mit dem Abstandsvektor $\vec{d}$ vom Fußpunkt zum Schwerpunkt das Drehmoment D. Die Normalkomponente dieses Drehmoments führt zur Präzession, die hier wiederum nur die Horizontalkomponente des Drehimpulses verändert, so dass man insgesamt die Präzessions-Winkelgeschwindigkeit $\omega_P = (m \cdot g \cdot d)/(I \cdot \omega)$ erhält: Offensichtlich ist es egal, wie schräg der Kreisel steht – ω_P hängt nur von seiner Rotationsgeschwindigkeit ω ab.

Die Erde kann nicht als perfekte Kugel beschrieben werden, sondern ist viel besser als Ellipsoid darzustellen, dessen Rotationsachse um $\sim 21\,\text{km}$ kürzer ist als die lange Halbachse (durch den Äquator). Die Erde rotiert einmal pro Tag um eine Rotationsachse, die nicht normal auf die Ekliptik steht (Umlaufebene um die Sonne), sondern um $\varphi\ \approx 23,5°$ geneigt ist.

Durch diese Neigung und durch die asymmetrische Form werden von Sonne und Mond Drehmomente auf die Erde ausgeübt, die die Erdachse aufzurichten versuchen. Dies führt zu einer Präzession der Erdachse mit einer Periode von $\sim$ 25850 Jahren: Die Erdachse steht also nicht konstant im Raum, sondern verändert langsam ihre Orientierung. In Richtung Norden zeigt die Erdachse heute in Richtung auf den „Polarstern" im kleinen Wagen – dies war in der Antike nicht so und wird sich im Verlauf von Hunderten von Jahren auch wieder verändern.

Bestimmte Aspekte des Fahrradfahrens lassen sich ebenfalls mit Präzession und Drehimpulserhaltung erklären. Warum zum Beispiel sollte man beim Freihändigfahren möglichst schnell fahren? Die rotierenden Räder haben dann einen starken Drehimpuls, der sich gegen eine Verkippung „wehrt", sodass viel mehr Zeit zum Reagieren bleibt als bei langsamer Fahrt. Dies hilft erstens dabei, nicht seitlich umzufallen: Wenn man sich seitlich in die Kurve neigt, reagiert das drehbare Vorderrad mittels Präzession und leitet eine Kurvenbewegung ein – dieser Effekt ermöglicht es, ohne Berührung der Lenkstange zu lenken. Zweitens sind überraschende selbstständige Lenkbewegungen des Vorderrads (z. B. wegen Bodenunebenheiten) fast ausgeschlossen, weil ein starkes Drehmoment nötig ist, um den Drehimpulsvektor zu verdrehen.

(D) Kreiselbewegung

Unter einer Kreiselbewegung versteht man Rotationsbewegungen eines starren Körpers, dessen Drehachse an einem Punkt festgehalten wird. Es liegt dann also ein rotierender Körper vor, bei dem sich die Lage der Drehachse – mit Ausnahme des einen festen Punktes – räumlich und zeitlich dauernd ändern kann.

Ein Kreisel im engeren Sinn ist ein rotationssymmetrischer Körper, der also eine Symmetrieachse hat, auf der auch der Massenmittelpunkt liegt. Eins solcher Kreisel wird durch drei Achsen beschrieben:

- „Figurenachse": Das ist die Symmetrieachse des Körpers, die bei der Beobachtung der Kreiselbewegung immer klar wahrgenommen werden kann.
- „Rotationsachse": Das ist die Drehachse, um die die schnelle Rotation des Kreisels stattfindet. Sie wird durch die Richtung des Vektors $\vec{\omega}$ beschrieben.
- „Drehimpulsachse": Diese Achse wird durch die Richtung des Vektors $\vec{L}$ beschrieben. Sie bleibt in ihrer Richtung konstant, solange kein Drehmoment auf den Kreisel wirkt, das eine Normalkomponente zum Drehimpuls aufweist.

Im einfachen Fall fallen alle drei Achsen zusammen. Die Vektoren $\vec{\omega}$ und $\vec{L}$ zeigen dann in Richtung der Figurenachse und können somit indirekt auch gut beobachtet werden.

Insbesondere sind dann $\vec{\omega}$ und $\vec{L}$ parallel, was gemäß Gleichung (5.34) bedeutet, dass das Trägheitsmoment I als Skalar geschrieben werden kann.

Ein Kreisel führt drei verschiedene Rotations- und Taumelbewegungen aus:

- Eigenrotation $\vec{\omega}$: Das ist die Drehung um die Rotationsachse, die viel schneller ist als die anderen Rotationen.
- Präzession $\vec{\omega}_P$: Tritt auf, sobald ein Drehmoment auf den Kreisel wirkt, das nicht parallel zum Drehimpuls steht (siehe S. 116). Die Präzessionsbewegung ist das langsame gemeinsame Drehen aller dreier Kreiselachsen.
- Nutation: Wenn die Drehimpulsachse durch einen schnellen Stoß ausgelenkt wird, trennen sich die drei Achsen voneinander. Dies führt zu einer Taumelbewegung der Figurenachse und der Rotationsachse um die – dann wieder feste – Drehimpulsachse (siehe unten).

Wenn der Schwerpunkt eines Kreisels als fester Punkt verwendet wird, nennt man den Kreisel „kräftefrei“. Diese Bezeichnung ist ein wenig irreführend – eigentlich geht es vor allem darum, dass dann kein äußeres Drehmoment auf den Kreisel wirken kann. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, eine solche kräftefreie Lagerung zu realisieren, z. B. mit Hilfe der „kardanischen Aufhängung“, bei der ein Körper frei um drei Achsen rotieren kann, die sich alle in seinem Schwerpunkt schneiden.

