

### 3. Übung: Kurzlösung

Stand: 23.05.2016

Ausgangssystem Reaktionsnetzwerk aus Übung 2

$$A = \begin{bmatrix} -100 & 500 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 100 & -500.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -20 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & -2.7 & 0 & 1.8 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & -10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & -11.8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Modale Ordnungsreduktion nach Litz

– Diagonalisiertes System

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -600.42 & & & & & \\ & -21.03 & & & & \\ & & -19.89 & & & \\ & & & -2.78 & & \\ & & & & -0.81 & \\ & & & & & -0.06 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} -0.2355 \\ -0.0003 \\ -0.0003 \\ -0.0307 \\ 0.0055 \\ 0.8429 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 2.0391 \cdot 10^{-7} & -0.0139 & -0.1521 & 0.0114 & -0.0051 & 0.0004 \\ -5.9175 \cdot 10^{-4} & 0.0719 & -0.0804 & 0.9806 & -0.4935 & 0.0387 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

– Stationäre Werte des Ausgang für  $u_j(t) = \sigma(t)$  ( $u_{j0} = 1$ ) sowie Werte für  $\mu_j$ 

$$Y_{\text{stat.}} = \begin{bmatrix} 0.0050 & 0.5000 \end{bmatrix}^T = \boldsymbol{\mu}.$$

– Dominanzmaße

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 4.641 \cdot 10^{-7} & 3.528 \cdot 10^{-5} & 4.6695 \cdot 10^{-4} & 0.0252 & 0.0069 & 1.0316 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 4.801 \cdot 10^{-7} & 3.710 \cdot 10^{-5} & 4.6942 \cdot 10^{-4} & 0.0468 & 0.0136 & 2.0599 \end{bmatrix}.$$

– Nach Dominanzmaß sortierte Teilsysteme,  $m = 3$ 

$$\hat{A}_1 = \begin{bmatrix} -0.0635 & & \\ & -2.7787 & \\ & & -0.8119 \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_1 = \begin{bmatrix} 0.8429 \\ -0.0307 \\ 0.0055 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A}_2 = \begin{bmatrix} -19.8943 & & \\ & -21.0345 & \\ & & -600.4171 \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_2 = \begin{bmatrix} 3.0535 \cdot 10^{-4} \\ 2.6687 \cdot 10^{-4} \\ -0.2355 \end{bmatrix}$$

– Rekonstruktionsmatrix  $\mathbf{E}$  und reduzierte Ausgangsmatrix  $\hat{C}_1$ 

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2.3279 \cdot 10^{-8} & -0.0020 & -0.0010 \\ 1.9348 \cdot 10^{-8} & -0.0016 & -0.0009 \\ -6.2872 \cdot 10^{-7} & 0.0516 & +0.0276 \end{bmatrix}, \quad \hat{C}_1 = \begin{bmatrix} 3.8860 \cdot 10^{-4} & 0.0111 & -0.0053 \\ 0.0387 & 0.9805 & -0.4936 \end{bmatrix}$$

- Rekonstruktionsmatrix  $\mathbf{E}_{\text{Guth}} = \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_1^+$  beim Verfahren nach *Guth*

$$\mathbf{E}_{\text{Guth}} = \begin{bmatrix} 0.0116 & -9.6235 \cdot 10^{-6} & 5.8721 \cdot 10^{-6} \\ 0.0096 & -7.9549 \cdot 10^{-6} & 4.8539 \cdot 10^{-6} \\ -0.2955 & 2.4590 \cdot 10^{-4} & -1.5004 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \cdot 10^{-4},$$

$$\hat{\mathbf{C}}_{1,\text{Guth}} = \begin{bmatrix} 3.8860 \cdot 10^{-4} & 0.0114 & -0.0051 \\ 0.0387 & 0.9806 & -0.4935 \end{bmatrix}$$

