101 學年度台灣大學數學系高等微積分（上）

101 學年度台灣大學數學系高等微積分上
由陳金次教授製作，以創用 CC 姓名標示-非商業性-禁止改作 3.0 台灣 授權條款釋出

課程內容

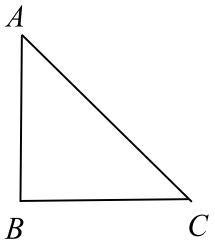
第一章　導論

1. 一則小故事

我曾經帶過台北區數學資優高中生，在講到複數時，我在黑板上寫道：

$i < 2i$ 對不對？

大家都說不對。
我再問：　為什麼不對？一個 i 比 2 個 i 少，有什麼不對？
「複數不能比較大小」班上同學異口同聲回答道。
我又問：複數為什麼不能比較大小？
教室裡一片寂然，年輕的眼神僵在那哩，幾秒鐘後有人說「老師這麼告訴我們」，有位女生很有創意地說：”因為複數不存在！”
我接著問：那你認為 $\sqrt{2}$ 存在嗎？
「存在！」這位女生很自信地回答道。
我問：如何讓我相信它存在？
女生上台，在黑板上畫一等腰直角三角形



圖一

$\overline{AB} = \overline{BC} = 1 \qquad \overline{AC} = \sqrt{2}$

我接著問：你怎麼知道 $\overline{AB} \perp \overline{BC}$，且 $\overline{AB} = \overline{BC} = 1$？
她說：可以用尺規作圖。

我說：每人的鉛筆粗細有別，再細的筆放在電子顯微鏡下一看，簡直不敢相信，它是坑坑洞洞，凹凹凸凸的，由許多不連續的碳粉所組成的軌跡。什麼是直線？什麼是點？真叫人無言以對。

她說：可是我們可以實實在在地感受到，如果 $\overline{AB}=\overline{BC}=1$，那麼 $\overline{AC}$ 就是 $\sqrt{2}$ 。

我說：你的如果，在現實世界中並不存在。它是存在於人的理性世界裡，現實世界裡劃不出直角，劃不出 1，可是你認為 $\sqrt{2}$ 很實在。有人說，有一數的平方等於-1，把它叫做 i，絕大多數的人都認為這個人瘋了，一個數的平方怎麼可能是負的呢？那是我們習慣實數的運算，天天接觸，不疑有他，不會有他！

我五歲的時候在台北的中山北路第一次看到洋人。但見一個渾身黃毛，腮頰盡鬚，鼻隆眼深，珠露藍光的動物騎在馬上，我以為是一隻奇怪的大猴子騎著馬在那邊散步，可是他的神情笑容又與人無異，驚訝不已！

習慣常常是束縛人的繩索，習慣成自然就認為天經地義，不容易接受與自己經驗相駁的新鮮事物。

i 和 $\sqrt{2}$ 一樣，在現實世界中都不存在，它們都是概念性地存在於人的理性世界中。只不過 $\sqrt{2}$ 可以透過圖像來了解，我們很容易接受它，而 i 則必須透過冥想來了解，因為他幽隱，不會在現實世界中直接顯像給你看，使人感覺它很不實在。

什麼叫實在? 實在是很主觀的感覺！

下面所述是一則真實故事。

台北縣鶯歌某小學老師出了一個問題請小朋友回答：

下列幾樣事物你認為那一項最重要?

(1) 陽光、空氣、水 (2) 金錢 (3) 親情 (4) 學識、名譽 (5) 漂亮(瀟灑)又甜蜜的另一伴

有不少小朋友的答案是(2)，那是小朋友很實在的感覺。

不要以為小朋友無知，大人的糊塗有更甚於小朋友者，否則每天也不會有那麼多奇怪怪的社會新聞，讓人怵目驚心。

水可以結冰，水可以化氣，你不能說冰很實在，化成氣體看不見了就不實在。

眼所見，未必是真。耳所聞，未必是實。空中妙有，未必不實在。

透過 i，可以設計飛機翼，探討流體力學；透過 i，可以計算 π 的近似值，研究數論；透過 i，可以處理物理上的許多問題，量子力學中不能沒有它；透過 i，幾何中最小曲面的存在問題得到解決，許多不可思議的漂亮特性因它而得……妳說 i 到底實不實在？

虛虛實實，有形無形，本是事物所呈現的一種形式，放棄自己的執著，慧眼才能萌生，才能體悟事物的本質。

諸相非相

金剛經裡有一段經文如下：
「凡所有相皆是虛妄。
若見諸相非相，即見如來。」
相是指形而下世界裡的點點滴滴，名利財色等，這些都是阻礙人們見到真如本性的絆腳石；不被形而下世界諸相所迷，就能見到你的本來面目。佛陀如是說。

我覺得這段經文對學數學有很大的啟示，人一著相就被黏住，頭腦僵硬，思想被框限起來，很難凌空看這世界，創造力也漫漫凋萎，開不出芬芳的花朵。

能夠創造出 i 這個數的人，一定不是凡人。對 i 這個數仍感到不舒服的人，一定是著相太深。

不只是數學，任何學問皆是如此。當物理學家知道用能量的觀點來統籌物理定律的時候，物裡學就已進入一個新的里程。最小作用原理說：

任何物理運動的軌跡，恆使運動過程中，總動能與總位能的差最小

誰看到動能了？誰看到位能了？可是它統籌了一切物理運動定律！你說它存不存在？實不實在？

能提出這種理論的人真是慧眼獨具啊！

物理是一門科學，動能與位能都可以量化。量與量之的關係由物理定律所規範，研究量與量的變化關係，預測事物的發展，而引入數學。

世間許多事物是無法量化的，這些無法量化的事物背後隱藏著無法量化的能量，主導著事物的發展，小至個人、家庭，大至社會、國家乃至全體人類，吉凶禍福，隱於其中。它作用於人而人不自知，隨其流轉不能自已。有人不畏風寒，半夜跑到河邊捧沙，喜見明牌，雀躍不已。有人千方百計，要把自己變洋，頭髮染成金黃不說，眼珠子也貼上兩塊藍色的膠膜；明明是美麗的丹鳳眼，卻恨它不疊雙，整形隆鼻，成為怪胎，自己高興。柬埔寨的一場政治風暴，兩百萬社會中堅命喪黃泉，當時柬國人口約五百萬，可見其殺戮之重；當其殺人也，無不自認代天行道高舉正義之旗。如今，自殺以殺死許多無辜之人，毀滅無數溫馨的家庭，造成多少傷痛無助的孤兒寡女，卻深信可以直達上帝的身邊，受上帝的關愛，上帝也瘋狂了！

如果真有無間地獄，那裡面住的不會是獅子老虎，獅子老虎吃飽了就睡，餓了又吃，雖然兇猛，不懂得作惡。打輸了就讓出寶座，交出城池，也不知道要臥薪嘗膽，獻上西施。牠們捕捉到一隻羚羊小姐，不會見她體態豐美，吃了可惜，先強暴她，再來吃她。只有人才有那個精靈，懂得轉那個彎，造那個惡，開那扇門，進入那個世界。

不要說沒有天堂，沒有地域，你怎知道？其實眼前就有地獄：有人作奸犯科，不敢見光；有人吸食毒品，不能自拔；有人殺父弒母，震驚社會。不是地獄又是什麼？

佛陀稱我們這個世界為娑婆世界，意思是堪忍世界，這個世界的苦特別多，眾生有個特性，很能忍受那個苦，人苦而不自知。也因為這個世界有那麼多苦，有緣的人才能悟，

知道要修行，能夠成仙成佛。天人享受福報，無憂無慮，福報享盡，五衰而亡，成佛不在天界。

仙佛也是人來做，地獄也是人來鑽。聰明的你，要作何選擇？可是多少聰明人不由自主地往地獄裡鑽，為什麼？值得我們借鏡深思。

這種能量因無法量化，數學幫不上忙，必須用另一種智慧來體會它。它可以讓人開竅，可以讓人愚蠢；可以讓人昇華，可以讓人墮落；可以孕育兒女，可以破碎家庭；可以開創盛世，可以導引亂世。智者識之，仁者憂之。

親愛的，請想一想，周遭所見，不在名利財色中車拚的有幾人？前進百大目的何在？尋求歷史定位所求為何？歷史上堪稱盛世的有幾年？亂世又有多長？將來入了社會的你還能保有一顆純善的心靈否？懷著祝福的婚姻會不會以離散收場？

可以量化的能量不會作怪，不可量化的能量阿……好好關照那顆心。

研習科學之外，聖賢的書不要視之如糞土。聖賢不會是糞土，視之如糞土，反使自己成糞土。

岳陽樓記中說「予嘗求古仁人之心，或異二者之為，何哉？不以物喜，不以己悲，居廟堂之高則憂其民；處江湖之遠，則憂其君。是進亦憂，退亦憂；然則何時而樂耶？其必曰：『先天下之憂而憂，後天下之樂而樂』呼！噫！微斯人，吾誰與歸？」

這樣的情懷可以讓人生命發光，照亮人間；雖不能至，心響往焉。

2. 數學的本質

數學中所提出的結論是絕對真理，不會因時空的流轉而有所改變，故稱之為「定理」。其他科學裡，見不到「定理」這樣的稱呼。物裡學中只見到牛頓三大運動定律，物質不滅定律，最小作用量原理，相對論……等，生物學中有達爾文提出的演化論，沒有人敢說它提出的是「定理」。

數學和其他科學在本質上有很大的不同，其他科學必須接受現實世界的檢驗。哪一天要被修正？不知道。牛頓力學在巨觀世界裡很管用，到微觀世界裡就行不通，量子力學於焉誕生。愛因斯坦神來之筆，以光速恆常來刻劃時空關係，提出相對論，宇宙中沒有比光更快的粒子！這也是愛因斯坦如是說，說不定哪一天也要面對修正。

物質不滅定律不是被證明出來，因為屢試不爽，我們相信宇宙是這樣的，你不能問為什麼要相信？這樣你沒辦法讀物理。

物理靠觀察，觀察要儀器，儀器有它的限制，在儀器力有未逮之處，你怎知道真相是什麼？你怎知道哈伯太空望遠鏡感應不到之處空空如也？觀察借助光波（或電磁波等），光波走宇宙的測地線(Geodesics)，誰曉得宇宙是封閉的還是開放的？你怎知道本宇宙之外沒有其他宇宙存在？你怎知道在那遙不可及之處物質仍然不滅？光速仍然恆常？

到了那一天再來修正吧！物理學家這樣說。這是科學之所以讓人信賴的地方，科學願意修正，宗教不能修正，能修正就不是宗教，你必須接受幾千年前人類的宇宙觀，否則無法虔誠，從信仰中得到力量。

物理雖有它的無可奈何之處，至少目前這套物理在我們的周遭很管用，還沒發現它有什麼紕漏。他能登月球，上火星，探測宇宙奧秘，前人所未敢夢；又能照亮黑暗，改變生產，衛星通訊，造福人類，創造現代文明。偉哉，物理！

為什麼數學是絕對真理？

你在證明定理 A 的時候，用到定理 B；定理 B 的證明又用到定理 C，定理 C 又用到定理 D……如此一直問下去，你只好投降，在某個地方叫停，不能再問下去了。不能問的東西稱為公理（Axiom）：你同意，我同意，我們都接受它。由這些公理所推導出來的結論就叫定理。

名詞也是如此。

你要解釋名詞 A，需要用到名詞 B，而什麼是 B 你又用 C 來解釋，什麼是 C 你又用到 D……如此一直問下去你只有詞窮，在某個地方叫停，不能再問下去了。不能問的東西就稱為無定義名詞：你知，我知，彼此心有靈犀一點通，知道它是什麼，可是又沒辦法說他是什麼。

公理和無定義名詞，是概念性的存在於人的理性世界裡。那個世界是人類彼此溝通的平台。

在歐幾里德幾何（Euclidean Geometry）中，點，直線，平面，空間等是無定義名詞。在實數系中，0 和 1 兩個數字不能問，由此產生整數系，由整數系和四則運算而產生有理數系。人類早期數字活動大概都在有理數系的世界裡推演，直到兩千餘年前發現了無理數，人們才恍然大悟，原來有理數之外還有許多我們不認識的數，但是什麼是實數，那些奇怪的數到底有多少？人們還是霧裡看花，直到 1860 年代德國數學家 R. Dedekin（1831-1916）提出了實數的建構，以及稍後 G. Cantor (1845-1918)對集合論的研究，人們才清晰地看到美麗的花朵。

我們這門課也將從實數的建構講起，由此展開近代數學的脈絡筋骨，讓你對近代數學有個通透的了解，並培訓你的基本功夫。如果說微積分是把你磨成一把小刀，那麼高等微積分要把你煉成一枝劍，使你能進出江湖，不用害怕。

當然，公理是建立在你我的共識上，所謂絕對真理是存在於人的理性世界裡，它因人而生，因人而存。其他物種如何？有一句話說：對牛彈琴。琴猶如此，想來對牛說 i，牛對你哞幾聲算是很給面子了。

我認識一位信佛的朋友，從烏山頭水庫獲得一隻大烏龜，少見的大，他心想，這麼大的烏龜，少說也有百歲以上，應該也是一個修行者。烏龜是雜食性動物，葷素不拘，他認為殺生不好，有礙修行，佛法無邊可度化牠，於是把牠放在一個大盆子裡，不能自由，斷絕一切葷食，那錄音機不停地巡迴播念佛號，無休無止，我不知道烏龜受度化了沒有，只知道不到一年，那烏龜生病了，不飲不食，又不久竟昇天去了。

阿彌陀佛！但願牠能往生西方極樂世界，離苦得樂，不再受世人擺佈。

不要去對烏龜談信仰，就跟不要對牛說 i 一樣。宗教也是人類文化的一環，同樣因人而生，因人而存。它能使人產生高貴情操，寄託生命；也能使人自以為殊勝，至高無上，被牽著鼻子走，執迷不誤，糊塗一生。

世間有偉大的科學家，也有提煉毒品，非法牟利的科學工作者；有偉大的宗教家，也有偏狂固執，走入邪門的宗教信仰者。發心不正，常容易誤入歧途。信教不是壞事，但願有宗教信仰的朋友，都能了澈開創者的本心，寄託生命，懷有高貴情操，讓自己的生命含光，點化迷津，造福人間，信自己所信，也能尊重別人所信。

我在台北青田街住了十五年，那是台大日式宿舍，有庭有院，三不五時就有人來按門鈴，要向我借幾分鐘，跟我談生命的道理，其中有華人、美國人、日本人、韓國人等，分屬某信仰的不同教派，我說我家裡有祖先的牌位，請你們尊重，另找別人去。他們一聽有祖先牌位，更是認真起來：「我們人人帶罪，只有基督的寶血能為我們洗清罪惡，因祂得救。信真神，不可拜祖先，祖先是人不是神，不能救你。」認為我需要救贖，不肯離開，令我困擾不已。

我想仰頭問天：基督阿，這是祢的道嗎？

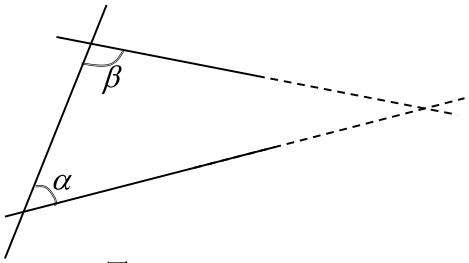
人從歷史中來，或許有一天也要從歷史中去， 哪一天人類走進了歷史(這一天不要說它不可能)，所謂絕對真理，也就不絕對了。一切宗教，都歸沉寂，一切紛爭，終歸平靜，Allah 和 God 之間再也不會有矛盾了。

或許在那遙遠的宇宙深處，有很高靈性的生命存在，他們怎麼看待生命？怎麼看待宇宙？人類這套文明，在那裏還管用嗎？雖不能知，卻可讓人知所謙思。

3. 歐幾里德平面幾何的五大公理

歐幾里德在他的《幾何原本》中提出下列五大公理：

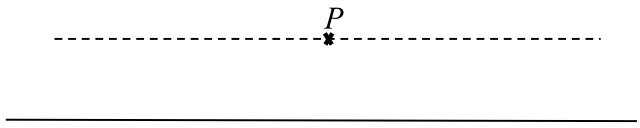
1. 任意兩點可以連一直線
2. 任一線段可以無限延長
3. 給定任意點及任意線段，能以該點為中心，線段長為半徑作一圓
4. 凡直角都全等（指兩角間的領域全等）
5. **（平行公理）**：
   兩條直線若同時與第三條直線相交，且在這直線同側相應的兩內角和小於兩個直角，則此二直線在該側相交（圖二）



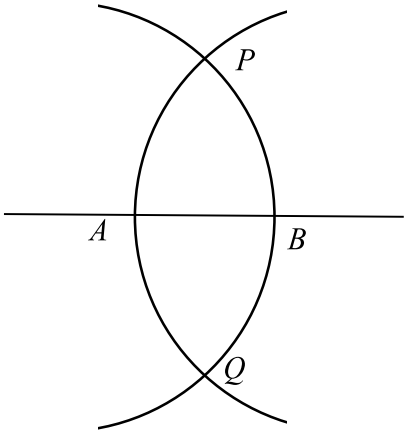
圖二

第 5 公理等價於如下敘述：

5’ 過線外一點，可作唯一一條直線與給定直線平行



其實歐幾里德這五大公理並不完備，例如相疊的兩圓必定相交，具有兩個交點（圖三）



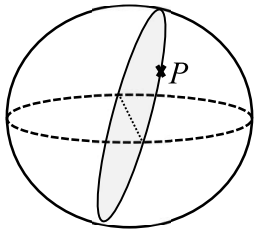
圖三

為什麼必相交?為什麼有兩個交點?歐氏對此並未交代清楚。

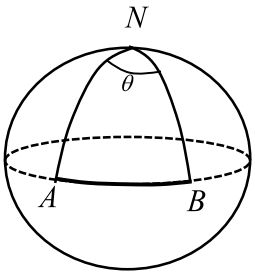
平行公理是否可由其他 1-4 公理導出？二千年來一直引起許多人的討論，不知多少英雄豪傑提出證明，沒有一人成功。一直到十九世紀三零年代俄國數學家 Lobachevsky（1792-1856），和匈牙利數學家 Bolyai（1802-1860）先後提出不同模型的非歐幾何，人們才清楚認識到平行公理是證不得的。

其實最簡單的非歐幾何就是球面幾何，我們生活於其上的地球表面。一條船在大海上沿某固定方向航行，船上的人認為他們走的是直線，在地球外以歐氏眼光來看，船走的是一個大圓（圓心在球心的圓）。直線本來就是無意義名詞，直線或者大圓只是觀點的問題，船上的人認為直線就是直線。

設 S 表單位球面，其上直線為一大圓（歐氏眼光下），則此幾何滿足歐氏 1-4 公理，但不滿足第 5 公理（圖四）



圖四
過赤道外一點 P 的直線恆與赤道相交

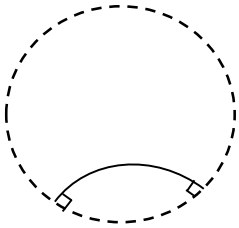


圖五
三角形 NAB 內角和$>180°$

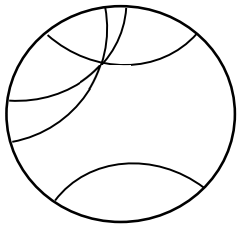
在這個幾何世界裡，三角形內角和$>180°$，數學上稱之為 Elliptic Geometry。

另一個出名的非歐幾何模型由 Poincare 提出，稱為 Poincare model，內容如下：

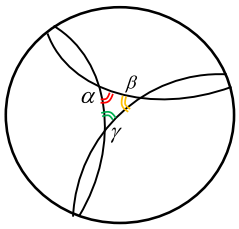
設 D 表開單位圓盤（不含邊界），其上直線為垂直圓周的圓弧（歐式眼光）（圖六）。想像某種生物生活於其間，受到某種場的作用，生物由 A 點至 B 點的最短路徑就是過 AB 兩點且垂直於圓周的圓弧，單位圓周就是宇宙的盡頭，永遠到不了，歐氏眼光靠近單位圓周的一小小段，對此世界的生物卻是幾億光年的遙遠路途。此幾何滿足歐式 1－4 公理，但不滿足第五公理，如圖七，過線外一點 P，存在無窮多條直線與已知直線平行（永不相交的直線）。這個世界裡，三角形內角和$<180°$（圖八），數學上稱之為 Hyperbolic Geometry



圖六



圖七



圖八
$\alpha+\beta+\gamma<180°$

4. 微積分的基石

上一節我們介紹歐氏平面幾何五大公理，那是平面幾何的基石，那麼微積分的基石又是什麼？

整本微積分最核心的定裡就是微積分基本定裡，內容如下：

第一基本定理：設 f 為定義於閉區間$[a, b]$上的連續函數(continuous function)，令

$$G(x)=\int_a^x f(t)dt$$

則 $G'(x)=f(x)$

第二基本定理：設 f 在$[a, b]$上連續，若存在 $F'(x)=f(x)\ \ \forall x\in[a,b]$，則

$$\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$$

我們且來溯源一下，看看我們會遇到哪些問題？

首先，第一基本定理$\Rightarrow$第二基本定理，理由如下：

第一$\Rightarrow$第二

証：令 $G(x)=\int_a^x f(t)dt$

依第一基本定理 $G'(x)=f(x)$，故 $(G-F)'(x)=0\ \forall x\in[a,b]$

因此，$(G-F)(x)$ 為常函數。

令 $(G-F)(x)=c\ \forall x\in[a,b]$

則 $F(b)-F(a)=G(b)-G(a)=\int_a^b f(t)dt$ □

於上述證明中，我們有如下問題：

1. f 在$[a, b]$上連續，為什麼 f 在$[a, b]$上黎曼可積分？
2. 第一基本定理怎麼來的？
3. 為什麼 $(G-F)'(x)=0\ \forall x\in[a,b]$ 則 $(G-F)(x)$ 為常函數？

第一問真是大哉問，是積分的存在問題，在初微裡沒辦法回答這問題，在高微裡我們將一一把他的結解開，使你的氣能貫通天地。我姑且把它稱為微積分的督脈，此脈的打通，必須引入均勻連續的概念（uniformly continuous），可能也是兩個月以後的事了，在此先打住。

第二問是基本定理的證明問題，我姑且稱他為微積分的任脈。

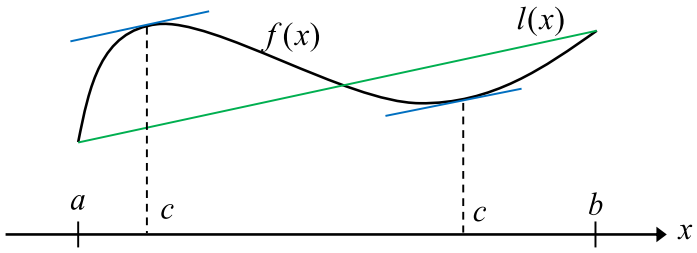
任督二脈，貫穿整個微積分核心部分，氣通了人就靈活健康，學問也是一樣，脈順暢，思想就活潑有韻，深悟三昧，能成一家之言。朱熹說：為有源頭活水來，見道心喜，何等快樂的事！

第三問：即 $\varphi'(x)=0\ \forall x\in[a,b]$ 則 $\varphi=const.$ on $[a, b]$。 此結論可由均值定理（Mean Valued Theorem）立即得到。

均值定理 A：設 f 在 $[a,b]$ 上連續，在 (a,b) 上可導，則

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

其中 c 為 (a,b) 上某點（圖九）



圖九

根據均值定理 A，

$\varphi(x)-\varphi(y)=\varphi'(z)(x-y)=0\ \forall x,y\in[a,b]$ 其中 z 為介於 x，y 之間某點。故 φ 為常函數。

微積分另一均值定理如下：

均值定理 B（積分型）：設 f 在 $[a,b]$ 上連續，則存在 $c\in(a,b)$ 使

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=f(c)$$

現在回過頭來看第一基本定理的證明：

第一基本定理的證明：

$$G(x)=\int_a^x f(t)dt$$

$$G'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{G(x+\Delta x)-G(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

$=\lim_{\Delta x\to 0} f(\xi)$　ξ 介於 x 與 $x+\Delta x$ 之間（均值定理 B）

$=f(x)$　（因 f 在 x 上連續，$\Delta x\to 0\Rightarrow\xi\to x$）□

回顧之，微積分基本定理是建立在兩個均值定理上：

$$\boxed{\text{微積分基本定理}}$$

$$\Uparrow$$

$$\boxed{\text{均值定理 A， B}}$$

那麼均值定理又建立在什麼基石上？

先看定理 B 。

$$\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx$$

其中 M 表 f 在 $[a, b]$ 上的最大值 $M = f(x_2)$ ，m 表 f 在 $[a, b]$ 上的最小值 $m = f(x_1)$ ，故

$$f(x_1) = m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M = f(x_2)$$

f 在 x_1, x_2 間連續，依連續函數中間值定理，存在 c 介於 x_1, x_2 之間，使

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

以上的推論中，我們用到了連續函數的兩個基本性質：

1. 中間值定理：
   f 在 $[a, b]$ 上連續，若 $f(a)f(b) < 0$，則存在 $c \in (a,b)$ 使 $f(c) = 0$
2. 最大最小值定理：
   f 在 $[a, b]$ 上連續，則 f 在 $[a, b]$ 上取最大最小值，即 $\exists x_1, x_2 \in [a,b]$ 使
   $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)\ \ \forall x \in [a,b]$

次看定理 A。

均值定理 B 是由 Rolle's 定理來的（定理 B 的特例）

Rolle's 定理：f 在 $[a, b]$ 上連續，在 (a, b) 上可導。若 $f(a) = f(b)$ ，則存在 $c \in (a,b)$ 使

$$f'(c) = 0$$

證：

f在$[a, b]$上連續，$\therefore f$ 在$[a, b]$上取最大，最小值。

令$m = f(x_1)$表最小值，$M = f(x_2)$表最大值。

(i) 若$x_1 \in (a,b)$，則x_1為f在(a, b)區間上的極小值，因此$f'(x_1) = 0$，取$c = x_1$

(ii) 若$x_2 \in (a,b)$，則x_2為f在(a, b)區間上的極大值，因此$f'(x_2) = 0$，取$c = x_2$

(iii) 若(ii)(iii)都不成立，則x_1, x_2都落在$[a,\ b]$的端點，而$f(a) = f(b)\ \therefore f(x_1) = f(x_2)$，即，f 為常函數！從而$f'(x) = 0\ \forall x \in (a,b)$，取 c 為$(a, b)$中任意點

Rolle's 定理$\Rightarrow$均值定理 A

證：設$l(x)$為連接$(a, f(a))$及$(b, f(b))$的直線(見圖九)，則$l'(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

令$g(x) = f(x) - l(x)$，則 g 為$[a, b]$的連續函數，g 在(a,b)上可導且$g(a) = g(b) = 0$

依 Rolle's 定理，$\exists c \in (a,b)$使$g'(c) = 0$，即$f'(c) = l'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ □

整理之，Rolle's 定理用到了連續函數的最大最小值定理，以及極值點導數為 0 兩特性。極值點導數為 0，可由導數的定義立即得之，因此，基本上並未再引述新的定理。

故到目前為止，微積分定理的證明推到了連續函數的兩個基本定理上：

$$\boxed{\text{微積分基本定理}}$$

$$\Uparrow$$

$$\boxed{\text{均值定理}}$$

$$\Uparrow$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{連續函數中間值定理}\\ \text{及最大最小值定理}\end{array}}$$

再追問下去，連續函數為什麼具有上述兩個特性，這就要落到實數的完備了。

實數的完備性：

設實數列 a_n 具有如下性質

(i) a_n 單調遞增，即 $a_n \le a_{n+1}\ \forall n$

(ii) $\{a_n\}$ 上方有界，即 $\exists k$ 使 $a_n \le k\ \forall n$

則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在於實數系中

即 $\exists l \in \mathbf{R}$ (實數系)使 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$

上述完備性，等價於下列敘述：

實數的完備性(2)：

任意上方有界的實數集，必有上確界。

所謂上確界具二要素，

(i) 本身是個上界

(ii) 只要是上界都不會比它更小

具體表述如下：

設 $S \subset \mathbf{R}$ (實數集)，且存在 $k \in \mathbf{R}$ 使 $x \le k\ \forall x \in S$

則 $\exists x_0 \in \mathbf{R}$ 使

(i) $x \le x_0\ \forall x \in S$ (x_0 是 S 的上界)

(ii) 若 $x \le y\ \forall x \in S$，則 $y \ge x_0$ (任意上界都不會比 x_0 更小)

5. 打通任脈

上一節我們由微積分基本定理溯源到連續函數兩個基本定理：中間值定理何最大最小值定理，這樣，微積分基本定理就可上溯到實數的完備性。至於實數是什麼？為什麼它具有完備性（有理數系不具此性質），則是下一章我們要回答的內容。

由實數的完備性很容易可以得到下面的區間套定理，此定理在以下的章節裡常常會應用到，在此特別提出：

區間套定理：設 $I_n=[a_n,b_n],\ I_1\supset I_2\supset I_3\supset\ldots$ 且 $|I_n|=b_n-a_n\to 0$ 當 $n\to 0$

則唯一存在一點 $x_0\in\mathbf{R}$ 使 $\bigcap_{n=1}^{\infty}I_n=\{x_0\}$

證：因 $I_1\supset I_2\supset I_3\supset\ldots$ 故 $\{a_n\}$ 為遞增數列，$\{b_n\}$ 為遞減數列，且 $a_n\le b_1$， $b_n\ge a_1\ \forall n$

依實數的完備性，$\lim_{n\to\infty}a_n$ 存在，令其為 a，$\lim_{n\to\infty}b_n$ 存在，令其為 b

$$b-a=\lim_{n\to\infty}b_n-\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$$

令 $x_0=b=a$ ， 則 $\bigcap_{n=1}^{\infty}I_n=\{x_0\}$

□

由區間套定理很快可以得到如下定理:

Bolzano-Weierstrass 定理：

任意有界數列必含收斂子序列。

即：設 $x_n\in\mathbf{R}$ ，$|x_n|\le M\ \forall n$ ，則存在 n_k 使 $\lim_{k\to\infty}x_{n_k}$ 存在(於 $\mathbf{R}$ 中)

證：令集合 $S=\{x_n\mid n\in\mathrm{Z}\}$

(i) 若 S 為有窮集(finite set)

則數列 $\{x_n\}$ 中必有一數在數列中重複出現無窮多次，此重複出現子數列即為收斂子數列

(ii) 若 S 為無窮集

因 $\{x_n\}$ 有界，令 $S\subset[a_1,b_1]$ ，$a_1,b_1\in\mathbf{R}$ ，並令 $I_1=[a_1,b_1]$。 任取 $x_{n_1}\in S\bigcap I$ ，將 I_1 二等分，因 S 無窮，此二等分閉區間中必有一個含 S 無窮多元素， 令其為 $I_2=[a_2,b_2]$，

$|I_2|=|b_2-a_2|=\dfrac{b_1-a_1}{2}$ ， 任取 $r_{n_2}\in S\bigcap I_2$ ， $n_2>n_1$

重複上述論述於 I_2 上， 得區間 $I_3=[a_3,b_3]$， $|I_3|=|b_3-a_3|=\dfrac{b_1-a_1}{2^2}$ ，I_3 含 S 中無窮多元素，任取 $r_{n_3}\in S\cap I_3$ ， $n_2>n_1$

依此類推以致無窮，得區間套 $I_k=[a_k,b_k]$ ，$|I_k|=b_k-a_k=\dfrac{b_1-a_1}{2^{k-1}}\to 0$ 當 $k\to\infty$

I_n 中含 S 中無窮多元素，任取 $x_{n_k}\in S\cap I_k$ ， $n_k>n_{k-1}$

依區間套定理， $\exists! x_0\in\mathbf{R}$ 使 $\bigcap_{k=1}^{\infty}I_k=\{x_0\}$ ， 又 $x_{n_k},x_0\in I_k$

$\therefore |x_{n_k}-x_0|<|b_k-a_k|<\dfrac{b_1-a_1}{2^{k-1}}\to 0$ 當 $k\to\infty$

故 $\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0$ □

由區間套定理，我們可以導出中間值定理。

中間值定理 ： 設 f 在 $[a, b]$ 上連續，若 $f(a)f(b)<0$，則存在 $c\in(a,b)$ 使 $f(c)=0$

證:

不失一般性，設 $f(a)<0,\ f(b)>0$ ，

令 $I_1=[a,b]$ ，取 I_1 中點 m_1

若 $f(m_1)=0$ 則幸運已極，取 $c=m_1$

若 $f(m_1)>0$ 取 $a_2=a$ ， $b_2=m_1$ 令 $I_2=[a_2,b_2]$

若 $f(m_1)<0$ 取 $a_2=m_1$ ， $b_2=b$ 令 $I_2=[a_2,b_2]$

$|I_2|=|b_2-a_2|=\dfrac{b-a}{2}$

重複上述論述於 I_2 ，依此類推以致無窮，得區間套 $I_n=[a_n,b_n]$ ， $f(a_n)<0$ ， $f(b_n)>0$ ，中點 $m_n=\dfrac{a_n+b_n}{2}$

(i) 若 $f(m_n)=0$ 則定理成立， 取 $c=m_n$

(ii) 若 $f(m_n)\neq 0\forall n$ 則上述步驟無窮無盡， $I_1\supset I_2\supset I_3\supset\ldots$ ，$|I_n|=b_n-a_n\to 0$ 當 $n\to 0$

依區間套定理 $\exists! x_0\in\mathbf{R}$ 使 $\bigcap_{k=1}^{\infty}I_k=\{x_0\}$ 且 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=x_0\in[a,b]$

f 在 x_0 點連續 $f(x_0)=\lim_{n\to\infty}f(a_n)\le 0$

$=\lim_{n\to\infty}f(b_n)\ge 0$

故 $f(x_0)=0$

取 $c=x_0$ 得證 □

由 Bolzano-Weierstrass 定理可得最大最小值定理。我們先導出一個引理(Lemma)

引理：f在$[a, b]$上連續，則f必為有界函數

即：$\exists M$ 使$|f(x)| \le M \ \forall x \in [a,b]$

證：我們只需證明f上方有界

若不然， $\forall n \ \ \exists x_n \in [a,b]$使$f(x_n) \ge n$。 $\{x_n\} \subset [a,b]$，依 Bolzano-Weierstrass 定理， $\{x_n\}$有收斂子序列$\{x_{n_k}\}$ $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in \mathbf{R}$。

$x_{n_k} \in [a,b]$， $\therefore x_0 \in [a,b]$(開區間無此性質)

f 在x_0點連續$x_{n_k} \to x_0$故$f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \ge \lim_{k\to\infty} n_k = \infty$

違背了函數值必為有窮實數(finite real valued)的定義 □

最大最小值定理：設f在$[a, b]$上連續，則f在$[a, b]$上取最大最小值，即$\exists x_1, x_2 \in [a,b]$使

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) \ \forall x \in [a,b]$$

證：f的最小值即$-f$的最大值，因此我們只需證 f取最大值即可。

依 Lemma，集合$S = \{f(x) \mid x \in [a,b]\}$上方有界。 根據實數的完備性，S 有上確界 M。

我們想證這上確界確實被 f 取到。

想法：M 為 S 的為小上界$\therefore M - 1/n$非 S 上界$\forall n$。

$M - 1/n$既非 S 上界，因此$\exists x_n \in [a,b]$使$f(x_n) > M - 1/n$

$\{x_n\} \subset [a,b]$, 依 Bolzano-Weierstrass 定理， $\{x_n\}$有收斂子數列$\{x_{n_k}\}$， $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in \mathbf{R}$

[a, b]為閉區間， $x_0 \in [a,b]$。 又 f 在x_0連續， $x_{n_k} \to x_0$

$\therefore f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \ge \lim_{k\to\infty} M - 1/x_{n_k} = M$

但$f(x_0) \le M$ ，故$f(x_0) = M$ □

M果然被 f 取到了！

我們把上兩節的推導作一簡圖表如下:

$$\boxed{\text{微積分基本定理}}$$

$$\Uparrow$$

$$\boxed{\text{均值定理}}$$

$$\Uparrow$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{連續函數中間值定理}\\ \text{及最大最小值定理}\end{array}}$$

$$\Uparrow$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Bolzano-Weierstrass 定理及}\\ \text{區間套定理}\end{array}}$$

$$\Uparrow$$

$$\boxed{\text{實數的完備性}}$$

此一脈絡，我且稱之為微積分的任脈，至此打通，至於另一脈，積分的存問題，要等到介紹均勻連續概念後再來打通。

下一章我們將探討實數是什麼？為什麼它具有完備性？（有理數系坑坑洞洞，不具完備性）從有理數到實數到底塞進多少東西？這一連串的問題導出新的思維，
許多睿智英才將站上歷史舞台，寫下近代數學思想史波瀾壯闊的一章。

8. 實數完備性與極限

我們先來看看下面這個例子。

例：求 $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\cdots}}}}$ 之值。

這是一個在國中時代的典型數學問題，參考書上的解法大概是這樣：令 $x = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\cdots}}}}$ 則 $x^2 = 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\cdots}}} = 2x$ 移項得 $x^2 - 2x = 0$ 或 $x(x-2) = 0$ $x > 0 \therefore x = 2$ 真是妙解，那時無不讚嘆。現在我們來問幾個問題：

1. $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\cdots}}}}$ 是什麼意思？
2. 怎麼可以令 $x = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\cdots}}}}$，它存在嗎？

你不要怪我無事找事，有人告訴我他證明 1 是最大正整數，理由如下：

設 n 為最大正整數：n 為整數，$\therefore n^2$ 也是整數 n 是最大正整數，$\therefore n^2 \leq n$ 移項分解後得 $n(1-n) \geq 0$ $n > 0 \therefore 1 - n \geq 0$ 故 $n \leq 1$ 而 1 為正整數，$\therefore n = 1$

上面的推論，邏輯上無暇，但結論則荒唐，問題出在哪裡？出在最大正整數並不存在－－事實上，天底下沒這件事。數學上接受這樣的邏輯：　　假設非真，則不論結論為何，論述成立。既然說不清 $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\cdots}}}}$ 是什麼意思，又假設它的存在，則解出 $x = 2$ 是靠不住的阿！那麼到底該怎麼辦？這是一個極限問題，應該回到數列上來討論。

正確的提問：設 $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$,... $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$... (i) $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在否？(ii) 如存在，其值為何？解：(i) $\sqrt{2} < \sqrt{2\sqrt{2}} < \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$... 故 $a_1 < a_2 < \ldots$ 又 $a_1 = \sqrt{2} < 2$, $a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}} < \sqrt{2 \cdot 2} = 2$, $a_3 = \sqrt{2a_2} < \sqrt{2 \cdot 2} = 2$... 依歸納法，得 $a_n < 2 \forall n$ 因此，$\{a_n\}$ 為一遞增數列，且上方有界。依實數完備性，$\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在 (ii) 令 $x = \lim_{n\to\infty} a_n$ 由 $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$, 令 $n \to \infty$ 得 $x = \sqrt{2x}$ 或 $x^2 - 2x = 0$ $x \neq 0 \therefore$ $x = 2$

例：e 的誕生

在金融上，複利的滋生和現有本金成正比。在自然界，很多事物的變率和現有事物的總量呈一定的比例關係，在生物學上菌口的成長速度和現有菌口成正比，在化學上放射元素的衰變速度和現有物質的質量成正比。若以 x 表時間，$f(x)$ 表 x 時刻該物質的總量，則

$$f'(x) \propto f(x)$$

或 $f'(x) = kf(x)$, k 為常數我們要問 f 是什麼樣的函數？先考慮最簡單的情形，$k = 1$

$$f'(x) = f(x)$$

即

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f(x) \qquad (*)$$

在已知的多項式函數，三角函數裡都找不到滿足上方程式的函數，試指數函數如何？設 $f(x)=a^x$ 代入 (*) 式得

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=a^x$$

或

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=1$$

這樣的 a 存在嗎？如果存在的話，$\frac{a^h-1}{h}\ \sim 1$ 當 h 很小，或 $a\sim\ (1+h)^{1/h}$ 當 h 很小（這裡 $\sim$ 代表很接近的意思）

問：$\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h}$ 存在嗎？

這還是不容易回答，再問更簡單一點的好了，考慮 $h=\frac{1}{n}$，n 為自然數

問：$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 存在嗎？

這是微積分裡面一個重要的極限問題，其解如下:

解：令 $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 依二項定理

$$\begin{aligned}a_n =&1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}+...\\ =&1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+...\end{aligned}$$

於是

$$a_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+...$$

$\frac{i}{n}>\frac{i}{n+1}$, $i=1,2,3...$

故 $a_n<a_{n+1}$

又 $1-\frac{i}{n}<1$

$$\therefore a_n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}\ \ <1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{n-1}}<2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=3$$

即：a_n 為遞增數列，且上方有界。依實數的完備性，$\lim_{n\to\infty}a_n$ 存在，以 e 來表示它

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

這是新發現的一個無理數，它的近似值大約是

2.71828 18284 59045 23536 02874 71352 66249 77572 47093 69995...(前 50 位小數) 這些數字到底如何分佈，是現代數論的一個課題。至於 $f(x) = e^x$ 則 $f'(x) = f(x)$，留到指數函數與對數時再來證明它。

9. 電腦的出現

電腦的出現，對人類生活方式的運作既深且廣，許多以前不可能的事，如今都變成可能，資訊傳遞的迅速，讓整個地球個地球變成一個村莊。

在第三節裏，我們談到數學的本質。數學中的定理是建立在公理系統上，經過「有窮」步驟 (finite steps) 的邏輯推演而得到。我們常見的定理推演有幾步的，十幾步的，幾十步的，上百步的就很少見。但吾生也有涯，而有窮可以接近無涯，如果一個定理的證明需要一億步的邏輯推演，以每分鐘一步，了無障礙，直達終點來估算，則至少需要 190 年，一個人三輩子無休無眠努力工作，也證不了它。何況下輩子未必記得住這輩子的事，就算你天生異秉，能夠乘願而來，繼願而去，完成偉大志業，也不會有人肯賣命來讀你的論文，欣賞你的傑作。

你可能被當成瘋子，成為大家取笑的對象。

數學上有一個著名的問題叫四色問題，1852 年英國一位製圖員 F. Guthrie 發現要把一張地圖上色，相鄰兩國塗上不同顏色，至少需要四個顏色，這個問題在數學界流傳，就是有名的四色問題。

百餘年來，不知多少人想證明它，沒有一人成功，直到電腦的出現。

1976 年，K.Appel 和 W.Haken 兩人把一切地圖，分類成 1936 種情況，由電腦去跑。跑出來的結果，顯示四色足夠用。這給數學界帶來前所未有的衝擊！

這算證明嗎？許多人提出這樣的質疑。

此後，有人把問題簡化成 633 種情況，但是還是必須借助電腦的幫忙。

這 633 種情況，可不可以由人來操作證明？可以，不過要好幾輩子！

當有窮對人類數十年的短暫生命成為無涯，借助電腦以縮短時間，乃成為必要的手段，問題是你必須相信電腦，相信那程式設計。

信或不信，人類必須做一個選擇！

電腦可以下西洋棋，打敗世界棋王。但電腦不能替你談戀愛，不能替你讀書，不能替你決定你要讀哪一科系。

時下有人想要用電腦來評閱作文，我以為是把電腦用錯方向，自己本來是電腦的主人，反而要用電腦來框限自己。事物一但被制式化，生命力就不見了，取而代之的是一堆電腦作文參考書，框殺了年輕的靈魂。

另一個著名的問題是 Riemann Zeta hypothesis。Riemann 在研究數論的時候，引進如下函數：

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \frac{1}{1^z} + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \cdots \quad z \text{ 為複數，} z \neq 1$$

此級數在 $\mathrm{Re}(z) > 1$ 領域上絕對收斂，且在五領域上解析（analytic）。他可以解析研拓到整個複數平面，除了 $z = 1$ 這個點例外。

絕對解析研拓後的 ζ 函數滿足方程式

$$\zeta(z) = 2^z \pi^{z-1} \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) \Gamma(1-z)\zeta(1-z)$$

其中 Γ 表 Gamma function. 因此當 $z = -2k,\ k = 1, 2, \cdots$ 時 $\zeta(z) = 0$。這些稱為 $\zeta(z)$ 的 trivial zeros.

1859 年，Riemann 計算它的幾個 non-trivial zeros，發現它們的實部（real part）都是 $\frac{1}{2}$，於是提出猜測：

「所有 $\zeta(z)$ 的 non-trivial zeros 都落在 $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{1}{2}$ 這條直線上。」

這便是著名的 **Riemann zeta hypothesis**。

Hilbert 在 1900 年第一屆國際數學會議上提出影響 20 世紀數學發展甚深的 23 個問題，將 Riemann zeta hypothesis 列為第 8 個問題，是少數幾個至今仍未解決的問題之一。

早期的數學家徒手檢驗 $\zeta(z)$ 的根，從最初 3 個，15 個，79 個，138 個，195 個，到 1041 個（1936，Titchmarsh）都驗証了 Riemann 的推測沒錯，之後電子計算器出現，繼之高速電腦的誕生，使檢驗工作更快速，其工作遠非徒手操練所能及。截至 2004 年止，有人檢驗了前 10^{13} 個根（$z = \frac{1}{2} + ik,\ k \sim 10^{24}$）都支持 Riemann 的猜測。

目前高速電腦仍日夜不停地在跑，一旦發現 Riemann 的猜測錯了，電腦就會自動停止運算，至今未聞電腦停工，想來 Riemann 的猜測仍然屹立不墜。

1998 年，Clay 家族成立基金會，提出設立 Millennium Prize Problems，仿效 Hilbert 的 23 問，他們提出七大問題：

1. P versus NP problem
2. Hodge Conjecture
3. Poincaré Conjecture
4. Riemann zeta hypothesis

5. Yang-Mills existence and mass gap
6. Navier-Stokes existence and smoothness
7. Birch and Swinnerton-Dyer Conjecture

獎金 100 萬美元。

獎金事小，但是一個成功的企業家願意提供金錢支持學術的發展，營造探索真理的社會氣氛，其情高貴，其襟寬闊，令人尊敬。

Perelman 於 2003 年發表論文，解決了 Poincaré Conjecture，2006 年國際數學大會頒發 Fields Medal 給他，但他並沒有前往領獎，他說道：

“ I am not interested in money or fame,
I don’t want to be on display like an animal in a zoo.”

2010 年 Clay 基金會頒發 Millennium Prize 及 100 萬美金給他，他也沒去領獎，他說：

“The contribution of me to this problem is no greater than that of R. Hamilton”

Hamilton 是 Coulombia 大學教授，目前仍建在，是 Ricci flow 的開拓者。他用 Ricci flow 來研究 Poincaré Conjecture，遇到一些困難；Perelman 延續他的研究，終於看見了曙光。

Science 雜誌把 Poincaré Conjecture 的解決選為 2006 年的 “Breakthrough of the year”，是該雜誌創立以來第一次對數學研究的高度肯定。

中國人尊敬一個人說：道在其身。

它出現在 Saint Petersburg。

至於領那個獎是否就是 be on display like an animal in a zoo ？仁者樂山，智者樂水，無關是非。

第一章　範例與習題

範例

1. $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$

證：$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ 為一收斂級數（Convergent Series）。

$e = \lim_{n\to\infty} a_n$

$$\begin{aligned} a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots \\ &+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n!} < \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} \end{aligned} \tag{1}$$

$$\therefore e = \lim_{n\to\infty} a_n \le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} \tag{2}$$

又固定 $k < n$，於 (1) 式中我們有

$$a_n > 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

上式中令 $n \to \infty$，我們有

$$e = \lim_{n\to\infty} a_n > 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}$$

上式對一切 k 均成立，故

$$e \ge \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} \tag{3}$$

由 (2),(3) 得

$$e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

據此，可證明 e 為無理數，留作習題。

2. Fibonacci 數列

$\{a_n\} = \{1, 1, 2, 3, 4, 8, 13, 21, 34, \cdots\}$ $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ 稱為 Fibonacci 數列

令 $x_n = a_{n+1}/a_n$，於是

$\{x_n\} = \{1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21} \cdots\}$

試證：$\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在，並求其值。

分析：

(i) $a_n < a_{n+1}$, $x_n = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} < \frac{a_n + a_n}{a_n} = 2$

$\therefore$ 數列 $\{x_n\}$ 上方有界

(ii) 觀察數列 $\{x_n\}$，既非遞增，也非遞減，在那裡跳來跳去，怎麼辦？

不過再仔細觀察，奇數項

$$1, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{21}{13}, \cdots \text{ 似乎是遞增的}$$

偶數項

$$2, \frac{5}{3}, \frac{13}{8}, \frac{34}{21}, \cdots \text{ 似乎是遞減的}$$

好像露出一線曙光。真是這樣嗎？且來研究一下：由 $x_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = a + \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{x_{n-1}}$ 及 $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = \frac{3}{2} > x_1$ 得

$$\begin{aligned}
x_4 &= 1 + \frac{1}{x_3} < 1 + \frac{1}{x_1} = x_2 \\
x_5 &= 1 + \frac{1}{x_4} < 1 + \frac{1}{x_2} = x_3 \\
x_6 &= 1 + \frac{1}{x_5} < 1 + \frac{1}{x_3} = x_4 \\
x_7 &= 1 + \frac{1}{x_6} < 1 + \frac{1}{x_4} = x_5 \\
&\cdots
\end{aligned}$$

依此類推，以致無窮，得數列

$$\{x_1.x_3, x_5, x_7, \cdots\} \text{ 為遞增數列}$$

$$\{x_2.x_4, x_6, x_8, \cdots\} \text{ 為遞減數列}$$

依實數的完備性，存在 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 使 $\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \beta$

(iii) $\alpha = \beta$?

由 $x_{2n+1} = 1 + \frac{1}{x_{2n}}$ 及 $x_{2n} = 1 + \frac{1}{x_{2n-1}}$，分別令 $n \to \infty$，得 $\begin{cases} \alpha = 1 + \frac{1}{\beta} \\ \beta = 1 + \frac{1}{\alpha} \end{cases}$，或

$$\begin{cases} \alpha\beta = \beta + 1 \\ \beta\alpha = \alpha + 1 \end{cases}$$

知 $\alpha = \beta$。故 $\lim_{x\to\infty} x_n$ 存在 $= \alpha$

(iv) $\alpha = ?$

由 $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$，令 $n \to \infty$ 得 $\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}$，或 $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$，解之得

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

這個數正是黃金分割。希臘是個很獨特的民族，長方形就是長方形，他們偏要問：什麼樣的長方形最美？他們的結論是：當「全段（兩段和）: 大段 = 大段: 小段」，以此兩段為長方形之邊長時最美，於是得到著名的黃金分割。Fibonacci 數列的後項比前項會趨近於黃金分割，希臘人大聲叫好！他們的美學觀深植西方文明，我在這裡不禁要問：希臘，你們是不是著相了一點？

Fibonacci 數列在生物，幾何，甚至財經上都有它的蹤跡，而數列中的質數：1,2,3,5,13,89,$\cdots$ 到底有窮抑無窮，依然是個未知的問題。

一百零一學年度 數學系高等微積分 (上) 習題一

2012.09.20

範圍: 第一章

1. 請說明「$i < 2i$」有何不妥？

2. 人類觀察自然現象，如太陽、滿月、漣漪等而定義出「圓」這個概念，請問自然界中有圓存在嗎？

3. 古人說「白馬非馬」，試闡其義。

4. 過相異兩點可連一直線，請問此直線是否唯一？試就下列三種幾何分別討論之：

   (a) 歐氏平面幾何

   (b) 球面幾何

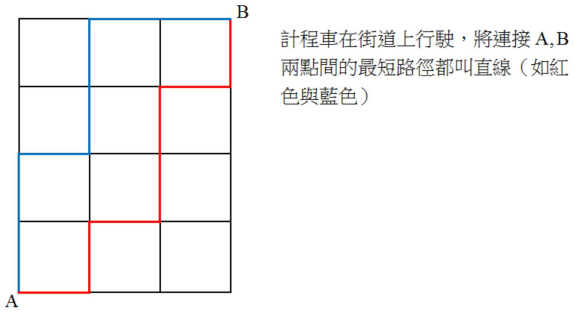
   (c) Poincaré model

5. (a) 在歐氏平面幾何中，兩三角形 ΔABC 及 $\Delta A'B'C'$，若 $\overline{AB} = \overline{A'B'}$、$\overline{BC} = \overline{B'C'}$、$\angle ABC = \angle A'B'C'$，則此二三角形全等 (S.A.S 全等)。在證明過程中，用到哪些公理？

   (b) 此定理在球面幾何上成立嗎？

   (c) 在 Poincare Model 中成立嗎？

6. (Texicab Geometry) 在無垠的平面方格點上，每個方格長度都是 1，過 A、B 二點的直線為連接 A、B 兩點最短的路徑。若 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$，則 $d(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$，其中 x_i, y_i 為整數，$i = 1, 2$。



   (a) 試說明此幾何為一種非歐幾何。

   (b) 歐式幾何第四公里：「凡直角皆相等」在此幾何中還成立嗎？

   (c) 給定 A 點，試以 A 為心作半徑分別為 1、2、3 的圓。

(d) 給定 $A(0,0)$、$B(0,3)$ 兩點，分別以半徑 2 作二圓 Γ_A 及 Γ_B，問：Γ_A 與 Γ_B 是否必交於二點？

(e) 上題中兩三角形全等定理 (S.A.S) 在此還成立嗎？

7. 已知 $\sqrt{2}$ 為無理數，試証：任意二有理數之間必存在無理數。

8. 請舉一例說明有理數系不具完備性。

9. 在邏輯上，前提非真，則不論結論為何，命題恆成立。「空集合 ϕ 包含於任意集合」即根據此邏輯證得，理由如下：
設 S 為任意集合，若 $x \in \phi$(非真！因中不含任何元素)，則 $x \in S$。上面論證在邏輯上成立，所以 $\phi \subset S$。
然而，我們也可以說：若 $x \in \phi$，則 $x \notin S$，上面論證在邏輯上亦成立。所以 $\phi \not\subseteq S$。請問問題出在哪裡？

10. 請寫出下列敘述的否定命題。

(a) 只要我有錢，我就可以叫鬼推磨。

(b) 有一首歌，不論何時何地，戀愛中的情人要分別時，聽到它都會落淚。

(c) 對任意 $\epsilon > 0$，恆存在 $\delta > 0$，使得 $|f(x)-l| < \epsilon$，當 $|x-a| < \delta$。(「$\lim_{x\to a} f(x) = l$」在數學上的定義)

(d) 對任意 $\epsilon > 0$，恆存在自然數 N 使得 $|a_n - l| < \epsilon$ 當 $n > N$。(「$\lim_{n\to\infty} a_n = l$」在數學上的定義)

(e) 對於所有 $\epsilon > 0$，存在 δ(只與 ϵ 有關，與 x, y 無關) 使得 $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ 當 $|x - y| < \delta$，$x, y \in [a, b]$。(f 在 $[a, b]$ 上均勻連續的定義)

11. f 在 $[a, b]$ 上連續，$f(a) > a$，$f(b) < b$。試證：$\exists c \in (a, b)$ 使得 $f(c) = c$。

12. $\Gamma = \{(x, f(x)) | x \in [a, b]\}$，$f$ 為定義在 $[a, b]$ 上的連續函數。我們說 Γ 有水平弦，長度為 l，若 $\exists x \in [a, b]$ 使 $f(x + l) = f(x)$，$x + l \in [a, b]$。設 f 為定義在 $[0, 1]$ 上的連續函數，$f(0) = f(1)$。試證：對任意自然數 n，f 恆有長度為 $\dfrac{1}{n}$ 的水平弦。

13. 給定 $0 < a < b$，令 $a_1 = a$，$b_1 = b$，$a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$，$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$。試證：$\lim_{n\to\infty} a_n$ 與 $\lim_{n\to\infty} b_n$ 存在且相等。

14. 設 $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2)$ ，$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ 。我們說數列 $\{\mathbf{x}_n\} = \{(x_{1,n}, x_{2,n})\}$ 收斂到 $\mathbf{x}_0 = (x_{1,0}, x_{2,0})$ ，表示 $|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0| \to 0$ 當 $n \to \infty$ 。

(a) 試證：$\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0 \Leftrightarrow x_{1,n} \to x_{1,0},\ x_{2,n} \to x_{2,0}$

(b) 二維 **Bolzano-Weierstrass** 定理：設 $\{\mathbf{x}_n\}$ 為 $\mathbb{R}^2$ 之有界點列，則 $\{\mathbf{x}_n\}$ 有收斂子點列。試證之。

(c) 試敘述 $\mathbb{R}^n$ 中的 **Bolzano-Weierstrass** 定理，並證明之。

15. 你看過太極圖嗎？太極圖中有陽魚、陰魚，二者是對偶關係，各佔太極圖的一半領域，形狀完全相同。在單位球面上，討論以歐氏幾何中的大圓為直線的幾何，稱為球面幾何。今有三角形 $\triangle ABC$ ，三內角（切線的夾角）分別為 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 。聰明的 Gauss 利用如下的觀察得到

$$\angle A + \angle B + \angle C = \pi + \alpha, \quad \alpha \text{ 為 } \triangle ABC \text{ 的球面面積}$$

(i) 過南北二極，交角為 θ 的二直線（經線），其所圍面積為 $\dfrac{\theta}{2\pi} \cdot 4\pi = 2\theta$

(ii) 延長 $\widehat{\mathrm{AB}}, \widehat{\mathrm{AC}}$ 使相交於 A' 點。若把 A 當北極，A' 就是南極。因此，此二直線所圍領域可求。

(iii) 同理，延長 $\widehat{\mathrm{BA}}, \widehat{\mathrm{BC}}$ 使相交於 B' 點，延長 $\widehat{\mathrm{CA}}, \widehat{\mathrm{CB}}$ 使相交於 c' 點。
並把 (ii), (iii) 延長所得領域標上斜線。令其為 $\mathcal{S}$

(iv) A', B', C' 分別為 A, B, C 的對偶點。因此 $\triangle A'B'C'$ 與 $\triangle ABC$ 無異。
對 $\triangle A'B'C'$ 進行 (ii), (iii) 的延拓，得到 $\mathcal{S}'$ 。

(v) $\mathcal{S}$ 好比太極圖中的陽魚，$\mathcal{S}'$ 好比太極途中的陰魚。因此二者全等，各佔球面積的一半。

聰明的你，請導出 Gauss 的公式。（建議：拿一個籃球實際畫一畫。）

16. (a) $a_n = (1+\dfrac{1}{n})^n$ 的遞增性可由如下觀察得之：考慮 $n+1$ 個數，

$$1, (1+\frac{1}{n}), (1+\frac{1}{n}), \ldots, (1+\frac{1}{n})$$

由算術平均大於幾何平均，即得。

(b) 令 $b_n = (1+\dfrac{1}{n})^{n+1}$，試仿 (a) 證明 $b_n \downarrow e$ strictly

17. (a) 由 $\lim_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n = e$，$n$ 為自然數。導出 $\lim_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = e$，$x$ 為實數 (提示：找最靠近 x 的自然數 n，$n \le x < n+1$，逼出極限來。)。從而 $\lim_{h\to 0+}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$。

(b) 試證：$\lim_{n\to-\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n = e$ 仍然成立，導出 $\lim_{x\to-\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = e$ 成立，從而 $\lim_{h\to 0-}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$ 亦成立。

頁碼	作品	版權標示	來源／作者
3	凡所有相皆是虛妄。…即見如來。		《金剛經》，作者已不可考。
4	予嘗求古仁人之心，…吾誰與歸？		《岳陽樓記》，范仲淹。
10	為有源頭活水來		〈觀書有感〉，朱熹。
22	I'm not interested in…in a zoo.		*"Russian maths genius Perelman urged to take $1m prize"*. *BBC News*. 24 March 2010 http://news.bbc.co.uk/2/hi/europe/8585407.stm
22	The contribution of me…Hamilton		*"Последнее "нет" доктора Перельмана"*, Interfax 1 July 2010 http://www.interfax.ru/russia/txt.asp?id=143603

101 台灣大學數學系高等微積分上由陳金次製作，以創用 CC 姓名標示-非商業性-禁止改作 3.0 台灣授權條款

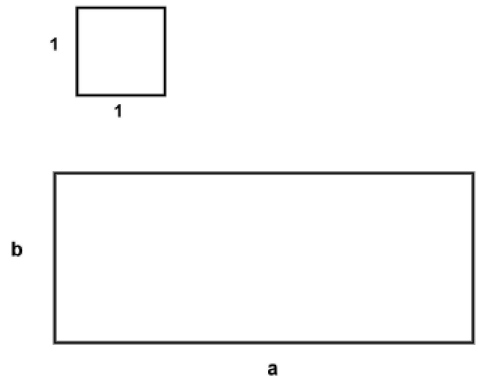
Chapter 2

實數的建構

2.1 無理數的發現

2.1.1 長方形面積公式

定義邊長為 1 單位的正方行面積為一平方單位，則長寬分別為 a 單位及 b 單位的長方行面積為 ab 平方單位。



(上) 面積為 1 平方單位 (下) 長方形面積 $= ab$ 平方單位

這個面積公式大家從小就知道了，但是為什麼？很少人曾認真的思考過它。翻開小學課本，大概都是以幾個簡單的整數為例，說明它成立，然後就把他當公式拿來用，久了，就不知道追問，習慣成自然，認為是天經地義的事。

其實這個公式的證明隱含人類文明的滄桑，有血有淚，還說不清楚，一直到人類把「什麼是實數」弄清楚了，它才有嚴格的證明。

2.1.2 Pythagoras 學派

對長方形面積公式最早提出證明的是畢達哥拉斯學派。希臘早期的學派充滿神秘色彩，近於宗教。例如他們認為 4 代表天理，正義：天有四時－春夏秋冬，地有四方－東西南北，人有四肢，動物有四條腿，桌椅三隻腳不穩，五隻腳過多，四隻腳恰恰好，開個門或窗也要開四個角的長方形才美觀好用.....。

畢氏認為宇宙是和諧的，給定任意兩線段 a 及 b，恆可找到一夠小的線段 l，可以同時量盡 a 及 b。即：存在自然數 m, n 使 $a = ml, b = nl$。我們稱 a, b 可以被 l 共度。

這是 Pythagoras 學派的基本教義。據此，畢氏很漂亮地證明了長方形面積公式，贏得世人的掌聲。

2.1.3 捅出漏子

相傳，Hippasus 是畢氏的門生，有一天在家裡劃正五邊形（畢氏學派情鍾正五邊形，認為它具有聖潔純善之美，當然，正五邊形要恭恭敬敬地正著擺），劃著劃著，突然眼珠噴張，目瞪口呆，他發現正五邊形的邊長和對角線不能被共度。他驚慌失措，立刻跑去向掌門人報告，掌門人看完他的論述，面色鐵青：基本信條出問題了，怎麼辦？

他沉思片刻，終於開口。

「保守秘密，不要向任何人說出去！」掌門人這樣交代下來。

Hippasus 也謹遵教喻，不敢洩漏風聲半點。不過，當一個人發現真理的時候，要他昧著良知，永遠三緘其口，是件十分痛苦的事。有一天，幾位好友請他喝酒，大家讚美他的才華。酒酣耳熟之際，他開口了：

「我告訴你們一個秘密，但你們得答應我不向任何人說出去。」Hippasus 壓低嗓門對大家說。

「那當然，什麼事那麼神祕，快說。」

「正五邊形的邊長和對角線不能被共度。」Hippasus 蒙著嘴怕旁人聽見，輕聲說道。

「啊，真的嗎？」

「我 Show 給你們看.....」Hippasus 既緊張，又興奮地在桌上畫起圖來。

這下子秘密公開了，掌門人大怒，下令追捕，他逃到義大利地中海旁邊的一個小漁村躲藏，但是難逃緊密的追捕，最後以「瀆犯神明」之罪，被丟到地中海裡去，一命嗚呼。

真理的發現，以如此悲傷的結局收場，歷史，真叫人落淚。

2.1.4 第一個無理數

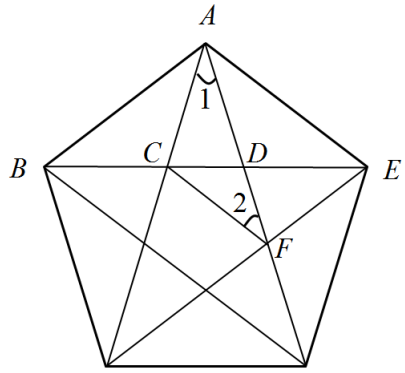
我們回過頭來看畢氏學派的基本信條：

$$a = ml, b = nl \quad \text{則} \quad \frac{a}{b} = \frac{m}{n} = \text{有理數}$$

你我都覺得荒謬，但別忘了，你我是活在 21 世紀，從小就知道無理數的存在，畢老先生是 2500 年前的人物，那時可還沒有無理數的出現。

接著，我們再來看看 Hippasus 到底發現了什麼？

設 Ω 表一正五邊形，其邊長為 a，對角線為 b，連接 Ω 的每一條對角線，在 Ω 的中央，又構成一個小正五邊形 Ω'，令其邊長為 a'，對角線長為 b'，如圖：



$\overline{AB} = a$

$\overline{BE} = b$

$\overline{CD} = a'$

$\overline{CF} = b'$

觀察：若 a, b 可以被共度，設線段 l 可以共度它們。

1. $\overline{AB} = a$ 可以被 l 量盡
   $\overline{BD} = \overline{AB} \quad \therefore \overline{BD}$ 可以被 l 量盡

2. $\overline{BE} = b$ 可以被 l 量盡
   $\overline{DE} = \overline{BE} - \overline{BD} \quad \therefore \overline{DE}$ 可以被 l 量盡

3. 同理，$\overline{BC}$ 可以被 l 量盡
   故 $a' = \overline{CD} = \overline{BE} - \overline{BC} - \overline{DE}$ 可以被 l 量盡

4. 又 $\angle 1 = \angle 2$
   $b' = \overline{CF} = \overline{AC} = \overline{BC}$ 可以被 l 量盡

結論：小正五邊形的邊長 a' 及對角線長 b' 也可以同時被 l 量盡，如此一來，重複上述論證於 Ω'，依此類推，以致無窮，總有一天正五邊形的邊長要小於 l，豈不荒謬？

基本教義出問題了，天啊！　Hippasus 仰天長嘯。

其實，出問題並非壞事，它意味人類文明將更上層樓，許多睿智俊秀將登上歷史舞台，一展長才，放出璀璨的光芒。

人生何嘗不是如此，有困頓，才會有精彩的人生；溫室裡的花朵禁不起一場風雨吹打，寒凍徹骨的老梅綻放異香。史書上說：文王憂而演易，周文王被紂王囚在羑里城，七年不讓他回國，文王憂而不憤，終能保命，成就大業。君子要自強，面對困境，思考解決之道，則柳暗花明又一村，生命又是一番境界。英國詩人 Shelley 有云：

”O Wind, If Winter comes, can Spring be far behind?”

蟄伏的君子，步出困頓，融雪涓涓，大地蟲鳴，新芽出土，綠遍原野，立春的朝陽格外溫暖，來個深呼吸，一身是勁，指天劈地，虎躍龍騰，擦汗間，桃紅李白，已醉滿山頭。

2.2 實數系的誕生－ Dedekind cut

有理數坑坑洞洞，並不「綿密連續」。為了彌補此一缺隙，人們相信有一數系，就稱它為實數系，包含有理數系，且是「綿密連續」的，也就是我們今天所稱的完備性（Completeness）。這個數系到底如何建構？從有理數系到實數系到底填補多少東西進去，才把那些坑洞填滿？這要到 1860 年代德國數學家 R. Dedekind（1831-1916）提出實數的建構，以及稍後的另一位德國數學家 G. Cantor（1845-1918）對無窮集分類，提出可數（Countable）和不可數（Uncountable）的觀念之後，才有清楚的認識。

十九世紀的德國 Götingen 是個數學人文薈萃的學術中心，Dedekind 於 1850 進入 Götingen，他和 Riemann（1826-1866）是同時期的人物，也是 Gauss 退休前所教的幾位優秀的學生之一，實數的建構發表於 1860 年左右，此時他正在 Polytechic in Zürich 任教，因此有人稱他為瑞士數學家，不過他於 1862 年離開 Zürich 後，就一直待在他的家鄉德國 Braunschweig 任教。他一生未婚，與妹妹 Julia 相依為命，直到終老。

Dedekind 提出 cuts 的觀念，把有理數的坑洞填滿。什麼叫 cuts 呢？簡單說，他把有理數系 $\mathbb{Q}$ 分成上下兩集，下集無缺損直達 $-\infty$，且無最大元素。所謂無缺損直達 $-\infty$ 意指對任意 $y \in \mathbb{Q}$，若存在 $x \in A$ 使 $y < x$，則 $y \in A$。例如

$$A_1 = \{x | x \in \mathbb{Q}, x < 3\}$$
$$A_2 = \{x | x \in \mathbb{Q}, x^2 < 2 \text{或} x < 0\}$$

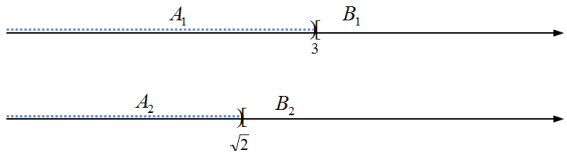
$B = \mathbb{Q} - A$ 稱為上集，上集無缺損直通 $+\infty$。例如：

$$B_1 = \{x | x \in \mathbb{Q}, x \geq 3\}$$
$$B_2 = \{x | x \in \mathbb{Q}, x > 0 \text{且} x^2 > 2\}$$

Dedekind 把 (A, B) 稱為有理數系 $\mathbb{Q}$ 的一個 cut，這個 cut 就叫做實數。

換句話說，他用 cut 強行把有理數系填滿。當 B 有最小元素時，(A, B) 決定該有理數；當 B 無最小元素時，(A, B) 決定一無理數。例如

$$(A_1, B_1) = 3,\ (A_2, B_2) = \sqrt{2}$$



Dedekind 觀念不難，但在處理四則運算時稍嫌複雜，後人把它修正，改用有界有理增數列來定義實數，就是我們以下要介紹的實數的建構。

2.3 實數的建構

2.3.1 實數的定義

考慮 $A \subset \mathbb{Q}$，我們稱 $y \in \mathbb{Q}$ 為 A 的上界若 $x \leq y \forall x \in A$。
令 $A^+ = \{y | y \in \mathbb{Q}, y\text{為 } A \text{ 的上界}\}$，稱為 A 的上界集（The set of all upper bounds of A）
設 $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$ 表 $\mathbb{Q}$ 中有界遞增數列。即

(i) $\exists k \in \mathbb{Q}$ 使 $x_n \leq k \ \forall n$

(ii) $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \ x_n \in \mathbb{Q}$

定義 $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ 若 $\mathbf{x}^+ = \mathbf{y}^+$。
令 S 表 $\mathbb{Q}$ 中一切有界遞增數列所成集合，則「$\sim$」把 S 分成諸多 class。有人把 Class 譯成類，我則認為宜譯成班比較傳神。每班的同學其上界集都相同。
這些班（Class）就叫做實數，以 $\mathbb{R}$ 表示之。

2.3.2 加法

取 $\xi, \eta \in \mathbb{R}$，即 ξ,η 表 S 中的兩個班。在這兩個班中，分別任取兩位同學

$$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3, \cdots\} \in S$$
$$\mathbf{y} = \{y_1, y_2, y_3, \cdots\} \in S$$

則 $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \cdots\} \in S$ 其所屬的班設為 ζ
定義：$\xi + \eta = \zeta$

2.3.3 Well-defined（合理定義）問題

上面加法的定義牽涉到合理性的問題。即：$\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{x}'$ 同班，$\mathbf{y}$ 和 $\mathbf{y}'$ 同班，則 $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ 和 $\mathbf{x}' + \mathbf{y}'$ 也必須是同班才行。
証：設

$$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3, \cdots\},\ \mathbf{x}' = \{x_1', x_2', x_3', \cdots\}$$
$$\mathbf{y} = \{y_1, y_2, y_3, \cdots\},\ \mathbf{y}' = \{y_1', y_2', y_3', \cdots\}$$

則

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \cdots\}$$
$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \{x_1' + y_1', x_2' + y_2', x_3' + y_3', \cdots\}$$

若 α 為 $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ 的上界，則 $x_n + y_n \leq \alpha \ \ \forall n$。固定 k，我們有

(i) $n \le k$, $x_n + y_k \le x_k + y_k \le \alpha$

(ii) $n > k$, $x_n + y_k \le x_n + y_n \le \alpha$

即 $x_n + y_k \le \alpha\ \forall n$，或 $x_n \le \alpha - y_k\ \forall n$，因此 $\alpha - y_k$ 為 $\mathbf{x}$ 的上界。而 $\mathbf{x}' \sim \mathbf{x}$，$\therefore \alpha - y_k$ 為 $\mathbf{x}'$ 的上界，亦即 $x'_n \le \alpha - y_k\ \forall n$。上式對任意自然數 k 成立。
其次，固定 n，我們有 $y_k \le \alpha - x'_n\ \ \forall k$，亦即 $\alpha - x'_n$ 為 $\mathbf{y}$ 的上界。又 $\mathbf{y} \sim \mathbf{y}'$，$\therefore \alpha - x'_n$ 為 $\mathbf{y}'$ 的上界，或 $y'_k \le \alpha - x'_n\ \ \forall k$。特別取 $k = n$，得 $x'_n + y'_n \le \alpha\ \ \forall n$，即 α 為 $\mathbf{x}' + \mathbf{y}'$ 的上界。同理 α' 為 $\mathbf{x}' + \mathbf{y}'$ 的上界，則 α' 為 $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ 的上界。故 $\mathbf{x}' + \mathbf{y}' \sim \mathbf{x} + \mathbf{y}$

2.3.4 加法諸律

實數的加法滿足下列諸律：

A_1： 交換律 $\xi + \eta = \eta + \xi\ \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}$

A_2： 結合律 $(\xi + \eta) + \zeta = \xi + (\eta + \zeta)\ \forall \xi, \eta, \zeta \in \mathbb{R}$

A_3： 0 元素存在。令 0 表 $\mathbf{x} = \{0, 0, \cdots\}$ 所屬的班。則 $\xi + 0 = \xi\ \ \forall \xi \in \mathbb{R}$

A_4： 負元素存在，即 $\forall \xi \in \mathbb{R}$，$\exists \eta \in \mathbb{R}$ 使 $\xi + \eta = 0$

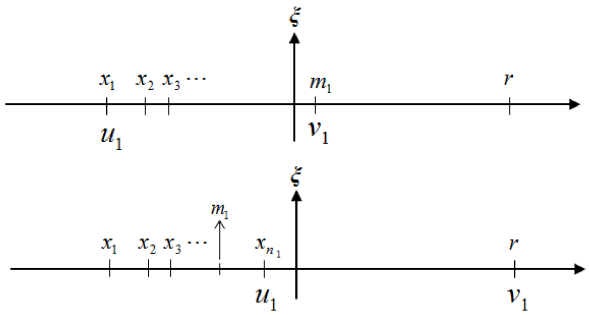
以上交換律及結合律由有理數系遺傳而得。下面證明負元素存在：
設 $\xi \in \mathbb{R}$，於 ξ 所屬班中任取一同學

$$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \cdots\} \in S$$

欲找一有理增數列

$$\mathbf{y} = \{y_1, y_2, \cdots\} \in S$$

使 $x_n + y_n \to 0$ 當 $n \to \infty$ 如此，則 $\mathbf{y}$ 所代表的實數 η 即滿足 $\xi + \eta = 0$
$\mathbf{y}$ 的找法：設 $r \in \mathbb{Q}$ 為 $\mathbf{x}$ 的上界，並令
$m_1 = \frac{x_1 + r}{2}$。
有二種情況：



(i) m_1 為 $\mathbf{x}$ 的上界令 $u_1 = x_1$, $v_1 = m_1$

(ii) m_1 非 $\mathbf{x}$ 的上界 $\exists x_{n_1} \in \mathbf{x}$ 使 $x_{n_1} > m_1$。
取 $u_1 = x_{n_1}$, $v_1 = r$

(i) (ii) $\Rightarrow 0 \le v_1 - u_1 \le \frac{r - x_1}{2}$

第二步考慮 $m_2 = \frac{u_1 + v_1}{2}$

(i) m_2 為 $\mathbf{x}$ 的上界令 $u_2 = u_1$, $v_2 = m_2$

(ii) m_2 非 $\mathbf{x}$ 的上界 $\exists n_2 > n_1$ 使 $x_{n_2} > m_2$。
取 $u_2 = x_{n_2}$, $v_2 = v_1$

(i) (ii) $\Rightarrow 0 \leq v_2 - u_2 \leq \frac{v_1 - u_1}{2} \leq \frac{r - x_1}{x^2}$

依此類推以致無窮，得數列

$$\mathbf{u} = \{u_1, u_2, \cdots\} \sim \mathbf{x}$$

又 $v_n \downarrow$，$v_n \geq x_1$，$\therefore -v_n \uparrow$，$-v_n \leq -x_1 \ \forall n \therefore \mathbf{y} = \{-v_1, -v_2, \cdots\} \in S$
令 η 為 $\mathbf{y}$ 所屬班級相應之實數，則 $\xi + \eta$ 為 $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \{u_1 - v_1, u_2 - v_2, \cdots\}$ 所屬班級相應之實數。
注意，

(i) $u_n - v_n < 0 \ \forall n \therefore 0$ 為 $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ 的上界。

(ii) $u_n - v_n = -\frac{r - x_1}{2^n} \to 0$ 當$n \to \infty$
$\therefore 0$ 為 $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ 的最小上界。

$\therefore \xi + \eta = 0$ 得証

2.3.5 大小關係

取 $\xi, \eta \in \mathbb{R}$，在 ξ 所屬的班級中任選一同學 $\mathbf{x}$，在 η 所屬的班級中任選一同學 $\mathbf{y}$。若 $\mathbf{x}^+ \supset \mathbf{y}^+$，我們定義 $\xi \leq \eta$
若 $\xi \leq \eta$，但 $\xi \neq \eta$，我們稱 $\xi < \eta$ 或 $\eta > \xi$。

根據上面的定義，我們不難得到下面結論：
三一律：給定 $\xi, \eta \in \mathbb{R}$，下列三情況必有一個，且只能有一個發生。

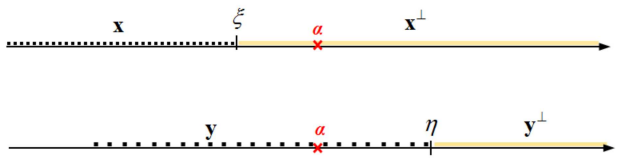
$$\text{(i)} \quad \xi < \eta, \qquad \text{(ii)} \quad \xi > \eta, \qquad \text{(iii)} \quad \xi = \eta$$

請讀者自行証明之。
Lemma 3.1 $\xi, \eta \in \mathbb{R}, \xi < \eta$。設

$$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3 \cdots\} \text{為 } \xi \text{ 班中一位同學}$$
$$\mathbf{y} = \{y_1, y_2, y_3 \cdots\} \text{為 } \eta \text{ 班中一位同學}$$

則存在 $y_j \in \mathbf{y}$ 使 $y_j > x_n \ \forall n = 1, 2, \cdots$

証： 令 $\mathbf{x}^+, \mathbf{y}^+$, 分別表 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 的上界集。
$\xi < \eta \Rightarrow \mathbf{y}^\perp \subset \mathbf{x}^\perp$ 且 $\mathbf{y}^\perp \neq \mathbf{x}^\perp$
$\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{Q}, \alpha \in \mathbf{x}^\perp, \alpha \notin \mathbf{y}^\perp$（如下圖所示），依此，



(i) $\alpha \notin \mathbf{y}^{\perp} \Rightarrow \alpha$ 非 $\mathbf{y}$ 的上界 $\Rightarrow \exists y_j \in \mathbf{y}$ 使 $y_j > \alpha$

(ii) $\alpha \in \mathbf{x}^{\perp} \Rightarrow \alpha$ 為 $\mathbf{x}$ 的上界 $\Rightarrow x_n < \alpha \ \forall n = 1, 2, \cdots$

由 (i)(ii) $\Rightarrow \exists y_j > x_n \ \forall n = 1, 2, \cdots$

2.3.6 乘法

以下我們定義實數的乘法。
設 $\xi, \eta \in \mathbb{R}$，考慮

(i) $\xi = 0$ 或 $\eta = 0$ 定義 $\xi \cdot \eta = 0$

(ii) $\xi > 0$ 且 $\eta > 0$ 在 ξ 所屬班級中任選一同學 $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \cdots\}$，在 η 所屬班級中任選一同學 $\mathbf{y} = \{y_1, y_2, \cdots\}$
不妨設 $x_n > 0,\ y_n > 0 \ \forall n$ （否則把負項丟掉）。則 $\{x_1y_1, x_2y_2, \cdots\}$ 為有界遞增數列。
令 ζ 為所屬班級所表實數。定義 $\xi \cdot \eta = \zeta$

(iii) $\xi > 0,\ \eta < 0$，則定義 $\xi \cdot \eta = -\xi \cdot (-\eta)$
$\xi < 0,\ \eta > 0$，則定義 $\xi \cdot \eta = -(-\xi) \cdot \eta$

(iv) $\xi < 0,\ \eta < 0$，則定義 $\xi \cdot \eta = (-\xi) \cdot (-\eta)$

2.3.7 乘法諸律

實數的乘法滿足如下諸律。

M_1： 交換律 $\xi \cdot \eta = \eta \cdot \xi$

M_2： 結合律 $(\xi \cdot \eta) \cdot \zeta = \xi \cdot (\eta \cdot \zeta)$

M_3： 分配律 $\xi \cdot (\eta + \zeta) = \xi \cdot \eta + \xi \cdot \zeta$

M_4： 單位元素存在
以 1 表數列 $\{1, 1, \cdots\} \in S$ 所屬班級之實數，則 $\xi \cdot 1 = \xi \ \forall \xi \in \mathbb{R}$

M_5： 乘法反元素存在
若 $\xi \neq 0$ 則 $\exists \eta \in \mathbb{R}$ 使 $\xi \cdot \eta = 1$