Ein solcher kräftefreier Kreisel, der um seine Symmetrieachse rotiert, behält seine Rotations-Achsrichtung bei, egal wie sich die Umgebung bewegt. Insbesondere gibt es keine Präzessionsbewegung, weil ja kein äußeres Drehmoment wirken kann. Die Achse eines solchen Kreisels zeigt immer in dieselbe Richtung, z. B. in die „absolute Nordrichtung“ (also ungefähr zum Polarstern), obwohl sich die Erde unter ihm wegdreht und auch dann, wenn sich der Kreisel in einem bewegten System (Fahrzeug etc.) befindet.

Man verwendet dieses Prinzip im „Gyroskop“ oder „Kreiselinstrument“, um eine feste dreidimensionale Achsrichtung im Raum zu definieren, z. B. in der Satellitennavigation. Zur absoluten Festlegung eines festen Koordinatensystems werden zwei oder drei Gyroskope verwendet, deren Achsrichtungen orthogonal ausgerichtet sind. Jeder dieser Kreisel verliert trotz bester Lagerung Rotationsenergie, die von außen zugeführt werden muss. Dabei ist es wichtig und schwierig, dass diese Energiezufuhr (Drehmoment!) keinerlei Normalkomponente auf die Drehimpulsrichtung aufweisen darf, weil die Kreiselachse sonst ihre Richtung verändert.

Wenn ein kräftefreier Kreisel durch einen Stoß verkippt wird, ändert sich sein Drehimpuls schlagartig um $\Delta\vec{L} = \int T\,\mathrm{d}t$. Was dadurch geschieht, ist kompliziert und wird hier nur qualitativ beschrieben:

- Durch den Kraftstoß zeigt der Drehimpulsvektor nicht mehr in Richtung der Figurenachse, die der raschen Änderung des Drehimpulses nicht folgen kann.
- Deshalb ändert sich auch das Trägheitsmoment und muss dann im Allgemeinen durch einen Tensor beschrieben werden.

- Dadurch wiederum ist der Vektor der Winkelgeschwindigkeit nicht mehr parallel zum Drehimpulsvektor, aber gleichzeitig auch nicht parallel zur Figurenachse des Kreisels.

Insgesamt führt der kräftefreie Kreisel nun eine Nutationsbewegung aus: Der Drehimpulsvektor $\vec{L}$ ist konstant (solange kein weiterer Stoß passiert), während die beiden anderen Vektoren (Figurenachse und $\vec{\omega}$) um $\vec{L}$ herum kreisen.

Als Beobachter sieht man die Nutation in erster Linie als „Taumelbewegung“ der Figurenachse. Dieses Taumeln erfolgt um die Drehimpulsrichtung herum, die dadurch also auch erkennbar ist. Es ist hingegen äußerst schwer zu sehen, dass die Eigendrehung des nutierenden Kreisels nun nicht um die Symmetrieachse erfolgt, sondern um eine eigene Achse, die sich selbst wieder um die Drehimpulsrichtung dreht.

Wenn ein Kreisel außerhalb seines Schwerpunkts gelagert wird, ist er nicht mehr kräftefrei. Dann tritt vorerst fast immer Präzession durch die Schwerkraft auf. In den meisten Fällen kommt es aber durch Stöße und andere Störungen zusätzlich zur Nutation, sodass die großskalige Präzession mit kleinen zittrigen Nutationsbewegungen überlagert ist. Dies ist dann ein Zeichen dafür, dass die Figurenachse, der Drehimpuls und die Winkelgeschwindigkeit in ihren Richtungen nicht ganz parallel sind, was die Situation sehr schwer zu beschreiben macht.

Wenn ein Kreisel so gelagert ist, dass sich die Achse in einer Ebene frei bewegen kann, die dritte Richtung aber fest ist, dann nennt man ihn einen „gefesselten Kreisel“.

Eine wichtige Anwendung ist der Kreiselkompass, der so aufgehängt ist, dass seine Drehachse immer waagrecht stehen muss (also parallel zum Erdboden), während er sich in dieser horizontalen Ebene frei bewegen kann. Dieser Kreisel wird in sehr schnelle Rotation versetzt. Wenn sich nun die Erde „unter ihm wegdreht“, hat er die Tendenz, seine Achsrichtung beizubehalten. Dadurch kippt die Achse aber aus der horizontalen Ebene, erfährt durch die Gravitation ein Drehmoment und weicht diesem durch Präzession aus. Dies könnte eigentlich dazu führen, dass die Achse schräg steht (wie beim Kinderkreisel) und sich andauernd dreht.

Beim Kreiselkompass ist jene Achse, um die die Präzessionsbewegung laufen müsste, extra nicht ganz reibungsfrei, sodass die Energie der Präzession verschwindet und der Kreisel sich in die horizontale Ebene zwingen lässt, und zwar so, dass er seine Achsrichtung am wenigsten verändern muss: Deshalb bleibt jene Komponente seines Drehimpulses, die parallel zur Erdachse steht, unverändert und der Kompass zeigt immer waagrecht zum geographischen Nordpol. Dies ist ein Vorteil gegenüber dem Magnetkompass, der störanfällig ist und zum (schlecht definierten!) magnetischen Nordpol zeigt. Ein Kreiselkompass kann allerdings nicht in schnell bewegten Fahrzeugen eingesetzt werden, weil er dann durch die Corioliskraft eine zusätzliche Ablenkung erfährt, sodass seine Achse von der Nordrichtung abweicht.