- Sprungantworten sind in Abb. 1 dargestellt, Bode-Plots in Abb. 2

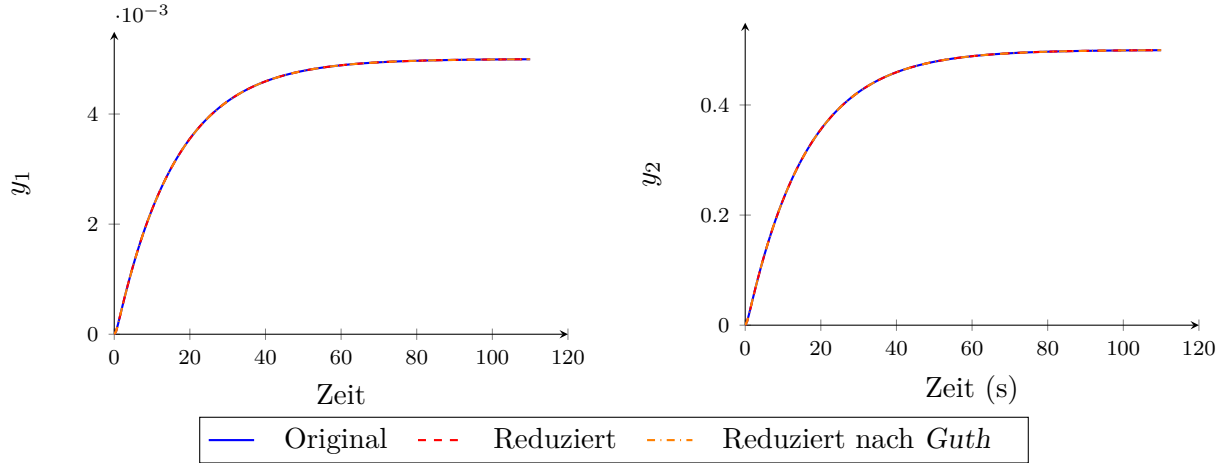


Abbildung 1: Sprungantworten des Originalsystems und der reduzierten Systeme bei der modalen Ordnungsreduktion

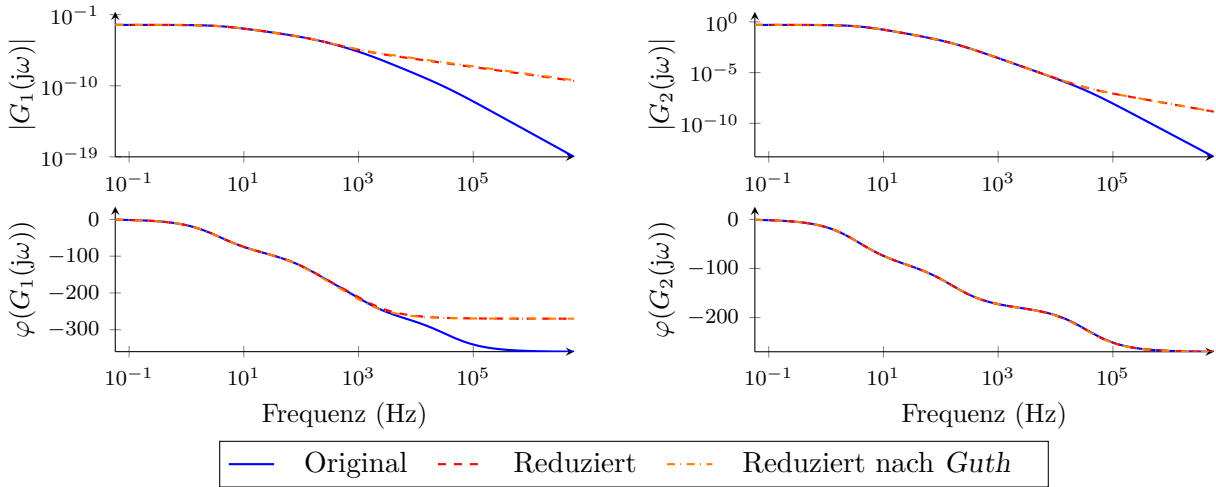


Abbildung 2: Bode-Plot des Originalsystems und des reduzierten Systems bei der modalen Ordnungsreduktion nach Litz.

b) *Ordnungsreduktion mittels balancierter Darstellung* (Algorithmus lt. Hilfsblatt)