以上 M_1, M_2, M_3 由有理數系遺傳而得。下面証明 M_5：
不妨假設 $\xi > 0$。令 $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \cdots\}$ 為 ξ 所屬班級中之一位同學，$x_n > 0\ \forall n$。$\because x_n$ 為有界增數列，$\therefore -\frac{1}{x_n}$ 亦為有界增數列。令 ζ 為 $\{-\frac{1}{x_1}, -\frac{1}{x_2}, \cdots\}$ 所表之實數，η 表 ζ 的加法反元素，$\eta + \zeta = 0$。記住，$\xi \cdot \zeta = \{-1, -1, \cdots\} = -1$（請驗證它）
$\therefore 0 = \xi \cdot (\eta + \zeta) = \xi \cdot \eta + \xi \cdot \zeta = \xi \cdot \eta - 1$
故 $\xi \cdot \eta = 1$　得証

2.3.8 乘法合理性（Well-defined）問題

仿照加法合理性的証明可得，留作習題。

2.4 實數的完備性

實數的建構既成，有理數系的坑洞已被填滿，則完備性乃是順理成章之事，我們再次把兩種不同敘述的完備性陳述於下，然後給予証明。

A. 任意有界遞增數列必有極限

B. 任意上方有界的集合必有上確界（最小上界）

下面定理告訴我們，完備性乃由建構時所賦與。
Theorem 2.4.1 任意有界遞增數列必有上確界。

証： 設 $\xi_1 \leq \xi_2 \leq \cdots$ 為給定實數列

(i) 若 $\exists N$ 使 $\xi_N = \xi_{N+1} = \xi_{N+2} = \cdots$，則 ξ_N 即為上確界。

(ii) 否則，數列中不等號無窮次出現。把相等的項去掉，得到一嚴格遞增的實數列，此新的數列集與原有數列集有相同的上確界。因此，我們不妨假設一開始給定的數列具有嚴格遞增性：$\xi_1 < \xi_2 < \cdots$
從每個 ξ_n 所代表的班級中任取一位同學 $\mathbf{x}_n$，得有理數列

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= \{x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3} \cdots\} \\
\mathbf{x}_2 &= \{x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3} \cdots\} \\
\mathbf{x}_3 &= \{x_{3,1}, x_{3,2}, x_{3,3} \cdots\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

令 $y_1 = x_{1,1}$。由於 $\xi_1 < \xi_2$，故數列 $\mathbf{x}_2$ 中必存在一有理數 $x_{2,n_2} > x_{1,j}\ \forall j = 1, 2, \cdots$。
令 $y_2 = x_{2,n_2}$。又由於 $\xi_2 < \xi_3$，於 $\mathbf{x}_3$ 中必存在一有理數 $x_{3,n_3} > x_{2,j}\ \forall j = 1, 2, \cdots$。
重複上述論調於 $\xi_3 < \xi_4$，依此類推以致無窮，得有界遞增數列

$$y_1 < y_2 < y_3 \cdots$$

令 $\mathbf{y} = \{y_1, y_2, \cdots\}$，並令 ζ 為 $\mathbf{y}$ 所對應的實數，則 ζ 即為 $\{\xi_1, \xi_2, \cdots\}$ 的上確界。

定理 2.4.1 實際上就是完備性 A，而那個上確界就是數列的極限。為了以後陳述上的方便，我們把它列為定理如下：

Theorem 2.4.2 設數列 $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ 滿足

(i) $a_n \leq a_{n+1}\ \forall n$

(ii) $\exists k \in \mathbb{R}$ 使 $a_n \leq k\ \forall n$

則 $\exists l \in \mathbb{R}$ 使 $\lim_{n\to\infty} a_n = l$

於第一章第 6 節任脈的打通中，我們已証明

$$\boxed{\text{完備性 A}} \Rightarrow \boxed{\text{區間套定理}} \Rightarrow \boxed{\text{Bolzano Weierstrass 定理}}$$

再次陳述定理於下：

Theorem 2.4.3 區間套定理（參閱第一章第 6 節）

Theorem 2.4.4 Bolzano-Weierstrass 定理（參閱第一章第 6 節）

Theorem 2.4.5 實數完備性 B

設 $S \subset \mathbb{R}$，且 $\exists K \in \mathbb{R}$ 使 $x \leq K\ \forall x \in S$

則 S 有最小上界。

証： 若 K 為最小上界，則幸運已極。不妨設 K 非最小上界。任取 $a_1 \in S$，則 $a_1 < K$（K 非最小上界，排除等號）。令 $b_1 = K$，$I_1 = [a_1, b_1]$，$m_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$

(i) m_1 非 S 的上界。令 $a_2 = m_1$，$b_2 = b_1$

(ii) m_1 為 S 的上界。令 $a_2 = a_1$，$b_2 = m_1$

令 $I_2 = [a_2, b_2]$，$|I_2| = b_2 - a_2 = \frac{b_1-a_1}{2}$

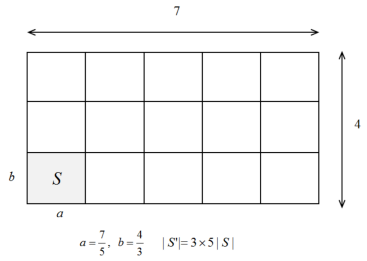
重複上述操作於 I_2，依此類推以致無窮，得區間套 $I_n = [a_n, b_n]$，a_n 非上界，b_n 為上界，

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$$
$$|I_n| = |b_n - a_n| = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \to 0$$

依區間套定理，$\exists \alpha \in \mathbb{R}$ 使 $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \{\alpha\}$，則 α 即為最小上界。$\square$

2.5 長方形面積公式的證明

給定長方形 S，其邊長分別為 a, b



(i) 當 a, b 為正整數
$|S|$（長方形面積）$= ab$ 顯而易見。

(ii) 當 a, b 是有理數
令 $a = \frac{n}{m}$，$b = \frac{q}{p}$，n, m, q, p 為正整數。把 a 延長 m 倍，令 $a' = ma = n$；b 延長 p 倍，令 $b' = pb = q$。以 a', b' 為邊，作新長方形 S'。據 (i)，

$$|S'| = a'b' = nq \tag{1}$$

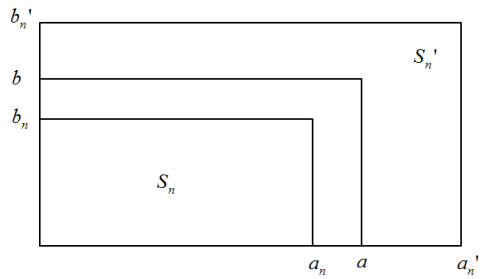
又 S' 中有 mp 個 S

$$\therefore |S'| = mp|S| \tag{2}$$

(1)(2)$\Rightarrow$

$$|S| = \frac{1}{mp}|S'| = \frac{n}{m}\frac{q}{p} = ab$$

(iii) a, b 為實數取有理數列 $\{a_n\}$ 及 $\{b_n\}$，$a_n \nearrow a$，$b_n \nearrow b$。又取有理數列 $\{a'_n\}$ 及 $\{b'_n\}$，$a'_n \searrow a$，$b'_n \searrow b$。令 S_n 及 S'_n 為分別由邊長 $\{a_n, b_n\}$ 及 $\{a'_n, b'_n\}$ 所組成的長方形，如圖



則 $S_n \subset S \subset S'$。因此 $|S_n| \le |S| \le |s'_n|$。
根據 (ii) $|S_n| = a_n b_n$，$|S'_n| = a'_n b'_n$。於是

$$a_n b_n \le |S| \le a'_n b'_n$$

而

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a'_n = a \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b'_n = b$$

從而得

$$|S| = ab \qquad \square$$

Pythagoras，請安息吧。

2.6 一個小問題

我的書桌上放著一只茶杯。
人類因發現視覺有暫留作用，大約是 1/16 秒，而有電影的誕生。我們看到李小龍一拳把惡棍打倒，拍手叫好，其實那些是斷斷續續的光影在眼前閃過。
我年輕的時候這樣問著：

我眼前看到的杯子是連續存在的嗎？

請你也來想一想。

2.7 實數系的幾個基本性質

下面這些性質，我們經常在用，用久了就認為天經地義，於是也忘了問他們為何成立。

Theorem 2.7.1 Archimedean Property
$a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, 則存在自然數 n 使 $na > b$

証： 若不然，$na < b\ \forall n$。令 $S = \{na | n = 1, 2, 3 \cdots\}$，則 b 為 S 的上界。依實數的完備性，S 有最小上界，令其為 α，於是 $na \leq \alpha\ \forall n = 1, 2, 3 \cdots$，從而 $(n+1)a \leq \alpha\ \forall n = 1, 2, \cdots$，故 $na \leq \alpha - a\ \forall n = 1, 2, \cdots$，即 $\alpha - a$ 為 S 的上界，這違背了 α 為最小上界的認定。□

系 1. $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, 則存在自然數 n 使 $n > x$

系 2. $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, 則存在自然數 n 使 $\frac{1}{n} < \epsilon$

系 3. $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$, 則存在自然數 m, n 使 $m \leq x < n$

Theorem 2.7.2
$x \in \mathbb{R}$, $x \geq 1$, 則存在自然數 n 使 $n \leq x < n + 1$

在證明這個定理前，我們先來談一談自然數系的一個性質：Well ordering principle。
所謂 Well ordering Principle 即指：任意自然數的子集，必含最小元素。當然，這個子集必須是非空的。理由如下：令 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \cdots\}$ 表自然數集，$A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \phi \therefore \exists n \in \mathbb{N}$ 使 $n \in A$. 我們由 $1, 2, 3 \cdots$ 依次檢驗看誰落在 A 裡面，第一次被檢驗出來的整數 n 就是 A 中最小元素。

定理的證明：
若 x 為自然數，定理當然成立。不妨設 x 非自然數。
依之前定理的系 3，存在自然數 r, s 使 $r < x < s$。考慮一切 $k \in \mathbb{N}$ 使 $r + k > x$（據系 1，這樣的 k 存在）。依 Well-ordering Principle，存在最小正整數 p 使 $r + p > x$。令 $n = r + p - 1$，則 $n \leq x$

(i) 若 $p = 1$，則 $n = r \leq x < r + p = n + 1$

(ii) 若 $p \geq 2$，根據 p 的定義，我們有 $n = r + p - 1 \leq x < r + p = n + 1$

討論： 唯一性問題
若存在自然數 m, n 使

$$m \leq x < m + 1 \quad 且 \quad n \leq x < n + 1$$

則 $m = n$

理由：若不然，不妨設 $n < m$，則

$$n < m \leq x < n + 1$$

此為不可能，因 $n, n+1$ 之間不再有任何自然數。□

2.8 讚嘆與省思

之一

實數的建構既成，至此筋脈暢通，了無障礙。想想：人類由生活中看到天空有「一個」太陽，晚上有「一個」月亮，眼前有「一個」人，樹上有「一隻」小鳥，水中有「一條」魚，遠處奔來「一匹」馬，母雞咯咯叫，下出了「一個」蛋.....，從而有「1」這個概念。

一隻鳥在樹上叫，引來另一隻鳥，而有 2 的產生。兩隻鳥在樹上唱和，另一隻鳥不甘寂寞也飛來湊熱鬧，而有 3 的產生。依此類推，以致無窮，而有自然數的誕生及其上的加減法。

太陽下山了，火球不見了；鳥在樹上，又飛跑了；泡泡破了，它消失了，..... 於是有「0」這個概念。

我欠你 3 塊錢，他向我借 2 斤白米，水位下降了 5 公尺，..... 於是有負數的產生。

自然數系，0，負數系，配以加法的延伸，而產生了整數系，及其上的四則運算。

由整數系而有了有理數系。

由有理數系而有了實數系。

實數系具完備性，而有了連續函數中間值定理和最大最小值定理。

由連續函數這兩個基本定理，又有了均值定理。

均值定理既出，則山頭在望，加把勁登上峰頂，山川大地，盡在眼底，來龍去脈，峰險嶺秀，雲煙輕盤，變幻莫測，美不勝收。

至此，兩腳著地，氣貫九霄。

你不能問我什麼是 0，什麼是 1，這兩個數一虛一實，不能問！由此而衍生萬物，而有微積分基本定理，而有近代數學，而有電腦，而有現代文明，可以登陸火星，探尋宇宙奧秘，..... 它不會就此停住，江山代有才人出，還要再演化下去。

親愛的，請你想一想，是不是令人讚嘆呢？說不定將來那引領風騷的人物，就是你呢！

不過，人畢竟是大自然孕育而生，人類創造文明，文明又框架人類，促使人類去改造自然，讓自己過舒適方便的生活，人類的能力越強，對自然的改變度越大，造成人與自然的衝突，天空都捅出了一個大洞來，危及人類自身，也危及地球上其他物種。甚至為拓張勢力，爭奪資源，大欺小，強凌弱，造成世間的不幸。

古人日出而作，日入而息。生活作息與大自然共脈動，其他物種無不如此。現代許多人夜半而作，日出仍不息，二十幾歲就有五十肩，眼如貓熊，心臟亂跳，健康亮起紅燈，有的甚至沉迷電子遊戲，臥倒咖檯，玩掉自己的人生。

水能載舟，水能覆舟。

你願駕一葉輕舟，泛遊於山水之間，仰觀日月星斗，近賞山川鳥獸，鷹盤山谷，魚躍清波；或臨深瀑，或登高岡，徐沫清風，小吟一曲，漁樵相逢，薪火煮茗，話鄉裡，道古今，不覺間，月上東山。抑或戀水成癡，心繫龍宮勝境，鑽破船底，直下九淵，一探究竟，化自己的身軀為腐肉，餵食龍王的蝦兵蟹將，靈魂長眠幽冥，不見天日，成為水族一員？

文明能造福人，文明能框架人。

之二

古人說，富貴學道難。

人一有了錢，就能逐慾，可以使喚人，可以叫鬼推磨，志得意滿，走路有風。

許多讀書人學有成就，拿這個獎，得那個譽，應是好事，不過有的人喉嚨逐漸變大，走起路來也開始有風了。

得意常使人傲漫，傲慢令人輕狂，輕狂讓人離道，哪一天要出車禍，不知道。

許多學科學的朋友，學了科學，就科學至上，以己之所識，論天下是非，狂傲不已。

有人說鬼神就像 i 一樣，是人創造出來的。

有人說除非我能測量他，否則我不相信鬼神的存在。

有人經由一翻邏輯推論，證明了上帝不存在。

學了科學，反成為科學的奴隸。其實科學何嘗役於你，自己役自己而洋洋得意，如是而已。

科學的確影響人類文明既深且巨，不過世間有許多事是不在科學之範疇內的。我希望學科學的人一定要有這樣的體認。

惠子問莊子說：子非魚，焉知魚之樂？

莊子反問：子非吾，焉知吾不知魚之樂？

二人展開一場有名的邏輯辯論。

我不是我媽媽，但我知道她愛我。

這不是邏輯問題，此中有真意，欲辯已忘言。這裡，科學請擺一邊。

世間到底有沒有鬼神？

如人飲水，冷暖自知。信者信其有，疑者疑其無。無須辯論，這不是邏輯問題。

鬼神之事，不要迷信，不要否定。

迷信，就像被矇住眼睛的人，看不見道路。

否定，就像坐井觀天的人，只相信自己所見。

世間之大，無奇不有。不可思議之事，時有所聞。不曾經歷過的事，不能說它不可能。

無奇不有也好，不可思議也罷，不可恆常。人間正道還是老實做人，誠誠實實地面對自己的人生，腳踏實地努力耕耘，凡事無愧於心，做個有光彩生命的人，做個有芬芳人格的人，

陶淵明給弟弟的家書中說：彼亦人子也，可善待之。如是，何愁天堂不在人間？我這樣認為。

人生不同年齡，對生命有不同體悟。辛棄疾說得好

「少年不識愁滋味，為賦新詞強說愁。

而今識得愁滋味，卻道天涼好個秋。」

生命昇華了，於是有：

歸去來兮，田園將蕪，胡不歸？

（第二章　完）

一百零一學年度 數學系高等微積分 (上) 習題二

2012.09.20

範圍: 第二章

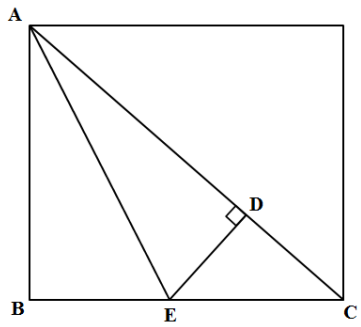
1. 請寫出下列敘述的否定命題：

   (a) 他是台大學生所以我讓他進去 (隱含：凡台大學生都可以進去)。

   (b) 蘋果落下，打中牛頓 (隱含：牛頓在蘋果樹下，蘋果只能下落，下落的諸蘋果中，至少有一個打中牛頓，除蘋果外別無其他異物)。

   (c) 每年秋天寒露過後，北插天山上的山毛櫸一片金黃，吸引無數登山客造訪，每位登山客無不拍下照片或撿幾片葉子回家作紀念 (遊於邏輯，不要役於邏輯，弄出一些不合情理的句子來作弄自己)。

2. 試證：正方形的邊長和對角線長不能被共度 (如圖：取 $\overline{AD} = \overline{AB}$，....)。



3. Hyppasus 所發現的無理數是什麼？

4. 任意兩相異實數間必存在有理數，試證之。

5. 試證乘法的定義是合理的 (well-defined)。

6. 實數具有保序性 (order preserving property)，即：在有理數系中我們有：

   (a) $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$，$a > b$ 且 $c > d$，則 $a + b > c + d$。

   (b) $a, b, c \in \mathbb{Q}$，$a > b$ 且 $c > 0$，則 $ac > bc$。

   此性質在實數系中仍成立，試證之。
   (複數無大小關係，不是因為它是「虛」的，而是你所定義出來的大小關係，都會破壞原有實數系中的序性。)

7. 試由 $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$，證明 e 為無理數。

8. 令 $a_n = \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{\ldots\sqrt{n}}}}$，問 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在否？

9. 證明下列各命題：

   (a) $x \geq 0$，若對任意正數 $\epsilon > 0$，恆有 $x < \epsilon$，則 $x = 0$。

   (b) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，$a_n \geq a_{n+1}\ \forall n$，則 $a_n \geq 0\ \forall n$。

   (c) 集合 $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$ 無最小元素。

   (d) 集合 $S = \{x | 0 < x < 1\}$ 無最小最大元素。

10. 令 $a = (1,000,000)^{1,000,000}$、$b = (1,000,001)^{999,999}$、$c = (999,999)^{1,000,001}$，試比較 a, b, c 的大小。

11. 試證：$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < ne\left(\frac{n}{e}\right)^n$。提示：$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e < \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$，$k = 1, 2, \ldots, n$。

12. 分別找出下面各小題從 A 映至 B 的一對一且映成函數（對射函數 bijective map）。

    (a) $A = [a, b]$, $B = (a, b)$

    (b) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, $B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$

    (c) $A = (0, 1) \times (0, 1)$, $B = (0, 1)$

    (d) $A = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, $B = \mathbb{R}^2$

13. (Apostol 1.15, 1.16)

    (a) 給定 $x \in \mathbb{R}$ ，$N \in \mathbb{N}$ 且 $N > 1$。試證明：存在 $h, k \in \mathbb{Z}$, $0 < k \leq N$ 使

    $$\left| kx - h \right| < \frac{1}{N}$$

    (b) 若 x 為無理數，試證明：存在無限多組 $h, k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$ 使得

    $$\left| x - \frac{h}{k} \right| < \frac{1}{k^2}$$

14. 令 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 滿足 $\forall n \in \mathbb{N}$，$f(n+1) > f(f(n))$。試討論所有可能之 f？(提示：試證明 f 為遞增。可假設 $f(m) = \min\{f(k) | f(k) < k\}$ 存在，例用條件證明矛盾，推得 $f(n) \geq n$)

15. 令 $0 < x < 1$

    (a) 證明 x 為有理數 $\Leftrightarrow \{nx - [nx] | n = 1, 2, \cdots\}$ 為有窮集。

    (b) 取 $x = 0.1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,10\,11\,12\cdots$

    試證：x 為無理數。(提示：考慮 $10^n x - [10^n x]$)

頁碼	作品	版權標示	來源／作者
3	Oh wind…far behind?		Percy Bysshe Shelley, "Ode to the West Wind", published in "Prometheus Unbound, A Lyrical Drama in Four Acts, With Other Poems collection", 1820, London.
15	子非魚焉知魚之樂…子非吾…魚之樂		《莊子》，莊子。
15	此亦人子也可善遇之		〈列傳六十五隱逸上〉,《南史》，李延壽。
16	少年不識愁滋味		〈醜奴兒〉，辛棄疾
16	田園將蕪胡不歸		〈歸去來兮〉，陶淵明

101 台灣大學數學系高等微積分上由陳金次製作，以創用 CC 姓名標示-非商業性-禁止改作 3.0 台灣授權條款

Chapter 3

集合論的誕生

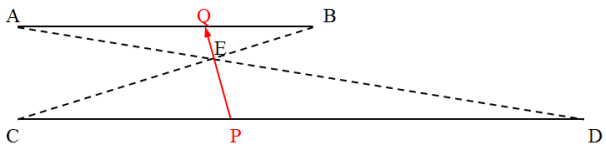
3.1 基數（Cardinality）

從有理數系 $\mathbb{Q}$ 到實數系 $\mathbb{R}$，到底填進多少東西呢？當然，填補進去的是無理數，我們已知任意兩有理數之間必存在無理數，任意兩無理數之間必存在有理數，看來，有理數和無理數應該是等量齊觀的。

例如：班上男女同學排成一圈，任意二女生之間必有男生，任意二男生之間必有女生，則男女生人數相等。

從另一觀點，$\mathbb{Q}+\sqrt{2}$ 和 $\mathbb{Q}$ 是等量齊觀的，對任意無理數 α，$\mathbb{Q}+\alpha$ 和 $\mathbb{Q}$ 是等量齊觀的。而無理數中有無窮無量互不相交的 $\mathbb{Q}+\alpha$，由此觀之，無理數的量顯然要比有理數 $\mathbb{Q}$ 多很多。到底誰對呢？

我讀大一的時候，有人告訴我任意兩線段中的點數是相同的。我聽了哈哈大笑，在黑板上畫一直線 $\overline{AB}$，又把它沿常好幾倍得一線段 $\overline{CD}$ （如圖）



$\overline{CD}$ 明明是 $\overline{AB}$ 的好幾倍，怎麼說點數相同呢？

這位朋友不疾不徐，把 $\overline{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 的交點 E 點出來，然後在 $\overline{CD}$ 上任取一點 P，連 $\overline{PE}$，延長交 $\overline{AB}$ 於 Q。

他說：

「$\overline{CD}$ 上的任一點 P 都可在 $\overline{AB}$ 上找一點 Q 和它相應，這種相應是一對一，因此 $\overline{AB}$ 的點數不少於 $\overline{CD}$。同理，$\overline{CD}$ 的點數不少於 $\overline{AB}$。因此，$\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 有相同的點數。」

我看了他的論述，很不服氣，可是又無法反駁。我思索著這中間的道理，漸漸地，我發現到我的不服氣是來自於有窮世界的習性，人要是習慣於有窮世界的運作而且堅持不改，就看不

到無窮世界的真理。感謝他這一例，讓我開了竅。
在無窮世界裡，什麼叫等量齊觀呢？
德國數學家 G.Cantor（1845-1918）提出如下的觀念：

定義 3.1(**Cardinal Number**)
A,B 兩集合有相同的基數（Cardinal number），若存在一對射（1-1 and onto）函數 f 把 A 映成 B。1-1 and onto 又稱作 bijective。

定義 3.2(**Countable**)
稱集合 A 為可數（Countable），若 A 和自然數集 $\mathbb{N}$ 有相同的基數。即存在對射函數 f 把 A 映成 $\mathbb{N}$。
可數又稱可列，可以叫號依序排成一列，如自然數一般。當然，有窮集（finte set）是可以數的，因此在數學上我們常把 finite set 也納入 countable set 來論述。
為了以後論述上的方便，我們把自然數的基數定作 $\aleph_0$，它是我們從有窮到無窮所碰到的第一個無限大。

3.2 有理數可數，實數不可數

有了這個可數的觀念後，Cantor 發現有理數雖然密密麻麻，其實它是可數的。
Theorem 3.1 $(0,1)$ 中的有理數是可數的

証： $x \in (0,1)$，x 為有理數，則 $x = \frac{q}{p}$，p, q 為互質整數，$q < p$，$p > 1$
且由 $p = 2, 3, 4 \cdots$ 來觀察一切有理數。

$$\begin{array}{lll} p=2 & \text{有} & \frac{1}{2} \\ p=3 & \text{有} & \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \\ p=4 & \text{有} & \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \\ p=5 & \text{有} & \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \\ p=6 & \text{有} & \frac{1}{6}, \frac{5}{6} \\ \cdots & & \end{array} \tag{1}$$

依序編號如下：

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6} \cdots$$

則任意 $(0,1)$ 中的有理數都會出現在這數列上，且只出現一次，故可數。□

Cantor 發現，在實數的建構中，於 0,1 之間所填進的無理數，其數量遠超過有理數。其觀察如下：

Theorem 3.2 (0,1) 中的實數不可數

証： 對一切 $x \in (0,1)$，以十進位來表示如下：

$$x = 0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots \qquad \alpha_i = 0,1,2\cdots 9$$

為了清楚表示 x，我們不取循環小數。例如 $\frac{1}{4}$ 有二種表示：

$$\frac{1}{4} = 0.25000\cdots \quad 及 \quad 0.2499\cdots$$

取前者，不取後者。

若 $(0,1)$ 中的實數可數，設 $(0,1) = \{x_1, x_2, \cdots\}$，對每一 x_i，觀察它的十進位表示：

$$x_1 = 0.\underline{\alpha_{11}}\alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{14}\cdots$$
$$x_2 = 0.\alpha_{21}\underline{\alpha_{22}}\alpha_{23}\alpha_{24}\cdots$$
$$x_3 = 0.\alpha_{31}\alpha_{32}\underline{\alpha_{33}}\alpha_{34}\cdots$$
$$x_4 = 0.\alpha_{41}\alpha_{42}\alpha_{43}\underline{\alpha_{44}}\cdots$$

令

$$\beta_n = \begin{cases} 5 & 若\alpha_{nn} \neq 5 \\ 6 & 若\alpha_{nn} = 5 \end{cases}$$

$x = 0.\beta_1\beta_2\cdots$

則 $x \in (0,1)$ 但 $x \neq x_n$ 因 $\beta_n \neq \alpha_{nn}$ $\forall n$，矛盾 □

<u>Remark</u>：上面這個證明是有名的 Cantor diagonal process，β_n 在 5 與 6 之間選取（你也可以在 7 和 8，3 和 5，$\cdots$ 等之間選取），目的是要避開進位問題。

$(0,1)$ 和 $\mathbb{R}$ 是可以對射的（習題），因此有

<u>系</u>：實數集 $\mathbb{R}$ 不可數。

3.3 幾個基本定理

Theorem 3.3 若 A 為可數集，$B \subset A$，則 B 亦為可數集。（在此，把 Finite set 也納入可數集考量）

証： 若 B 為有窮集，結論顯然為真。考慮 B 為無窮集的情況。

令 $A = \{a_1, a_2, \cdots\}$，由 $a_1, a_2\cdots$ 依序檢查，看它是否落在 B 中。第一次出現在 B 中時我們把它撿起來，叫作 a_{n_1}。接著再從 $a_{n_1+1}, a_{n_2+1}, \cdots$ 依序檢查，第二次出現在 B 中者令之為 a_{n_2}。依此類推，以致無窮，得：

$$B = \{a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}\cdots\}$$

顯然，B 和自然數 $\mathbb{N}$ 是對射的。□

從定理 3.2 及 3.3 我們馬上得到

<u>系</u>：$\mathbb{R}$ 中一切無理數集不可數。

Theorem 3.4 $A_1, A_2 \cdots$ 為可數集，則 $S = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ 亦為可數集。

証： 不妨設每一個 A_n 都是無窮可數集。令

$$
\begin{array}{l}
A_1\colon\ \overset{1}{a_{11}},\ \overset{3}{a_{12}},\ \overset{6}{a_{13}},\ \overset{10}{a_{14}} \cdots \\
A_2\colon\ \overset{2}{a_{21}},\ \overset{5}{a_{22}},\ \overset{9}{a_{23}},\ a_{24} \cdots \\
A_3\colon\ \overset{4}{a_{31}},\ \overset{8}{a_{32}},\ a_{33},\ a_{34} \cdots \\
A_4\colon\ \overset{7}{a_{41}},\ a_{42},\ a_{43},\ a_{44} \cdots
\end{array}
$$

如圖所示，依箭頭所給方向依序邊號，則 S 中每一個元素在此編號過程中都會被賦與號碼，不同元素有不同號碼，即 S 和 $\mathbb{N}$ 是對射的，故可數。□

<u>系</u>： $\mathbb{R}$ 上一切有理數是可數的。

<u>定義 3.3</u> 給定 A, B 二集合，定義

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\} \quad \text{（此集合的存在性，容後討論之）}$$

<u>定義 3.4</u> 給定集合 $A_1, A_2, \cdots A_n$，定義

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) | a_i \in A_i, i = 1, 2, \cdots n\}$$

由定理 3.2，我們馬上有如下定理：

Theorem 3.5 設 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 為可數集，則 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 亦為可數集。

証： 定理 3.2 $\Rightarrow$ $A_1 \times A_2$ 為可數集

$$A_1 \times A_2 \times A_3 = (A_1 \times A_2) \times A_3$$

$A_1 \times A_2$ 為可數，A_3 可數，故 $A_1 \times A_2 \times A_3$ 亦可數。由歸納法可得 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 為可數集，$\forall n$ □

<u>Remark</u>：

A_n 為可數集 $\forall n \not\Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \times A_2 \times \cdots$ 為可數集。

例如 $x \in [0, 1]$，以二進位表示：

$$x = 0.\alpha_1\alpha_2 \cdots \quad \alpha_i = 0\text{或}1 \quad \forall n$$

令 $A_n = \{0,1\}\ \forall n = 1,2,3,\cdots$，每一個 A_n 只含兩個元素，可數。
但 $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ 卻與 $[0,1]$ 中的實數對射，故不可數。

上例中，如果 A_n 是無窮可數，顯然 $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ 的元素要比自然數多很多。我們要問：$\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ 的基數是不是大於實數的基數呢？(即它能不能和實數對射)
令人訝異的是，它的基數和實數是相同的，且看下面的定理：
Theorem 3.6 設 $\mathbb{N}$ 表自然數集，$S = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \cdots$，則 S 的基數和實數相同。
分析：

取 $\mathbf{x} \in S$，則 $\mathbf{x} = (n_1, n_2, \cdots)$, $n_i \in \mathbb{N}$。這樣的一組整數數列如何把它對應到 (0,1) 中的實數呢？
設 $y \in (0,1)$，以二進位表示 y：

$$y = 0.\alpha_1\alpha_2\cdots \quad \alpha_i = 0,1$$

例如

$$y = 0.0100110001000001\cdots \tag{2}$$

我們觀察 y 中隔多少位出現 1。以上面的 y 為例：

$$y = 0.\underbrace{01}_{2}\underbrace{001}_{3}\underbrace{1}_{1}\underbrace{0001}_{4}\underbrace{000001}_{6}\cdots \tag{3}$$

可得以下自然數列：$(2,3,1,4,6,\cdots) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \cdots$，令其為與 y 相應的數列。為了讓 y 的展式中，1 可以無窮次出現，我們採用以下進位表示：例如

$$\begin{aligned}\frac{5}{16} &= 0.0101000\cdots \quad \text{（捨）}\\ &= 0.01001111\cdots \quad \text{（取）}\end{aligned}$$

又 $1 = 1.000\cdots \quad = 0.111\cdots$ ，因此 1 必須考慮進來。故數列 $(2,3,1,1,1,\cdots)$ 對應到 $\frac{5}{16}$，$(1,1,1,1,1,\cdots)$ 對應到 1，此對應為一對一，且把 S 映成 $[0,1]$，故其基數與實數相同。□

<u>系</u>：若 A_n 為無窮可數集 $\forall n = 1,2,3\cdots$，則 $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ 的基數與實數相同。
我們更進一步問：如果 A_n 的基數與實數相同，那麼 $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ 的基數是不是應該要比實數大？
無窮世界的大小觀念常令有窮世界的人們大吃一驚呢！且看下面定理：
Theorem 3.7 $T = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots$，$\mathbb{R}$ 表實數集，則 T 的基數與實數相同。
分析：

(i) $\mathbf{x} \in T$，則 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \cdots)$，$x_n \in \mathbb{R}\ \forall n = 1,2,3,\cdots$

(ii) 由定理 3.6，$\mathbb{R}$ 和 $S = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \cdots$ 是可以對射的，因此每一個 x_n 一對一映到一組自然數列 $x_n \mapsto (k_{n,1}, k_{n,2}, \cdots)$, $k_{n,j} \in \mathbb{N}$

(iii) 把這些自然數列寫成無窮方陣如下：

$$\begin{array}{ll} k_{11},\ k_{12},\ k_{13},\ k_{14} \cdots & \leftrightarrow x_1 \\ k_{21},\ k_{22},\ k_{23},\ k_{24} \cdots & \leftrightarrow x_2 \\ k_{31},\ k_{32},\ k_{33},\ k_{34} \cdots & \leftrightarrow x_3 \\ k_{41},\ k_{42},\ k_{43},\ k_{44} \cdots & \leftrightarrow x_4 \end{array}$$

令此無窮方陣為 $A(\mathbf{x})$，M 表此一切無窮方陣集。顯然 $A:\ \mathbf{x} \mapsto A(\mathbf{x})$ 為 S 到 M 的對射。

(iv) 把這個方陣依箭頭所示，依序排成一數列

$$\mathbf{y} = (k_{1,1}, k_{1,2}, k_{2,1}, k_{1,3}, k_{2,2}, k_{3,1}, k_{1,4}, \cdots) \tag{4}$$

此對應為一對一，把諸方陣映成（onto）S。

(v) 綜合 (ii)-(iv)：$T \to S \times S \times S \cdots \to M \to S$ 每一步驟都是對射關係，因此 T 和 S 可以對射。S 的基數和實數相同，故 T 的基數亦與實數同。□

<u>系</u>：若 A_n 的基數與實數同 $\forall n = 1, 2, \cdots$，則 $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ 的基數與實數同。

3.4 CDSB（Schröder - Bernstein）定理

先看一個例子： $l^2 = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots),\ x_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\}$
這是一個無窮維空間，其上兩點 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 距離為

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \left[\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2\right]^{1/2}$$

內積 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$
這個空間是一個 Hilbert space。問：此空間的基數為何？
分析：

顯然，$l_2 \subset T = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots$，又取 l_2 子集 $E_1 = \{(x_1, 0, 0, \cdots) | x_1 \in \mathbb{R}\}$，$E_1$ 和 $\mathbb{R}$ 是無異的，因此，我們可以作如是觀：

$$\mathbb{R} \subset l_2 \subset T$$

而 T 和 $\mathbb{R}$ 有相同基數，「因此」，l_2 和 $\mathbb{R}$ 具有相同基數。

評論：這個「因此」是有窮世界的真理，到了無窮世界，它還成立嗎？

Cantor 於 1883 年首先提出這個疑問，稍後並給予證明，其證明是建立在 Axiom of Choice（接下來會介紹）上。Dedekind 於 1887 年也證明了它，但並未發表。Cantor 於 1895 年在 Seminar 的時候又提出這個問題，Bernstein 是當時在座的學生之一。Schröder 於 1896 年提出證明，但被發現證明有瑕疵，Bernstein 於 1897 年證明了它，不需用到 Axiom of Choice。E. Borel 在他 1898 年的新書中引述這個定理，稱它為 Schröder - Bernstein 定理，就這樣，這個定理的名稱被沿用了下來。

為了紀念這些人的貢獻，我在這裡就以 CDSB 定理來稱呼它。

<u>定義</u>　給定 A,B 二集合，我們稱 $A \sim B$，若 A,B 有相同基數。換句話說，存在對射函數 f 把 A 映成 B。

Theorem 3.8　$A \supset B \supset C$。若 $A \sim C$，則 $A \sim B \sim C$

証：（剝洋蔥法）

(i) 內映造蔥

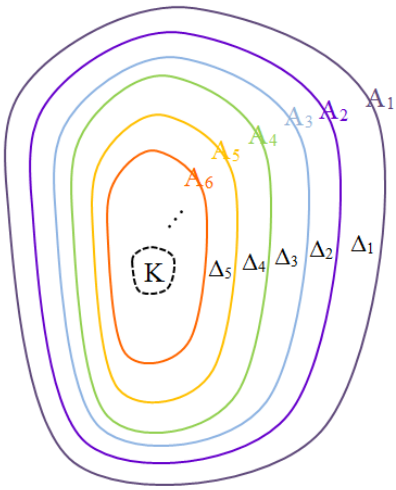
設 f 為對射函數把 A 映成 C，令 $A_1 = A,\ A_2 = B,\ A_3 = C,\ A_4 = f(A_2)$（把 B 向內映），於是有

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset A_4, \quad A_1 \sim A_3\ , A_2 \sim A_4$$

再把 A_3 向內映，令 $A_5 = f(A_3)$；同樣地把 A_4 向內映，令 $A_6 = f(A_4)$。依此類推，以致無窮，得集合列：

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset A_4 \supset A_5 \supset A_6 \supset \cdots \text{（如圖）} \tag{5}$$

其中 $A_1 \sim A_3 \sim A_5 \sim \cdots$，$A_2 \sim A_4 \sim A_6 \sim \cdots$



(ii) 剝蔥

令 $\Delta_n = A_n - A_{n-1}$（洋蔥的第 n 層肉），$K = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$（想像此洋蔥有核），

$$A_1 \sim A_3,\ A_2 \sim A_4 \ \Rightarrow\ \Delta_1 = A_1 - A_2 \sim A_3 - A_4 = \Delta_3$$
$$A_2 \sim A_4,\ A_3 \sim A_5 \ \Rightarrow\ \Delta_2 = A_2 - A_3 \sim A_4 - A_5 = \Delta_4$$
$$\cdots$$

依此類推以致無窮，我們有

$$A_1 \sim A_3 \sim A_5 \sim \cdots \quad \text{（奇數層基數同）}$$
$$A_2 \sim A_4 \sim A_6 \sim \cdots \quad \text{（偶數層基數同）}$$

又

$$A = A_1 = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3 \cup \Delta_4 \cup \cdots \cup K$$
$$B = A_2 = \qquad \Delta_2 \cup \Delta_3 \cup \Delta_4 \cup \cdots \cup K$$

經過 f 的映射，A 中 Δ_1 可以對射到 B 中 Δ_3，A 中 Δ_3 可以對射到 B 中 Δ_5。依此類推，以致無窮，A 中 $\Delta_1 \cup \Delta_3 \cup \Delta_5 \cup \cdots$ 可以對射到 B 中 $\Delta_3 \cup \Delta_5 \cup \Delta_7 \cdots$。令

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \Delta_1 \cup \Delta_3 \cup \Delta_5 \cup \cdots \\ x & \text{其他} \end{cases}$$

則 $g : A \to B$ 為一對一，且映成（onto）。故定理成立。

<u>Remark</u>:
事實上，核是不動的，即 $f : K \to K$。
理由：

$$x \in K \ \Rightarrow\ x \in A_n\ \forall n \ \Rightarrow\ f(x) \in A_{n+2}\ \forall n$$
$$\Rightarrow\ f(x) \in \cap_{n=1}^{\infty} A_n = K$$

不過上述 g 不能取 f，因為這麼一來 B 中的 Δ_2 就沒人跟他對應了！

Theorem 3.9 （CDSB 定理）
給定集合 A, B，若 $A \sim B^* \subset B$ 且 $B \sim A^* \subset A$，則 $A \sim B$

証： $B^* \subset B$，$B \sim A^* \subset A \Rightarrow B^* \sim A^{**} \subset A^*$。據假設，$A \sim B^* \therefore A \sim A^{**}$。而 $A \supset A^* \supset A^{**}$，據定理 3.8，我們有

$$A \sim A^* \sim A^{**} \tag{6}$$

故 $A \sim B$

洋蔥雖然辛辣，不過真理蘊藏其中。

我曾經拜訪某一出名的企業負責人，感謝他對某基金的會的捐款。走進他的辦公室，但見布置簡單雅致，牆上掛著古樸的書法橫框，內寫著：

道心猶如山藏玉

做生意而能常懷道心，我向他鞠躬敬禮。

做學問要經常與朋友互動，交換意見，不可孤芳自賞，自己蒙起頭來硬幹，不同人有不同觀點，會使你的思想廣闊，從不同角度來看問題，受益良多，不致鑽牛角尖，越鑽越困，耗盡青春而一無所得。

CDSB 定理發表後，匈牙利數學家 G.Konig（1849-1913）稍後也給了證明，那是另一種 mind 的思考，簡潔有力，但幽隱而不顯。所謂「道心惟微」或者可以比喻。我們介紹如下：

我把這個證明姑且稱之為「溯源法」。

所謂溯源就是一代一代向上追尋，看它的源頭在哪裡。

設 f 把 $A \to B^* \subset B$，g 把 $B \to A^* \subset A$，f, g 為對射函數

(i) $x \in A$，我們稱 x 的源頭在 A 中，若

$$x \to g^{-1}(x) \to f^{-1} \circ g^{-1}(x) \to g^{-1} f^{-1} \circ g^{-1}(x) \to \cdots$$

上溯到幾代後，在 A 中停止（找到源頭）

(ii) 同理，我們稱 x 的源頭在 B 中，若上述溯源步驟上溯幾代後在 B 中停止。

(iii) 還有一種元素，雞生蛋，蛋生雞，搞不清楚。例如：

$$x \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} y \qquad x \in A, y \in B$$

還有一種元素，無窮上溯也找不到源頭，這類元素就稱它為源頭不明者。

由於 f, g 都是對射函數，對一切 $x \in A$ 上述三種情況必有一種且只能有一種情況發生（請想一想！）令

$$A_A = \{x \in A | x\text{的源頭在 } A \text{ 中}\}$$
$$A_B = \{x \in A | x\text{的源頭在 } B \text{ 中}\}$$
$$A_\infty = \{x \in A | x\text{的源頭不明}\}$$

則 $A = A_A \cup A_B \cup A_\infty$，$A_A, A_B, A_\infty$ 互不相交。

同理令

$$B_A = \{x \in B | x\text{的源頭在 } A \text{ 中}\}$$
$$B_B = \{x \in B | x\text{的源頭在 } B \text{ 中}\}$$
$$B_\infty = \{x \in B | x\text{的源頭不明}\}$$

則 $B = B_A \cup B_B \cup B_\infty$，$B_A, B_B, B_\infty$ 互不相交。
定義

$$\begin{aligned} h(x) =& f(x) \quad x \in A_A \\ =& g^{-1}(x) \quad x \in A_B \\ =& f(x)\text{（或 } g^{-1}(x) \text{ 皆可）} \quad x \in A_\infty \end{aligned}$$

顯然，在 h 的映射下，

$$A_A \to B_A$$
$$A_B \to B_B$$
$$A_\infty \to B_\infty$$

由於 f, g^{-1} 為對射，故 $h : A \to B$ 為對射 □
評論：我看 König 這個溯源法和 Bernstein 的剝洋蔥法，基本上是一樣的，觀察如下：
令 $A_1 = A, B_1 = B$，$B_2 = f(A_1),\ A_2 = g(B_1)$，$B_3 = f(A_2),\ A_3 = g(B_2) \cdots B_{n+1} = f(A_n),\ A_{n+1} = g(B_n) \cdots$
則 $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$，$A_1 \sim A_2 \sim A_3 \sim \cdots$
令 $\Delta_n = A_n - A_{n-1}$（A 蔥的第 n 層肉），$K_A = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$（A 蔥的核）
同理 $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \cdots$，$B_1 \sim B_2 \sim B_3 \sim \cdots$
令 $\Sigma_n = B_n - B_{n-1}$（B 蔥的第 n 層肉），$K_B = \cap_{n=1}^{\infty} B_n$（B 蔥的核）
又

$$A_1 \sim B_2 \sim A_3 \sim B_4 \sim \cdots$$
$$B_1 \sim A_2 \sim B_3 \sim A_4 \sim \cdots$$

故

$$A_1 - A_2 \sim B_2 - B_3 \sim A_3 - A_4 \sim \cdots$$
$$B_1 - B_2 \sim A_2 - A_3 \sim B_3 - B_4 \sim \cdots$$

即

$$\Delta_1 \sim \Sigma_2 \sim \Delta_3 \sim \Sigma_4 \cdots$$
$$\Sigma_1 \sim \Delta_2 \sim \Sigma_3 \sim \Delta_4 \cdots$$

König 溯源法中的 A_A 事實上就是 $\Delta_1 \cup \Delta_3 \cup \Delta_5 \cup \cdots$，$A_B$ 事實上就是 $\Delta_2 \cup \Delta_4 \cup \Delta_6 \cup \cdots$，$A_\infty$ 事實上就是 K_A。
同理，B_A 事實上就是 $\Sigma_1 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_5 \cup \cdots$，$B_B$ 事實上就是 $\Sigma_2 \cup \Sigma_4 \cup \Sigma_6 \cup \cdots$，$B_\infty$ 事實上就是 K_B。
那個 h 函數即

$$\left.\begin{array}{cccc} \Delta_1 \xrightarrow{f} \Sigma_2 & \Delta_3 \xrightarrow{f} \Sigma_4 & \Delta_5 \xrightarrow{f} \Sigma_6 & \cdots \\ \Delta_2 \xrightarrow{g^{-1}} \Sigma_1 & \Delta_4 \xrightarrow{g^{-1}} \Sigma_2 & \Delta_6 \xrightarrow{g^{-1}} \Sigma_5 & \cdots \end{array}\right\} \text{肉對肉}$$

$$K_A \xrightarrow{f} K_B \quad \text{核對核}$$

Bernstein 是外科醫師，König 是內科醫生。

3.5 九霄天外更有天

Cantor 的研究工作對現有經驗知識造成很大的衝擊。例如當他發現平面上的單位方塊 $[0,1] \times [0,1]$ 竟然可以和 $[0,1]$ 對射的時候，他寫信給 Dedekind 道：
"Je le vois, mals je ne le crois pas!"
(I see it, but I can't believe it!)
集合 $T = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots$ 這個集合已經超大了，但定理 3.7 告訴我們他和實數同基數。
有沒有比 $\mathbb{R}$ 的基數更大的集合？
有！且看下例。
例：一切定義於 $[0,1]$ 上的函數集，其基數大於 $\mathbb{R}$ 的基數。

証： 令 $S = \{f | f\text{為定義於 } [0,1] \text{ 上的函數}\}$。
若 $S \sim \mathbb{R} \sim [0,1]$，設 $\phi : \alpha \mapsto f_\alpha$ 為 $[0,1]$ 到 S 上的對射函數。
定義 $g(x) = f_x(x) + 1,\ x \in [0,1]$，則 $g \in S$

(基本上這就是 Diagonal Process 精神所在，造一函數 g，使它在 x 這點的取值與 $f_x(x)$ 相異)。則 g 為定義於 $[0,1]$ 上的函數，故存在 $\alpha \in [0,1]$ 使 $g = f_\alpha$，$f_\alpha \in S$。兩邊對 α 取值：

$$f_\alpha(\alpha) = g(\alpha) = f_\alpha(\alpha) + 1$$

此為不可能。

而一切常函數的基數與 $\mathbb{R}$ 同，但常函數只是 S 的一個小子集，故 S 的基數要比 $\mathbb{R}$ 的基數大。□

下面這個定理告訴我們無窮大之外更有無窮大。
Theorem 3.10 設 S 為給定集合，$\mathcal{P}(S)$ 為其冪集（Power set），即 $\mathcal{P}(S) = \{A | A \subset S\}$。則 $\mathcal{P}(S)$ 的基數恆大於 S 的基數。

証： 若 $\mathcal{P}(S)$ 與 S 的基數同，即存在對射函數 $\phi : S \to \mathcal{P}(S)$。
令 $A = \{x | x \in S, x \notin \phi(x)\}$，則 $A \in \mathcal{P}(S)$。故存在 $x \in S$ 使 $\phi(x) = A$

(i) 若 $x \in A$，則 $x \notin \phi(x) = A$ 矛盾

(ii) 若 $x \notin A = \phi(x)$，則 $x \in A$ 矛盾

又令 $B = \{\{x\} | x \in A\}$，則 B 和 A 是同基數。而 $B \subsetneq \mathcal{P}(S)$，故 $\mathcal{P}(S)$ 的基數大於 S 的基數。□

同理 $\mathcal{P}(\mathcal{P}(S))$ 的基數又大於 $\mathcal{P}(S)$，$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(S)))$ 的基數又大於 $\mathcal{P}(\mathcal{P}(S)) \cdots$
所謂「山外青山樓外樓，九霄天外更有天」，無窮大之外更有無窮大，永無止境！
我們把前面構造的諸定理整理一下：

$\mathbb{N}$：自然數集

$\mathbb{Q}$：有理數集

$\mathbb{R}$：實數集

以 $\#A$ 表 A 的基數

以 $\aleph_0$（讀作 “Alepha zero”，Alepha 是西伯來字母 N 的讀音）表 $\#\mathbb{N}$，是第一個無窮大。它是可數的，因此又稱它為 countable infinity。

以 c 表 $\#\mathbb{R}$，是目前出現第二個無窮大，它是不可數的，而 $\mathbb{R}$ 是連續的，因此又稱 continuous infinity

我們有

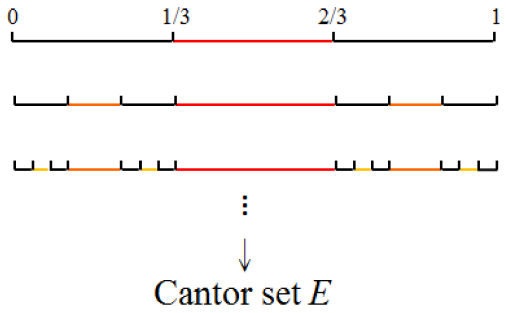
1. $\#\mathbb{Q} = \aleph_0$ （定理 3.1）
2. $(\aleph_0)^n = \aleph_0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$ （定理 3.5）
3. $2^{\aleph_0} = c$ （右邊代表 $(0, 1)$ 中實數的二進位總數）
4. $c^n = c \ \ \forall n \in \mathbb{N}$ （習題）
5. $(\aleph_0)^{\aleph_0} = c$ （定理 3.6）
6. $c^{\aleph_0} = c$ （定理 3.7）
7. $c_1 = 2^c > c$ （$c_1 = \#\mathcal{P}(\mathbb{R}) > \#\mathbb{R}$，定理 3.10）
8. 設 $\mathcal{P}_1(A) = \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)), \mathcal{P}_2(A) = \mathcal{P}(\mathcal{P}_1(A)) \cdots$，$\mathcal{P}_n(A) = \mathcal{P}(\mathcal{P}_{n-1}(A)) \cdots$，
令 $c_n \equiv \#\mathcal{P}_n(A)$，則
$$c_1 < c_2 < \cdots \qquad \text{（定理 3.10）}$$

3.6 Cantor 的憂鬱

Cantor 把無窮大分級後，很自然地問這樣一個問題：
在 Countable infinity 和 Continuous infinity 之間，是否存在另一種 infinity？
即：是否存在一種無窮集合 $A \subset \mathbb{R}$，A 既不能和 $\mathbb{N}$ 對射，也不能和 $\mathbb{R}$ 對射？

1. Cantor set

   為了創建這樣的集合，Cantor 把 $[0,1]$ 這個區間三等份，挖去中間那一個開區間 $A_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$，次又把剩餘的兩區間 $[0, \frac{1}{3}], [\frac{2}{3}, 1]$ 分別又三等分，各自挖去中間那個開區間 $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ 及 $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$。令 $A_2 = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$，再次又把剩餘的四個開區間分別三等分，又分別挖去中間的開區間，令 $A_3 =$ 挖去的開集。依此類推，以致無窮。剩下來的那個集合，以 E 表示之，稱為 **Cantor set**。



$$E = [0,1] - \cup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Cantor 心想：我挖了夠多了，以長度來看，

$$\|A_1\| = \frac{1}{3}, \quad \|A_2\| = 2 \cdot \frac{1}{3^2}, \quad \|A_3\| = 2^2 \cdot \frac{1}{3^2}, \cdots \tag{7}$$

（其中 $\|A_n\|$ 表 A_n 的長度）

$$\begin{aligned}
\text{挖去的總長度} &= \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3^2} + 2^2 \cdot \frac{1}{3^3} + 2^3 \cdot \frac{1}{3^4} + \cdots \\
&= \frac{1}{3}\left[1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \cdots\right] \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1
\end{aligned}$$

我幾乎把 $[0,1]$ 挖盡，它應該比 $[0,1]$ 少得可憐。

留下來的數又是什麼呢？

Cantor 信心滿滿地認為這個集合就是他所要的了，他倒了一杯紅酒，品嘗它的香味，看著天上的白雲，鳥兒在枝頭上啼唱，好不開心。

他邊哼著小曲，拿起手稿，得意地回顧；慢慢地，他臉色變了。

$x \in E$，表示它每次都沒被挖走，亦即它每次都留在剩餘兩個閉區中，這兩個閉區間二選一。令挖去 n 次後，x 所在的閉區間為 I_n，$\|I_n\| = \frac{1}{3^n} \to 0$

$\{x\} = \cap_{n=1}^{\infty} I_n$ （區間套定理）

x 與區間列 $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$ 為 1-1 對應，

每個區間 I_n 有二種選擇，故 x 和 $(0,1)$ 中的二進位實數可以對射。

因此，E 的基數和實數同！

怎麼辦？

2. Continuous Hypothesis

Cantor 花了許多時間和精力，要去建構這樣的集合，一直沒成功，最後他認定：

「這個集合是不存在的！」

這就是有名的 **Continuous Hypothesis**。

Cantor 轉而要去證明這個 conjecture。

他廢寢忘食，絞盡腦汁，終究沒有成功。

1900 年，第一屆國際數學大會在巴黎舉行，D.Hilbert 受邀發表演講，提出影響深遠的 23 個問題。他的第一個問題就是這個 continuous hypothesis 到底對不對？

我們順便提一下前面那位來自 Budapest 的 König 先生，他在 1904 年第三屆國際數學大會於 Heidelberg 舉行時，宣稱他 disprove Cantor 的 conjecture，引起各方矚目，許多人專程跑來參加，想聆聽他的演講。他講完後，第二天 E.Zermenlo 就提出他的質疑，最後導致 König 撤回了自己的論文。

Cantor 的研究工作對當時許多深受宗教洗禮的數學家來說是離經叛道的。他在 Berlin 大學的教授 Krönecker 甚至用 “Corrupter of Youth” 來形容他，Poincaré 甚至公開表明：

“Most of the ideas of Cantorian set theory should be banished from mathematics once and for all”

Cantor 任教於 Halle 大學，當時的德國數學重鎮在 Berlin，Cantor 很想轉到 Berlin，不過 Krönecker 主導 Berlin，他厭惡 Cantor 成為他的同事，因此 Cantor 終不能如願。

外在的批判，Continuous Hypothesis 的無解，以及 1904 年幼兒的喪亡，終於引發 Cantor 的憂鬱。這位近代集合論的開拓宗師，最後在療養院中度過他的晚年。

如果你到俄國的 Saint Peterburg 旅遊，不要忘記去探訪 Cantor 的故居，在市區一個保存完好的老房子門旁，掛著一塊黑色的銅板，上頭寫著：

In this building was born and lived

from

1845-1955

the great mathematician and the creator of set theory

Georg Cantor

（俄翻英）

3.7 代數數、超越數

$\sqrt{2}$ 雖然是無理數，但它有個規範，滿足方程式

$$x^2 - 2 = 0$$

我們稱 $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ 為整係數多項式若 $a_j \in \mathbb{N}\ \forall j$
稱 $x \in \mathbb{R}$ 為<u>代數數</u>，若它滿足某一整係數多項式方程式

$$P_n(x) = 0$$

稱 x 為<u>超越數</u> 若它不是代數數。

第一個對超越數下定義的可能是 Euler。J.Liouville 於 1844 年首先証明超越數的存在，並於 1851 年証明

$$\sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!}$$

為一超越數。
1873 年，C.Hermite 證明 e 為超越數。1882，F.Lindemann 和 K.Weierstrass 證明 π 為超越數。當時所知的超越數寥寥無幾。
Cantor 提出可數與不可數的概念後，証明一切代數數是可數的，人們才恍然大悟，原來超越數是這麼多。
Theorem 3.11 一切代數數集是可數的。
分析：

(i) 固定 $n \in \mathbb{N}$，考慮整係數 n 次方程式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

所有這種多項式集是可數的，而每個這樣的多項式了不起有 n 個實根。

(ii) 令 $S_n = \{x \in \mathbb{R} | x\text{滿足某一 } n \text{ 次整係數次多項方程式}\}$，根據 (i)，$S_n$ 是可數的 $\forall n$

(iii) 一切代數數集 $= \cup_{n=1}^{\infty} S_n$，$S_n$ 可數 $\therefore$ 一切代數數集可數。$\square$

超越數不可數！原來我們所知道的實數少得好可憐！$2^{\sqrt{2}}$ 是超越數嗎？$3^{\sqrt{5}}$ 是超越數嗎？
給定二代數數 a, b，b 為無理數，a^b 是超越數嗎？當然 $a \neq 0$ 或 1。
這就是 Hilberts 那 23 個問題中的第 7 個。
34 年後有人這樣回答：
“Yes!”
Gelfond 和 Schneider 跳上了歷史的舞台，提出 Gelfond-Schneider 定理。
有人心血來潮寫著

$$0.1234567891011121314\cdots$$

並問：這是超越數嗎？有人回答了他：是的！
至於由 e 和 π 兩數所衍生出來的數如：

$$\pi + e,\ \pi - e,\ \pi e,\ \pi/e,\ \pi^{\pi},\ e^{e},\ \pi^{e},\ \cdots$$

等是否為超越數，目前仍不得而知，僅 e^{π} 可透過 Gelfond-Schneider 定理判定其為超越數。

人類第一次登上珠穆郎瑪峰（Mt. Everest）是在 1953 年初夏，由紐西蘭登山家 E.Hillary 和雪巴人 Tenzing Norgay 共同完成。他們在山頂上拍了照，並共同約定不向外透露誰的腳步先踏上峰頂，他們一生謹守這個承諾。現在有人在網路上票選，結果是 Hillary 勝出。我想 Norgay 如果是中國人或印度人，那勝出的可能就不是 Hillary 了，人有時是很無聊的。
Hillary 有句名言：

“Because it is there.”

這就是當他接受記者訪問，為何甘冒生命危險去攀那高峰，他所給的簡妙回答。
科學上許多問題也是一樣，為何探尋？

“Because it is there.”

不過，對 transcendental number 的追問，我以為宜適可而止。除非它顯得那麼獨特，或者牽涉到其他問題有待釐清，否則這類問題問也問不完。
隨手寫來就是問題，例如：

$$0.12357\,11\,13\,17\,19\cdots\text{（質數列）}$$

$$0.(1!)(2!)(3!)\cdots$$

$$a^b, \quad , b\text{為超越數}$$

$$\cdots$$

是否為超越數？（第三個問題看來滿吸引人的。不過應該是一個很艱難的問題）
一個偉大的登山家總不會看到山峰就想爬，創造金氏紀錄。懷這種心態的人，通常都不偉大。
一個對學問有品味的人，知所取捨，不會為腳下踩過幾座百岳而盲目登山。

3.8 集合論的公理化

集合論濫觴於 1870 年代，前面我們已經「證明」了許多定理，這些論證，我們憑直覺隨手採擷，毫不懷疑。例如給定集合 A_n，令 $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$，真的有這種集合嗎? 令 f 為定義在 $[0,1]$ 上的函數，為什麼可以這樣令？我們未曾認真思考過。
19 世紀末 20 世紀初，許多人開始思索它的基石，展開公理化的探討。
對無定義名詞，大家公認：集合（set），元素（element），屬於（belong），這些概念不能問。
1908 年，Zermenlo 發表了一篇很重要的論文，提出 7 個公理，其中他把空集合的存在列為第二公理。
1922 年 Fraenkel 對 Zermenlo 公理系統提出修補，使他能處理更廣的問題，這就是我們今天所稱的 **ZF** 公理化系統。
以下的介紹，我引用 P.Halmos 所著 *Naive Set Theory* [註1] 一書的內容。

A1. **Axiom of Extension**
Two sets are equal if and only if they have the same elements.

A2. **Axiom of Specification**
To every set A and to every condition $S(x)$ there corresponds a set B whose elements are exactly those elements x of A for which $S(x)$ holds.

A3. **Axiom of Pairing**
For any two sets there exists a set that they both belong to.

A4. **Axiom of Unions**
For every collection of sets there exists a set that contains all the elements that belong to at least one set of the given collection.

[1] Paul R Halmos, "Naive Set Theory", Martino Fine Books, 2011.

A5. **Axiom of Powers**

For each set there exists a collection of sets that contains among its elements all the subsets of the given set.

A6. **Axiom of Infinity**

There exists a set containing 0 and containing the successor of each of its elements.

A7. **Axiom of Choice**

The Cartesian product of a nonempty family of nonempty sets is nonempty.

A8. **Axiom of Substitution**

If $S(a,b)$ is a sentence such that for each a in a set A the set $\{b|S(a,b)\}$ can be formed, then there exists a function F with domain A such that
$F(a) = \{b|S(a,b)\}$ for each a in A.

以上諸 Axioms 我要特別說明的是 A2,A7 和 A8。注意，A_6 即自然數集的存在。
A2 的闡釋：
$x \in A$, $S(x)$ 是對 x 的更進一步條件限制。不管 $S(x)$ 是如何敘述，我們承認集合

$$B = \{x \in A|S(x)\}$$

是存在的。

例： A 表全國同胞集，$S(x)$：x 為女性。那麼，$B = \{x \in A|x\text{是女性}\}$
這個集合是存在的。

例： A 表現今生活在地球上的所有人類集合，$S(x) : x\text{是從石縫中蹦出來的}$
$B = \{x \in A|x\text{是從石縫中蹦出來的}\}$
這大概就是孫悟空了，可是孫悟空不是人。何況他又是吳承恩先生編出來的小說猴王。根據紀錄，從沒聽說有人是這樣生出來的，生物學家是經驗主義者，他會告訴你沒有這種人，因此這個集合是空的。可是你怎麼知道文明未到之處，沒有這種人存在呢？數學家持保留態度，它可能是空的，但是不是真的空，不得而知；雖然不得而知，但承認這個集合是存在的。

例： A 如上例，$S(x) : x\text{不是}x$
白居易有一首詩：花非花，霧非霧.....。那是一種文學情境的塑造，它像花，可是不是花；它像霧，可是又不是霧。千餘年來沒有人知道白居易指的是什麼，來如春夢不多時，去似朝雲無覓處，創造出一種無限惆悵，些微感傷的詩境，不同人讀它有不同的領悟和解讀，這是文學，這是詩。數學不是詩，浪漫不得，花就是花，霧就是霧。

明明是張三，但又否定他是張三。
明明是李四，可是又否定他是李四。

這種陳述如醉漢囈語，自相矛盾，世間沒這樣的人。

因此這個集合中空無一人。空集合的存在可由 A2（Axiom of Specification）得到，不必另立 Axiom

例： 宇集（universal set）不存在。所謂宇集是指包含一切集合的集合。
這是有名的 **Russell paradox**

証： 設U為宇集
令 $S = \{A \in U | A \notin A\}$
根據 Axiom of Specification，S 是存在的。U 為宇集，因此 $S \in U$。
有兩種可能情況：

(i) $S \notin S$。但依 S 的定義，則 $S \in S$，矛盾。

(ii) $S \in S$。但依 S 的定義，則 $S \notin S$，矛盾。

因此，U 不存在！□

上面最後一個例子告訴我們，如果我們接受 Axiom of Specification，就得放棄宇集這個概念。
或許你會質疑："$A \notin A$" 是什麼意思？
你問的好，不過 "$\in$" 既然是不可問（無定義名詞），那麼也沒有人能回答你 "$A \notin A$" 是什麼意思。
Naive set theory 會導致 "$x \in x \quad \Leftrightarrow \quad x \notin x$" 這樣讓人眼花撩亂，不知何所適從的悖論（paradox）。
1924 年，Von Neumann 乃增加了如下的 Axiom:

A9. Axiom of Regularity (Axiom of foundation)
Every nonempty set A contains a member B which is disjoint from A.

根據這個 Axiom，令 $A = \{a\}$，則 A contains a member，A 中別無物，只有 a，使 a 和 $\{a\}$disjoint。顯然 $a \in \{a\}$，如果 $a \in a$ 成立，則 a 和 $\{a\}$ 就不 disjoint 了，因此，在這個 Axiom 下我們排斥了 $a \in a$ 這樣的事情發生。
在此 Axiom 下，我們可以更清楚地宣告宇集不存在：
如果存在 U 為宇集，因他無所不包，$U \in U$。這和 A9 相悖。□

有一個笑話，兩個人比賽吹牛，看誰的胃口大。
甲先發言：我能吞山吞海，日月星辰，宇宙萬物我無所不容。贏得台下觀眾一片叫好，他宇宙萬物都吞了。大家目光投射到乙身上，看乙怎麼辦。
乙安靜地走到甲身旁，輕聲地對甲說：我胃口不大，可是我可以吞下你。
再高明的理髮師，可以剃盡天下人的頭，但就是剃不了自己的頭。宇集的不存在與此有異曲同工之妙。

另一個值得一提的 Axiom 是 Axiom of Choice。

它的另一種敘述如下：

設 $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 為一組集合族（Family of sets）

則存在一函數 f 把 S_λ 映入 S_λ $\forall\lambda\in\Lambda$

即：對每一個 $\lambda\in\Lambda$，存在 $y_\lambda\in S_\lambda$ 使 $f(S_\lambda)=y_\lambda$

B. Russell（1873-1970）對這 Axiom of Choice 有一個生動的比喻：

"The axiom of choice is necessary to select a set from an infinite number of socks, but not an infinite number of shoes."

它的意思是，依據 Axiom of Choice，在無窮多的襪子中，第一次你可以選一隻，第二次你又選了一隻，這兩隻襪子就構成一雙了，因襪子不分左右。但在無窮多的鞋子中，你第一次和第二次可能兩次都選到左腳，無法構成一雙。

用比較生活化的事物來描述，你參加抽獎活動，你伸手到箱子拿一張號碼牌，那個「伸手取牌」就是 Axiom of Choice 的精神所在，你可以取牌。但你不能決定你拿的是第一特獎。

對無窮集合族，每一集合你都可以伸手進去拿一張牌，這就是 Axiom of Choice 的內涵。

給定二集合 A,B，$A\times B\neq\emptyset$ 可由 A1–A5 等公理導出（請參閱 P.Halmos: *Naive Set Theory*, p22-24）。因此，對有窮集合族 $S_1,S_2,\cdots,S_n$, $\prod_{i=1}^{n}S_i\neq\emptyset$ 不須另立公理，Axiom of Choice 之所以有其必要，是針對無窮集合族（infinite family of sets）而設。

在數學上，Axiom of Choice, Well ordering theorem 和 Zorn's lemma 是等價的，雖然，它們看起來是那麼地不像。有人開玩笑地說：

"The Axiom of Choice is intuitively true, the well ordering theorem is obviously wrong and the Zorn's lemma is too complicated to understand."

對 well ordering theorem 和 Zorn's lemma 的介紹，也請參閱 Halmos 的書，在此不欲多言。

最後我來說明 A8：

Axiom of Substitution 是表示由舊集合 A，經過 $S(a,b)$ 的引介，可以導出新集合來。

例： A 表台大學生集，$S(a,b)=\{b|b$ 和 a 是同一個家庭成員$\}$。
則存在函數 F 把 a 映至 $S(a,b)$，即把你映到你的家庭。$B=\{S(a,b)|a\in A\}$ 表一切台大學生的家庭集，是由 A 所衍生而出的新集合。F 把 A 映成 B。

注意：Axiom of Specification 是在給定的集合裡去特殊化它，找出相應的子集合來。

Axiom of Substitution 是在給定的集合裡去引介它，衍生出新的集合來。

以上 A1-A9 就是我們今天所稱的 ZFC 公理系統。

Z:Zermelo, F:Fraenkel, C:Axiom of Choice.

3.9 公理系統的不完備性

集合論的公理化既成，人們自然要問：

這套公裡完備嗎？

所謂完備是指一個合乎常理的數學敘述，這套公理都能判斷其對錯，例如 $1+1=3$（你不要說 "$1+1=$ 太陽"，那不是數學語言），"$xy>0$ 則 $x>0$ 且 $y>0$"，"a,b 為超越數則 a^b 亦為超越數"$\cdots$ 等。

當時許多數學家都在思考這個問題，想建立一套完備的公理系統，對任何數學問題的處理可以不再匱乏。

大約是在 1928 年，Hilbert 在義大利的 Bologna 給了一個演講，講題是

Completeness and Consistence of Mathematical system

他問道：

Are the axioms of a formal system sufficient to derive every statement that is in all models of the systems?

他向全世界的數學家下帖：

We must know.

We will know. 註 [2]

在座有一位來自維也納的大學生，深受這個問題的吸引，一頭鑽進這個領域，從此改變他的一生，也改變那個時代，並深深影響後世數學的發展。這個人叫 Kurt Gödel，當時只有 22 歲。泛函分析中有一個定理叫 Hahn-Banach Theorem，Gödel 就是 Hahn 的學生。

三年後，1931 年，他在德國 Koningsburg 的數學大會上提出了一篇石破天驚的論文，回答了這個問題，即我們今天所知的算術公理系統的不完備定理。

在此我引用 Wikipedia 的介紹：註[3]

"For any computable axiomatic system that is powerful enough to describe the arithmetic of the natural numbers (e.g. the Peano axioms or the Zermelo-Fraenkel set theory with axiom of Choice) such that :

1. If the system is consistent, it cannot be complete.

2. The consistency of the axioms cannot be proven within the system."

Gödel 的不完備理論，結束了近半世紀來許多數學家的嘗試，也為後世數理邏輯的研究奠定了新的里程。

---

[2]Hilbert 的墓誌銘上就刻著這兩句話：

Wir Müssen Wissen.

Wir Werden Wissen.

[3]來源：http://en.wikipedia.org/wiki/G%C3%B6del%27s_incompleteness_theorems

1940 年，Gödel 證明了 CH 和 ZFC 是相容的（consistent）。

1963 年，Paul Cohen 證明了 CH（Continuous Hypothesis）和 ZFC 是獨立的（independent），並贏得 1966 年國際數學大獎。

至此，真相終於大白，Continuous Hypothesis 在 ZFC 公理系統內不能被證明，不能被否定，它就像平行公理之於歐氏幾何，要嗎接受它，要嗎否定它。我們現有數學系統是接受 Continuous Hypothesis 的。

你自然會問：幾何有非歐幾何，那麼我們這套算術系統所衍生出來的數學有沒有非 CH 數學？

我請教一位數理邏輯專家，他告訴我非 CH 數學會導出一些與我們經驗相悖的怪定裡出來，因此也就少人問津了。

在此我要提醒的是，不完備定理是針對算術系統（自然數的無窮、可列性），不含平面幾何的公理系統。相反的，幾何的公理系統（後經 Hilbert 整理）是完備的。

簡言之：

Arithmetic system is incomplete.

Elementary geometric system is complete

3.10 感言

從 1860 年代實數的建構，1870 年代 Cantor 對從有理數到實數，中間到底塞進了多少東西的提問，而有集合論的濫觴。有理數的可數，實數的不可數，這兩個無窮大之間是否還存在另一層次的無窮大？集合論的公理化，公理系統的不完備定理等發展，一直到 1963 年 Continuous Hypothesis 的真相大白，這一百年的數學思想發展，堪稱波瀾壯闊，奇峰並出。它不但是數學史上精彩的一章，也是人類哲學思想史上璀璨的花朵，對近代文明的影響既深且遠。其間人才輩出，各領風騷，而集其大成者非 Gödel 莫屬。Gödel 以沒沒無名的一介青年，一鳴驚人，結束了舊時代的紛擾，開創了新時代的里程，歷史少有。在此，我引用 John Von Neumann 的一段話：

“Kurt Gödel’s achievement in modern logic is singular and monument; indeed, it is more than a monument, it is a landmark which will remain visible far in space and time.”

我讀中學的時候，學校牆壁上常看到一句話：

「時代考驗青年，青年創造時代」

Paul Cohen 解決 Continuous Hypothesis 的懸疑時，只有 29 歲；在 Bologna 聽 Hilbert 演講深受吸引而立志探尋真理的那位年輕人，也只有 22 歲。年輕可貴，它充滿朝氣，充滿創意，充滿無限可能。

Gödel 的晚年深受精神疾病所苦，他懷疑有人要在食物中下毒害他，除他太太外，他不吃任何人所提供的食物。1977 年冬，他太太因病住院，他就不再進食，餓到體重只剩 65 磅，就這樣結束他光彩的一生。

集合論的兩位大師都以悲劇結束他們的人生，想來令人惋惜。

屈原既放，遊於江潭，行吟澤畔，顏色憔悴，形容枯槁。漁父勸他：聖人不凝滯於物，而能與世推移。屈原答：安能以身之察察，受物之汶汶者乎？寧赴湘流，葬於江魚之腹中。

漁父莞爾而笑，鼓枻而去，乃歌曰：

「滄浪之水清兮，可以濯吾纓。滄浪之水濁兮，可以濯吾足。」

遂去，不復與言。

以現代醫學語言來說，屈原應該也是患了嚴重的憂鬱症。雖然，其情高貴，以死明志，留下感人肺腑的千古詩篇，但難免令人惋惜。漁父乃得道高人，告訴他生命可以不必這樣，所謂退一步，海闊天空。可是在局者迷，這一步，真不容易，真不容易啊！

（第三章　完）

一百零一學年度 數學系高等微積分 (上) 習題三

2012.10.04

範圍: 第三章

1. (a) 試造一函數 f，把 $(0,1)$ 對射成 $\mathbb{R}$。

   (b) 於 (a) 中，如要求 f 為連續且把有理點映成 (onto) 有理點，你會造嗎？

   (c) 於 (b) 中，如要求此函數處處可導，又該如何？

2. 任意無窮集恆存在可數子集，試證之。

3. (a) 試證：平面上互不相交的圓盤頂多可數。

   (b) 在 l^2 中，互不相交的球集是否可數？

4. 利用區間套定理證明 $[0,1]$ 中的實數不可數。

5. $I=(a,b)$，定義 $m(I)=b-a$ (measure of I)。我們稱 $A\subset\mathbb{R}$ 的測度為 0，若對任意 $\epsilon>0$，$\exists\ I_1,I_2,I_3,\ldots$ 把 A 蓋住 $(A\subset\cup_{n=1}^{\infty}I_n)$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}m(I_n)<\epsilon$。
   據此觀點，試證：$\mathbb{R}$ 中任意可數集的測度為 0。

6. 有一賭局：在 $[0,1]$ 中任取 (註) 一點，取到代數數得 10 億元，取到超越數須付 1 元。請問：這是公平賭局嗎？
   (註：所謂任取一點是指「均勻」地取，即 $\frac{\#I(n)}{n}\to m(I)$，當 $n\to\infty$，其中 $I=(a,b)\subset(0,1)$, $\#I(n)$ 指 n 次取點中落在 I 中的次數。)

7. (a) 試造一函數 f 把 $(0,1)\times(0,1)$ 映成 $(0,1)$。

   (b) 在 (a) 中如要求把 $[0,1]\times[0,1]$ 映成 $[0,1]$，又該如何？

8. $A^*\subset A$, $B^*\subset B$, $A^*\sim B^*$, 則 $A\sim B\not\Rightarrow A-A^*\sim B-B^*$。請舉一例。請問這件事和定理 3.8 中 $\Delta_1\sim\Delta_3$ 的推論是否相悖？

9. (a) 試證一切代數數的加, 減, 乘, 除, 開 n 次方仍為代數數。

   (b) a,b 為超越數，$a+b$ 未必為超越數，請舉一例。

   (c) a,b 為超越數，ab 未必為超越數，請舉一例。

   (d) a,b 為超越數，則 $a+b$ 與 ab 中至少有一為超越數，試證之。

10. 「設 f 為定義於 $[0,1]$ 上的函數」，為什麼可以這樣設？

11. 有人說 Axiom of union 可以由 Axiom of specification 得到，理由如下：

    設 $A_\lambda,\lambda\in\Lambda$ 為給定的集合，令 $S(x)$ 表 x 屬於某個 A_λ，這是對 x 的條件敘述。依 Axiom of specification，集合 $\{x|S(x)\}$ 存在，此集合即 $\cup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$。

請問：他說的有道理嗎？

12. (a) 二維 Cantor set。

    設 E^1 表 $[0,1]$ 中的 Cantor set，換言之，令 $S=[0,1]\times[0,1]$ 表平面上的單位方塊，分別將 x 軸及 y 軸上的單位區間三等分，擦去中間 $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\times[0,1]$ 及 $[0,1]\times\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ 的十字領域，次又重複上述步驟於剩餘四個角落的小方塊，依此類推以致無窮，剩餘的集合就是 E^2。令 L_k 表直線 $x+y=k$，$0\le k\le 2$。試證：$L_k\cap E^2\neq\emptyset$。

    (b) 據此，證明：$E^1+E^1=\{x+y|x,y\in E^1\}=[0,2]$。

13. (a) 試將 $\frac{103}{539}$ 表成 $\cfrac{1}{n_1+\cfrac{1}{n_2+\cfrac{1}{n_3+\ddots}}}$ 的連分數形式。

    (b) $x\in(0,1)$ 為有理數，試證：唯一存在 $n_1, n_2, ...n_k$，$n_k\ge 2$，使得 $x=\cfrac{1}{n_1+\cfrac{1}{n_2+\cfrac{1}{\ddots_{n_k}}}}$。

    (c) 給定自然數數列 $n_1, n_2, n_3...$，令 $x_1=\frac{1}{n_1}$, $x_2=\frac{1}{n_1+\frac{1}{n_2}}$, $x_3=\frac{1}{n_1+\frac{1}{n_2+\frac{1}{n_3}}}$, ...。試證：$\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在且為無理數。

    (d) 試證：(c) 中的函數為對射，即把無窮自然數列對射到 (0,1) 中的無理點。

    (註：Cantor 據此，把 $[0,1]\times[0,1]$ 對射到 $[0,1]$，驚嘆之餘寫信給 Dedekind 道：I see it, but I can't believe it! 我們上課所介紹的是 König 的方法，簡潔有力。)

14. 我們已知任意兩實數之間必存在有理數，也就是說有理點在 $[0,1]$ 上是稠密的。令 $A=\{x_1,x_2,x_3,...\}$ 表 $[0,1]$ 中的有理點。給定 $\epsilon>0$，令 $I_n=\left(x_n-\frac{\epsilon}{2^n},x_n+\frac{\epsilon}{2^n}\right)$(以 x_n 為心，半徑 $\frac{\epsilon}{2^n}$ 的開區間)，令 $S=\cup_{n=1}^{\infty}I_n$。因 A 在 $[0,1]$ 上稠密，故 $S\supset[0,1]$。上面這個結論正確否？

15. 設 f 為定義於 $[a,b]$ 上的函數，若對任意數列 $\{x_n\}\subset[a,b]$，$x_i\neq x_j$ 當 $i\neq j$，恆有 $\sum_{n=1}^{\infty}f(x_n)$ 收斂。試證：集合 $S=\{x\in[a,b],f(x)\neq 0\}$ 頂多 countable。

16. $\mathbb{N}$ 為自然數集，$P(\mathbb{N})$ 表其共冪集 (power set)。試證 $\#P(\mathbb{N})=c$
    ($\#A$ 表示 A 的基數，c 表實數的基數)。

17. $C[0,1]$ 表一切定義於 [0,1] 上的連續函數集，試證：$\#C[0,1]=c$
    (提示：連續函數的行為由其在有理點上的行為所決定)。

頁碼	作品	版權標示	來源／作者
12	山外青山樓外樓		〈題臨安邸〉，林升
14	Most of the ideas of Cantorian…for all.		Dauben, Joseph W. (1990), Georg Cantor: his mathematics and philosophy of the infinite, Boston: Princeton University Press. http://press.princeton.edu/titles/4740.html
15	In this building was born and lived…Georg Cantor		Wikipedia, http://en.m.wikipedia.org/wiki/File:Blackboard_Georg_Cantor_(11-line_V_O_building_24).jpg
16	Because it is there		Wikipedia, http://en.wikipedia.org/wiki/George_Mallory
17-18	Axioms		Paul R Halmos, “Naive Set Theory”, Martino Fine Books, 2011. http://www.amazon.com/Naive-Set-Theory-Paul-Halmos/dp/1614271313
18	花非花霧非霧		〈花非花〉，白居易
20	The axiom of choice…number of shoes		Bertrand Russell, http://en.wikipedia.org/wiki/Axiom_of_choice
21	We must know…will know		Wikipedia, http://en.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert
21	Wir Müssen…Werden		Wikipedia, http://en.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert

	Wissen		
23	Kurt Godël's…space and time		Wikipedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Kurt_G%C3%B6del
23	時代考驗…創造時代		蔣中正
23	滄浪之水…濯吾足		《楚辭・漁父》，屈原

102 學年度台灣大學數學系高等微積分下由陳金次教授製作，以創用 CC 姓名標示-非商業性-禁止改作 3.0 台灣 授權條款釋出

Chapter 4

極限、連續與督脈的貫通

4.1 極限（Limit）

微積分誕生於 1670 年代，不論微分或積分，都牽涉到極限。就以微分來說，一開始就碰到導數：

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

當時的數學家憑直覺做數學，邏輯上無法把極限講清楚，受到很大的批評。

極限有那麼大的困難嗎？為什麼講不清楚？

先來看一個最簡單的例子：

$$\lim_{x \to 2} x^2$$

大家都知道答案是 4，因為 x 很接近 2 時 x^2 很接近 4，很多同學就直接把 $x = 2$ 代入 x^2 中得到 4。這樣做並沒問題，因為 x^2 在 2 這一點是連續的。

再來看一個稍微複雜的例子:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

利用計算機可以得到以下數值：

x	$\frac{\sin x}{x}$
1	0.84147...
0.5	0.95885...
0.1	0.99833...
0.05	0.9995833...
0.01	0.9998333...
0.005	0.9999583...
0.0001	0.9999999...

