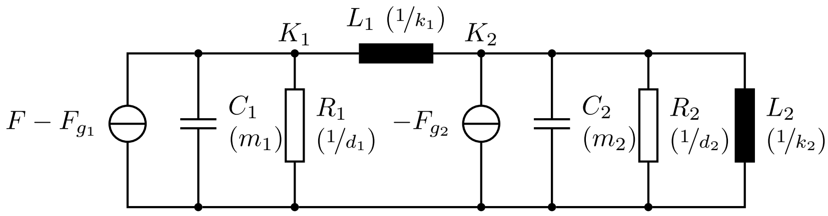
1. Übung: Kurzlösung

Aufgabe 1.1: Analogiebetrachtungen (verallg. Potential- und Flussvariablen)

a) **Bewegungsmodell:** (Impulssatz)

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= \sum F_i = F - F_{g_1} - d_1\dot{x}_1 + k_1(x_2 - x_1) \\ m_2\ddot{x}_2 &= \sum F_j = \quad - F_{g_2} - d_2\dot{x}_2 - k_1(x_2 - x_1) - k_2x_2 \end{aligned}$$

b) Die grafische Umwandlung liefert das Ergebnis



Aufgabe 1.2: Passive Systeme

a) *mechanische Feder*

- Wahl Zustand über Dynamikgleichung

$$\dot{s}(t) = v(t) \Rightarrow x(t) := s(t).$$

  Aus der Dynamikgleichung wird der Eingang $u(t) = v(t)$ abgelesen.
- Hamiltonfunktion (aus Physik bekannt): $H(x) = \frac{1}{2}kx^2$
- Kollokierter Ausgang ist $y = \frac{\partial H(x)}{\partial x} = kx(= F_k)$, Leistungspaar $P(t) = s(t)F_k(t)$

Prüfe Ableitung $\dot{H} = \frac{\partial H(x)}{\partial x}\dot{x} = kx\,v = yu$. Das System ist also *passiv und verlustfrei.*

b) *magnetische Induktivität*

- Wahl Zustand über Dynamikgleichung $\dot{\Phi}_L(t) = u_L(t) \Rightarrow x(t) := \Phi_L(t)$ und $u(t) = u_L(t)$ abgelesen.
- Hamiltonfunktion (magnetische Energie): $H(x) = \frac{1}{2}\frac{x^2}{L}$
- Kollokierter Ausgang ist $y = \frac{\partial H(x)}{\partial x} = \frac{x}{L}$

Prüfe Ableitung $\dot{H} = \frac{\partial H(x)}{\partial x}\dot{x} = \frac{x}{L}\,u_L = yu$. Das System ist also *passiv und verlustfrei.*

c) *PT_1-Glied*

– Dynamikgleichung $\dot{y} = -\frac{1}{T}y + u$

– Positiv-definitie Ansatzfunktion $H(y) = \frac{1}{2}y^2$ (hier nicht aus phys. Zusammenhängen)

Prüfe Ableitung $\dot{H} = \frac{\partial H(y)}{\partial y}\dot{y} = y\left(-\frac{1}{T}y + u\right) = -\frac{1}{T}y^2 + uy < uy$. Das System ist also *passiv und verlustbehaftet.* Die Ausgangsrückführung führt ein dämpfendes Element ein.

Aufgabe 1.3: Port-Hamilton-Systemdarstellung

Entsprechend ihrer Bedeutung sind verallgemeinerte Variablen, die dem Strom entsprechen, auf den Verbindungen eingezeichnet, und spannungs-äquivalente Variablen neben dem jeweiligen Bauteil. Die Maschen- und Knotengleichungen ergeben

$$\begin{aligned} M_1: &\quad -e_{R_1} - f_L - e_{R_2} - f_P = 0 \\ M_2: &\quad -e_C + e_{R_2} = 0 \\ K: &\quad e_L - f_{R_2} - f_C = 0. \end{aligned}$$

Die Port-Hamilton Darstellung ergibt sich mit den Zusammenhängen für die resistiven Bauteilen und den Definitionen aus dem Kochrezept zu