**Nützliche Matlab-Befehle:** chol, lyap

– Lösungen der Lyapunov-Gleichung

$$P = \begin{bmatrix} 5.3786 & 1.0747 & 0.0020 & 0.2011 & 0.0123 & 0.0103 \\ 1.0747 & 0.2148 & 4.0070 \cdot 10^{-4} & 0.0402 & 0.0025 & 0.0021 \\ 0.0020 & 4.0070 \cdot 10^{-4} & 7.7113 \cdot 10^{-7} & 7.7113 \cdot 10^{-5} & 4.8101 \cdot 10^{-6} & 4.0601 \cdot 10^{-6} \\ 0.2011 & 0.0402 & 7.7113 \cdot 10^{-5} & 0.0077 & 4.7995 \cdot 10^{-4} & 4.0505 \cdot 10^{-4} \\ 0.0123 & 0.0025 & 4.8101 \cdot 10^{-6} & 4.7995 \cdot 10^{-4} & 3.1484 \cdot 10^{-5} & 2.6674 \cdot 10^{-5} \\ 0.0103 & 0.0021 & 4.0601 \cdot 10^{-6} & 4.0505 \cdot 10^{-4} & 2.6674 \cdot 10^{-5} & 2.2605 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.0077 & 0.0077 & 0.0096 & 0.0077 & 0.0115 & 0.0112 \\ 0.0077 & 0.0077 & 0.0097 & 0.0078 & 0.0115 & 0.0112 \\ 0.0096 & 0.0097 & 0.0447 & 0.0232 & 0.0298 & 0.0295 \\ 0.0077 & 0.0078 & 0.0232 & 0.1884 & 0.0437 & 0.0543 \\ 0.0115 & 0.0115 & 0.0298 & 0.0437 & 0.0485 & 0.0485 \\ 0.0112 & 0.0112 & 0.0295 & 0.0543 & 0.0485 & 0.0494 \end{bmatrix}$$

– Transformationsmatrix

$$T = \begin{bmatrix} -0.1716 & -0.1717 & -0.2251 & -0.2955 & -0.2792 & -0.2806 \\ -0.1700 & -0.1654 & 0.2898 & 5.3015 & 0.8854 & 1.2118 \\ 0.0264 & 0.0250 & 4.4887 & -1.8425 & 8.8149 & 8.1764 \\ -0.0062 & -0.0028 & -169.0043 & 1.8528 & -0.4890 & 0.8127 \\ -0.0112 & 0.0619 & 28.7674 & -0.2905 & -5.5547 & 6.0731 \\ -4.3572 \cdot 10^{-4} & 0.0054 & 72.0813 & -0.4215 & -66.7090 & 73.0284 \end{bmatrix}$$

– Balanciertes System, sortiert nach absteigenden Werten von  $\sigma_i^2$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -0.0575 & 0.1165 & -0.0177 & -0.0013 & -0.0075 & 2.9104 \cdot 10^{-4} \\ -0.1165 & -2.4617 & 0.7269 & 0.0573 & 0.3256 & -0.0126 \\ 0.0177 & 0.7269 & -1.1317 & -0.1690 & -0.9637 & 0.0372 \\ -0.0041 & -0.1790 & 0.5299 & -21.8643 & -14.2638 & 1.2205 \\ -0.0075 & -0.3257 & 0.9639 & -77.8706 & -602.6741 & 49.1341 \\ -2.9188 \cdot 10^{-4} & -0.0126 & 0.0373 & -3.0916 & -49.3491 & -16.8107 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} -0.1716 & -0.1700 & 0.0264 & -0.0062 & -0.0112 & -4.3572 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}^T$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} -0.0017 & 0.0019 & -1.9731 \cdot 10^{-4} & -0.0059 & 1.4596 \cdot 10^{-4} & 3.7234 \cdot 10^{-5} \\ -0.1716 & 0.1700 & -0.0264 & -0.0019 & -0.0112 & 4.3413 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