從上表中可以見到當 x 很接近 0 時，$\frac{\sin x}{x}$ 會很接近 1。

$\lim_{x\to a} f(x) = l$ 是什麼意思呢？
當然是「x 很接近 a 的時候，$f(x)$ 會隨著接近 l」。
x 接近 a 是主，$f(x)$ 接近 l 是從，主人靠近 a，從僕不敢不靠近 l。
直覺上如此，但邏輯上說不清楚。一直到 1820 年代 Bolzano,Cauchy 等人提出新的觀點，而有「$\epsilon - \delta$」語言的出現，把主從反過來看，1860 年 Weierstrass 才嚴格地用今日的「$\epsilon - \delta$」語言來處理極限問題。
至此，微積分才算建立起無瑕的邏輯基礎。
<u>定義 4.1</u> 設 $f(x)$ 為定義在 a 點附近的實函數，我們說

$$\lim_{x\to a} f(x) = l$$

若給定任意正數 $\epsilon > 0$，恆可找到 $\delta > 0$ 使

$$|f(x) - l| < \epsilon \quad 當 0 < |x - a| < \delta$$

注意這邊的 δ 隨 ϵ 而變。不同的 ϵ 所需的 δ 不同。
從上面的定義可看出 Weierstrass 對「$\lim_{x\to a} f(x) = l$」的描述為
「$f(x)$ 可以任意地接近 l，只要 x 夠接近 a」
即「$|f(x) - l|$ 可以任意地小，只要 $|x - a|$ 夠小」，此即定義 4.1。
要把極限講清楚，主從必須顛倒，$f(x) - l$ 是我們的公主，$x - a$ 是僕人，公主想休息（$|f(x) - l| < \epsilon$），僕人必須把床鋪好（找出 δ 來）。
這個彎，轉了將近 200 年。
$\epsilon - \delta$ 語言是現代數學分析必備的工具，是基本功。拳要打的好，馬步要立得穩，希望同學在進入近代分析學之前務必要把這馬步給蹲好。
例 1：試就 $\epsilon - \delta$ 語言，證明 $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$。

解 1: （看圖說故事）

如圖4.1，給定 $\epsilon > 0$，水平線 $y = 4 - \epsilon$，$y = 4 + \epsilon$ 與拋物線分別相交於 $P_1(x_1, 4 - \epsilon)$ 及 $P_2(x_2, 4 + \epsilon)$ 兩點，$x_1 = \sqrt{4 - \epsilon}, x_2 = \sqrt{4 + \epsilon}$
令 $\delta = \min\{x_2 - 2, 2 - x_1\} = x_2 - 2$
則當 $|x - 2| < \delta, x \neq 2 \;\Rightarrow\; x \in (x_1, x_2)$，有

$$-\epsilon < x^2 - 4 < \epsilon$$

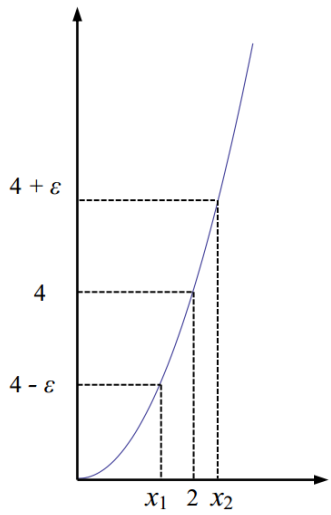
即 $|x^2 - 4| < \epsilon$ 當 $0 < |x - 2| < \delta$
$\therefore \lim_{x\to 2} x^2 = 4$ □

解 2: （利用不等式）

1. 要求 $\lim_{x\to 2} x^2$，我們只要考慮當 x 靠近 2 時，x^2 的行為。為了以下不等式的估計，不妨把 x 限制在 2 附近: $|x - 2| < 1$，即

$$x \in (1, 3) \tag{1}$$

Figure 4.1:



2. 由
$$|x^2-4| = |x+2||x-2| < 5|x-2| \tag{2}$$

3. 給定 $\epsilon > 0$，欲找 $\delta > 0$ 使 $|x^2-4| < \epsilon$ 當 $0 < |x-2| < \delta$
   根據 2，只要 $5|x-2| < \epsilon$ 則 $|x^2-4| < \epsilon$
   即 $|x^2-4| < \epsilon$ 只要
$$|x-2| < \frac{\epsilon}{5} \tag{3}$$

4. 啊哈！給定 $\epsilon > 0$，只要取 $\delta = \epsilon/5$ 就可以滿足所需了
   同學不要高興太早，(3) 式之所以成立是因為有 (1) 式，飲水要思源。例如 $\epsilon = 10$，這邊所取的 $\delta = \epsilon/5 = 2$，已經超越了 (1) 中的範圍，此時 (3) 不再成立！

5. 怎麼辦？吃果子拜樹頭，從 (1) 出發
   取 $\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{5}\}$
   $0 < |x-2| < \delta \Rightarrow$ (1) 式成立 $\Rightarrow$ (3) 式的估計成立，一切稱心如意，可以「啊哈」了。

<u>Remark</u>

1. $\lim_{x\to a} f(x) = l$ 中，所考慮的是 x 在 a 點附近的行為，$x \neq a$，因此 $\epsilon - \delta$ 語言中 $0 < |x-a| < \delta$ 左邊的 $0 < |x-a|$ 不可以省略。
   例如：
$$f(x) = \{ \begin{array}{ll} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{array}$$
   $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$。對 $\epsilon = 1/2$，$\exists\delta$ 使
$$|f(x)-1| < \frac{1}{2}, \qquad 當 0 < |x-1| < \delta$$
   $x = 0$ 這一點必須排除，否則 $|f(0)-1| = 1 \not< \frac{1}{2}$！

2. 例 1 中解 1 利用圖形來找 δ，看起來似乎簡單清晰，但不同函數不同圖形，並無規則可循，對稍微複雜的函數要畫出它的圖形並不是那麼容易。
   解 2 利用不等式的估計來找 δ，不用畫圖，是處理 ϵ-δ 問題的正道。

例 2：利用 $\epsilon-\delta$ 語言證明 $\lim_{x\to 1}\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{2}$
解：

1. 先天設定 $|x-1|<1$，即
$$0<x<2 \tag{4}$$
2. 由
$$\left|\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{(x-1)^2}{2(x^2+1)}<\frac{(x-1)^2}{2} \tag{5}$$
3. (5) 式與 (4) 無關，先天設定乃多餘
4. 根據 (5)，若 $\frac{(x-1)^2}{2}<\epsilon$ 則 $|\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{2}|<\epsilon$
   因此給定 $\epsilon>0$，取 $\delta=\sqrt{2\epsilon}$ 即為所求。

例 3：利用 $\epsilon-\delta$ 語言證明 $\lim_{x\to 3}\frac{x}{\sqrt{x^2-x-5}}=3$
分析：

1. $x^2-x-5=0$，有正根 $x\approx 2.7913$
   考慮先天設定：$|x-3|<\frac{1}{10}$，即 $2.9<x<3.1$，以避開此根
2.
$$\left|\frac{x}{\sqrt{x^2-x-5}}-3\right|=\left|\frac{x-3\sqrt{x^2-x-5}}{\sqrt{x^2-x-5}}\right|=\left|\frac{x^2-9(x^2-x-5)}{\sqrt{x^2-x-5}\cdot(x+3\sqrt{x^2-x-5})}\right|$$
   分子：$|8x^2-9x-45|=|(x-3)(8x+15)|<|x-3|(8\cdot 3.1+15)=39.8|x-3|<40|x-3|$
   分母：$\sqrt{x^2-x-5}(x+3\sqrt{x^2-x-5})>3(x^2-x-5)>x^2-x-5>(2.9)^2-(2.9)-5=0.51>0.5$
   故
$$\left|\frac{x}{\sqrt{x^2-x-5}}-3\right|<80|x-3|<\epsilon \qquad 當|x-3|>\frac{\epsilon}{80}$$
3. 給定 $\epsilon>0$，取 $\delta=\min\{\frac{1}{10},\frac{\epsilon}{80}\}$，則有
$$0<|x-3|<\delta \Rightarrow 先天設定成立 \Rightarrow 分子,分母估計成立 \Rightarrow \left|\frac{x}{\sqrt{x^2-x-5}}-3\right|<80|x-3|<\epsilon$$

<u>定義 4.2</u>

(a) $\lim_{x\to\infty}f(x)=l$ 若且唯若 $\forall\epsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$ 使
$$|f(x)-l|<\epsilon \quad 當 x>N$$

(b) $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ 若且唯若 $\forall\epsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}$ 使

$$|a_n - l| < \epsilon \quad 當 n > N$$

例 4：利用 $\epsilon - N$ 語言證明 $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-x-1}} = 1$
分析：

1. 給定 $\epsilon > 0$ 欲求 N 使
$$\left|\frac{x}{x^2-x-1} - 1\right| < \epsilon \quad 當 n > N$$

2. 由
$$\left|\frac{x}{\sqrt{x^2-x-1}} - 1\right| = \left|\frac{x-\sqrt{x^2-x-1}}{\sqrt{x^2-x-1}}\right| = \left|\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x-1}(x+\sqrt{x^2-x-1})}\right|$$
分子：
$$|x+1| < 2x \quad 當 x > 1 \tag{6}$$
分母：
$$x^2 - x - 1 = \frac{1}{2}x^2 + (\frac{1}{2}x^2 - x - 1) > \frac{1}{2}x^2 \quad 當 x > 3 \tag{7}$$
$\therefore \sqrt{x^2-x-1}(x+\sqrt{x^2-x-1}) > \frac{x}{\sqrt{2}} \cdot (x + \frac{x}{\sqrt{2}}) > \frac{x^2}{\sqrt{2}}$
故
$$\left|\frac{x}{x^2-x-1} - 1\right| < \frac{2\sqrt{2}}{x} < \frac{3}{x} < \epsilon \quad 當 x > \frac{3}{\epsilon} \tag{8}$$

3. 取 $N > \max\{1, 3, \frac{3}{\epsilon}\}$ 則當 $x > N \Rightarrow$ (6)(7) 估計成立，(8) 成立。

例 5：利用 $\epsilon - N$ 語言證明 $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, a > 0$
分析：

1. 當 $n > a$。
$$\begin{aligned}\frac{a^n}{n!} &= \frac{a\cdot a\cdots\cdot a}{1\cdot 2\cdots\cdot [a]} \cdot \frac{a\cdot a\cdots\cdot a}{([a]+1)\cdot([a]+2)\cdots\cdot n} \\ &\le K\cdot\frac{a}{n}, \qquad K = \frac{a\cdot a\cdots\cdot a}{1\cdot 2\cdots\cdot [a]} \\ &< \epsilon \qquad 當 n > K\cdot\frac{a}{\epsilon}\end{aligned}$$

2. 給定 $\epsilon > 0$，取 $N = [K\cdot\frac{a}{\epsilon}] + 1$，則
$$n > N \Rightarrow n > K\cdot\frac{a}{\epsilon} \Rightarrow \left|\frac{a^n}{n!}\right| < \epsilon$$
$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

4.2 Cauchy 準則（Cauchy's Criterion）

對數列 $\{a_n\}$ 若 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在且等於 l，依定義:
$\forall\epsilon > 0 \qquad \exists N$ 使得

$$|a_n - l| < \epsilon \qquad 當 n > N$$

給定數列 $\{a_n\}$ 要判斷它收斂，依定義你必須知道 l，但很多情況 l 未必容易求得！
有沒有一套準則，直接觀察 $\{a_n\}$ 的行為，即可判斷它是否收斂？
Cauchy 給出了一個判斷數列 $\{a_n\}$ 收不收斂的準則：
Cauchy's Criterion
稱數列 $\{a_n\}$ 滿足 Cauchy's Criterion 若且唯若
$\forall\epsilon > 0 \quad \exists\delta > 0$使

$$|a_m - a_n| < \epsilon \qquad 當 m, n > N$$

或

$$|a_{n+k} - a_n| < \epsilon \qquad 當 n > N, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

<u>定義 4.3</u> 稱 $\{a_n\}$ 為 Cauchy sequence 若其滿足 Cauchy's criterion
<u>定理 4.5</u> $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在 $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$ 為 Cauchy sequence
證：

($\Rightarrow$) 設 $\lim_{n\to\infty} a_n = l$
給定 $\epsilon > 0$ $\exists N$ 使

$$|a_n - l| < \epsilon/2 \qquad 當 n > N$$

於是

$$|a_m - a_n| \le |a_m - l| + |a_n - l| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon, \qquad 當 m, n > N$$

($\Leftarrow$)

1. Claim: $\{a_n\}$ 有界。
   對 $\epsilon = 1$，$\exists N$ 使

$$\begin{aligned} &|a_m - a_n| < 1 \qquad 當 m, n > N \\ &\Rightarrow |a_m - a_{N+1}| < 1 \qquad \forall m > N \\ &\Rightarrow |a_m| < 1 + |a_{N+1}| \qquad 當 m > N \end{aligned}$$

   取 $M = \max\{|a_1|, \cdots, |a_N|, |a_{N+1}| + 1\}$，則有 $|a_n| \le M \quad \forall n$

2. 依 Bolzano-Weierstrass 定理，$\{a_n\}$ 有收斂子序列，設為 $\{a_{n_k}\}$，$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = l$

3. Claim: $\lim_{n\to\infty} a_n = l$

   理由：

   $\{a_n\}$ 為 Cauchy sequence，給定 $\epsilon > 0$，$\exists N_1$ 使

$$|a_m - a_n| < \epsilon/2 \qquad 當 m, n > N_1$$

   又 $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = l$，對此 ϵ，$\exists N_2$ 使

$$|a_{n_k} - l| < \epsilon/2 \qquad 當 k > N_2$$

   取 $N = \max\{N_1, N_2\}$ 並選定 $k > N$，則有

$$|a_n - l| < |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - l| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \qquad 當 n > N$$

<u>Remark</u> 從上面的證明可看出

(a) 「$\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在」$\Rightarrow$ 「$\{a_n\}$ 為 Cauchy sequence」純為極限的論述，與實數的完備性無關

(b) 「$\{a_n\}$ 為 Cauchy sequence」$\Rightarrow$ 「$\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在」此推論需要 Bolzano-Weiestrass 定理，其背後就是實數的完備性。
因此「Cauchy sequence 等價於收斂數列」只有在 $\mathbb{R}^n$ 中成立，但對一般的 metric space 不一定成立，在此請同學留意，我們將於第六章詳談之。

例 1：$\{x_n\} \subset \mathbb{R}$，$|x_{n+1} - x_n| < \frac{1}{2^n}$ $\forall n$。試證：$\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在
分析：

$|x_{n+k} - x_n| \le \sum_{j=n}^{n+k-1} |x_{j+1} - x_j| < \sum_{j>n} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^n}$
給定 $\epsilon > 0$ 取 N 使 $\frac{1}{2^N} < \epsilon$，則

$$|x_{n+k} - x_n| < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^N} < \epsilon \qquad \forall n > N, \forall k \in \mathbb{N}$$

$\therefore \{x_n\}$ 為 Cauchy sequence，故 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在。

於 $\mathbb{R}^n$ 中，我們稱 $\{\mathbf{x}_n\}$ 為 Cauchy sequence 若 $\forall \epsilon > 0, \exists N$ 使

$$\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n\| < \epsilon \qquad 當 m, n > N$$

或

$$\|\mathbf{x}_{n+k} - \mathbf{x}_n\| < \epsilon \qquad 當 n > N, \forall k \in \mathbb{N}$$

$\mathbb{R}^n$ 中有 Bolzano-Weiestrass 定理，故定理 4.5 的論述成立，另陳述為定理於下
<u>定理 4.6</u> 設 $\{\mathbf{x}_n\} \subset \mathbb{R}^n$，則 $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n$ 存在 $\Leftrightarrow$ $\{\mathbf{x}_n\}$ 為 Cauchy sequence
例 2：$\{\mathbf{x}_m\} \subset \mathbb{R}^n$，$\|\mathbf{x}_{m+1} - \mathbf{x}_m\| < \alpha_m$，$\sum \alpha_m < \infty$，則 $\lim_{m\to\infty} \mathbf{x}_m$ 存在
分析：

$\sum \alpha_m < \infty$，給定 $\epsilon > 0$，$\exists N$ 使 $\sum_{m>N} \alpha_m < \epsilon$

據此，當 $m > N$ 有

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}_{m+k} - \mathbf{x}_m\| &\leq \sum_{j=0}^{k-1} \|\mathbf{x}_{m+k-j} - \mathbf{x}_{m+k-j-1}\| \\ &\leq \sum_{i=m}^{m+k-1} \alpha_i < \sum_{i>N} \alpha_i < \epsilon\end{aligned}$$

$\therefore \{\mathbf{x}_m\}$ 為 Cauchy sequence，依定理 4.6 知其極限存在。

例 3：$\{x_n\} \subset \mathbb{R}$，$|x_{n+1} - x_n| < \frac{1}{n} \not\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n$ 存在說明：

雖然 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$，但 $\sum \frac{1}{n} = \infty$，無法保證 $\{x_n\}$ 為 Cauchy sequence。

例如：$x_n = \ln n$，則

$$|x_{n+1} - x_n| = |\ln \frac{n+1}{n}| = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

（注意 $\ln(1+x) < x, \forall x > -1$）

但 $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$！

例 4：$a_n \geq a_{n+1} > 0\ \forall n$，$\sum a_n < \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} na_n = 0$

分析：

1. 令 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$，依定義 $\sum a_n < \infty$，即 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 存在。
   依 Cauchy's criterion，有：
   $\forall \epsilon > 0, \exists N_1$ 使
   $$|S_{n+k} - S_n| < \epsilon/2, \qquad \forall n > N_1, k \in \mathbb{N}$$
   即
   $$|\sum_{j=1}^{k} a_{n+j}| < \epsilon/2, \quad \forall n > N_1, k \in \mathbb{N} \tag{9}$$
2. $a_n \searrow$，(9) $\Rightarrow ka_{n+k} < \epsilon/2$ 當 $n > N_1, \forall k$
3. 選定 $n > N_1$，有
   $$(n+k)a_{n+k} = na_{n+k} + ka_{n+k} < na_{n+k} + \epsilon/2 \tag{10}$$
4. 又 $\sum a_n < \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$
   對此 ϵ $\exists N_2$ 使
   $$a_{n+k} < \frac{\epsilon}{2n} \qquad 當 k > N_2 \tag{11}$$
5. 取 $N = n + N_2$ ，則有
   $m > N \Rightarrow m = n + k,\ k > N_2$ 因此
   $$0 < ma_m = (n+k)a_{n+k} = na_{n+k} + ka_{n+k} < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$
   故 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Remark

上例中，$a_n \geq a_{n+1}\ \forall n$ 是論述成立的必要條件，無此假設，結論未必成立，至於有什麼反例就留給同學們當習題。

4.3 極限的幾個基本定理

定理 4.1 夾擠定理

(a) f, g 定義在 $(a-\rho, a+\rho)$ 上，$\rho > 0$，滿足

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \forall x \in (a-\rho, a+\rho)$$

若 $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l$，則 $\lim_{x\to a} f(x) = l$

(b) $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ 當 $x > a,\ \ a \in \mathbb{R}$
若 $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} h(x) = l$，則 $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$

(c) $b_n \leq a_n \leq c_n$ 當 $n > K,\ \ K \in \mathbb{N}$
若 $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = l$，則 $\lim_{n\to\infty} a_n = l$

證明：

(a) 由 $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l$，給定 $\epsilon > 0$，存在 $\delta_1, \delta_2 < \rho$ 使

$$|g(x) - l| < \epsilon \qquad 當 0 < |x-a| < \delta_1$$
$$（或\ l-\epsilon < g(x) < l+\epsilon\ 當\ 0 < |x-a| < \delta_1）$$
$$|h(x) - l| < \epsilon \qquad 當 0 < |x-a| < \delta_2$$
$$（或\ l-\epsilon < h(x) < l+\epsilon\ 當\ 0 < |x-a| < \delta_2）$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$，則有 $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow$

$$l-\epsilon < g(x) < f(x) < h(x) < l+\epsilon$$

即

$$|f(x) - l| < \epsilon \qquad 當 0 < |x-a| < \delta$$

(b) 由 $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} h(x) = l$，給定 $\epsilon > 0$，$\exists N_1, N_2 > a$ 使

$$|g(x) - l| < \epsilon \qquad 當 x > N_1$$
$$（或\ l-\epsilon < g(x) < l+\epsilon\ 當\ x > N_1）$$
$$|h(x) - l| < \epsilon \qquad 當 x > N_2$$
$$（或\ l-\epsilon < h(x) < l+\epsilon\ 當\ x > N_2）$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，則有 $x > N \quad \Rightarrow$

$$l - \epsilon < g(x) < f(x) < h(x) < l + \epsilon$$

即

$$|f(x) - l| < \epsilon \qquad 當 x > N$$

(c) 同 (b)

例 1：$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
分析：

1. $\sqrt[n]{n} > 1 \quad \forall n$
   令 $\sqrt[n]{n} = 1 + \epsilon_n,\ \epsilon_n > 0$
   欲證 $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$

2. $n = (1+\epsilon_n)^n = 1 + n\epsilon_n + \frac{n(n-1)}{2!}\epsilon_n^2 + \cdots > \frac{n(n-1)}{2!}\epsilon_n^2$
   於是有：
   $$0 < \epsilon_n^2 < \frac{2}{n-1}$$

3. $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n-1} = 0$，根據夾擠定理，$\lim_{n\to\infty} \epsilon_n^2 = 0$
   $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$（請同學自行證明）

例 2：$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = 1$
分析：我們已知 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \nearrow$strictly to e

$$\therefore 1 \le \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{1/n} \le e^{1/n}$$

$\lim_{n\to\infty} e^{1/n} = 1$，根據夾擠定理，知

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = 1$$

例 3：$\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$
分析：$0 \le |x \sin\frac{1}{x}| \le |x|\ \forall x \ne 0$
$\lim_{x\to 0} |x| = 0$，根據夾擠定理知

$$\lim_{x\to 0} |x \sin\frac{1}{x}| = 0$$

$\therefore \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$
例 4：

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0$

分析：

(a) $\frac{n^n}{n!} = \frac{n\cdot n\cdot n\cdots n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} > n$
$\lim_{n\to\infty} n = \infty \therefore \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty$

(b) 1. 已知 $x+y=m, m\in\mathbb{N}$，則當 x 從 1 增加到 $m/2$ 時 $xy \nearrow$ strictly in x

2. $n! = 1\cdot \underbrace{2\cdots(n-1)}\cdot n$
$n! = n\cdot \underbrace{(n-1)\cdots 2}\cdot 1$
$(n!)^2 = n^2\cdot \prod_{k=2}^{n-1} k(n-k+1) > n^2(2(n-1))^{n-2}$（由 1.）

3. 故

$$0 < \frac{n^n}{(n!)^2} < \frac{n^{n-2}}{[2(n-1)]^{n-2}} = \frac{1}{2^{n-2}}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^2$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 = 1, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-2}} = 0$$

$\therefore \lim_{n\to\infty}$ 右 $= 0$
依夾擠定理知 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2} = 0$

<u>定理 4.2</u> 設 $\lim_{x\to a} f(x) = l_1$, $\lim_{x\to a} g(x) = l_2$，則

(a) $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = l_1 + l_2$

(b) $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = l_1 l_2$

(c) $\lim_{x\to a}[f(x)/g(x)] = l_1/l_2$, $l_2 \neq 0$

在證明定理 4.2 前，我先引述下列引理
<u>引理 4.1</u> $\lim_{x\to a} f(x) = l \Rightarrow \exists a$ 的某鄰域 $(a-\delta, a+\delta)$ 使 f 在 $(a-\delta, a+\delta)$ 上有界。
分析：對 $\epsilon = 1$，$\exists\delta$ 使

$$|f(x)-l| < 1 \quad 當 0 < |x-a| < \delta$$

$\Rightarrow |f(x)| < |l| + 1$ 當 $0 < |x-a| < \delta$
取 $M = \max\{|f(a)|, |l|+1\}$ 則

$$|f(x)| < M \qquad \forall x \in (a-\delta, a+\delta)$$

定理 4.2 的證明：

(a) $|\,(f(x)+g(x)) - (l_1+l_2)\,| \le |f(x)-l_1| + |g(x)-l_2|$
據 $\lim_{x\to a} f(x) = l_1$ 及 $\lim_{x\to a} g(x) = l_2$，給定 $\epsilon > 0$，$\exists\delta_1, \delta_2$ 使

$$|f(x)-l_1| < \epsilon/2 \qquad 當 0 < |x-a| < \delta_1 \tag{12}$$

$$|g(x)-l_2| < \epsilon/2 \qquad 當 0 < |x-a| < \delta_2 \tag{13}$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$，則 $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow$ (12)(13) 成立，即

$$|\,(f(x)+g(x)) - (l_1+l_2)\,| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

(b)

$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - l_1l_2| \leq & |f(x)g(x) - l_1g(x)| + |l_1g(x) - l_1l_2| \\ = & |g(x)||f(x)-l_1| + |l_1||g(x)-l_2|\end{aligned} \tag{14}$$

依 lemma 4.1，

$$\exists \delta_g, M \quad 使 \quad |g(x)| < M 當 |x-a| < \delta_g \tag{15}$$

又 $\lim_{x\to a} f(x) = l_1$，$\lim_{x\to a} g(x) = l_2$，給定 $\epsilon > 0$，存在 δ_1, δ_2 使

$$|f(x) - l_1| < \frac{\epsilon}{2M} \qquad 當 0 < |x-a| < \delta_1 \tag{16}$$

$$|g(x) - l_2| < \frac{\epsilon}{2|l_1|} \qquad 當 0 < |x-a| < \delta_2 \tag{17}$$

取 $\delta = \min\{\delta_g, \delta_1, \delta_2\}$，則當

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow (15)(16)(17) \text{ 成立}$$

$$\Rightarrow |f(x)g(x) - l_1l_2| < M \cdot \frac{\epsilon}{2M} + |l_1| \cdot \frac{\epsilon}{2|l_1|} = \epsilon$$

(c) $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$

若能證明：

$$\lim_{x\to a} \phi(x) = l,\ l \neq 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{1}{\phi(x)} = \frac{1}{l} \tag{18}$$

則根據 (b)，$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} == \frac{l_1}{l_2}$

今證明 (18)

$$|\frac{1}{\phi(x)} - \frac{1}{l}| = \frac{|\phi(x) - l|}{|l\phi(x)|} \tag{19}$$

(i) 控制分母使它離開 0

由 $\lim_{x\to a} \phi(x) = l$，$l \neq 0$，不妨設 $l > 0$

對 $\epsilon = \frac{l}{2}$, $\exists \delta_1$ 使

$$|\phi(x) - l| < \epsilon = \frac{l}{2} 當 \quad 0 < |x-a| < \delta_1 \tag{20}$$

$$即\ \frac{l}{2} < \phi(x) < \frac{3l}{2} \ 當\ 0 < |x-a| < \delta_1 \tag{21}$$

代入 (19) 得

$$|\frac{1}{\phi(x)} - \frac{1}{l}| < \frac{2}{l^2}|\phi(x) - l| \ 當 0 < |x-a| < \delta_1$$

(ii) $|\frac{1}{\phi(x)} - \frac{1}{l}|$ 的估計

據 $\lim_{x\to a}\phi(x) = l$ 給定 $\epsilon > 0$ $\exists\delta_2$ 使

$$|\phi(x) - l| < \frac{l^2}{2}\epsilon \quad 當 \quad 0 < |x-a| < \delta_1$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ 則當 $0 < |x-a| < \delta$

$$|\frac{1}{\phi(x)} - \frac{1}{l}| < \frac{2}{l^2}\frac{l^2}{2}\epsilon = \epsilon \qquad \square$$

4.4 連續函數的幾個基本性質

4.4.1 連續

設 $I \subset \mathbb{R}$ 為定義在 I 上的實函數

$x_0 \in I$ 我們稱 F 在 x_0 連續若 $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

即 $\forall\epsilon > 0$ $\exists\delta = \delta(\epsilon)$ 使

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad 當 x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I, x \neq x_0$$

若 f 在 I 上每一點都連續我們稱 f 在 I 上連續。

特別當 $I = [a, b]$，$a < b$，稱 f 為 $[a, b]$ 上的連續函數

f 在 $[a, b]$ 上連續則 f 具有中間值定理，最大與最小值定理，我們已於第二章中談過。

這一節中我們將再提出連續函數一個非常重要的定理－均勻連續定理。這個定理一出，則積分的存在問題就迎刃而解了。

為了讓這些性值完整地呈現，我再次引述如下

<u>定理 4.7</u> 中間值定理

設 f 在 $[a, b]$ 上連續，$f(a)f(b) < 0$ 則存在 $x \in (a, b)$ 使 $f(c) = 0$

<u>定理 4.8</u> 最大最小值定理

設 f 在 $[a, b]$ 連續，則 f 在 [a,b] 上取最大最小值，即存在 $x_1, x_2 \in [a, b]$ 使

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in [a, b]$$

系：f 在 [a,b] 上連續，設 M, m 分別表 f 在 [a,b] 上的最大最小值，則 $\forall y \in [m, M]$ 存在 $x \in [a, b]$ 使 $f(x) = y$

即連續函數不遺漏最大最小值之間的任何值。

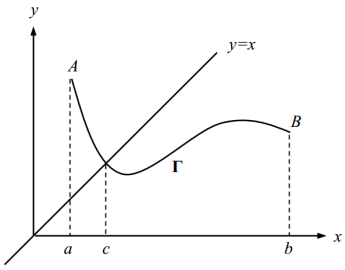
下面這個定理稱為固定點定理，可由中間值定理導出。

<u>定理 4.9</u> 固定點定理

設 f 在 $[a, b]$ 連續，且 f 把 $[a, b]$ 映入 $[a, b]$（即 $f([a, b]) \subset [a, b]$）則 $\exists c \in (a, b)$ 使 $f(c) = c$

分析：

Figure 4.2:



f 把 $[a,b]$ 映入自己，則 $a \le f(a)$，$f(b) \le b$
即點 $A(a, f(a))$ 在直線 $y = x$ 的上方
點 $B(b, f(b))$ 在直線 $y = x$ 的下方，如圖4.2
而 $\Gamma = \{(x, f(x)))|a \le x \le b\}$ 為平面上連接 A,B 的連續曲線
因此 Γ 必與直線 $y = x$ 相交，此交點即為固定點
直覺上這樣了解很好　不過我們還是利用中間值定理來證明它比較有說服力
定理的證明：

令 $g(x) = x - f(x)$
則 g 在 $[a,b]$ 連續 $g(a) > 0, g(b) < 0$
根據連續函數中間值定理，$\exists c \in (a,b)$ 使 $g(c) = 0$
即 $\exists c \in (a,b)$ 使 $f(c) = c$

<u>Remark</u> 定理 4.9 在 $\mathbb{R}^n$ 有相應的定理稱為 Brouwer fixed point theorem
設 $B \subset \mathbb{R}^n$ 為單位閉球，即 $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \|\mathbf{x}\| \le 1\}$，$f$ 在 B 上連續並且把 B 映入 B
則 $\exists \mathbf{x}_0 \in B$ 使 $f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$
想像你將海綿球向內壓縮，則海綿球內至少有一點不動，這就是 Brouwer fixed point theorem 的內容。
注意你不可以把海綿球換成輪胎。對於輪胎你以中心軸為轉軸，把他旋轉任意角，此寫像為連續，把輪胎映入輪胎，但沒有固定點。
下面這個性質純由極限的定義導出，和實數的完備性無關，因經常用到，特別把他標示為定理如下:
<u>定理 4.19</u> 正領域定理
設 f 在 x_0 附近有定義且連續
若 $f(x_0) > 0$ 則存在 $\delta > 0$ 使 $f(x) > 0\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
證明：f 在 x_0 連續 $f(x_0) > 0$
對 $\epsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ $\exists \delta$ 使
$|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}$ 當 $|x - x_0| < \delta$ (Remark)
即 $\frac{1}{2}f(x_0) < f(x) < \frac{3}{2}f(x_0)$ 當 $|x - x_0| < \delta$
$\therefore f(x) > \frac{1}{2}f(x_0) > 0\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $\square$

Remark

$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ 的定義為

$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta$ 使

$$|f(x) - l| < \epsilon \quad 當 0 < |x - x_0| < \delta \tag{22}$$

若 f 在 x_0 點連續，$l = f(x_0)$，因此

$$|f(x) - l| < \epsilon \quad 對\ x = x_0\ 成立$$

故 (22) 可寫為

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad 當 |x - x_0| < \delta \tag{23}$$

4.4.2 均勻連續（uniform continuity）

$I \subset \mathbb{R}$, f 為定義於 I 上的連續函數

$x_0 \in I$, f 在 x_0 點連續，依極限定義: 給定 $\epsilon > 0\ \exists\delta$ 使

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad 當 |x - x_0| < \delta$$

注意：ϵ 給定，δ 與 x_0 有關，不同的 x_0 所需的 δ 各異，能否找到一個共同的 δ 使

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad 當 |x - x_0| < \delta, \quad \forall x_0 \in I \qquad ?$$

如果對任意 ϵ 都能找到這樣的 δ，我們稱 f 在 I 上均勻連續。

定義 4.4 $I \subset \mathbb{R}$, f 為定義於 I 上的連續函數

若對任意 $\epsilon > 0\ \exists\delta$ 只跟 ϵ 有關，使

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \quad 當 |x - y| < \delta, \quad \forall x, y \in I$$

我們稱 f 在 I 上均勻連續。

例： $f(x) = \frac{1}{x}$, $\quad x$ 在 (0,1) 上是否均勻連續？

分析:

1. 固定 x，f 在 x 連續，對任意 $\epsilon > 0\ \exists\delta_x$ 使

   $$|f(x) - f(y)| = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| < \epsilon \quad 當 0 < |x - y| < \delta, \quad \forall x, y \in I$$

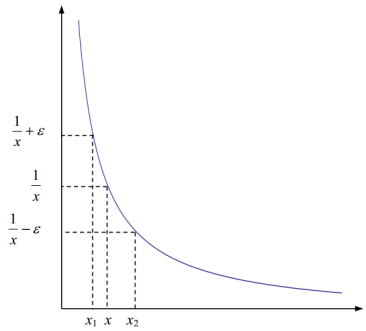
   即：$\frac{1}{x} - \epsilon < \frac{1}{y} < \frac{1}{x} + \epsilon$ 當 $|x - y| < \delta_x$

   如圖4.3：$\delta_x < x - x_1 = x - \frac{1}{\frac{1}{x}+\epsilon} = x - \frac{x}{1+\epsilon x} \to 0$ 當 $x \to 0$

   因此找不到一共同的 $\delta > 0$ 使

   $$|f(x) - f(y)| = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| < \epsilon \quad 當 0 < |x - y| < \delta, \quad \forall x, y \in (0, 1)$$

Figure 4.3:



2. 邏輯上的論述：
   欲在邏輯上證明 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上非均勻連續
   即証：$\exists\epsilon>0$ 使 $\forall\delta>0$ $\exists x,y\in(0,1)$, $|x-y|<\delta$, 但 $|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}|\geq\epsilon$
   就對 $\epsilon=1$ 來看
   $\delta>0$，不妨考慮 $\delta<1$
   取 $x=\frac{\delta}{2}$, $y=\frac{\delta}{3}$, $x,y\in(0,1)$。且看：
   $|x-y|=\frac{\delta}{6}<\delta$ 但 $|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}|=\frac{1}{\delta}>1$
   $\therefore f(x)=\frac{1}{x}$ 在 (0,1) 非均勻連續

<u>定理 4.11</u> $I\subset\mathbb{R}$ $|f'(x)|\leq M$ $\forall x\in I$ 則 f 在 I 上均勻連續
其中 I 滿足

$$x_1,x_2\in I\Rightarrow[x_1,x_2]\subset I$$

證： $|f(x)-f(y)|=f'(z)|x-y|\leq M|x-y|\quad\forall x,y\in I$
給定 $\epsilon>0$ 取 $\delta=\frac{\epsilon}{M}$ 得證。□

例 1: $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $[a,\infty)$ 上均勻連續，$a>0$
因 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$, $|f'(x)|<\frac{1}{a^2}$ $\forall x\in[a,\infty)$

例 2: $f(x)=\{\begin{matrix} e^{-1/x^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{matrix}$
$f'(x)=e^{-1/x^2}\cdot\frac{2}{x^3}$ 當 $x\neq 0$, $|f'(x)|<2$ 當 $|x|>1$
又 $f'(x)$ 在 $[-1,1]$ 上連續（請自行檢驗之）$\therefore$ 在 $[-1,1]$ 上有界，設 A 為其上界
取 $M=\max\{A,2\}$ 則 $|f'(x)|\leq M$ $\forall x\in\mathbb{R}$
$\therefore f$ 在 $\mathbb{R}$ 上均勻連續

4.4.3 Heine-Borel 定理

<u>定義 4.4</u> 開覆蓋族（family of open covering）
設 $A\subset\mathbb{R}$

$\mathcal{F}$ 為由 $\mathbb{R}$ 中某些開區間所成之集合

（$\mathcal{F} = \{I_\lambda | I_\lambda = (a_\lambda, b_\lambda), a_\lambda, b_\lambda \in \mathbb{R}\}$）

我們稱 A 被 $\mathcal{F}$ 覆蓋若

$\forall x \in A\ \exists I \in \mathcal{F}$ 使 $x \in I$

稱 $\mathcal{F}$ 為 A 上一族開覆蓋（open covering）

例 1: $\mathcal{F} = \{(\frac{1}{n}, 2) | n \in \mathbb{N}\}$

$\mathcal{F}$ 為 $(0,1]$ 上的一族 open covering，但非 $[0,1]$ 上的 open covering

例 2: 設 $\{r_n\}_{n=1,2,\cdots}$ 為 $[0,1]$ 中一切有理點集

給定 $\epsilon > 0$ 令 $I_\epsilon(r_n) = (r_n - \frac{\epsilon}{2^n}, r_n + \frac{\epsilon}{2^n})$

$\mathcal{F} = \{I_\epsilon(r_n) | n = 1, 2, 3, \cdots\}$

觀察：$|I_\epsilon(r_n)|$（區間長）$= \frac{\epsilon}{2^{n-1}}$

$\sum_{n=1}^{\infty} |I_\epsilon(r_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{n-1}} = 2\epsilon < 1$ 當 $\epsilon < \frac{1}{2}$

結論：故 $\mathcal{F}$ 非 $[0,1]$ 上的 open covering 當 $\epsilon < \frac{1}{2}$

例 3: $\mathcal{F}_1 = \{(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}) | n = 2, 3, \cdots\}$ 非 $[0, \frac{1}{2}]$ 上的 open covering

$\mathcal{F}_2 = (-\delta, \delta) \cup \mathcal{F}_1 \quad (\delta > 0)$ ，則 $\mathcal{F}_2$ 為 $[0, \frac{1}{2}]$ 上的一族 open covering

是否可從 $\mathcal{F}_2$ 中找到有窮個開區間足以覆蓋 $[0, \frac{1}{2}]$

分析：$\exists N$ s.t. $\frac{1}{N} < \delta$ 故

$(-\delta, \delta) \cup \{(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}) | 2 \le n \le N\}$ 覆蓋 $[0, \frac{1}{2}]$

<u>Remark</u>

上面這個例子就是 Heine Borel Theorem 的內容：

任意閉區間 $[a,b]$ 上的 open covering$\mathcal{F}$ 都存在有窮個開區間族 $\mathcal{F}'$，使 $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ 覆蓋 $[a,b]$

你說把 $[a,b]$ 改成 $(a,b]$ 難道不行嗎？

不行！且看此例：

$\mathcal{F}_1$ 覆蓋 $(0, \frac{1}{2}]$ 但 $\mathcal{F}_1$ 中卻找不道有窮個子開族 $\mathcal{F}_1'$ 覆蓋 $(0, \frac{1}{2}]$

我第一次讀 Heine Borel 定理，那是 Johnson1964 年版的微積分課本，感到無限納悶，差那麼一點面目全非，好像在變把戲，弄出個有窮子覆蓋，有那麼重要嗎？從高中傳統數學初次接觸到近代數學，疑惑重重。我想同學內心的感受或許跟我當時差不多。同學務必要留心這個定理，它可是近代數學 Compact 概念的搖籃。無窮化有窮，有窮則可隨心所欲，可以取最大，可以取最小；最大的不會是無限大，最小不是 0，一切都在控制之中，可以用它來伐南山之木，可以用它來採東海之珠，妙處無窮！這個定理在近代數學的發展上實在太重要了！請同學們務必要用心。

<u>定理 4.12</u> Heine-Borel 定理

設 $\mathcal{F}$ 為 $[a,b]$ 上的一族 open covering，則在 $\mathcal{F}$ 中一定有有窮個子開區間族已覆蓋 $[a,b]$

分析：

1. 若不然，$[a,b]$ 不能被任意 $\mathcal{F}$ 中有窮個開區間所覆蓋。

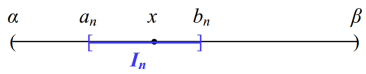
2. 將 $[a,b]$ 二等分，其中必有一等分（取閉區間）不能被 $\mathcal{F}$ 中有窮開集蓋住，令其為 $I_1=[a_1,b_1]$，$|I_1|=b_1-a_1=\frac{b-a}{2}$

3. 再將 I_1 二等分其中必有一等分（取閉區間）不能被 $\mathcal{F}$ 中有窮開集蓋住令其為 $I_2=[a_2,b_2]$
   $|I_2|=b_2-a_2=\frac{b-a}{2^2}$

4. 依此類推以致無窮，得區間套
$$I_1\supset I_2\supset\cdots$$
   I_n 不能被 $\mathcal{F}$ 中有窮個區間蓋住
   $|I_n|=\frac{b-a}{2^n}\to 0$ 當 $n\to\infty$
   由區間套定理，$\exists x\in\mathbb{R}$ 使 $\bigcap_{n=1}^{\infty}I_n=\{x\}$

5. 如圖4.4，$x\in I_n\subset[a,b]\therefore x\in[a,b]$
   $\mathcal{F}$ 覆蓋 $[a,b]$ 因此 $\exists I\in\mathcal{F}$ 使 $x\in I$

Figure 4.4:



6. 設 $I=(\alpha,\beta)$，$x\in I$
   而 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=x$
   故 $I_n=[a_n,b_n]\subset(\alpha,\beta)=I$ 當 n 夠大

7. 方才不是說 I_n 不能被 $\mathcal{F}$ 中有窮個開區間蓋住嗎？怎麼現在竟然被一個 $I\in\mathcal{F}$ 蓋住了？矛盾

根據 Heine-Borel 定理我們馬上可以得到連續函數另一個非常重要的性質：均勻連續定理。

<u>定理 4.13</u>（均勻連續定理）

設 f 在 $[a,b]$ 上連續，則 f 在 $[a,b]$ 上均勻連續

分析：

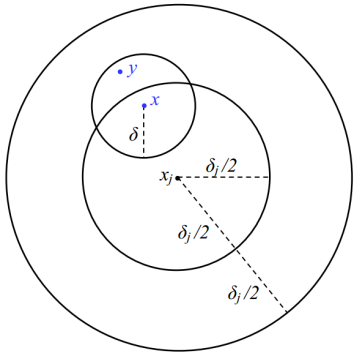
1. $x\in[a,b]$，f 在 x 點連續
   給定 $\epsilon>0$，$\exists\delta_x$ 使
   $|f(y)-f(x)|<\epsilon/2$ 當 $y\in I_{\delta_x}(x)$

2. 考慮 $\mathcal{F}=\{I_{\frac{1}{2}\delta_x}(x)|x\in[a,b]\}$ 則 $\mathcal{F}$ 為 $[a,b]$ 上一族 open covering
   根據 H-B 定理可以在 $\mathcal{F}$ 中找到有窮子覆蓋
$$\{I_{\frac{1}{2}\delta_i}(x_i)\}_{i=1}^{n},\quad \delta_i=\delta_{x_i}$$

蓋住 $[a,b]$

3. 取 $\delta = \min\{\frac{1}{2}\delta_i\}$ 則當 $|x-y|<\delta$ 有：
   (i)$x \in [a,b] \Rightarrow x \in I_{\delta_j/2}(x_j)$ for some j
   (ii)$|y-x| < \delta < \frac{1}{2}\delta_j$ ，$x \in I_{\delta_j/2}(x_j) \Rightarrow x, y \in I_{\delta_j}(x_j)$
   $\therefore |f(x)-f(y)| < |f(x)-f(x_j)| + f(x_j - f(y))| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$

Figure 4.5:



<u>Remark</u>

1. 上面的分析中第 2 點考慮
$$\mathcal{F} = \{I_{\delta_x/2}(x) | x \in [a,b]\}$$
   取 $\delta_x/2$ 是關鍵，δ_x 太鬆逼不出來

2. 我們初次見識到 Heine Borel 的妙處，無窮化有窮，有窮可以取最小的，最小的大於 0 可以讓我們渡過關山，妙！

例: 試判斷下列二函數在 $[0,\infty)$ 上是否均勻連續

(a) $f(x) = x^2$

(b) $f(x) = \sqrt{x}$

解 (a) 對 $\epsilon = 1$ 任意 $\delta > 0$ 考慮 $y = x + \frac{\delta}{2}$
且看 $|y^2 - x^2| = |y-x||y+x| = \frac{\delta}{2}(2x + \delta/2) > \delta x > 1$ 當 $x > 1/\delta$
$\therefore$ 非均勻連續

(b) 1. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2}$ 當 $x \in [1,\infty)$
$\therefore f$ 在 $[1,\infty)$ 上均勻連續
給定 $\epsilon > 0$，$\exists \delta_1$ 使
$|x-y| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \epsilon \ \forall x, y \in [1,\infty)$

2. 又 f 在 $[0,2]$ 連續 $\therefore$ 在 $[0,2]$ 上均勻連續。對此 ϵ，$\exists \delta_2$ 使
$$|x-y| < \delta_2 \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \epsilon \quad \forall x, y \in [0,2]$$

3. 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, 1\}$
   則 $|x-y| < \delta \Rightarrow x, y \in [0,2]$ 或 $x, y \in [1, \infty)$
   $\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$
   故 f 在 $[0, \infty)$ 均勻連續

<u>Remark</u>
(b) 中第一點考慮 $[1, \infty)$，第二點考慮 $[0,2]$ 故意讓他們重疊，重疊寬度 1，取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, 1\}$
則有 $|x-y| < \delta \Rightarrow x, y \in [1, \infty)$ 或 $x, y \in [0,2]$ 減少不必要的討論
當然你也可以考慮 $[1, \infty), [0,1]$，取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$
$|x-y| < \delta$，x 可能落在 [0,1] 上而 y 在 $[1, \infty)$ 上，找來媒人 1 一樣可以證明 f 在 $[0, \infty)$ 均勻連續，不過不如前述處理簡潔

4.4.4 不連續點（discontinuity）

f 在 x_0 不連續有兩種可能

1. $f(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x), f(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ 存在但不相等
   這種不連續點稱為第一型不連續

2. $f(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ 或 $f(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ 不存在
   這種不連續稱為第二型不連續。

例如：

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

0 為第二型不連續點
又如：

$$f(x) = \{ \begin{array}{ll} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{array}$$

每一點 $x \in [0,1]$ 都是第二型不連續點
當 f 在 (a,b) 上為單調函數時，f 的不連續點必為第一型
且若 x 為不連續點，則 $f(x-) < f(x+)$ 當 f 單調遞增（或 $f(x-) > f(x+)$ 當 f 單調遞減）
不妨設 f 單調遞增。因此對這種不連續點我們可以放進一個有理數 $r(x)$
使 $f(x-) < r(x) < f(x+)$
由於 $f \nearrow on(a,b),\ \ x \neq y \Rightarrow r(x) \neq r(y)$
令 $D = \{x | x \in (a,b), f$ 在 x 點不連續$\}$
則 $\phi : D \to \mathbb{Q}$ 為嵌入寫像，$\mathbb{Q}$ 可數，故 D 可數
將之陳述為定理
<u>定理 4.13</u> 設 f 在 (a,b) 上單調（monotonic），則 f 在 (a,b) 上的不連續點頂多可數

4.5 督脈的貫通

微積分的出現改變了數學的思維和內容。如果說早期的數學是一條河流，那麼微積分出現以後的數學發展可說是汪洋大海。早期的數學可以說是有限的數學（finite mathematics），微積分則處處是 limit，以有窮探索無窮，無窮是個神秘世界，上窮碧落下通黃泉，超越形像，凌過時空，人們所面對的問題其深度，廣度，遠非生活在河流中的人類所可以以想像，其間挑戰無數，人才輩出，寫下人類文明燦爛繽紛美麗多彩的一章。

微積分基本定理是近代數學的核心定理，沒有它也就沒有近代數學。

對於連續函數，微分與積分是互逆的過程。打個比方說，如果石頭風化成泥沙是微分，那麼泥沙沉積日久又成石頭就是積分。這是微積分第一第二基本定理的內容，前已述及。從實數的完備性到微積分基本定理的導出，這一連串的數學推演，我稱之為微積分的任脈，前已證明。但積分的存在問題一直懸而未決。現在萬事俱備，只欠東風。只需運一點功，督脈立通，任督二脈既通，你的數學思想就了無障礙，可以與天地共呼吸矣。

4.5.1 Riemann 積分的存在問題

設 f 為定義於 $[a,b]$ 上的實函數

$$P : a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_n = b$$

稱為 $[a,b]$ 上的一個分割（Partition）

令 $M_i = \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x), \quad m_i = \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x), \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

$U(P,f) = \sum M_i \Delta x_i$ 稱為 f 對 P 的上和（upper sum）

$L(P,f) = \sum m_i \Delta x_i$ 稱為 f 對 P 的下和（lower sum）

並令

$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_P U(P,f)$ 稱為 f 在 $[a,b]$ 上的上積分（upper integral）

$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_P L(P,f)$ 稱為 f 在 $[a,b]$ 上的下積分（lower integral）

若 $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$，我們稱 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分（Riemann integrable），以 $\int_a^b f(x)dx$ 表此共同值，稱為 f 在 $[a,b]$ 上的 Riemann 積分

<u>觀察</u>：

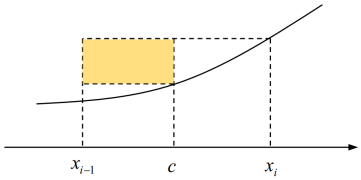
1. 若 P 為 $[a,b]$ 上的一分割，$c \in [a,b]$, $P' = P \cup \{c\}$，則

$$U(P',f) \le U(P,f) \tag{24}$$

$$L(P',f) \ge L(P,f) \tag{25}$$

（如圖4.6：$U(P,f) - U(P',f) =$ 斜線區小長方形面積 ≥ 0, (25) 同理）

Figure 4.6:



2. $P_1 \subset P_2$，則

$$U(P_2, f) \leq U(P_1, f)$$
$$L(P_2, f) \geq L(P_1, f)$$

3. $L(P_1, f) \leq U(P_2, f), \quad \forall P_1, P_2$
   說明：令 $P = P_1 \cup P_2$，則根據觀察 2，有

$$L(P_1, f) \leq L(P, f) \leq U(P, f) \leq U(P_2, f)$$

4. $\overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx$

<u>引理 4.2</u> $\int_a^b f(x)dx$ 存在 $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists P$ 使

$$U(P, f) - L(P, f) < \epsilon$$

說明：

($\Rightarrow$) 根據定義，$\forall \epsilon > 0$，
$\exists P_1$ 使 $U(P_1, f) \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx + \epsilon/2$
$\exists P_2$ 使 $L(P_2, f) \geq \underline{\int_a^b} f(x)dx - \epsilon/2$
令 $P = P_1 \cup P_2$，根據觀察 2

$$U(P, f) \leq U(P_1, f) \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx + \epsilon/2 = \int_a^b f(x)dx + \epsilon/2 \tag{26}$$
$$L(P, f) \geq L(P_1, f) \geq \underline{\int_a^b} f(x)dx - \epsilon/2 = \int_a^b f(x)dx - \epsilon/2 \tag{27}$$

(26)(27) $\Rightarrow U(P, f) - L(P, f) < \epsilon$

($\Leftarrow$)

$$L(P, f) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq U(P, f), \quad \forall P \tag{28}$$

依假設
$\forall \epsilon > 0 \quad \exists P$ 使 $U(P, f) - L(P, f) < \epsilon \Rightarrow 0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx < \epsilon$
ϵ 任意 $\therefore \overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$
故 f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可積分

好了！我現在就要打通你的督脈

<u>定理 4.14</u>（積分的存在定理）

設 f 在 $[a,b]$ 上連續，則 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分

分析：

1. f 在 $[a,b]$ 上連續，則 f 在 $[a,b]$ 上均勻連續，給定 $\epsilon > 0$，$\exists\delta$ 使

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon/(b-a), 當|x-y| < \delta, x, y \in [a,b]$$

2. 設 P 為 $[a,b]$ 上的分割

$$P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

   考慮 P 夠細，使 $\|P\| = \max \Delta x_i < \delta$

   f 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上連續，$\therefore f$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上取最大最小值

$$M_i = \max_{[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(\xi_i), \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$
$$m_i = \min_{[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(\eta_i), \quad \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

   則 $M_i - m_i < \epsilon/(b-a)$，因 $|\xi_i - \eta_i| < \delta$

3. 據此，我們有：

$$\begin{aligned} U(P,f) - L(P,f) &= \sum (M_i - m_i)\Delta x_i \\ &< \frac{\epsilon}{b-a} \sum \Delta x_i \\ &= \frac{\epsilon}{b-a}(b-a) = \epsilon \end{aligned}$$

4. 根據引理 4.2，$\int_a^b f(x)dx$ 存在

至此，任督二脈全通矣，好不快哉！

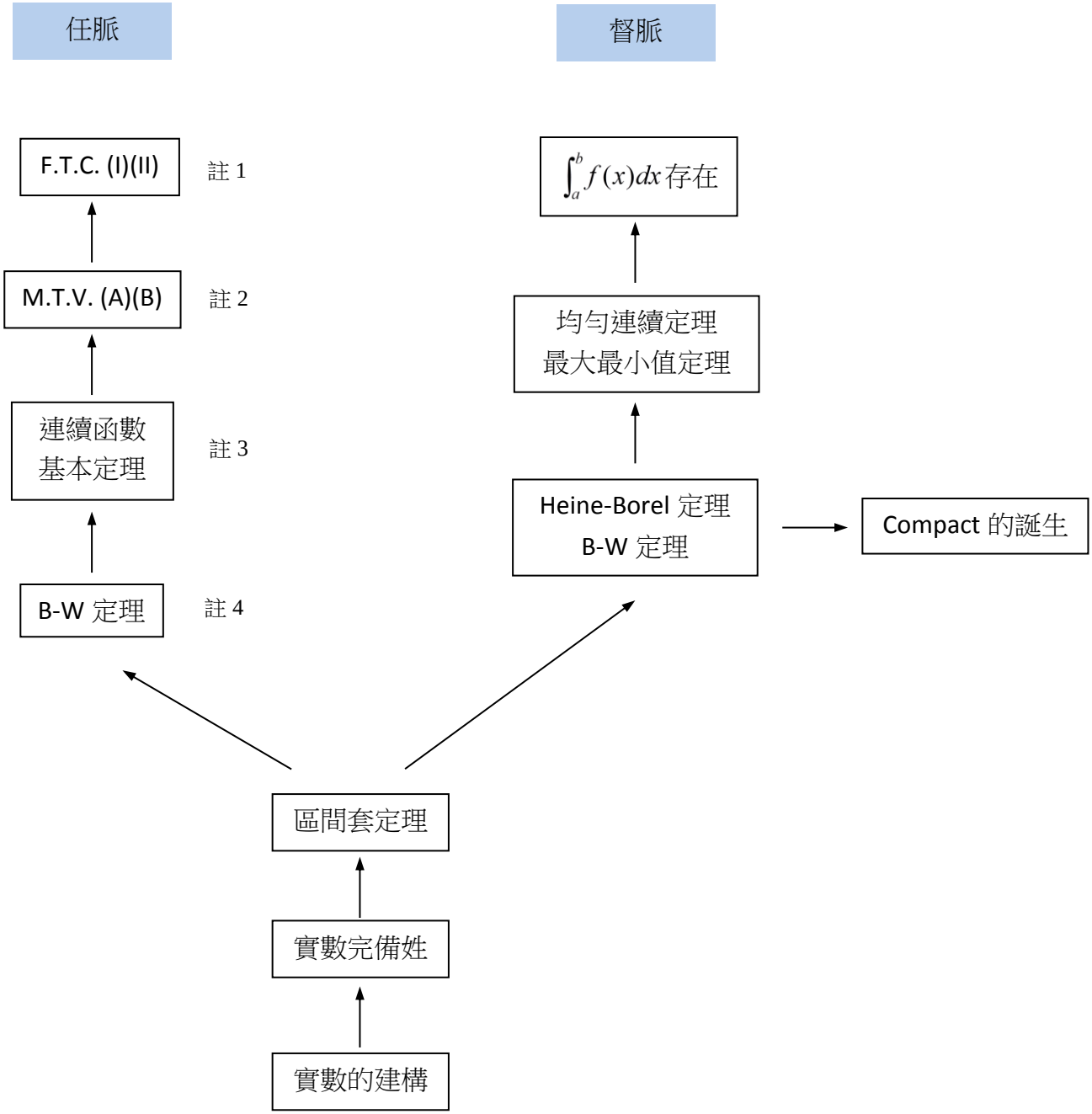
從微積分的誕生到任督二脈的貫通這中間經歷了兩百年，由憑直覺做數學飽受批判，到對極限的認識以及對實數的了解，微積分走過千山，渡過萬水，不斷地豐富它的內涵。它不但改變了數學的內容。也改變了人類生活的樣貌，可以這麼說：

沒有微積分就沒有現代文明。

想想：我們何其有幸，在短短幾個月內就能學習承接人類文明史上這精彩的一章。

在此我再次提醒，督脈的貫通出現了一個非常重要的工具：Heine Borel 定理。它導出了現代數學一個極其重要的概念－ Compact。其影響既深且遠，同學學習高等微積分務必要對它有所領悟才能學好現代數學。我們將於第五、六章中進一步介紹它。

為了同學們理路上的清晰，我再次圖示微積分這任督二脈如下：


任脈
督脈
F.T.C. (I)(II)
註 1
M.T.V. (A)(B)
註 2
連續函數
基本定理
註 3
B-W 定理
註 4
$\int_a^b f(x)dx$ 存在
均勻連續定理
最大最小值定理
Heine-Borel 定理
B-W 定理
Compact 的誕生
區間套定理
實數完備姓
實數的建構

註 1: F.T.C. Fundamental Theorem of Calculus

F.T.C. (I)：微積分第一基本定理

F.T.C. (II)：微積分第二基本定理

註 2: M.V.T. Mean Value Theorem

M.V.T.(A)：微分型均值定理

M.V.T.(B)：積分型均值定理

註 3: 連續函數基本定理：中間值定理 & 最大最小值定理

註 4: Bolzano-Weierstrass 定理

102學年度高等微積分(上) 習題四

1. 試用$\epsilon-\delta$論述，證明下列極限：
   (a) $\lim_{x\to 2} x^3 = 8$ (b) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x+3}{x^3-x-1} = 1$
   (c) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}} = \dfrac{1}{2}$ (d) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n}) = 1$。

2. 求下列各極限：
   (a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$ (b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$
   (c) 已知：$x-\dfrac{1}{3}x^3 < \sin x < x$，$x>0$，求$\lim_{x\to 0}(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x})$。

3. 我們在課堂上證明了：$\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{n!} = \infty$，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{(n!)^2} = 0$。
   問：是否存在α，$1<\alpha<2$，使$\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{(n!)^\alpha} = \lambda$，$0<\lambda<\infty$？
   (提示：參考習題二#11)

4. "$\lim_{x\to a} f(x) = l \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = l\ \forall x_n \to a$，$x_n \neq a$" 試證之。

5. (a) 定義$\lambda(n) = n$的因數個數，試證：$\lim_{n\to\infty} \dfrac{\lambda(n)}{n} = 0$，
   (b) 令$a_n = n!e - [n!e]$，其中$[x]$表示x的整數部分，問：$\lim_{n\to\infty} a_n$存在否？

6. (a) $f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$，$x\geq 1$，則$f(x)\uparrow e$正確否？
   (b) $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，則 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{a_n}{n}\right)^n = e^\alpha$正確否？試就$\alpha$之值討論之。
   (c) 求$\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$及 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)^n$之值。

7. f,g在$[a,b]$上連續，$h(x) = \max\{f(x),g(x)\}$。試證：$h(x)$在$[a,b]$上連續。

8. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{p} & x = \dfrac{q}{p}\ \ p,q\text{互質} \\ 0 & x\text{爲無理數} \end{cases}$，$0\leq x\leq 1$，試證：$f$在無理點上連續，而在有理點上不連續。

9. 「f在$[a,b]$上連續，則f在$[a,b]$上均勻連續。」此定理的證明也可以用反證法得到，試完成之。

10. (a) $A = [0,1]\times[0,1]$，$\mathcal{F}$爲平面上一族開圓盤 (family of open disks in $\mathbb{R}^2$) 蓋住A，則恆可在$\mathcal{F}$中選取有窮個圓盤$B_1, B_2, \cdots, B_n$使$\cup_{i=1}^n B_i \supset A$。
    (b) 試述$\mathbb{R}^n$中相應的定理。

11. 在l^2中，$A=\left\{\mathbf{x}|\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3,\cdots),|x_n|\le\dfrac{1}{n}\right\}$稱爲Hilbert cube。
設$\mathcal{F}$爲l^2中一族開球，A被$\mathcal{F}$所覆蓋。試證：A可以被$\mathcal{F}$中有窮個開球所覆蓋。

12. (a) 決定x_0，使$x^3>x^2+x+1$，當$x>x_0$。
(b)給定$a,b,c\in\mathbb{R}$，決定x_0，使$|x^3|>|ax^2+bx+c|$，當$|x|>|x_0|$。
(c) 在複數平面上，決定r，使$|z^n|>|a_{n-1}z^{n-1}+a_{n-2}z^{n-2}+\cdots+a_0|$，當$|z|>r$。其中$z$及$a_k$，$k=0,1,\cdots,n-1$, 爲複數。

13. $p(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0$爲一複系數多項式，若$p(z)\neq 0\ \forall z$。
試證：$\dfrac{1}{|p(z)|}$有界，並寫出它的一個上界。

14. 試判斷下列各函數在給定的領域上是否均勻連續？
(a) $f(x)=\ln x$, $x>0$
(b) $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$
(c) $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$
(d) $f(x)=\dfrac{1-x}{\log x}$, $0<x<1$。

15. 設Ω爲平面上有界凸領域，其邊界$\partial\Omega$爲片段平滑(piecewise smooth)。
試證：存在一直線L同時等分Ω的周長及面積。

16. 設A,B爲平面上二領域，其面積可測。
試證：存在一直線L同時等分A,B的面積。
(在$\mathbb{R}^3$中，給定三集合A,B,C，其體積可測，恆存在一平面E同時等分A,B,C的體積，有人稱它爲Hamburg定理。A表上下二層麵包、B表牛肉、C表蔬菜，二人欲平分hamburg，E表那公平的一刀。此定理可推廣到$\mathbb{R}^n$，此時E爲$n-1$維hyperplane)。

17. (a) 試證：$\lim_{p\to\infty}\left(|a_1|^p+|a_2|^p+\cdots+|a_n|^p\right)^{1/p}=M$，
其中$M=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots|a_n|\}$。
(b) f在$[a,b]$上連續，試證：$\lim_{p\to\infty}\left(\int_a^b|f(x)|^p dx\right)^{1/p}=M$，
其中$M=\max_{a\le x\le b}|f(x)|$。

18. $f:[0,1]\to[0,1]$爲對射連續函數(1-1, onto and continuous)，$f(0)=0$，$f(1)=1$，問下列陳述正確否？
(a) f在$[0,1]$上嚴格遞增。
(b) f^{-1}亦爲連續函數。

19. f在$[a,b]$上連續，若$[a,b]$中的每一點都是f的極小點，試證：f爲常函數。
(古人說：居安思危，或者可以當作是一種提示)

20. (a) $S \subset \mathbb{R}$，$\forall y \in S$，$\exists \delta > 0$使$S \cap (y, y+\delta) = \emptyset$。試證：$S$頂多countable。
(b)f爲定義在$[a,b]$上的函數，若$[a,b]$中的每一點都是f的極小點，試證：f的值域(the range of f)，頂多是countable。

21. 試判斷下列各函數在給定區間上是否Riemann可積分？
(a) $f(x) = \begin{cases} 1 & x\text{爲有理數} \\ 0 & x\text{爲無理數} \end{cases} \quad 0 \le x \le 1$
(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{p} & x = \dfrac{q}{p}\text{，}p,q\text{互質} \\ 0 & x\text{爲無理數} \end{cases} \quad 0 \le x \le 1$
(c) $f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & 0 < x \le 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
(d) E爲$[0,1]$上的Cantor set，$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \in [0,1] - E \end{cases}$

22. 設$P_n : 0 = x_{n,0} < x_{n,1} < \cdots < x_{n,k_n} = 1$爲$[0,1]$上的一分割$\|P_n\| \to 0$當$n \to \infty$。令$\alpha_{n,j} = x_{n,j} - x_{n,j-1}$，$j = 1, 2, \cdots, k_n$。試證：$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} \alpha_{n,j}^p = \begin{cases} 0 & \text{當}p > 1 \\ \infty & \text{當}p < 1 \end{cases}$。

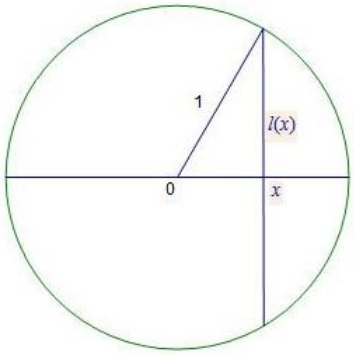
23. 台大某年微積分期中考有題目如下：“求單位圓上諸平行弦的平均長度”。
有甲、乙兩生分別求答案如下：
甲：設平行弦垂直x軸，令$l(x)$爲通過x的弦長，則弦長平均值爲

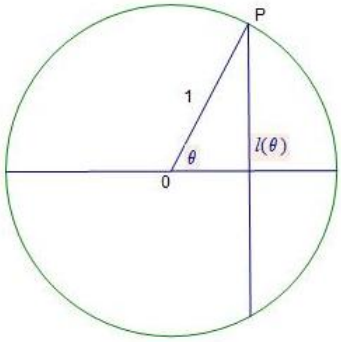
$$\frac{1}{2}\int_{-l}^{l} l(x)dx = \int_{-l}^{l} \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{2}$$

乙：設單位圓周上一點P與原點及x軸之張角θ，$l(\theta)$爲過P且垂直x軸之弦長，則弦長平均值爲

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} l(\theta)d\theta = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin\theta d\theta = \frac{4}{\pi}$$

請問到底誰對？問題出在哪？你能給出第三個解答嗎？





(Remark：機率論中，有一個古典問題如下：在單位圓盤上任作一弦，問弦長大於內接正三角形邊長的機率是多少？這就是有名的Bertrand paradox。甚麼叫作"任作一弦"？不同觀點有不同答案，請同學參考wikipedia，點Bertrand paradox，那裡有很好的介紹，值得一讀。)

24. 天文數學館新廈落成，數學系師生要在醉月湖畔舉辦茶會，那湖邊觀音石地面並不平整，助理小姐們想要把大餐桌擺得牢靠，問：任何地點是否恆可調整桌子的角度使桌子的四隻腳都踩在地上？請就下列兩種情形討論之。
(a) 桌子爲正方形。
(b) 桌子爲長方形。
(當然，假設地面是平滑連續，地面雖不平，但接近平面。任何地點是指桌子中心點坐落處。)
Remark：(a)是可以辦到的，(b) 據我所知，Andre Martin在2006年做了conjecture，認爲可以辦到，是否可以辦到，至今沒有答案，有待聰明的你來回答。
桌子不穩取決於：(對角線L_1兩隻腳底與地面距離和)-(對角線L_2兩隻腳底與地面距離和)$\neq 0$。

101 台灣大學數學系高等微積分上由陳金次製作，以創用 CC 姓名標示-非商業性-禁止改作 3.0 台灣授權條款

Chapter 5

$\mathbb{R}^n$ 中的 Topology

5.1 Compact 概念的誕生

上一章裏，我們打通了微積分的督脈，積分的存在問題得到了解決。
督脈之通，出現了影響近代數學既深且遠的定理－ **Heine Borel** 定理：

若 $[a,b]$ 被一族開區間 $\mathcal{F}$ 所覆蓋，則 $[a,b]$ 可被 $\mathcal{F}$ 中有窮個開區間所覆蓋。

這就是近代數學 **Compact** 概念的由來。
Compact 有什麼好？
好處多矣！無窮化有窮，有窮則可「從心所欲，不踰矩」。
什麼叫不踰矩？在一堆正數中想取最大值，最大值就來；想取最小值，最小值即得。最大值 $< \infty$，最小值 > 0，叫不踰矩。你說：無窮集我也可以隨心所欲，取 inf，取 sup。不過你要知道，你的 inf 可能是 0，sup 可能是無窮大，踰矩矣！
不踰矩，就可以幫助我們處理許多問題。孔子讚美管仲說：微管仲，吾其披髮左衽矣！借用孔子的話：微 compact，近代數學，其當機矣！
沒有管仲，只不過被髮左衽，還能吃飯睡覺。沒有 compact，則近代數學要當機，不能運轉了，可見其重要性。
我這樣子形容 compact，同學們不要以為誇張，請你們一定要相信它的重要性，用心體會，吸收消化，將來才能乘雲霧，駕輕舟，遊走於數學的天地裡，了無障礙。屈原在離騷中這樣描述：
「飲余馬於咸池兮，總余轡乎扶桑；折若木以拂日兮，聊逍遙以相羊。」
道理通了，天地任我遨遊，何等開心之事。

5.2 Topology

原住民有豐年祭，男女老少手牽手圍著薪火，呼喚祭禮，唱歌跳舞，盡管圈子忽大忽小，時扁時圓，但是彼此的相關位置不變，鄰居還是鄰居。

麵包師傅把麵粉和水搓揉成一團待酵的麵糰，把它放到碗裡，它就是碗形，放入方形容器裡它就是方形，放入柱形容器裡它又近於柱形；形狀雖變了，但麵粉之間相關位置並沒改變，鄰居還是鄰居。

你把那麵糰表面塗上不同顏色，覆蓋整個麵糰，隨意放置，麵團因勢變形，那著色的區塊也跟著變形，但彼此相關位置不變，仍然覆蓋那麵團表面。

所謂 Topology，就是在探討相鄰關係不變下，物件的內蘊性質。Topology 一詞，中文譯作拓樸學，是音譯，日文譯作位相學，是意譯，翻譯得很傳神。

例如立方體上，頂點數 -邊數 + 面數 = 2，一切多面體皆具此性質，稱為 Euler 特徵數。在 Topology 的眼光下，球和這些多面體無異，因此球的 Euler 特徵數是 2。輪胎和立方體上下貫空一方柱無異，它的 Euler 特徵數是 0。馬克杯也和輪胎體無異，它們的 Euler 特徵數都是 0。

有人頭上有兩個髮漩。民間普遍有一種說法：這樣的人脾氣壞。數學家說，每個人身上的毛髮場至少有兩個漩，只不過它剛好出現在頭上，人因毛少，又穿衣服，不易觀察，如果你家裡有短毛犬，或你有機會接近牛或馬，你就可以觀察到他們身上有好多的漩。脾氣壞與旋的多寡、位置有沒有直接關係？數學家持保留態度。

動物身上的毛髮場可看成球面的向量場，漩就是那向量迷失之處。輪胎上的向量場可以無漩，這就是它們拓墣性質不同之處。球面上的連續向量場至少有兩個漩。

5.3 $\mathbb{R}^n$ 中的 open set

Topology 的要點既然在鄰域關係，什麼是鄰域？簡單說，不孤立，盡管形狀變了，你的附近總是環繞著你熟識的人，這些伴你而居的人就是你的鄰域。

什麼是附近？$\mathbb{R}^n$ 中因有歐氏測距，「附近」也就不難定義了。

Definition 5.3.1 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$，定義

$$B_r(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} | \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n,\ |\mathbf{y} - \mathbf{x}| < r\} \tag{1}$$

稱為以 $\mathbf{x}$ 為心，半徑 r 的開球（open ball）；

$$C_r(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} | \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n,\ |\mathbf{y} - \mathbf{x}| \leq r\} \tag{2}$$

稱為以 $\mathbf{x}$ 為心，半徑 r 的閉球（closed ball）。

其中 $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| = \left(\sum_{i=1}^n |y_i - x_i|^2\right)^{1/2}$,$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots x_n)$,$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots y_n)$，表 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 兩點的歐氏距離。

Definition 5.3.2 $V \subset \mathbb{R}^n$ 稱為開集（open set），若且為若對任意 $\mathbf{x} \in V$ 恆存在 $r > 0$ 使 $B_r(\mathbf{x}) \subset V$。

例： $\emptyset$ 為開集，$\mathbb{R}^n$ 為開集。$(0,1)$,$(-\infty,0)$,$(1,\infty)$ 均為 $\mathbb{R}$ 中的開集。$B_r(\mathbf{x})$,$r>0$ 為 $\mathbb{R}^n$ 中的開集。

Definition 5.3.3 $F\subset\mathbb{R}^n$ 為閉集（closed set）若且為若 F^c 為開集。

例： $\emptyset$ 為閉集，$\mathbb{R}^n$ 為閉集。$[0,1]$,$(-\infty,0]$,$[1,\infty)$ 均為 $\mathbb{R}$ 中的閉集。$C_r(\mathbf{x})$,$r>0$ 為 $\mathbb{R}^n$ 中的閉集。Cantor set 為 $\mathbb{R}$ 中的閉集。

閉集與開集具有如下的特性，此特性為用已定義一般點集上 Topology 的基礎。

Theorem 5.3.4

(a) 任意開集的聯集恆為開集。

(b) 有窮個開集的交集恆為開集。

証： (a) 設 $\{V_\lambda\}$,$\lambda\in\Lambda$ 為一族開集，$A=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}V_\lambda$。
$\mathbf{x}\in A\ \Rightarrow\ \exists\lambda\in\Lambda$ 使 $\mathbf{x}\in V_\lambda$
V_λ 為 open $\Rightarrow\exists r>0$ 使 $B_r(\mathbf{x})\subset V_\lambda\subset A$
$\therefore A$ 為 open $\square$

(b) 設 $V_1,V_2,\cdots V_n$ 為 open，$B=\bigcap_{i=1}^n V_i$。
$\mathbf{x}\in B\ \Rightarrow\ \mathbf{x}\in V_i\ \forall i$
V_i open $\Rightarrow\exists r_i>0$ 使 $B_{r_i}(\mathbf{x})\subset V_i$
取 $r=\min\{r_1,r_2,\cdots r_n\}$，則 $B_r(\mathbf{x})\subset B_{r_i}(\mathbf{x})\subset V_i\ \forall i=1,2,\cdots n$
$\Rightarrow B_r(\mathbf{x})\subset\bigcap_{i=1}^n V_i=B$
$\therefore B$ 為 open $\square$

對定理 5.3.4 中的開集取補集，我們馬上得到：

Theorem 5.3.4

(a) 任意閉集的交集恆為閉集。

(b) 有窮個閉集的聯集恆為閉集。

Remark:

(i) 無窮開集的交集未必為開集，例如 $I_n=(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})$ 為開集 $\forall n=1,2,\cdots$，但 $\bigcap_{n=1}^\infty I_n=\{0\}$ 非開集。

(ii) 無窮個閉集的聯集未必為閉集，例如 $J_n=[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}]$ 為閉集，但 $\bigcup_{n=1}^\infty J_n=(0,1)$ 為開集。

Definition 5.3.4 設 $A\subset\mathbb{R}^n$，

(a) $\mathbf{x} \in A$ 稱為 A 的內點（interior point）若 $\exists r > 0$ 使 $B_r(\mathbf{x}) \subset A$。

(b) $A^\circ = \{\mathbf{x} | \mathbf{x}$為 A 的內點$\}$ 稱為 A 的內集（the interior of A）。

例：

$A = [0,1],\ A^\circ = (0,1)$

$A = [0,1]$ 中的有理點集，$A^\circ = \emptyset$

$A = [0,1]$ 中的 Cantor set，$A^\circ = \emptyset$

Theorem 5.3.3 $A \subset \mathbb{R}^n$，A° 恆為開集。

証： $\mathbf{x} \in A^\circ$，即 $\mathbf{x}$ 為 A 的 interior point $\Rightarrow \exists r > 0$ 使 $B_r(\mathbf{x}) \subset A$。
$\forall \mathbf{y} \in B_r(\mathbf{x})$，取 $\delta = \frac{1}{2}(r - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|)$
則 $B_\delta(\mathbf{y}) \subset B_r(\mathbf{x}) \subset A$
$\therefore \mathbf{y}$ 為 A 的 interior point，$\forall \mathbf{y} \in B_r(\mathbf{x})$
$\Rightarrow B_r(\mathbf{x}) \subset A^\circ \therefore A^\circ$ 為 open $\square$

Definition 5.3.5 $A \subset \mathbb{R}^n$，$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 稱 A 的 limit point，若 $B_r(\mathbf{x}) \cap A - \{\mathbf{x}\} \neq \emptyset\ \forall r > 0$。
Remark:

(i) $B_r(\mathbf{x}) \cap A - \{\mathbf{x}\} \neq \emptyset\ \forall r > 0$。對 $r_1 = 1$，任取 $\mathbf{x}_1 \in B_{r_1}(\mathbf{x}) \cap A\ \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}$。對 $r_2 = \frac{1}{2}|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}| > \frac{1}{2}$ 任取 $x_2 \in B_{r_2}(\mathbf{x}) \cap A - \{\mathbf{x}\}$，則 $\mathbf{x}_2 \neq \mathbf{x}_1, \mathbf{x}$。對 $r_3 = \frac{1}{2}|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}| < \frac{1}{2^2}$ 任取 $\mathbf{x}_3 \in B_{r_3}(\mathbf{x}) \cap A - \{\mathbf{x}\}$，則 $\mathbf{x}_3 \neq \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}$。依此類推，以致無窮，得<u>相異點列</u>$\{\mathbf{x}_n\} \subset A$，$\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$ 當 $n \to \infty$。

(ii) limit point 有的書叫做 accumulation point，有的稱它為 cluster point，我姑稱之為匯聚點，他是點集的概念，與一般極限的 limit 有點差別。例如數列：$\{x_n\} = \{0, 1, 1, 1 \cdots\}$，$x_1 = 0,\ x_n = 1\ \forall n > 1$，$\lim_{n\to\infty} x_n = 1$。此數列的點集只有兩點 $A = \{0, 1\}$，1 非 A 的 limit point。sequence 的 limit 和集合的 limit point 有別，同學宜注意。

整理之：$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 為 A 的 limit point $\Leftrightarrow \exists \{\mathbf{x}_n\} \subset A$，$\mathbf{x}_i \neq \mathbf{x}_j\ \forall i \neq j$，使 $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$。

Definition 5.3.6 $\mathbf{x} \in A$ 稱為 A 的孤立點（isolated point）若存在 $r > 0$ 使 $B_r(\mathbf{x}) \cap A - \{\mathbf{x}\} = \emptyset$（即 $B_r(\mathbf{x}) \cap A = \{\mathbf{x}\}$）。因此，任何 A 的孤立點都不是 A 的 limit point.

