2. Übung: Modale Ordnungsreduktion

Aufgabe 2.1: Dominanzmaße und modale Ordnungsreduktion

Die physikalische Modellierung eines technischen Prozesses ergibt das folgende dynamische Mehrgrößensystem[1]

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}} &= \begin{bmatrix} -9 & 19 & 0 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 8 & 0 & -1 & 16 \\ 0 & -\frac{19}{2} & 0 & -10 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -1 & -2 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \\
\boldsymbol{y} &= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 2 & 1 & 6 \\ 2 & \frac{3}{2} & -1 & 5 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}.
\end{aligned}
$$

Die Regelung und Zustandsschätzung des Systems sollen auf dem SYSMAX/0815-Mikrocontroller implementiert werden. Dieser Controller kann aber nur Systeme bis zur Ordnung drei simulieren.

a) Zeigen Sie mit dem Verfahren nach Litz, dass das System reduziert werden kann. Schreiben Sie ein einfaches Matlab Skript, um die Strukturdominanzmaße zu berechnen. Arbeiten Sie dabei mit der folgenden Formel aus der Vorlesung zur Berechnung von M_k:

$$
M_k = \max_{\substack{i=1\ldots q \\ j=1\ldots p}} D_{ikj,\text{norm}} \quad \text{mit} \quad D_{ikj,\text{norm}} = \left| \frac{\hat{c}_{ik} \cdot \hat{b}_{kj} \cdot u_{j0}}{\mu_i \cdot \lambda_k} \right|
$$

Berechnen Sie außerdem das **Summen-Dominanzmaß**,

$$
S_k = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{p} D_{ikj,\text{norm}}.
$$

Mit $\hat{}$ gekennzeichnete Größen gehören zum diagonalisierten System, der Index p bezeichnet die Anzahl der Eingänge, der Index q die Anzahl der Ausgänge und ij den Übertragungspfad von Eingang j auf Ausgang i. u_{j0} und μ_i skalieren die Ein- und Ausgänge des Systems. Geben Sie die nicht-dominanten Eigenwerte an.

b) Geben Sie das reduzierte System der Ordnung m in Modalkoordinaten an (nur Zustandsgleichung ohne Ausgang).

c) Um eine Rücktransformation in den ursprünglichen Zustandsraum zu ermöglichen und um die Ausgänge zu berechnen, werden die nicht-dominanten Zustände geschätzt: $\boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{E}\boldsymbol{z}_1$.

d) Wie lautet das vollständige reduzierte System einschließlich Ausgangsgleichung?

e) Implementieren Sie zum Vergleich eine Korrektur der stationären Genauigkeit mit dem *Verfahren nach Guth*. Sie finden dieses Verfahren auf dem Kochrezept zur Ordnungsreduktion.

f) Simulieren Sie die Sprungantwort der reduzierten Systeme und vergleichen Sie die Ergebnisse mit dem Originalsystem. Passen das neue und alte System zusammen? Verändern Sie die Ordnung m des reduzierten Systems und vergleichen Sie erneut.

[1]Frei nach einer Übung des Instituts für Regelungs- und Steuerungssysteme, Univ. Karlsruhe.

Aufgabe 2.2: Modellbildung (Vorbereitung für die Übung 3)

Das in Abb. 1 gezeigte Flussbild stellt ein komplexes Reaktionsnetzwerk dar, wie es in der Biologie vorkommt. In dieser Aufgabe sollen in einem ersten Schritt darin Differentialgleichungen für die Stoffkonzentrationen $c_i(t)$ für die Komponenten $i \in \{A, B, C, D, E, F\}$ unter Verwendung der Reaktionskinetik aufgestellt werden. In der nächsten Übung werden verschiedene Modellreduktionsverfahren auf dieses Modell angewendet.

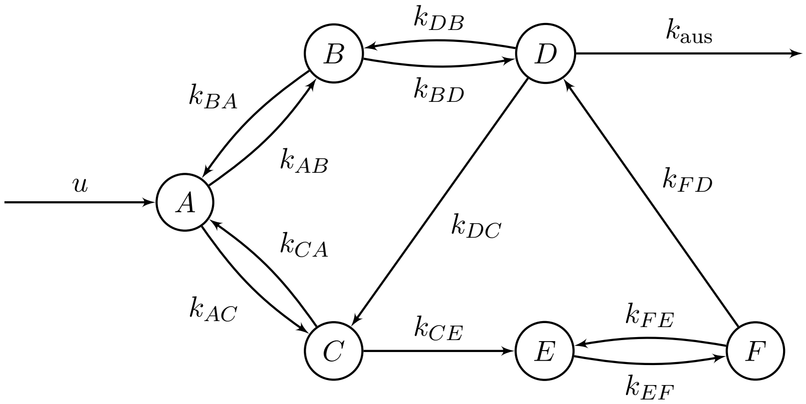

Abbildung 1: Reaktionsnetzwerk für die Komponenten A bis F

a) Stellen Sie lineare Konzentrationsdifferentialgleichungen für die Komponenten A bis F auf. Alle vorkommenden Reaktionen sind Elementarreaktionen, für die sich die Konzentrations-DGL vereinfacht aufstellen lassen mit:

$$\mathrm{A} \underset{k_{\text{rück}}}{\overset{k_{\text{hin}}}{\rightleftharpoons}} \mathrm{B}: \qquad \dot{c}_A = -k_{\text{hin}} c_A + k_{\text{rück}} c_B.$$

b) Schreiben Sie das System in Zustandsraumdarstellung auf mit $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ und $\boldsymbol{y} = [c_C,\, c_D]^T$. Wählen Sie den Zustandsvektor als $\boldsymbol{x} = [c_A, c_B, c_C, c_D, c_E, c_F]^T$.