– Sprungantworten sind in Abb. 3 dargestellt, Bode-Plots in Abb. 4

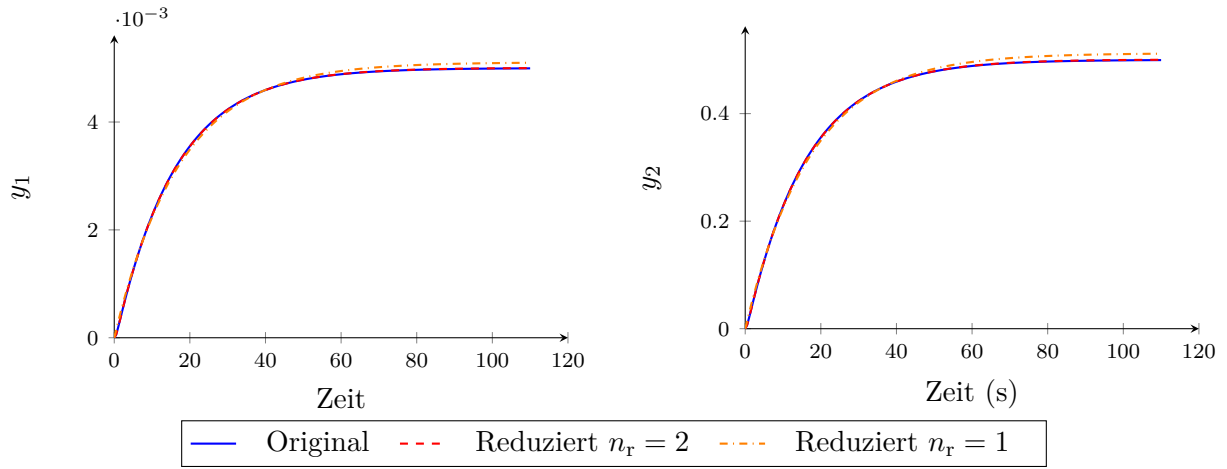


Abbildung 3: Sprungantworten des Originalsystems und der reduzierten Systeme bei der Ordnungsreduktion mittels balancierter Darstellung. Stationäre Genauigkeit ist bei balancierter Darstellung nicht garantiert.

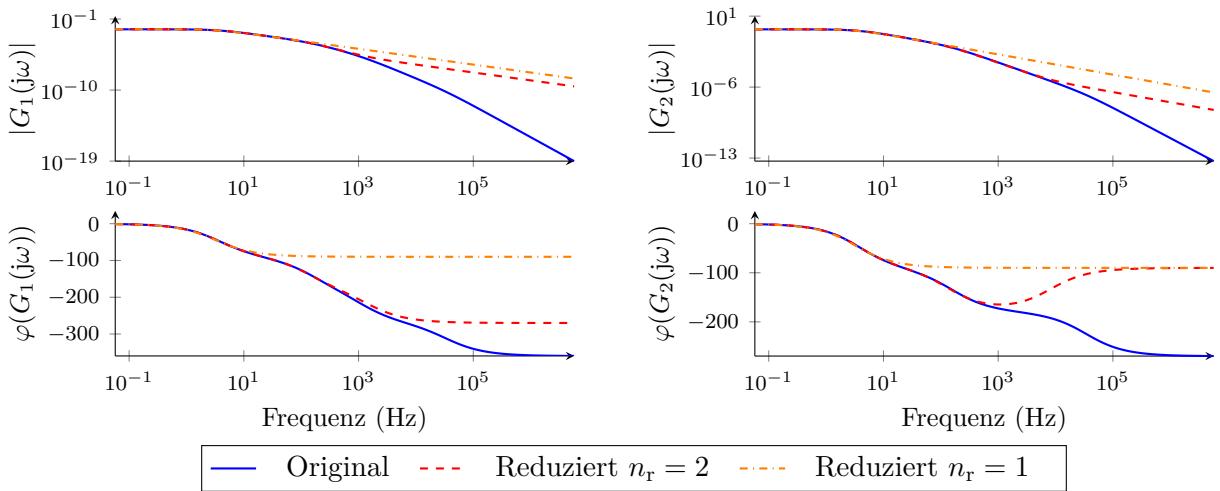


Abbildung 4: Bode-Plot des Originalsystems und des reduzierten Systems bei der Ordnungsreduktion mittels Balancierter Darstellung.

c) *Ordnungsreduktion mittels Krylov-Unterräumen*

- Basis Krylov-Unterraum der Ordnung  $n_r = 3$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -0.9799 & -0.0406 & -0.0207 \\ -0.1958 & 0.0155 & 0.0602 \\ -0.0004 & 0.0106 & 0.0038 \\ -0.0377 & 0.9499 & 0.3073 \\ -0.0025 & 0.2309 & -0.6999 \\ -0.0021 & 0.2059 & -0.6416 \end{bmatrix}$$

- Reduziertes Modell

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} -0.0738 & -9.3924 & -25.2104 \\ -0.0031 & -2.7970 & -3.4022 \\ -0.0016 & -1.4252 & -3.9975 \end{bmatrix}, & \hat{\mathbf{B}} &= \begin{bmatrix} -0.9799 \\ -0.0406 \\ -0.0207 \end{bmatrix} \\ \hat{\mathbf{C}} &= \begin{bmatrix} -0.0004 & 0.0106 & 0.0038 \\ -0.0377 & 0.9499 & 0.3073 \end{bmatrix}, & \hat{\mathbf{D}} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Sprungantworten sind in Abb. 5 dargestellt, Bode-Plots in Abb. 6