Definition 5.3.7 設 $A \subset \mathbb{R}^n$，

$$A' = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x}\text{為 } A \text{ 的 limit point}\} \tag{3}$$

稱為 A 的 **derived set**，我姑且稱之為匯聚點集。

Theorem 5.3.7 $A \subset \mathbb{R}^n$ 為 closed $\Leftrightarrow A \supset A'$

證： $(\Rightarrow)$ A 為 closed $\Rightarrow A^c$ 為 open。設 $\mathbf{x} \in A'$，即 $\mathbf{x}$ 為 A 的 limit point，則 $\mathbf{x} \notin A^c$
$\Rightarrow \mathbf{x} \in A \therefore A \supset A'$

$(\Leftarrow)$ 欲証 A 為 closed，即証 A^c 為 open。$\mathbf{x} \in A^c$，由於 $A \supset A'$，$\therefore \mathbf{x}$ 非 A 的 limit point
$\Rightarrow \exists \delta > 0$ 使 $B_\delta(\mathbf{x}) \cap A - \{\mathbf{x}\} = \emptyset$。$\mathbf{x} \notin A \therefore B_\delta(\mathbf{x}) \cap A = \emptyset$，即 $B_\delta(\mathbf{x}) \subset A^c \therefore A^c$ 為 open。□

Theorem 5.3.8 A' 為閉集 $\forall A \subset \mathbb{R}^n$。

證： (i) 若 $A' = \emptyset$ 顯然 A' 為閉集。

(ii) 若 $A' \neq \emptyset$，我們想証 $A' \supset (A')'$，則依定理 5.3.7，A' 為 closed。
令 $\mathbf{x}_0$ 為 A' 的 limit point，則 $B_r(\mathbf{x}_0) \cap A' - \{\mathbf{x}_0\} \neq \emptyset \ \forall r > 0$。任取 $\mathbf{y} \in B_r(\mathbf{x}_0) \cap A'$ $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}_0$. $\mathbf{y} \in A' \ \Rightarrow \ B_\delta(\mathbf{y}) \cap A - \{\mathbf{y}\} \neq \emptyset \ \forall \delta > 0$。取 δ 夠小，使 $B_\delta(\mathbf{y}) \subset B_r(\mathbf{x}_0)$ 且 $\mathbf{x}_0 \notin B_\delta(\mathbf{y})$，例如 $\delta = \frac{1}{2}\min\{|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0|, r - |\mathbf{y} - \mathbf{x}_0|\}$。則 $\exists \mathbf{z} \in B_\delta(\mathbf{y}) \cap A \ \mathbf{z} \neq \mathbf{y}, \mathbf{x}_0$
$\Rightarrow \mathbf{z} \in B_r(\mathbf{x}_0) \cap A - \{\mathbf{x}_0\}$
故 $B_r(\mathbf{x}_0) \cap A - \{\mathbf{x}_0\} \neq \emptyset \ \forall r > 0$，$\therefore \mathbf{x}_0$ 為 A 的 limit point，即 $\mathbf{x}_0 \in A' \therefore A' \supset (A')'$ 得証。□

有一句話說：投之以桃，報之以李。$\mathbf{y}$ 是桃，$\mathbf{z}$ 是李，李是 $B_r(\mathbf{x}_0)$ 所想要的。

例： $A_1 = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\}$ $A' = \{0\}$ $0 \notin A_1 \therefore A_1$ 非 closed。

$A_2 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x, y\text{為有理數}\}$，$A_2' = [0,1] \times [0,1]$ $A_2 \not\supset A_2' \therefore A_2$ 非 closed。

$A_3 =$ 自然數集，$A_3' = \emptyset$ $A_3 \supset A_3' \therefore A_3$ 為 closed。

$A_4 = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \frac{1}{x},\ x > 0\}$，點 $(0,1) \in A_4'$ 但 $(0,1) \notin A_4 \therefore A_4$ 非 closed。

Definition5.3.8 $\bar{A} = A \cup A'$ 稱為 A 的閉包（**closure**）。

Theorem 5.3.9 $\bar{A}$ 為 closed。

証： 設 $\mathbf{x}$ 為 $\bar{A}$ 的 limit point，則

(i) $\mathbf{x}$ 為 A 的 limit point，或

(ii) $\mathbf{x}$ 為 A' 的 limit point

若 (i) 成立，則 $\mathbf{x} \in A' \ \Rightarrow \ \mathbf{x} \in \bar{A}$
若 (ii) 成立，因 A' 為 closed $\therefore \mathbf{x} \in A' \subset \bar{A}$
$\therefore \mathbf{x} \in \bar{A}$ 故 $\bar{A}$ 為 closed。□

Remark: 許多書上定義 $\bar{A} = \bigcap\{F|F\text{為 closed}, F \supset A\}$。此二定義是等價的，請同學自行證明之。

Definition 5.3.9 A 為 **perfect**，若 $A = A'$。
Perfect 意思是完美，太好了，$A = A'$！
$\mathbf{x} \in A \Leftrightarrow \mathbf{x}$ 為 A 的 limit point！
不過這是數學上的稱呼，不要帶有感情，難道 $[0,1]$ 完美，(0,1) 就不完美了嗎？我看 $(0,1)$ 也很完美，少了邊界上那兩點，他倒自成一天地！

例： $[0,1]$, $[0,\infty)$, $(-\infty,0]$ 都是 perfect。

$C_r(\mathbf{x})$, $r > 0$ 為 perfect。

$B_r(\mathbf{x})$, $r > 0$ 非 perfect。

$\mathbb{N}$ 自然數集非 perfect。

$\mathbb{R}^n$ 為 perfect，任意 $\mathbb{R}^n$ 中的有窮點集都非 perfect。（事實上 $\mathbb{R}^n$ 中的 Countable 點集皆非 perfect，請見定理 5.3.10）

Cantor set 如何？$\mathbb{R}^n$ 中的 Cantor set 都是 perfect！以下僅以 $\mathbb{R}^2$ 為例說明之。
Lemma 5.3.1 $[0,1]$ 中的 Cantor set E 為 perfect。
分析：

1. 從 $[0,1]$ 中，第一次挖走 $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ 這區間。
2. 第二次又分別自 $[0,\frac{1}{3}]$ 中挖走 $(\frac{1}{9},\frac{2}{9})$，自 $[\frac{2}{3},1]$ 中挖走 $(\frac{7}{9},\frac{8}{9})$。餘集
$$F_2 = [0,\frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9},\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},\frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9},1]$$
3. 依此類推，以致無窮，設第 n 次的餘集為
$$F_n = \bigcup_{j=1}^{2^n} I_{n,j}, \quad I_{n,j} = [a_{n,j}, b_{n,j}]$$
則 Cantor set $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$
4. $x \in E \Rightarrow x \in F_n\ \forall n \Rightarrow$ 對任意 $n\ \exists j$ 使 $x \in [a_{n,j}, b_{n,j}]$
取 $x_n = a_{n,j} \in E$, $|I_{n_j}| = |b_{n,j} - a_{n,j}| = \frac{1}{3^n} \to 0$
$\therefore |x_n - x| < |I_{n_j}| \to 0$ 當 $n \to \infty$
$\therefore x$ 為 E 的 limit point，即 $E \subset E'$
5. 又 E 為 closed，$E' \subset E \therefore E = E'$，perfect！□

Proposition 5.3.1 $\mathbb{R}^2$ 中的 Cantor set 為 perfect。
分析：有兩種處理方式

(a) 仿照 R 中的論述。

(b) $E^2 = E \times E$，E 為 $[0,1]$ 中的 Cantor set。上例中已証 E 為 perfect，你可以試著證明：A, B 為 perfect，$A, B \neq \emptyset$，$A, B \subset \mathbb{R}$，則 $A \times B$ 為 $\mathbb{R}^2$ 中的 perfect set。此處留給同學當習題。

Remark: 上述 (a) 跟 (b) 兩個方法都可推廣到 $\mathbb{R}^n$ 中。故 $\mathbb{R}^n$ 中的 Cantor set 為 perfect set。

Theorem 5.3.10 $\mathbb{R}^n$ 中的非空 perfect set 恆為 uncountable。
分析：設 A 為 $\mathbb{R}^n$ 中的 perfect set

1. $A \neq \emptyset \therefore \exists \mathbf{a} \in A$。$A$ 為 perfect set $\therefore \mathbf{a}$ 為 A 的 limit point，故 $B_{r_0}(\mathbf{a})$ 含 A 中無窮點。任取 $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in B_{r_0}(\mathbf{a}) \cap A - \{\mathbf{a}\}$, $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{x}_1$

2. $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in A$, A 為 perfect $\therefore \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1$ 為 A 的 limit point，仿上論述，取 $r_1 < \min\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1|\}$，則 $B_{r_1}(\mathbf{x}_0) \cap B_{r_0}(\mathbf{x}_0) = \emptyset$ 且 $\exists \mathbf{x}_{0,0}, \mathbf{x}_{0,1} \in B_{r_1}(\mathbf{x}_0) \cap A - \{\mathbf{x}_0\}, \mathbf{x}_{0,0} \neq \mathbf{x}_{0,1}$，$\exists \mathbf{x}_{1,0}, \mathbf{x}_{1,1} \in B_{r_1}(\mathbf{x}_0) \cap A - \{\mathbf{x}_0\}, \mathbf{x}_{1,0} \neq \mathbf{x}_{1,1}$

3. 仿照 1 的論述分別作用於 $\mathbf{x}_{0,0}, \mathbf{x}_{0,1}, \mathbf{x}_{1,0}, \mathbf{x}_{1,1}$，取 $r_2 < \min\{\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2}|\mathbf{x}_{0,0} - \mathbf{x}_{0,1}, \mathbf{x}_{1,0} - \mathbf{x}_{1,1}|\}$ 得 4 個互不相交的球體，每個球體都含 A 中相異兩點，分別為

$$\mathbf{x}_{0,0,0},\ \mathbf{x}_{0,0,1},\ \mathbf{x}_{0,1,0},\ \mathbf{x}_{0,1,1},\ \mathbf{x}_{1,0,0},\ \mathbf{x}_{1,0,1},\ \mathbf{x}_{1,1,0},\ \mathbf{x}_{1,1,1}, \tag{4}$$

   他們和球心上一代選出的點的距離 $< \frac{1}{2^2}$

4. 依此類推，以致無窮，得樹形點列圖示如下：
   第 $n+1$ 代點列與第 n 代之間的距離 $< \frac{1}{2^n}$

5. 想像你在玩賓果遊戲，每個 $\mathbf{x}_{\dots}$ 點都是分岔點，彈珠由 $\mathbf{a}$ 點放入，kit kit kok kok（音），彈珠選出了一條通往極限的道路。由於 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty$，彈珠選出的點列為一 Cauchy Sequence

6. 此 Cauchy Sequence 收斂到一點，此點可對應到 $[0,1]$ 間實數二進位表示的相應點，此對應為 1-1，故 A 為不可數。而 $A \subset \mathbb{R}^n \therefore \#A = c$（實數的基數）□

5.4 $\mathbb{R}^n$ 中的 compact sets

<u>定義 4.1</u>
$A \subset \mathbb{R}^n$，$\mathcal{F}$ 為 $\mathbb{R}^n$ 中的一族開集（Family of open sets），我們稱 A 被 $\mathcal{F}$ 覆蓋（cover）若

$\forall x \in A\ \exists V \in \mathcal{F}$ 使 $x \in V$。
$\mathcal{F}$ 稱為 A 上的一個開覆蓋族（open covering）

<u>定義 4.2</u>
我們稱 A 為 compact，若對任意 A 上的 open covering 恆存在有窮個 subcovering 蓋住 A。
即：$\exists \{V_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{F}$ 使 $A \subset \bigcup_{i=1}^n V_i$

例 1: $\mathbb{N}$ 表自然數集

$$I_k = (k - \frac{1}{2^k}, k + \frac{1}{2^k}), k = 1, 2, \cdots$$

為 $\mathbb{N}$ 上的一個 open covering，但不存在 finite subcovering，$\therefore \mathbb{N}$ 非 compact。

例 2: $A = (0, 1)$

$$\mathcal{F} = \{(\frac{1}{k}, \frac{2}{k}) | k = 1, 2, \cdots\}$$

則 $\mathcal{F}$ 為 A 上的一個 open covering，但不存在 finite subcovering $\therefore A$ 非 compact。

例 3: 空集合 $\emptyset$ 為 compact。
$\mathbb{R}^n$ 本身非 compact。

例 4: $[a, b]$ 為 compact，這是 Heine-Borel 定理的內容。

例 5: $A = \{\frac{1}{k} | k \in \mathbb{N}\}$ 非 compact。
令

$$I_k = (\frac{1}{k} - \frac{1}{2^k}, \frac{1}{k} + \frac{1}{2^k}), \qquad \mathcal{F} = \{I_k | k \in \mathbb{N}\}$$

則 $\mathcal{F}$ 為 A 上的一個 open covering，但不存在 finite subcovering

例 5: 承上例，$B = A \cup \{0\}$ 為 compact。
設 $\mathcal{F}$ 為 B 上的一個 open covering
$0 \in B \Rightarrow \exists V \in V$ 使 $0 \in V$
V open $\Rightarrow \exists I_\delta(0) = (-\delta, \delta) \subset V$
對此 $\delta\ \exists N$ 使 $\frac{1}{k} < \delta$ 當 $k > N$
即 $\frac{1}{k} \in I_\delta(0) \subset V$ 當 $k > N$
B 中其餘不被 V 所覆蓋的點了不起只剩 $1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{N}$，每一點又都可被 $\mathcal{F}$ 中一個 open set 所覆蓋，因此這些 open sets 加上 V 就蓋住了 B，故 B 為 compact。

微 compact，近代數學其當機矣！
compact 是這麼重要，如何判斷一集合是否為 compact？
依定義，每次要從給定的 open covering 找 finite subcovering，似乎不是一件很輕鬆的事，有沒有直接了當的辦法可以輕鬆判定？
有！在 $\mathbb{R}^n$ 中，

$$\text{Compact} = \text{Bounded} + \text{Closed}.$$

這是這一章要介紹的核心內容。
依這個定理，我們可以判定：$\mathbb{R}^n$ 中的閉球為 compact，Cantor set 為 compact，閉輪胎體為 compact，$[0,1]$ 中的有理點集非 compact 因其非 closed，$B_r(\mathbf{x})$ 非 compact 因其非 closed，
$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2 = 1\}$ 為 compact，因其為 bounded and closed
$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2-z^2 = 1\}$ 非 compact，因其非 bounded（雙曲面）

<u>定理</u>5.4.1 compact $\Rightarrow$ bounded and closed
証：

(a) bounded
設 $A \subset \mathbb{R}^n$ 為 compact，考慮

$$\mathcal{F} = \{B_1(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in A\}$$

則 $\mathcal{F}$ 為 A 上的一個 open covering，故存在 finit subcovering $\{B_1(\mathbf{x}_i)\}_{i=1}^k$ 蓋住了 A
令 $R = 1 + \max_{1 \le \le k}\{\|\mathbf{x}_i\|\}$
則 $A \subset B_R(\mathbf{0})$，故 A 為有界集。$\square$

(b) closed
A 如上，欲証 A^c 為 open
給定 $\mathbf{y} \in A^c$ 考慮

$$\mathcal{F} = \{B_{\frac{1}{2}\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in A\}$$

則 $\mathcal{F}$ 為 A 上的一個 open covering，
A 為 compact $\Rightarrow \exists$finite subcovering $\{B_{r_i}(\mathbf{x}_i)\}_{i=1}^k$ 蓋住了 A，其中 $r_i \equiv \frac{1}{2}\|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}\|$
取 $\delta = \min_{1 \le i \le k}\{r_i\}$
則 $B_\delta(\mathbf{y}) \cap B_{r_i}(\mathbf{x}_i) = \emptyset \ \forall i = 1, 2, \cdots, k$
$\Rightarrow B_\delta(\mathbf{y}) \cap A = \emptyset$
$\therefore B_\delta(\mathbf{y}) \subset A^c$
即 A^c 為 open，$\therefore A$ 為 closed。$\square$

<u>定理 5.4.2</u> bounded and closed $\Rightarrow$ compact

在証明這個定理之前，我們先敘述一下 $\mathbb{R}^n$ 中的方塊套定理。

<u>定理 5.4.3</u>（$\mathbb{R}^n$ 中的方塊套定理）
設 $Q_k = [a_{1,k}, b_{1,k}] \times [a_{2,k}, b_{2,k}] \times \cdots \times [a_{n,k}, b_{n,k}]$
表 $\mathbb{R}^n$ 中的方塊，滿足：

(a) $Q_1 \supset Q_2 \supset \cdots$

(b) $\lim_{k\to\infty} |b_{j,k} - a_{j,k}| = 0 \ \forall j = 1, 2, \cdots, n$

則唯一存在 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ 使 $\bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k = \{\mathbf{x}_0\}$。

此定理即為 $\mathbb{R}$ 中區間套定理的推廣，顯而易見，在此不浪費筆墨。

証： 為了簡明，不失一般性，已下我且以 $\mathbb{R}^2$ 為例論證之。

此定理的論述其實就是 $\mathbb{R}$ 中 Heine-Borel 定理的翻版。

設 $A \subset \mathbb{R}^2$ 為一有界閉集，$\mathcal{F}$ 為其上一個 open covering，

若不存在 finite subcovering，我們想利用方塊套定理逼出矛盾來，一如 $\mathbb{R}$ 中論述。

A 為有界集，設 $A \subset [a,b] \times [c,d]$

令 $Q_0 = [a,b] \times [c,d]$

(a) 把 Q_0 分成四等份，令其為 $\{I_j\}_{j=1}^4$，I_j 為閉方塊 $\forall j = 1,2,3,4$

則 $A \cap I_j, j = 1,2,3,4$ 至少有一塊不能被 $\mathcal{F}$ 中有窮開集蓋住，設此塊為 $A \cap Q_1$，

$Q_1 = [a_1, b_1] \times [c_1, d_1]$

$|b_1 - a_1| = \frac{1}{2}|b-a|$ $|d_1 - c_1| = \frac{1}{2}|d-c|$

任取 $\mathbf{x}_1 \in A \cap Q_1$

(b) 重複第一步的操作於 Q_1，得方塊 $Q_2 = [a_2, b_2] \times [c_2, d_2]$

$|b_2 - a_2| = \frac{1}{2}|b_1 - a_1| = \frac{1}{2^2}|b-a|$

$|d_2 - c_2| = \frac{1}{2}|d_1 - c_1| = \frac{1}{2^2}|d-c|$

$A \cap Q_2$ 不能被 $\mathcal{F}$ 中有窮集蓋住

任取 $\mathbf{x}_2 \in A \cap Q_2$

依此類推以致無窮，得方塊套 $\{Q_k\}$

$Q_k = [a_k, b_k] \times [c_k, d_k]$

$|b_k - a_k| = \frac{1}{2^k}|b-a| \to 0$，$|d_k - c_k| = \frac{1}{2^k}|d-c| \to 0$ 當 $k \to \infty$

$Q_k \cap A$ 不能被 $\mathcal{F}$ 中有窮開集蓋住

任取 $\mathbf{x}_k \in A \cap Q_k$

(c) 依方塊套定理，$\exists \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ 使 $\bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k = \{\mathbf{x}_0\}$

而 $\mathbf{x}_k \in Q_k \cap A$ $\{\mathbf{x}_k\} \subset A$ 且 $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \{\mathbf{x}_0\}$

A 為 closed $\Rightarrow \mathbf{x}_0 \in A$

(d) $\mathcal{F}$ 蓋住了 A $\mathbf{x}_0 \in A \Rightarrow \exists V \in \mathcal{F}$ 使 $\mathbf{x}_0 \in V$

V open $\Rightarrow \exists r > 0$ 使 $B_r(\mathbf{x}_0) \subset V$

而 Q_k 縮成一點 $\mathbf{x}_0$ 故 $Q_k \subset B_r(\mathbf{x}_0)$ 當 k 夠大 $\Rightarrow Q_k \cap A \subset B_r(\mathbf{x}_0) \subset V$

僅僅一個 V 就蓋住了 $Q_k \cap A$，這和 $Q_k \cap A$ 不能被 $\mathcal{F}$ 中有窮個開集蓋住的事實矛盾。$\square$

<u>Remark</u>

上述定理的証明過程中

compact $\Rightarrow$ bounded and closed
純為 topology 的論述，與 $\mathbb{R}^n$ 的特性無關。
bounded and closed $\Rightarrow$ compact
則用到了方塊套定理，即實數的完備性，此為 $\mathbb{R}^n$ 中所特有，在一般賦距空間（metric space）中不再成立，請同學留意。

bounded and closed 有什麼好？
根據 Bolzano-Weierstrass 定理，bounded 保証 A 中任意 sequence 都有 convergent subsequence converge 到 $\mathbb{R}^n$ 中某點 $\mathbf{x}_0$
A 為 closed，此點 $\mathbf{x}_0$ 當然要在 A 裡面
這就是 sequentially compact

5.5 Sequentiall compact set

<u>定義</u>
$A \subset \mathbb{R}^n$ 稱為 sequentially compact 若 $\forall \{\mathbf{x}_n\} \subset A$ $\exists \{\mathbf{x}_{n_k}\}$ 使得
$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_{n_k} = \mathbf{x}_0 \in A$

簡言之，任意 A 中的點列恆存在收斂子點列。
當然，收斂不是指在 $\mathbb{R}^n$ 中收斂，而是指收斂到 A 中某點，這是 aequentially compact 的要點。
Sequentially compact 在處理許多數學問題上十分管用，尤其在函數空間上，透過它來處理許多偏微分方程式解的存在問題，不在話下。

例 1: $(0,1)$ 非 sequentially compact
取 $x_n = \frac{1}{n}$, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \notin (0,1)$
$\therefore (0,1)$ 非 sequentially compact

例 2: $\emptyset$ 為 sequentially compact
$\mathbb{R}$ 非 sequentially compact（取 $x_n = n$, $\{x_n\}$ 無收斂子點列）

例 3: $[0,1]$ 為 sequentially compact，理由如前（Bolzano-Weierstrass 定理）。

有沒有好辦法可以輕易判斷一集合是否為 sequentially compact？
有，在 $\mathbb{R}^n$ 中

$$\text{sequentially compact} \;=\; \text{bounded} \;+\; \text{closed}$$

<u>定理 5.5.1</u>
$A \subset \mathbb{R}^n$ 則
A 為 sequentially compact $\Leftrightarrow$ A 為 bounded and closed。
証：

($\Rightarrow$)

(a) bounded

若 A 非 bounded，任取 $\mathbf{x}_0 \in A$ $\forall n$ $\exists \mathbf{x}_n \in A$ 使 $|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0| > n$

$\{\mathbf{x}_n\} \subset A$，$A$ 為 sequentially compact

$\Rightarrow$ $\{\mathbf{x}_n\}$ 有收斂子點列 $\{\mathbf{x}_{n_k}\}$，收斂到 A 中某點 $\mathbf{y}_0$

對 $\epsilon = 1$ $\exists N$ 使 $|\mathbf{x}_{n_k} - \mathbf{y}_0| < 1$ 當 $k > N$

則 $|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0| \geq |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{n_k}| - |\mathbf{x}_{n_k} - \mathbf{y}_0| > n_k - 1 \to \infty$ 當 $k \to \infty$

兩個給定點的距離 $\to \infty$！矛盾。

(b) closed

設 $\mathbf{x}_0$ 為 A 的 accumulation point

則存在 A 中相異點列 $\{\mathbf{x}_n\}$，$\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$ 當 $n \to \infty$

A 為 sequentially compact $\Rightarrow \mathbf{x}_0 \in A$

$\therefore A$ 為 closed。

($\Leftarrow$) 如前述（compact 概念的由來）$\square$

<u>Remark</u>

(a) 上述定理的論證過程中

sequentially compact $\Rightarrow$ bounded and closed

純為 topology 的論述，與 $\mathbb{R}^n$ 的特性無關

bounded and closed $\Rightarrow$ sequentially compact 則用到 Bolzano-Weierstrass 定理，此定理由區間套定理而來，背後就是實數的完備性，此為 $\mathbb{R}^n$ 中特有，在一般賦距空間（metric space）中不再成立，同學請留意。

(b) 透過 bounded and closed 作媒，我們有：在 $\mathbb{R}^n$ 中

$$\text{compact} \;=\; \text{bounded} \;+\; \text{closed} \;= \text{sequentially compact}$$

其論述依據圖示如下：

在一般賦距空間中，已不在有實數的完備性。中間那個 bounded and closed 已無能為介，compact 和 sequentially compact 關係如何？這是下一章要講的核心。事實上，在 metric space 中

$$\text{compact} \;= \text{sequentially compact}$$

橋不見了，它們如何暗度陳倉？且待下回分解。

第五章完

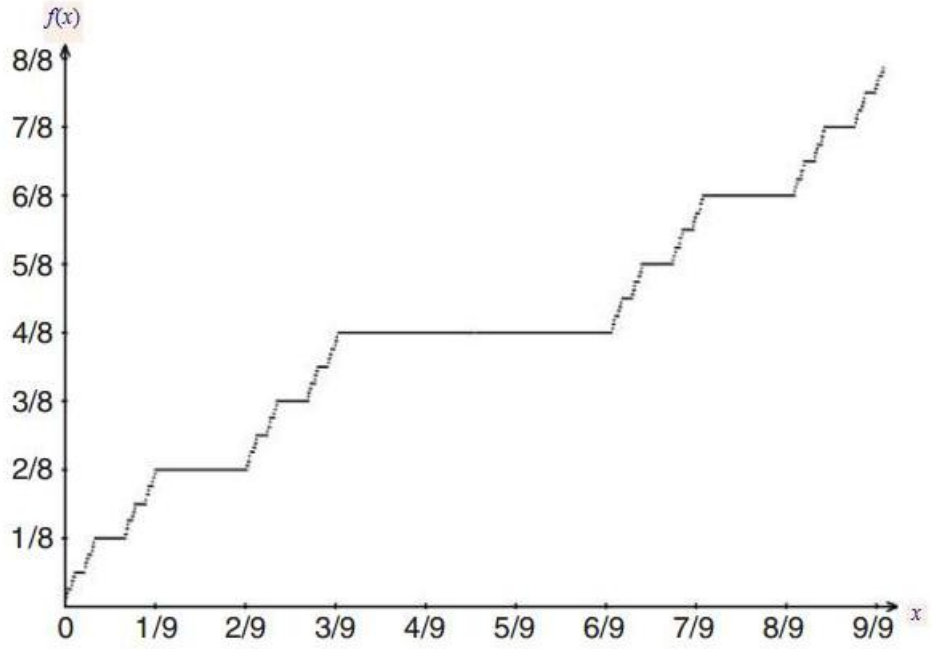
頁碼	作品	版權標示	來源／作者
1	微管仲…左衽矣		《論語・憲問》，孔丘
1	飲余馬於咸池…聊逍遙以相羊		《楚辭・離騷》，屈原

102學年度高等微積分(上) 習題五

1. 於$\mathbb{R}^2$中，引入Minkowski norm如下：設$\mathbf{x}=(x,y)$，定義$\|\mathbf{x}\|_p=(|x|^p+|y|^p)^{1/p}$，當$p\geq 1$時我們已於講義中就$p=1,2,4,\infty$分別簡繪其單位圓盤。當$0<p<1$時，請就$p=\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{n},n\to\infty$，分別簡繪其單位圓盤。
   Remark：根據Minkowsky不等式(第九章將介紹)，有
   $$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p\leq\|\mathbf{x}\|_p+\|\mathbf{y}\|_p \quad 當p\geq 1$$
   $$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p\geq\|\mathbf{x}\|_p+\|\mathbf{y}\|_p \quad 當0<p<1。$$
   因此，$0<p<1$，三角不等式不成立，$(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_p))$非metric space。

2. E爲$[0,1]$上的Cantor set，試造一遞增函數φ，把E映成$[0,1]$。

3. (Cantor function) $x\in[0,1]$，φ如上題所造函數，定義
   $$f(x)=\begin{cases}\varphi(x) & x\in E\\ \varphi(a)=\varphi(b) & x\in(a,b)\end{cases}$$
   (a,b)爲被挖走的open interval。
   試證：f爲$[0,1]$上的連續遞增函數，$f'(x)=0$ a.e. on $[0,1]$
   (所謂$f'(x)=0$ a.e. on $[0,1]$指$A=\{x|\ f'(x)=0\}$的測度 $=[0,1]$的測度，a.e.爲almost everywhere的縮寫)。



   (請參考wikipedia，點Cantor function，那裡有動態的示意圖，很用心，值得一閱)

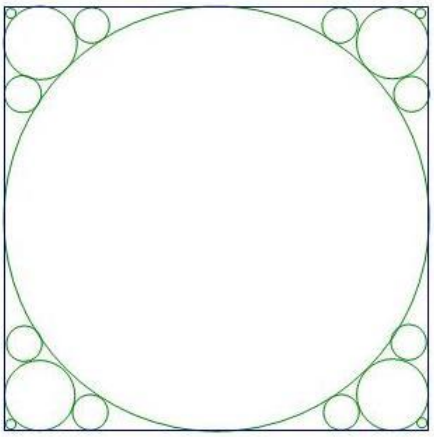
4. (a) 試造一函數$f\in C^1(\mathbb{R})$，$f(x)=1$當$|x|\leq 1$，$f(x)=0$當$|x|\geq 2$，$0<f(x)<1$當$1<|x|<2$。

(b) $K = [-1,1] \times [-1,1]$，$B = \{(x,y)|x^2+y^2 < 4\}$，試造一函數$f \in C^1(\mathbb{R}^2)$，滿足$f(x,y)=1$當$(x,y) \in K$，$f(x,y)=0$當$(x,y) \notin B$，$0 \le f \le 1$當$(x,y) \in B-K$。
(c) (b)中如要求$0 < f < 1$當$(x,y) \in B-K$，你會造嗎？

5. 給定$0 < \alpha < 1$，試在$[0,1]$上造一Cantor型集合P_α，使P_α的測度爲α。

6. 是否存在一perfect set $P \subset [0,1]$，$P \neq [0,1]$，但P的測度爲1。

7. 於$[0,1] \times [0,1]$中，第一次挖去含於$[0,1] \times [0,1]$中的最大開圓盤，第二次於剩餘四個小領域中又分別挖去含於其中的最大開圓盤，第三次於剩餘12個小小領域中又分別挖去含於其中的最大開圓盤，依此類推以致無窮，令所餘集合爲S，試證：S爲perfect。



(示意圖：挖到第三次)

8. (a) P_1, P_2爲perfect，問：$P_1 \cup P_2$，$P_1 \cap P_2$是否皆爲perfect？
(b) P_n爲perfect set，$P_1 \subset P_2 \subset P_3 \subset \cdots$，則$\cup_{n=1}^{\infty} P_n$爲perfect，正確否？
(c) P_n爲perfect，$P_1 \supset P_2 \supset \cdots$，則$\cap_{n=1}^{\infty} P_n$亦爲perfect，正確否？

9. (a) 在$[0,1]$中是否存在一perfect set P，$P \neq \emptyset$，P不含任何有理點？
(答案是存在的，怎麼造這集合，考驗你的創造力)
(b) 在(a)中，如將有理點改成無理點又如何？

10. (a) $A \subset \mathbb{R}$ 既 open又closed，試證：$A = \emptyset$或 $A = \mathbb{R}$。
(b) 定義從$\mathbb{R}$印到$[0,1]$上的Topology如下：U open in $[0,1]$，若$U = V \cap [0,1]$，V open in $\mathbb{R}$。
若$A \subset [0,1]$，既open又closed，試證：$A = \emptyset$或$A = [0,1]$。
(c) 若$A \subset \mathbb{R}^n$，既open又closed，證明：$A = \emptyset$或者$A = \mathbb{R}^n$。
Remark：(b)中$[0,1]$上的open set稱爲relative opne set，請參閱Rudin's book p.35。

11. F_n closed in $\mathbb{R}^n$，$F_1 \supset F_2 \supset \cdots$，試問：
(a) $\cap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$是否成立？
(b) 若F_1為compact，(a)之命題是否成立？
(c) 若$\mathbb{R}^n$改成任意metric space，(b)是否成立？

12. 中國人不喜歡4，醫院裡沒有四樓；仁愛路四段444巷44弄4號之4雖是大安區精華地段，但要賣出去價格上可能要鬆軟些。我們稱$x \in [0,1]$爲「不錯」的數字，若x的十進位小

數中都不會出現4。此處的十進位展開我們採取趨吉避凶原則：對於有限小數，會有兩種小數表示法，我們以盡量避開4爲原則：

$$\frac{2}{5}=\begin{cases}0.4000\cdots & (\text{兇})\\ 0.3999\cdots & (\text{吉})\end{cases}\ ,\ \frac{1}{2}=\begin{cases}0.5000\cdots & (\text{吉})\\ 0.4999\cdots & (\text{兇})\end{cases}$$

令$A\subset[0,1]$爲一切不錯的數字集，試問：
(a) $\#A=c$ 對嗎？
(b) A是否爲$[0,1]$中的開集？
(c) A是否爲$[0,1]$中的閉集？
(d) A是否爲perfect？
(e) 你能否求A的測度？

13. 中國人很喜歡8，車牌號碼AA-8888，身價便不凡！手機號碼0988-888-888，這不是平凡的你我可以拿到的號碼。
設$x\in[0,1]$，若x的十進位小數出現無窮多個8，無窮多個88(二連8)，無窮多個888(三連8)，$\cdots$，我們稱x爲幸運吉祥數。此處的十進位展開我們同樣採取趨吉避凡原則：

$$\frac{4}{5}=\begin{cases}0.7999\cdots & (\text{平凡})\\ 0.8000\cdots & (\text{吉})\end{cases}\ 、\ \frac{9}{10}=\begin{cases}0.8999\cdots & (\text{吉})\\ 0.9000\cdots & (\text{平凡})\end{cases}$$

令$B\subset[0,1]$爲一切幸運吉祥數集，試問：
(a) $\#B=c$對嗎
(b) B是否爲$[0,1]$中的開集？
(c) B 是否爲$[0,1]$中的閉集？
(d) B 是否爲perfect？
(e) 你能否求B的測度？
(憑你的直覺做數學，不要說我還沒學測度論。做錯了沒關係，就是要勇於嘗試與闖蕩，培養乘風破浪的無畏精神。)

14. $A,B\subset\mathbb{R}^n$，$A\cap B=\emptyset$，定義$d(A,B)=\inf\{|\mathbf{x}\text{-}\mathbf{y}||\mathbf{x}\in A,\ \mathbf{y}\in B\}$
(a) A爲compact，B爲closed。試證明：$d(A,B)>0$。
(b) 試舉一例A,B爲closed，$d(A,B)=0$。

15. $A,B\subset\mathbb{R}^n$，定義$A+B=\{\mathbf{x}+\mathbf{y}|\mathbf{x}\in A,\ \mathbf{y}\in B\}$
(a) A,B爲compact，試證：$A+B$爲compact。
(b) A爲compact，B爲closed，試證：$A+B$爲closed。
(c) 試舉一例A,B爲closed 但是 $A+B$非closed。

16. 在l^2中，單位閉球$B=\{\mathbf{x}|\|\mathbf{x}\|\le 1\}$並非compact，試證之。

17. 在$\mathbb{R}$中造一compact set A，使A'爲無窮可數集。

18. $l^p=\{\mathbf{x}|\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots),x_n\in\mathbb{R},\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<\infty\}$，$p\ge 1$
(a) $1\le p<p'$，試證：$l^{p'}\subset l^p$，且$\|\mathbf{x}\|_{p'}\le\|\mathbf{x}\|_p$。
(b) $\mathbf{x}\in l^p\ \forall p\ge 1$，令$\|\mathbf{x}\|_\infty=\sup\{|x_n|\mid n=1,2,3,\cdots\}$，試證：$\lim_{p\to\infty}\|\mathbf{x}\|_p=\|\mathbf{x}\|_\infty$。
(c) 令$l^\infty=\{\mathbf{x}|\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots),\ \|\mathbf{x}\|_\infty<\infty\}$，則$l^\infty=\cup_{p=1}^{\infty}l^p$正確否？
(d) 試就$p=3$，說明l^3上無法定義內積。

19. 在l^2中，給定$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in l^2$，定義$\cos\theta = \dfrac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{||\mathbf{x}||_2||\mathbf{y}||_2}$，其中$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ 表$\mathbf{x}, \mathbf{y}$的內積，由於Cauchy不等式的保證，θ可定義，稱爲$\mathbf{x}, \mathbf{y}$之間的夾角。
當$1 \leq p < 2$，則$l^p \subset l^2$，因此$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in l^p$的內積可定義，仿$l^2$，我們可否定義$\mathbf{x}, \mathbf{y}$在$l^p$的夾角$\theta_p$爲
$\theta_p = \cos^{-1} \dfrac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{||\mathbf{x}||_p||\mathbf{y}||_p}$？試說明之。

20. $l^2 = \cup_{1 \leq p < 2} l^p$，正確否？

101 台灣大學數學系高等微積分上由陳金次製作，以創用 CC 姓名標示-非商業性-禁止改作 3.0 台灣授權條款

Chapter 6

賦距空間（Metric Space）

6.1 賦距空間

所謂賦距空間是指一集合上有距離的概念。
什麼叫距離呢？
距離是指集合中任意兩點都可賦予一函數值，且滿足某些性質，更具體地說：
設 X 為一集合，若存在一非負函數 d

$$d: \quad X \times X \to [0, \infty) \tag{1}$$

滿足

(a) $d(x, y) \geq 0 \; \forall x, y \in X$ 且 $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(b) $d(x, y) = d(y, x)$

(c) 三角不等式：$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \; \forall x, y, z \in X$

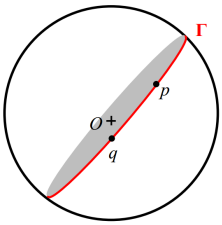
我們稱 (X, d) 為一賦距空間（**metric space**），d 為 X 上的一個度規（**metric**）。

例 1: 歐氏空間

$\mathbb{R}^n$ 中賦與歐式測距 $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = [\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2]^{1/2}$

為最常見的賦距空間。其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots y_n)$

Figure 6.1: S^2



例 2: S^2（單位球面）

$p, q \in S^2$，定義

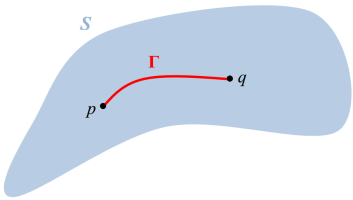
$$d(p,q) = \text{過 p,q 兩點的大圓之小弧弧長（如圖 6.1，}\Gamma\text{ 之小弧弧長）} \tag{2}$$

則 (S^2, d) 為一賦距空間。

例 3: $S \subset \mathbb{R}^3$ 為平滑曲面

$p, q \in S$，Γ 為 S 上連接 p, q 兩點的平滑曲線，$|\Gamma|$ 表其弧長，定義 $d(p,q) = \inf_\Gamma |\Gamma|$，稱為 p, q 二點的測地距，則 (S, d) 為一賦距空間。

Figure 6.2: Surface in $\mathbb{R}^3$



例 4: 孤獨世界

設 X 為任意集合 $x, y \in X$，定義

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases} \tag{3}$$

不難檢驗 d 滿足 (a)(b)(c) 故 (X, d) 為一賦距空間

想像 X 表世界上現有人們，d 表心靈距離，那個 1 是一光年心靈距離，這樣的世界無朋無友，冰冷孤寂。

歐氏空間因有實數完備性，具有許多美好的性質。

賦距空間不一定有實數的完備性，許多歐氏空間的美好性質在此不再成立，孤獨世界常是提供反例的一個良好題材。

例 5: l^2 空間

$$l^2 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots) \mid x_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\}$$

取 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in l^2$，定義

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \equiv \left[\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2\right]^{1/2}$$

則 (l^2, d) 為一賦距空間。

由於 Cauchy 不等式

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in l^2 \quad \text{則} \sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leq \left[\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2\right]^{1/2} \cdot \left[\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2\right]^{1/2} = \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2$$

因此，可定義 $(\cdot,\cdot):\ l^2 \times l^2 \to \mathbb{R}$

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \tag{4}$$

稱為 l^2 上的內積

例 6: l^p 空間，$p \geq 1$。

$$l^p = \{(x_1, x_2, \cdots) \mid x_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty\} \tag{5}$$

$\forall \mathbf{x} \in l^p$, 定義 $\|\mathbf{x}\|_p = (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{1/p}$ 稱為 $\mathbf{x}$ 的 p-norm。

$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in l^p$, 定義 $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_p$

在 l^2 中我們有 Cauchy 不等式，在 l^p 中我們有 Cauchy 不等式的推廣－ Hölder 不等式：

設 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p, q \geq 1$, $\mathbf{x} \in l^p$, $\mathbf{y} \in l^q$, 則

$$\sum_{i}^{\infty} |x_i y_i| \leq \|\mathbf{x}\|_p \cdot \|\mathbf{y}\|_q$$

據此可証 Minkowsky 不等式：

$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in l^p$, 則

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p \leq \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p.$$

因此，(l^p, d) 為一賦距空間。

Hölder 不等式與 Minkowsky 不等式的證明，要等到我們談凸函數（convex function）時再來完成。

例 7: $C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f$在 $[a,b]$ 上連續$\}$

$\forall f \in C[a,b]$ 定義 $\|f\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$

$\forall f, g \in C[a,b]$ 定義

$$d(f,g) = \|f-g\|_\infty.$$

不難檢驗 $(C[a,b], d)$ 為一賦距空間。

以上例子中 l^2 可以看做是無窮維歐氏空間，其上仍有垂直的概念，可定義向量之間的夾角（習題六，第 15 題），這個空間一般稱做 **Hilbert space**。

當 $p \neq 2$，l^p 上無法定義向量之間的夾角（習題六，第 16 題），$C[a,b]$ 上亦復如此。這類向量空間一般稱做 **Banach space**。注意，norm 是定義在向量空間上，除滿足 metric 的條件外，更具有 $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$ 的性質，$\lambda \in \mathbb{R}$。

6.2 開閉諸集

設 (X,d) 為一賦距空間，$x \in X, r > 0$，定義

$$B_r(x) = \{y \in X \mid d(y,x) < r\},$$

稱為以 x 為心半徑 r 的開球（open ball）；

$$C_r(x) = \{y \in X \mid d(y,x) \leq r\},$$

稱為以 x 為心半徑 r 的閉球（closed ball）。

例 1: X 表孤獨世界，$x \in X$

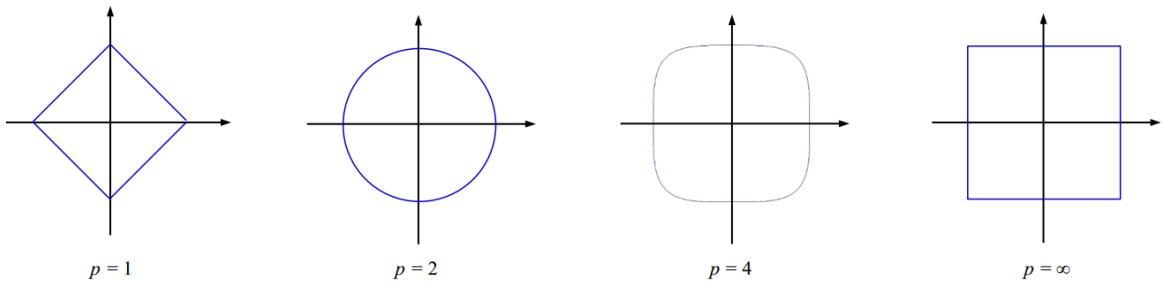
$$B_r(x) = \begin{cases} x & 當 r < 1 \\ X & 當 r \geq 1 \end{cases} \tag{6}$$

例 2: $\mathbb{R}^2$ 上賦與 p-norm

$$B_r((0,0)) = \{(x,y) | |x|^p + |y|^p < r^p\}$$

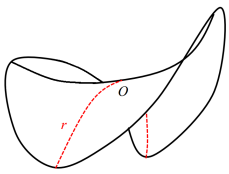
其上單位圓圖示如下：

Figure 6.3: Unit Disc in $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$



例 3: $S = \{(x,y)|z^2 = x^2 - y^2\}$, d 表測地距
以 $(0,0)$ 為中心，半徑 r 的圓盤。圖示如下：

Figure 6.4: Disc on Saddle



例 4: Poincaré model

X: $\mathbb{R}^2$ 中單位開圓盤

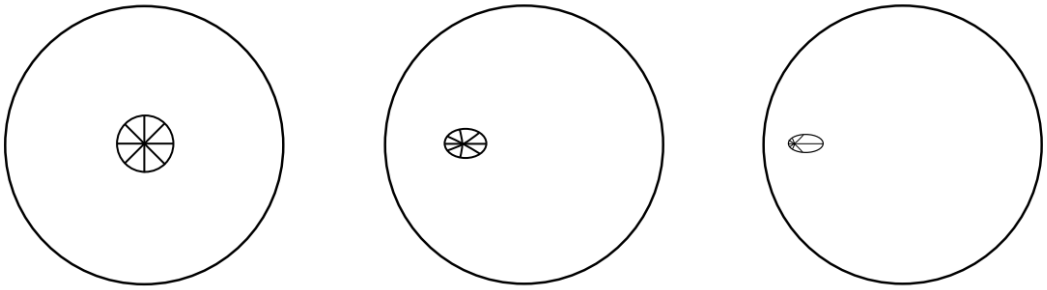
$\Gamma \subset X$ 為一平滑曲線，$\Gamma : t \mapsto z(t),\ t \in [a,b],\ z(a) = p, z(b) = q$

定義 $d(p,q) = \Gamma$ 的弧長：

$$|\Gamma| = \int_\Gamma \frac{|\mathrm{d}z|}{1-|z|^2} \tag{7}$$

根據複變函數的理論，可證明 X 上連接 p,q 兩點的測地線為過 p,q 兩點，在歐氏眼光下，垂直於 X 之邊界的圓。由 (7) 式可看出，當 $|z| \to 1$，歐氏平面上一小段距離在 X 世界裡卻是很遙遠的路徑，其上單位圓盤圖示如下：

Figure 6.5: Disc in Poincaré Model



Definition 6.2.1 開集（open set）

(X,d) 為一賦距空間，$V \subset X$ 稱為<u>開集</u> 若對任意 $x \in V$ 恆存在 $r > 0$ 使 $B_r(x) \subset V$

例： X 本身為開集

$\emptyset$ 為開集

$B_r(x)$ 為開集

請同學自行檢驗之。

Definition 6.2.2 閉集（closed set）

$F \subset X$ 稱為<u>閉集</u> 若 $F^c = X - F$ 為開集。

例： $\emptyset$ 為閉集

X 本身為閉集

$C_r(x)$ 為閉集

請同學自行檢驗之。

Definition 6.2.3 內點（interior point）

$A \subset X,\ x \in A$ 稱為 A 的內點，若 $\exists r > 0$ 使 $B_r(x) \subset A$。

Definition 6.2.4 內集（interior set）

$A \subset X$，$A^\circ = \{x | x \text{為 } A \text{ 的內點}\}$ 稱為 A 的內集（interior of A）。

Definition 6.2.5 匯聚點（accumulation point, limit point 或 cluster point, 三者同義）
$A \subset X$，$x \in X$ 稱為 A 的匯聚點，若 $B_r(x) \cap A - \{x\} \neq \emptyset \ \forall r > 0$
Definition 6.2.6 極限（limit）
$\{x_n\} \subset X$，$x \in X$，我們稱 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ 若對任意 $\epsilon > 0$ 恆存在自然數 N 使

$$d(x_n, x) < \epsilon \qquad 當 n > N$$

<u>Remark</u>

(a) 設 x_0 為 A 的匯聚點，依定義，對 $r_1 = 1$，$\exists x_1 \in B_{r_1}(x) \cap A$，$x_1 \neq x_0$。取 $r_2 = \frac{1}{2}|x_1 - x_0|$，對此 r_2，$\exists x_2 \in B_{r_2}(x) \cap A$, $x_2 \neq x_1, x_0$。取 $r_3 = \frac{1}{2}|x_2 - x_0|$，對此 r_3，$\exists x_3 \in B_{r_3}(x_0) \cap A$, $x_3 \neq x_0, x_1, x_2$。依此類推，以致無窮，得相異點列 $\{x_n\}$。
$x_n \in B_{r_n}(x_0) \cap A$，$r_n = \frac{1}{2}|x_{n-1} - x_0| < \frac{1}{2^{n-1}}$, $x_n \neq x_i \ \forall i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$
換言之，x_0 為 A 的匯聚點，$\Leftrightarrow$ 存在 A 中的相異點列 $\{x_n\}$，$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$

(b) 集合的 limit point 與點列的 limit 有所不同：點列允許重複，例如：

$$\{x_n\} = \{0, 1, 1, \cdots\}, \qquad 則 \lim_{n\to\infty} x_n = 1$$

但集合 $A = \{x_n | n = 1, 2, \cdots\} = \{0, 1\}$，1 非 A 的 limit point。

Definition 6.2.7 匯聚點集（Derived set）
$A \subset X$，$A' = \{x \in X \mid x 為 A 的匯聚點\}$ 稱為 A 的匯聚點集，英文叫做 derived set。
Theorem 6.2.1 A' 為閉集。

証： 請參考 $\mathbb{R}^n$ 中的證明。

Definition 6.2.8 閉包（Closure）
$\bar{A} = A \cup A'$ 稱為 A 的閉包。
Theorem 6.2.2 $\bar{A}$ 為閉集。

証： 請參考 $\mathbb{R}^n$ 中的證明。

<u>Remark</u>

許多課本定義 $\bar{A} = \bigcap\{F \mid F \subset X, F$ 為包含 A 的閉集$\}$，與上述定義等價，留作習題。

例： 在 $\mathbb{R}$ 上賦與孤獨世界度規，
$A \subset \mathbb{R}$, $A' = \emptyset \therefore A$ 為閉集
又 $x \in A \Rightarrow B_r(x) = \{x\} \subset A$ 當 $r \leq 1 \therefore A$ 為開集

Definition 6.2.9 邊界（Boundary）
$A \subset X$, $\partial A = \bar{A} - A^{\circ}$ 稱為 A 的邊界。

例 1: 在 $\mathbb{R}^2$ 上
$A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$, $A^{\circ} = A$
$\bar{A} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$
$\partial A = \bar{A} - A^{\circ} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$

例 2: E 為 $[0, 1]$ 上的 Cantor set
$E^{\circ} = \emptyset$, E 為 closed, $\therefore \bar{E} = E$
$\partial E = \bar{E} - E^{\circ} = E$

例 3: A 為 $[0, 1]$ 上有理點集
$A^{\circ} = \emptyset$, $\bar{A} = [0, 1]$
$\partial A = \bar{A} - A^{\circ} = [0, 1]$

Definition 6.2.10 Perfect set
$A \subset X$，稱 A 為 perfect 若 $A = A'$

Theorem 6.2.3 任意開集的聯集恆為開集，任意有窮個開集的交集恆為開集。
Theorem 6.2.4 任意閉集的交集恆為閉集，任意有窮個閉集的聯集恆為閉集。
以上兩定理的証明請參考 $\mathbb{R}^n$ 中的論述。

6.3 Compact=Sequentially Compact

Definition 6.3.1 開覆蓋族（Open covering）
(X, d) 為一賦距空間，$A \subset X$
$\mathcal{F}$ 為 X 中一族開集（a family of open sets），我們稱 $\mathcal{F}$ 覆蓋 A 若

$$\forall x \in A, \quad \exists V \in \mathcal{F} \text{ 使} x \in V$$

Definition 6.3.2 緊緻集（Compact set）
(X, d) 為一賦距空間，$A \subset X$
我們稱 A 為緊緻集（**compact set**）若對 A 上任意開覆蓋族 $\mathcal{F}$，恆存在有窮開集 $V_1, V_2, \cdots V_n \in \mathcal{F}$ 使 $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i$。
Theorem 6.3.2 任意緊緻集的子閉集恆為緊緻。
(X, d) 為一賦距空間，$A \subset X$ 為 compact
$K \subset A$ 為 closed $\Rightarrow K$ 為 compact

証： 設 $\mathcal{F}$ 為 K 上的一族 open covering，令 $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cup K^c$ 則 $\mathcal{F}'$ 為 A 的一族 open covering
A 為 compact $\Rightarrow$ 存在有窮開集 $V_1, V_2, \cdots V_n, K^c$ 蓋住 A （$V_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2 \cdots n$；K^c 不

能缺席，否則無法保証一定蓋住 A）

$\Rightarrow V_1, V_2, \cdots, V_n$ 蓋住 K，故 K 為 compact。$\square$

Theorem 6.3.3（緊緻集套定理）(X, d) 為一賦距空間，$K_n \subset X$ 為 compact，$K_n \neq \emptyset\ \forall n$ $K_1 \supset K_2 \supset \cdots$，則 $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$

証： 若 $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$

考慮 (K_1, d) 為一新的賦距空間

令 $V_n = K_n^c$（對 K_1 空間的補集）$= K_1 - K_n$

則 $\mathcal{F} = \{V_n | n = 1, 2, \cdots\}$ 為 K_1 上的一個開覆蓋族，$V_1 \subset V_2 \subset \cdots$，此覆蓋找不到有窮個開集可蓋住 K_1，違背了 K_1 為 compact 的先天設定。$\square$

Theorem 6.3.4 （Compact $\Rightarrow$ bounded and closed）

(X, d) 為一賦距空間，$A \subset X$ 為 compact，則 A 為有界閉集。

証： 請參考 $\mathbb{R}^n$ 中的證明

<u>Remark</u>

在 $\mathbb{R}^n$ 中因有 B-W 定理，因此 bounded and closed $\Rightarrow$ compact。

在一般的 metric space 中，已無 $\mathbb{R}^n$ 中的美好性質。下面的例子告訴我們 bounded and closed $\not\Rightarrow$ compact。

例 1: $\mathbb{R}$ 上賦與其孤獨度規

$\mathbb{R} \subset B_2(0)$，故 $\mathbb{R}$ 為 bounded

任意點都是孤立點，$\mathbb{R}' = \emptyset$，故 $\mathbb{R}$ 為 closed。

考慮 $\mathcal{F} = \{B_{1/2}(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$，則 $\mathcal{F}$ 為 $\mathbb{R}$ 上的一族 open covering，但不存在有窮個開集覆蓋住 $\mathbb{R}$，故 $\mathbb{R}$ 非 compact。

例 2: 在 l^2 中單位閉球 $B = \{\mathbf{x} | \|\mathbf{x}\|_2 \leq 1\}$ 非 compact。

這是第五章的習題。你可以考慮：

設 $\mathbf{x}_n = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$，1 出現在第 n 個座標。

$V_0 = B_1(\mathbf{0})$, $V_n = B_1(\mathbf{x}_n)$, $n = 1, 2, \cdots$

則 $\mathcal{F} = \{V_n \mid n = 0, 1, 2, \cdots\}$ 為 B 上的一族開覆蓋（請同學自行驗証），但它們一個也少不了。

或者利用定理 6.3.2：

令 $K = \{\mathbf{x}_n \mid n = 1, 2, 3, \cdots\}$

K 中每一點都是孤立點，$K' = \emptyset$，因此 K 為 closed。

若 B 為 compact，則 K 必為 compact。令 $\mathcal{F} = \{B_{1/2}(\mathbf{x}_n) \mid n = 1, 2, \cdots\}$，則 $\mathcal{F}$ 為 K 的一族開覆蓋，但它們彼此不相交，因此，一個也少不了，矛盾。

例 3: $C[0,1]$ 中的單位閉球 $B = \{f | f \in C[0,1], \|f\|_\infty \leq 1\}$ 非 compact

在此，留給同學當習題。

Definition 6.3.3 點列緊緻集（The sequentially compact set）

(X,d) 為 metric space，$A \subset X$，稱 A 為 sequentially compact 若 A 中任意點列 $\{x_n\}$ 恆存在子點列 $\{x_{n_k}\}$ 收斂到 A 中某點，即存在 $x \in A$ 使 $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$。

例 1: $[0,1]$ 上賦與孤獨度規，並非點列緊緻。

取 $x_n = \frac{1}{n}$, $d(x_n, x_m) = 1\ \forall n, m$，點列 $\{x_n\}$ 並無收斂子點列。

例 2: l^2 中單位閉球非點列緊緻。

取 $\mathbf{x}_n = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$（1 出現在第 n 個位置）

$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\|_2 = \sqrt{2}\ \forall n, m$

$\therefore \{\mathbf{x}_n\}$ 無收斂子點列。

例 3: $C[0,1]$ 中的單位閉球非點列緊緻。

在此，留給同學作為習題。

Theorem 6.3.4 （Compact $\Rightarrow$ Sequentially compact）

設 (X,d) 為 metric space，$A \subset X$ 為 compact，則 A 亦為 sequentially compact。

証： 設 $\{x_n\} \subset A$ 為 A 中一點列。

令 $s = \{x_n | n = 1, 2, \cdots\}$

(i) 若 S 為有窮集，則 S 中至少有一元素在點列 $\{x_n\}$ 中無窮次出現，取此重複點列，即得收斂子點列。

(ii) 考慮 S 為無窮集。假設 $\{x_n\}$ 無收斂子點列，則任意 $x \in A$ 都不是 S 的匯聚點，因此 $\exists r(x)$ 使 $B_{r(x)}(x)$ 頂多含 S 中有窮點。

令 $\mathcal{F} = \{B_{r(x)}(x) | x \in A\}$，則 $\mathcal{F}$ 為 A 上的一個 open covering，A 為 compact

$\Rightarrow \exists B_{r_1}(x_1),\ B_{r_2}(x_2), \cdots, B_{r_n}(x_n) \in \mathcal{F}$ 使 $A \subset \bigcup_{i=1}^n B_{r_i}(x_i)$, $r_i = r(x_i)$

$S \subset A$，每個 $B_{r_i}(x_i)$ 頂多含 S 中有窮點 $\Rightarrow S$ 為有窮集，矛盾。$\square$

Theorem 6.3.4 （Sequentially compact $\Rightarrow$ Compact）

設 (X,d) 為 metric space，$A \subset X$ 為 sequentially compact，則 A 亦為 compact。

這是相當困難的問題。數學上有一個竅門，困難的問題不妨把他簡單化，看看簡單的情形怎麼處理？簡單的情形對了，一方面增加對問題認識的深度，一方面也常會對問題的解決看到一線曙光。

欲証 A 為 compact，即給定 A 的一族 open covering$\mathcal{F}$，欲從 $\mathcal{F}$ 中選取 finite subcovering。

先不要考慮一般的 $\mathcal{F}$，考慮最簡單的 ϵ ball covering 如何？

設 $\mathcal{F} = \{B_\epsilon(x) | x \in S \subset A\}$，$\mathcal{F}$ 為 A 上一族 ϵ-ball covering。能否從中選取 finite number of balls $B_\epsilon(x_1), B_\epsilon(x_2) \cdots, B_\epsilon(x_n)$ 蓋住 A？

由於 sequentially compact 的保証，這件事是對的，我們把他寫成 lemma 如下：

Lemma 6.3.1

設 $A \subset X$ 為 sequentially compact，$\mathcal{F}$ 為 A 上一族開球覆蓋住 A，則存在 $\mathcal{F}$ 中有窮個開球 $\{B_\epsilon(x_i)\}_{i=1}^n$ 蓋住 A。

証： 若不然，任取 $\mathcal{F}$ 中一開球 $B_\epsilon(x_1)$，$B_\epsilon(x_1)$ 不能覆蓋 A，$\exists x_2 \in A - B_\epsilon(x_1)$

$B_\epsilon(x_1) \cup B_\epsilon(x_2)$ 不能覆蓋 A，$\exists x_3 \in A - B_\epsilon(x_1) \cup B_\epsilon(x_2)$

$\bigcup_{i=1}^3 B_\epsilon(x_i)$ 不能覆蓋 A，$\exists x_4 \in A - \bigcup_{i=1}^3 B_\epsilon(x_i)$

依此類推以致無窮，得點列 $\{x_n\} \subset A$

$d(x_i, x_j) > \epsilon \ \forall i \neq j$

因此 $\{x_n\}$ 無收斂子點列，矛盾。□

ϵ ball 過關了，對一般的 open covering 如何處理？

Lebesgue（1875-1941，法國數學家）提出了 Lebesgue number 的觀念以解決問題。

Definition 6.3.2

設 $\mathcal{F}$ 為 A 上一 open covering，稱 λ 為 $\mathcal{F}$ 的一個 **Lebesgue number**，若 $\forall B_\epsilon(x), x \in A$，恆存在一 open set $V \in \mathcal{F}$ 使 $B_\epsilon(x) \subset V$ 當 $\epsilon < \lambda$。

打一個比方，$\mathcal{F}$ 為台大學生，λ =1cm，只要 $\epsilon <$ 1cm，菓球 $B_\epsilon(x)$ 的直徑不超過 2cm，人人得都能吞之。$\lambda =$ 1cm 顯然是一個 Lebesgue number。不過 Lebesgue number 並不要每個人都得而吞之，只要有人可以吞下他就好。對 $\lambda =$ 2cm，$B_\epsilon(x)$ 的直徑可以接近 4cm，櫻桃小口可能吞不下，不過人外有人，台大學生中仍有不少 big mouth 可以吞下它，因此 λ =2cm 也是一個 Lebesgue number。

$\lambda =$ 10cm 如何？此時 $B_\epsilon(x)$ 的直徑可接近 20cm，我還沒發現台大學生中有這麼了不起的人物，可以一口吞下這麼大的菓球。相信，λ =10cm 對台大學生這一族群而言就不是個 Lebesgue number。

Definition 6.3.3

(X, d) 為 metric space，$S \subset X$。令 $\rho = \sup_{x,y \in S} d(x, y)$，稱 ρ 為 S 的直徑（diameter）。

Definition 6.3.4

給定 $\mathcal{F}$ 為 X 上的一族開集，稱 S 對 $\mathcal{F}$ 為一超大集（Big set）若 $S \not\subset V \ \forall V \in \mathcal{F}$。換句話說，$\mathcal{F}$ 中沒有人能吞下 S。

再打一個比方，$\mathcal{F}$ 表現今活在地球上的動物，S_1 是一個大西瓜，人雖吞不了它，但大象應該可以吞下它，因此 S_1 對 $\mathcal{F}$ 而言不是一個超大集。

S_2 是一頭山豬，大象要吞下它也許有困難，但大蟒蛇卻以它為獵物，因此 S_2 對 $\mathcal{F}$ 而言也不是超大集。

S_3 是頭大公象，$\mathcal{F}$ 中最大的嘴巴－藍鯨之嘴，看了也要退避三舍，S_3 對 $\mathcal{F}$ 而言應該是超大集。當然 S_4，表 101 大樓，顯然對 $\mathcal{F}$ 是一個超大集了。

Lebesgue 根據 A 為 sequentially compact 的特性，証明 $\mathcal{F}$ 的 Lebesgue number 存在，令其為 λ，再以 $\{B_\epsilon(x) | x \in A\}$，$\epsilon < \lambda$ 去覆蓋 A，根據 Lemma 6.3.1，存在有窮個 ϵ-ball 覆蓋住

A，令其為 $\{B_\epsilon(x_i)\}_{i=1}^n$，而每個 $B_\epsilon(x_i)$ 又可被 $\mathcal{F}$ 中某一 open ball V_i 吞下，因此 $\{V_i\}_{i=1}^n$ 就蓋住了 A。

以下循此脈絡逐一証明。

Lemma 6.3.2

(x,d) 為 metric space $A \subset X$ 為 sequentially compact，$\mathcal{F}$ 為 A 上的一族 open covering，則 $\mathcal{F}$ 的 Lebesgue number 存在

証： 令 $\rho = \inf\{\text{diam}S | S\text{對 } \mathcal{F} \text{ 是一個超大集}\}$

欲証 $\rho > 0$

如能證明這一點，則 $\lambda = \rho/2$ 即為 Lebesgue number

因 $\epsilon < \lambda$，則 $B_\epsilon(x)$ 的直徑 $=2\epsilon < \rho$ 故 $B_\epsilon(x)$ 非超大集，因此存在 $V \in \mathcal{F}$ 使 $B_\epsilon(x) \subset V$

假設 $\rho = 0$，

根據 ρ 的定義 $\forall n\ \exists$ 超大集 S_n 使 $\text{diam}S_n < \frac{1}{n}$。

S_n 為超大集，$S_n \neq \emptyset$，任取 $x_n \in S_n$ 則 $\{x_n\} \subset A$，A 為 sequentially compact，故 $\{x_n\}$ 有收斂子點列 $x_{n_k} \to x \in A$

$\mathcal{F}$ 蓋住 A $\therefore \exists V \in \mathcal{F}$ 使 $x \in V$

V open，$\exists \delta > 0$ 使 $B_\delta(x) \subset V$

$x_{n_k} \to x \Rightarrow \exists N_1$ 使 $x_{n_k} \in B_{\delta/2}(x)$ 當 $k > N_1$

$x_{n_k} \in S_{n_k}$，$\text{diam}S_{n_k} < \frac{1}{n_k}$，$\exists N_2$ 使 $\frac{1}{n_k} < \frac{\delta}{2}$ 當 $k > N_2$

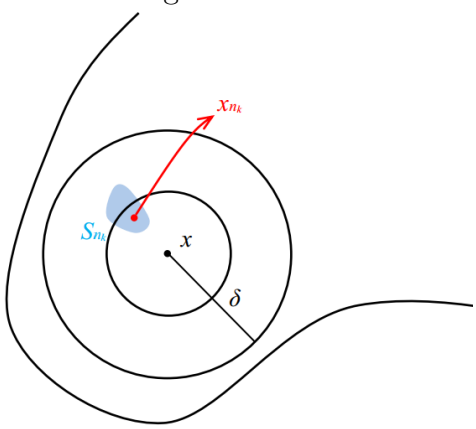
取 $N = \text{Max}\{N_1, N_2\}$ 於是

$k > N \Rightarrow x_{n_k} \in B_{\delta/2}(x)$

$x_{n_k} \in S_{n_k}$，$\text{diam}S_{n_k} < \frac{1}{n_k} < \frac{\delta}{2} \Rightarrow S_{n_k} \subset B_\delta(x) \subset V$

S_{n_k} 被 V 所吞食，怎麼能稱為超大？矛盾！□

Figure 6.6:



有了這個 Lemma 我們回過頭來證明定理 6.3.4:
Sequentially compact $\Rightarrow$ Compact

證： 設 $\mathcal{F}$ 為 A 上的一族 open covering

A 為 sequentially compact，根據 Lemma 6.3.3，$\mathcal{F}$ 的 Lebesgue number 存在，令其為 λ。給定 $\epsilon < \lambda$，

令 $\mathcal{G} = \{B_\epsilon(x) | x \in A\}$ 則 $\mathcal{G}$ 覆蓋住 A

再根據 Lemma 6.3.2，$\exists$finite ϵ balls $\{B_\epsilon(x_i)\}_{i=1}^n$ 覆蓋 A

而 $\epsilon < \lambda$，$\forall B_\epsilon(x_i)$ $\exists V_i \in \mathcal{F}$ 使 $B_\epsilon(x_i) \subset V_i$

因此 $\{V_i\}_{i=1}^n$ 覆蓋了 A，故 A 為 compact。$\square$

例 1: l^2 中的單為閉球非 compact，因其非 sequentially compact（Definition6.3.3，例 2）

例 2: $C[0,1]$ 中的單位閉球非 comapct，因其非 sequentially compact（習題）

例 3: l^2 中的 Hilbert cube $E = \{(x_1, x_2, \cdot) | \, |x_n| \leq \frac{1}{n}\}$ 為 sequentially compact

分析： 設 $\mathbf{x}_n = (x_{n,1}, x_{n,2}, \cdots) \in E$
欲証 $\{\mathbf{x}_n\}$ 有收斂子點列。

1. 前進尋點

   (i) $\{\mathbf{x}_n\}$ 的第一座標 $\{x_{n,1}\}_{n=1,2,\cdots}$ 被 1 所囿，
   依 B-W 定理，有收斂子點列 $\{x_{n_j,1}\}_j$，$\lim_{j\to\infty} x_{n_j,1} = y_1$

   (ii) $\mathbf{x}_{n_j}$ 的第二座標 $x_{n_j,2}$ 被 $\frac{1}{2}$ 所囿，
   依 B-W 定理有收斂子點列 $\{x_{n_{j_l},2}\}$ $\lim_{l\to\infty} x_{n_{j_l},2} = y_2$
   當然 $x_{n_{j_l},1} \to y_1$

   (iii) 依此類推以致無窮，得點
   $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots)$ 則 $y \in E$

2. 後退覓列
   $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2$，給定 k，令
   $\mathbf{x}^{(k)} = (x_1, x_2, \cdots, x_k, 0, \cdots)$
   $\tilde{\mathbf{x}}^{(k)} = (0, 0, \cdots, 0, x_{k+1}, x_{k+2}, \cdots)$

   (i) $\{\mathbf{x}_n\}$ 的第一座標有子點列收斂到 y_1
   $\exists \mathbf{y}_1 \in \{\mathbf{x}_n\}$, $\mathbf{y}_1 = (y_{1,1}, y_{1,2}, \cdots)$
   $|y_{1,1} - y_1| < \frac{1}{2}$

   (ii) $\{\mathbf{x}_n\}$ 的第一第二座標分別收斂到 y_1, y_2
   $\exists \mathbf{y}_2 \in \{\mathbf{x}_n\}$, $\mathbf{y}_2 = (y_{2,1}, y_{2,2}, \cdots) = \mathbf{y}_2^{(2)} + \tilde{\mathbf{y}}_2^{(2)}$
   使 $\|\mathbf{y}_2^{(2)} - \mathbf{y}^{(2)}\| < \frac{1}{2^2}$

(iii) 依此類推以致無窮，$\forall k\ \exists \mathbf{y}_k \in \{\mathbf{x}_n\}$ 使
$\|\mathbf{y}_k^{(k)} - \mathbf{y}^{(k)}\| < \frac{1}{2^k}$

3. 點列 $\{\mathbf{y}_k\}$ 收斂到 $\mathbf{y}$。
理由：給定 $\epsilon > 0\ \exists N$ 使 $\sum_{n>N} \frac{1}{n^2} < \frac{\epsilon}{3}$ 且 $\frac{1}{2^N} < \frac{\epsilon}{3}$
N 既定，則有

$$\begin{aligned}\|\mathbf{y}_k - \mathbf{y}\| =& \|\mathbf{y}_k^{(k)} - \mathbf{y}^{(k)}\| + \|\tilde{\mathbf{y}}_k^{(k)} - \tilde{\mathbf{y}}^{(k)}\| \\ &< \frac{1}{2^k} + 2 \cdot \sum_{n>k} \frac{1}{n^2} \\ &< \frac{\epsilon}{3} + 2 \cdot \frac{\epsilon}{3} = \epsilon, \qquad 當 k > N\end{aligned}$$

故 E 為 Sequentially compact。□

例 4: 承上，E 為 compact，因其為 sequentially compact。
習題四中第 7 題要同學們證明 E 為 compact，請同學們直接用 covering 的論述證明之。兩種方法，各有千秋。

6.4 連通集（connected sets）

6.4.1 分離集（separated sets）

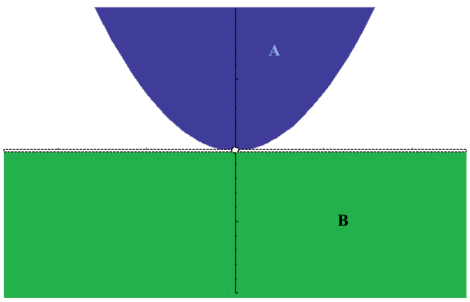
Definition 6.4.1
(X, d) 為一 metric space，$A, B \subset X$ $A, B \neq \emptyset$
我們稱 A, B 二集合為分離，若 $\bar{A} \cap B = \emptyset$ 且 $A \cap \bar{B} = \emptyset$

例 1: 在 $\mathbb{R}$ 中，$(-1, 0)$ 與 $(0, 1)$ 分離。

例 2: 在 $[0, 1]$ 中有理點集與無理點集非分離。

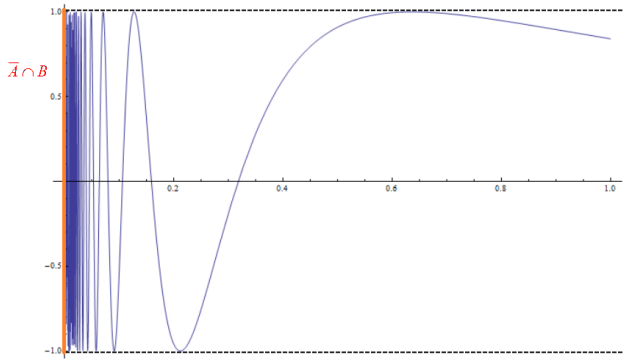
例 3: 在 $\mathbb{R}^2$ 中，$A = \{(x, y) | y > x^2\}$，$B = \{(x, y) | y < 0\}$ 二集合分離。（圖6.7）

Figure 6.7:



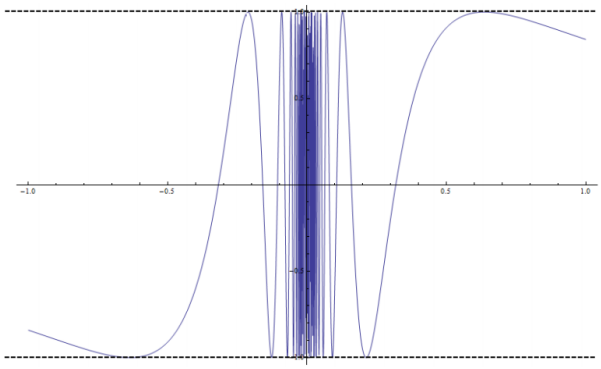
例 4: 在 $\mathbb{R}^2$ 中，$A = \{(x, y) | x = 0\}$ 與 $B = \{(x, y) | y = \sin\frac{1}{x},\ 0 < x \leq 1\}$ 非分離，因 $\bar{A} \cap B = \{x, y) | -1 \leq y \leq 1\} \neq \emptyset$（圖6.8）

Figure 6.8: $\sin\frac{1}{x}$



例 5: 在 $\mathbb{R}^2$ 中，$A=\{(x,y)|y=\sin\frac{1}{x},\ 0<x\le 1\}$ 與 $B=\{(x,y)|y=\sin\frac{1}{x},\ -1\le x<0\}$ 分離，因 $\bar{A}\cap B=\emptyset$（圖6.9）

Figure 6.9: $\sin\frac{1}{x}$



Theorem 6.4.1 A,B 分離，$\Leftrightarrow\exists$ 互不相交的開集 U,V 使 $A\subset U$ 且 $B\subset V$

証：

$(\Rightarrow)$ A,B 分離

(i) $A\cap\bar{B}=\emptyset\Rightarrow A\subset\bar{B}^c$

$\bar{B}^c$ 為開集，$\forall x\in A\ \exists B_{r(x)}(x)\subset\bar{B}^c$

令 $U=\bigcup_{x\in A}B_{r(x)/2}(x)$ 則 U 為開集，$A\subset U$

(ii) $\bar{A}\cap B=\emptyset\Rightarrow B\subset\bar{A}^c$

$\bar{A}^c$ 為開集，$\forall y\in B\ \exists B_{r(y)}(y)\subset\bar{A}^c$

令 $V=\bigcup_{y\in A}B_{r(y)/2}(y)$ 則 V 為開集，$B\subset V$

以下証明 $U\cap V=\emptyset$

若不然，$\exists z\in U\cap V$

$z\in U\Rightarrow\exists x\in A$ 使 $z\in B_{r(x)/2}(x)$

$z\in V\Rightarrow\exists y\in B$ 使 $z\in B_{r(y)/2}(y)$

$\Rightarrow d(y,x) \leq d(y,z) + d(z,x) < \frac{1}{2}r(y) + \frac{1}{2}r(x)$

$\leq \text{Max}\{r(x), r(y)\} = r(x)$，好比說。$\Rightarrow y \in B_{r(x)}(x)$

此為不可能，因 $B_{r(x)}(x) \subset \bar{B}^c$，而 $y \in B$

故 $U \cap V = \emptyset$

($\Leftarrow$) $A \subset U$，$U \cap V = \emptyset \Rightarrow A \subset V^c$

V open，$\therefore V^c$ 為 closed $\Rightarrow \bar{A} \subset \bar{V^c} = V^c$

而 $B \subset V \therefore \bar{A} \cap B = \emptyset$

同理，$\bar{B} \cap A = \emptyset$

故 A, B 分離。$\square$

Definition 6.4.2 連通集（connected sets）

(X, d) metric space, $E \subset X$ 我們稱 E 為連通集，若 $E \neq A \cup B$，A, B 分離。

例： $E = [0,1]$ 中的無理點集非連通。

說明：

在 $(0,1)$ 中任取一有理數 r

令 $A = E \cap (-\infty, r)$，$B = E \cap (r, \infty)$

則 $E = A \cup B$

又 $A \subset (-\infty, r)$，$B \subset (r, \infty)$

$(-\infty, r) \cap (r, \infty) = \emptyset$

$\therefore A, B$ 分離。

Theorem 6.4.2

E_1, E_2 為連通集，E_1, E_2 非分離，則 $E_1 \cup E_2$ 為連通集。

証： 若不然，$\exists$ 分離集 A, B 使 $E_1 \cup E_2 = A \cup B$

E_1, E_2 非分離，$\therefore$「$A \neq E_1$ 或 $B \neq E_2$」或「$A \neq E_2$ 或 $B \neq E_1$」

不妨假設前者：$A \neq E_1$ 或 $B \neq E_2$

不妨又假設前者：$A \neq E_1$，有二種情形

(i) $A \cap E_1 \neq \emptyset$

$\because A \neq E_1 \therefore B \cap E_1 \neq \emptyset$

令 $A_1 = A \cap E_1$,$B_1 = B \cap E_1$

則 $E_1 = A_1 \cup B_1$

$\bar{A}_1 \cap B_1 = \overline{A \cap E_1} \cap B_1 \subset \bar{E}_1 \cap \bar{A} \cap B = \emptyset$ 因 $\bar{A} \cap B = \emptyset$

$A_1 \cap \bar{B}_1 = A_1 \cap \overline{B \cap E_1} \subset A \cap \bar{B} \cap \bar{E}_1 = \emptyset$ 因 $A \cap \bar{B} = \emptyset$

A_1, B_1 分離了 E_1，違背了 E_1 為連通集的設定。

(ii) $A \cap E_1 = \emptyset$

$\Rightarrow A \subset E_2$，此時又可分兩情形來討論

(a) $A \neq E_2$

則 $B \cap E_2 \neq \emptyset$。令 $A_2 = A \cap E_2$，$B_2 = B \cap E_2$

仿照 (i) 中的論述得 E_2 非連通，矛盾。

(b) $A = E_2$

$A \cap B = \emptyset \Rightarrow B \subset E_1$

E_1, E_2 非分離，$\therefore B \neq E_1$

$\Rightarrow B \subsetneq E_1 \ \Rightarrow A \cap E_1 \neq \emptyset$ 此為 (i) 的情況，得証。□

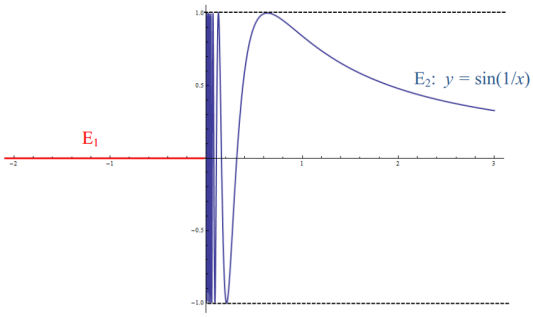
例： $E_1 = \{(x, 0) | x \leq 0\}$

$E_2 = \{(x, y) | y = \sin \frac{1}{x},\ x > 0\}$（圖6.10）

顯然 E_1, E_2 為連通集，$\bar{E}_2 \cap E_1 = \{0\} \neq \emptyset$

E_1, E_2 非分離，故 $E_1 \cup E_2$ 為連通集。

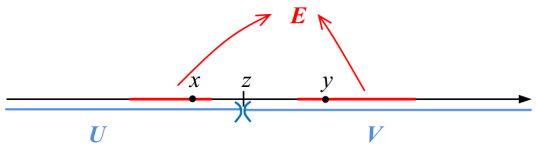
Figure 6.10:



以下我們來探討一下 $\mathbb{R}$ 上的連通集

Theorem 6.4.3 $E \subset \mathbb{R}$ 為連通 $\Leftrightarrow$ 區間 $(x, y) \subset E \quad \forall x, y \in E$

Figure 6.11:



証：

($\Rightarrow$) 若 $\exists x, y \in E$ 使 $(x, y) \not\subset E$

則 $\exists z \in (x, y),\ z \notin E$

令 $U = (-\infty, z),\ V = (z, \infty)$

$A = E \cap U$, $B = E \cap V$ 則 $E = A \cup B$

又 $A \subset U$，$B \subset V$，U, V 為開集，且 $U \cap V = \emptyset$

$\Rightarrow A, B$ 分離，此與 E 為連通集的設定矛盾。

($\Leftarrow$) 若 E 非連通，則 $E = A \cup B$ A, B 分離

$\Rightarrow \exists$ 開集 U, V 滿足 $A \subset U$，$B \subset V$，且 $U \cap V = \emptyset$

取 $x \in A, y \in B$ 依假設，$(x, y) \subset E$

令 $S_1 = (x, y) \cap U \qquad S_2 = (x, y) \cap V$ 則 S_1, S_2 為 $\mathbb{R}$ 中非空開集。

$\Rightarrow S_1$=countable union of disjoint open intervals，S_2 亦然。

$\Rightarrow (x, y) = S_1 \cup S_2$ =countable union of disjoint open intervals，

此互不相交開集數至少 ≥ 2，因 $S_1 \neq \emptyset, S_2 \neq \emptyset$，此為不可能！矛盾。$\square$

例： 設 $\{r_1, r_2, \cdots\}$ 為 $[0, 1]$ 中的有理點集

給定 $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ 令 $I_n(\epsilon) = (r_n - \frac{\epsilon}{2^n}, r_n + \frac{\epsilon}{2^n})$

$B(\epsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n(\epsilon)$，則 $B(\epsilon)$ 非連通集。

理由：就測度的觀點

$m(B(\epsilon)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n(\epsilon)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\epsilon}{2^n} = 2\epsilon < 1$

$m(0, 1) = 1 > m(B(\epsilon))$

因此 $(0, 1) \not\subset B(\epsilon)$，但 $0, 1 \in B(\epsilon)$，故 $B(\epsilon)$ 非連通。$\square$

Definition 6.4.3 遍分離集（totally disconnected sets）

E 為遍分離集，若對任意 $x, y \in E$ 存在分離集 A, B，$E = A \cup B$ 使 $x \in A$, $y \in B$。

例 1: $[0, 1]$ 中的有理點集為遍分離集。

$[0, 1]$ 中的無理點集為遍分離集。

例 2: $[0, 1]$ 中的 Cantor set 為遍分離

理由：Cantor set 不包含任何區間（即使測度 >0 的 Cantor 型集合亦然）。依定理 6.4.2 知其為遍分離。

例 3: $B(\epsilon)$ 如前例，令 $B = \bigcap_{\epsilon > 0} B(\epsilon)$，則 B 為遍分離。

理由：就測度觀點，$m(B) \leq m(B(\epsilon)) \leq 2\epsilon$

ϵ 任意 $\therefore m(B) = 0$。因此，B 不包含任何區間，故知其為遍分離。

例 4: $S = [0, 1] \times [0, 1]$ 的有理座標點集，則 S 為遍分離。

說明：給定 $p, q \in S$，$p = (x_1, y_1)$，$q = (x_2, y_2)$

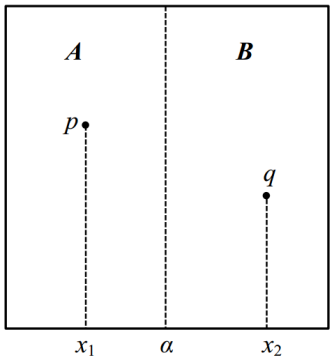
x_i, y_i 為有理數

$p \neq q$ 則 $x_1 \neq x_2$ 或 $y_1 \neq y_2$，不妨設 $x_1 \neq x_2$

於 x_1, x_2 之間任取無理點 α

令 $A = \{(x,y)|(x,y) \in S, x < \alpha\}$
$B = \{(x,y)|(x,y) \in S, x > \alpha\}$
則 $S = A \cup B$，$\bar{A} \cap B = \emptyset$, $A \cap \bar{B} = \emptyset$, $\therefore A, B$ 為分離集。
$p \in A, q \in B$
$\therefore S$ 遍分離。

Figure 6.12:



Definition 6.4.4 連續曲線
設 (X,d) 為 metric space，

$$\phi: \ [a,b] \to X$$

稱 ϕ 在 $x_0 \in [a,b]$ 連續若 $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ 使

$$d(\phi(x), \phi(x_0)) < \epsilon \qquad 當 |x - x_0| < \delta, \ x \in [a,b]. \tag{8}$$

稱 ϕ 在 $[a,b]$ 上連續，若 ϕ 在 $[a,b]$ 上每一點都連續。
ϕ 在 $[a,b]$ 上連續，稱 $\Gamma = \{\phi(x)|x \in [a,b]\}$ 為 X 中的連續曲線。

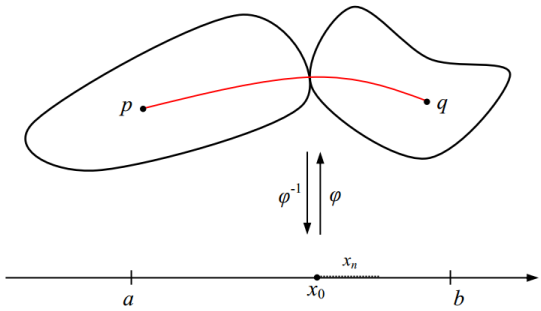
Definition 6.4.5 弧連通集（Path connected sets）(X,d) 為一 metric space，$E \subset X$，稱 E 為 path connected 若對任意 $p, q \in E$，恆存在一連續曲線 $\Gamma \subset X$ 連接 p, q。
<u>Remark</u>: connected$\not\Rightarrow$ path connected

