7. Übung: Fisher-Informationsmatrix

Aufgabe 7.1: Theoretisches Einführungsbeispiel

Die Fisher-Information (Parameteranzahl $m = 1$) und die Fisher-Informationsmatrix ($m > 1$) wird im Rahmen der Parameterschätzung eingesetzt, um die Güte der Schätzung zu quantisieren. Man analysiert, wie gut die Identifikation des Parameters aus den vorhandenen Messdaten funktioniert. Anhand eines einfachen theoretischen Beispiels soll die Aussagekraft der Fisher-Matrix verdeutlicht werden.

Wie betrachten dazu das folgende statische System

$$x(t) = p_1 \cdot a + p_2 \cdot u(t), \quad y(t) = x(t),$$

mit den reellen Parametern $p_{1,2} \in \mathbb{R}$, der Konstanten $a \in \mathbb{R}$ und dem Eingangssignal u. Der Zustand x ist messbar. Es wird nun eine Messung durchgeführt mit $y(t_1) = z$.

a) Sie wollen nun die Parameter p_1, p_2 aus der Messung ermitteln. Berechnen Sie dazu das Minimum der Gütefunktion $\Phi(p_1, p_2) = (x\,(p_1, p_2) - z)^2$ bzgl. der Parameter. Was fällt Ihnen auf?

b) Der Fehler zwischen Messung und Simulation sei $\varepsilon = z - x$ mit der Varianz σ. Berechnen Sie die Sensitivitätsmatrix $\boldsymbol{W} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit n = Dimension des Systems und m = Anzahl Parameter sowie die Fisher-Informationsmatrix $\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Die Sensitivitätsmatrix hat dabei die folgende allgemeine Struktur:

$$\boldsymbol{W} = [\boldsymbol{w}_1 \ \boldsymbol{w}_2 \dots \boldsymbol{w}_m] = \left[\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial p_1} \ \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial p_2} \dots \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial p_m}\right].$$

c) Beurteilen Sie die Schätzgüte der Parameter p_1, p_2. Was fällt auf? Welche zwei Lösungsmöglichkeiten gibt es nun?

d) Nehmen Sie im Folgenden an, dass Ihnen zwei Messungen $y(t_i) = z_i$ $(i = 1, 2)$ mit unterschiedlichen Eingangssignalen u_i vorliegen. Berechnen Sie für die Gütefunktion

$$\Phi(p_1, p_2) = \sum_{i=1}^{2} \left(x\,(p_1, p_2)_i - z_i\right)^2$$

das Minimum und bestimmen Sie so den optimalen Parametervektor $\overline{p}_1, \overline{p}_2$. Berechnen Sie auch hier die Fisher-Informationsmatrix. Bestimmen Sie $C(t_k)$ mittels der im Hilfsblatt beschriebenen Heuristik mit $e_i = x_i - z_i$.

Aufgabe 7.2: Implementierung eines Parameteranalyse Algorithmus in *Matlab/Simulink*

Die Parameteranalyse mit Hilfe der Fisher-Informationsmatrix wird meistens in ein Parameterschätzverfahren integriert. Überlegen Sie sich ein Schema aus einer kombinierten Analyse und Schätzung für ein beliebiges dynamisches System.

Im Folgenden sollen Sie die Parameteranalyse anhand eines Beispielsystems in *Matlab/Simulink* implementieren. Gegeben sei das lineare zeitinvariante System der Form

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

und dem Parametervektor $\boldsymbol{p} = [p_1, p_2, p_3]$. Die Systemmatrizen sollen in der Form

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{21} & -0.4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

vorliegen. Die Modellparameter sind somit $\boldsymbol{p} = [a_{12}, a_{21}, b_1]$.

a) Wählen Sie einen Parametersatz, z.B. $\boldsymbol{p} = [0.01, 3.654, 0.097]$ – dies wäre beispielsweise das Ergebnis eines Iterationsschrittes Ihrer übergeordneten Parameterschätzung.

b) Es wird angenommen, dass das System mit den Parametern strukturell beobachtbar ist. Wie müssen Sie prinzipiell die Beobachtbarkeit nachweisen und welche Schwierigkeiten ergeben sich hieraus?

c) Berechnen Sie die Sensitivitätsmatrix $\boldsymbol{S}_x(t, \boldsymbol{x}) = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{p}} = \boldsymbol{W}$ über numerische Differentiation. Die Formel kann zum Beispiel folgendermaßen angesetzt werden, wobei m dem m-ten Parameter entspricht

$$\boldsymbol{w}_m(t) = \frac{(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p} + \Delta p_m \boldsymbol{e}_m, t) - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, t))}{\Delta p_m}.$$

Regen Sie dafür Ihr Simulationsmodell mit einer geeigneten Eingangsgröße an und verwenden Sie die sich ergebenen Zustandsgrößen $\boldsymbol{x}(t_k)$ für die obige Formel.

d) Stellen Sie nun die Fisher-Informationsmatrix auf und diagonalisieren Sie diese, wenn möglich. Nehmen Sie dabei an, dass die Messungen mit einer relativen Genauigkeit von $r_i = 0.01$ vorliegen. Welche Parameter können nur mit zu großer Unsicherheit geschätzt werden ?

e) Berechnen Sie die Fischer-Informationsmatrix erneut mit einer anderen Eingangsfunktion $u(t)$. Welche Parameter können diesmal nur ungenau bestimmt werden ?

Aufgabe 7.3: Zusatzaufgabe

Implementieren Sie einen Algorithmus, der für bestimmte Eingangssignale und entsprechende Messwerte der Zustände automatisiert nur mit hinreichender Güte bestimmbare Parameter auswählt.