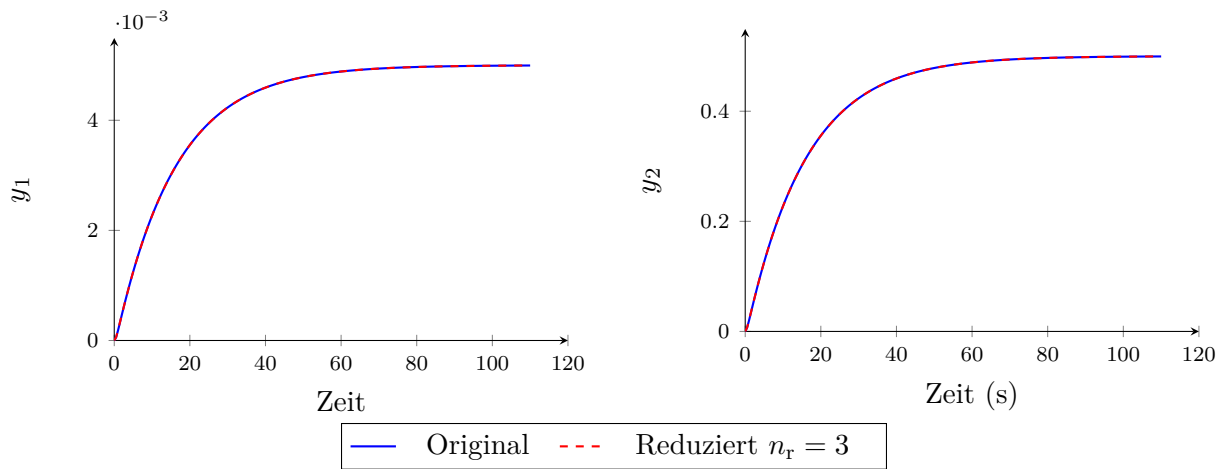


Abbildung 5: Sprungantworten des Originalsystems und des reduzierten Systems bei der Ordnungsreduktion mittels Krylov-Unterraummethoden.

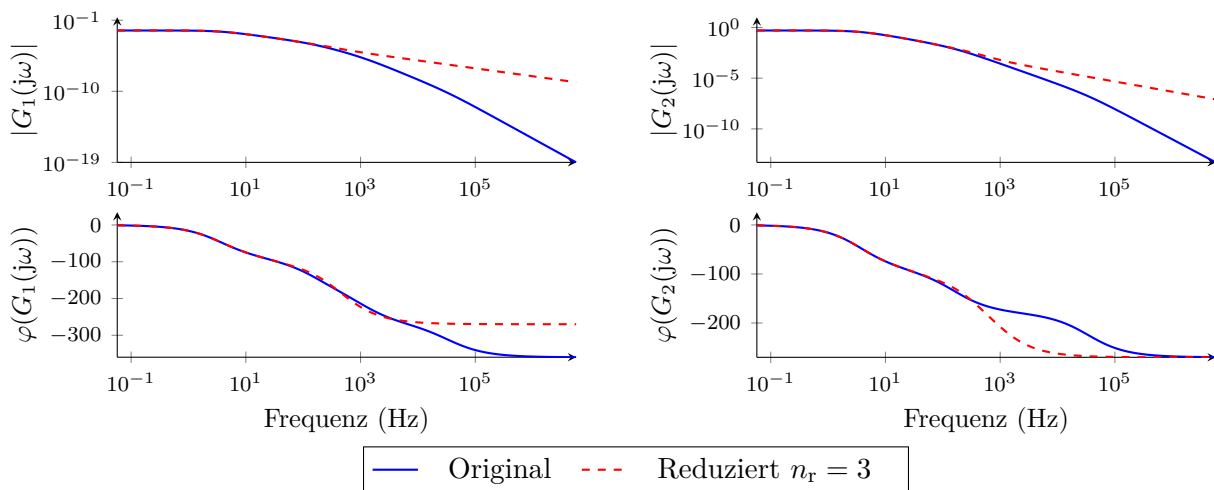


Abbildung 6: Bode-Plot des Originalsystems und des reduzierten Systems bei der Ordnungsreduktion mittels Krylov-Unterraummethoden.