例： $E_1 = \{(x,0) \mid x \leq 0\}$，$E_2 = \{(x,y) \mid y = \sin\frac{1}{x}, x > 0\}$
$E = E_1 \cup E_2$ 為 connected，
任取 $p \in E_1$，$q \in E_2$，不存在連續曲線 $\Gamma \subset E$ 連接 p, q，故 E 非 path connected

Theorem 6.4.4 path connected $\Rightarrow$ connected
設 (X,d) 為 metric space，$E \subset X$ 為 path connected，則 E 為 connected

証： 若不然，$E = A \cup B$；A, B 分離
任取 $p \in A$, $q \in B$ 因 E 為 path connected，故存在連續曲線 $\Gamma \subset E$ 連接 p, q

Figure 6.13:



令 $\Gamma_A = \Gamma \cap A$, $\Gamma_B = \Gamma \cap B$，則 $\Gamma = \Gamma_A \cup \Gamma_B$

令 $\phi:\ [a,b] \to \Gamma$ 表此連續曲線，$\phi(a) = p, \phi(b) = q$

$[a,b] = \phi^{-1}(\Gamma) = \phi^{-1}(\Gamma_A \cup \Gamma_B) = \phi^{-1}(\Gamma_A) \cup \phi^{-1}(\Gamma_B)$

令 $x_0 = \sup \phi^{-1}(\Gamma_A)$

(i) $x_0 \in \phi^{-1}(\Gamma_A)$

則 $\phi(x_0) \in \Gamma_A \subset A$

$\exists x_n \searrow x_0;\ x_n \in (x_0, b]$

ϕ continuous at $x_0 \Rightarrow \phi(x_n) \to \phi(x_0)$

$\phi(x_n) \in \Gamma_B \subset B$

$\Rightarrow \phi(x_0) \in \bar{B} \Rightarrow A \cap \bar{B} \neq \emptyset$ 矛盾！因 A, B 分離

(ii) $x_0 \in \phi^{-1}(\Gamma_B)$

同理可証 $\bar{A} \cap B \neq \emptyset$ 亦得矛盾。

故 E 為 connected。□

Theorem 6.4.4

(X, d) 為 metric space，X 本身為連通集，$A \subset X$。若 A 既 open 又 closed，則 $A = \emptyset$ 或 $A = X$。

証： 設 $A \neq \emptyset$

若 $A \neq X$，令 $B = A^c$，則 $X = A \cup B$，$A, B \neq \emptyset$

(i) A 為 closed $\Rightarrow \bar{A} \cap B = A \cap B = \emptyset$

(ii) A 為 open $\therefore B$ 為 closed $\Rightarrow A \cap \bar{B} = A \cap B = \emptyset$

(i)(ii)$\Rightarrow A, B$ 為分離集，且 $X = A \cup B$，違背了 X 為連通的設定，矛盾。□

Theorem 6.4.5 於 $\mathbb{R}^n$ 中，open+connected $\Rightarrow$ path connected。

證： 設 $S \neq \emptyset$ 為 $\mathbb{R}^n$ 中開連通集

任取 $x_0 \in S$，令

$$A = \{\mathbf{x} | \text{存在連續曲線連接 } \mathbf{x} \text{ 和 } \mathbf{x}_0 \text{ 於 } S \text{ 中}\}$$

欲証 $A = S$

依據定理 6.4.4，我們只須證明 A 為非空，且 A 在 S 中既 open 又 closed 即可。依此證明如下：

(i) Claim: $A \neq \emptyset$。

$\mathbf{x}_0 \in S$，S 為 open，$\therefore \exists B_r(\mathbf{x}_0) \subset S$

$\forall \mathbf{y} \in B_r(\mathbf{x}_0)$，$\overline{\mathbf{xy}}$ 表連接 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 兩點的線段，顯然是連續曲線，且 $\overline{\mathbf{xy}} \subset B_r(\mathbf{x}_0) \subset S$

故 $B_r(\mathbf{x}_0) \subset A \therefore A \neq \emptyset$ □

(ii) Claim: A 為 open。

$\forall \mathbf{y} \in A$，欲証 $\exists \delta > 0$ 使 $B_\delta(\mathbf{y}) \subset A$

由於 $\mathbf{y} \in A$，依 A 的設定，$\exists$ 連續曲線 $\Gamma \subset S$ 連接 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{x}_0$

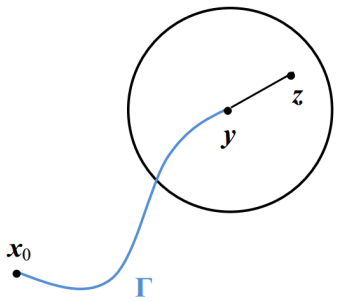
又 S 為 open，$\exists B_\delta(\mathbf{y}) \subset S$

對任意 $\mathbf{z} \in B_\delta(\mathbf{y})$，$\overline{\mathbf{yz}} \subset B_\delta(\mathbf{y}) \subset S$ 為連續

令 $\Gamma' = \Gamma \cup \overline{\mathbf{yz}}$，則 $\Gamma' \subset S$

Γ' 為連續曲線連接 $\mathbf{x}_0$ 和 $\mathbf{z}$，故 $B_\delta(\mathbf{y}) \subset A \therefore A$ 為 open。□

Figure 6.14: A open



(iii) Claim: A 為 closed。

設 $\mathbf{z} \in S$ 為 A 的匯聚點（limit point）

S 為 open $\Rightarrow \exists B_\delta(\mathbf{z}) \subset S$

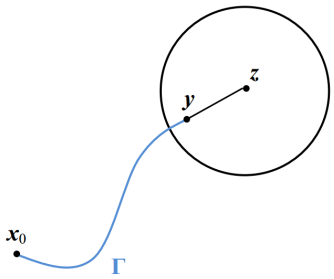
$\mathbf{z}$ 為 A 的匯聚點，$\therefore \exists \mathbf{y} \in B_\delta(\mathbf{z}) \cap A$，$\mathbf{y} \neq \mathbf{z}$

$\mathbf{y} \in A \Rightarrow \exists$ 連續曲線 $\Gamma \subset S$，Γ 連接 $\mathbf{x}_0$ 和 $\mathbf{y}$

令 $\Gamma' = \Gamma \cup \overline{\mathbf{yz}} \subset S$

則 Γ' 為連接 $\mathbf{z}$ 和 $\mathbf{x}_0$ 的連續曲線。故 $\mathbf{z} \in A \therefore A$ 為 closed。□

Figure 6.15: A closed



6.5 完備賦距空間（Complete metric space）

在 $\mathbb{R}^n$ 中，因有 Bolzano-Weierstrass 定理，我們有：

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n\text{存在} \Leftrightarrow \{\mathbf{x}_n\} \text{ 為 Cauchy sequence.}$$

"$\Rightarrow$" 為純代數運算，在 metric space 中仍然成立。
"$\Leftarrow$" 則必須用到 B-W 定理，此為 $\mathbb{R}^n$ 中實數完備的特性，於一般 metric space 中不一定成立。

例： 設 f 為定義在 $[0,\infty)$ 的嚴格遞增函數，$f(0)=0,\ 0\le f(x)<1\ \forall x\in[0,\infty)$
$x,y\in[0,\infty)$ 定義

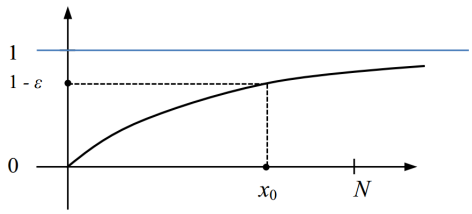
$$d(x,y)=|f(x)-f(y)|$$

則 ($[0,\infty), d$) 為一 metric space
給定 $\epsilon>0$，令 $x_0=f^{-1}(1-\epsilon)$
取 $N>x_0$，則

$$|f(x)-f(y)|<\epsilon \quad \text{當} x,y>N$$

即 $d(x,y)<\epsilon$ 當 $x,y>N$
因此自然數列 $\{n\}_{n=1,2,\cdots}$ 為 Cauchy sequence，但 $\lim_{n\to\infty} n$ 不存在。

Figure 6.16: Non-complete metric space



Definition 6.5.1
如果一個 metric space 其上的 Cauchy sequence 恆收斂，這種空間就叫完備賦距空間（complete metric space）

例 1: 在 $\mathbb{R}$ 上賦予其孤獨度規

$$d(x,y)=\begin{cases}1 & 當 x\neq y\\ 0 & 當 x=y\end{cases}$$

則此空間的 Cauchy sequence 從某項以後必須盡相同，因此收斂，故 $(\mathbb{R},d)$ 為完備賦距空間。

例 2: $\mathbb{Q}$ 表 $\mathbb{R}$ 中的有理點集，$d(x,y)=|x-y|$

則 $(\mathbb{Q},d)$ 非完備。理由如下：

在 $\mathbb{R}$ 中任取有理點列 $\{x_n\}, x_n\to\sqrt{2}$，則 $\{x_n\}$ 為 $\mathbb{Q}$ 中的 Cauchy sequence，但 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 在 $\mathbb{Q}$ 中並不存在。

Theorem 6.5.1 l^p, $p\geq 1$ 為 complete。

分析： $l^p=\{\mathbf{x}|\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots),\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<\infty\}$

令 $\|\mathbf{x}\|=(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p)^{1/p}$

$\mathbf{x}^{(k)}=(x_1,x_2,\cdots,x_k,0\cdots)$ $\quad$ $\mathbf{x}$ 的前 k 維座標

$\tilde{\mathbf{x}}^{(k)}=(0,0,\cdots,0,x_{k+1},x_{k+2}\cdots)$ $\quad$ $\mathbf{x}$ 的 k 維之後的座標

則 $\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(k)}+\tilde{\mathbf{x}}^{(k)}$, $\|\tilde{\mathbf{x}}^{(k)}\|\leq\|\mathbf{x}\|$

設 $\{\mathbf{x}_n\}\subset l^p$ 為一 Cauchy sequence，欲証：$\exists\mathbf{x}\in l^p$ 使 $\lim_{n\to\infty}\mathbf{x}_n=\mathbf{x}$。

1. $\{\mathbf{x}_n\}$ 為 Cauchy sequence，$\exists M$ 使 $\|\mathbf{x}_n\|\leq M$, $\forall n=1,2\cdots$（留作習題）

2. 前進尋點。

   $|x_{n,1}|\leq\|\mathbf{x}_n\|\leq M$，依 B-W 定理，$\{x_{n,1}\}$ 有收斂子序列 $\{x_{n_k,1}\}$, $x_{n_k,1}\to x_1$ 當 $k\to\infty$

   $|x_{n_k,2}|\leq\|\mathbf{x}_{n_k}\|\leq M$，依 B-W 定理，$\{x_{n_k,2}\}$ 有收斂子序列 $\{x_{n_{k_l},2}\}$, $x_{n_{k_l},2}\to x_2$ 當 $l\to\infty$

   依此類推以致無窮，得點 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots)$

3. 後退覓列。

   $\forall k\ \exists\mathbf{x}_{n_k}$ 使 $\|\mathbf{x}_{n_k}^{(k)}-\mathbf{x}^{(k)}\|<\frac{1}{2^k}$，$k=1,2,\cdots$

   令 $\mathbf{y}_k=\mathbf{x}_{n_k}$

   則點列 $\{\mathbf{y}_n\}\subset\{\mathbf{x}_n\}$ 滿足 $\mathbf{y}_n^{(k)}\to\mathbf{x}^{(k)}$ 當 $n\to\infty$

4. $\mathbf{x}\in l^p$

   $\|\mathbf{x}\|=(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p)^{1/p}=\left(\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}|x_i|^p\right)^{1/p}=\lim_{k\to\infty}\|\mathbf{x}^{(k)}\|$

   而 $\|\mathbf{x}^{(k)}\|=\lim_{n\to\infty}\|\mathbf{y}_n^{(k)}\|\leq M$ 故 $\|\mathbf{x}\|\leq M$

5. $\{\mathbf{y}_n\}\subset\{\mathbf{x}_n\}\therefore\mathbf{y}_n$ 為 Cauchy sequence

   $\exists\{\mathbf{y}_n\}$ 的子序列 $\{\mathbf{y}_{n_i}\}$ 使 $\|\mathbf{y}_{n_{j+1}}-\mathbf{y}_{n_j}\|<\frac{1}{2^j}$（習題）

6. 我們想證明: $\lim_{n\to\infty}\mathbf{y}_n=\mathbf{x}$

   如此 Cauchy sequence $\{\mathbf{x}_n\}$ 有一子序列 $\{\mathbf{y}_n\}$ 收斂到 $\mathbf{x}$，則整個序列收斂到 $\mathbf{x}$（習題，見 $\mathbb{R}$ 上的證明）

7. $\|\mathbf{y}_n-\mathbf{x}\|\le\|\mathbf{y}_n^{(k)}-\mathbf{x}^{(k)}\|+\|\tilde{\mathbf{y}_n}^{(k)}\|+\|\tilde{\mathbf{x}}^{(k)}\|=$(1)+(2)+(3)，$k$ 待定

   先來看 (3):

   由於 $\mathbf{x}\in l^p$，給定 $\epsilon>0$ $\exists N_1$ 使 $\|\tilde{\mathbf{x}}^{(k)}\|<\frac{\epsilon}{4}$ 當 $k>N_1$

   為了處理 (2) 我們不妨設 N_1 夠大同時使 $\sum_{n\ge N1}\frac{1}{2^n}<\frac{\epsilon}{4}$

   (1),(2) 是比較麻煩的兩項：

   固定 k，$\lim_{n\to\infty}\|\mathbf{y}_n^{(k)}-\mathbf{x}^{(k)}\|=0$

   固定 n，$\lim_{k\to\infty}\|\tilde{\mathbf{y}}_n^{(k)}\|=0$ （$\because \mathbf{y}_n\in l^p$）

   k,n 之間如何協調？

8. 草船借箭

$$
\begin{aligned}
(2)=\|\tilde{\mathbf{y}}_n^{(k)}\| &\le \|\tilde{\mathbf{y}}_{N_1}^{(k)}\|+\|\tilde{\mathbf{y}}_{N_1+1}^{(k)}-\tilde{\mathbf{y}}_{N_1}^{(k)}\|+\cdots+\|\tilde{\mathbf{y}}_n^{(k)}-\tilde{\mathbf{y}}_{n-1}^{(k)}\| \\
&\le \|\tilde{\mathbf{y}}_{N_1}^{(k)}\|+\sum_{j>N_1}\|\tilde{\mathbf{y}}_{j+1}^{(k)}-\tilde{\mathbf{y}}_j^{(k)}\| \\
&\le \|\tilde{\mathbf{y}}_{N_1}^{(k)}\|+\sum_{j>N_1}\frac{1}{2^j} \\
&\le \|\tilde{\mathbf{y}}_{N_1}^{(k)}\|+\frac{\epsilon}{4}
\end{aligned}
$$

   $\tilde{\mathbf{y}}_{N_1}^{(k)}$ 好比草船，要借到箭還得曹操幫忙。好在曹操很夠意思：

   N_1 既定，$\mathbf{y}_{N_1}\in l^p\therefore\exists K>N_1$ 使

$$\|\tilde{\mathbf{y}}_{N_1}^{(k)}\|<\frac{\epsilon}{4}\qquad 當 k>K>N_1$$

   這個 K 就是曹操了！

9. 萬事具備，只欠東風

   選定 $k>K>N_1$ 我們有

$$\|\mathbf{y}_n-\mathbf{x}\|\le\|\mathbf{y}_n^{(k)}-\mathbf{x}^{(k)}\|+\frac{\epsilon}{4}+\frac{\epsilon}{4}+\frac{\epsilon}{4}$$

   而 $\lim_{n\to\infty}\|\mathbf{y}_n^{(k)}-\mathbf{x}^{(k)}\|=0$

   因此存在 N（因 k 而定）使

$$\|\mathbf{y}_n^{(k)}-\mathbf{x}^{(k)}\|<\epsilon/4\qquad 當 n>N$$

   故 $\|\mathbf{y}_n-\mathbf{x}\|<\epsilon$ 當 $n>N$

   火燒連環船，曹操敗走華容道，天下三分成定局。□

   那個 N，保証天下三分成定局的時間點，有曹操的影子。

Remark

1. l^p 是一個向量空間，其上可定義 norm（賦範）：$\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p}$ 滿足

   (i) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$，$\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$

   (ii) $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

   (iii) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ 當 $p \geq 1$

   (iii) 稱為 Minkowsky 不等式，在談 convex function 時我們將會證明它
   上面的定理告訴我們 l^p 是 complete，這類空間稱為 Banach space:
   Banach space = complete normed linear space（完備賦範向量空間）
   賦範 $\Rightarrow$ 賦距　定義 $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$

2. Banach space 在數學上扮演極其重要的角色。數學上有一門課叫做泛函分析（functional analysis）就是在討論其上的 linear functional 及 operator 的特性。它在研究 Harmonic Analysis 及 Partial Differential Equations 的工作上是一個必備的工具。常見的古典 Banach space 有：

   (a) l^p, $p \geq 1$

   (b) $C[a,b] = \{f | f$ 為 $[a,b]$ 上的連續函數$\}$
   $\|f\| = \max_{a\leq x\leq b}|f(x)|$
   $C[a,b]$ 的完備性我們將於函數列（sequence of function）一章中證明它。

   (c) $L^p[a,b] = \{f | \int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x < \infty\}$ $p \geq 1$
   $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}$
   其上三角不等式：

   $$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

   稱為 Minkowsky 不等式。這裡要注意的是 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 指的是 Lebesgue 積分。對 Lebesgue 積分 $L^p[a,b]$ 才具有完備性。
   L^p 空間的完備性數學上稱之為 Riesz-Fischer 定理，任何實分析的課本都會證明它。同學們若有興趣，可參閱 Royden 的 Real Analysis, Chapter 6。

Theorem 6.5.2 compact $\Rightarrow$ complete
設 (X,d) 為一 compact metric space，則 (X,d) 為 complete metric space。

說明： compact 和 sequentially compact 等價。設 $\{x_n\}$ 為一 Cauchy sequence，則 $\{x_n\}$ 有收斂子點列 $\{x_{n_k}\}$，$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in X$。因此，整個點列 $\{x_n\}$ 收斂到 x。（習題）

6.6 Baire's Category Theorem

Complete metric space 因 Cauchy sequence 必收斂，因此它裡面的東西在拓樸的眼光下（收斂是一種拓樸行為）不能太少。什麼叫在拓樸的眼光下不能太少呢？Baire 引進如下概念：

Definition 6.6.1 遍稀疏（nowhere dense）

設 (X, d) 為一 metric space，$E \subset X$，稱 E 為遍稀疏（nowhere dense）若 $\bar{E}$ 不含任何 open ball。

例 1: E 表 $[0, 1]$ 中的 Cantor set，$\bar{E} = E \not\supset$any open interval，故遍稀疏。

例 2: $\mathbb{Q}$ 表 $\mathbb{R}$ 中有理點集。有理點集可數，每一點都是遍稀疏，故 $\mathbb{Q}$ 為第一類集。

例 3: $\mathbb{R}^n$ 中任意有窮點集為遍稀疏

例 4: $\mathbb{R}$ 中賦予孤獨度規

$E = \{x\}$ 為孤立點集，$\bar{E} = E \supset B_{1/2}(x)$

因此，E 非遍稀疏。（真是怪哉！）明明沒什麼料（$\mathbb{R}$ ），它自己卻覺得富有。

遍稀疏表示在拓樸的眼光下沒什麼料。$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$，$E_n$ 遍稀疏，那麼 A 也沒什麼料。這種集合，Baire 稱它為第一類集（**first category**）。

例 1: $\mathbb{Q}$ 表 $\mathbb{R}$ 中有理點集。

$\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$，非遍稀疏

例 2: $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ 為第一類集

因 $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$（在 $\mathbb{R}^2$ 的度規下取 closure）$\not\supset$ any ball in $\mathbb{R}^2$

$\therefore \mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中遍稀疏，乃第一類集。

同理，$k < n$，$\mathbb{R}^k$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中為第一類集。

例 3: $\mathbb{R}$ 中賦予其孤獨度規。

在此情況下，$\mathbb{R}$ 中任何孤立點都不是第一類集，因此，任何非空子集都不是第一類集。

Baire 稱非第一類集的集合為第二類集（**second category**）。在拓樸的眼光下第一類集很貧乏，沒什麼料。有人把第一類集稱作 meager set（貧乏集）。第二類集表示有點料，稱 non-meager。

所謂 Baire's category theorem 的內容是：

凡 complete metric space 都是 second category。

即在自己先天所賦予的拓樸眼光下，自我感覺富有！

一個人自我感覺富有是很幸福的人生，所謂知足常樂，天天開心，行所該行，止所該止，面對困難常思解決之道，得意，也不會忘形。因為自己覺得富有，所以樂善好施（陳樹菊女

士）。雖然在比爾蓋茲眼中我並不富有，不過那不重要，我自己覺得富有，我的善和蓋茲同，我的樂也和蓋茲同。

這樣的性格實在太美了，complete metric space 就是這樣的一個人，貝老先生如是告訴我們。貝老先生雖然發現這樣美好性格的人，不過自己本身並不幸福，他年輕的時候就得了一種病叫 Agoraphobia，是一種精神上的疾病，在某種特殊環境下，如空曠的大廳，長廊，橋下 $\cdots$，會不由自主地恐懼起來，35 歲以後這個疾病經常發作，導致他必須從法國 Dijon 大學請長假，50 歲退休，最後流浪在各旅店間，度過他的餘生。

René-Louis Baire （1874-1932），法國數學家。我們今天在這裡紀念他。

例 1: $\mathbb{R}^k$ 為 complete metric space，所以是第二類集。但在 $\mathbb{R}^n$, $n > k$（蓋茲）眼中，他是第一類集。

例 2: A 表 $[0,1]$ 中的無理點集，則 A 為第二類集。
理由：$[0,1]$ 為 complete metric space，故為第二類集。
$[0,1] = A \cup \mathbb{Q}$，$\mathbb{Q}$ 為第一類集，故 A 不可能為第一類集。

例 3: $B_1 = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} \in l^p,\ \|\mathbf{x}\|_p < 1\}$ 為 l^p 中第二類子集，$p \geq 1$。
理由：若 B_1 為第一類集，
則 $B_n = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} \in l^p,\ \|\mathbf{x}\|_p < n\}$ 亦為第一類集
而 $l^p = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \Rightarrow l^p$ 為第一類集，貝老先生說不可，因 l^p 為 complete metric space，矛盾。

Definition 6.6.2 稠密集（dense set）
$A \subset X$，稱 A 在 X 中稠密（dense in X），若 $\bar{A} = X$。
<u>Remark</u>: E 在 X 中遍稀疏（nowhere dense in X）
即 $\bar{E}$ 不含任何 open ball
即任何 open ball$\cap \bar{E}^c \neq \emptyset$
即 $O = \bar{E}^c$ 為 X 中的稠密開集（dense open set）

下面這個定理，其實就是 Baire's category theorem 的另一敘述：
Theorem 6.6.1
設 (X, d) 為一 complete metric space，$O_n,\ n = 1, 2, \cdots$ 為 X 中的 dense ope sets，則 $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ 為 dense in X。
<u>Remark</u>: 「O_n 是 open」這個條件不可少。例如：$Q = [0,1]$ 中有理數集，則 Q dense in $[0,1]$。任取無理數列 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots$，$\alpha_i - \alpha_j \notin Q$ 當 $i \neq j$。令 $A_n = \alpha_n + Q \pmod 1 = \{\alpha_n + r - [\alpha_n + r] \,|r \in Q\}$，其中 $[x]$ 表 x 的整數部分。
則 A_n dense in $[0,1]$，但 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$。
用白話來形容：open 表示處處豐滿，dense open set 表示處處稠密且豐滿的集合，這種集合

的 Countable intersection $\neq \emptyset$

上面那個 A_n 是個瘦皮猴，雖然處處稠密，也是枉然。

分析：

1. 欲証 $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ dense in X，
   即証：$\forall U$ open in X，恆存在 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ 使 $x \in U$
   這個 x 如何尋找？
   當然 X 是 complete metric space 是先天環境好，而 O_n 是 open 是後天條件好，兩這缺一不可。

2. O_1 dense in X，$\therefore \exists x_1 \in U \cap O_1$
   $U \cap O_1$ 為 open，$\therefore \exists r_1 < \frac{1}{2}$ 使 $\overline{B_{r_1}(x_1)} \subset U \cap O_1$，
   令 $B_1 = B_{r_1}(x_1)$

3. O_2 稠密。$\therefore \exists x_2 \in B_1 \cap O_2$
   $B_1 \cap O_2$ 為 open，$\therefore \exists r_2 < \frac{1}{2^2}$ 使 $\overline{B_{r_2}(x_2)} \subset B_1 \cap O_2$
   令 $B_2 = B_{r_2}(x_2)$

4. 依此類推以致無窮，$\exists x_n \in B_{n-1} \cap O_n$ 及 $r_n < \frac{1}{2^n}$，使 $\overline{B_{r_n}(x_n)} \subset B_{n-1} \cap O_n$。
   令 $B_n = B_{r_n}(x_n)$

5. 於是得球套 $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \cdots$, $B_{n-1} \supset \bar{B}_n$
   $B_n \equiv B_{r_n}(x_n)$, $r_n < \frac{1}{2^n}$
   $x_{n+1} \in B_{r_n}(x_n) \Rightarrow d(x_{n+1}, x_n) < \frac{1}{2^n}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty \Rightarrow \{x_n\}$ 為 Cauchy sequence
   X 為 complete $\Rightarrow \exists x \in X$ 使 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

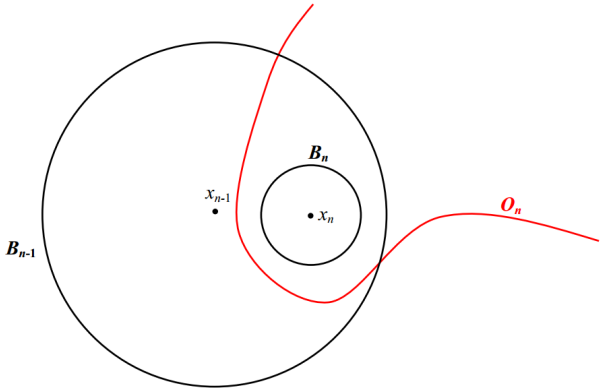
7. $\{x_n, x_{n+1}, \cdots\} \subset B_n$，$\lim_{j\to\infty} x_j = x$
   $\therefore x \in \bar{B}_n \subset B_{n-1} \cap O_n \subset O_n \ \forall n$
   $\therefore x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$
   又 $x \in \bar{B}_1 \subset U \cap O_1 \subset U$ 故 $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ is dense in X。
   上述 B_n 的選取圖示如下：

Theorem 6.6.2

任何完備賦距空間的開集都是第二類集。

說明： 設 (X, d) 為 complete metric space，$U \subset X$ 為 open
$E_1, E_2 \cdots$ 為一組 nowhere dense subsets in X
則 $O_n = \bar{E_n}^c$ 為 dense open set in X

Figure 6.17:



依定理 6.6.2，$\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ is dense in X

$\Rightarrow \exists x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ 且 $x \in U$

$\Rightarrow U \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$

特別當 $U = X$，就是一般常稱的 Baire's category theorem。因其常被引用，特別再陳述於下：

Theorem 6.6.4（Baire's category theorem）

設 (X, d) 為 complete metric space，則 X 為第二類集。

即：$X \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$，其中 E_n 為 nowhere dense。

貝氏類集定理在分析數學上有很多妙用。透過類集的判斷，可以告訴我們什麼是可能，什麼是不可能。

例 1: 設 A 表 $[0, 1]$ 中一切無理點

則 $A \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$，$F_n$ 為閉集

說明： 若 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ 則 $F_n \subset A = [0, 1]$ 中無理點集

F_n 為 closed $\therefore \bar{F}_n = F_n \not\supset$ 任何區間（因 $F \subset A$）

故 F_n 為遍稀疏集

令 $\{r_n\}, n = 1, 2, \cdots$ 表 $[0, 1]$ 中有理點集，則

$$[0, 1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \bigcup_{j=1}^{\infty} \{r_j\}$$

$$= \text{countable union of nowhere dense subsets}$$

違背了貝老先生的叮嚀，因 $[0, 1]$ 為完備賦距空間。□

在習題四中我們曾經有如下問題：

$$令 f(x) = \begin{cases} \frac{1}{p} & x = \frac{q}{p},\ p, q\text{互質正整數} \\ 0 & x\text{為無理數} \end{cases}, 0 \leq x \leq 1$$

則 f 在無理點上連續，在有理點不連續。
現在我們要問：能否造一函數 f，使 f 在有理點連續，在無理點不連續？
下面的例子告訴我們，這種函數是造不出來的。

例 2: 不存在一函數 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$，f 在有理點上連續，在無理點不連續。

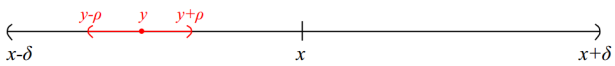
分析：

1. $x\in[0,1]$，令 $I_\delta(x)=(x-\delta,x+\delta)\cap[0,1]$
   $\omega_\delta(x)=\sup_{x,y\in I_\delta}|f(x)-f(y)|$ （f 在 $I_\delta(x)$ 上的振幅

2. 令 $j(x)=\lim_{\delta\to 0}\omega_\delta(x)$ （f 在 $I_\delta(x)$ 上的跳躍）
   則 $j(x)=0\Leftrightarrow f$ 在 x 點連續。

3. 令 $F_n=\{x|j(x)\geq\frac{1}{n}\}$，則 F_n 為 closed
   理由：$x\in F_n^c\ \Leftrightarrow j(x)<\frac{1}{n}$
   $\Rightarrow\exists\delta>0$ 使 $\omega_\delta(x)<\frac{1}{n}$
   取 $y\in I_\delta(x)=(x-\delta,x+\delta)\cap[0,1]\Rightarrow\exists\rho>0$ 使 $(y-\rho,y+\rho)\subset(x-\delta,x+\delta)$

Figure 6.18:



   $\Rightarrow I_\rho(y)\subset I_\delta(x)$
   $\therefore\omega_\rho(y)<\omega_\delta(x)<\frac{1}{n}$
   $\Rightarrow j(y)<\frac{1}{n}\ \forall y\in I_\delta(x)$
   即：$I_\delta(y)\subset F_n^c$，$\therefore F_n^c$ 為 open
   故 F_n 為 closed

4. 若存在這樣的函數 f 則
   $A=\bigcup_{n=1}^\infty F_n$，$A$ 表 [0,1] 中的一切無理點
   上面的例子告訴我們這件事不可能，矛盾。□

當一個函數在某區間 (α,β) 的 n 階導數 $f^{(n)}(x)=0\ \forall x\in(\alpha,\beta)$，則 f 在 (α,β) 上為一多項式，其次數 $\leq n-1$。
今設 f 在 [a,b] 上無窮可導，即 $\forall x\in[a,b]\ \exists n_x$ 使 $f^{(n_x)}(x)=0$。問：f 是否為一多項式？
這是一個相當難的問題，它是貝氏定理的一個典型問題，習題裏面我給了提示，請同學們完成之。
我現在做一個比較簡單的例子。

例 3: 設 f 在 [a,b] 連續，令 $f_1(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, $f_2(x)=\int_a^x f_1(t)\mathrm{d}t,\cdots$
若 $\forall x\in[a,b]$ $\exists n$ 使 $f_n(x)=0$ 則 $f(x)=0$ $\forall x\in[a,b]$。

分析：

1. 令 $A_n=\{x|f_n(x)=0,x\in[a,b]\}$
   依題意，$[a,b]=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$

2. f_n 在 $[a,b]$ 上連續 $\therefore A_n$ 為 closed
   而 $[a,b]$ 為 complete $\therefore$ 不可能每個 A_n 都是遍稀疏
   故 $\exists A_n$，$A_n=\bar{A_n}\supset$ 某個開區間 I_1，
   不妨盡量把 I_1 取大，大到不行，則 $f_n(x)=0\forall x\in I_1$，求導，得 $f(x)=0\forall x\in I_1$

3. 於 $[a,b]-I_1$ 上分別重複上述論證，依此類推以致無窮，得區間

$$I_1,I_2,,I_3,\cdots,\quad I_n\subset[a,b],\quad f(x)=0\forall x\in I_n$$

4. 令 $E=[0,1]-\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$ 則 E 為 closed，$E\not\supset$ 任何區間，否則我們可以在此區間繼續挖
   $\therefore E$ 為遍稀疏
   $\Rightarrow\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$ 在 $[a,b]$ 上稠密

5. 而 $f(x)=0$ $\forall x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$，$f$ 在 $[a,b]$ 上連續，$\therefore f(x)=0$ $\forall x\in[a,b]$ $\square$

貝氏類集定理的另一個典型應用是證明存在函數 f 定義於 $[a,b]$ 上，但處處不可導。
我們平常畫連續函數，一筆畫過去很 smooth，雖然知道它在某些點上導數可以不存在，如 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 不可導。直覺上總認為這種點很稀少。
1872 年 Weierstrass 第一次給出如下的例子：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a^n\cos(b^n\pi x),\quad 0<a<1,ab>1+\frac{3}{2}\pi.$$

並証明 f 在 $[0,1]$ 上連續但處處不可導，在當時的數學界引起震撼。
其實絕大多數的連續函數都是處處不可導的。想想一維的布朗運動（Brownian motion），$x(t)$ 表 t 時刻質點的位置，下一步質點往左或往右運動，純為隨機，無法預測，若 $x(t)$ 為可導，$x'(t)>0$ 表向右，$x'(t)<0$ 表向左，在 t 時刻已見端倪，可見布朗運動中質點跑出一條平滑曲線那真是奇蹟。當然布朗運動中 $x(t)$ 對時間 t 是連續的。
從拓樸的觀點看，$C[a,b]$ 為完備賦距空間。令 $A=\{f|f\in C[a,b],\exists x\in[a,b]$ 使$f'(x)$存在$\}$
A 在 $C[a,b]$ 中為第一類集，少得可憐，因此 $C[a,b]$ 中連續但處處不可導的函數多如恆河沙數。
關於 A 在 $C[a,b]$ 中為第一類集的探討，同學們可參考 Royden 的 *Real Analysis*, 第三版 p161 習題 38。那裡作者層次分明地逐步導引出它的證明。

6.7 集合的大小

人有高矮胖瘦，富貴清貧，賢智愚鈍。
高大者未必富貴，富貴者未必賢智，賢智不必高大。
於集合亦然，從計數（counting）的觀點看有可數集與不可數集，從測度的觀點來看有 0 測度集與正測度集，從拓樸的觀點來看有第一類集與第二類集。這些都是從不同的觀點來看集合的大小，它們之間有必然的關係嗎？
首先我們簡介一下什麼叫測度（**measure** on $\mathbb{R}$）：

1. $I = (a, b),\ [a, b),\ (a, b]$ 或 $[a, b]$，定義其 measure $m(I) = b - a$

2. U 為 $\mathbb{R}$ 中開集，則 $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n,\ I_n = (a_n, b_n),\ I_n \cap I_m = \emptyset$ 當 $m \neq n$
   定義 $m(U) = \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n)$

3. $A \subset \mathbb{R}$，令
   $$m^*(A) = \inf\{m(U) | U\text{為 } \mathbb{R} \text{ 中開集}, U \supset A\}$$
   稱為 A 的<u>外測度</u>。

4. $K \subset \mathbb{R}$ 為 compact，任取 $[a, b] \supset K$
   則對於 K 在 $[a, b]$ 上的補集 $[a, b] - K$，根據 1. 和 2.，其測度可定。
   定義 K 的測度
   $$m(K) = m([a, b]) - m([a, b] - K)$$
   上述 $m(K)$ 的值與 $[a, b]$ 的選取無關。

5. $A \subset \mathbb{R}$，令
   $$m_*(A) = \sup\{m(K) | K\text{compact},\ K \subset A\}$$
   稱為 A 的<u>內測度</u>。

6. 若 $m^*(A) = m_*(A)$，稱 A 為<u>Lebesgue 可測集</u>，以 $m(A)$ 表此共同測度值，稱為 A 的<u>Lebesgue 測度</u>。

7. m 具有可列加性：
   $A_1, A_2, \cdots$ 為 Lebesgue 可測集，$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$，則
   $$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

上面對 Lebesgue 測度的介紹只是概念性地描述，第七點是有待證明的性質，任何實分析的課本都會有完整詳盡的介紹，在此容我不欲多言。
以下我就 $\mathbb{R}$ 中三種觀點來比較其間的關係。

A. Counting 的觀點

a. $E \subset \mathbb{R}$，E 可數。

(i) 顯然 E 為第一類集。

(ii) 顯然 $m(E) = 0$ 根據可列加性。

b. E 不可數。

(i) E 不可數 $\not\Rightarrow$ E 為第二類集。
例：E 為 $[0, 1]$ 中的 Cantor set

(ii) E 不可數 $\not\Rightarrow$ $m(E) > 0$
例：同上。

B. Topology 的觀點

a. E 為第一類集

(i) E 可以是 uncountable，例如 Cantor set

(ii) $m(E)$ 可以 > 0，例如 Cantor 型集，給定 $0 < \epsilon < 1$，第一次從正中心挖走 $\frac{\epsilon}{3}$，第二次再從剩餘的兩區間於正中心分別又挖去 $\frac{\epsilon}{3^2}$，依此類推以致無窮，挖走的區間測度為 $\frac{\epsilon}{3} + 2 \cdot \frac{\epsilon}{3^2} + 2^2 \frac{\epsilon}{3^3} + \cdots = \epsilon$
因此餘集 E 的測度為 $1 - \epsilon > 0$
E 為 closed，且 E 不含任何開區間，故 E 為遍稀疏，屬第一類集。

b. E 為第二類集

(i) 當然 E 必為不可數集

(ii) E 的測度未必大於 0。這裡留給同學做為習題。

C. 測度的觀點

a. $m(E) = 0$

(i) E 未必是 countable，例如 Cantor set

(ii) E 未必是第一類集，這是 B-b-(ii) 中留給同學們的習題。

b. $m(E) > 0$

(i) E 當然必為 uncountable

(ii) E 未必是第二類集。上面 B-a-(ii) 中的 Cantor 型集就是一個反例。

6.8 請喝茶吧

高等微積分讀到這裡，實在很累！
很累是正常，不累才奇怪。來，請喝泡茶吧！
林語堂先生說：「茶之為物，可以讓人遐想。」

世間有「茶道」，沒聽說有「漢堡道」。既可稱「道」，就非凡物。
喝就喝，有什麼「道」可言？
道在人心。速食，令漢堡失道；珍惜，使感情芬芳。
幾年前，我住台北青田街，台大日式老房舍。有一天，我妹妹和妹婿來訪，我請他們品茶。古老的日式房間裡，三人席地而坐，窗外寒梅正放，時而飄來陣陣芳香，那香氣高雅，凝而不鬆，寄而不放，芬芳中帶有幾分喜悅。
我打開音響，放進琴家吳文光的古琴 CD，琴聲勁似蒼松，柔如細柳，首曲「瀟湘水雲」，誠如琴銘「長風落木，廖天秋遠；空谷無人，雲行水流」。琴音在室內迴盪，與空間共鳴，人在琴音中，寂然無語。那「憶故人」的音符，似音樂，又不似音樂，娓娓道來，鏗鏗落落，時徐時轉，時起時伏，音中有音，韻中有韻，吟揉綽注，細語喃喃，婉轉情深，不盡依依。好像在訴說一個古老的故事，悠遠高雅，情真入化。
我沖了一泡上等好茶，請他們品嘗。一泡休息片刻再上一泡，茶韻逐次變化展開，口齒留香，舌根盤韻，迴旋於喉門鼻腔之間，餘音繞樑，回味無窮。茶湯入腹，股盪於體，五臟六腑如逢甘霖，欣然開展，起起落落，好像在奏樂一般。不覺從臟腑深處輕噎出幾口氣，渾然間通體舒暢，與天地同氣。
閉目暝想，人在茶中，和琴音梅韻融為一體，不知今夕是何年。
事後，我妹妹和妹婿告訴我，這次喝茶讓他們終生難忘。
又隔一年，我妹妹在電話中說想再來品茶，我欣然歡迎。
同樣的茶，同樣的地點，同樣的時節，同樣的音樂，同樣的梅放，只不過多了一個人－我太太。姑嫂倆好久不見，有說不盡的話。
我同樣用心泡茶，一泡又一泡，不敢怠慢。
茶事畢，我問她們：今天這泡茶如何？
「都喝到肚子裡面去了，很開心」，她們這樣回答。
我莞然而笑，今天品的是「姑嫂融融」，這一道也蠻有韻味的！
如果你有機會到我家作客，請讓我招待你一杯好茶。

第六章全文完

頁碼	作品	版權標示	來源／作者
25	因為覺得自己富有…好施		陳樹菊

102學年度高等微積分(上) 習題六

1. $x, y \in \mathbb{R}$，定義：$d_1(x,y) = (x-y)^2$，$d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|}$，$d_3(x,y) = \left|x^2 - y^2\right|$，$d_4(x,y) = |x-2y|$，$d_5(x,y) = \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$，試判斷上述函數是否爲$\mathbb{R}$上的metric？

2. 在$\mathbb{R}$中，令$d(x,y) = \begin{cases} 1 & 當 x \neq y \\ 0 & 當 x = y \end{cases}$
   (a) 試驗證$(\mathbb{R}, d)$爲一metric space (孤獨世界)。
   (b) 描述$(\mathbb{R}, d)$中的open set、closed set、compact set和sequentially compact set。
   (c) 描述$(\mathbb{R}, d)$中的Cauchy sequence，並問：$(\mathbb{R}, d)$是否complete？

3. (X, d)爲metric space，$A \subset X$，$\bar{A}$有兩個定義：
   (a) $\overline{A} = \cap\{F \mid F \text{ closed } \supset A\}$
   (b) $\overline{A} = A \cup A'$
   試證：(a)、(b)是等價的。

4. (X, d)爲metric space，$A \subset X$，∂A有兩個定義：
   (a) $\partial A = \overline{A} - A^0$
   (b) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$
   試證：(a)、(b)是等價的。

5. $A \subset \mathbb{R}$、$B \subset \mathbb{R}$，定義$A \times B = \{(x,y) | x \in A, y \in B\} \subset \mathbb{R}^2$。問下列敘述是否正確？試說明之。
   (a) A, B爲open $\Rightarrow A \times B$爲open；
   (b) A, B爲closed $\Rightarrow A \times B$爲closed；
   (c) A, B爲perfect $\Rightarrow A \times B$爲perfect ；
   (d) $(A \times B)^0 = A^0 \times B^0$；
   (e) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$。

6. 承上，
   (a) 試證：A, B爲$\mathbb{R}$中的compact sets，則$A \times B$爲$\mathbb{R}^2$中的compact set。
   (b) $A_1, A_2, \cdots A_n$爲$\mathbb{R}$中的compact sets，則$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$爲$\mathbb{R}^n$中的compact set。

7. (a) 試在$\mathbb{R}^2$中造一集合A，使∂A的二維測度>0。
   (b) 你所造的集合其Hausdorff dimension是否>1？
   (請參閱台大OCW網，高等微積分單元16，有關dimension的簡介)

8. (X, d)爲compact metric space，試證：X有countable (含finite) dense subset。

9. (a) (X, d)爲connected metric space，$A \subset X$，既open又closed，試證：$A = \emptyset$或 $A = X$。
   (b) (a)中connected條件拿掉，結論不成立，試舉一例。

10. (a) (X, d)爲complete metric space，$E \subset X$，定義：diam$E$=$\sup_{x,y \in E} d(x,y)$。設$E_1 \supset E_2 \supset \cdots$爲$X$上的一組closed sets，diam$E \to 0$當$n \to \infty$。試證：唯一存在$x_o \in X$使得$\cap_{n=1}^{\infty} E_n = \{x_0\}$ (此性質相當於$\mathbb{R}$中的區間套定理)。
    (b) (a)中的complete條件去掉，結論不成立，試舉一例。

11. $C[0,1]$中的closed unit ball是否爲compact？試說明之。

12. $f: X \to Y$，$Y = f(X)$，f爲函數寫像。$A \subset Y$，定義$f^{-1}(A) = \{x | x \in X, f(x) \in A\}$，注意，此處$f^{-1}$只是一個符號，並不代表$f$的反函數存在。$A, B \subset Y$，請判斷下列各式是否成立？
(a) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
(b) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
(c) $f^{-1}(A - B) = f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$

13. 我們稱$f: X \to Y$爲open mapping，表示對X中的任意open set V，其對應值域$f(V)$會是Y中的open set。試證明：每個從$\mathbb{R}^1$映到$\mathbb{R}^1$的continuous open mapping必定爲monotone。

14. 給定metric space (X, d)，令$\{p_n\}$爲一Cauchy序列。若存在一子序列p_{n_i}收斂至X中的某點p，試證明$\{p_n\}$收斂至p。

15. (X, d)爲metric space，$A \subset X$。試證：A爲perfect$\Leftrightarrow A$爲closed且無孤立點。

16. 若$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$滿足中間值定理的性質：$f(a) < c < f(b)$則存在$x \in (a, b)$使得$f(x) = c$。另外假設，對於任意$r \in \mathbb{Q}$，$\{x | f(x) = r\}$爲closed。試證明$f$爲連續。(提示：若$x_n \to x_0$但存在$r$使得$f(x_n) > r > f(x_0)$ $\forall n$ ，則存在x_n, x_0之間的t_n使得$f(t_n) = r$，因此有$t_n \to x_0$。試導出矛盾。)

17. X爲一metric space，若$E \subset X$非空，我們可定義$x \in X$到E的距離爲$\rho_E(x) = \inf_{z \in E} d(x, z)$
(a) 試證明$\rho_E(x) = 0$若且唯若$x \in \overline{E}$。
(b) 試以三角不等式導出$|\rho_E(x) - \rho_E(y)| \leq d(x, y)$，並證明$\rho_E$在$X$上爲均勻連續。

18. X爲一metric space，令A, B爲X中不相交的閉集，定義

$$f(p) = \frac{\rho_A(p)}{\rho_A(p) + \rho_B(p)},\ p \in X$$

證明f在X上連續，其值在$[0,1]$間且同時在A上$f(p) = 0$、在B上$f(p) = 1$。

19. (a) A表$[0,1]$中一切有理點集，A可數，令$A = \{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$。給定$\epsilon > 0$，令$I_n(\epsilon) = \left(x_n - \frac{\epsilon}{2^n}, x_n + \frac{\epsilon}{2^n}\right)$，$B(\epsilon) = \cup_{n=1}^{\infty} I_n(\epsilon)$，$B = \cap_{\epsilon > 0} B(\epsilon)$，則$B = A$正確否？
(b) $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$，是否可在$B(\epsilon)$中找到有窮開集，足以覆蓋住$A$？

20. (Uniform boundedness principle) (X, d)爲一complete metric space，$\mathcal{F}$爲一族定義於X上的實連續函數，若對任意$x \in X$，恆存在常數M_x使得$|f(x)| \leq M_x$ $\forall f \in \mathcal{F}$，則存在開領域$O \subset X$及一常數$M$使得$|f(x)| \leq M$ $\forall f \in \mathcal{F}, x \in O$。簡言之：逐點有界，則在某開領域上一致有界。

21. f爲定義於$[0, \infty)$上的實連續函數，若對任意$x \in [0, \infty)$，集合$\{f(nx) | n = 1, 2, 3, \cdots\}$有界，試証$f$有界。

22. 試造一集合$B \subset \mathbb{R}$，B爲第二類集(second category)，但其Lebesgue測度爲0。

23. (a) 在習題四中，我們曾經做過這樣的問題：「f在$[a,b]$上連續，若$[a,b]$中的每一點都是f的極小點，試證：f爲常函數 。」 試證：上述命題在connected compact metric space上亦成立。即：
設(X,d)爲connected compact metric space，若$\forall x \in X$，$\exists \delta > 0$使$f(x) \leq f(y)\ \forall y \in B_\delta(x)$。則$f$爲常函數。
(b) 上述命題中，connected這個條件不能去掉，試舉例說明之。

24. 承上，一位"distinguish"助教指出，上述命題中"compact"這一條件是多餘的，你能看出它的竅門嗎？

25. f在$[0,1]$上無窮可導，若對任意$x \in [0,1]$，恆存在n(因x而變)，使$f^{(n)}(x) = 0$，則f爲一多項式。
<u>提示</u>：
(a) 令$E_n = \{x | f^{(n)}(x) = 0\}$，則$[0,1] = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$，$E_n$爲closed，$[0,1]$爲complete，因此$\exists n_1$使$E_{n_1} = \overline{E_{n_1}} \supset$某開區間，令其爲$I_1$，$f$在$I_1$上爲一$n_1$次多項式；不妨取$I_1$盡量大，大到不行。重複上論述於剩餘二閉區間，依此類推以致無窮，得一族互不相交的開區間族$\{I_k\}$，$\cup_{k=1}^{\infty} I_k$在$[0,1]$上稠密，f在I_k上爲一多項式，I_k大到不行。
(b) 諸多項式必須統一：
令$H = [0,1] - \cup_{n=1}^{\infty} I_n$，則$H$爲$[0,1]$上的一個perfect set，當然做爲一個metric space來看，它是complete (只要H爲closed就夠了)，重複(a)的論述於H，只做一次，$\exists$開區間J使$f^{(n)}(x) = 0\ \forall x \in H \cap J$，$J$被$H$中諸點所切割成許多小開區間，任取其一，設其爲$I$，則$I$爲(a)中某開區間，因此，$\exists m$使$f^{(m)}(x) = 0\ \forall x \in I$，$I$大到不行。
(i) $m < n$，微分之，得$f^{(n)}(x) = 0\ \forall x \in I$。
(ii) $m > n$，在I的端點x上，$x \in H$，有$f^{(n)}(x) = f^{(n+1)}(x) = \cdots = f^{(m)}(x) = 0$ (想一想！) 積分之，得$f^{(n)}(x) = 0\ \forall x \in I$，每一小區間都如此，因此$f^{(n)}(x) = 0\ \forall x \in J$，違背了$I$大到不行的設定。因此，一開始只能有一區間，即$[a,b]$本身！

101 台灣大學數學系高等微積分上由陳金次製作，以創用 CC 姓名標示-非商業性-禁止改作 3.0 台灣授權條款

Chapter 7

再談連續函數

7.1 引言

在第四章中我們談 $\mathbb{R}$ 上的實連續函數，有三個主要定理：

1. 中間值定理：f 在 $[a,b]$ 上連續，且 $f(a)f(b)<0$ 則存在 $c\in(a,b)$ 使 $f(c)=0$
2. 最大最小值定理：f 在 $[a,b]$ 上連續，則 f 在 $[a,b]$ 上取最大最小值。
   即：存在 $x_1,x_2\in[a,b]$ 使
   $$f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)\qquad \forall x\in[a,b]$$
3. 均勻連續定理：f 在 $[a,b]$ 上連續，則 f 在 $[a,b]$ 上均勻連續。

均勻連續定理是打通督脈的鑰匙。
在這一章裡，我們將考慮賦距空間上的連續函數，探討其性質，並將上面三定理推廣到賦距空間上。
Definition 7.1.1 設 (X,d) (Y,ρ) 為二 metric space，$f:\ X\to Y$，稱 f 在 $x\in X$ 連續，若對任意 $\epsilon>0$ 恆存在 $\delta(x)>0$ 使

$$\rho(f(x'),f(x))<\epsilon\quad 當 d(x',x)<\delta$$

或：$f(x')\in B_\epsilon(f(x))$ 當 $x'\in B_\delta(x)$。
$A\subset X$，若 f 在 A 中每一點都連續，我們稱 f 在 A 上連續
Theorem 7.1.1 $f:\ X\to Y$ 為連續蓋射（onto）寫像，則下列三種性質等價：

(a) f 在 X 上連續

(b) 當 V 為 Y 中的開集，則 $f^{-1}(V)$ 為 X 中的開集

(c) 當 F 為 Y 中的閉集，則 $f^{-1}(F)$ 為 X 中的閉集

証：

(a) $\Rightarrow$ (b)

設 $V \subset Y$ 為 open，欲証 $f^{-1}(V) \subset X$ 為 open

令 $x \in f^{-1}(V)$，則 $f(x) \in V$

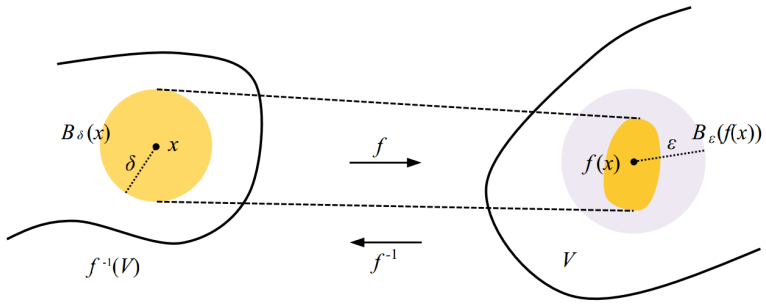
V 為 open，$\exists \epsilon > 0$ 使 $B_\epsilon(f(x)) \subset V$

f 在 x 點連續，對此 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 使 $f(x') \in B_\epsilon(f(x))$ 　　當$x' \in B_\delta(x)$。故

$B_\delta(x) \subset f^{-1}\left(B_\epsilon(f(x))\right) \subset f^{-1}(V)$

上式對一切 $x \in f^{-1}(V)$ 成立，故 $f^{-1}(V)$ 為 X 中的開集。

Figure 7.1:



(b) $\Rightarrow$ (a)

給定 $x \in X$，欲証：$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ 使 $f(x') \in B_\epsilon(f(x))$ 當 $x' \in B_\delta(x)$

由於 $B_\epsilon(f(x))$ 為 Y 中開集，依假設，$f^{-1}\left(B_\epsilon(f(x))\right)$ 為 X 中開集，而 $x \in f^{-1}\left(B_\epsilon(f(x))\right)$，

故 $\exists \delta > 0$ 使 $B_\delta(x) \subset f^{-1}\left(B_\epsilon(f(x))\right)$

即：$x' \in B_\delta(x) \Rightarrow f(x') \in B_\epsilon(f(x))$

故 f 在 x 點連續

(b) $\Leftrightarrow$ (c)

F 為 Y 中開集 $\Leftrightarrow$ F^c 為 Y 中閉集

而 $f^{-1}(F^c) = [f^{-1}(F)]^c$，故 (b) $\Leftrightarrow$ (c)

<u>Remark</u>

(a) 若 $f:\ X \to Y$ 為嵌射（into），$f(X) \subset Y$

V 為 Y 中開集，$V \cap f(X)$ 稱為 $f(X)$ 的相對開集（relative open set）

我們也經常用 $f^{-1}(V)$ open in X $\forall V$ open in Y，那個「open in Y」指的是這個相對開集。

(b) 定理 7.1.1 是個很重要的定理，雖然它很簡單

它把連續函數的定義由 ϵ, δ 的測距概念轉換成 f^{-1} 為開映射的拓樸概念，鄰域的關係取代了不等式的關係。拓樸空間映到拓樸空間的連續函數即由 (b) 來定義。

什麼叫拓樸空間呢？簡單說：
設 X 為一集合，$\mathcal{J} \subset \mathcal{P}(X)$（power set），稱 $\mathcal{J}$ 為 X 上的一個 topology 若

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{J}$

(ii) $A_\lambda \in \mathcal{J},\ \forall \lambda \in \Lambda \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathcal{J}$（$\Lambda$ 任意）
即任意「開集」的聯集為「開集」（相應於 $\mathbb{R}^n$ 中，任意開集的聯集恆為開集）

(iii) $\{A_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{J} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{J}$
即有窮個「開集」的交集為「開集」（相應於 $\mathbb{R}^n$ 中，有窮個開集的交集恆為開集）

$\mathcal{J}$ 中的元素就稱為開集，$(X, \mathcal{J})$ 就稱為一個拓樸空間，$\mathcal{J}$ 是 X 上一種鄰域概念，不同的概念，相應的拓樸空間各異。
設 $(X, \mathcal{J}), (Y, \mathcal{S})$ 為二拓樸空間，$f:\ X \to Y$
稱 f 為 X 上的連續函數若 $f^{-1}(V) \in \mathcal{J}\ \forall V \in \mathcal{S}$
以下我們將把 $[a, b]$ 上實連續函數的三個性質：中間值定理，最大最小值定理及均勻連續定理，推廣到一般的賦距空間。

7.2 保緊緻（preserve compactness）

Theorem 7.2.1
設 $(X, d), (Y, \rho)$ 為二 metric space，$A \subset X$ 為 compact，$f:\ X \to Y$ 連續，則 $f(A)$ 亦為 compact。

証： 設 $\mathcal{G}$ 為 $f(A)$ 上一族 open covering，則據定理 7.1.1，$\mathcal{F} = \{f^{-1}(V) | V \in \mathcal{G}\}$ 為 A 上一組 open covering，A 為 compact，故存在有窮開集 $\{f^{-1}(V_i)\}_{i=1}^n$covers A，從而 $\{V_i\}_{i=1}^n$ covers $f(A)$。

<u>Remark:</u>
定理 7.2.1 就是最大最小值的延伸
當 $Y = \mathbb{R}$，f 為 X 上實連續函數，A 為 compact 故 $f(A)$ 為 $\mathbb{R}$ 中 compact susbet，$\mathbb{R}$ 中 comapct 等價於 bounded and closed
因 bounded，$\therefore M = \ \sup_{x \in A}\ f(x) < \infty$
因 closed，M 的確被取到。即存在 $x \in A$ 使 $f(x) = M$
我們把它列為定理陳述於下：
Theorem 7.2.2 設 (X, d) 為 metric space，$A \subset X$ 為 compact，f 為定義於 A 上的實連續函數，則 f 在 A 上有界。
Theorem 7.2.3 承上，f 在 A 上取最大最小值。即存在 x_1, x_2 使
$m = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = M\ \forall x \in A$

7.3 均勻連續

Definition 7.3.1 設 (X,d),(Y,ρ) 為 metric spaces，$A \subset X$，$f:\ A \to Y$ 為連續，我們稱 f 在 A 上均勻連續，若對任意 $\epsilon > 0$，$\exists \delta > 0$ 使

$$\rho(f(x), f(x')) < \epsilon \qquad 當 d(x,x') < \delta \quad \forall x, x' \in A$$

注意，δ 只與 ϵ 有關，與 x,x' 無關

Theorem 7.3.1 承上，若 A 為 compact，f 在 A 上連續，則 f 在 A 上均勻連續

証： 以下証明完全 copy $\mathbb{R}^n$ 中的論述。

給定 $\epsilon > 0$，$x \in A$，f 在 x 點連續，對此 $\epsilon > 0$，$\exists \delta_x$ 使得

$x' \in B_{\delta_x}(x) \Rightarrow f(x') \in B_{\epsilon/2}(f(x))$

令 $\mathcal{F} = \{B_{\delta_x/2}(x) | x \in A\}$

則 $\mathcal{F}$ 為 A 上的一族 open covering

A 為 compact $\Rightarrow \exists$ finite subcovering $\{B_{\delta_i/2}(x_i)\}_{i=1}^n$ 覆蓋了 A，$\delta_i = \delta(x_i)$

取 $\delta = \min\{\frac{1}{2}\delta_i\}$，則此 δ 即為所求。理由：$x', x \in A, d(x,x') < \delta$

(i) $x \in A \subset \bigcup_{i=1}^n B_{\delta_i/2}(x_i) \Rightarrow \exists i$ 使 $x \in B_{\delta_i/2}(x_i)$

(ii) $d(x,x') < \delta < \delta_i/2 \Rightarrow d(x', x_i) < d(x', x) + d(x, x_i) < \frac{\delta_i}{2} + \frac{\delta_i}{2} = \delta_i$

(iii) $x, x' \in B_{\delta_i}(x_i) \ \Rightarrow\ f(x), f(x') \in B_{\epsilon/2}(f(x))$

$\Rightarrow \rho(f(x), f(x')) < \rho(f(x), f(x_i)) + \rho(f(x_i), f(x')) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$

$\therefore f$ 在 A 上均勻連續

對 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的函數 f，我們有均值定理

$$f(x) - f(y) = f'(z)(x-y) \qquad \forall x, y \in I$$

若 f 在 I 上可導，I 為一區間，z 為介於 x, y 之間某點

因此有：若 $|f'(x)| \le M\ \forall x, y \in I$，則 f 在 I 上均勻連續。

對 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}$ 的函數 f，設 f 定義在 $A \subset \mathbb{R}^n$ 上，A 為凸集，我們有：

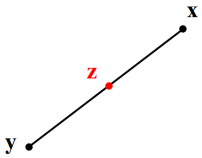
$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) = \nabla f(\mathbf{z}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

其中 $\mathbf{z}$ 為 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 連線中的某點（圖7.2），若 f 的一階偏導數皆連續（請同學復習初微相關內容）

對一般的凸集 A，$\overline{\mathbf{xy}} \subset A\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$，故 $\mathbf{z} \in A$，

因此，若 $|\nabla f(\mathbf{x})| \le M \quad \forall \mathbf{x} \in A$，則 f 在 A 上均勻連續。在此陳述為定理於下：

Figure 7.2:



Theorem 7.3.2

$A \subset \mathbb{R}^n$ 為凸集，$f:\ A \to \mathbb{R}$ 其一階偏導數連續。若 $\exists M$ 使 $|\nabla f(\mathbf{x})| \leq M\ \forall \mathbf{x} \in A$，則 f 在 A 上均勻連續。

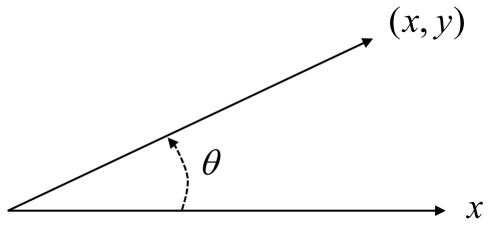
<u>Remark:</u>

(i) A 為凸集，以確保 $z \in A$

(ii) 定理 7.3.2 中「凸集」這個條件不可省。且看下例：

例： 在 $\mathbb{R}^2$ 中定義幅角 $\theta(x, y)$ 如圖。

Figure 7.3:



注意 $\theta(x, y)$ 無法定義在整個 $\mathbb{R}^2$ 上，例如，P 點在 x 軸上，$\theta(P)$ 可以是 0，也可以是 2π ，非單值。因此，θ 的定義域只能從 $\mathbb{R}^2$ 中扣除某過原點的半射線。

例如：$\mathbb{R}^2 - (-\infty, 0], -\pi < \theta(x, y) < \pi$

$$\theta(x, y) = \arctan \frac{y}{x} + C, \qquad C\text{為常數}$$

從而 $|\nabla\theta| = \frac{1}{r}$

今考慮 $A = \{(r, \theta) | 1 \leq r \leq 2,\ \pi < \theta < \pi\}$

則在 A 上 $|\nabla\theta| \leq 1$

但固定 $-2 < x < -1$，考慮 $P(x, y = \frac{\delta}{4}), Q(x, y = -\frac{\delta}{4}), \delta > 0$（圖7.4）

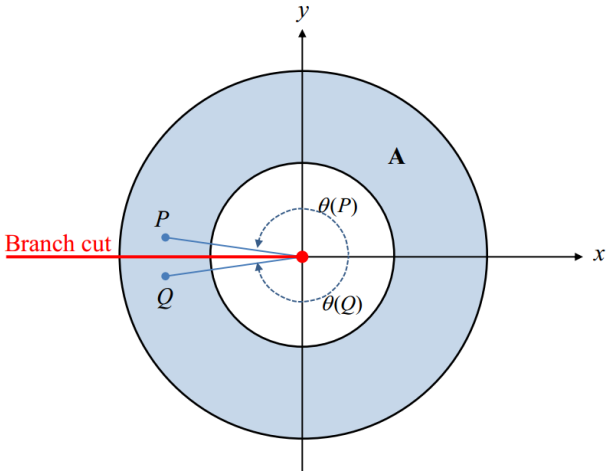
則 $P, Q \in A$ 當 δ 夠小，且 $\overline{PQ} = \delta/2 < \delta$

$\theta(P) \to \pi, \quad \theta(Q) \to -\pi \quad$ 當$\delta \to 0$

$\therefore |\theta(P) - \theta(Q)| \to 2\pi \qquad$ 當δ夠小

故 θ 在 A 上非均勻連續

Figure 7.4:



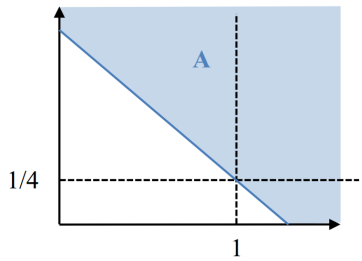
例： $f(x,y)=\sqrt{x^2+y}$ 問 f 在下列給定區域上是否均勻連續？

(a) $x \geq 0, y \geq 0$

(b) $S=\{(x,y)|x^2+y \geq 0\}$

解：

Figure 7.5:



(a) (i) $f_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y}}$, $f_y=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y}}$，$|\nabla f|^2=\frac{x^2+1/4}{x^2+y}$，觀察

$$|\nabla f|^2 \leq 1 \text{ 當} y \geq \frac{1}{4}$$

$$|\nabla f|^2 \leq \frac{x^2+1/4}{x^2}=1+\frac{1}{4x^2} \leq 1+\frac{1}{4} \quad \text{當} x \geq 1$$

過點 $(1,\frac{1}{4})$ 作直線 $x+y=\frac{5}{4}$ 並令

$$A=\{(x,y)|x+y \geq \frac{5}{4}\} \quad \text{（圖7.5中藍色區域）}$$

則 $|\nabla f(x,y)|<\sqrt{1+\frac{1}{4}} \qquad \forall (x,y) \in A$

A 為凸集，$\therefore f$ 在 A 上均勻連續

給定 $\epsilon>0$ $\exists \delta_1$ 使

$$|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|<\delta_1 \;\Rightarrow\; |f(\mathbf{x}_1)-f(\mathbf{x}_2)|<\epsilon \qquad \forall \mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2 \in A$$

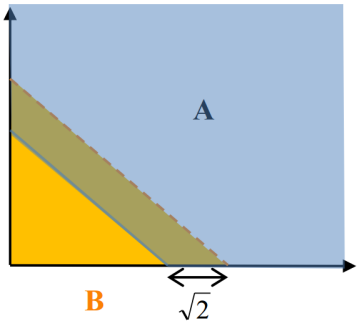
其中 $\mathbf{x}_i=(x_i,y_i), i=1,2$

(ii) 其次，令 $B = \{(x,y)|x+y \le \frac{5}{4}+\sqrt{2}, x \ge 0, y \ge 0\}$（圖7.6中黃色區域）

則 f 在 B 上連續，B 為 compact，故 f 在 B 上均勻連續。對此 $\epsilon > 0$ $\quad \exists\delta_2$ 使

$$|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| < \delta_2 \;\Rightarrow\; |f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)| < \epsilon \qquad \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in A$$

Figure 7.6:



(iii) 令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, 1\}$ 則

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| < \delta \;&\Rightarrow\; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in A \text{ 或} \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in B \\ &\Rightarrow\; |f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)| < \epsilon \end{aligned}$$

故 f 在 $x \ge 0, y \ge 0$ 上均勻連續

(b) 觀察 $|\nabla f|^2 = \frac{x^2+1/4}{x^2+y}$

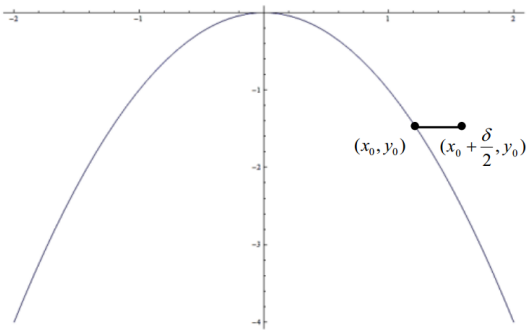
在 ∂S 上，$x^2 + y = 0$

因此 $|\nabla f(\mathbf{x})| \to \infty$ 當 $\mathbf{x} \to \partial S$

$|\nabla f(\mathbf{x})| \sim \infty$ 表示曲面非常陡峭，當 $\mathbf{x}$ 很接近 ∂S

換言之，小小的位移 $\Delta\mathbf{x}$ 可能有極大的落差 Δf

Figure 7.7:



如圖7.7，設 $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in \partial S$ 對任意 $\delta > 0$ 考慮 $\mathbf{x} = (x_0 + \delta/2, y_0)$，則

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| &= \sqrt{(x_0 + \delta/2)^2 + y_0}, \quad (\, f(\mathbf{x}_0) = 0 \,) \\ &= \sqrt{x_0\delta + \delta^2/4} \\ &> \sqrt{x_0\delta} \to \infty \qquad \text{當} x_0 \to \infty \end{aligned}$$

對 $\epsilon = 1, \forall\delta > 0, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = \delta/2 < \delta$ 但

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| > \sqrt{x_0\delta} > 1 \qquad 當 x_0 > \frac{1}{\delta}.$$

故 f 在 S 上非均勻連續。

7.4 保連通

Theorem 7.4.1
$(X, d), (Y, \rho)$ 為二 metric space，$f:\ X \to Y$ 為連續映射，$E \subset X$ 為連通集（connected set），則 $f(E) \subset Y$ 亦為連通集。

証： 若不然，$f(E) = C \cup D$, C, D 為 separate
C, D separate $\Rightarrow \exists$ 互不相交的開集 V_1, V_2 使 $C \subset V_1, D \subset V_2$
令 $A = f^{-1}(C), B = f^{-1}(D)$, $U_1 = f^{-1}(V_1), U_2 = f^{-1}(V_2)$

$$U_1 \cap U_2 = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) = f^{-1}(V_1 \cap V_2) = \emptyset$$

f 連續 $\therefore U_1, U_2$ 為 open

$$A \subset U_1, B \subset U_2 \Rightarrow A, B \text{ separate}$$

又 $E = f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) = A \cup B$，違背了 E 為連通集的設定，矛盾。□

<u>Remark</u>

(a) 定理 7.4.1 即中間值定理的延伸。當 $Y = \mathbb{R}$ 時 $f(E)$ 為 $\mathbb{R}$ 上連通集，$a, b \in f(E) \Rightarrow (a, b) \subset f(E)$

(b) 當 E 為 path connected，則顯而易見 $f(E)$ 亦為 path connected。

7.5 同胚寫像（Homeomorphism）

設 $(X, d), (Y, \rho)$ 為二 metric space，$A \subset X, B \subset Y$
若存在一映射 f 把 A 對射到 B，且 f, f^{-1} 都連續，我們稱 A,B 為同胚（homeomorphic），f 稱為 A,B 之間的同胚寫像（homomorphism）。
想像製陶師傅把一塊陶土放在轉盤上拉坯，陶土因師傅的創意而變形，但胚的拓樸結構未變（師傅並未戳破它）。這些不同時刻的陶土形狀都是同胚。

換言之，f 為 A 到 B 之間的連續對射寫像，且把 A 中開集映至 B 中開集（f^{-1} 連續）

連續函數保 compactness，保 connectness，是否保 perfect？
當然沒有，例如常函數 $f(x) = 0\ \forall x \in [0,1]$, $[0,1]$ 為 perfect，但 $f([0,1]) = \{0\}$ 則非 perfect
如果 f 為同胚寫像如何？且看下例：

例： $f(x) = \arctan x$ 則 $f:\ (-\infty, \infty) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 為同胚寫像，
$A = [0, \infty)$ 為 $\mathbb{R}$ 中的 perfect set，但 $f(A) = [0, \frac{\pi}{2})$ 並非 $\mathbb{R}$ 中的 perfect set。
如果你堅持要在 $\mathbb{R}$ 中看 $f(A)$，顯然 $\frac{\pi}{2}$ 這個 limit point 被遺漏了，故非 perfect。但 $\frac{\pi}{2}$ 這一點相應於 $\mathbb{R}$ 中的 ∞ ，而 ∞ 在 $\mathbb{R}$ 中不被視為一點，$\therefore [0, \infty)$ 在 $\mathbb{R}$ 中為 perfect 才成立。因此這樣的看法似乎不統一。

如果我們把 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 看成由 $\mathbb{R}$ 所遺傳的 metric space，則 $f(A)$ 就可視為 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上的 perfect set 了。

Theorem 7.4.3
$f:\ X \to Y$ 為 homeomorphism，若 A 為 X 中的 perfect set，則 $f(A)$ 為 Y 中的 perfect set。
証：

(i) A perfect，故為 closed；f 同胚，故 $f(A)$ 為 closed

(ii) 設 $y \in f(A)$，欲証 y 為 $f(A)$ 的匯聚點（limit point）
$y \in f(A) \Rightarrow y = f(x), x \in A$
A 為 perfect $\Rightarrow x$ 為 A 的匯聚點
$\therefore \exists$ 相異點列 $\{x_n\} \subset A, \lim_{n\to\infty} x_n = x$
令 $y_n = f(x_n)$，f 同胚 $\therefore \{y_n\}$ 為 $f(A)$ 中相異點列
f 在 x 點連續，故
$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) = y.$$
$\therefore y$ 為 $f(A)$ 的匯聚點 □

Theorem 7.4.4
$A \subset \mathbb{R}^n$ 為 bounded perfect set，$f:\ A \to f(A)$ 為 homeomorhism，則 $f(A)$ 為 $\mathbb{R}^n$ 中的 bounded perfect set。
証：

(i) A 為 bounded perfect $\therefore A$ 為 compact，f 連續，$\therefore f(A)$ 為 compact，故為 bounded and closed（in$\mathbb{R}^n$）

(ii) 「$y \in f(A)$ 則 y 為 $f(A)$ 的匯聚點」，証明一如定理 7.4.3(ii)，從略。□

Remark

定理 7.4.4 告訴我們，如果要在 $\mathbb{R}^n$ 中看 $f(A)$，A 必須再加上 bounded 的條件；而在 $\mathbf{R}^n$ 中 bounded and closed 等價於 compact，$f(A)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中 compact$\Rightarrow$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中 closed，上例中那個匯聚點 $\frac{\pi}{2}$ 就不會出問題了。

$\mathbb{R}^n$ 中的 perfect set 長得像什麼？下面這個例子提供一種樣貌，僅供參考。

例 1: 於 $\mathbb{R}^n, n > 1$, 上的單位立方塊 $A = [0,1] \times [0,1] \times \cdots \times [0,1]$ 中
挖走互不相交的開球 $\{B_{r_i}(\mathbf{x}_i)\}_{i=1}^{\infty}$，所餘集 E 為 perfect。
分析：

1. 令 $B_i = B_{r_i}(\mathbf{x}_i)$，則 $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ 為開集
   $E = A - B$，故為閉集
   欲証：$\mathbf{x} \in E \Rightarrow$ $\mathbf{x}$ 為 E 的匯聚點。
2. E 含無窮點（請想一想），任取一點 $\mathbf{x}_0 \in E - \{\mathbf{x}\}$，則 $|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}| < \sqrt{n}$
3. 把 A 等分成 2^n 個小開方塊，其中必有一塊含 $\mathbf{x}$，令其為 A_1
4. A_1 含無窮點（道理如 2），任取一點 $\mathbf{x}_1 \in E - \{\mathbf{x}, \mathbf{x}_0\}$，則 $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}| < \frac{\sqrt{n}}{2}$
5. 再把 A_1 等分成 2^n 個小開方塊，其中必有一塊含 $\mathbf{x}$，令其為 A_2
6. A_2 含無窮點，任取一點 $\mathbf{x}_2 \in E - \{\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1\}$，則 $|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}| < \frac{\sqrt{n}}{2^2}$
7. 依此類推以致無窮，得 E 中相異點列 $\{\mathbf{x}_k\}$，$|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}| < \frac{\sqrt{n}}{2^k} \to 0$當$k \to \infty$
   故 $\mathbf{x}$ 為 E 的匯聚點。□

Remark

1. 上述分析中的第 2 點，在 $n = 1$ 時並不成立。挖走兩個不相交的開區間可能造出一個孤立點，例如從 [0,1] 中挖走 $(0, \frac{1}{2})$ 與 $(\frac{1}{2}, 1)$，餘集 $E = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ 非無窮集。
2. 對於 $n = 1$，若挖走的開區間彼此並無共同的端點，則上面的推論成立，餘集 E 為一 perfect set。
3. 上述開球改為開集，論述仍然成立。故若 E 為 A 中 perfect set，$\mathbf{x} \notin E$，存在連通開集 $B \subset E^c$，B 含 $\mathbf{x}$。不妨取 B 盡量大，大到不行，這些連通開集頂多 countable 個，令其為 $\{B_i\}$，於是 $E = A - \bigcup B_i$
   茲將其陳述於下

例 2: 設 A 表 $\mathbb{R}^n$ 中立方塊，$E \subset A$ 則

(a) $n \geq 2$，E 為 perfect set $\Leftrightarrow$ $E =$ 從 A 中挖走可數個（包含有窮個）互不相交的連通開集

(b) $n = 1$，E 為 perfect set $\Leftrightarrow$ $E =$ 從 A 中挖走可數個（包含有窮個）互不相交的連通開區間，這些開區間彼此無共同端點

例 3: 承上，考慮 $n=3$ 的情形

設 E 為 A 中 perfect set

$f:\ E \to f(E)$ 為同胚寫像（homeomorphism）

依定理 7.8，$f(E)$ 為 $\mathbb{R}^3$ 中的 perfect set

想像人體的肺臟，內含許多大大小小的肺泡以交換空氣，它和 E 可視為同胚，應該是一個 perfect set。

到麵包店買一條吐司，吐司由於麵糰發酵，造成許多大大小小的空洞，它和 E 可視為同胚，應該是一個 perfect set。

一個青花菜，可視為和 A 同胚，應該也是 perfect。

以上諸例，雖不嚴僅，至少在苦讀高微之餘，在日常生活上有個現實的相應。

例 4: $\mathbb{R}^n$ 中的 Cantor set E 為 perfect。

事實上，當 $n \geq 2$ 時，挖走那個集合 B 為弧連通（path connected）開集。第一次挖走那個大到不行的連通開集就已經是全部被挖走的開集了。

7.6 收縮寫像（contraction mapping）定理

設 (X,d) 為一完備賦距空間，$T:\ X \to X$，稱 T 為收縮寫像（**contraction mapping**），若 $\exists \lambda < 1$ 使 $d(T(x),T(y)) \leq \lambda d(x,y)\ \forall x,y \in X$。

Theorem7.8 設 (X,d) 為一完備賦距空間，$T:\ X \to X$ 為收縮寫像，則 T 有固定點（fixed point）

即 $\exists x \in X$ 使 $T(x)=x$。

証： 任取 $x_0 \in X$ 令 $x_1 = T(x_0)$，$x_n = T(x_{n-1})\ \ \forall n > 1$

則 $d(x_1,x_2) = d(T(x_0),T(x_1)) \leq \lambda d(x_0,x_1)$

$d(x_2,x_3) = d(T(x_1),T(x_2)) \leq \lambda d(x_1,x_2) \leq \lambda^2 d(x_0,x_1)$

$\cdots$

$d(x_n,x_{n+1}) = d(T(x_{n-1}),T(x_n)) \leq \lambda d(x_{n-1},x_n)$

$\leq \cdots \leq \lambda^n d(x_0,x_1)$

而 $0 \leq \lambda < 1$，$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n < \infty \Rightarrow \{x_n\}$ 為 Cauchy sequence

X 為 complete，故 $\exists x \in X$ 使 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

T 為收縮寫像，故為連續，於是 $T(x) = T\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x$ $\square$

<u>Remark</u>

上述定理中 λ 為常數，且 $\lambda < 1$ 是固定點存在的關鍵。若 λ 非常函數，光是 $\lambda(x,y) < 1$ 不足以保証固定點的存在，且看下例：

例 1: $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

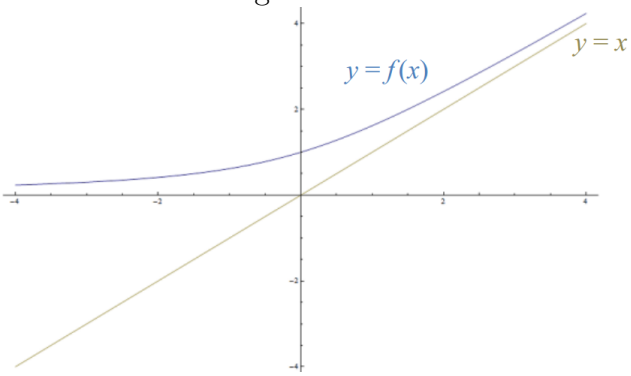
(a) $|f'(x)|\le\lambda<1,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \lambda$ 為常數，試證 f 有固定點。

(b) 試造一例 $|f'(x)|<1\quad\forall x$ 但 f 無固定點。

解： (a) $|f(x)-f(y)|=|f'(z)|\,|x-y|<\lambda|x-y|$，$z$ 為介於 x,y 之間的某點
因此 f 為收縮寫像，$\mathbb{R}$ 為 complete，故 $\exists x\in\mathbb{R}$ 使 $f(x)=x$

(b) 如圖所示：

Figure 7.8:



$f\nearrow$，以直線 $y=0$ 及 $y=x$ 為漸進線的函數，例如雙曲線 $y(y-x)=1, y>0$
解之，$y=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)$ 即為所求。

例 2: 常微分方程式解的存在定理（Picard's Method）
欲解常微分方程式

$$\begin{cases} y'(x) &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0\text{（初始條件）} \end{cases} \tag{1}$$

問：(1) 式是否可解，解是否唯一？
Picard 說：只要 f 在 (x_0,y_0) 附近連續，且對 y 滿足<u>Lipschitz 條件</u>：

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le M|y_1-y_2|$$

則 (1) 式在 (x_0,y_0) 點附近可解，且其解唯一。

証： 1. y 滿足 (1) $\Leftrightarrow$ y 滿足如下積分方程：

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\mathrm{d}t \tag{2}$$

2. 令 $T[y](x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\mathrm{d}t$
則 y 為 (2) 式之解 $\Leftrightarrow$ y 為 T 的固定點
因此可以利用固定點定理尋解

3. 固定點定理需要完備賦距空間，空間何處覓？
不妨考慮 $C(x_0-\delta,x_0+\delta)$, δ 待定，

$$C(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{g|g\text{為 }(x_0-\delta,x_0+\delta)\text{ 上的實連續函數}\}$$