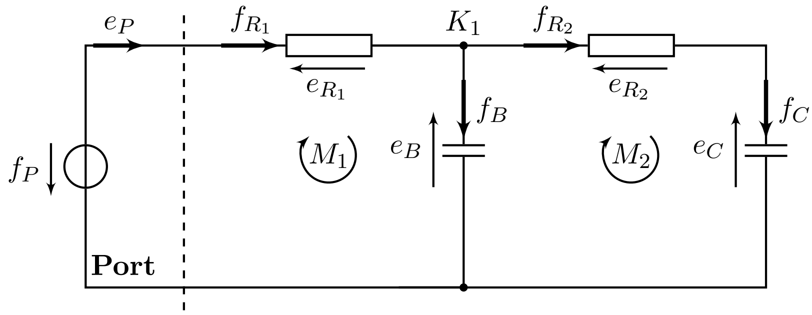
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x_C \\ x_L \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & R_1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_C} \\ \frac{\partial H}{\partial x_L} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_C} \\ \frac{\partial H}{\partial x_L} \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 1.4: Port-Hamilton Modellierung chemischer Reaktions- und Transportsysteme

a) Modellierung durch Analogiebetrachtung

1. Das elektrische Ersatzschaltbild ergibt sich wie folgt:



Die Port-Hamilton Darstellung des Systems lautet

$$-\begin{bmatrix} f_{\mathrm{B}} \\ f_{\mathrm{C}} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_{\mathrm{B}} \\ e_{\mathrm{C}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot f_{\mathrm{P}} \tag{1}$$

mit der Ausgangsgleichung

$$e_{\mathrm{P}} = \frac{1}{R_1} \cdot e_{\mathrm{B}} + \frac{1}{R_1} \cdot f_{\mathrm{P}}. \tag{2}$$

Mit den partiellen Ableitungen der Hamilton-Funktion erhält man das Modell

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{c}_{\mathrm{B}} \\ \dot{c}_{\mathrm{C}} \end{bmatrix} &= -R^* \cdot T \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{c}_{\mathrm{B}}} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) & -\frac{1}{R_2 \cdot \bar{c}_{\mathrm{C}}} \\ -\frac{1}{R_2 \cdot \bar{c}_{\mathrm{B}}} & \frac{1}{R_2 \cdot \bar{c}_{\mathrm{C}}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta c_{\mathrm{B}} \\ \delta c_{\mathrm{C}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u \\ y &= \frac{R^* \cdot T}{R_1 \cdot \bar{c}_{\mathrm{B}}} \cdot \delta c_{\mathrm{B}} + \frac{1}{R_1} \cdot u. \end{aligned} \tag{3}$$

$\bar{c}_i$ bezeichnet die Gleichgewichtskonzentration eines Stoffes. Man beachte, dass auf der linken Seite der Dynamikgleichung $\dot{c}_i$ steht, da $\delta \dot{c}_i = \dot{c}_i - \dot{\bar{c}}_i$ und $\dot{\bar{c}}_i = 0$ ist ($\bar{c}_i = \text{const.}$).

b) Modellierung eines Reaktionssystems

Für das System erhält man

$$\begin{aligned} \dot{c}_{\mathrm{B}} &= -\frac{R^* \cdot T}{\bar{c}_{\mathrm{B}}} \cdot (\gamma_1 + \gamma_2) \cdot \delta c_{\mathrm{B}} + \gamma_1 \cdot u_{\mathrm{A}} + (\gamma_2 - \gamma_1) \cdot u_{\mathrm{C}} \\ y_{\mathrm{A}} &= -\frac{\gamma_1 \cdot R^* \cdot T}{\bar{c}_{\mathrm{B}}} \cdot \delta c_{\mathrm{B}} + \gamma_1 \cdot (u_{\mathrm{A}} - u_{\mathrm{C}}) \\ y_{\mathrm{C}} &= -\frac{R^* \cdot T}{\bar{c}_{\mathrm{B}}} \cdot (\gamma_1 - \gamma_2) \cdot \delta c_{\mathrm{B}} + \gamma_1 \cdot u_{\mathrm{A}} - (\gamma_1 + \gamma_2) \cdot u_{\mathrm{C}}. \end{aligned} \tag{4}$$