此為一完備賦距空間，其完備性將在講函數列一章中證明之，請同學暫且先接受它。

4. $y_1, y_2 \in C(x_0-\delta, x_0+\delta)$，則

$$\begin{aligned}\|T[y_1]-T[y_2]\| \leq & \sup_{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)} \int_{x_0}^{x} |f(t,y_1(t))-f(t,y_2(t))|\mathrm{d}t \\ \leq & M\delta\|y_1-y_2\|\end{aligned}$$

且 $M\delta < 1$ 當 $\delta < 1/M$

5. 選定 $\delta < 1/M$，則 T 為 $C(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 上的收縮寫像，故 T 有固定點 $y(x) \in C(x_0-\delta, x_0+\delta)$
此 $y(x)$ 即為 (1) 式之解。

6. 唯一性：
若 $y_1, y_2 \in C(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 為 (2) 式之解，則 y_1, y_2 為 T 的固定點
依 4，

$$\|y_1-y_2\| = \|T(y_1)-T(y_2)\| < M\delta\|y_1-y_2\|$$

$$M\delta < 1 \;\Rightarrow\; \|y_1-y_2\| = 0 \;\Rightarrow\; y_1(x) = y_2(x)\ \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$$

<u>Remark</u> 上例中，f 對 y 滿足 Lipschitz 條件用以確保 T 在 $C(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 上為收縮，當 δ 夠小。若無此條件，解未必唯一。且看下例：

例 3:

$$\begin{cases} y'(x) &= y(x)^{1/2} \\ y(0) &= 0 \end{cases} \tag{3}$$

$f(x,y) = y^{1/2}$ 在點 $(0,0)$ 對 y 不滿足 Lipschitz 條件，此時 (3) 式有二解：

$$y_1(x) = 0 \qquad \forall x \qquad \text{及}$$
$$y_2(x) = \frac{1}{4}x^2,\ x \geq 0$$

102學年度高等微積分(上) 習題七

1. 試判斷下列函數在給定區域上是否均勻連續
   (a) $f(x,y)=\sqrt{xy},\ x\geq 0, y\geq 0$
   (b) $f(x,y)=\sqrt{1+x^2+y^2},\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$

2. (a) $I\subset\mathbb{R}$，實函數$f(x),g(x)$在I上均勻連續是可否推得$f(x)g(x)$在I上均勻連續？
   (b) 若給定f,g在I上有界，則(a)之命題成立否？

3. $f:[a,b]\times[c.d]\to\mathbb{R}$連續，定義$\varphi(x)=\max_{y\in[c.d]}f(x,y)$。試證明$\varphi(x)$在$[a,b]$上連續。
   (在草原上遠眺群山，那天際線差不多就是$\varphi(x)$。$z=f(x,y)$表山嶽，沿y軸遠眺)

4. (a) 接上題，試證明：$\max_y\min_x f(x,y)\leq\min_x\max_y f(x,y)$
   (b) 在區塊$0\leq x\leq 2$、$0\leq y\leq 4$上，定義$f(x,y)=1-(x-y+1)^2$。
   試求$\max_y\min_x f(x,y)$、$\min_x\max_y f(x,y)$之值。

5. 給定$0<x<\dfrac{\pi}{2}$，試證：$\lim_{n\to\infty}\sin nx$、$\lim_{n\to\infty}\tan nx$不存在。

6. A爲$n\times n$方陣，給定$\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n$，令$T(\mathbf{x})=A\mathbf{x}+\mathbf{b}$，$\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$，爲$\mathbb{R}^n$到$\mathbb{R}^n$的連續寫像，於$\mathbb{R}^n$中賦與 p norm，試就下列三種不同的norm，對A做適當的條件限制，使A爲收縮寫像。
   (a) $p=\infty$
   (b) $p=1$
   (c) $p=2$

7. (X,d)爲complete metric space，$A:X\to X$爲連續寫像，若$\exists n$使A^n爲收縮寫像，試證：A有固定點。

8. $k(x,y)$爲定義在$[0,1]\times[0,1]$上的連續函數，$|k(x,y)|\leq 1\ \forall(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$，$|k(x,y)|$不恆爲1。給定$\varphi\in C[0,1]$，試證存在唯一函數$f\in C[0,1]$滿足積分方程
$$f(x)=\varphi(x)+\int_0^1 k(x,y)f(y)dy.$$

9. (a) f在$\mathbb{R}$上連續，且滿足$f(x+y)=f(x)+f(y)\ \forall x,y\in\mathbb{R}$。試證：$f(x)=ax$，其中$a=f(1)$。
   (b) f在$\mathbb{R}$上連續，且滿足$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)\ \forall x,y\in\mathbb{R}$。試證：$f(x)=a^x$，其中$a=f(1)$。

10. f在$[0,1]$上連續，$f(x)\geq 0$且滿足$\int_0^x f(t)dt\geq f(x)\ \forall x\in[0,1]$，試證：$f\equiv 0$。

11. $A\subset\mathbb{R}^n$爲有界集，f在A上均勻連續，試證f有界。

12. $A\subset\mathbb{R}^n$，若任意定義於A上的實連續函數恆取最大值，試證：A爲compact。(此定理在metric space中也成立)
    提示：compact = sequentially compact

13. (a) $\mathbb{N}$爲自然數集，試證：任意定義於$\mathbb{N}$上的實函數都均勻連續。
    (b) $A\subset\mathbb{R}^n$，A無孤立點，若任意定義於A上的實連續函數恆均勻連續，試證：A爲compact。(此定理在metric space中也成立)

14. $A, B \subset \mathbb{R}^n$爲compact，「$f : A \to B$爲一對一映成連續寫像，則$f$爲同胚寫像。」正確否？$A$爲compact這條件可以拿掉嗎？

15. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$爲連續寫像，若存在$\lambda > 0$使$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| > \lambda\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$。試證：
(a) f爲蓋射 (onto)。
(b) f爲同胚 (homeomorphism)。

16. $B = \{\mathbf{x}|\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$，$f : B \to B$滿足$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$。
令$S = \{\mathbf{x}|f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\}$($f$的固定點集)，
(a) 不用Brouwer固定點定理，試證$S \neq \emptyset$。
(b) 試證S爲closed且爲convex(即：$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S \Rightarrow \mathbf{x}, \mathbf{y}$的連線$\subset S$)

17. $A = \{f|f$爲$[0,1]$映至$[0,1]$的實連續函數$\}$，令$A_1 = \{f|f$爲$1{-}1\}$，$A_2 = \{f|f$爲$onto\}$，$A_3 = \{f|f$爲$1-1, onto\}$。問：
(a) A_1是否爲closed？
(b) A_2是否爲closed？
(c) A_3是否爲closed？
(d) A是否爲compact？
(e) A是否爲connected？
Remark：A中的metric繼承自$C[0,1]$

18. (a) 在$[0,1]$上作一三角形，使其面積爲1，試證：必有一邊，共斜率的絕對值≥ 4。
(b) f在$[0,1]$上可導，$f(0) = f(1) = 0$，$f(x) \geq 0\ \forall x \in [0,1]$，若$\int_0^1 f(x)dx = 1$，試證：$\exists c \in (0,1)$使$|f'(c)| \geq 4$。
(c) (b)中$f(x) \geq 0$這條件去掉，結論更是正確。換言之，若f在$[0,1]$中有正有負，則$\exists c \in [0,1]$使$|f'(c)| > 4$(等號可以排除)。
(d) 承(b)，令$M = \max f(x)$，$0 \leq x \leq 1$，你能決定M之值，使至少存在兩點$c_1 \neq c_2$，使$|f'(c_i)| \geq 4$，$i = 1, 2$嗎？此時的"4"可以上提，你能決定那個上提的數k，使$|f'(c_i)| > k$，k盡量大嗎？
提示：春色滿園關不住，一枝紅杏出牆頭。

19. (a) D爲單位圓盤，$f \in C^1(D)$，$f \geq 0$，$f(x,y) = 0$在∂D上且$\iint_D f(x,y)dxdy = 1$。
試證：$\exists (x_0, y_0) \in D$使$|\nabla f(x_0, y_0)| \geq \dfrac{3}{\pi}$。
(b) $B = \{(x,y,z)|x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$爲$\mathbb{R}^3$中單位閉球，$f \in C^1(B)$，$f \geq 0$，$f = 0$在$\partial B$上且$\iiint_B f(x,y,z)dxdydz = 1$，你能寫出相應的結論嗎？
Remark：(a),(b)中，$f \geq 0$這條件去掉，結論更是正確，如(c)所述。
(c) $\Omega \subset \mathbb{R}^2$，diameter of $\Omega = d$，$f \in C^1(\Omega)$，$f = 0$在$\partial\Omega$上且$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = 1$，請寫出相關的結論，並證明之。
(d) 請寫出$\mathbb{R}^n$中(c)所相應的結論。

101 台灣大學數學系高等微積分上由陳金次製作，以創用 CC 姓名標示-非商業性-禁止改作 3.0 台灣授權條款

Chapter 8

數列與級數

8.1 上極限和下極限（limit supremum and limit infimun）

8.1.1

給定數列 $\{a_n\}_{n=1,2,\cdots}$ 於 $\mathbb{R}$ 中，令 $\beta_n = \sup\{a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\}$
則 $\beta_n \geq \beta_{n+1}\ \forall n$
令 $\beta = \lim_{n\to\infty} \beta_n$ 稱為數列 $\{a_n\}$ 的上極限，以 $\lim_{n\to\infty} \sup a_n$ 表示之。
同理，令 $\alpha_n = \inf\{a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\}$
則 $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}\ \forall n$
令 $\alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$ 稱為數列 $\{a_n\}$ 的下極限，以 $\lim_{n\to\infty} \inf a_n$ 表示之。

例 1: 數列 $a_n = 1, 2, 3,\ 1, 2, 3 \cdots$
$\beta_n = 3,\ \alpha_n = 1\ \forall n$
$\lim_{n\to\infty} \sup a_n = 3\ \lim_{n\to\infty} \inf a_n = 1$

例 2: 數列 $a_n : 0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots$
$\beta_n = \infty\ \alpha_n = n$
$\lim_{n\to\infty} \sup a_n = \infty\ \lim_{n\to\infty} \inf a_n = \infty$

例 3: 將 $[0, 1]$ 中有理點任意排成一點列 $\{a_n\}$,
$\beta_n \leq 1\ \forall n, \therefore \lim_{n\to\infty} \sup a_n \leq 1$ (1)
又有理點在 $[0, 1]$ 中稠密，對任意 $\epsilon > 0$ 恆存在無窮多個 a_n 介於 $1-\epsilon$ 和 1 之間。
因此 $\beta_n > 1-\epsilon\ \forall n$
$\therefore \lim_{n\to\infty} \sup a_n \geq 1-\epsilon$
ϵ 任意 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup a_n \geq 1$ (2)
$(1)(2) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup a_n = 1$
同理 $\lim_{n\to\infty} \inf a_n = 0$

8.1.2 $\epsilon - N$ 說帖

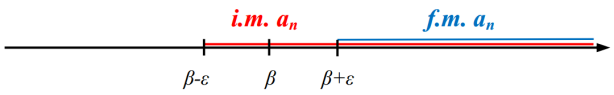
$\lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0\ \exists N$ 使 $\beta - \epsilon < \beta_n < \beta + \epsilon$ 當 $n > N$

(i) $\beta_n < \beta + \epsilon$ 當 $n > N$
即 $\sup\{a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\} < \beta + \epsilon$ 當 $n > N$
即 $a_n < \beta + \epsilon$ 當 $n > N$
換句話說：比 $\beta + \epsilon$ 大的 a_n 頂多有窮個

(ii) $\beta - \epsilon < \beta_n$ 當 $n > N$
即:$\sup\{a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\} > \beta - \epsilon$ 當 $n > N$
即: 數列 $\{a_n\}$ 中有無窮多項 $> \beta - \epsilon$

茲將 (i)(ii) 結論圖示如下：

Figure 8.1:



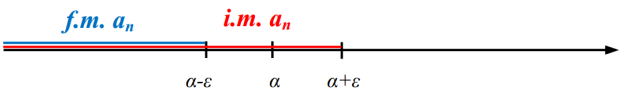
其中 $f.m.a_n$ 表示 finitely many a_n，$i.m.a_n$ 表示 infinitely many a_n
同理，$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$，給定 $\epsilon > 0$ 有

(i) $\exists N$ 使 $a_n > \alpha - \epsilon$ 當 $n > N$
換句話說：比 $\alpha - \epsilon$ 小的 a_n 頂多有窮個

(ii) 數列 $\{a_n\}$ 中有無窮多項 $< \alpha + \epsilon$

圖示如下：

Figure 8.2:



8.1.3 點集說帖

設 $a_i \neq a_j$ 當 $i \neq j$, 且設 $\{a_n\}$ 為有界點列
令 $S = \{a_n | n = 1, 2, 3, \cdots\}$
$\beta = \lim_{n\to\infty} \sup a_n < \infty$

(i) 據 $\epsilon - N$ 說帖，S 中大於 $\beta + \epsilon$ 的點頂多有窮，因此無匯聚點（limit point）
ϵ 任意，故無匯聚點落在 β 之右（比 β 大）

(ii) 數列 a_n 中含無窮多點 $> \beta - \epsilon \ \forall \epsilon > 0$
因此，β 本身即為匯聚點。(exercise)

結論：β 為 S 最大的匯聚點
同理：$\alpha = \lim_{n\to\infty} \inf a_n$ 則 α 為 S 最小的匯聚點

<u>Remark</u>

1. 若 $\exists i \neq j$ 使 $a_i = a_j$，可把這些點視為再次到訪的旅客，雖是同一個人，其衣著，年歲，樣貌已不相同。

2. $\lim_{n\to\infty} \sup a_n$ 及 $\lim_{n\to\infty} \inf a_n$ 為 S 的幾何性質，與數列 $\{a_n\}$ 的排列無關

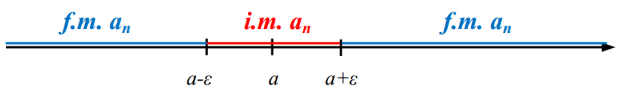
例： $[0,1]$ 中的有理數可數，將其排成一數列 $\{a_n\}$
令 $S = \{a_n | n = 1, 2 \cdots\}$
顯然 1 為 S 最大的匯聚點，0 為 S 最小的匯聚點
故 $\lim_{n\to\infty} \sup a_n = 1$ $\lim_{n\to\infty} \inf a_n = 0$

8.1.4

<u>定理 8.1</u> $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在 $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup a_n = \lim_{n\to\infty} \inf a_n$
証：

($\Rightarrow$) 設 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$
$\forall \epsilon > 0 \ \exists N$ 使 $a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$ 當 $n > N$
圖示如下：

Figure 8.3:



根據 $\epsilon - N$ 說帖：$\lim_{n\to\infty} \sup a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} \inf a_n = a$

($\Leftarrow$) 設 $\lim_{n\to\infty} \sup a_n = \lim_{n\to\infty} \inf a_n = a$
由 $\lim_{n\to\infty} \sup a_n = a \ \exists N_1$ s.t. $a_n < a + \epsilon$ 當 $n > N_1$
由 $\lim_{n\to\infty} \inf a_n = a \ \exists N_2$ s.t. $a - \epsilon < a_n$ 當 $n > N_2$
取 $N = \max\{N_1, N_2\}$ 則 $a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$ 當 $n > N$
即 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

8.2 級數（Series）

8.2.1

給定數列 $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$
令 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$
若 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 存在 $= S$，稱級數 $a_1 + a_2 + \cdots$ 收斂（converges）到 S。
以 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$ 表示之
若 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 不存在，稱級數 $a_1 + a_2 + \cdots$ 發散（diverges）
以 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverges 表示之。

<u>定理 8.2</u> $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

証： 令 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$，$\lim_{n\to\infty} S_n = S$ 則 $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$
$a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0$ □

例： 幾何級數
$\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ 收斂 $\Leftrightarrow |r| < 1$

說明：$S_n = r + r^2 + \cdots + r^n = r\frac{1-r^n}{1-r}$

(i) $|r| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{r}{1-r}$ $\therefore$ 級數收斂

(ii) $|r| > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n$ 不存在 $\therefore$ 級數發散

(iii) $|r| = 1$ $\lim_{n\to\infty} r^n \neq 0$ $\therefore$ 級數發散，依定理 8.2

根據 Cauchy's criterion:
$\lim_{n\to\infty} S_n$ 存在 $\Leftrightarrow \{S_n\}$ 為 Cauchy sequence
即 $\forall\epsilon > 0\ \exists N$ 使 $|S_m - S_n| < \epsilon$ 當 $m > n > N$
或 $|\sum_{i=n}^{m} a_i| < \epsilon$ 當 $m > n > N$
或 $|\sum_{i=n}^{n+k} a_i| < \epsilon\ \forall k$，當 $n > N$

8.3 正項級數（Series of positive terms）

$a_n > 0\ \forall n$。如何判斷 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收斂與發散？
在初微裡，同學們已學過幾種不同的判斷法，但萬法歸宗，只有一個方法－比較法。為了方便把它們獨立出來，有輩分法，積分法，比率法，根式法等，本質上都是比較法，簡述如下。

8.3.1 比較法（Comparison Test）

<u>定理 8.3</u> $0 \le a_n \le b_n \ \forall n$ 則
$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$

<u>Remark</u>

$a_n \ge 0,\ S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，則 $S_n \nearrow$ in n
若 $\exists k$ 使 $S_n \le k\ \forall n$ 則依實數完備性 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 存在，故正項級數
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ (bounded) $\Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂
唯有正項級數可以這樣寫，其他級數
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂

例 1:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots \\
&= 1+\frac{1}{2}+\left(\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{2\text{ 項}}\right)+\left(\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}_{4\text{ 項}}\right)+\left(\underbrace{\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}}_{8\text{ 項}}\right)+\cdots \\
&\ge 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots=\infty
\end{aligned}$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ 發散！

例 2:

$$\begin{aligned}
S_n =& \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} \\
=& \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\
=& 1-\frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty} S_n = 1$
故級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. 據此，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots \\
&\quad < 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots=2
\end{aligned}$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收斂，其值為 $\frac{\pi^2}{6}$（Euler）。有幾種不同的方法可求其值，利用 Fourier series 是其中一個便捷的方法。

例 3: $p \le 1,\ \frac{1}{n^p} \ge \frac{1}{n},\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \infty$
$p \ge 2,\ \frac{1}{n^p} \le \frac{1}{n^2},\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty$
事實上，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty$ 當 $p > 1$，待介紹積分法時即可判斷。

8.3.2 輩分法（Order Test）

給定數列 $\{a_n\}$ 及 $\{b_n\}$，我們稱他們為同輩（same order）若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\alpha,\qquad 0<\alpha<\infty$$

例如：

$2n+5$ 和 $7n+9$ 同輩

$n^2+99n+1001$ 與 n^2 同輩

$\sin\frac{1}{n}$ 與 $\frac{1}{n}$ 同輩，因 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

$1-\cos\frac{1}{n}$ 與 $\frac{1}{n^2}$ 同輩，因 $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 與 $\frac{1}{n}$ 同輩，因 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

n^{100} 與 2^n 不同輩，因 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^{100}}{2^n}=0$

$n!$ 與 2^n 不同輩，因 $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$

<u>定理 8.4</u> $\{a_n\},\{b_n\}$ 同輩, $a_n,b_n>0$，則 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n<\infty\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}b_n<\infty$
証：

($\Leftarrow$) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\alpha$, 對 $\epsilon=1$ $\exists N$ 使 $\frac{a_n}{b_n}<1+\epsilon$ 當 $n>N$
$\Rightarrow\sum_{n>N}a_n<(1+\epsilon)\sum_{n>N}b_n<\infty$
$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n<\infty$

($\Rightarrow$) $\alpha>0,\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\frac{1}{\alpha}$ 據前
$\sum_{n=1}^{\infty}a_n<\infty\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}b_n<\infty$

例 1: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2-n+1}}=\infty$。因 $\frac{1}{\sqrt{n^2-n+1}}$ 與 $\frac{1}{n}$ 同輩，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$

例 2: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{\sqrt{n^5-n+1}}<\infty$。因 $\frac{2n+3}{\sqrt{n^5-n+1}}$ 與 $\frac{1}{n^{3/2}}$ 同輩，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}<\infty$

例 3: $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}=\infty$ 因 $\sin\frac{1}{n}$ 與 $\frac{1}{n}$ 同輩，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$

例 4: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)<\infty$ 因 $1-\cos\frac{1}{n}$ 與 $\frac{1}{n^2}$ 同輩，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$

<u>Remark</u>
通常我們在找同輩數列時，不會自找麻煩，弄出個 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 不存在的情形。萬一是這種情形，我們稱 $\{a_n\},\{b_n\}$ 同輩，若

$$0<\lim_{n\to\infty}\inf\frac{a_n}{b_n}\le\lim_{n\to\infty}\sup\frac{a_n}{b_n}<\infty$$

定理 8.3 仍然成立。

8.3.3 積分法（Integral Test）

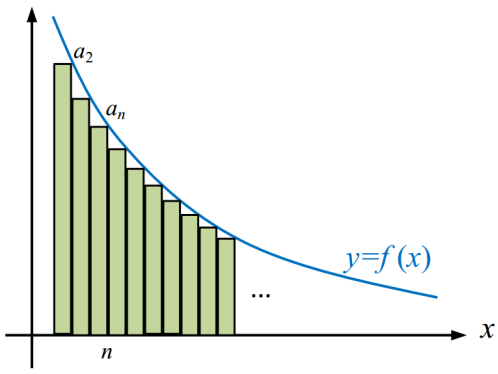
<u>定理 8.4</u> $a_n = f(n)$。若 $f(x) \searrow 0$ 當 $x \to \infty$，則

$$\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x < \infty \;\Leftrightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

証：

$(\Rightarrow)$ 如圖：

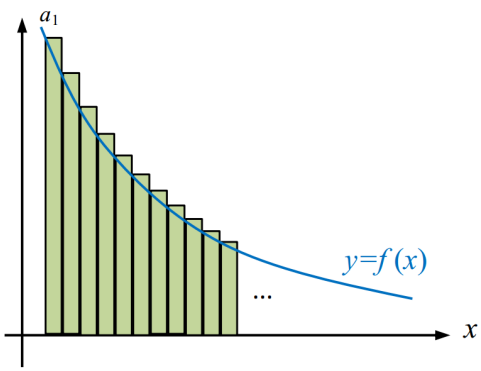
Figure 8.4:



$a_2 + a_3 + \cdots =$ 綠色區域面積 $<$ 曲線 $y = f(x)$ 與 x 軸在 $[1, \infty)$ 上所圍面積
$= \int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x < \infty$
$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$

$(\Leftarrow)$ 如圖：

Figure 8.5:



$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots =$ 綠色區域面積 $>$ 曲線 $y = f(x)$ 與 x 軸在 $[1, \infty)$ 上所圍面積
$= \int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x < \infty$ □

例 1: p-series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} < \infty & p > 1 \\ = \infty & p \le 1 \end{cases}$$

證： 若 $p \le 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \infty$ 不在話下。

不妨設 $p > 0$，令 $f(x) = \frac{1}{x^p}$，則 $f(x) \searrow 0$ 當 $x \to \infty$

(i) $p \ne 1$

$$\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x = \frac{1}{-p+1}x^{-p+1}\Big|_1^{\infty} \begin{cases} = \infty & p \le 1 \\ < \infty & p > 1 \end{cases}$$

(ii) $p = 1$

$$\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x\Big|_1^{\infty} = \infty$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \infty$ 當 $p \le 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty$ 當 $p > 1$ □

p-series 是常用來判定其他級數斂散的基本級數。

例 2: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \begin{cases} < \infty & p > 1 \\ = \infty & p \le 1 \end{cases}$

證： 同上例，$p \le 0$ 不在話下，設 $p > 0$

令 $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^p}$ 則 $f(x) \searrow 0$ 當 $x \to \infty$

(i) $p \ne 1$

$$\int_2^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p} = \int_2^{\infty} \frac{1}{(\ln x)^p}\mathrm{d}(\ln x)$$

$$= \frac{1}{-p+1}(\ln x)^{-p+1} \begin{cases} = \infty & 0 < p < 1 \\ < \infty & p > 1 \end{cases}$$

(ii) $p = 1$

$$\int_2^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x} = \int_2^{\infty} \frac{1}{\ln x}\mathrm{d}(\ln x) = \ln(\ln x)\Big|_2^{\infty} = \infty$$

故 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \begin{cases} = \infty & 0 < p \le 1 \\ < \infty & p > 1 \end{cases}$

8.3.4 比率法（Ratio Test）

<u>定理 8.5</u> $a_n > 0$。令 $r = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{a_{n+1}}{a_n}$, $\rho = \lim_{n\to\infty} \inf \frac{a_{n+1}}{a_n}$，則

(i) $r < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$

(ii) $\rho > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$

(iii) $\rho \le 1 \le r$，不定。

證：

(i) $r<1$，任取 $\epsilon>0$，使 $\lambda=r+\epsilon<1$

對此 $\epsilon>0$，$\exists N$ 使 $\frac{a_{n+1}}{a_n}<r+\epsilon=\lambda$ 當 $n\geq N$

即 $a_{n+1}<\lambda a_n$ 當 $n\geq N$，於是有：

$$
\begin{aligned}
&a_{N+1}<\lambda a_N\\
&a_{N+2}<\lambda a_{N+1}<\lambda^2 a_{N+2}\\
&\cdots\\
&a_{N+k}<\lambda a_{N+k-1}<\lambda^k a_N\\
\therefore \sum_{n=N}^{\infty} a_n &< a_N\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k = a_N\frac{1}{1-\lambda}
\end{aligned}
$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n<\infty$

(ii) $\rho>1$，任取 $\epsilon>0$ 使 $1<\rho-\epsilon$

對此 $\epsilon>0$, $\exists N$ 使 $\frac{a_{n+1}}{a_n}>\rho-\epsilon=\lambda$ 當 $n\geq N$

即 $a_{n+1}>\lambda a_n$ 當 $n\geq N$。於是有：

$$
\begin{aligned}
&a_{N+1}>\lambda a_N\\
&a_{N+2}>\lambda a_{N+1}>\lambda^2 a_N\\
&\vdots\\
&a_{N+k}>\lambda a_{N+k-1}>\lambda^k a_N
\end{aligned}
$$

$\therefore \sum_{n=N}^{\infty} a_n>a_N\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k=\infty$，$\because \lambda>1$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\infty$

(iii) 考慮幾何級數 $1+x+x^2+\cdots$

把此級數各項乘以 k 倍，得新級數 $k+kx+kx^2+\cdots$

將第二個級數各項依序交錯插入第一級數，得到第三個級數：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=1+k+x+kx+x^2+kx^2+\cdots$$

且看 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$： $k,\frac{x}{k},k,\frac{x}{k},\cdots$

不妨設 $k>x$, 於是：

$$r=\lim_{n\to\infty}\sup\frac{a_{n+1}}{a_n}=k,\quad \rho=\lim_{n\to\infty}\inf\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{x}{k}$$

取 $k=2$,$x=\frac{1}{2}$，相應 $r=2>1$, $\rho=\frac{1}{4}<1$

此時 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n<\infty$

取 $k=2$,$x=1$，相應 $r=2>1$, $\rho=\frac{1}{2}<1$

此時 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\infty$

Remark

若 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在，$\rho = r$。則當

$$r < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

$$r > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$$

$$r = 1 \quad \text{不定}$$

$$\text{（例：}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty \text{ 皆具 } r = 1\text{）}$$

8.3.5 根式法（Root Test）

定理 8.6 $a_n > 0$, 令 $r = \lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{|a_n|}$

(i) $r < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$

(ii) $r > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$

(iii) $r = 1$ 不定。

証：

(i) $r < 1$，任選 ϵ 夠小，使 $\lambda = r + \epsilon < 1$
對此 $\epsilon > 0$，$\exists N$ 使 $\sqrt[n]{|a_n|} < r + \epsilon = \lambda$，當 $n \geq N$
即：$a_n < \lambda^n$ 當 $n \geq N$
$\Rightarrow \quad \sum_{n\geq N} a_n < \sum_{n\geq N}\lambda^n < \infty \because \lambda < 1$
$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$

(ii) $r > 1$
取 ϵ 夠小，使 $\lambda = r - \epsilon > 1$
對此 $\epsilon > 0$，$\sqrt[n]{a_n}$ 中有無窮多項大於 $\lambda = r - \epsilon$
即：a_n 中有無窮多項 $> \lambda^n$
$\lambda > 1 \ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$，故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$

(iii) $r = 1$ 級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty$，故未定。□

定理 8.7 Root test 優於 Ratio test

Lemma $a_n > 0$，則

$$\lim_{n\to\infty}\inf\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \lim_{n\to\infty}\inf\sqrt[n]{a_n} \leq \lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{a_n} \leq \lim_{n\to\infty}\sup\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

証：

(i) 欲証 $\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{a_n} \le \lim_{n\to\infty}\sup\frac{a_{n+1}}{a_n}$

令 $\lim_{n\to\infty}\sup\frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$

給定 $\epsilon > 0$，$\exists N$ 使 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \alpha + \epsilon = \lambda$，當 $n \ge N$

於是有

$$
\begin{aligned}
&a_{N+1} < \lambda a_N \\
&a_{N+2} < \lambda a_{N+1} < \lambda^2 a_N \\
&\vdots \\
&a_{N+k} < \lambda a_{N+k-1} < \lambda^k a_N
\end{aligned}
$$

故 $\sqrt[N+k]{a_{N+k}} < \lambda^{\frac{k}{N+k}} \cdot a_N^{\frac{1}{N+k}}$

而 $\lim_{k\to\infty}\lambda^{\frac{k}{N+k}} = \lambda$, $\lim_{k\to\infty} a_N^{\frac{1}{N+k}} = 1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{a_n} \le \lambda = \alpha + \epsilon$

ϵ 任意，故 $\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{a_n} \le \alpha$ 得証。$\square$

(ii) 同理可証 $\lim_{n\to\infty}\inf\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \lim_{n\to\infty}\inf\sqrt[n]{a_n}$

定理 8.7 的證明：

根據上述 Lemma，$\lim_{n\to\infty}\sup\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{a_n} < 1$

即 Ratio test 判斷出收斂，Root test 也能看得出來。

$\lim_{n\to\infty}\inf\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{a_n} > 1$

即 Ratio test 判斷出發散，Root test 也能看得出來。

但是 Root test 能判斷，Ratio test 不一定能判斷出來，故 Root test 優於 Ratio test。且看下例：

例 1 考慮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots$

此為收斂級數。

- Ratio test $\frac{a_{n+1}}{a_n}$： $\frac{2}{3}, \frac{3}{2^2}, \frac{2^2}{3^2}, \frac{3^2}{2^3}, \frac{2^3}{3^3}, \cdots$

  $\lim_{n\to\infty}\sup\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty$

  $\lim_{n\to\infty}\inf\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

  Ratio test 無言以對。

- Root test $\sqrt[n]{a_n}$： $\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{3}\right)^{1/2}, \left(\frac{1}{2^2}\right)^{1/3}, \left(\frac{1}{3^2}\right)^{1/4}, \left(\frac{1}{2^3}\right)^{1/5}, \cdots$

  $\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} 2^{-\frac{n}{2n-1}} = 1/\sqrt{2} < 1$

  Root test 判斷其為收斂。

例 2 考慮級數 $\sum a_n = 3 + 2 + 3^2 + 2^2 + 3^3 + 2^3 + \cdots$

此為發散級數

- Ratio test $\frac{a_{n+1}}{a_n}$: $\frac{2}{3}, \frac{3^2}{2}, \frac{2^2}{3^2}, \frac{3^3}{2^2}, \frac{2^3}{3^3}, \cdots$
  $\lim_{n\to\infty} \sup \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{2^n} = \infty$
  $\lim_{n\to\infty} \inf \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$
  Ratio test 愛莫能助
- Root test $\sqrt[n]{a_n}$: $3, 2^{1/2}, 3^{2/3}, 2^{2/4}, 3^{3/5}, \cdots$
  $\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} 3^{\frac{n}{2n-1}} = \sqrt{3} > 1$
  Root test 判斷其為發散。

理論上 Root test 優於 Ratio test，但實際上，粗未必等於不好，粗有粗的好處，因它好算。平常碰到的問題常常是 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在，這時 Ratio test 又等同於 Root test 了，故常採用之。

8.4 交錯級數（Alternating Series）

$a_n > 0$，級數 $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$
正負項交錯出現，稱為交錯級數。
<u>Lemma</u> $x_i \geq x_{i+1} > 0 \ \forall i$，則

$$t_n = |x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \cdots + (-1)^{n+1} x_n| \leq x_1 \quad \forall n.$$

說明：

$$\begin{aligned}
t_2 &= x_1 - x_2 < x_1 \\
t_3 &= x_1 - x_2 + x_3 = x_1 - (x_2 - x_3) \leq x_1 \quad \because x_2 - x_3 \geq 0 \\
t_4 &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = x_1 - (x_2 - x_3) - x_4 \leq x_1
\end{aligned}$$

依此類推以致無窮，可知 $t_n \leq x_1$

<u>定理 8.8</u> $a_n \searrow 0$ 當 $n \to \infty$，則交錯級數 $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$ 收斂。
証：檢驗 Cauchy 條件

令 $S_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1} a_n$，取 $m > n$，則

$$\begin{aligned}
|S_m - S_n| =& |a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots + (-1)^{m+n} a_m| \\
\leq& a_{n+1} \quad \text{（根據上述 lemma）}
\end{aligned}$$

而 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，給定 $\epsilon > 0$，$\exists N$ 使

$$|a_n| < \epsilon \qquad \text{當} n > N$$

故 $|S_m - S_n| < \epsilon$ 當 $m > n > N$ $\square$

<u>Remark</u>

$a_n \geq a_{n+1}$ 這個條件是定理成立的關鍵。無此保證，定理未必成立。且看下例：

例 1: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots=\infty$ ；$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots<\infty$

穿插之後使成交錯級數

$\sum_{n=1}(-1)^{n+1}a_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4^2}+\cdots$

此級數發散（請同學自行驗證），但 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

例 2: 級數 $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$ 收斂，因 $\frac{1}{\sqrt{n}}\searrow 0$

例 3: $a_n>0, \sum_{n=1}^{\infty}a_n<\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n^p<\infty\ \forall p>1$

說明：

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n<\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=0$

因此，$\exists N$ 使 $a_n<1$ 當 $n>N$

$p>1 \Rightarrow a_n^p<a_n$

$\Rightarrow \sum_{n>N}a_n^p<\sum_{n>N}a_n<\infty$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n^p<\infty\ \square$

例 4: $a_n\in\mathbb{R}$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收斂 $\not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收斂

且看：$a_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收斂

但 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots=\infty$

你說：原本是交錯級數，平方後變成正項級數，破壞了平衡，才導致發散。好，那麼三次方如何？它保存了 a_n 的正負號。

例 5: $a_n\in\mathbb{R}$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收斂，問 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^3$ 是否亦收斂

分析：

1. $\frac{1}{\sqrt[3]{1}}-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\cdots$ 收斂。三次方得
   $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ 亦收斂。
2. 考慮將前述級數變形，奇數項不變，使其三次方後奇數項級數保持發散；將偶數項 a_{2k} 等分成 $2k$ 項，使其三次方後偶數項級數變為收斂。經過此操作後，得新級數

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{\sqrt[3]{1}}-\underbrace{\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)}_{2\text{ 項}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\underbrace{\left(\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\cdots+\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)}_{4\text{ 項}}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}-\underbrace{\left(\frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt[3]{6}}+\cdots+\frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt[3]{6}}\right)}_{6\text{ 項}}+\frac{1}{\sqrt[3]{7}}+\cdots$$

且看：

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 =& 1-\left(\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\right)+\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{4^3}\cdot\frac{1}{4}\cdot 4\right)+\frac{1}{5}-\left(\frac{1}{6^3}\cdot\frac{1}{6}\cdot 6\right)+\frac{1}{7}+\cdots\\ =& 1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6^3}+\cdots\\ =& \infty\end{aligned}$$

你說：你造的 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 並不是交錯級數，有點偷雞摸狗，不怎麼令人服氣。
且看：

例 6: 試造一交錯級數

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots \quad \text{收斂}, \ a_n > 0$$

但 $a_1^3 - a_2^3 + a_3^3 - a_4^3 + \cdots$ 發散
解：我已經做夠多了，讓聰明的你來接力吧！（例 5 是我交給你的棒子）

8.5 絕對收斂（Absolutely Convergent）與條件收斂（Conditionally Convergent）

級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 稱為<u>絕對收斂</u>，若 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收斂。
級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 稱為<u>條件收斂</u>，若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂，但 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 發散。

例： $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$ 為絕對收斂
$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ 為條件收斂。

8.5.1 重排（Rearrangement）

Riemann 觀察級數 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ 為條件收斂，其值為 $\ln 2 = 0.693147\cdots$
將它重排如下：
$1+\frac{1}{3}\ -\frac{1}{2}\ +\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\ -\frac{1}{4}+\cdots$
此級數收斂（留給同學驗證），設其值為 S，則 $S > 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2} = 0.833\cdots > \ln 2$，因 $\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4} > 0,\ \frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{10} > 0, \cdots$
重新排列後收斂值變了。Riemann 還發現，給定任意 $\alpha \in \mathbb{R}$，恆可將原本級數重排，使其收斂到 α。
其觀察如下：

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots = \infty$$
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots = \infty$$

1. 第一步：存在最小的 n_1 使 $p_1 = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n_1-1}$ 第一次超越 α
   注意：$p_1 - \alpha < \frac{1}{2n_1-1}$

2. 第二步：存在最小的 m_1 使 $p_1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2m_1}\right)$ 第一次又小於 α
   令 $q_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2m_1}$，$\alpha - (p_1 - q_1) < \frac{1}{2m_1}$

3. 第三步：存在最小的 n_2 使 $p_1 - q_1 + \frac{1}{2n_1+1} + \cdots + \frac{1}{2n_2-1}$ 第二次超越 α。
   令 $p_2 = \frac{1}{2n_1+1} + \cdots + \frac{1}{2n_2-1}$, $p_1 - q_1 + p_2 - \alpha < \frac{1}{2n_2-1}$

4. 第四步：存在最小的 m_2 使 $p_1 - q_1 + p_2 - \left(\frac{1}{2m_1+2} + \cdots + \frac{1}{2m_2}\right)$ 第二次又小於 α
   令 $q_2 = \frac{1}{2m_1+2} + \cdots + \frac{1}{2m_2}$, $\alpha - (p_1 - q_1 + p_2 - q_2) < \frac{1}{2m_2}$

依此類推以致無窮，得一重排級數收斂到 α（因 $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2n_k-1} = 0$, $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2m_k} = 0$）
茲將其推廣到一般交錯級數，敘述如下：
<u>定理 8.9</u>
$a_n \in \mathbb{R}$, $\sum_n a_n$ 為條件收斂，給定 $\alpha < \beta$，存在 $\sum a_n$ 的重排級數 $\sum b_n$，使
$\lim_{n\to\infty} \sup B_n = \beta$, $\lim_{n\to\infty} \inf B_n = \alpha$
其中 $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$。

在證明它之前，我們先敘述一個引理
<u>Lemma</u> $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂到 A，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收斂到 B
則 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ 收斂到 $A + B$。
（引理的證明則留給同學們當習題。）

定理 8.9 的分析：

1. Claim: $\sum a_n$ 收斂，$\sum |a_n| = \infty$，
   則 a_n 中的正項級數和負項級數應該都發散，一如 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$ 一般。
   理由：令 $x_n = \frac{|a_n|+a_n}{2} = \begin{cases} a_n & 當 a_n > 0 \\ 0 & 當 a_n \le 0 \end{cases}$
   $y_n = \frac{|a_n|-a_n}{2} = \begin{cases} 0 & 當 a_n > 0 \\ -a_n & 當 a_n \le 0 \end{cases}$
   由於 $\sum a_n$ 收斂，若 $\sum x_n$ 也收斂，根據上述引理，$\sum |a_n|$ 必須收斂，違背了先天條件收斂之設定。故 $\sum x_n = \infty$ 同理，$\sum y_n = \infty$

2. 利用這兩個發散的級數來拔河，一如上例一般。

   第一步：存在最小的 n_1 使 $p_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n_1}$ 第一次超越 β
   則 $p_1 - \beta < x_{n_1}$

第二步：存在最小的 m_1 使 $p_1-(y_1+\cdots+y_{m_1})$ 第一次小於 α，

令 $q_1=y_1+\cdots y_{m_1}$

則 $\alpha-(p_1-q_1)<y_{m_1}$

第三步：存在最小的 n_2 使 $p_1-q_1+(x_{n_1+1}+\cdots+x_{n_2})$ 第二次超越 α

令 $p_2=x_{n_1+1}+\cdots+x_{n_2}$

則 $p_1-q_1+p_2-\alpha<x_{n_2}$

第四步：存在最小的 m_2 使 $p_1-q_1+p_2-(y_{m_1+1}+\cdots+y_{m_2})$ 第二次小於 α，

令 $q_2=y_{m_1+1}+\cdots+y_{m_2}$

則 $\alpha-(p_1-q_1+p_2-q_2)<y_{m_2}$

依此類推以致無窮，得新的重排數列 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

注意 $\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=0$

故 $\lim_{n\to\infty}\sup B_n=\beta$

同理 $\lim_{n\to\infty}\inf B_n=\alpha$

<u>Remark</u>

如果 $\beta=\infty$，令 $\beta_k\nearrow\infty$ 當 $k\to\infty$

上面的拔河過程中，第一次越過 β_1 就回頭，依此類推第 k 次越過 β_k 就回頭，則 $\lim_{n\to\infty}\sup B_n=\infty$

$\alpha=-\infty$ 情形同。

以下三個定理，其證明可由 Cauchy's criterion 得之

在此敘述而不証，請同學自行証之。

<u>定理 8.10</u>

$a_n\geq 0$，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}=\{b_n\}_{n=1}^{\infty}\cup\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{b_n\}\cap\{c_n\}=\emptyset$

則 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}b_n+\sum_{n=1}^{\infty}c_n$

<u>定理 8.11</u>

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$，$\{b_n\}$ 為 $\{a_n\}$ 的重排，則 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$

<u>定理 8.12</u>

$\lim_{n\to\infty}a_n=0$，固定正整數 k

$n_j\leq k\ \forall j=1,2,\cdots$

$b_1=a_1+a_2+\cdots+a_{n_1}$, $b_2=a_{n_1+1}+a_{n_1+2}+\cdots+a_{n_2}$

$b_3=a_{n_2+1}+a_{n_2+2}+\cdots+a_{n_3}\ \cdots$，依此類推，則

$\sum b_n$ 與 $\sum a_n$ 同步發散或收斂，且其值同。

例： 判斷下列級數為收斂或發散

(a) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots$

(b) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots$

分析：

(a) $=1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{7}+\cdots$（定理 8.12）
$>1+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}\cdots$
$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3n+1}=\infty$

(b) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots$
$=\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+\cdots$（定理 8.12）
$=\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\right]+\left[\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)\right]+\cdots$
$=\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\right]+\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\cdots\right]$（定理 8.10）
$=\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right]+\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots\right]$
括號內二級數收斂，其值分別為 $\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\ln 2$，故
(b)$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2<\infty$

<u>Remark</u>
$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}$
$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots=\frac{1}{2}\ln 2$
在初微中應該都粗略學過，但它的嚴格求法要利用 Abel limit theorem，將於第 8.8 節中詳談之。

8.6 Dirichlet Test

所謂 Dirichlet Test 是針對形如 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 級數的收斂判斷。

<u>定理 8.13</u>
$a_n,b_n\in\mathbb{R}$，$a_n\searrow 0$，$B_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$ 有界
則 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收斂

証: 設 $|B_n|\le M\ \forall n$
$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$，則
$|S_m-S_n|=|a_{n+1}(b_{n+1})+\cdots+a_{m-1}(b_{m-1})+a_m(b_m)|$
$=|a_{n+1}(B_{n+1}-B_n)+\cdots+a_m(B_m-B_{m-1})|$
$=|-a_{n+1}B_n+(a_{n+1}-a_{n+2})B_{n+1}+\cdots+(a_{m-1}-a_m)B_{m-1}+a_mB_m|$
$\le a_{n+1}M+(a_{n+1}-a_{n+2})M+\cdots+(a_{m-1}-a_m)M+a_mM$
（記得 $a_j\ge a_{j+1}\ \forall j$）
$=2Ma_{n+1}$，$m>n$
又 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$，給定 $\epsilon>0\ \exists N$ 使

$0 < a_n < \frac{\epsilon}{2M}$ 當 $n > N$，故
$|S_m - S_n| < \epsilon$ 當 $n > N$
$\therefore \{S_n\}$ 為 Cauchy sequence
$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收斂 $\square$

例： $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 收斂 $\forall x$
分析：

1. 令 $a_n = \frac{1}{n}$，$b_n = \sin nx$。顯然 $a_n \searrow 0$ 當 $n \to \infty$
   $B_n = \sum_{k=1}^{n} \sin kx$ 有界嗎？
   如果有界，則依 Dirichlet test，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 收斂 $\forall x$。
2. $2\sin\frac{x}{2} B_n = \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2} \cdot \sin kx = \sum_{k=1}^{n} \left[\cos(k - \frac{1}{2})x - \cos(k + \frac{1}{2})x\right]$
   $= \cos\frac{x}{2} - \cos(n + \frac{1}{2}x)$
   $= 2\sin\frac{nx}{2} \cdot \sin\frac{(n+1)x}{2}$
   故 $B_n = \left[\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\right] / \sin\frac{x}{2}$，$x \neq 0$
   $|B_n| < \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}$，$x \neq 0$
   固定 x，B_n 有界
   $\therefore \sum_n \frac{\sin nx}{n}$ 收斂當 $x \neq 0$
   若 $x = 0$，級數顯然收斂為 0。

<u>Remark</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi - x) & 0 < x \leq \pi \\ 0 & x = 0 \\ -\frac{1}{2}(\pi + x) & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

是一個有名的級數，其收斂值可用 Fourier series 或 complex power series 的求和方法得知。

8.7 Cauchy product

給定兩收斂級數 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$
$A \cdot B = (a_0 + a_1 + \cdots)(b_0 + b_1 + \cdots)$
右邊為二級數相乘，可否以乘法分配律逐項交叉相乘？即 AB 是否等於
$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \cdots$ ？
令 $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$，$c_n$ 稱為 $\sum a_n$ 及 $\sum b_n$ 的 Cauchy's product series
問：$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB$ 是否成立？
Cauchy product 與冪級數習習相關，例如對複冪級數

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 及 $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$ $|z|<1$

$$\begin{aligned}f(z)g(z)&=(a_0+a_1z+\cdots)(b_0+b_1z+\cdots)\\&=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)z+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)z^2+\cdots\\&=c_0+c_1z+c_2z^2\cdots\end{aligned}$$

上式運作成立嗎？如成立，可以令 $z=1$ 從而得到 $AB=\sum_{n=0}^{\infty}c_n$ 嗎？這些都是有待釐清的問題。

首先我們來觀察以下兩例：

例 1: $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=\sum_{n=0}^{\infty}b_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}=1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}$ 收斂，而

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n=1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots$$

$$\begin{aligned}c_n&=\frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{1}}\\&\geq(n+1)\frac{1}{\sqrt{\frac{n+2}{2}}\sqrt{\frac{n+2}{2}}}=2\frac{n+1}{n+2}\to 2\text{當}n\to\infty\end{aligned}$$

顯然 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n$ 並不收斂。

例 2: $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=(3+3+3^2+3^3+\cdots)$ 發散

$\sum_{n=0}^{\infty}b_n=(-2+2+2^2+2^3+\cdots)$ 發散

但 $c_0=3\cdot(-2)=-6$

$c_1=3\cdot 2+3\cdot(-2)=0$

$c_2=3\cdot 2^2+3\cdot 2-3^2\cdot 2=0$

$c_3=3\cdot 2^3+3\cdot 2^2+3^2\cdot 2-3^3\cdot 2=0$

依此類推，有 $c_n=0$ 當 $n>1$

因此 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n=-6$，它卻收斂了！

什麼條件下，可以確保 $(\sum a_n)(\sum b_n)=\sum c_n$？

簡易的觀察：

若 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|<\infty$ 且 $\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|<\infty$

令 $P=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$, $Q=\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|$

則 $\sum_{k=0}^{n}|c_k|=(\sum_{k=0}^{n}|a_k|)(\sum_{k=0}^{n}|b_k|)$（有窮項分配律成立）$<PQ\ \forall n$

故 $\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|$ 收斂 $\Rightarrow\sum_{k=0}^{\infty}c_k$ 收斂。

令 $C=\sum_{k=0}^{\infty}c_k$，欲証 $C=AB$

再根據有窮項分配律成立，

$\sum_{k=0}^{n}c_k=\sum_{k=0}^{n}a_k\sum_{l=0}^{n}b_l$

令 $n\to\infty$，得 $C=AB$ $\square$

上面的推論對複數系仍然成立，整理於以下定理：

<u>定理 8.14</u>
設 $a_n, b_n \in \mathbb{C}$，若 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$ 且 $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < \infty$，則 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 收斂，且

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)$$

其中 $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$。

根據上述定理及 Abel limit 定理，我們將有如下定理：
<u>定理 8.15</u>
若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n, \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 收斂，則

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)$$

這個定理等到我們讀 Abel limit 定理時再來證明之。

例 1 告訴我們，必須知道 $\sum c_n$ 收斂定理才成立。不過 $\sum c_n$ 的收斂有時並不是顯而易見，有沒有一種方法不用判定 $\sum c_n$ 的收斂，而能確保定理成立？
當然，定理 8.11 說：只要 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$ 及 $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < \infty$，則定理成立。不過，這個條件太強了。

F.Mertens（1840-1927，德國數學家）說：只要 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$ 或 $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < \infty$ 就夠了，不用兩個級數都收斂。
<u>定理 8.16</u>
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A, \sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$。若 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$，則 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = A \cdot B$，$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

証: 令 $A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$
$B_n = b_0 + \cdots + b_n$
$C_n = c_0 + \cdots + c_n$
$\beta_n = B - B_n$，則

$$\begin{aligned} C_n =& (a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \cdots + (a_n b_0 + \cdots + a_0 b_n) \\ =& a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \cdots + a_n B_0 \\ =& a_0 (B - \beta_n) + a_1 (B - \beta_{n-1}) + \cdots + a_n (B - \beta_0) \\ =& A_n B - (a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \cdots + a_n \beta_0) \end{aligned} \tag{1}$$

令 $\lambda_n = a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \cdots + a_n \beta_0$
若能證明 $\lambda_n \to 0$ 當 $n \to \infty$，則於 (1) 式中令 $n \to \infty$ 即得 $C = AB$。
令 $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$

給定 $\epsilon > 0$，由於 $\beta_n \to 0$ 當 $n \to \infty$，$\exists N$ 使
$|\beta_n| \leq \epsilon$ 當 $n \geq N$。於是：

$$\begin{aligned}|\lambda_n| \leq & |\beta_0 a_n + \cdots + \beta_N a_{n-N}| + |\beta_{N+1} a_{n-N-1} + \cdots + \beta_n a_0| \\ \leq & |\beta_0 a_n + \cdots + \beta_N a_{n-N}| + \epsilon\alpha\end{aligned}$$

固定 N，令 $n \to \infty$，由於 $\sum a_n$ 收斂，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，得
$\lim_{n\to\infty} \sup |\lambda_n| \leq \epsilon\alpha$
ϵ 任意 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup \lambda_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ ，得証。$\square$

<u>Remark</u>
以上諸定理對 a_n, b_n 為複數仍然成立。

例： 定義複指數函數 $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots,\ z \in \mathbb{C}$
依 Ratio test $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|z|}{n+1} \to 0 < 1$ 當 $n \to \infty$
故級數絕對收斂 $\forall z \in \mathbb{C}$。於是有
$(1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots)(1 + b + \frac{b^2}{2!} + \cdots)$
$= 1 + (a + b) + \frac{(a^2+2ab+b^2)}{2!} + \cdots$
$= 1 + (a + b) + \frac{(a+b)^2}{2!} + \frac{(a+b)^3}{3!} + \cdots$
即 $e^a \cdot e^b = e^{a+b}\ \forall a, b \in \mathbb{C}$
此即指數律

<u>Remark</u>

1. $e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \cdots$
   $= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots\right)$ 註[1]
   $= \cos\theta + i\sin\theta$

2. $z = x + iy$，則
   $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$
   $|e^z| = e^x$
   $e^{z+2\pi ni} = e^{x+i(y+2\pi n)} = e^x[\cos(y + 2\pi ni) + i\sin(y + 2\pi ni)] = e^x(\cos y + i\sin y) = e^z\ \forall n \in \mathbb{Z}$
   故 e^z 為多對一的函數，與實指數函數的一對一大異其趣。

[1]因級數絕對收斂，任意調換各項順序不影響級數的收斂值。（定理 8.10）

8.8 冪級數（power series）

8.8.1 收斂性

定義

給定 $a_n, z \in \mathbb{C}$，$n = 0, 1, 2, \cdots$
考慮 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$，稱為以 $\{a_n\}$ 為係數的冪級數。稱此冪級數收斂到 $f(z)$，若 $\forall \epsilon > 0\ \exists N$ 使 $|S_n(z) - f(z)| < \epsilon$ 當 $n > N$，其中 $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$。

8.8.2 冪級數的均勻收斂

設 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 為複平面上的一區域，級數 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 收斂到 $f(z)\ \forall z \in \Omega$
即：給定 $\epsilon > 0$，$\exists N_z$ 使 $|S_n(z) - f(z)| < \epsilon$ 當 $n > N_z$，其中這個 N_z 可能隨 Ω 上的每一點 z 而變。如果能找到一個共同的 N 使
$|S_n(z) - f(z)| < \epsilon$ 當 $n > N\ \forall z \in \Omega$
則稱級數在區域 Ω 上均勻收斂（converges uniformly）。

考慮級數的尾巴 $T_n(z) = \sum_{k>n} a_k z^k$，則 $f(z) = S_n(z) + T_n(z)$
$|S_n(z) - f(z)| < \epsilon\ \forall z \in \Omega$，當 $n > N$
$\Leftrightarrow |T_n(z)| < \epsilon\ \forall z \in \Omega$，當 $n > N$
即：級數的尾巴在 Ω 上均勻地小。

例： $1 + z + z^2 + \cdots = \frac{1}{1-z}$
此級數在 $|z| < 1$ 上收斂

(i) $|z| \le \rho < 1$ 則 $|T_n(z)| \le \sum_{k>n} \rho^k = \frac{\rho^{n+1}}{1-\rho} < \epsilon$ 當 n 夠大
例如 $n > \frac{\ln[\epsilon(1-\rho)]}{\ln \rho}$
取 $N = \left[\frac{\ln[\epsilon(1-\rho)]}{\ln \rho}\right] + 1$ 即得
故 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 均勻收斂到 $\frac{1}{1-z}$，在 $|z| \le \rho$ 上

(ii) 此級數在 $|z| < 1$ 上並不均勻收斂
例如取 $z = x$，$0 < x < 1$
$0 < T_n(x) = \sum_{k>n} x^k = \frac{x^k}{1-x} < \epsilon \Leftrightarrow k > \frac{\ln[\epsilon(1-x)]}{\ln x}$
$\lim_{x\to 1^-} \frac{\ln[\epsilon(1-x)]}{\ln x} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{\epsilon(1-x)} = \infty$
即當 x 很接近 1 時，所依賴的 N 也越來越大，找不到一個共同的有限值 N 使得 $|T_n(z)| < \epsilon\ \forall |z| < 1$ 當 $n > N$

8.8.3 冪級數基本定理

<u>定理 8.14</u>

給定級數 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$

令 $\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{a_n}$（Hadama 公式），則

(i) 級數 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在 $|z|<R$ 上絕對收斂
在 $|z|\le\rho<R$ 上均勻收斂。

(ii) 對 $|z|>R$，點列 $\{|a_nz^n|\}_{n=0,1,\cdots}$ 無界，因此級數發散。

(iii) $f'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}na_nz^{n-1}$ $\forall|z|<R$ 即導數可逐項導之。

証：

(i) 給定 $0<\rho<R$ 取 r 使 $\rho<r<R$。據此，
$\frac{1}{r}>\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{a_n}$，故 $\exists N$ 使 $\sqrt[n]{|a_n|}<\frac{1}{r}$ 當 $n>N$。對這樣的 n 有
$|T_n(z)|\le\sum_{k>n}|a_k||z|^k<\sum_{k>n}\frac{1}{r^k}\rho^k$，$\forall|z|\le\rho$
$=\frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$, $\alpha=\frac{\rho}{r}<1$
$<\epsilon$ 當 $n>N$ 其中 $N=\left[\frac{\ln[\epsilon(1-\alpha)]}{\ln\alpha}\right]+1$
故 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在 $|z|\le\rho$ 上均勻收斂
上述結果對任意 $\rho<R$ 成立，故 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 收斂 $\forall|z|<R$ □

(ii) $|z|>R$，任取 r，$|z|>r>R$
$\frac{1}{r}<\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{|a_n|}$，故 $\{|a_n|\}$ 中有無窮多個 $|a_n|$ 使 $\sqrt[n]{|a_n|}>\frac{1}{r}$，即 $|a_n|>\frac{1}{r^n}$
對這些 a_n，有
$|a_nz^n|>\left(\frac{z}{r}\right)^n\to\infty$ 當 $n\to\infty$ □

(iii) 首先考慮級數 $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}na_nz^{n-1}$ 的收斂半徑
$\sum_{n=0}^{\infty}na_nz^{n-1}=g(z)$ 的收斂半徑與 $\sum_{n=0}^{\infty}na_nz^n=zg(z)$ 無異，依 Hadama 公式
$\frac{1}{R_g}=\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{n|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{R}$，因 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$
故 $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}na_nz^{n-1}$ 在 $|z|\le\rho<R$ 上均勻收斂
給定 z_0，$|z_0|<R$，欲証 $\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ 存在且等於 $g(z_0)$。為便於估算，選定 ρ, $|z_0|,|z|<\rho<R$
令 $f(z)=S_n(z)+T_n(z)$，則

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-g(z_0)\right|\le&\left|\frac{S_n(z)-S_n(z_0)}{z-z_0}-S_n'(z_0)\right|+|S_n'(z_0)-g(z_0)|+\left|\frac{T_n(z)-T_n(z_0)}{z-z_0}\right|\\=&(1)+(2)+(3)\end{aligned}$$

先估算 (2)(3) 兩項：

$$(3) = \left|\frac{T_n(z)-T_n(z_0)}{z-z_0}\right| = \left|\sum_{k>n} a_k(z^{k-1}+z^{k-2}z_0+\cdots+z_0^{k-1})\right|$$
$$\leq \sum_{k>n} k|a_k|\rho^k$$

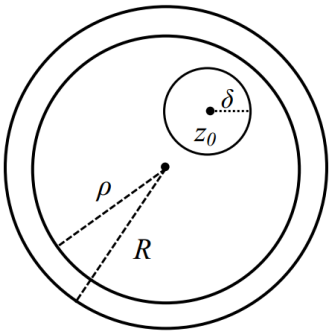
此為收斂級數 $\sum_{k=0}^{\infty} ka_k\rho^k$ 的尾項，故給定 $\epsilon>0$ $\exists N$ 使 $(3)<\epsilon/3$
同理，$(2)=|S_n'(z_0)-g(z_0)|=|\sum_{k>n} ka_kz_0^k|<\sum_{k>n} k|a_k|\rho^k<\epsilon/3$ 當 $n>N$
選定 $n>N$，$S_n(z)$ 為多項式，故 $\lim_{z\to z_0}\frac{S_n(z)-S_n(z_0)}{z-z_0}=S_n'(z_0)$
對此 $\epsilon>0$ $\exists\delta$ 使

$$(1)=\left|\frac{S_n(z)-S_n(z_0)}{z-z_0}-S_n'(z_0)\right|<\epsilon/3 \quad 當|z-z_0|<\delta$$

不妨取 δ 夠小使 $\{z|\ |z-z_0|<\delta\}\subset\{z|\ |z|<\rho\}$
對這樣的 z，上面的估計 (1)(2)(3) 都小於 $\epsilon/3$，故

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-g(z_0)\right|<\epsilon \quad 當|z-z_0|<\delta. \qquad \square$$

Figure 8.6:



<u>Remark</u>

1. $f(z)=a_0+a_1z+\cdots$
   $f'(z)=a_1+2a_2z+\cdots$
   $f''(z)=2a_2+6a_3z+\cdots$
   $\cdots$
   $f^{(k)}(z)=k!a_k+\cdots+\frac{(k+r)!}{r!}a_{k+r}z^r+\cdots$
   各階導數收斂半徑相同
   令 $z=0$，得 $a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$，於是有
   $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k$
   換言之，一個函數 f 在 $z=0$ 若能展成 power series，此 power series 即是 Maclaurin 級數

例： $f(z)=\frac{1}{1-z}$ 的 Maclaurin 級數

解： $\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots,\ |z|<1$

上面的級數即為 f 的 Maclaurin 級數

2. 微分可逐項行之 $\Rightarrow$ 積分可逐項行之

以實函數情形說明如下：

即：$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，$|x|<R$

則 $\int_0^x f(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ ，$\forall|x|<R$

理由：令 $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$，收斂半徑仍為 R

則 $g'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=f(x)$，$\forall|x|<R$

依微積分基本定理，

$\int_0^x f(t)dt=g(x)=g(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}\ \forall|x|<R$

例 1: 求 $\ln(1+x)$ 的 Maclaurin 級數

解: 由 $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots\ |x|<1$

兩邊在 $(0,x)$ 上積分，根據冪級數積分可逐項行之的性質，得到

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\cdots \tag{2}$$

在初微裡，很多人就大大方方地令 $x=1$，從而得到

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots=\ln 2$$

注意，(2) 式對 $|x|<1$ 成立，令 $x=1$ 顯然踰越了分寸

那麼可不可以令 $x=1$ 呢？Abel 說如果以下兩件事成立：

(i) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots$ 收斂

(ii) $\ln(1+x)$ 在 $x=1$ 點連續

就可以了。我們將於定理 8.18 中證明之。因此，可以令 $x=1$。

這就是有名的 Abel limit theorem，在此第一次和大家打了照面。

8.8.4 解析函數的唯一定理

兩個 C^∞ 函數（$f^{(n)}$ 連續 $\forall n\in\mathbb{N}$）可以在某一點附近相交無窮多次（如圖8.7）

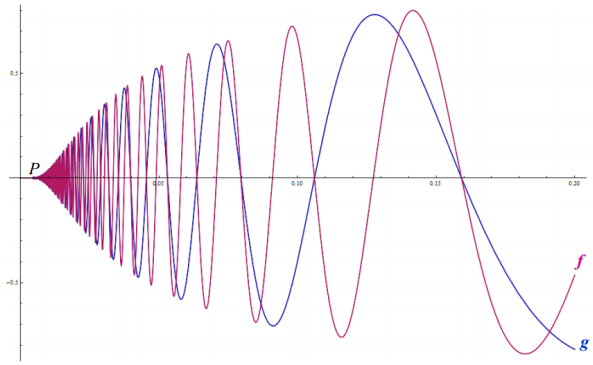
但這種情況不可能發生在解析函數上：

<u>定理 8.15</u>

設 f,g 在 $D_R(a)=\{z||z-a|<R\}$ 上解析，若 $f(z_k)=g(z_k),\ k=1,2,3\cdots$ 且 $\lim_{k\to\infty}z_k=z_0\in D_R(a)$

則 $f(z)=g(z)\ \forall z\in D_R(a)$

Figure 8.7:



換句話說，解析函數在 $D_R(a)$ 的行為完全由 $\{z_k\}$ 所決定，若 $\{z_k\}$ 在 $D_R(a)$ 有匯聚點。
為了簡便，設 $z_0 = 0$

<u>定理 8.16</u>

f 在 $|z| < \rho$ 解析，給定 $\{z_k\}$, $z_k \neq 0$ 使 $f(z_k) = 0 \quad \forall k$
若 $\lim_{k\to\infty} z_k = 0$，則 $f(z) = 0\ \forall |z| < \rho$
分析：

1. 設 $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$, $|z| < \rho$
   則 $a_0 = f(0) = \lim_{k\to\infty} f(z_k) = 0$
   因此 $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots = z f_1(z)$
   其中 $f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} z^k$, 在 $|z| < \rho$ 上解析。

2. $z_k \neq 0$，$f(z_k) = 0 \ \Rightarrow\ f_1(z_k) = 0\ \forall k = 1, 2, \cdots$
   重複上述論證於 f_1，得 $a_1 = 0$

3. 依此類推以致無窮，有 $a_n = 0 \quad \forall n = 0, 1, 2 \cdots$ □

8.9 Césaro 和與 Abel 和

8.9.1 Césaro 和

級數 $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ 發散
級數 $1 - 2 + 3 - 4 + \cdots$ 發散
可是這兩個級數有別，第一個雖然發散，但它的部分和 S_n 只在 0,1 間震盪，還滿溫和的；第二個級數的部分和 S_n 則上窮碧落下黃泉，震盪很厲害。
Césaro （1859-1906，義大利數學家）考慮如下求和方法：
令 $C_n = \frac{S_1 + S_2 + \cdots S_n}{n}$，其中 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$
若 $\lim_{n\to\infty} C_n = C$，稱級數 $\sum a_n$ 在 Césaro 概念下收斂到 C
C 稱為級數的 Césaro 和（Césaro sum），並稱級數 $\sum a_n$ 為 Césaro 可求和（Césaro summable）

例 1: 級數 $1-1+1-1+\cdots$

$$S_n = \begin{cases} 1 & n\text{為奇數} \\ 0 & n\text{為偶數} \end{cases}.$$

故 $\lim_{n\to\infty} C_n = \frac{1}{2}$

因此級數 $1-1+1-1+\cdots$ 的 Césaro 和為 1/2

例 2: 級數 $1-2+3-4+\cdots$

$$S_n:\ 1.-1,2,-2,3,-3,\cdots$$
$$C_n:\ 1,0,\frac{2}{3},0,\frac{3}{5},0\cdots$$

$\lim_{n\to\infty}\sup C_n = \frac{1}{2}$，$\lim_{n\to\infty}\inf C_n = 0$，極限不存在

故此級數為 Césaro 不可求和

8.9.2 Abel 和

Abel（1802-1829，挪威數學家）考慮如下求和方法：

令 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\ 0 < x < 1$

若 $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ 存在 $= A$，稱級數 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 在 Abel 概念下收斂到 A，並稱 A 為此級數的 Abel 和（Abel sum），級數 $\sum a_n$ 為 Abel 可求和（Abel summable）

例 1: 級數 $1-1+1-1+\cdots$

$f(x) = 1 - x + x^2 - \cdots = \frac{1}{1+x}$

$A = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$

故級數 $1-1+1-1+\cdots$ 為 Abel 可求和，其和為 $\frac{1}{2}$ 與 Césaro 和同。

例 2: 級數 $1-2+3-4+\cdots$

$f(x) = 1 - 2x + 3x^2 \cdots\ |x| < 1$

$\int_0^x f(t)dt = x - x^2 + x^3 - \cdots = \frac{x}{1+x}, |x| < 1$

兩邊求導得 $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$，從而 $A = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{4}$

故級數 $1-2+3-4+\cdots$ 為 Abel 可求和，其值為 $\frac{1}{4}$

這個級數不太溫馴，Abel 竟然允許它可求和。

再看兇一點的如何？

例 3: 級數 $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)^2 x^n$

$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^{n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n = \frac{x}{(1+x)^2}$

兩邊求導得 $f(x) = \frac{1-x}{(1+x)^3}$，從而 $A = \lim_{x\to 1^-} \frac{1-x}{(1+x)^3} = 0$

Abel, 你未免太寬了吧！由此觀之，級數 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{k+1} n^k$ 在 Abel 概念下都是可求和的（留作習題）

上面這些級數雖然擺盪很厲害，不過正負之間的拉鋸勢均力敵，Abel 讓他們收斂。來看一個不平衡的如何？

例 6: $1+1-1+1+1-1+\cdots$

$$\begin{aligned} f(x) &= 1+x-x^2+x^3+x^4-x^5+\cdots,\ |x|<1 \\ &= (1+x^3+x^6+\cdots)+(x+x^4+x^7+\cdots)-(x^2+x^5+x^8+\cdots) \\ &= \tfrac{1+x-x^2}{1-x^3} \end{aligned}$$

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\infty$ 發散了！

現在有三種求和的概念：古典和，Césaro 和，Abel 和
它們之間的關係如何？以下我們將證明：
Césaro 和是古典和的推廣，
Abel 和是 Césaro 和的推廣

8.9.3 加權平均

給定數列 $\{a_k\}_{k=1}^n$
算術平均：$\frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n}=\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{n}$
每一個 a_k 的權重相等，都是 $\frac{1}{n}$
加全平均：設 $\alpha_k\ge 0$，$\sum_{k=1}^n \alpha_k=1$
稱 $\sum_{k=1}^n \alpha_k a_k$ 為 $\{\alpha_k\}$ 對數列 $\{a_k\}$ 的加權平均。
當權重為變數：設 $\alpha_k(t)\ge 0, 0\le t<1$
固定 t，$\sum_k \alpha_k(t)=1$ 為一組權重，對 $\{a_k\}$ 做加權平均
$\sum_{k=1}^n \alpha_k(t)a_k=\phi(t)$
若 $\lim_{t\to 1^-}\alpha_j(t)=0\ \forall j\ne k$（諸權凋萎 k 獨秀），則 $\lim_{t\to 1^-}\phi(t)=a_k$
推廣到無窮級數，有如下定理：

<u>定理 8.15</u>（諸權凋萎定理）
$\alpha_j(t)\ge 0$，$0\le t\le 1$，$\sum_{j=1}^\infty \alpha_j(t)=1$
若 $\lim_{t\to 1^-}\alpha_j(t)=0\ \forall j$（諸權凋萎）
則對任意數列 $\{a_n\}$, $\lim_{n\to\infty} a_n=a$，恆有
$\lim_{t\to 1^-}\sum_{n=1}^\infty \alpha_n(t)a_n=a$

簡言之，諸權凋萎，權匯 ∞ 處，若 $\lim_{n\to\infty} a_n=a$ 則加權平均情鍾於 a。
在天願做比翼鳥，在地願結連理枝。楊貴妃獲唐明皇無盡的愛，愛隨魂去，成了太真仙子，仍然一身是愛。

証: $\lim_{n\to\infty} a_n=a$，則 $|a_n|$ 有界，不妨令 $|a_n|\le M\ \forall n$

給定 $\epsilon > 0$ $\exists N$ 使 $|a_n - a| < \epsilon$，當 $n > N$。則

$$
\begin{aligned}
|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) a_n - a| &\leq \sum_{n \leq N} \alpha_n(t)|a_n - a| + \sum_{n > N} \alpha_n(t)|a_n - a| \\
&\leq (M + |a|) \sum_{n=1}^{N} \alpha_n(t) + \epsilon
\end{aligned}
$$

令 $t \to 1^-$ 得

$$\lim_{t \to 1^-} \sup |\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) a_n - a| = 0$$

$\Rightarrow \lim_{t \to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) a_n = a$ □

<u>Remark</u>

1. 上面 $\lim_{t \to 1^-} \sup \phi(t)$ 的定義與數列 $\lim_{n \to \infty} \sup a_n$ 的定義概念同，在此不再重複。
2. 定理 8.15 中，$0 \leq t \leq 1$ 非必要，t 可定義於任何區間，例如 $t \in (0, \infty)$，$\lim_{t \to \infty} \alpha_j(t) = 0 \quad \forall j$，上述證明仍然成立。

<u>定理 8.17</u> 古典和 $\Rightarrow$ Césaro 和

即：$a_n \in \mathbb{R}$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Césaro 可求和，且值與古典和同。

証: 令部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$，$\lim_{n \to \infty} S_n = S$（古典和）

$C_n = \frac{S_1 + \cdots + S_n}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{n} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(n) S_k$

其中 $\alpha_k(n) = \begin{cases} \frac{1}{n} & k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases}$.

則 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(n) = 1 \ \forall n$，且固定 k，$\lim_{n \to \infty} \alpha_k(n) = 0 \ \forall k$

$C_n = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(n) S_k$，$\lim_{k \to \infty} S_k = S$

根據定理 8.16 和 Remark 2，有 $\lim_{n \to \infty} C_n = S$ □

<u>定理 8.18</u>（Abel limit theorem）

古典和 $\Rightarrow$ Abel 和

即：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$，$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，$|x| < 1$ [註2]，則 $\lim_{x \to 1^-} f(x) = A$

証: $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots \ |x| < 1$

$= S_0 + (S_1 - S_0)x + (S_2 - S_1)x^2 + \cdots$

$= (1 - x)S_0 + (x - x^2)S_1 + \cdots$

$= (1 - x)\left[S_0 + xS_1 + x^2 S_2 + \cdots\right]$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x) S_n$，$\alpha_n(x) = (1 - x)x^n$

觀察：$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x) = 1$，固定 n，$\lim_{x \to 1^-} \alpha_n(x) = 0$，$\lim_{n \to \infty} S_n = A$

根據諸權凋萎定理，$\lim_{x \to 1^-} f(x) = A$ □

[2] $\sum_n a_n$ 收斂 $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} \leq 1 \Rightarrow f$ 的收斂半徑 $R \geq 1$

定理 8.19　Césaro 和 $\Rightarrow$ Abel 和

即：給定級數 $\lim_{n\to\infty} a_n$，令 S_n 為其部分和，

$C_n = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} S_k}{n}$，$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

若 $\lim_{n\to\infty} C_n = C$，則 $\lim_{x\to 1^-} f(x) = C$

証: $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots \ |x| < 1$

$= (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n$（如前）

$= (1-x)\left[(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} nC_n x^n\right]$（如前，再操作一次；注意 $nC_n = S_0 + \cdots + S_{n-1}$）

$= \sum_{n=0}^{\infty} nx^n(1-x)^2 C_n$

令 $\alpha_n(x) = nx^n(1-x)^2$

則 $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x) = 1$，固定 n，$\lim_{x\to 1^-} \alpha_n(x) = 0$

又 $\lim_{n\to\infty} C_n = C$，依諸權凋萎定理得 $\lim_{x\to 1^-} f(x) = C$ □

我們於第 8.7 節中談到 Cauchy product，留下定理 8.13 未證明，今用 Abel limit theorem 補証之：

定理 8.12

設 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n, \sum_{n=0}^{\infty} c_n$, 分別收斂到 A, B, C，其中

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

則 $C = AB$。

証：令 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

則 f, g 在 $|x| < 1$ 上收斂

依冪級數基本定理，f, g 在 $|x| < 1$ 上絕對收斂故定理 8.11 的條件成立。於是

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \qquad |x| < 1$$

令 $x \to 1^-$，據 Abel limit theorem 得 $C = AB$。□

8.10　附錄：複對數

複指數函數 $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$

$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

$|e^z| = e^x$

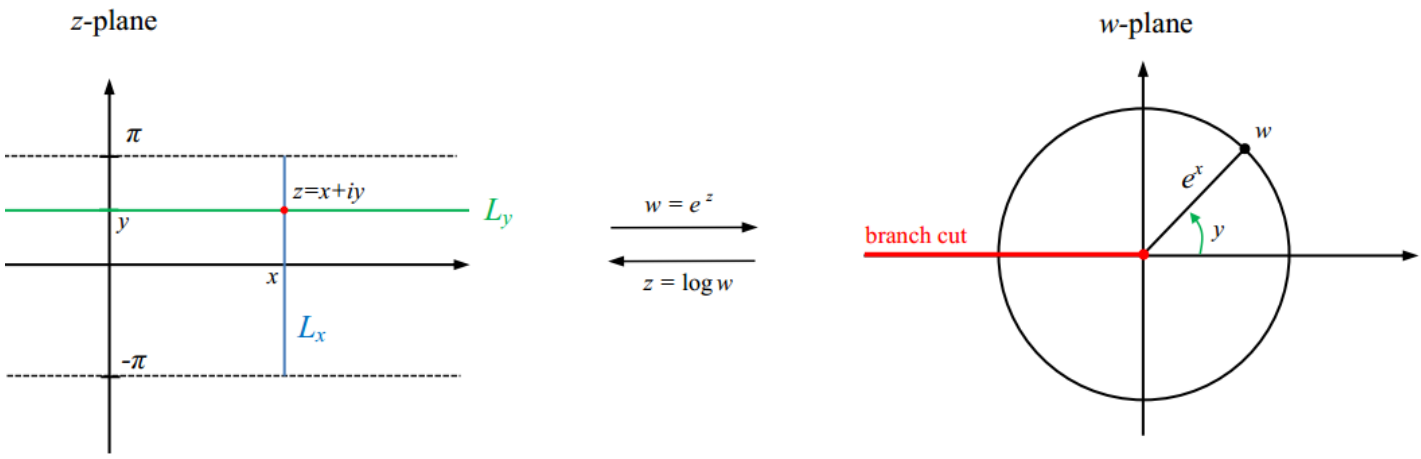
$e^{z+2\pi ni} = e^{x+i(y+2\pi n)} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z \ \forall n \in \mathbb{Z}$

故 e^z 為多對一的函數。但若考慮 S：$-\pi < y < \pi$

$w = e^z$：　　$S \to \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$

（如圖8.8）

Figure 8.8:



固定 x，令 $L_x = \{z|z = x + iy,\ -\pi < y < \pi\}$
固定 y，令 $L_y = \{z|z = x + iy\}$
$w = e^z$, $|w| = e^x$，$\arg w = y$，故

$$\underline{\ln w = \ln|w| + i\arg w} \qquad -\pi < \arg w < \pi$$

從而有對數律
$\ln(w_1 w_2) = \ln w_1 + \ln w_2,\ -\pi < \arg w < \pi$
這個複對數函數稱為 $\ln w$ 的主值（principle branch）函數，就像反三角函數 arcsin 一樣，其主值函數限定在 $-\pi < \arg w < \pi$ 上
你也可以把值域平移，得到另一分支（branch）的對數函數。

8.11 附錄：群論的誕生

文明的演進常常是山窮水盡之後，柳暗花明村又村。
非歐幾何的出現如此，群論的出現也是如此。很巧，這兩個毫不相關的觀念之出現，差不多是在同一個時間 —1820-30 年代，其對後世數學及物理發展的影響既深且遠。
群論的兩位先驅者 Abel 和 Galois，都英年早逝，但性格際遇各不相同。我們先來談 Abel。
Niels Henrik Abel (1802–1829)
Niels 出生於挪威東南沿海的小村 Nestrand，父親是一位鄉下牧師，生活窮困。童年成長於 Gjerstad，他並不是我們今天所謂的資優生，從小出類拔萃英數理功課樣樣行。相反的，16 歲以前的 Niels 極其平凡，沒有人會料到他終將青史留名。
如果說人生有所謂的貴人，那麼 Niels 的中學老師 Holmboe 毫無疑問就是改變他一生的貴人了。1818 Holmboe 受聘到 Neils 的學校任教數學，在批閱學生

作業時，他發現班上有一個學生很特殊，Holmboe 給他更進一步的挑戰問題，Neils 做得津津有味，Holmboe 讚美他的才華，給予更進一步的指導，Neils 廢寢忘食，馬力全開。千里馬遇上伯樂，馳騁在數學的原野上，春風迎面，百花傳香，躍過溪澗，跨越山丘，好不快哉!璞玉終於展露其質，曖曖含光，溫潤如脂。

1821，19 歲的 Neils 出提一篇論文，證明五次代數方程式可解，挪威的教授們雖看不出有什麼錯誤，但心裡懷疑，這懸疑了 250 年之久的問題，多少傑出的數學家絞盡腦汁苦無對策，怎麼就這樣被一個沒沒無聞的鄉下孩子解決了，請他用幾個實例演算看看，Neils 在演算過程中終於發現自己的錯誤。這改變了他正面提解的想法，於是開始從否定的角度思考，逐發展出群的概念，於 1823 提出五次方程式不可解的論文。懸疑了 252 年之久的問題還是被一個沒沒無聞的鄉下孩子解決了。不但解決，更重要的是群的概念終於問世了，它是近代數學一個重要的里程碑。(註 1)

據說他把論文寄給 Gauss，Gauss 一看，大吼一聲道：「又來了一個瘋子 !」，就此把它扔到一旁。

Abel 於 1825 訪問德國柏林，在那裏他遇上一位執友 Crelle(註 2)，在 Abel 的鼓勵下創辦了一本期刊 Journal für die reine und angewandte Mathematik，Abel 在前三卷裡發表了 22 篇論文，內容涵蓋方程式論（即五次方程式不可解論文），無窮級數，橢圓函數等重要論文。1826 他來到了巴黎，劉姥姥進大觀園，他提交給科學院有關橢圓函數的論文，並未受到重視，那年冬天，他懷著落寞，拖著虛弱的身體，離開巴黎，取道柏林，探望老友。他不知道結核桿菌已悄悄地在他身上發酵。

1827 年 4 月他回到挪威，他的德法之旅被評鑑為是失敗的：他並沒有去 Göttingen 與 Gauss 砌磋，在巴黎也一事無成，他的論文並未發表於著明的期刊上。「國科會」停止了他的經濟支援，生活頓陷困境，只能靠兼課與家教維生。1828 年冬聖誕節前，他踩著雪橇徒步兩百餘公里，從 Oslo 到 Froland 與他的未婚妻團聚。旅途的勞累，更加上北國的嚴寒，使他的病情加劇，1829 年 4 月 6 日終於在貧病中離開人世，如流星般消失在北國的夜空中。

就在他死後第二天，Crelle 從柏林寄來一封信：柏林大學已許諾教席，不久聘書就會寄到，請他好好養病…..。難得這位 Crelle，為朋友的前程盡心盡力，但肺結核又稱富貴病，極難治愈，況又貧病纏身，寒冬籠罩，他的際遇猶如封神榜中聞太師來到了絕龍嶺，難逃一死。同時代的音樂家蕭邦，命運也是 · · · 。

Crelle 為弔念這位異國執友，出了一份紀念專輯，他撰文寫道：

Abel 在他的所有著作中，都展現極高的天賦與極深的思維，穿透一切障礙直探問題的本質。品格純樸高尚，為人溫良謙讓，他的人品和他的才華一樣芬芳，受到許多人的愛載與懷念。

1830 法蘭西科學院終於頒發了 Grand Prix 獎章給 Abel 和 Jacobi 表揚他們在橢圓函數論的卓越貢獻。

如果你到挪威旅遊，你會感受到挪威人對 Abel 的懷念與尊敬，那 500 克郎的紙幣及 20 克郎的硬幣上，印的就是他的頭像，在 Oslo 及 Gjerstad 的廣場上立有他的雕像，設有紀念館。郵局為他發行紀念郵票。2002 年，為紀念 Abel 誕辰 200 周年，挪威國王設立 Abel 獎，獎金

600 萬克郎 (約 100 萬美元)，每年一次，頒發給對數學有卓越貢獻的人，它與 Fields Medal 被視為是數學上的諾貝爾獎。在這個基金之下另設 Holmboe 獎，獎勵對中等數學教育有所深耕的教師。

月球上有一個殞石坑叫 Crater Abel，因紀念他而命名。

最讓我印象深刻的是 Gjerstad 的 Holmen Gård 築有一高台，台上設有一椅，名曰「Abel Chair」，極其簡單，卻意義深遠：

年輕人，請上坐吧！

對於 Abel 英年早逝，固然令人挽惜。但出身微寒，而能不忘其本；鄉下少年，竟敢挑戰百年難題；生命短暫，卻能星掛夜空。我向他鞠躬敬禮。

群論的另一位開創者 Galois 則又是另一種人生。

Évariste Galois (1811 – 1832)

天才是恩賜，天才又常與脆弱伴生。

天才卻不能被時代所賞識，那麼天才就是一種悲劇。

Galois 的一生給這句話下了註腳。其後的荷蘭畫家 van Gogh (1853 – 1890) 又再次用他的坎坷人生來詮釋它。

1811 Galois 出生於巴黎南方的一個小鎮 Bourg-la-Reine，他的童年教育是母親帶大的，他的母親是個很有教養的女性，熱愛古典文學，把希臘羅馬古代的許多英勇故事教給她的兒子；父親是拿破崙的熱情支持者，也是地方上極負眾望的政治人物，曾主持 Bourg-la-Reine 市政長達 15 年。

1823 Galois 進入中學接受體制教育，頭兩年他表現非常出色，獲得拉丁文首獎，但不久他就厭煩這些學科，他對數學情有獨鍾，他的天性使獨鍾變成瘋狂，自己找來 Legendre 的 Éléments de Géométrie，據他自稱，像讀小說般津津有味。之後他又弄來 Lagrange 的一篇論文 Réflexions sur la résolution algébrique des équations (註 1)，讀得如癡如醉。只可惜，他生命中並沒有貴人，他的老師對班上出現這樣一位怪才感到頭痛，對他的評價非常負面。

1828 及 29 他兩次參加 École Polytechnique 的入學考都名落孫山，只好退而求其次進入 École Normale 就讀。想想，一個見了數學細胞都會唱歌跳舞的的熱血青年，要他面面具到，在體制考試內勝出，就像讓一匹千里馬參加馬術比賽一樣；馬兒沒有勝出不是馬兒不好，而是他需要無際的草原讓他奔馳，展現天賦，可嘆伯樂竟在他的生命中缺席。

在研讀 Lagrange 論文後，他慧眼獨具，跳過 Lagrange 所提出的預解式思維，直接探討背後的置換群，從而看出置換群的結構與方程式可不可解之間的對應關係，提出它的理論。1830 Galois 把他的研究成果整理成稿，投給法國科學院，前後三次都沒有被接受，不久巴黎揭開了七月革命的浪潮，年輕的 Galois 嫉惡如仇，參加反政府運動，前後兩次被捕入獄。1832 年 4 月出獄。

5 月 30 日清晨，巴黎郊區一位農民經過葛拉塞爾湖，發現湖邊有位年輕人倒臥血泊，腹部中槍，不省人事。研判是對決倒下，把他送到醫院，隔日上午就離開人世。(註 3)

當他躺在病床上迴光返照，他的弟弟 Alfred 緊握他的手，淚流滿面。他沉靜地安慰道：

Ne pleure pas, Alfred ! J'ai besoin de tout mon courage pour mourir á vingt ans !
(別哭，Afred，我需要足夠的勇氣在 20 歲離開人世。)
這是他短暫一生在世間所留下的最後一句話。
一代英才，得不到時代的賞識，就此星墜荒郊，埋沒於荒煙蔓草中。
1843 Liouville 重審被埋沒的論文，他花了幾個月的時間了解 Galois 論文的精義，最後確認它的重要，1846 將他發表於 Journal de Mathématiques Pures et Appliquées，英才死後 14 年終於還他公道。Liouville 對此事的評論是：過分簡潔是導致文章被埋沒的原因，人們應該避免如此，尤其在介紹一個全新的觀念時，清晰顯得格外重要。
如今，Galois Theory 是大學代數學中必修的核心課題，群論是量子力學必備的工具，它是人類寶貴的文化資產之一。(註 4)
Galois 的父親於 1829 年遭受誹謗自殺身亡，家道中衰。事隔三年兒子又英年早逝，家人無力厚葬，草草下土，如今已找不到他的長眠之處。
歐陸有對決的傳統，之前用劍，槍支出現後改用手槍。之所以對決，通常都與愛情有關。我曾看過一部電影，父子倆同時愛上一個女人，兩人為愛對決，父親倒下。為了爭愛，可以父不父子不子，這種文化很讓我納悶。對決看似公平，其實是一種立足點極不公平的決鬥方式，挑戰者通常都非等閒之輩，受挑戰者不甘示弱，為愛爭雄，常常成為槍下冤魂。俄國著名浪漫詩人普西金 (Pushkin 1799-1837) 好與人對決，感情豐富，槍法了得，戰無不勝，槍下冤魂多達 28 人，最終倒在職業軍人之手，留下許多旖麗的愛情詩篇供人憑弔。
和璧莫投鼠，干將莫擊石。韓信能忍胯下之辱，終能吐其干將之芒。Galois 明赴死亡之約 (註 3)，而致毀其和璧之才。天才之所以為天才，乃因一竅獨明。一竅獨明，眾竅未明，懷才不遇，生命失衡，悲劇乃伴之而生，令人感嘆。
西風颯颯，芳草淒淒，梧桐淨淨，寒鴉點點。
郊溪潺潺，蘆花蕩蕩，夕照映紅，孤鴻唳天。
法蘭西丘陵上何處憑弔這薄命的一代英靈？
悄悄地，金星已高掛西空。日落之後，顯得格外明亮。

第八章　全文完

(註 1) 五次及五次以上方程方程式不可解，數學上稱之為 Abel-Ruffini Theorem。

Paolo Ruffini (1765-1822)，義大利數學家及哲學家，於 1799 年發表五次及五次以上方程式不可解論文，雖然被指出不完整，但基本上已用到置換群 (Permutation group) 的概念，如是，群論的濫觴可以上溯 24 年。Ruffini 和 Galois 一樣也是研讀 Lagrange 的 Réflexions sur la résolution algébrique des équations (發表於 1771) 一文之後而有所領悟。好的文章就像礦藏一樣，耐人開採。

在這篇文章裡，Lagrange 精闢地分析二、三、四次方程式解的結構後，提出預解式 (Resultant) 的概念，並進一步看出預解式和方程式諸根在排列置換下形式的不變性之間的關係，此時他已意識到五次方程式根式解可能不存在的先兆。

黎明之前的曙光，Lagrange 這篇文章可以這樣來形容。

(註 2) August Leopold Crelle(1780—1855) 德國業餘數學家，本是一位土木工程師，因建造鐵路致富。他熱愛數學，結交許多數學家，他堪稱數學的伯樂，Abel，Steiner，Weierstrass 等都受到他的激勵而更加光芒四射。

(註 3) 是誰與 Galois 對決？為何對決？至今成謎。

有人說他在巴士底監獄認識一位女孩，女孩有男友 · · ·。

Galois 在對決前夕振筆疾書，把他的理論草寫下來，交給他的朋友。文中重複好幾次「我沒有時間了」，似乎已預知死之將至。

(註 4) Galois Theory 一口氣解決了懸疑已久的問題；

1. 任意角三等分問題。
2. 倍立方問題。

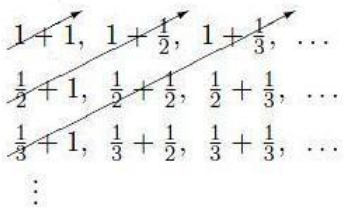
   以上為古典平面幾何著名的三大難題之二，經 Galois Theory 輕易地證明其為不可能。
3. 什麼樣的正 P 邊形可以尺規作圖問題。(P 為質數) Gauss 猜測：當且僅當 $P = 2^{2^k} + 1$，獲得證明。當 k=2 就是 Gauss 的正 17 邊形作圖。
4. 精妙地闡釋為何五次及五次以上方程式一般沒有公式解，而四次及四次以下則有公式解的問題。

頁碼	作品	版權標示	來源／作者
32	Abel在他的所有著作中…直探問題的本質		截譯自 http://www.vigyanprasar.gov.in/scientists/nhabel.htm
34	Ne pleure pas, Alfred !...à vingt ans !		Wikipedia, http://en.wikiquote.org/wiki/Last_words

102學年度高等微積分(上) 習題八

1. 求下列各數列的$\limsup$與$\liminf$
   (a) Fibonacci 數列：$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \cdots$
   (b) $a_n = (-1)^{n+1} n$
   (c) $a_n = \cos n$
   (d) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \cos n\pi$
   (e) $a_n = n \sin \dfrac{n\pi}{3}$
   (f) $a_n = \dfrac{n}{3} - \left\lfloor \dfrac{n}{3} \right\rfloor$ ($\lfloor \cdot \rfloor$ denotes the integral part of $\cdot$)

2. $S := \left\{ \dfrac{1}{i} + \dfrac{1}{j} \mid i, j\text{爲自然數} \right\}$



   (a) 將S中的元素如上圖箭頭所示，依序排成數列$\{a_n\}$。試依定義，求$\limsup_{n\to\infty} a_n$及$\liminf_{n\to\infty} a_n$。
   (b) 設$\{b_n\}$爲S的另一排列，求$\limsup_{n\to\infty} b_n$及$\liminf_{n\to\infty} b_n$？

3. (a) 試證：$\limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) \le \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$
   (b) $a_n, b_n > 0$，問：$\limsup_{n\to\infty} (a_n b_n) \le (\limsup_{n\to\infty} a_n)(\limsup_{n\to\infty} b_n)$成立否？證明或舉反例。

4. 試判斷下列各級數是否收斂
   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$
   (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(\ln n)^{1+\frac{1}{n}}}$
   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$
   (d) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n(\ln n)^{1+\frac{1}{n}}}$

5. 試分別就Ratio test及Root test判斷下列級數的收斂發散：
   (a) $\dfrac{1}{2} + 1 + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{32} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{128} + \dfrac{1}{64} + \cdots$。
   (b) $1 + \dfrac{a_1}{2} + \dfrac{b_1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{a_2}{4} + \dfrac{b_2}{4} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{a_3}{6} + \dfrac{b_3}{6} + \dfrac{1}{7} + \cdots$，其中$a_n = r^n$、$b_n = 1 - r^n$，$0 < r < 1$。

6. 試判斷下列級數的收斂、發散
   (a) $1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{9} \cdots$。(二正一負交錯)
   (b) $1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{11} - \dfrac{1}{12} + \cdots$。(二正二負交錯)

(c) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\cdots$。(一正二負交錯)
(d) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\cdots$。(一正二負三正四負...)

7. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂到S，若$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| < \infty$，令$\{b_n\}$爲$\{a_n\}$的重排，試證：$\sum_{b=1}^{\infty} b_n$ 收斂到S。

8. 將一絕對收斂的級數任意穿插入另一級數，不影響其斂散。換言之：$\sum|b_n| < \infty$，將$\{b_n\}$任意穿插入數列$\{a_n\}$中，得新數列c_n，則：$\sum c_n$收斂，若$\sum a_n$收斂；$\sum c_n$發散，若$\sum a_n$發散。

9. 證明定理8.10。

10. 證明定理8.11。

11. 證明定理8.12。

12. (a) 求$\tan^{-1}x$的Maclaurin級數，並求級數$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$之值，詳述其理由。
(b) 求$\frac{1}{1+x+x^2}$的Maclaurin級數，並求級數$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\cdots$之值，詳述其理由。

13. 試造一級數$a_n > 0$，$a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots$ 收斂，但$a_1^3-a_2^3+a_3^3-a_4^3+\cdots$發散。

14. 試就「古典」、Cesaro、Abel求和概念，判斷下列級數是否可求和。如可，試求其值。
(a) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$
(b) $1+0-1+1+0-1+1+0-1+\cdots$
(c) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$
(d) $1^3-2^3+3^3-4^3+5^3-\cdots$
(e) $1\cdot 2-2\cdot 3+3\cdot 4-4\cdot 5+\cdots$

15. (a) 求2^i、i^i、$(1-i)^{1+i}$之值。
(b) 求z^z的實部及虛部。

16. 根據Dirichlet test，級數$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}$及$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n}$收斂。試根據複對數$\log w=\log|w|+i\arg w$，分別求它們的值。

17. 試造兩C^∞函數，在0點附近相互扭交無窮多次 (解析函數不允許這樣，唯一定理說不可)。

18. (a) 作$\varphi(x)=\frac{x}{1-x}$的圖形。
(b) 令$f(x)=\begin{cases}\varphi(x) & ,\ x\in[0,1)\\ -\varphi(-x) & ,\ x\in(-1,0)\end{cases}$，試作$f$的圖形，則$f$爲同胚寫像把$(-1,1)$映成$(-\infty,\infty)$且把有理點對射到有理點。
(c) 試說明f在$x=0$點非解析，並決定k使$f\in C^k(-1,1)$ (能用直觀說明，表示你對數學很有feeling)。
Remark：是否存在一解析函數f把$(-1,1)$對射到$(-\infty,\infty)$，且把有理點映成有理點，我

本來把它放在(d)請問同學，但發現自己也沒做出來。今把它當Remark提出，後生可畏，或許有人可以告訴我答案，我一定給你拍手叫好！

19. (a) 試證級數$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots$收斂。
(b) 你能求它的值嗎？

20. (Rudin #3.16) 令$\alpha>0$，取$x_1>\sqrt{\alpha}$，依遞迴方式定義$x_2,x_3,\cdots$如下

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{\alpha}{x_n}\right)$$

(a) 試證明x_n遞減，且$\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{\alpha}$
(b) 令$\epsilon_n=x_n-\sqrt{\alpha}$，試證明

$$\epsilon_{n+1}=\frac{\epsilon_n^2}{2x_n}<\frac{\epsilon_n^2}{2\sqrt{\alpha}}$$

定義$\beta=2\sqrt{\alpha}$則有

$$\epsilon_{n+1}<\beta\left(\frac{\epsilon_1}{\beta}\right)^{2^n}$$

(c) 上述方法爲計算一正實數之平方根的演算法，且解的收斂(誤差收斂到0)速度非常快。取$\alpha=3$、$x_1=2$，試檢驗$\frac{\epsilon_1}{\beta}<\frac{1}{10}$且

$$\epsilon_5<4\cdot10^{-16},\epsilon_6<4\cdot10^{-32}$$

Remark：Rudin第三版P.81習題17,18有不同方法求$\sqrt{\alpha}$，同學可參考之。

21. 試造一例：$a_n\geq0$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n<\infty$ 但 $\lim_{n\to\infty}na_n\neq0$。
(當$a_n\downarrow0$時，我們已於第四章4.2節，例4中，證明結論成立)

22. (Rudin #3.11) $a_n>0$，$s_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\infty$
(a) 試證：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}=\infty$
(b) 試證：$\frac{a_{N+1}}{s_{N+1}}+\cdots+\frac{a_{N+k}}{s_{N+k}}\geq1-\frac{s_N}{s_{N+k}}$從而導出：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{s_n}=\infty$
(Remrak：(a), (b)的內涵是，任意發散的正項級數，恆可找到比它萎縮的發散級數)
(c) 試證：$\frac{a_n}{s_n^2}\leq\frac{1}{s_{n-1}}-\frac{1}{s_n}$，從而導出$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{s_n^2}<\infty$
(d) 請判斷下列二級數的收斂，發散
(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+na_n}$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+n^2a_n}$

23. (Rudin #3.12) $a_n>0$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n<\infty$，令$T_n=\sum_{i=n}^{\infty}a_i$
(a) 試證：$\frac{a_m}{T_m}+\cdots\frac{a_n}{T_n}\geq1-\frac{T_n}{T_m}$，$m<n$，從而導出$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{T_n}=\infty$
(b) 試證：$\frac{a_n}{\sqrt{T_n}}<2(\sqrt{T_n}-\sqrt{T_{n-1}})$從而導出$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt{T_n}}<\infty$
Remark：(b)的內涵是，任意收斂正項數列，恆可找到比它茁壯的收斂數列

24. $a_n>0$，$a_{m+n}\leq a_m+a_n\ \forall m,n$。試證：$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$存在。

102學年度高等微積分 寒假作業

1. 於$\mathbb{R}^1$上賦與孤獨度規d，$d(x,y)=1$，$x\neq y$。問：
   (a) $(\mathbb{R}^1,d)$爲complete metric space，正確否？
   (b) 請描述其上的連通集(connected sets)。
   (c) 請描述其上的perfect sets。
   (d) 試證：任何孤立點都是2nd category。
   (e) 請描述$(\mathbb{R}^1,d)$上的實連續函數、均勻實連續函數。

2. (a) $T\mathbf{x}=A\mathbf{x}+\mathbf{b}$爲$\mathbb{R}^2$到$\mathbb{R}^2$的寫像，試就下列情形，討論$T$是否爲收縮寫像。
   (i) $A=\begin{bmatrix} 0.5 & -0.4 \\ -0.6 & 0.5 \end{bmatrix}$ (ii) $A=\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ -0.1 & 0.7 \end{bmatrix}$
   (b) 給定$\mathbf{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\mathbf{x}_0=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，令$\mathbf{x}_{n+1}=T\mathbf{x}_n$，$n=1,2,3,\cdots$，問：$\lim_{n\to\infty}T\mathbf{x}_n$存在否？如存在，試求其值。

3. 設P_α爲$[0,1]$上的Cantor type set，$m(P_\alpha)=\alpha>0$，令$f(x)=\begin{cases} 1 & x\in P_\alpha \\ 0 & x\notin P_\alpha \end{cases}$。
   問：f在$[0,1]$上是否Riemann可積分？

4. (a) 請舉一例，$A\subset[0,1]$，A爲nowhere dense，$m(A)=0$但$m(\bar{A})\neq 0$。
   (b) 承上，令$f(x)=\begin{cases} 1 & x\in A \\ 0 & x\notin A \end{cases}$。試證：$f$在$[0,1]$上Riemann不可積。

5. $S=$一切定義於$[0,1]$上的函數集，我們於第三章中曾證明其基數(cardinality)大於c(實數的基數)，你能定S的基數嗎？

6. $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{if } x\neq 0 \\ 0 & \text{if } x=0 \end{cases}$
   (a) 求$f'(0)$及$f''(0)$。
   (b) 試證明$f^{(n)}(0)=0\ \forall n$。
   Remark：這個f是個很重要的函數，它在$x=0$這一點無窮可導，但f在此點附近無法表成Taylor級數。

7. $f(x)=\begin{cases} 1, & x\geq 1 \\ 0, & x\leq 0 \end{cases}$
   (a) 請適當定義f在$(0,1)$上的函數值，使$f\in C^2(\mathbb{R})$。
   (b) 請適當定義f在$(0,1)$上的函數值，使$f\in C^\infty(\mathbb{R})$。

8. $\Omega=\{(x,y)|x^2+y^2<4\}$，$K=[-1,1]\times[-1,1]$，請定義一函數$f\in C^\infty(\Omega)$滿足
   (i) $f(x,y)=1\ \forall(x,y)\in K$
   (ii) $f(x,y)=0$ 當$(x,y)\notin\Omega$
   (iii) $0<f<1$ 當$(x,y)\in\Omega-K$。

9. 我們說「f analytic at 0」，表示f在0點附近可以表示成power series。現給定實數列$a_0, a_1, a_2, \cdots$
(a) 是否存在一函數f analytic at 0 使$f^{(n)}(0) = a_n$？
(b) 是否存在一函數f在0點附近無窮可導使得$f^{(n)}(0) = a_n$？

10. $A \subset \mathbb{R}^n$爲compact，ρ爲定義在A上的連續正實函數。試證：$\exists$finite points $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset A$使
(a) $B_{\rho_i}(x_i) \cap B_{\rho_j}(x_j) = \emptyset$，$i \neq j$。其中$\rho_i = \rho(x_i)$。
(b) $A \subset \cup_{i=1}^n B_{2\rho_i}(x_i)$。
(提示：有美玉無數如斯，日取其一，君何取乎？)

11. $k(x,y)$爲$[a,b] \times [a,b]$上的連續函數，$\varphi \in C[a,b]$考慮如下：Volterra積分方程
$$f(x) = \lambda \int_a^x k(x,y) f(y) dy + \varphi(x)$$
λ爲給定常數。試證：上方程式在$C[a,b]$上有唯一解。
(提示：令$Af(x) = \lambda \int_a^x k(x,y) f(y) dy + \varphi(x)$，證明$A^n$爲收縮寫像當$n$夠大，據此得知$A$有固定點。$\lambda$可以是任意數。)

12. (a) (X,d)爲metric space，$A \subset X$。試證：A爲disconnected if and only if $\exists$continuous function f把A映成到$\{0,1\}$二點。
(b) $A, B \subset \mathbb{R}^1$，$A, B$爲connected，則$A \times B$亦爲connected。

13. $1 \leq p \leq 2$，l^p爲l^2的子空間，問
(a) l^p爲l^2中的閉集，正確否？
(b) l^p爲l^2中的第一類集，正確否？其中$l^p = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots), \sum_{i=1}^\infty |x_i|^p < \infty\}$。

14. $C^1[0,1]$爲$C[0,1]$的子空間，問：
(a) $C^1[0,1]$爲$C[0,1]$中的閉集，正確否？
(b) $C^1[0,1]$爲$C[0,1]$中的第一類集，正確否？

15. (X,d)爲compact metric space $\Longrightarrow (X,d)$爲complete，試證之。

16. (a) $0 < x \leq 1$，試證：$1 - x^k \leq k(1-x)$，k爲正整數。
(b) (Pringsheim) $a_n > 0$，$\sum_{n=1}^\infty a_n = \infty$，$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$。試證
$$\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{S_n^p} = \begin{cases} \infty & \text{if } p \leq 1 \\ \text{finite} & \text{if } p > 1 \end{cases}.$$
(提示：$p > 1$，令$p = 1 + \alpha$，$\alpha > 0$，則$\dfrac{a_n}{s_n^p} \leq \dfrac{s_n - s_{n-1}}{s_n s_{n-1}^\alpha}$。取正整數$k$使$\tau = \dfrac{1}{k} < \alpha$，則$\dfrac{a_n}{s_n^p} \leq \dfrac{s_n - s_{n-1}}{s_n s_{n-1}^{\alpha\tau}} \leq \dfrac{1}{\tau}(\dfrac{1}{s_{n-1}^\tau} - \dfrac{1}{s_n^\tau})$，因據(a)，$1 - \dfrac{s_{n-1}}{s_n} \leq \dfrac{1}{\tau}[1 - (\dfrac{s_{n-1}}{s_n})^\tau]$。)

17. (Dini) $a_n > 0$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$，$T_n = a_n + a_{n+1} + \cdots$。試證：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{T_n^p} = \begin{cases} \infty & \text{if } p \geq 1 \\ \text{finite} & \text{if } p < 1 \end{cases}.$$

18. 試造一例，$a_n \searrow 0$當$n \to \infty$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p = \infty \ \forall p$。

19. 試造一例，$a_n > 0$，$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$收斂，但$a_1^p - a_2^p + a_3^p - a_4^p + \cdots$發散$\forall p > 1$。

20. (a) 給定$\alpha < \beta$，求$\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta \sin nx dx$。
(b) 求$\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta |\sin nx| dx$。

21. $f(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$，收斂半徑$R = 1$，$z = 1$爲其奇點 $(f(1) = \infty)$。試證明：對$|a| = 1$，$a \neq 1$，f在a點解析並求其收斂半徑(Ans：$|1 - a|$)。(所謂f在a點解析，是指f在a點附近可以解析延拓(analytic extension)到單位圓之外)

22. $f(z) = 1 + z^2 + z^4 + z^8 + z^{16} + \cdots$，收斂半徑$R = 1$。問：
(a) 甚麼樣的點a，$|a| = 1$使得$f(a) = \infty$？
(b) 試證：f在單位圓周上任一點都不解析(即無法解析延拓)。

23. f在$|z| < 1$上解析，且滿足$f''(\frac{n}{2n+1}) + f(\frac{n}{2n+1}) = 0 \ \forall n = 1, 2, 3, \cdots$。$f(0) = 1$，$f'(0) = 0$，求$f$。

24. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}$，求$f$。

25. 一個級數如果Abel可求和，在什麼條件下此級數古典可求和？這類問題統稱Tauberian Theorem。
Tauber給出如下條件：若$\lim_{n\to\infty} na_n = 0$，則Abel可求和$\Longrightarrow$古典可求和，且其值同。試根據下列分析，完成它的證明。
設$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \to A$當$x \to 1^-$。令$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，$S_n - A = f(x) - A + \sum_{k=0}^{n} (1 - x^k) a_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k = (1) + (2) + (3)$。
(1) $< \frac{\epsilon}{3}$當$x \sim 1^-$；
(2) $\leq (1 - x) \sum_{k=0}^{n} k a_k \overset{x=1-\frac{1}{n}}{=} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} k a_k \to 0$當$n \to \infty$ (諸權凋萎定理，記住$k a_k \to 0$當$k \to \infty$)；
(3) $< \frac{\epsilon}{3}$當n夠大。 請你完成它。

26. A爲$[0, \infty)$中無界開集(unbounded open set)，$S = \{x | x \in [0, \infty), nx \in A \text{ for infinitely many } n\}$。試證：$S$在$[0, \infty)$中稠密。

27. $f > 0$，$\int_0^\infty f(x)dx = \infty$，試造一函數$g \downarrow 0$當$x \to \infty$使
(i) $\int_0^\infty f(x)g(x)dx = \infty$ (ii) $\int_0^\infty f(x)g^2(x)dx < \infty$。
(可參考Rudin第三版P.79習題11)

28. 決定x，使$\sum_{n=1}^\infty (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n})\frac{\sin nx}{n}$收斂。

29. $\alpha > 0$，$x_0 = 1$，$x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + x_n^\alpha}$，試證：
(a) $\alpha \geq 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty x_n = \infty$
(b) $0 < \alpha < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty x_n$收斂。
(提示：$\exists c$使得$x_n < cn^{-\frac{1}{\alpha}}$，當$n$夠大)

30. (a) 試於$[0,1]$上造一連續函數列$\{f_n\}$，使$\{f_n(x)\}$爲有界集，當x爲有理點，爲無界集當x爲無理點。
(b) 試證：不存在連續函數列$\{f_n\}$定義於$[0,1]$上，使$\{f_n\}$在有理點無界，在無理點有界。

102 學年度台灣大學數學系高等微積分下
由陳金次教授製作，以創用 CC 姓名標示-非商業性-禁止改作 3.0 台灣 授權條款釋出

Chapter 9

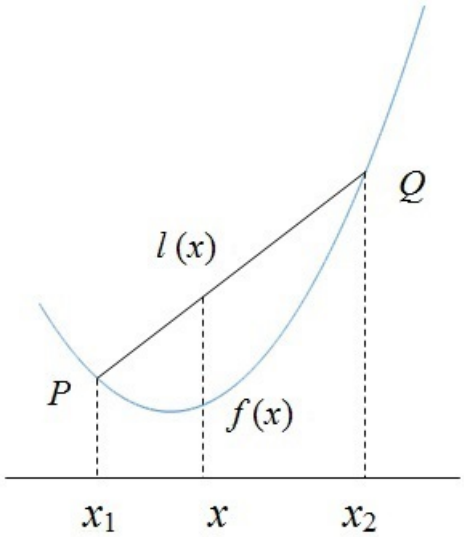
凸函數與不等式、羅畢達法則、另類極值問題

9.1 凸函數 (Convex Functions)

所謂凸函數，簡單說就是圖形向「上」彎翹的函數。向上彎翹是個形容詞，數學上如何表達呢？

a. 幾何觀點

設 Γ 爲平面上一曲線。若對 Γ 上任兩點 P、Q，線段 $\overline{PQ}$ 恆在 Γ 的上方，我們稱 Γ 爲凸 (圖 9.1)。



(圖 9-1)

b. 分析說帖

設 $\Gamma = \{(x, f(x)) | a < x < b\}$，$P(x_1, f(x_1)), Q(x_2, f(x_2))$。令 $l(x) = \overline{PQ}, x_1 < x < x_2$，所謂「$\overline{PQ}$ 恆在 Γ 的上方」，即

$$f(x) \leq l(x) \ \forall \ x_1 < x < x_2 \tag{1}$$

我們引進參數 t：

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1) = (1-t)x_1 + tx_2, 0 < t < 1$$

並令 $l(x) = px + q$，於是

$$\begin{aligned} l(x) &= p[(1-t)x_1 + tx_2] + q \\ &= (1-t)(px_1 + q) + t(px_2 + q) \\ &= (1-t)l(x_1) + tl(x_2) \\ &= (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \quad \text{（注意：} l(x_i) = f(x_i), i = 1, 2\text{）} \end{aligned}$$

故 (1) 等價於

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2), \ \forall \ 0 < t < 1, x_1, x_2 \in (a, b) \tag{2}$$

<u>定義 9.1</u> f 爲 (a,b) 上的凸函數若

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2), \ \forall \ 0 < t < 1, \ x_1, x_2 \in (a, b) \tag{3}$$

<u>定義 9.2</u> 稱 f 在 (a,b) 嚴凸 (strictly convex) 若 (3) 式中等號成立，當且僅當 $x_1 = x_2$

如何判斷一函數在 (a, b) 上爲凸呢？

直觀上，曲線向上彎翹，表示切線斜率遞增，即 $f' \nearrow$ on (a, b)，這個條件充分嗎？下面這個定理說「是的」：

<u>**定理 9.1**</u> $f' \nearrow$ strictly on $(a, b) \Rightarrow f$ strictly convex on (a, b).

分析：設 $x = (1-t)x_1 + tx_2, \ a < x_1 < x_2 < b, \ 0 < t < 1$，欲証

$$f(t) > (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \tag{4}$$

將 $f(x)$ 分解成 $(1-t)f(x)$ 及 $tf(x)$，則 (4) 式即証：

$$(1-t)[f(x) - f(x_1)] < t[f(x_2) - f(x)], \ \forall \ a < x_1 < x_2 < b, \ 0 < t < 1 \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \text{(5) 式左} &= (1-t)f'(z_1)(x - x_1) \quad \text{（均值定理）} \\ &= t(1-t)f'(z_1)(x_2 - x_1), x_1 < z < x \\ \text{右} &= tf'(z_2)(x_2 - x) \quad \text{（同上）} \\ &= t(1-t)f'(z_2)(x_2 - x_1), x < z_2 < x_2 \end{aligned}$$

而 f' 在 (a,b) 上嚴增，$z_1 < x < z_2$，故 $f'(z_1) < f'(z_2)$，$\therefore$ 左 $<$ 右，得証。

<u>系</u> 若 $f' \nearrow$ on (a,b)，則 f convex on (a,b)，因 $z_1 < z_2$ 只能保證 $f(z_1) \le f(z_2)$，從而左 $\le$ 右。

<u>定理 **9.2**</u>

$f'' > 0$ on $(a,b) \Rightarrow f$ strictly convex on (a,b)
$f'' \ge 0$ on $(a,b) \Rightarrow f$ convex on (a,b)

說明：因 $f'' > 0$ on $(a,b) \Rightarrow f' \nearrow$ strictly on (a,b)
$f'' \ge 0$ on $(a,b) \Rightarrow f' \nearrow$ on (a,b)

如果我們令 $\alpha_1 = 1-t, \alpha_2 = t$, (3) 式即

$$f(\alpha x_1 + \alpha x_2) \le \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2), x_1, x_2 \in (a,b) \tag{6}$$

從而，若 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1, \alpha_i > 0, x_1, x_2, x_3 \in (a,b)$，則

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) &= f\left((\alpha_1+\alpha_2)\left(\frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2}{\alpha_1+\alpha_2}\right) + \alpha_3 x_3\right) \\ &\le (\alpha_1+\alpha_2) f\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}x_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}x_2\right) + \alpha_3 f(x_3) \\ &\le (\alpha_1+\alpha_2)\left[\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}f(x_1) + \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}f(x_2)\right] + \alpha_3 f(x_3) \\ &= \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \alpha_3 f(x_3) \end{aligned}$$

依此類推，我們有如下引理：

<u>**Lemma 9.1**</u> f convex on (a,b), $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \alpha_i > 0, x_1, x_2, \cdots, x_n \in (a,b)$，則

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n) \le \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \cdots + \alpha_n f(x_n)$$

若 f strictly convex on (a,b)，等號成立 $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

例 **1.** $f(x) = -\ln x, x > 0, f'(x) = -\frac{1}{x}, f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0, \therefore f$ strictly convex on $(0,\infty)$

這是一個極重要的 convex function，許多不等式的關鍵就建立其上，我們馬上會看到。

例 **2.** $x_i \in (0,\pi)$，則

$$\frac{\sin x_1 + \sin x_2 + \cdots + \sin x_n}{n} \le \sin\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)$$

$x_i \in (0, \frac{\pi}{2})$，則

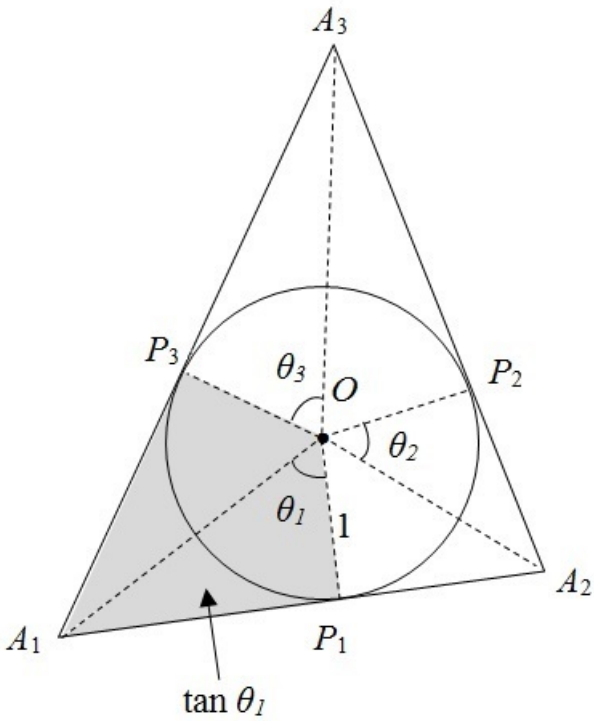
$$\frac{\tan x_1 + \tan x_2 + \cdots + \tan x_n}{n} \geq \tan\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)$$

等號成立 $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

說明：$-\sin x$ is strictly convex on $(0, \pi)$，and $\tan x$ is strictly convex on $(0, \frac{\pi}{2})$，據 **Lemma 9.1** 即可得上列不等式。

例 **3.** 外切於單位圓之諸三角形中，以正三角形面積最小。

分析：如圖，$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi, 0 < \theta_i < \frac{\pi}{2}$，設 O 表單位圓心。



(圖 9-2)

四邊形 $A_1P_1OP_3$ 的面積 $=2\times$ 三角形 A_1P_1O 的面積 $=2 \cdot \frac{1}{2}\tan\theta_1 \cdot 1 = \tan\theta_1$
同理，四邊形 $A_2P_2OP_1$ 的面積 $= \tan\theta_2$，四邊形 $A_3P_3OP_2$ 的面積 $= \tan\theta_3$
故 $\Delta A_1A_2A_3$ 的面積 $= \tan\theta_1 + \tan\theta_2 + \tan\theta_3 \geq \tan\left(\dfrac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}{3}\right) = \tan\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

等號成立 $\Leftrightarrow \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \dfrac{\pi}{3}$，此時對應之三角形爲正三角形。

同理可証：外切於單位圓之諸 n 邊形中，以正 n 邊形面積最小。

9.2 有關不等式

a. 加權平均不等式

在高中，大家都學過下列不等式：設 $a_1, a_2, \cdots, a_n \geq 0$，令

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \text{ （算術平均）} \\ G &= \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n} \text{ （幾何平均）} \end{aligned}$$

則 $A \geq G$，等號成立 $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n$，這是等權平均，每一個 a_i 的權重都是 $\frac{1}{n}$.
現在設 $a_i \geq 0$，$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1, \alpha_i > 0$，

$$\begin{aligned} A &= \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n \\ G &= a_1^{\alpha_1} \cdot a_2^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot a_n^{\alpha_n} \end{aligned}$$

A 稱爲 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 對 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的算術加權平均；
G 稱爲 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 對 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的幾何加權平均，

我們仍有 $A \geq G$，且等號成立 $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n$

說明：$f(x) = -\ln x$ 爲 strictly convex on $(0, \infty)$，故

$$\ln(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n) \geq \alpha_1 \ln a_1 + \alpha_2 \ln a_2 + \cdots + \alpha_n \ln a_n = \ln(a_1^{\alpha_1} \cdot a_2^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot a_n^{\alpha_n})$$

$\ln x \nearrow$ in x strictly, $\therefore \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n \geq a_1^{\alpha_1} \cdot a_2^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot a_n^{\alpha_n}$
等號成立 $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n$

b. Yang's 不等式

$a, b > 0,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ p, q > 1$，則

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$$

等號成立 $\Leftrightarrow a = b$

說明：根據加權平均不等式，

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} = \frac{1}{p}(a^p) + \frac{1}{q}(b^q) \geq (a^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (b^q)^{\frac{1}{q}} = ab$$

等號成立 $\Leftrightarrow a^p = b^q$

c. Hölder 不等式

i. 離散型

$a_i, b_i, i = 1, 2, \cdots, n,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1, p, q \geq 1$，則

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{7}$$

等號成立 $\Leftrightarrow |a_i|^p = \lambda |b_i|^q,\ \forall\ i = 1, 2, \cdots, n,\ \lambda$ 爲常數。

分析：

1. 令 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n), \mathbf{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n),$

$\Rightarrow \|\mathbf{a}\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \|\mathbf{b}\|_q = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$

觀察：(7) 式對 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 成立 $\Leftrightarrow$(7) 式對 $k\mathbf{a}, l\mathbf{b}$ 成立 $\ \forall\ k, l \neq 0$

2. 因此，欲証 (7) 式，只須證明它對 $\|\mathbf{a}\|_p = \|\mathbf{b}\|_q = 1$ 成立即可。

在此考慮下，根據 Yang's 不等式，我們有

$$|a_i b_i| \leq \frac{|a_i|^p}{p} + \frac{|b_i|^q}{q},\ i = 1, 2, \cdots, n$$

於是，

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| &\leq \frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right) + \frac{1}{q}\left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right) \\
&= \frac{1}{p}(\|\mathbf{a}\|_p)^p + \frac{1}{q}(\|\mathbf{b}\|_q)^q \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|\mathbf{a}\|_p \cdot \|\mathbf{b}\|_q
\end{aligned}$$

等號成立 $\Leftrightarrow |a_i|^p = |b_i|^q,\ \forall\ i = 1, 2, \cdots, n.$

3. 對一般的 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 等號成立 $\Leftrightarrow$

$$\frac{|a_i|^p}{(\|\mathbf{a}\|_p)^p} = \frac{|b_i|^q}{(\|\mathbf{b}\|_q)^q},\ \forall\ i = 1, 2, \cdots, n$$

即：$|a_i|^p = \lambda |b_i|^q,\ \forall\ i = 1, 2, \cdots, n,\ \lambda = \dfrac{(\|\mathbf{a}\|_p)^p}{(\|\mathbf{b}\|_q)^q}$

Remark:

(a) 對無窮維空間，於 (7) 式中令 $n \to \infty$，我們有

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

等號成立 $\Leftrightarrow |a_i|^p = \lambda |b_i|^q,\ \forall\ i = 1, 2, 3, \cdots$

(b) 對 $p = 1$，相應 $q = \infty$，$\|\mathbf{b}\|_\infty = \sup\{|b_1|, |b_2|, |b_3|, \cdots\}$，顯然

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i b_i| \leq \|\mathbf{b}\|_\infty \cdot \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| = \|\mathbf{a}\|_1 \cdot \|\mathbf{b}\|_\infty$$

等號成立 $\Leftrightarrow |b_i| = |b_j|\ \forall\ i, j$

(ii) 連續型

設 $\displaystyle\int_a^b |f(x)|^p\ dx < \infty, \int_a^b |g(x)|^q\ dx < \infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p, q \geq 1$，

則 $\displaystyle\int_a^b |f(x)g(x)| dx < \infty$, 且有

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\ dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q\ dx \right)^{\frac{1}{q}} \tag{8}$$

或 $\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$

等號成立 $\Leftrightarrow |f(x)|^p = \lambda |g(x)|^q,\ a.e,\ \lambda$ 爲常數。

注意，這裡 $a.e$ 是指集合 $S = \{x : |f(x)|^p \neq \lambda |g(x)|^q\}$ 的 Lebesgue 測度爲 0。上面的不等式，所牽涉到的積分指的是 Lebesgue 積分。

Lebesgue 積分以後我們會講。Lebesgue 積分與 Riemann 積分的差異是 Riemann 積分是對 f 的定義域 $[a, b]$ 做切割，而 Lebesgue 積分是對 f 的值域做切割。
考慮其相應的虧和 (Lower sum) $\underline{S}(P)$(圖 9.3) 及盈和 (Upper sum)$\overline{S}(P)$，若 f 在 $[a, b]$ 上有界，定義

$$\begin{aligned} (L)\overline{\int_a^b} f(x)\ dx &= \inf_P \overline{S}(P) \\ (L)\underline{\int_a^b} f(x)\ dx &= \sup_P \underline{S}(P) \end{aligned}$$

P 表對值域的切割。若 $(L)\overline{\int_a^b} f(x)\ dx = (L)\underline{\int_a^b} f(x)\ dx$，

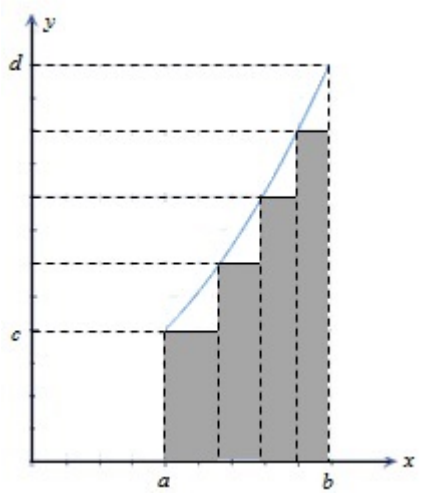
以 $(L)\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ 表此共同值，稱爲 f 在 $[a, b]$ 上的 Lebesgue 積分 (Remark)。

這裡有一個很重要的定理：Lebesgue 積分爲 Riemann 積分的推廣，即：

若 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分，則 f 在 $[a,b]$ 上 Lebesgue 可積分，且

$$(L)\int_a^b f(x)\ dx = (R)\int_a^b f(x)\ dx$$

上式 L, R 分別代表 Lebesgue 積分和 Riemann 積分。



(圖 9-3)

Remark:
設 $Range(f) = [c,d]$，將 $[c,d]$ 四等分 (如圖 9.3)，可看出 $\overline{S}(P) - \underline{S}(P) = \dfrac{d-c}{4} \cdot (b-a)$，同理可將 $[c,d]$ n 等分，則 $\overline{S}(P) - \underline{S}(P) = \dfrac{d-c}{n} \cdot (b-a) \to 0$ 當 $n \to \infty$，此式對非單調函數亦成立。

因此，若 $(L)\overline{\int_a^b} f(x)\ dx, (L)\underline{\int_a^b} f(x)\ dx$ 中有一個存在，則另一個必存在，

且其值相等，這與 Riemann 積分大異其趣。

以上粗略介紹 Lebesgue 積分的觀念，以後再來詳談它。

好，回過頭來看 Hölder 不等式 (8)，一如 discrete 的情形，(8) 式對 f, g 成立 $\Leftrightarrow$(8) 式對 $\lambda f,\ \mu g$ 成立，$\forall\ \lambda, \mu \neq 0,\ \lambda, \mu$ 爲常數。因此只須考慮 $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ 的情形。在此考慮下，依 Yang's 不等式我們有：

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q$$

故

$$\begin{aligned}(L)\overline{\int_a^b}|f(x)g(x)|dx &\leq \frac{1}{p}\int_a^b |f(x)|^p\ dx + \frac{1}{q}(L)\int_a^b |g(x)|^q\ dx \\ &= \frac{1}{p}\|f\|_p{}^p + \frac{1}{q}\|g\|_q{}^q \\ &= \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p \cdot \|g\|_q\end{aligned}$$

因此

$$(L)\int_a^b |f(x)g(x)|dx\text{存在} \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q\ \forall\ f \in L^p[a,b]\ g \in L^q[a,b]$$

等號成立 $\Leftrightarrow |f(x)|^p = \lambda|g(x)|^q$ a.e on $[a,b]$.

d. Minkovsky 不等式

(i) $\mathbf{a},\mathbf{b} \in l^p, p \geq 1$，則

$$\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|_p \leq \|\mathbf{a}\|_p + \|\mathbf{b}\|_p \tag{9}$$

等號成立 $\Leftrightarrow \mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}, \lambda > 0$ 爲常數。

(ii) $f, g \in L^p(a,b), p \geq 1$，則

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \tag{10}$$

等號成立 $\Leftrightarrow g = \lambda f$ a.e., $\lambda > 0$ 爲常數。

証：(i)

$$\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|_p{}^p = \sum_{i=0}^{\infty}|a_i+b_i|^p \leq \sum_{i=1}^{\infty}|a_i+b_i|^{p-1}(|a_i|+|b_i|) \tag{11}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}|a_i|\cdot|a_i+b_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{\infty}|b_i|\cdot|a_i+b_i|^{p-1}$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i+b_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i+b_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{12}$$

$$= (\|\mathbf{a}\|_p + \|\mathbf{b}\|_p)(\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|_p{}^p)^{\frac{1}{q}}$$

注意 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1 \Rightarrow pq - q = p$

$\therefore\ (\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|_p)^{p-\frac{p}{q}} \leq \|\mathbf{a}\|_p + \|\mathbf{b}\|_p$，即

$$\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|_p < \|\mathbf{a}\|_p + \|\mathbf{b}\|_p$$

等號成立的充要條件爲何？

由 (11) 式，等號成立 $\Leftrightarrow |a_i+b_i|=|a_i|+|b_i|$，即：$a_i, b_i$ 同號，$b_i=\lambda_i a_i, \lambda_i>0$
由 (12) 式，等號成立 $\Leftrightarrow$ $|a_i|^p = k_1|a_i+b_i|^{(p-1)q}, |b_i|^p = k_2|a_i+b_i|^{(p-1)q}$, $\forall\ i = 1,2,3,\cdots$

上兩情況同時成立 $\Leftrightarrow \lambda_i=\lambda\ \forall\ i=1,2,3,\cdots$，即 $\mathbf{b}=\lambda\mathbf{a}, \lambda>0$.

e. Jensen's 不等式

f 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可積分，$Range(f)\subset(c,d), \phi$ 在 (c,d) 上 convex，則

$$\phi\left(\int_0^1 f(x)dx\right)\le\int_0^1\phi(f(x))dx$$

証：將 [0,1]n 等分

$$0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=1$$

在 $[x_{i-1},x_i]$ 中任取一點 t_i，令 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，則 $\sum\limits_{i=1}^n f(t_i)\Delta x_i\to\int_0^1 f(x)dx$

ϕ convex on (c,d) $\therefore \phi$ continuous on (c,d)

$$\begin{aligned}\therefore \phi\left(\int_0^1 f(x)dx\right) &= \lim_{n\to\infty}\phi\left(\sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta x_i\right)\\ &\le \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\phi(f(t_i))\Delta x_i,\ \text{注意}\sum_{i=1}^n\Delta x_i=1\\ &= \int_0^1\phi(f(x))dx\end{aligned}$$

Remark:

1. $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1$ 這個條件不可少。

有了它，才能發揮 ϕ 爲 convex 的條件，得到上述不等式

2. 若 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分，

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

爲 $[a,b]$ 上的 n 等分分割，$t_i \in [x_{i-1}, x_i]$，則

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i = (b-a) \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\frac{\Delta x_i}{b-a}$$

$$\begin{aligned}
\phi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right) &= \phi\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\frac{\Delta x_i}{b-a}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \phi\left(\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\frac{\Delta x_i}{b-a}\right) \\
&\leq \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\phi(f(t_i))\frac{\Delta x_i}{b-a}, \text{ 注意} \sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta x_i}{b-a} = 1 \\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi(f(x))dx
\end{aligned}$$

例 **1.** $\phi(x) = e^x$, convex on $\mathbb{R}$，故

$$\exp\left(\int_0^1 f(x)dx\right) \leq \int_0^1 e^{f(x)}dx$$

對一切 [0,1] 上 Riemann 可積函數成立。

例 **2.** $\phi(x) = x^p$, convex on $(0,\infty)$ $\forall\ p > 1$，故若 f 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可積分，則有：

$$\left(\int_0^1 |f(x)|dx\right)^p \leq \int_0^1 |f(x)|^p dx$$

或

$$\int_0^1 |f(x)|dx \leq \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_p$$

上不等式亦可由 Hölder 不等式得之。

9.3 廣義均值定理，L'Hospital Rule

<u>定理 **9.3**</u> (廣義均值定理)

設 f, g 在 $[a, b]$ 上連續，在 (a, b) 上可導，則 $\exists c \in (a, b)$ 使

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},\ g(b) \neq g(a) \tag{13}$$

分析：1. (13) 式即 $\exists c \in (a, b)$ 使

$$[f(b) - f(a)] \cdot g'(c) = [g(b) - g(a)] \cdot f'(c) \tag{14}$$

2. 令 $\phi(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$，則 $\phi(b) = \phi(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b)$，又 ϕ 在 $[a, b]$ 上連續，在 (a, b) 上可導，依 Rolle's 定理，$\exists c \in (a, b)$ 使 $\phi'(c) = 0$，故 (15) 式得証。

Remark: 當 $g(x) = x$ 時 (14) 式即我們之前所述的均值定理 (微分型)

<u>定理 **9.4**</u> L'Hospital Rule: $\dfrac{0}{0}$ 型

設 f, g 在 (a, b) 上可導，$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} g(x) = 0$. 若 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$，則 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在，且等於 l.

証：定義 $f(a) = g(a) = 0$，則 f, g 在 $[a, x]$ 上連續，在 (a, x) 可導，$\forall\ x \in (a, b)$，依廣義均值定理，$\exists\ \xi \in (a, x)$，使

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \tag{15}$$

由於 $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$，給定 $\epsilon > 0,\ \exists\ \delta < b - a$ 使

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - l \right| < \epsilon \text{ 當} x \in (a, a + \delta)$$

ξ 介於 a, x 之間，$x \in (a, a + \delta) \Rightarrow \xi \in (a, a + \delta)$，根據 (16) 式，我們有

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - l \right| < \epsilon \text{ 當} x \in (a, a + \delta)$$

故 $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.

<u>定理 **9.5**</u> L'Hospital Rule: $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型

設 f, g 在 (a, b) 上可導，$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = \infty$，若 $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$，則 $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在，且等於 l。

分析：1. 由於 $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$，給定 $\epsilon > 0$, $\exists\, \delta_1$ 使

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - l\right| < \frac{\epsilon}{2} \text{ 當 } x \in (a, a+\delta_1) \subset (a, b)$$

2. 又由於 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = \infty$，我們不妨假設 $f(x) > 0, g(x) > 0\ \forall\ x \in (a, a+\delta_1)$

3. 任取 $c \in (a, a+\delta_1)$，固定之。對任意 $x \in (a, c)$，依廣義均值定理：

$$\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},\ \xi \in (x, c) \subset (a, a+\delta_1)$$

故有

$$\left|\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} - l\right| = \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - l\right| < \frac{\epsilon}{2}$$

4. 於是

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| \le \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)}\right| + \left|\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} - l\right| \le A + \frac{\epsilon}{2} \text{ 當} x \in (a, c)$$

其中，$A = \left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)}\right|$

5. 且看如下的變形：

$$\frac{x}{y} - \frac{x-\alpha}{y-\beta} = \frac{x(y-\beta) - y(x-\alpha)}{y(y-\beta)} = \frac{\alpha y - \beta x}{y(y-\beta)} = \frac{(\alpha y - \alpha\beta) - (\beta x - \alpha\beta)}{y(y-\beta)} = \frac{\alpha}{y} - \frac{\beta}{y} \cdot \frac{x-\alpha}{y-\beta}$$

據此，

$$\begin{aligned} A &= \left|\frac{f(c)}{g(x)} - \frac{g(c)}{g(x)} \cdot \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)}\right| \\ &\le \left|\frac{f(c)}{g(x)}\right| + \left|\frac{g(c)}{g(x)}\right| \cdot \left||l| + \frac{\epsilon}{2}\right| \\ &= \frac{\lambda}{g(x)},\ \lambda = |f(c)| + |g(c)| \cdot \left||l| + \frac{\epsilon}{2}\right| \end{aligned}$$

至此，明月當空，A 可控制了，因 $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = \infty$

6. 對上面所給的 ϵ, $\exists\ \delta_2$ 使

$$|g(x)| > \lambda \cdot \frac{2}{\epsilon} \text{ 當 } x \in (a, a+\delta_2)$$

故

$$A \leq \lambda \cdot \frac{\epsilon}{2\lambda} = \frac{\epsilon}{2} \text{ 當 } x \in (a, a+\delta_2)$$

7. 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$，則

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \text{ 當 } x \in (a, a+\delta)$$

故 $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l.$

<u>定理 **9.6**</u>

f, g 在 (a, ∞) 上可導，$a > 0$，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$(或 ∞)。
若 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$，則 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l.$
分析：令 $t = \dfrac{1}{x}$，則上述問題變成在 $(0, \dfrac{1}{a})$ 上的問題，可依定理 9.4 及 9.5 之結論，

分別處理，請同學完成之。

9.4 再談加權平均 (連續的情形)

a. Convolution

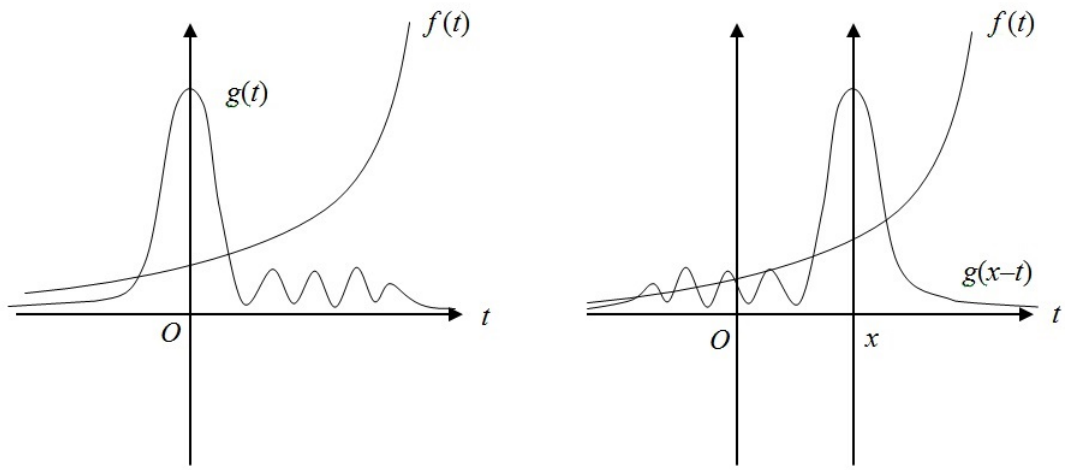
f, g 在 $\mathbb{R}$ 上可積分，定義

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(x-t)\ dt \tag{16}$$

稱爲 g 對 f 的 convolution. 依定義，同學不難檢查出

$$(f * g)(x) = (g * f)(x) \tag{17}$$

即：convolution 具有交換性。
(17) 式是什麼意思呢？且看下圖說明：



(圖 9-4)

用白話說，所謂 $g * f$ 在 x 點的值是：把 g 左右對調，平移到 x 點後對 f 作加權 (如果 $\|g\|_1 = 1$) 平均。爲什麼要左右對調呢？如不對調則會有：

$$(f * g)(x) = -(g * f)(x)$$

爲了讓它具有交換性，故左右對調之。

b. Summability Kernel Functions

κ_n 爲定義於 $\mathbb{R}$ 上的函數，滿足

(i) $\kappa_n(x) \geq 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \kappa_n(x)dx = 1$ (權重爲 1)

(iii) $\forall \ \delta > 0$, 固定，

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|x|>\delta} \kappa_n(x)dx = 0 \text{ (獨鍾原點)}$$

這樣一組函數 $\{\kappa_n\}$ 稱爲核函數。

既然是獨鍾原點，平移到 x 之後就是獨鍾 x 了，於是 $(\kappa_n * f)(x)$ 應該要 $\to f(x)$ 當 $n \to \infty$，這就是我們下面要介紹的 Lemma.

<u>**Lemma**</u>: f 在 x_0 點連續，$|f(x)| < M \ \forall \ x \in \mathbb{R}$，則

$$\lim_{n\to\infty} (\kappa_n * f)(x_0) = f(x_0)$$

証：f 在 x_0 連續，給定 $\epsilon > 0$, $\exists \ \delta$ 使

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2} \text{ 當 } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

於是：

$$\begin{aligned} |(\kappa * f)(x_0) - f(x_0)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \kappa_n(x)[f(x_0 - t) - f(x_0)]dt \right| \\ &\leq \int_{|t|<\delta} \kappa_n(t)|f(x_0 - t) - f(x_0)|dt + \int_{|t|\geq\delta} \kappa(t)|f(x_0 - t) - f(x_0)|dt \\ &= A + B \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} A &< \frac{\epsilon}{2} \int_{|t|<\delta} \kappa_n(t)dt < \frac{\epsilon}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \kappa_n(t)dt = \frac{\epsilon}{2} \\ B &< 2M \cdot \int_{|t|\geq\delta} \kappa_n(t)dt \end{aligned}$$

而 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{|t|\geq\delta} \kappa_n(t)dt = 0$. 對此 $\epsilon > 0$, $\exists \ N$ 使

$$\int_{|t|\geq\delta} \kappa_n(t)dt < \frac{\epsilon}{4M}, \text{ 當} n > N$$

故

$$B < 2M \cdot \frac{\epsilon}{4M} = \frac{\epsilon}{2}, \text{ 當} n > N$$

從而

$$|(\kappa_n * f)(x_0) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \text{ 當} n > N$$

Remark: 上面 N 的選取與 δ 有關，不同的 δ 會對應不同的 N，而 δ 與 f 在 x_0 點的連續性有關，如果 x_0 變動，在 ϵ 不變下，δ 必須隨之調整，因此相應的 N 也不同。

設 f 在 (c,d) 上連續，則 f 在 $[a,b] \subset (c,d)$ 上有界且均勻連續，給定 $\epsilon > 0$, $\exists \delta$ 使

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \text{ 當 } |x - y| < \delta \ \forall\ x, y \in [a,b]$$

δ 只跟 ϵ 有關，與 x, y 的位置無關，因此，上面的 N 與 x_0 的位置無關，換言之，$(\kappa_n * f)(x) \to f(x)$ uniformly on $[a,b]$.

我把它陳述爲定理如下：

<u>定理</u>：設 f 在 (c,d) 上連續，$\{\kappa_n\}$ 爲一組核函數，則

(a) $(\kappa * f)(x) \to f(x)$ 當 $n \to \infty\ \forall\ x \in (a,b)$

(b) 上面之收斂在任意 $[a,b] \subset (c,d)$ 上均勻。

即：給定 $\epsilon > 0$, $\exists\ N$, 與 x 無關，使

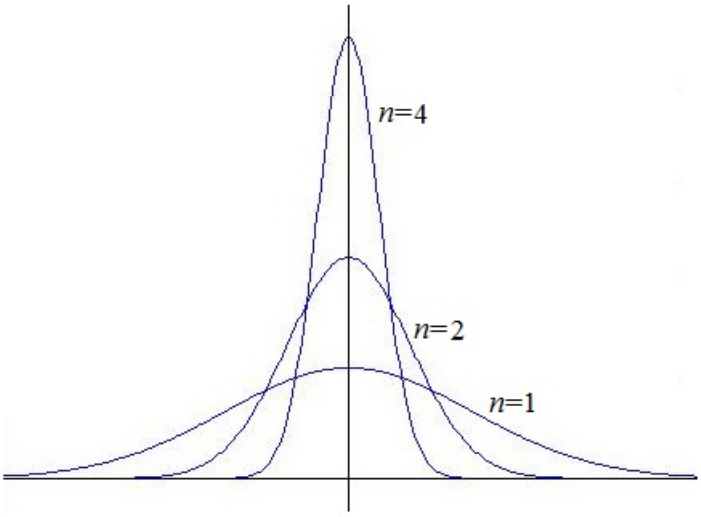
$$|(\kappa_n * f)(x) - f(x)| < \epsilon \text{ 當 } n > N\ \forall\ x \in [a,b]$$

例. 在初微裡，我們學過這個積分：

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

令 $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$，則 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx=1$，今將 g 橫向內縮，縱向拉高，使權重仍爲 1，即令

$$\kappa_n(x)=\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-(nx)^2}$$



(圖 9-5)

則 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\kappa_n(x)dx=1\ \forall\ n$，於是有

$(\kappa_n{*}f)(x)=\dfrac{n}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-n^2(x-t)^2}f(t)dt\to f(x)$ 當 $n\to\infty,\ \forall\ x\in(c,d)$ 若f在(c,d)上連續。

此收斂在任意 $[a,b]\subset(c,d)$ 上均勻。

Remark: 如果 $f({x_0}^+)\neq f({x_0}^-)$，而 $\kappa_n(-x)=\kappa_n(x)$，則

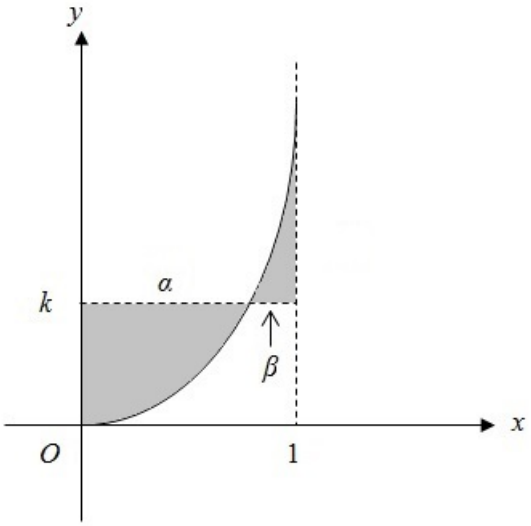
$$\lim_{n\to}(\kappa*f)(x_0)=\frac{1}{2}[f({x_0}^+)+f({x_0}^-)]$$

恕我不欲多言。

9.5 微擾與極值問題

利用導數或偏導數來求函數的極大極小，在初微中已經學會了這套工具。它是一個很 powerful 的方法，不過數學無定法，有些問題大工具未必靈巧，有時甚至窒礙難行。下面介紹微擾的觀念，利用它來處理一些特殊的極值問題，簡潔有力。

例 **1.** 求 k 使 $\int_0^1 |x^2 - k|dx$ 最小。



(圖 9-6)

分析：請就圖 9-6 說明之。

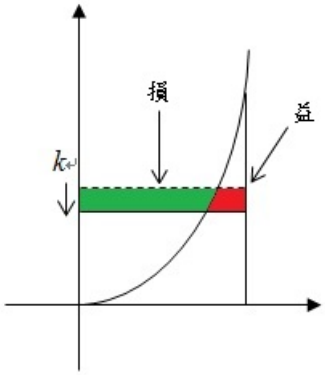
1. 最小值的存在問題

   設 $\Gamma = \{(x, y)|y = x^2, 0 \le x \le 1\}$，$L_k$ 表水平直線 $y = k$，則 $\int_0^1 |x^2 - k|dx$ 表斜線域面積。對最小值的探索，我們只需考慮 L_k 與 Γ 相交的情形，否則恆可把斜線域面積變小。因此只須考慮 $0 \le k \le 1$ 的情形。

   斜線域面積對 k 連續，$k \in [0, 1]$，故最小值存在。

2. 設 L_k 分別與 y 軸，Γ，及鉛直線 $x=1$ 交於 A, P, B 三點，令 $\alpha = \overline{AP},\ \beta = \overline{PB}$

   (i) 若 $\alpha > \beta$，將 k 下移「一點點」，觀其損益：
   由圖 9-7，可看出損多益少，顯非極小。其損多益少的嚴格說明，請同學完成之，在此恕我不欲多言。



(圖 9-7)

   (ii) 若 $\alpha < \beta$，將 k 上移一點點，觀其損益面化，仍得「損多益少」，請同學完成之。

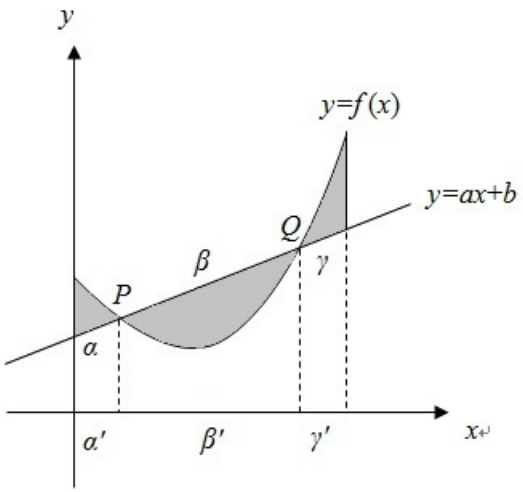
3. 結論：極小值必發生在 $\alpha = \beta$ 的情況。而 $\alpha + \beta = 1$，故 $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$，從而得 $k = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$.

例 **2.** 求 a, b 使 $\displaystyle\int_0^1 |f(x) - ax - b|dx$ 最小，其中 f 表定義於 $[0,1]$ 上的嚴凸函數。

分析：

1. 最小值的存在問題

   如圖 9-8，$\displaystyle\int_0^1 |f(x) - ax - b|dx$ 表斜線域面積。令 $\Gamma = \{(x,y)|y = f(x),\ 0 \le x \le 1\}$，極值點應發生在直線 $y = ax + b$ 與 Γ 交於兩點之情形 (否則恆可把面積變小)

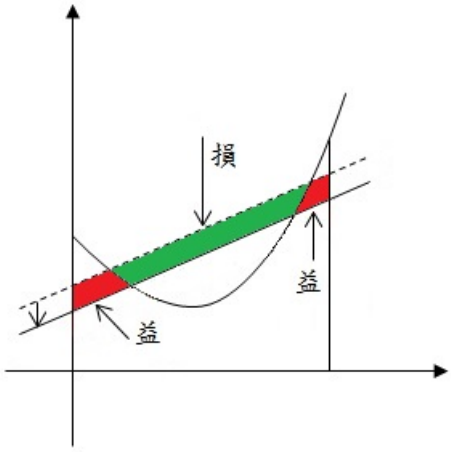


(圖 9-8)

在 Γ 上任取兩點 P, Q，令 L 爲過 P, Q 兩點的直線，則斜線域面積爲 P, Q 的連續函數 $\forall\ P, Q \in \Gamma$，Γ 爲 compact，因此，最小值存在。

2. 令 α, β, γ 分別表直線 $y = ax + b,\ 0 \le x \le 1$，被曲線 $y = f(x)$ 所截，自左而右，之三線段長，α', β', γ' 爲他們在 x 軸上的投影，則 $\alpha' + \beta' + \gamma' = 1$.

   (i) 若 $\beta > \alpha + \gamma$，將直線向下平移「一點點」，觀其損益，知損多益少，故知其非極小 (圖 9-9)



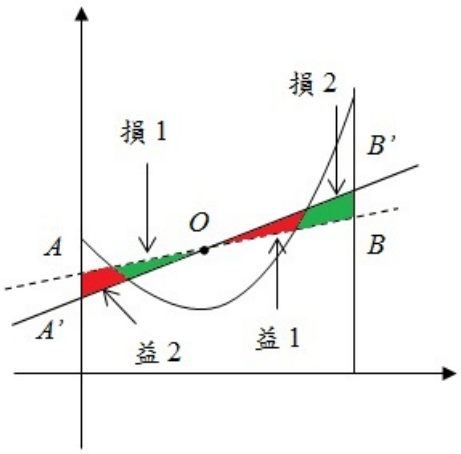
(圖 9-9)

   (ii) 同理，若 $\beta < \alpha + \gamma$，將直線向上平移「一點點」，觀其損益，知損多益少，故知其亦非極小。

故知極小值必發生在 $\beta = \alpha + \gamma$ 的情況。

3. 取 β 之中點 O，固定之。設 A, B 分別爲直線 $y = ax + b$ 與鉛直線 $x = 0$ 及 $x = 1$ 的交點，

   (i) $\overline{OA} < \overline{OB}$(圖 9-10)，以 O 爲心，將直線逆時旋轉「一點點」。由於 $\overline{OA} < \overline{OB}$，$\Delta OAA'$ 的面積 $< \Delta OBB'$ 的面積，而 O 爲 β 的中點，損 1 ～益 1(幾乎相等)，故知益 2 ＜損 2
   結論：損多益少，非極小！



(圖 9-10)

   (ii) $\overline{OA} > \overline{OB}$
   以 O 爲心，將直線順時旋轉「一點點」，同理可看出損多益少

   故知，極值點必發生在 $\overline{OA} = \overline{OB}$ 的情況，即 $\alpha = \gamma$

4. 據 2. 及 3.，極小點必發生在 $\beta' = \alpha' + \gamma'$ 且 $\alpha' = \gamma'$ 的情況，而 $\alpha' + \beta' + \gamma' = 1$，從而知 $\alpha' = \dfrac{1}{4}, \beta' = \dfrac{1}{2}, \gamma' = \dfrac{1}{4}$
   設 P, Q 爲極值情況下，直線 $y = ax + b$ 與曲線 $y = f(x)$ 的交點，P 在左，Q 在右，則

$$P : \left(\frac{1}{4}, f\left(\frac{1}{4}\right)\right), Q : \left(\frac{3}{4}, f\left(\frac{3}{4}\right)\right)$$

   因此，$a = 2\left(f\left(\dfrac{3}{4}\right) - f\left(\dfrac{1}{4}\right)\right), b = \dfrac{3}{2}f\left(\dfrac{1}{4}\right) - \dfrac{1}{2}f\left(\dfrac{3}{4}\right)$.

Remark: 上面二例，對極小點存在的說明不可省。接下來的分析，在說明如果極小點存在，它應該是個什麼樣子，沒有存在的保證，說得天花亂墜，也是白忙一場。

例 **3.** $D = [0,1] \times [0,1]$

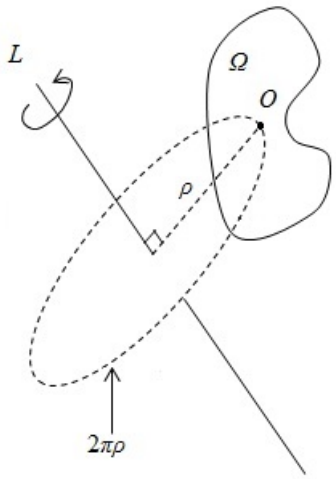
求 a, b, c 使 $\iint_D |x^2 + y^2 - ax - by - c| dx\ dy$ 最小。

在處理例 3 之前，我們先來回憶一下 Pappus 定理。

設 Ω 爲一有界領域，其邊界片段平滑，L 爲一直線，$L \cap \Omega = \phi$，設 O 爲 Ω 的形心 (重心，想像 Ω 的密度處處均勻)，ρ 爲 O 到直線 L 的距離。今令 Ω 對 L 旋轉，得一旋轉體 V，則

$$|V| = 2\pi\rho \cdot |\Omega|$$

其中 $|V|$ 表 V 的體積，$|\Omega|$ 表 Ω 的面積。



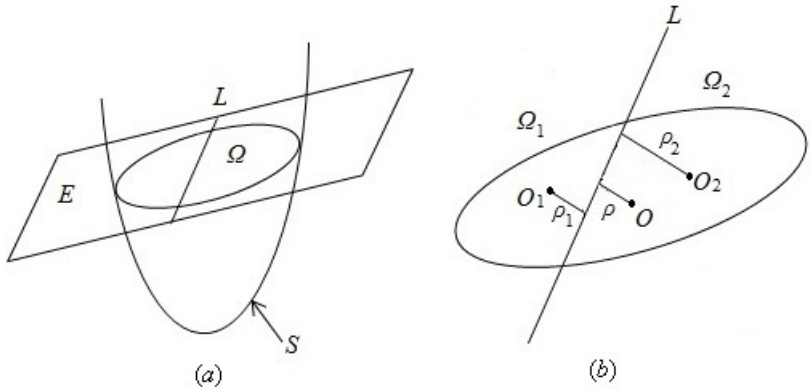
(圖 9-11)

依此，若 Ω 對 L 旋轉 $\Delta\theta$，則所得體積

$$|\Delta V| = 2\pi\rho \cdot |\Omega| \cdot \frac{\Delta\theta}{2\pi} = |\Omega| \cdot \rho\Delta\theta$$

<u>Lemma</u>:

設 S 爲一片段平滑曲面 (piecewise smooth surface)，E 爲一平面，與 S 包圍住一封閉區域 A，$\Omega = \bar{A} \cap E$，在 $\partial\Omega$ 上任取二點，過此二點作一直線 L。今固定 L，令平面 E 以 L 爲轉軸作微擾，若體積之損益平衡，則 L 必過 Ω 之重心。



(圖 9-12)

說明：所謂「損益平衡」意指

$$\lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{f^+(\Delta\theta)}{f^-(\Delta\theta)} = 1$$

其中 $f^+(\Delta\theta)$ 表微擾 $\Delta\theta$ 所「益」體積，$f^-(\Delta\theta)$ 表所「損」體積。

分析：設 Ω 被 L 分成 Ω_1 及 Ω_2，令 O, O_1, O_2 分別表 Ω, Ω_1 及 Ω_2 之重心，ρ, ρ_1, ρ_2 分別表 O, O_1 及 O_2 到直線 L 的距離。

損益平衡 $\Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta\theta \to 0} \dfrac{|\Omega_1|\Delta\theta \cdot \rho_1}{|\Omega_2|\Delta\theta \cdot \rho_2} = 1$

或：$|\Omega_1| \cdot \rho_1 = |\Omega_2| \cdot \rho_2$，即：$\Omega_1$ 對 L 的力矩 $=\Omega_2$ 對 L 的力矩。

而 $|\Omega對L的力矩| = |\Omega_1對L的力矩 - \Omega_2對L的力矩|$，故

$$|\Omega| \cdot \rho = ||\Omega_1| \cdot \rho_1 - |\Omega_2| \cdot \rho_2| = 0$$

即 $\rho = 0 \ \therefore \ L$ 過 O 點。

現在回過頭來看例 3.

分析：

1. 存在問題。
   設 S 表拋物面 $z = x^2 + y^2, x, y \in D$，$E$ 表平面 $z = ax + by + c$。對極小值的探尋，我們只需考慮 $S \cap E$ 爲一封閉曲線的情形即可，否則恆可使所擁體積變小。(請想一想)

   仿例 2 的分析，知極小值存在。(還請同學再想一想)

2. 令 $\Omega^+ = \{(x, y, z) | (x, y, z) \in E, x^2 + y^2 \geq z,\ (x, y) \in D\}$ (E 上的橢圓盤)
   $\Omega^- = \{(x, y, z) | (x, y, z) \in E, x^2 + y^2 < z,\ (x, y) \in D\}$ (橢圓盤外的領域)

   仿例 2. 分析 2.，對 E 做平行微擾，則極小點必發生在 $|\Omega^+| = |\Omega^-|$ 的情形。

3. 令 $\Omega^+_{xy}, \Omega^-_{xy}$ 分別表 Ω^+, Ω^- 在 x, y 平面上的投影，則 $|\Omega^+| = |\Omega^-| \Leftrightarrow |\Omega^+_{xy}| = |\Omega^-_{xy}|$。

   令 $\Gamma = \partial\Omega^+_{xy} = \partial\Omega^-_{xy}$，則
   $$(x, y) \in \Gamma \Leftrightarrow x^2 + y^2 = ax + by + c$$
   故 Γ 爲一圓，心 $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$, 半徑 r, $r^2 = c + \frac{a^2 + b^2}{4}$

4. 根據 2.，$|\Omega^+| = |\Omega^-|$，故知 $|\Omega^+_{xy}| = |\Omega^-_{xy}|$，而 $\Omega^+_{xy} \cup \Omega^-_{xy} = D$，$|D| = 1$，

   故得 $|\Omega^+_{xy}| = |\Omega^-_{xy}| = \frac{1}{2}$，$|\Omega^+_{xy}| = \pi r^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow r^2 = \frac{1}{2\pi}$

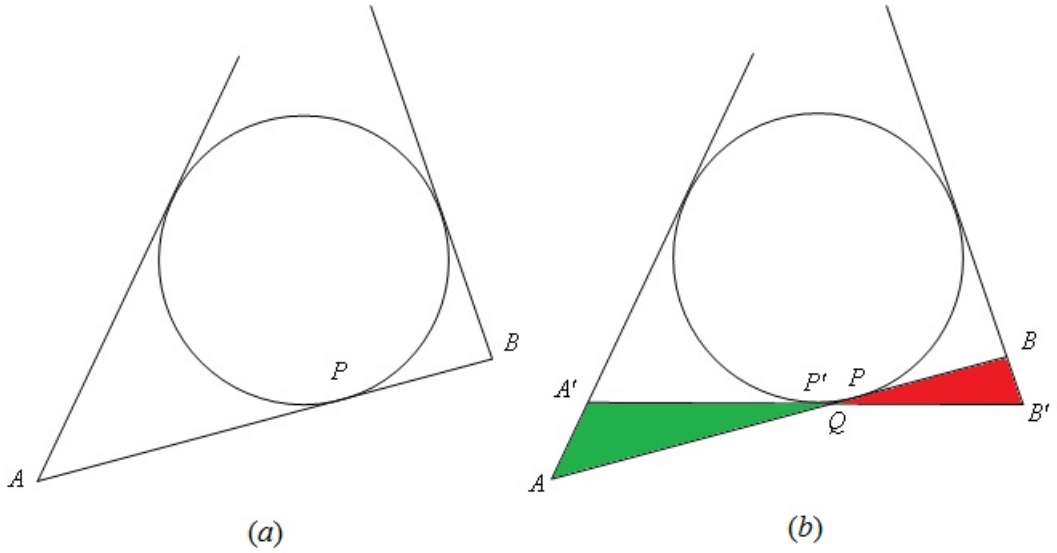
5. 設 O^+ 爲 Ω^+ 的形心 (即重心)，L 爲 E 上過 O^+ 的直線，固定 L，讓 E 對 L 做微擾，而 Ω^+ 對 L 恆保持損益平衡，根據**<u>Lemma.</u>**, E 微擾後欲得損益平衡，除非 Ω 的重心 O 落在 L 上。

   上述推論對任意過 O^+ 點的直線 L 成立，故知 O, O^+ 必須重合。

   而 Ω 在 xy 平面上的投影爲 D，D 的重心爲 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$，即
   $$\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

6. 於是得：$a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}, c = r^2 - \frac{a^2 + b^2}{4} = \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{8}$.

例 **4.** 外切於單位球的諸多邊形中，以正多邊形面積最小。



(圖 9-13)

分析：

1. 極小點的存在問題，請同學完成之。

2. 設多邊形之一邊爲 $\overline{AB}$，P 爲 $\overline{AB}$ 與圓的切點。

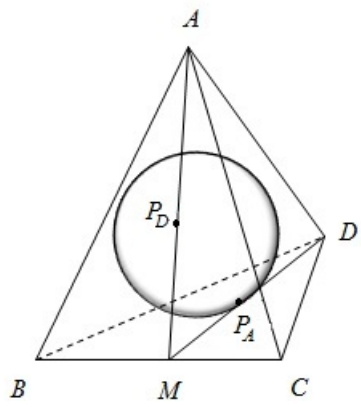
   我們想說明極值點必發生在 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 的情況。

   (i) 若 $\overline{PA} > \overline{PB}$(如圖所示)，將直線 $\overline{AB}$ 沿圓弧順時向微擾，得新的邊界 $\overline{A'B'}$，切圓於 P'。令 Q 爲 $\overline{AB}$ 及 $\overline{A'B'}$ 的交點，在此擾動下，諸線段長具連續性，而 $\overline{PA} > \overline{PB}$，從而得 $\overline{QA} > \overline{QB}$，$\overline{QA'} > \overline{QB'} \Rightarrow \Delta QAA'$ 的面積 $> \Delta QBB'$ 的面積 $\Rightarrow$ 損多益少，非極小！

   (ii) 同理，若 $\overline{PA} < \overline{PB}$，亦非極小。

3. 各邊皆如此 $\Rightarrow$ 極小點必爲正多邊形。

例 **5.** 外切於單位球的四面體中，以正四面體體積最小。



(圖 9-14)

分析：

1. 極小值的存在問題，請同學完成之。

2. 如圖，設 P_A, P_B, P_C, P_D 分別表 $\Delta BCD, \Delta CDA, \Delta DAB$ 及 ΔABC 與球 S 的切點。令諸三角形貼著球面 S 微擾之，類似於例 4. 的論證，可得：極小值必發生在「P_A, P_B, P_C, P_D 爲相應諸三角形的重心」之情況。

3. 如圖，設 M 爲 $\overline{BC}$ 中點，則 $\overline{MP_A} = \overline{MP_D} \Rightarrow \overline{DM} = \overline{AM} =$ 過 A 點的各三角形中線長 (同切於球 S)，因此，任何中線皆等長。

4. 各中線皆等長 $\Rightarrow$ 各三角形都是全等正三角形，故知其爲正四面體。

以上諸例頗有看圖說故事的味道，處理上也不是很嚴謹，很不像現代分析學。

有一位頗負盛名的數學家寫了一本書，很得意地強調：

There is no pictures in any chapter of the book.

而我在短短一小節表連續畫了十一個圖。我想，如果這位先生看到了上面的論述，或許會說：

NO! It is not mathematical analysis.

面對這樣的批評，我也只能無言以對了。因爲我實在不知道怎麼樣才叫 mathematical analysis，如果畫圖有助於對問題的理解，爲什麼要迴避它？

嚴謹有其邏輯上的必要，處處要求嚴謹形式反而成爲一種框框，會框限人的思維和創造力。微積分濫觴於 1670 年代，一直到 1860 年才完成它的嚴謹，更嚴格地說，要到實數的建構完

成，才算真正的嚴謹，這中間不嚴謹了兩百多年，沒有人說這兩百多年的數學不光彩。

上面諸例也可以很嚴謹地處理它，不過那樣得花些篇幅，且礙手礙腳，失去數學的直覺，我不想那樣做。我只希望同學能感受微擾的妙用，某些問題以常法視之，窒礙難行，不妨微擾之，或者可看出一些端倪。

數學無定法，定了法就成一種框框，世間一切有生命的事物無不如此。時下常流行一句話；一切依法行事。這是很糟糕的心態，官僚的溫床。小朋友掉到水裡去，啪啦！啪啦！在那裏掙扎，依什麼法，我應該救他？

就是法，還得看你用什麼心來解釋它呢！

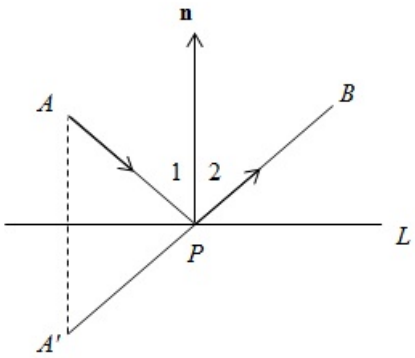
9.6 光學與極值問題

a. 反射原理

(i) 在國中的年代，大家都學過下面這個問題：

設 L 爲平面上一直線，A,B 爲 L 外兩給定點，且在 L 的同側。試在 L 上求一點 P，使 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 最小。

大家都知道：將 A 對 L 反射，得一點 A', $\overline{A'B}$ 交直線 L 於 P，則 P 點即爲所求。



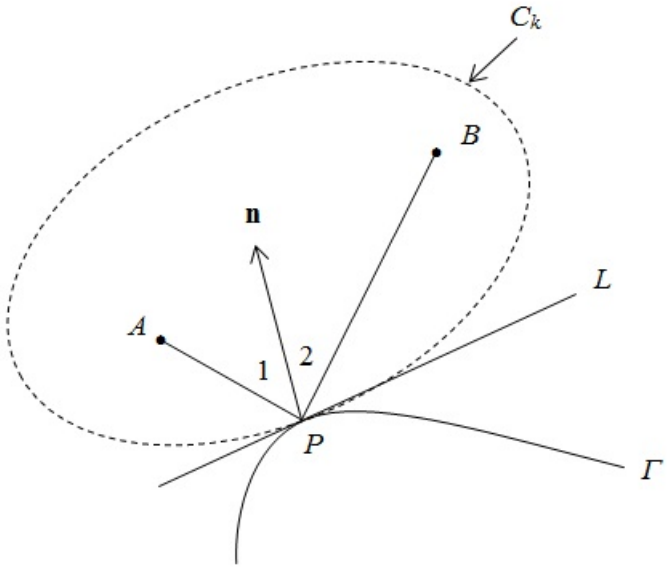
(圖 9-15)

如果我們把 L 看成是鏡子，**n** 表 L 的法向，那麼 $A \to P \to B$ 就是光由 A 點經過 L 反射而後穿過 B 點的路徑。其中 $\angle 1 = \angle 2$，即：入射角＝反射角，物理上稱他爲反射原理。

(ii) 如果我們把 L 換成一條平滑曲線 Γ，欲在 Γ 上找一點 P 使 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 最小，則 P 點應座落何處？

固定 k，考慮 $C_k = \{P|\overline{PA}+\overline{PB}=k\} \subset$ 所考慮平面，則 C_k 爲一橢圓。

當 k 由小變大，$\{C_k\}$ 表一族逐漸膨脹的橢圓族，當這些橢圓族第一次接觸到 Γ，那個接觸點 P 就是所求。



(圖 9-16)

過 P 作 Γ 的切線 L，令 $\mathbf{n}$ 表 L 的法向 (如圖 9-16)，C_k 與 Γ 相切於 P，L 當然也是 C_k 的切線，根據橢圓的性質，$\angle 1 = \angle 2$。如果把 Γ 看成鏡子，那 $A \to P \to B$ 就是光所走的路徑，滿足：

入射角＝反射角

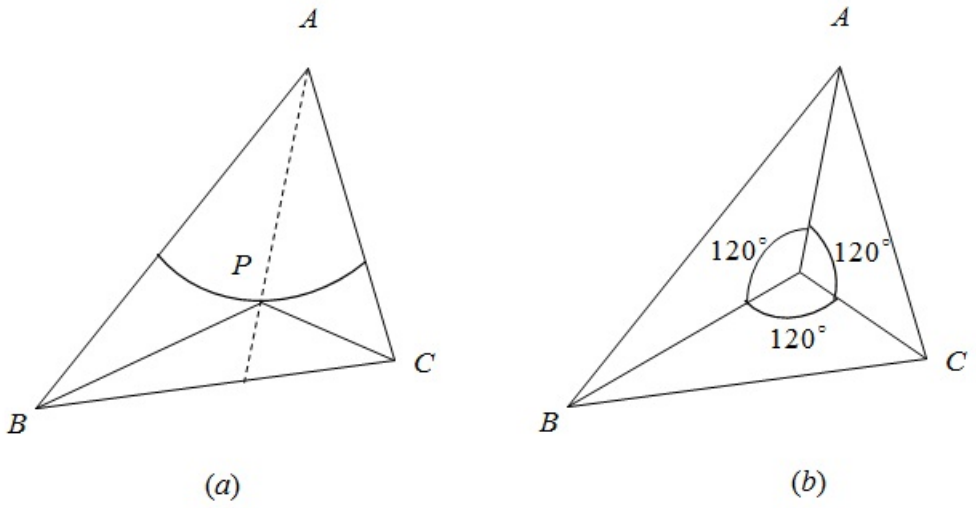
光很聰明！

b. 費馬點 (Fermat Point)

於 ΔABC 中欲求一點使 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$ 最小。

分析：

1. 存在問題。令 $\Delta=\Delta ABC$(含邊界)，則 Δ 爲 compact。令 $f(P)=\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$，則 f 爲 Δ 上的連續函數，故 f 在 Δ 上可取得最小值。



(圖 9-17)

2. 固定 $\overline{PA}$ 長，則 P 點的軌跡爲一圓弧 Γ，A 爲其心。今在 Γ 上考慮 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 的最小問題，依反射原理，最小點必發生在：入射角＝反射角的情形。而 Γ 爲一圓，$\overline{PA}$ 爲 Γ 之法向，因此
$$\angle APB=\angle APC$$

3. 同理，固定 $\overline{PB}$ 長，極小點應滿足
$$\angle APB=\angle BPC$$
故極小點應滿足
$$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120^\circ$$

4. 若 ΔABC 中，沒有一個角超過 120°，以 $\overline{AB},\overline{BC},\overline{CA}$ 爲邊分別向外作正三角形 $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$，令 $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3$ 分別表它們的外接圓，則這三個外接圓交於一點 P，P 即爲所求。

5. 若 $\angle A\geq 120^\circ$，則 $P=A$ 爲所求 (留作習題)

Remark:

(a) Fermat Point 又稱作 Fermat-Torricelli Point. Fermat 在信中提出此問題，Torricelli (義大利物理、數學家) 提出解答。Torricelli 原先的解答是利用平面幾何的反射方法得到証明。

(b) 想像 ΔABC 爲一水平桌面，A, B, C 三點上分別有一定滑輪，L_A, L_B, L_C 分別表過 A, B, C 三滑輪的繩子，打結於 P 點，下懸相同質量的重物。當三力平衡時，P 點即爲所求。

如果所懸重物的質量分別爲 m_1, m_2, m_3，則三力平衡時，P 點的位置恆使

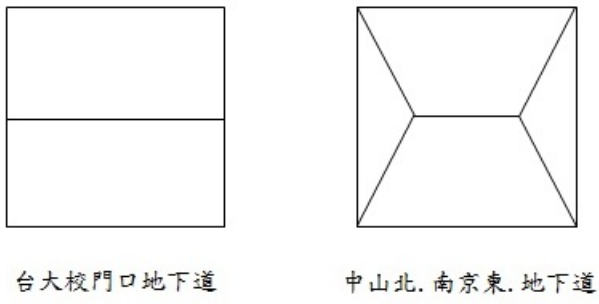
$$m_1 \cdot \overline{PA} + m_2 \cdot \overline{PB} + m_3 \cdot \overline{PC}$$

最小。於此容我不再多言，就留給同學當個習題吧。

(c) Jakob Steiner (1796-1863, 瑞士數學家) 把這問題推廣到平面上 n 個點，欲設計一個網路連接這些點，稱爲 Steiner tree problem

台大校門口，新生南路與羅斯福路交會處有個地下道，其設計爲工字形。

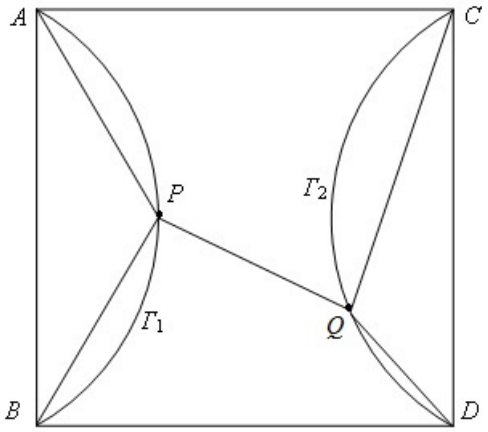
中山北路與南京東路交會處也有個地下道，其設計爲凹工字形 (圖 9-18)



(圖 9-18)

道理何在？且看下例：

例 **1.** 於正方形 $\square ABCD$ 中求一點 P，使 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$ 最小。



(圖 9-19)

分析：

1. 極小值存在，不在話下。

2. 令 Γ_1, Γ_2 分別表過 A, B；C, D, 的圓弧，其圓周角爲 $120°$，則連接 A, B 兩點的點 P，必落在 Γ_1 上；連接 C, D 兩點的點 Q，必落在 Γ_2 上。

3. 觀察 ΔQAB，P 點必使 $\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{PC}$ 最小，因此

$$\angle QPA = \angle QPB = \angle APB = 120°$$

4. 同理，$\angle PQC = \angle PQD = \angle CQD = 120°$。

5. 滿足上述兩條件的點，必分別爲 Γ_1, Γ_2 的中點。

中山北路、南京東路交會處的地下道即根據此原理設計，這樣建造符合經濟原理。

經濟歸經濟，人一走入地下道，莫辨東西，許多方向感不是很好的人常走錯出口，造成民眾的不便。工字形的設計，不會讓民眾走錯出口，從這觀點看，它又是另一種經濟的設計了。

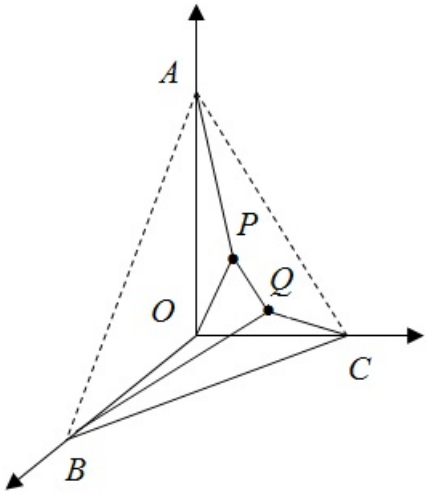
例 **2.** 在 $\mathbb{R}^3$ 中，給定 $O(0,0,0), A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$ 四點，試設計一網路，連接 O, A, B, C 四點，使網路總長度最小。

分析：

1. 設 Γ_1, Γ_2 分別表過 A, O 及 B, C 兩點的 120° 圓弧，讓它們分別對 $\overline{AO}$ 及 $\overline{BC}$ 旋轉。得曲面 S_1 及 S_2，則連接 A, O 兩點的網點 P 必落在 S_1 上，連接 B, C 兩點的網點必落在 S_2 上。

2. 問題即求 P, Q 使 $\overline{OP} + \overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB} + \overline{QC}$ 最小，其中 $P \in S_1, Q \in S_2$.

3. Q, P, A, O 共平面，P, Q, B, C 共平面，故 $\angle APO = \angle OPQ = \angle QPA = 120^\circ, \angle BQC = \angle CQP = \angle PQB = 120^\circ$。要設計這樣一個網路，$P, Q$ 兩點該如何定奪？就留作習題吧。



(圖 9-20)

於立方體中，欲設計一個網路連接八個頂點，使網路總長度最小，這是一個相當具挑戰性的問題，我也把它留給同學當習題。

於 $\mathbb{R}^4$ 的正立方體中，欲設計一網路，連接 16 個頂點，使網路總長度最小。這是一個更具挑戰的問題，我也把它放在習題裡。$\mathbb{R}^3$ 中的立方體還有形有相，$\mathbb{R}^4$ 中的立方體已無形相，怎麼設計？

「若見諸相非相，即見如來」

$\mathbb{R}^3$ 中的問題若得到解決，請同學觀察 $\mathbb{R}^1$ 到 $\mathbb{R}^2$、$\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}^3$ 的原理是什麼？把握住它，你就知道 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{R}^4$ 應該怎麼解了，$\mathbb{R}^4$ 會，$\mathbb{R}^n$ 也就順理成章了。

這個習題的確很難，肉眼看不到 $\mathbb{R}^4$ 的立方體，必須用你的慧眼來看它，所謂「慧眼獨具」大概就是指這個能力了。

上面的說帖也只是憑我的經驗，略述我的一己之見，希望不要對你的思維造成一種框限。

兩年前的高等微積分課裡，我曾懸賞獎金 1000 元，給對 $\mathbb{R}^4$ 中正立方體提供解答的同學，區區 1000 元，實在不足以讚美同學的才華，很遺憾，並沒有同學來向我領獎。今年，我改用拍手，兩百年前 Holmboe 在挪威拍出了一個 Abel，我希望你們中間有許多 Abel 可以讓我拍手。記住，16 歲以前的 Abel 作夢也沒想到他會是名留青史的 Abel，Abel 也是拍手拍出來的。

民間戲曲裡面說，薛仁貴夢中吃了九牛二虎形狀的饅頭，醒來之後力大無窮，成爲大唐中興名將。老師對學生的讚賞，猶如薛仁貴夢中吃饅頭，Abel 就是這樣成爲了不起的數學家。

不論你是台大學生或者網路上點閱這門課的「非常」青年，如果你有好的答案，請讓我知道，我要向你說：

你實在太棒了！

(當然，也請接受我的一份小禮物)

(第九章完。)

102學年度高等微積分(下) 習題九

1. (a) f, g convex on (a,b)，令$h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$，試證：$h$ convex on (a,b)。
   (b) f convex on (a,b)，g convex on (c,d)，Range of $f \subset (c,d)$，試證：$g(f(x))$ convex on (a,b)。

2. $A \subset \mathbb{R}^n$，$\varphi : A \to \mathbb{R}$，我們稱$\varphi$ convex on A若$\varphi(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) \le t\varphi(\mathbf{x}) + (1-t)\varphi(\mathbf{y})$ $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A, 0 \le t \le 1$。試判斷下列各函數在給定領域上是否convex？
   (a) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$，$x \in \mathbb{R}$
   (b) $f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$，$(x,y) \in \mathbb{R}^2$
   (c) $f(\mathbf{x}) = (1 + \|\mathbf{x}\|^p)^{1/p}$，$p \ge 1$，$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
   (d) $f(\mathbf{x}) = \ln \|\mathbf{x}\|_p$，$p \ge 1$

3. (a) $f \ge 0$ convex on (a,b)，令$g(x) = \int_a^x f(t)dt$，問：g是否必convex on (a,b)，如不正確，請對f做適當修正，使其正確。
   (b) f定義於$[a,b] \times [c,d]$上，固定y，$f(x,y)$ convex on $[a,b]$ $\forall y \in [c,d]$。固定x，$f(x,y)$ convex on $[c,d]$ $\forall x \in [a,b]$。
   問：f是否必convex on $[a,b] \times [c,d]$？
   (c) 有一實心物體，對任意平面的正投影恆爲凸，問該物體是否必爲凸？

4. (a) $a_i, b_i > 0$，$a_i b_i \ge 1$ $\forall i = 1, 2, \cdots, n$。令$\alpha = \dfrac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$，$\beta = \dfrac{1}{n}(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$。
   試證：$\alpha\beta \ge 1$，並問等號何時成立？
   (b) $f, g \ge 0$，在$[0,1]$上Riemann可積分，$f(x) \cdot g(x) \ge 1$ $\forall x \in [0,1]$。
   試證：$\int_0^1 f(x)dx \cdot \int_0^1 g(x)dx \ge 1$，並問等號何時成立？

5. (a) 試證：$\dfrac{2}{\pi}x < \sin x < x$ $\forall 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$。
   (b) $0 < x < 1$，試比較 $\sin(\dfrac{\pi}{2}\cos x)$ 與 $\cos(\dfrac{\pi}{2}\sin x)$的大小。

6. 給定$0 < x < 1$，
   (a) 試比較 $\sin x^2$、$\sin^2 x$、$x \sin x$ 的大小。
   (b) 試比較 $\tan x^2$、$\tan^2 x$、$x \tan x$ 的大小。

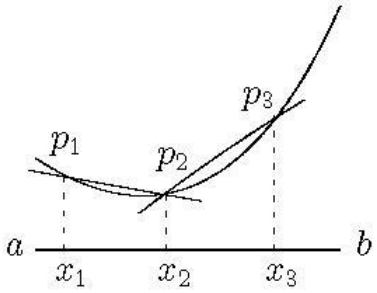
7. 試證f convex on $(a,b) \Longrightarrow f$ continuous on (a,b)。

8. 設f convex on (a,b)，令$\Gamma := \{(x, f(x)) | x \in (a,b)\}$。
   (a) 給定$\alpha < x_1 < x_2 < x_3 < b$，試證明

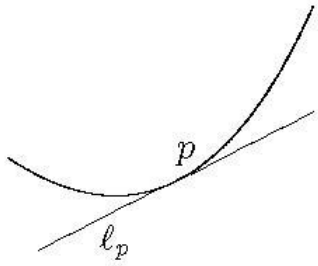
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \quad \text{圖(a)}$$

   (即$\overline{p_1p_2}$之斜率$\le \overline{p_2p_3}$之斜率)。
   (b) 若 $\forall x \in (a,b)$，$f'(x)$恆存在，試證明：$f'(x) \nearrow$on (a,b)。

(c) 給定$p \in \Gamma$，令l_p爲Γ在p之切線，試證明：Γ恆在l_p 上方 (圖(b))。



圖(a)



(圖(b))

9. Ω爲$\mathbb{R}^2$中的凸集，f爲定義於Ω上的實函數，我們稱$f(x,y)$在Ω上爲(strictly) convex，表示$\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^2$，$\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$，$\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$，$\lambda \in (0,1)$有$f(\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) \leq \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}_2)$(strictly表示等號不成立)。試證明：
(a) f在Ω上convex $\Rightarrow S = \{(x,y,z) | z \geq f(x,y)\}$爲$\mathbb{R}^3$中凸集。
(b) $f \in C^2(\Omega)$ (f的二階偏導數連續)，f convex on $\Omega \Longleftrightarrow f_{xx} \geq 0$且$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 \geq 0$。
註：在幾何上，
$$K(x,y) = \frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2} \mid_{(x,y)}$$
稱爲曲面$z = f(x,y)$在(x,y)的高斯曲率。
上述命題即：f在Ω上convex $\Leftrightarrow K(x,y) \geq 0$ in Ω。(f strictly convex$\Leftrightarrow K > 0$ on Ω)

10. (a) f convex on $(-\infty, \infty)$。若f上方有界，即存在常數K使$f(x) \leq K$，$\forall x$，試證明：f爲常函數。
(b) f convex on $\mathbb{R}^2$，若f上方有界，試證明：f爲常函數。

11. $\alpha_i, x_i > 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$，$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$，試求$\dfrac{\alpha_1}{x_1} + \dfrac{\alpha_2}{x_2} + \cdots + \dfrac{\alpha_n}{x_n}$的最小值。

12. f在$[0,1]$上連續，求$\lim_{x \to 0} x \int_x^1 \dfrac{f(t)}{t^2} dt$。

13. f在$[0,1]$上連續，求$\lim_{n \to \infty} (n+1) \int_0^1 x^n f(x) dx$。

14. f在$[a,b]$上連續且滿足$f(\dfrac{x_1 + x_2}{2}) \leq \dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$。試證：$f$在$[a,b]$上convex。

15. f, g在$(0, \infty)$上可導，$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = 0$ (或∞)，若$\lim_{x \to \infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$，則$\lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$存在且等於$l$。

16. $D := \{(x,y) | x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0\}$
(a) 決定k使得$\iint_D |x^2 + y^2 - k| dxdy$有最小值。
(b) 決定a, b, c使得$\iint_D |x^2 + y^2 - ax - by - c| dxdy$有最小值。

17. 金字塔形的五面體外切於單位球，欲使金字塔體積最小，問應如何設計？

18. 求a, b使$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - ax - b| dx$最小。

19. 求a, b, c, d使$\iiint_\Omega |x^2+y^2+z^2-ax-by-cz-d| dxdydz$最小，其中$\Omega = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$。

20. (a) 求內接於橢球$x^2 + \dfrac{y^2}{2^2} + \dfrac{z^2}{3^2} = 1$的諸四面體體積之最大值，其相應之形狀爲何？
    (b) 求外切於上述橢球的諸四面體體積之最小值，其相應之形狀爲何？

21. $f \in C[0,1]$，$\alpha > 0$，求$\lim_{x\to 1^-}(1-x)^\alpha \int_0^x \dfrac{f(t)}{(1-t)^{\alpha+1}} dt$之值。

22. ΔABC中，若$\angle A > 120^o$，決定P使$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$最小。

23. 給定$O(0,0,0)$、$A(1,0,0)$、$B(0,1,0)$、$C(0,0,1)$四點，試設計一網路連接O, A, B, C四點使網路總長度最小。

24. (*) 試在正立方體內設計一網路連接八個頂點，使網路總長度最小。

25. (*) (a) 你能在$\mathbb{R}^4$中的單位立方體內設計一個網路，連接16個頂點，使網路總長度最小嗎？
    (*) (b) 你能將你的設計推廣到$\mathbb{R}^n$上嗎？

102 學年度台灣大學數學系高等微積分下
由陳金次教授製作，以創用 CC 姓名標示-
非商業性-禁止改作 3.0 台灣 授權條款釋出

Chapter 10

再談導數及相關問題

10.1 單變數函數的導數

設 f 爲定義在 x 點附近的實函數，若

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \text{ 存在}$$

我們稱 f 在 x 點可導，以 $f'(x)$ 表示此極限，稱爲 f 在 x 點的導數 (Derivative)。

若 f 定義於 (a,b) 上，f 在 (a,b) 中每一點都可導，我們稱 f 在 (a,b) 上可導。

若 f 定義於 $[a,b]$ 上，在 (a,b) 上可導，且

$$f'(a^+)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

及

$$f'(b^-)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}$$

存在，我們稱 f 在 $[a,b]$ 上可導。爲了方便，我們以後仍以 $f'(a)$ 及 $f'(b)$ 分別表此二極限。

<u>定理 **10-1**</u> f 在 x 點可導 $\Rightarrow f$ 在 x 點連續。

說明：$\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$ 存在 (finite value)

$\Rightarrow \displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}[f(x+\Delta x)-f(x)]=0 \Rightarrow \lim_{y\to x}f(y)=f(x) \therefore f$ 在 x 點連續。

注意：f 在 (a,b) 上可導 $\not\Rightarrow f'$ 在 (a,b) 上連續，且看下例。

例 **1.**

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

(i) $x=0, f'(0)=\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$

(ii) $x \neq 0, f'(x) = 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x},\ \lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ 不存在。

故 $f'(0) \neq \lim\limits_{x\to 0} f'(x)$，即 f' 在 $x = 0$ 點不連續。

連續函數具中間值定理的特性，f' 雖不一定連續，但它仍具中間值定理的特性，妙哉！

且看下例：

例 **2.** 設 f 在 $[0,1]$ 上可導，$f'(0) = 0, f'(1) = 1$，則 $\exists\, c \in (0,1)$ 使 $f'(c) = \dfrac{1}{2}$.

分析：

1. f' 在 $[0,1]$ 上未必連續，中間值定理派不上用場。不過，我們有均值定理。它說：

   設 g 在 $[a,b]$ 上連續，在 (a,b) 上可導，則存在 $c \in (a,b)$ 使 $g'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

2. 因此，若能證明 $\exists\, x_1, x_2 \in [0,1]$ 使

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{1}{2}$$

   則依均值定理，$\exists\, c \in (x_1, x_2)$(假設 $x_1 < x_2$) 使 $f'(c) = \dfrac{1}{2}$.

3. 這樣的 x_1, x_2 是存在的，理由如下：

   令 $m = \dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}$ = 過 $(0, f(0))$ 及 $(1, f(1))$ 兩點直線的斜率。

   (a) 若 $m = \dfrac{1}{2}$，$x_1 = 0, x_2 = 1$ 即爲所求。

   (b) 若 $\dfrac{1}{2} < m$，令

$$\phi_1(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0},\ 0 < x \leq 1,\ \phi_1(0) = f'(0) = 0$$

   則 ϕ_1 在 $[0,1]$ 上連續，$0 = \phi_1(0) < \dfrac{1}{2} < \phi_1(1) = m$，依中間值定理，$\exists\, \alpha \in (0,1)$ 使 $\phi_1(\alpha) = \dfrac{1}{2}$. 取 $x_1 = 0, x_2 = \alpha$ 即爲所求。

   (c) 若 $m < \dfrac{1}{2}$，令

$$\phi_2(x) = \frac{f(1)-f(x)}{1-x},\ 0 \leq x < 1,\ \phi_2(1) = f'(1) = 1$$

   則 ϕ_2 在 $[0,1]$ 上連續，$m = \phi_2(0) < \dfrac{1}{2} < \phi_2(1) = 1$. 依中間值定理，$\exists\, \beta \in (0,1)$ 使 $\phi_2(\beta) = \dfrac{1}{2}$. 取 $x_1 = \beta, x_2 = 1$ 即爲所求。

上面的例子，可以推廣到一般的情況：

<u>定理 **10-2**</u> 導函數的中間值定理

設 f 在 $[a,b]$ 上可導，$f'(a)=\alpha, f'(b)=\beta$，則對任意 m，m 介於 α,β 之間，恆存在 $c\in(a,b)$ 使 $f'(c)=m$.

証明：一如上例。

10.2 Fundamental Lemma of Differentiation

f 在 x 點可導，即

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{ 存在。}$$

令 $\epsilon = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x)$，則 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \epsilon = 0$. 於是有

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \epsilon \Delta x,\ \epsilon \to \text{ 當 } \Delta x \to 0$$

上式即所謂 Fundamental Lemma of Differentiation. 看似簡單，其實是個很重要的式子，Chain Rule 的證明，微分觀念的引進都跟它有關。
令 $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x), df = f'(x)\Delta x, \Delta f$ 表位差，$df = df(x, \Delta x) = f'(x)\Delta x$，稱 f 的微分，Δf 和 df 的關係如圖 10-1.

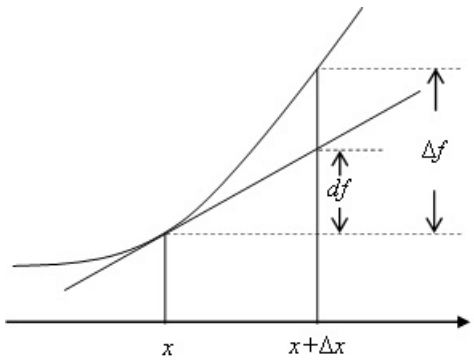


圖 10-1

定義 10-1.

設 f 爲定義在 x 點附近的實函數，稱 f 在 x 點可微分。若

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \epsilon \Delta x,\ \epsilon \to 0 \text{ 當 } \Delta x \to 0. \tag{1}$$

注意：$f(x) + f'(x)\Delta x$ 表過 x 點的線性函數 (切線，x 固定，Δx 爲變數)，$\epsilon \to 0$ 當 $\Delta x \to 0$ 表示 f 在 x 點附近和此線性函數很貼切。

(1) 式是由 $f'(x)$ 的存在而來。反過來，若 $\exists\, a, b$ 使

$$f(x+\Delta x) = a + b\Delta x + \epsilon \Delta x,\ \epsilon \to 0 \text{ 當 } \Delta x \to 0$$

則 $a = f(x), b = f'(x)$，故 $f'(x)$ 存在。

因此，對 $\mathbb{R}$ 上的實函數，可導和可微分沒差別。

既然沒差別，可導就好，何必再弄出個可微分？

對多變數函數，(1) 式有它相應的式子，可定義多變函數的可微分。可微分表示函數和切平面很貼切，它和偏導數的存在有天壤之別，容後談之。

10.3 Chain Rule

<u>定理 **10-3**</u>

設 g 在 x 點可導，f 在 $g(x)$ 點可導，令 $h(x) = f(g(x))$，則 h 在 x 點可導，且滿足

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

說明：在初微裡，由於不談微分引理，只好這樣處理：

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{g(x+\Delta x) - g(x)} \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} A \cdot B \end{aligned}$$

$A \to f'(g(x)),\ B \to g'(x)$ 當 $\Delta x \to 0.$

上面的處理簡單明瞭，是個不錯的觀念介紹。不過邏輯上有瑕，因 $g(x+\Delta x) - g(x)$ 可能爲 0(此時 A 的分子亦爲 0)，數學上不允許。

透過 Fundamental Lemma of Differentiation 可以避開這個困擾：

令 $\Delta g = g(x+\Delta x) - g(x)$，則

$$\begin{aligned} f(g(x+\Delta x)) &= f(g(x) + \Delta g) \\ &= f(g(x)) + f'(g(x))\Delta g + \epsilon \Delta g,\ \epsilon \to 0 \text{ 當 } \Delta g \to 0 \end{aligned}$$

故

$$\frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} = \underbrace{f'(g(x))}_{\text{一步到位}} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x} + \underbrace{\epsilon \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x}}_{\text{剩下留給它}}$$

而 $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta g \to 0 \Rightarrow \epsilon \to 0$, 而 $\dfrac{\Delta g}{\Delta x} \to g'(x)$ 爲有窮值 當 $\Delta x \to 0$, 於是得

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

10.4 二變數函數的偏導數、方向導數及梯度向量

A. 偏導數

設 f 爲定義在 (x,y) 點附近的函數，若

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

存在，我們稱 f 在 (x,y) 點對 x 可偏導，以 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ 或 $f_x(x,y)$ 表示此極限，稱爲 f 在 (x,y) 點對 x 的偏導數。同理，

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=f_y(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

稱爲 f 在 (x,y) 點對 y 的偏導數。

B. 方向導數

f 如上，設 $\mathbf{u}$ 爲給定單位向量, $|\mathbf{u}|=1, \mathbf{u}=(u_1,u_2)$, 令 $\mathbf{x}_0=(x_0,y_0)$, $l_{\mathbf{u}}=\mathbf{x}_0+t\mathbf{u}$ 爲過 $\mathbf{x}_0$ 點沿 $\mathbf{u}$ 方向的直線。

注意：由於 $|\mathbf{u}|=1$，t 表 $\mathbf{x}_0+t\mathbf{u}$ 與 $\mathbf{x}_0$ 之間的距離。考慮

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(\mathbf{x}_0+t\mathbf{u})-f(\mathbf{x}_0)}{t}$$

稱爲 f 在 $\mathbf{x}_0$ 點沿 $\mathbf{u}$ 方向的方向導數。

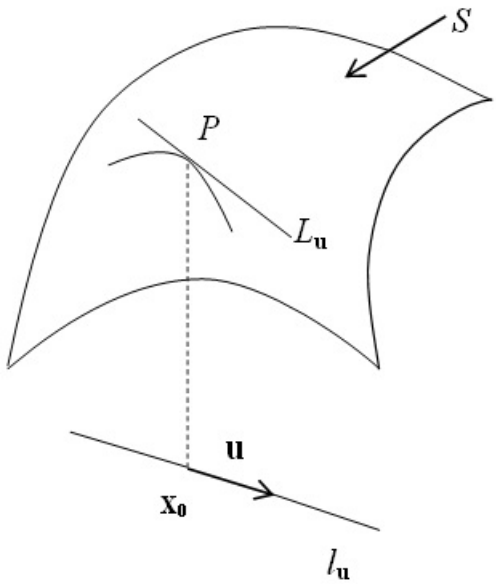


圖 10-2

幾何解釋：設 f 定義在 (x_0, y_0) 點附近的某領域 Ω 上，令

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y, f(x, y))|(x, y) \in \Omega\} \\ \Gamma &= \{(x, y, f(x, y))|(x, y) \in l_{\mathbf{u}}\} \ - \ f\text{限定在}l_{\mathbf{u}}\text{上的行爲} \\ P &= (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \end{aligned}$$

$L_{\mathbf{u}}$ 表曲線 Γ 在 P 點的切線，則 $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0)$ 表 $L_{\mathbf{u}}$ 在 P 點的切線斜率。

C. 梯度向量

設 S 在 P 點的切平面存在，令其爲 T. 設 $\mathbf{e}_1 = (1, 0),\ \mathbf{e}_2 = (0, 1)$，則 $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2$.

令 $\mathbf{e}_{1,T},\ \mathbf{e}_{2,T},\ \mathbf{u}_T$ 分別表 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{u}$ 在切平面 T 上相應的向量 (即 $\mathbf{e}_{1,T},\ \mathbf{e}_{2,T},\ \mathbf{u}_T$ 在 xy 平面上的正射影分別爲 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{u}$)

由於 $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = |\mathbf{u}| = 1$, 故

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{1,T} &= (1, 0, f_x(x_0, y_0)) \\ \mathbf{e}_{2,T} &= (0, 1, f_y(x_0, y_0)) \\ \mathbf{u}_T &= (u_1, u_2, D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) \\ \mathbf{u} &= u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 \Rightarrow D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = u_1 f_x(x_0, y_0) + u_2 f_y(x_0, y_0) \end{aligned}$$

或記作

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u},\ |\mathbf{u}| = 1 \tag{2}$$

其中 $\nabla f(\mathbf{x}_0) = (f_x(\mathbf{x}_0), f_y(\mathbf{x}_0))$ 稱爲 f 在 $\mathbf{x}_0$ 點的梯度向量 (gradient)

梯度的解釋：

根據 (2)，$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u} = |\nabla f(\mathbf{x}_0)| \cdot \cos\theta \leq |\nabla f(\mathbf{x}_0)|$，
其中 θ 表 $\mathbf{u}$ 和 ∇f 二向量之間的夾角。

等號成立 $\Leftrightarrow \theta = 0$, 即 $\mathbf{u}$ 和 $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ 同向，此時 $\mathbf{u} = \dfrac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{|\nabla f(\mathbf{x}_0)|},\ \nabla f(\mathbf{x}_0) \neq 0$。換句話說，沿 $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ 方向的方向導數最大。

或：$\nabla f(\mathbf{x}_0)$ 恆指出曲面 S 在 $\mathbf{x}_0$ 點最陡峭的方向。

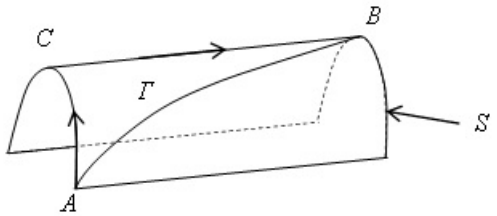
例. 曲面 $S: z = 101 - x^2 - 4y^2,\ z \geq 0$ 的邊界 $A(1,5,0)$ 上有一螞蟻，欲登頂，時時選最陡峭方向，求其路徑。

分析：

1. 令 $(x(t), y(t))$ 表螞蟻路徑 (在 xy 平面上的投影)，處處選取最陡峭的方向，即 $(x', y') = k\nabla z\ \forall\ t$.
2. $\nabla z = (-2x, -8y)$，因此 x', y' 應滿足
$$\begin{cases} x' &= -2kx \\ y' &= -8ky \end{cases},\ x(0) = 1, y(0) = 5 \tag{3}$$
3. (3)$\Rightarrow \dfrac{y'}{x'} = \dfrac{4y}{x}$ 或 $\dfrac{1}{y} \cdot y' = \dfrac{4}{x} \cdot x'$，積分之得 $\ln y = 4\ln x + C$.
4. 將邊界值 $(1,5)$ 代入，得 $C = \ln 5$，
故所求路徑爲 $y = 5x^4$.

Remark:

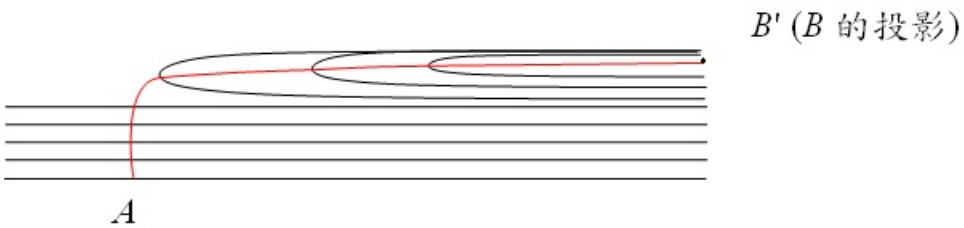
1. 處處取最陡峭方向，未必是最短距離。例如 S 表上半圓柱面，如圖：



螞蟻在 A 點，糖在 B 點，處處走最陡峭方向，螞蟻一定由 A 點先來到 C 點，再由 C 點向 B 前進。而 S 可以攤成平面，圖中 Γ 爲攤成平面後 A,B 兩點的連線。

顯然 Γ 爲最短路徑。

你說來到 C 點，$\nabla z = 0$，$\overline{CB}$ 上處處如此，我心裡不踏實，這無妨，你可以自 B 至 C 漸漸把柱面削低一點點，使它仍爲一平滑曲面 S'，S' 的等高線大致如下圖：



汲汲營營的人生，只看到眼前的利益，終究未必占到便宜。

2. 上例中，螞蟻所走路徑並不是最短路徑：

首先：沿 $y = 5x^4$(x, y 平面的路徑) 相應於 S 上的路徑爲

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &: (x, 5x^4, 101 - x^2 - 100x^8) \\ |\Gamma_1| &= \int_0^1 \sqrt{1^2 + (20x^3)^2 + (2x + 800x^7)^2} dx \simeq 101.5109 \end{aligned}$$

次取直線 $y = 5x$，其相應於 S 上的路徑爲

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &: (x, 5x, 101 - 101x^2) \\ |\Gamma_2| &= \int_0^1 \sqrt{1^2 + (5)^2 + (202x)^2} dx \simeq 101.31357 \end{aligned}$$

$|\Gamma_1| > |\Gamma_2|$！螞蟻啊，螞蟻！你枉費心思了！

D. 二變數函數的 Chain Rule

<u>定理 **10-4**</u>

設 Ω 爲 $\mathbb{R}^2$ 中的開領域，f 在 Ω 上的一階偏導數連續 (今後將以 $f \in C^1(\Omega)$ 表示之)，$\Gamma = \{(x(t), y(t)) | t \in I\} \subset \Omega$ 表 Ω 中一 C^1 曲線。令 $h(t) = f(x(t), y(t))$，則

$$h'(t) = f_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t) \tag{4}$$

證明：

$$\begin{aligned}
h'(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{h(t+\Delta t) - h(t)}{\Delta t} \\
h(t+\Delta t) - h(t) &= f(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t)) - f(x(t), y(t)) \\
&= [f(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t)) - f(x(t), y(x+\Delta t))] \\
&\quad +[f(x(t), y(t+\Delta t)) - f(x(t), y(t))] \\
&\overset{M.V.T}{=} f_x(\xi.y(t+\Delta t)) \cdot [x(t+\Delta t) - x(t)] \\
&\quad +f_y(x(t), \eta) \cdot [y(t+\Delta t) - y(t)]
\end{aligned}$$

ξ 介於 $x(t), x(t+\Delta t)$ 之間，η 介於 $y(t), y(t+\Delta t)$ 之間，

$(\xi, y(t+\Delta t)) \to (x(t), y(t)), (x(t), \eta) \to (x(t), y(t))$ 當 $\Delta t \to 0$，故有

$$h'(t) = f_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t)$$

(4) 式又常記作

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \tag{5}$$

係：$D \subset u, v$ 平面，$(x, y) : D \to \Omega, x = x(u, v), y = y(u, v), x, y \in C^1(D)$ 表 x, y 平面到 u, v 平面間的座標變換，

$$f = f(x, y) = f(x(u, v), y(u, v)), (u, v) \in D$$

依定理 10.4，有：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \\
\frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

或記作：

$$\left.\begin{aligned}
f_u &= f_x \cdot x_u + f_y \cdot y_u \\
f_v &= f_x \cdot x_v + f_y \cdot y_v
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

例 **1.** $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ 滿足如下偏微分方程式：

$$f_x + f_y = 0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

試証：$f(x,y) = g(x-y)$，其中 $g \in C^1(\mathbb{R})$

証：令 $u = x - y, v = x + y$，則 $x = \dfrac{u+v}{2}, y = \dfrac{-u+v}{2}$.
$f = f(x,y) = f(x(u,v), y(u,v)) \Rightarrow f_v = f_x \cdot x_v + f_y \cdot y_v = f_x \cdot \dfrac{1}{2} + f_y \cdot \dfrac{1}{2} = 0\ \forall\ (u,v)$
表示 f 與 v 無關，故

$$f(u,v) = g(u),\ g \in C^1(\mathbb{R})$$

亦即 $f(x,y) = g(x-y)\ \forall\ (x,y)$.

例 **2.** $|\nabla f|^2 = f_x^2 + f_y^2$，爲對直角坐標的表示式。今將直角坐標改換成極座標 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$，試求 $|\nabla f|^2$ 對極座標的表示式。

解：$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta &= \tan^{-1}\dfrac{y}{x} + C \end{cases}$，$C$爲常數

設 $f = f(r,\theta) = f(r(x,y), \theta(x,y))$, 則

$$\begin{aligned} f_x &= f_r \cdot r_x + f_\theta \cdot \theta_x \\ f_y &= f_r \cdot r_y + f_\theta \cdot \theta_y \end{aligned}$$

故

$$|\nabla f|^2 = f_x^2 + f_y^2 = f_r^2(r_x^2 + r_y^2) + 2f_r \cdot f_\theta(r_x\theta_x + r_y\theta_y) + f_\theta^2(\theta_x^2 + \theta_y^2)$$

而 $r_x = \dfrac{x}{r} = \cos\theta,\ r_y = \dfrac{y}{r} = \sin\theta,$

$\theta_x = \dfrac{-y}{x^2+y^2} = \dfrac{-\sin\theta}{r},\ \theta_y = \dfrac{x}{x^2+y^2} = \dfrac{\cos\theta}{r}$

$r_x^2 + r_y^2 = 1,\ r_x\theta_x + r_y\theta_y = 0,\ \theta_x^2 + \theta_y^2 = \dfrac{1}{r^2}$，

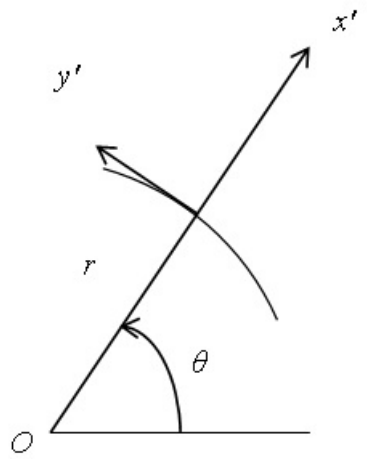
故 $|\nabla f|^2 = f_r^2 + \dfrac{1}{r^2} f_\theta^2$.

Remark:

$|\nabla f|^2$ 是函數 f 內蘊的幾何量 (請想一想)，與座標的選取 (指直角坐標) 無關。如果我們把 r 的方向定爲 x' 的方向，θ 的方向定爲 y' 的方向，x', y' 表新的直角座標系統，則 $|\nabla f|^2 = f_{x'}^2 + f_{y'}^2 = f_r^2 + f_{y'}^2$‘, 而 $\Delta y' = r\Delta\theta$，故

$$f_{y'} = \lim_{\Delta y' \to 0} \frac{\Delta f}{r\Delta\theta} = \frac{1}{r} f_\theta$$

從而得 $|\nabla f|^2 = f_r^2 + \dfrac{1}{r^2} f_\theta^2$.



例 **3.** 方向導數 $D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$ 的再証。

証：令 L 表過點 (x_0, y_0)，沿 $\mathbf{u}$ 方向的直線。L 的參數式可寫成：

$$\begin{cases} x(t) &= x_0 + tu_1 \\ y(t) &= y_0 + tu_2 \end{cases}$$

$|\mathbf{u}| = 1$，因此 t 表 L 上 $(x(t), y(t))$ 與 (x_0, y_0) 間兩點的距離，故 $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = h'(0)$，

$$\begin{aligned} h(t) &= f(x(t), y(t)) \\ h'(t) &= f_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t) \\ &= f_x(x(t), y(t))u_1 + f_y(x(t), y(t))u_2 \end{aligned}$$

而 $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = h'(0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2 = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{u}$.

這個公式經常會碰到，特別把它陳述爲定理如下：

定理 **10-5**

設 f 在 $\mathbf{x}$ 點附近一階偏導數連續，$\mathbf{u}$ 爲給定的單位向量，則 f 在 $\mathbf{x}$ 點沿 $\mathbf{u}$ 方向的方向導數：

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}.$$

例 **4.** ∇f 恆垂直 f 的等高線。

說明：

1. 設 $f \in C^1(\Omega), \Omega$ 爲 $\mathbb{R}^2$ 中開領域。給定 k，令 $\Gamma_k = \{(x,y) \in \Omega | f(x,y) = k\}$，$\Gamma_k$ 稱爲 f 的 k 等高線。
2. 設 $P \in \Gamma_k$，所謂 $\nabla f \perp \Gamma_k$ 意指 ∇f 與 Γ_k 在 P 點的切線垂直。

   今設 Γ_k 在 P 點附近以 $(x(t), y(t))$ 表示之，$x, y \in C^1$(註)。而

   $$f(x(t), y(t)) = k$$

   對 t 求導得:$f_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t) = 0$

   或：$\nabla f(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) = 0$. 而 (x', y') 爲 Γ 的切線，得證。

∇ 在多變數函數中是個很重要的觀念，不要只記得

$$\nabla f = (f_x, f_y)$$

這是書呆子讀數學，一輩子讀不好數學。要了解它的內涵。記住，∇f 有兩個重要的意義：

1. $\nabla f(\mathbf{x})$ 恆指出 f 在 $\mathbf{x}$ 點方向導數最大的方向 (幾何上，曲面最陡峭的方向)
2. $\nabla f(\mathbf{x})$ 恆與 f 在 $\mathbf{x}$ 點的等高線垂直。
   當然，$\nabla f(\mathbf{x})$ 必須不爲 0。

上述二點可推廣到三變數函數 (甚至 n 變數函數)，等高線換成等溫面而已，容後再談。

註：x, y 在 P 點附近可以用 C^1 函數表示，嚴格說，它牽涉到隱函數定理。在此先接受它，隱函數定理我們將於第十五張中專文介紹。

10.5 n 個變數

A. 偏導數

設 f 爲定義於 $\mathbb{R}^n$ 中的實函數，$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{e}_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$, 1 出現於第 i 個座標。

定義：f 在 $\mathbf{x}$ 點沿 x_i 方向的偏導數

$$D_i f(\mathbf{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{h}$$

若此極限存在，$D_i f$ 又常以 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ 或 f_{x_i} 表示之。

方向導數：承上，設 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$, $|\mathbf{u}| = 1$ 爲給定單位向量，定義 f 在 $\mathbf{x}$ 點沿 $\mathbf{u}$ 方向的方向導數

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{h}$$

若此極限存在。

B. Chain Rule

設 f 的一階偏導數在 $\mathbf{x}$ 點附近連續，且在此領域上 $x_i = x_i(t)$ 對 t 的導數存在，

$$f = f(\mathbf{x}(t)) = f(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$$

爲單變數函數，仿 $\mathbb{R}^2$ 上的處理我們有：

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} \tag{*}$$

<u>換座標</u> 設 $\mathbf{x}$: $\mathbf{t}$-space$\to$ $\mathbf{x}$-space, $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \cdots, t_n)$,

$$f = f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}(\mathbf{t})) = f(x_1(t_1, t_2, \cdots, t_n), x_2(t_1, t_2, \cdots, t_n), \cdots, x_n(t_1, t_2, \cdots, t_n))$$

根據 (*) 式，我們有

$$\frac{\partial f}{\partial t_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial t_i}, \ \forall\ i = 1, 2, \cdots, n$$

C. 梯度向量 (Gradient)

$$\nabla f(\mathbf{x}) = (f_{x_1}(\mathbf{x}), f_{x_2}(\mathbf{x}), \cdots, f_{x_n}(\mathbf{x}))$$

稱爲 f 在 $\mathbf{x}$ 點的梯度向量。根據 Chain Rule, 仿二變數的處理，我們有

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}$$

給定 $\mathbf{u}$，令 θ 表 $\mathbf{u}$ 與 $\nabla f(\mathbf{x})$ 之間的夾角，根據 Cauchy 不等式，我們有

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) \leq |\nabla f(\mathbf{x})| \cdot |\mathbf{u}| \cos\theta = |\nabla f(\mathbf{x})| \cos\theta$$

等號成立 $\Leftrightarrow \theta = 0$，即：當 $\mathbf{u}$ 與 $\nabla f(\mathbf{x})$ 同向，此時 $\mathbf{u} = \dfrac{\nabla f(\mathbf{x})}{|\nabla f(\mathbf{x})|}$, $\nabla f(\mathbf{x}) \neq 0$, $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x})$ 達到最大值 $|\nabla f(\mathbf{x})|$。

換言之：$\nabla f(\mathbf{x})$ 恆指出 f 在 $\mathbf{x}$ 點，方向導數最大的方向。

D. 等值集 (Level Set)

設 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 爲開領域，f 定義在 Ω 上，k 爲一常數。令 $S_k = \{\mathbf{x} \in \Omega | f(\mathbf{x}) = k\}$ 稱爲 f 的 k 等值集，在二變數情形稱爲等高線，在三變數情形稱爲等溫面 (想像 f 表空間中的溫度函數)

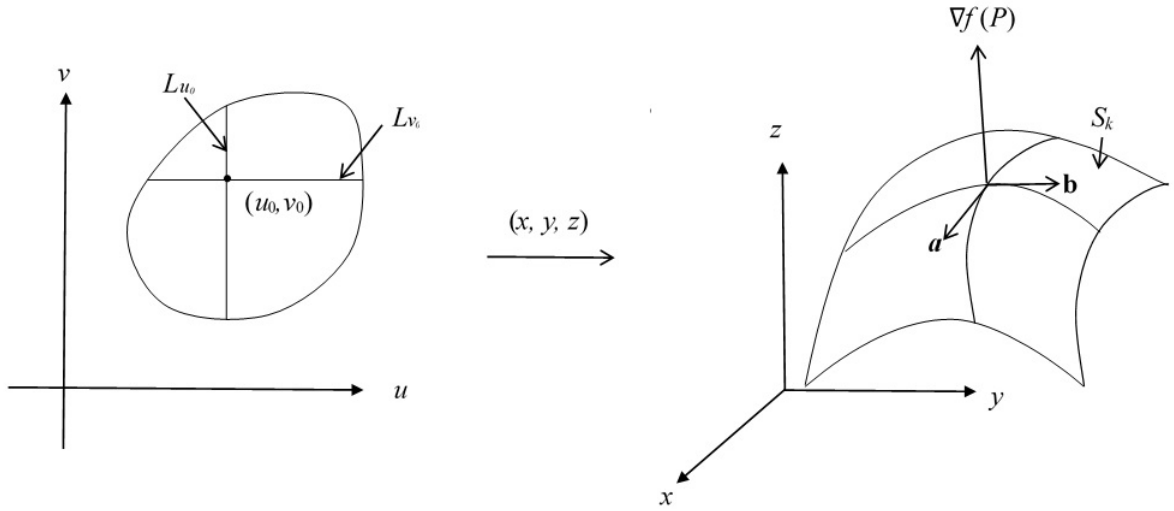
$\mathbf{x}_0 \in S_k$，設 S_k 在 $\mathbf{x}_0$ 附近 smooth，一如二變數的情形，我們有

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) \text{ 垂直 } S_k$$

以下且以三變數爲例說明之。

$f = f(x, y, z), S_k = \{(x, y, z) | f(x, y, z) = k\}, P(x_0, y_0, z_0) \in S_k$

設 S_k 在 P 點附近可以用參數式 $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$ 表示之，並設 $x, y, z \in C^1$(Remark)。



其中 $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2, x_0 = x(u_0, v_0), y_0 = y(u_0, v_0), z_0 = z(u_0, v_0)$

固定 v_0，令 $L_{v_0} = \{(u, v_0) | (u, v_0) \in D\}$，則 $\Gamma_{v_0} = \{(x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)) | (u, v_0) \in D\}$ 表 S_k 上一曲線，

$$f(x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)) = k$$

對 u 偏導得

$$f_x \cdot x_u + f_y \cdot y_u + f_z \cdot z_u = 0 \text{ at } P$$

或

$$\nabla f(P) \cdot (x_u(u_0, v_0), y_u(u_0, v_0), z_u(u_0, v_0)) = 0$$

令 $\mathbf{a} = (x_u(u_0, v_0), y_u(u_0, v_0), z_u(u_0, v_0))$，則 $\mathbf{a}$ 表 Γ_{v_0} 在 P 點的切線，我們有

$$\nabla f(P) \cdot \mathbf{a} = 0$$

同理，固定 u_0，令 $L_{u_0} = \{(u_0, v) | (u_0, v) \in D\}$,
$\Gamma_{u_0} = \{(x(u_0, v), y(u_0, v), z(u_0, v)) | (u_0, v) \in D\}$, $\mathbf{b}$ 表 Γ_{u_0} 在 P 點的切線，我們有

$$\nabla f(P) \cdot \mathbf{b} = 0$$

而 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 二向量張開整個切平面，故

$$\nabla f(P) \perp S_k \text{在} P \text{點的切平面}$$

亦即：$\nabla f(P)$ 垂直 S_k.

Remark: 若 $f \in C^1$，在 (x_0, y_0, z_0) 點附近，$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$，不妨假設 $f_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$，則依隱函數定理，$z$ 在 (x_0, y_0) 點附近可表成 $z = z(x, y)$ 的函數表示形式，且 $z \in C^1$。

在單變數函數中，我們有均值定理

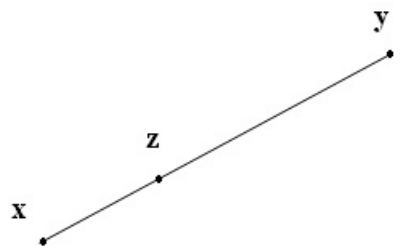
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

若 f 在 $[a, b]$ 上連續，在 (a, b) 上可導，此一定理可以推廣到 n 變數函數，陳述如下：

<u>定理 **10-6**</u> (均值定理)

設 Ω 爲 $\mathbb{R}^n$ 中開凸領域，$f \in C^1(\Omega), \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$，則

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{z}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})$$



其中 $\mathbf{z}$ 爲 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 兩點連續中的某點。

証明：令 $l(t) = \mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = (x_1 + t(y_1 - x_1), x_2 + t(y_2 - x_2), \cdots, x_n + t(y_n - x_n))$,

$\phi(t) = f(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}))$，則

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) &= \phi(1) - \phi(0) = \phi'(t)(1 - 0),\ t \in (0, 1) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}))(y_i - x_i) \\ &= \nabla f(\mathbf{z}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}),\ \mathbf{z} = \mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \end{aligned}$$

Remark: Ω 爲凸，保証 $l(t) \in \Omega\ \forall\ 0 \leq t \leq 1$。如果 Ω 不爲凸，定理只對 $l(t) \subset \Omega$ 的點 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 成立。當 $l(t) \not\subset \Omega$ 時，定理並不成立，想像有一條相當長的鋼筋，你把一端燒紅，再把鋼筋捲成環狀，首尾不相接，設 f 表高鋼筋上的溫度分佈函數，在極熱、極冷附近分別取兩點 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$，則 $\nexists\ \mathbf{z} \in \overline{\mathbf{x}\ \mathbf{y}}$ 使

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{z}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})$$

10.6 高階偏導數

以下且以二變數爲例說明之。

對 f 的一階偏導數 f_x, f_y 而言，我們又可偏導它們

$$\begin{array}{rcll} f_x & \to & (f_x)_x, (f_x)_y & \text{記作} f_{xx} \text{及} f_{xy} \\ f_y & \to & (f_y)_x, (f_y)_y & \text{記作} f_{yx} \text{及} f_{yy} \end{array}$$

f_{xy} 和 f_{yx} 之間有什麼關係嗎？

例如：

$$\begin{array}{rcl} f(x,y) & = & xe^y + y\sin x + x^2y + y^3 \\ f_x & = & e^y + y\cos x + 2xy \\ f_{xy} & = & e^y + \cos x + 2x \\ f_y & = & xe^y + \sin x + x^2 + 3y^2 \\ f_{yx} & = & e^y + \cos x + 2x \end{array}$$

$f_{xy} = f_{yx}$！這是偶然嗎？這函數是我信手寫來，你也可以寫幾個別的函數來試試看。

你信手寫來的函數多半都很好，下面這個定理告訴你，你要寫出個函數使 $f_{xy} \neq f_{yx}$，即使只在某一點，可真不容易呢！

<u>定理 **10-7**</u>

設 f_x, f_y, f_{xy} 在 (x,y) 點附近連續，則 $f_{yx}(x,y)$ 存在，且滿足 $f_{yx}(x,y) = f_{xy}(x,y)$.

証：

$$\begin{array}{rcl} f_{yx}(x,y) & = & \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f_y(x+h,y) - f_y(x,y)}{h} \\ & = & \displaystyle\lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0} \frac{1}{hk}\left\{[f(x+h,y+k) - f(x+h,y)] - [f(x,y+k) - f(x,y)]\right\} \qquad (*) \end{array}$$

上面的 limit 是先讓 $k \to 0$，之後再讓 $h \to 0$。爲了讓偏導數對調，我們引進如下函數：

$$\phi(t) = f(t, y+h) - f(t,h)$$

則上面 (*) 式中大括號內的東西可以寫成

$$\begin{array}{rcl} \{\cdots\} & = & \phi(x+h) - \phi(x) \\ & = & \phi'(\xi)\cdot h \quad \xi\text{介於 } x, x+h \text{ 之間} \\ & = & [f_x(\xi, y+k) - f_x(\xi,y)]\cdot h \\ & = & f_{xy}(\xi,\eta)hk \quad \eta\text{介於 } y, y+k \text{ 之間} \end{array}$$

$(\xi,\eta) \to (x,y)$ 當 $h,k \to 0$.

而 f_{xy} 在 (x,y) 點連續 $\Rightarrow f_{xy}(\xi,\eta) \to f_{xy}(x,y)$ 當 $h,k \to 0$

代入 (*) 式得 $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$.

小評：函數 ϕ 的引入，真是有慧眼啊！

能否造一個函數，使 $f_{xy} \neq f_{yx}$？下面這個例子是個典型，任何一本高等微積分的課本都以它爲例。

例.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

試証：$f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

解：$f_{xy}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f_x(0,y) - f_x(0,0)}{y-0} \qquad (*)$

$f_x(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0-0}{x} = 0$

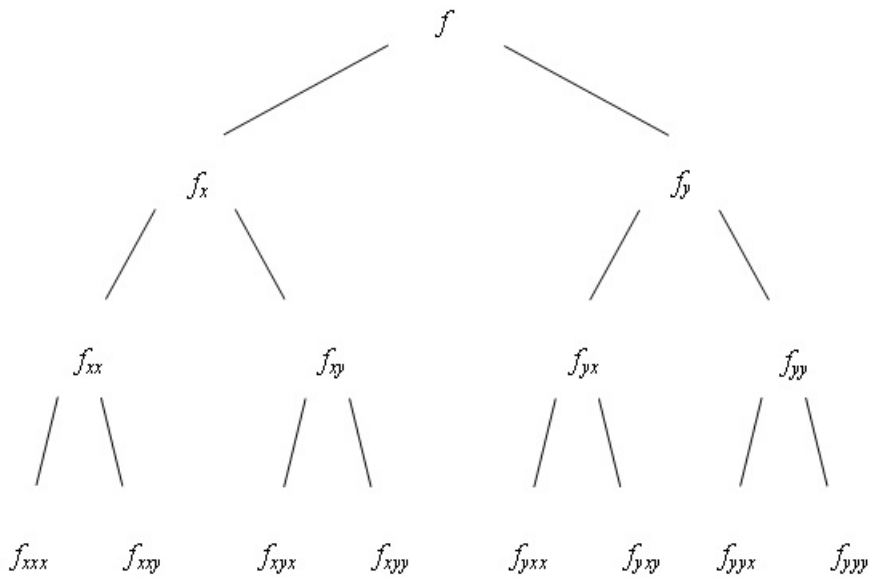
$f_x(0,y) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,y) - f(0,y)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = -y$

代入 (*) 式得

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{-y-0}{y} = -1$$

而 $f(x,y) = -f(y,x)$，故 $f_{yx}(0,0) = -f_{xy}(0,0) = 1$

對於高階偏導數，我們以下表圖示之：



引進 $D = \dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}$ 代表一個作用素 (operator)，$Df = \dfrac{\partial}{\partial x}f + \dfrac{\partial}{\partial y}f$，$D^n f = D(D^{n-1}f)$.
若 $f \in C^n$ (n 階偏導數連續)，則

$$D^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n f + \binom{n}{1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n-1}\frac{\partial}{\partial y}f + \binom{n}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n-2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f + \cdots + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f \overset{\text{記作}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^n f$$

其中 $\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^i \left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^j f$ 表示對 y 偏導 j 次後再對 x 偏導 i 次，只要 $f \in C^{i+j}$，誰先誰後，順序怎麼調動，無差別。

n 個變數的情形類推。

$$\begin{aligned} D &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} D_i \\ D^m f &= (D_1 + D_2 + \cdots + D_n)^m f. \end{aligned}$$

10.7 可微分函數 (Differentiable Function)

在單變數函數中，我們已見，若一函數 f 在 x 點可導，則

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \epsilon \cdot \Delta x,\ \epsilon \to 0 \text{ 當 } \Delta x \to 0 \tag{8}$$

反之，若存在一線性函數 $L(\Delta x) = a + b\Delta x$，$x$ 固定，Δx 爲變量，滿足

$$f(x+\Delta x) = a + b\Delta x + \epsilon \cdot \Delta x,\ \epsilon \to 0 \text{ 當 } \Delta x \to 0 \tag{9}$$

則 $a = f(x), b = f'(x)$，表示 f 在 x 點導數存在。

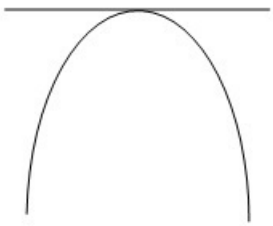
這個線性函數就是 f 在 x 點的切線。

一個函數在 x 點可以用直線這樣貼切地逼近，就叫做可微分。

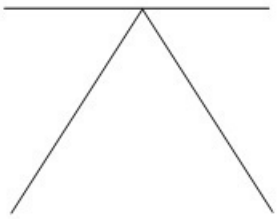
(8)(9) 告訴我們：可微分和可導無差別。

既然無差別，爲什麼還要巧立名堂來困擾青青學子？問題出在二維以上的函數。你看過仙人掌的頂點嗎？那些針刺姑且視而不見，光看那綠色的表面 S，你能用一個平面很貼切地逼近它嗎？那頂點附近有稜有溝，沿稜看，水平平面 L 應該是唯一選擇，沿溝看，L 和 S 雖很接近，但並不" 貼切"，好像貌合神離的夫妻似地，勉強結合在一起。

這種點就叫做不可微分的點了。



(a)沿稜看



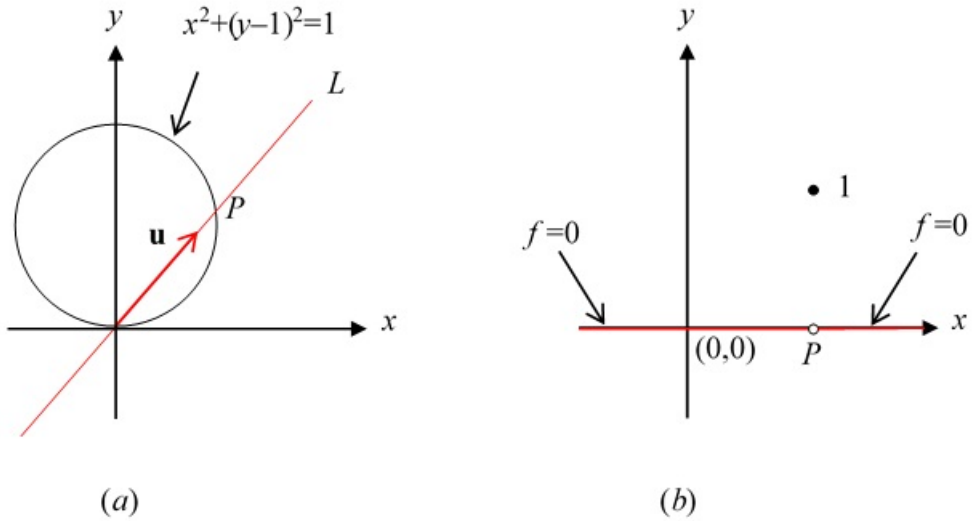
(b)沿溝看

在二變數函數中，我們有偏導數，方向導數，可惜這些觀念和函數的平滑性並不一定直接發生關係。

例如：

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & (x-1)^2 + y^2 = 1, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

給定方向 $\mathbf{u}$，令 L 表過 $(0,0)$ 點，沿 $\mathbf{u}$ 方向的直線，則 f 在 L 的行爲如下圖 (b)。



如圖 (b) 所示，f 在 L 上，$f(P)=1$，其餘皆爲 0。因此，其在原點沿 $\mathbf{u}$ 方向的導數爲 0，即 $D_{\mathbf{u}}f(0,0)=0\ \forall\ \mathbf{u}$.

方向導數存在且相等，但 f 在 $(0,0)$ 點並不連續，遑論平滑。

設 f 爲定義於 (x,y) 點附近的連續函數。我們說 f 在 (x,y) 點可微分若 f 可以用一線性函數很貼切地逼近，換言之，$\exists\ L(\Delta x,\Delta y)=a+b\Delta x+c\Delta y$ 使

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)=a+b\Delta x+c\Delta y+\epsilon\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2},\ \text{其中}\ \epsilon\to 0\ \text{當}\ \Delta x,\Delta y\to 0 \quad (10)$$

(10)$\Rightarrow a=f(x,y), b=f_x(x,y), c=f_y(x,y)$，亦即：

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)=f(x,y)+f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y+\epsilon\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} \quad (11)$$

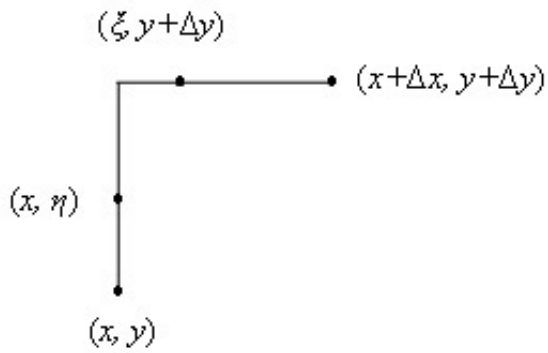
<u>定理 **10-8**</u>

若 f 在 (x,y) 點附近的一階偏導數連續，則 f 在 (x,y) 點可微分。

証明：$f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$
$=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)+f(x,y+\Delta y)-f(x,y)$
$=f_x(\xi,y+\Delta y)\Delta x+f_y(x,\eta)\Delta y,\ \xi$ 介於 $x,x+\Delta x$ 之間，η 介於 $y,y+\Delta y$ 之間
$=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y+\epsilon_1\Delta x+\epsilon_2\Delta y$

其中
$\epsilon_1=f_x(\xi,y+\Delta y)-f_x(x,y)\to 0,\ \text{當}\ \Delta x,\Delta y\to 0$
$\epsilon_2=f_y(x+\Delta x,\eta)-f_y(x,y)\to 0,\ \text{當}\ \Delta x,\Delta y\to 0$

$$\Rightarrow \epsilon_1\Delta x+\epsilon_2\Delta y=\frac{\epsilon_1\Delta x+\epsilon_2\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\cdot\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$



令 $\epsilon = \dfrac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} \cdot \epsilon_1 + \dfrac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} \cdot \epsilon_2$，則根據 Cauchy 不等式，

$$\epsilon \leq \sqrt{\epsilon_1^2+\epsilon_2^2} \to 0 \text{ 當 } \Delta x, \Delta y \to 0$$

故 f 在 (x,y) 點可微分。

簡言之：$f \in C^1(\Omega) \Rightarrow f$ is differentiable on Ω, Ω 爲 $\mathbb{R}^2$ 中 open region.

令 $S = \{(x,y,f(x,y))|(x,y) \in \Omega\}$，$P \in S, L$ 表 S 在 P 點的切平面，$f \in C^1(\Omega) \Rightarrow L$ 和 S 很貼切！

Remark:

定理 10-8 只是提供一個充分條件，他並非必要條件。

例如：

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

f 在 $(0,0)$ 點可微分，但

$$f_x = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在 $(0,0)$ 點並不連續。

例 **1.**

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

問：(a) f 在 $(0,0)$ 點連續否？ (b) f 在 $(0,0)$ 點可微分否？

分析：

(a) 即問：$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$ 成立否？

f 的分子爲四次齊次式，分母爲二次式，應該沒問題。
令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，則 $f = r^2\sin\theta\cos\theta, |f| \le r^2 \to 0$ 當 $(x,y)\to 0$，連續！

(b) 即問：$f(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \epsilon\sqrt{x^2+y^2},\ \epsilon \to 0$ 當 $x, y \to 0$ 成立否？
而 $f(0,0) = 0, f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0.$

即問：$\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = \epsilon\sqrt{x^2+y^2},\ \epsilon \to 0$ 當 $x, y \to 0$ 成立否？

亦即：$\epsilon = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}} \to 0$ 當 $x, y \to 0$ 成立否？

令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，則

$$|\epsilon| \le r \to 0 \text{ 當 } x, y \to 0$$

故 f 在 $(0,0)$ 點可微分。

Remark:

你也可以利用定理 10-8，檢驗 f_x 及 f_y 是否爲連續函數，不過那樣做並不省事，況且檢驗出來若 f_x, f_y 連續，依定理 10-8，可判斷其可微分。要是 f_x, f_y 不連續，你也不能說什麼。

能直接從定義下手，就下手，才是正道。

例 **2.**

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x+y)}{x^2+y^2}, & (x,y) \ne (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

問：(a) f 在 $(0,0)$ 點連續否？ (b) f 在 $(0,0)$ 點可微分否？

分析：

(a) 分子爲三次齊次式，分母二次，仿上例，知其連續。

(b) 即問：$f(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \epsilon\sqrt{x^2+y^2},\ \epsilon \to 0$ 當 $x, y \to 0$ 成立否？
而 $f(0,0) = 0, f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0$，同理 $f_y(0,0) = 0$

即問：$\dfrac{xy(x+y)}{x^2+y^2} = \epsilon\sqrt{x^2+y^2},\ \epsilon \to 0$ 當 $x, y \to 0$ 成立否？

即：$\epsilon = \dfrac{xy(x+y)}{(x^2+y^2)^{3/2}} \to 0$ 當 $x, y \to 0$ 成立否？

令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，則 $\epsilon = \cos\theta\sin\theta(\cos\theta + \sin\theta)$

表示 (x, y) 沿不同方向 θ 趨近原點，ϵ 的極限值隨 θ 而變，並不恆爲 0！

故 f 在 $(0, 0)$ 點不可微分。

直覺上來看：f 在 $(0, 0)$ 點附近的行爲

(i) 沿 x 軸，$y \equiv 0, f(x, 0) \equiv 0$，切線水平。

(ii) 沿 y 軸，$x \equiv 0, f(0, y) \equiv 0$，切線水平。

如果 f 在 $(0, 0)$ 點上可微分，那線性函數必爲水平平面 (即 x, y 平面)

(iii) 沿 $y = x, f = x$，切線斜率爲 1，不貼切了！

故 f 在 $(0, 0)$ 點不可微分。

對於 n 個變數的函數，我們稱 f 在 $\mathbf{x}$ 點可微分若

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} + \epsilon|\mathbf{h}|,\ \epsilon \to 0 \text{ 當 } |\mathbf{h}| \to 0$$

仿定理 10-8 的論述，我們有：

<u>定理 **10-9**</u> f 在 $\mathbf{x}$ 點附近的一階偏導數連續，則 f 在 $\mathbf{x}$ 點可微分。

10.8 Taylor 展式

A. 單變數函數

在初微裏我們已見過：若 f 在 $(a-\delta, a+\delta) = I_\delta(a)$ 上 n 階導數存在，則有

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + R_n \\ R_n &= \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n,\ c \text{ 介於 } a, b, \text{ 之間 } \forall\, b \in I_\delta(a) \end{aligned} \tag{12}$$

稱爲 f 在 a 點的 n 階 Taylor 展式。

當 $n = 1$，

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b-a)$$

即爲均值定理。

(12) 式何以成立呢？在證明它之前，我先引述一個加權平均值定理。

<u>定理 **10-10**</u> (加權平均值定理)

設 f 在 $[a, b]$ 上連續，$g(x) \geq 0\ \forall\, x \in [a, b]$，爲 Riemann 可積函數，則 $\exists\, c \in (a, b)$ 使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

說明：

1. 令 $\alpha(x) = \dfrac{g(x)}{\int_a^b g(x)dx}$，則 $\displaystyle\int_a^b \alpha(x)dx = 1.$

   設 $\displaystyle\int_a^b g(x)dx \neq 0$。($\displaystyle\int_a^b g(x)dx = 0$，定理成立，不在話下)

   上式相當於 $\exists\, c$ 使 $\displaystyle\int_a^b f(x)\alpha(x)\ dx = f(c).$

   即：α 對 f 的加權平均等於 f 在 (a, b) 中某點的函數值。

2. f 在 $[a, b]$ 上連續，$\therefore$ f 在 $[a, b]$ 上取最大最小值。設它們分別爲 $M = f(x_1)$ 及 $m = f(x_2)$，則

   $$m \leq f(x) \leq M\ \forall\, x \in [a, b]$$

   $\Rightarrow$

   $$m = m\int_a^b \alpha(x)dx \leq \int_a^b f(x)\alpha(x)dx \leq M\int_a^b \alpha(x)dx = M \tag{13}$$

   依中間值定理，$\exists\, c$ 介於 x_1, x_2 之間，當然 $c \in (a, b)$，使

   $$f(c) = \int_a^b f(x)\alpha(x)dx$$

Remark: $g(x) \geq 0$ 條件不可略，否則無法保證 (13) 式成立。

現在我們回過頭來看 Taylor 展式，先看看二階展開爲何成立。

由微積分基本定理：

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + \int_a^b f'(x)dx \\ &= f(a) - \int_a^b f'(x)d(b-x) \\ &= f(a) - f'(x)(b-x)\Big|_a^b + \int_a^b (b-x)df'(x) \text{ (Integration by Parts)} \\ &= f(a) + f'(a)(b-a) + R_2 \end{aligned} \tag{14}$$

其中

$$\begin{aligned} R_2 &= \int_a^b (b-x)df' = \int_a^b (b-x)\cdot f''(x)dx \\ &\underset{\uparrow}{=} f''(c)\int_a^b (b-x)dx = \frac{f''(c)}{2!}(b-a)^2 \end{aligned}$$

定理 10-9 $g(x) = b - x > 0 \ \forall \ x \in (a,b)$

故二階展開成立。

三階如何？

由

$$\begin{aligned} R_2 &= \int_a^b (b-x)f''(x)dx = -\frac{1}{2!}\int_a^b f''(x)d(b-x)^2 \\ &= -\frac{1}{2!}f''(x)(b-x)^2\Big|_a^b + \frac{1}{2!}\int_a^b (b-x)^2 f'''(x)dx \\ &= \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + R_3 \\ R_3 &= \frac{1}{2!}\int_a^b (b-x)^2 f'''(x)dx = \frac{1}{2!}f'''(c)\int_a^b (b-x)^2 dx = \frac{f'''(c)}{3!}(b-a)^3 \end{aligned}$$

代入 (14) 得

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(b-a)^3 \tag{15}$$

依此類推得

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^n + R_n \\ R_n &= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b (b-x)^{n-1} f^{(n)}(x)dx \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\cdot f^{(n)}(c)\int_a^b (b-x)^{n-1}dx \text{ (定理 10-10)} \\ &= \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n \longleftarrow \text{稱 Lagrange 剩餘項} \end{aligned}$$

B. 二變數函數

設 $f(x,y)$ 在 $B_r(x,y)$ 上 n 階偏導數連續，則有

$$f(x+h,y+k)=f(x,y)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f\bigg|_{(x,y)}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n-1)}f\bigg|_{(x,y)}+R_n$$

$$R_n=\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n}f\bigg|_{(x+\theta h,y+\theta k)},h^2+k^2\le r^2 \tag{16}$$

其中 $\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{i}f\bigg|_{(x,y)}$ 表 $D=h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}$ 這個 operator 對 f 作用 i 次之後在 (x,y) 點取值。

(16) 式何以成立？
(16) 式說穿了只不過是 (12) 式透過 Chain Rule 的表示式。

設 $\phi(t)=f(x+th,y+tk)$，則 $f(x+h,y+k)=\phi(1), f(x,y)=\phi(0)$. 根據 (12) 式，

$$\phi(1)=\phi(0)+\phi'(0)+\frac{\phi''(0)}{2!}+\cdots+\frac{\phi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}+\frac{\phi^{(n)}(\theta)}{n!},\ 0<\theta<1$$

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= (f_x\cdot h+f_y\cdot k)\bigg|_{(x+th,y+tk)}\\ &= \left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f\bigg|_{(x+th,y+tk)}\end{aligned} \tag{17}$$

$$\therefore \phi'(0)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f\bigg|_{(x,y)}$$

由 (17) 式：

$$\begin{aligned}\phi''(t) &= [(f_{xx}\cdot h+f_{xy}\cdot k)\,h+(f_{yx}\cdot h+f_{yy}k)]\bigg|_{(x+th,y+tk)}\\ &= \left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{2}f\bigg|_{(x+th,y+tk)}\end{aligned}$$

$$\therefore \phi''(0)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{2}f\bigg|_{(x,y)}$$

依此類推，即得 (16).

(16) 式又可簡記作

$$\begin{aligned}f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) &= f(\mathbf{x})+Df(\mathbf{x})+\frac{D^2f}{2!}(\mathbf{x})+\cdots+\frac{D^{n-1}f}{(n-1)!}(\mathbf{x})+R_n\\ R_n &= \frac{D^nf}{n!}(\mathbf{x}+\theta\mathbf{h}),\ 0<\theta<1\end{aligned} \tag{18}$$

其中 $\mathbf{h} = (h, k), D = h\dfrac{\partial}{\partial x} + k\dfrac{\partial}{\partial y}$

C. n 個變數的情形

設 f 在 $B_r(\mathbf{x}) \subset \mathbb{R}^n$ 上 m 階偏導數連續，$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \mathbf{h} = (h_1, h_2, \cdots, h_n), |\mathbf{h}| < r$

仿二維的推論，我們有

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) &= f(\mathbf{x}) + Df(\mathbf{x}) + \frac{D^2 f}{2!}(\mathbf{x}) + \cdots + \frac{D^{m-1} f}{(m-1)!}(\mathbf{x}) + R_m \\ R_m &= \frac{D^m}{m!} f(\mathbf{x}+\theta\mathbf{h}), 0 < \theta < 1 \end{aligned} \tag{19}$$

稱爲 f 對 $\mathbf{x}$ 點的 m 階泰勒展式，其中 $D = h \cdot \nabla = h_1\dfrac{\partial}{\partial x_1} + h_2\dfrac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + h_n\dfrac{\partial}{\partial x_n}$ 表一作用素，$D^i f$ 表 D 對 f 作用 i 次。

心有靈犀一點通，不必多言。

10.9 極值問題

A. 單變數函數

a. 一階判斷（大域判斷）

1 <u>定理 **10-11**</u>

設 f 在 (a,b) 上可導，$x_0 \in (a,b)$，且 $f'(x) > 0$ 當 $x \in (x_0,b)$，$f'(x) < 0$ 當 $x \in (a,x_0)$，則 $f(x) > f(x_0)\ \forall\ x \in (a,b),\ x \neq x_0$.

說明：$f'(x) > 0$ 當 $x \in (a,x_0) \Rightarrow f \nearrow$ strictly on (x_0,b)，$\therefore f(x) > f(x_0)\ \forall\ x \in (x_0,b)$

$f'(x) < 0$ 當 $x \in (x_0,b) \Rightarrow f \searrow$ strictly on (a,x_0)，$\therefore f(x) > f(x_0)\ \forall\ x \in (a,x_0)$

故 $f(x) > f(x_0)\ \forall\ x \in (a,b), x \neq x_0$.

Remark:

1. f 在 x_0 點可不可導無關定理的成立。
2. 一階判斷極其簡單，但，是個很好的判斷方法。它告訴我們，$f(x) > f(x_0)\ \forall\ x \in (a,b), x \neq x_0$，清清楚楚地告訴我們不等式在那個區間上成立。一般在處理不等式問題時，是常用的方法。

例 **1.** $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$，試証：$\dfrac{2}{\pi}x < \sin x < x$

解：令 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$，則

$f'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \dfrac{\cos x \cdot (x - \tan x)}{x^2} < 0\ \forall\ x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

(記住：$\tan x > x, 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$)

$\therefore f \searrow$ strictly on $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上連續（定義 $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$）

$\therefore f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) < f(x) < f(0)\ \forall\ x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

即：$\dfrac{2}{\pi} < \dfrac{\sin x}{x} < 1$

例 **2.** $x > -1, x \neq 0$，試証：$(1+x)^p > 1 + px\ \forall\ p > 1$.

解：令 $f(x) = (1+x)^p - 1 - px$，則 $f'(x) = p(1+x)^{p-1} - p = p[(1+x)^{p-1} - 1]$

$f'(x) > 0$ 當 $x > 0$，$\therefore f \nearrow$ strictly 當 $x > 0$

$f'(x) < 0$ 當 $-1 < x < 0$，$\therefore f \searrow$ strictly 當 $-1 < x < 0$

$\therefore f(x) > f(0) = 0 \ \forall \ x > -1, x \neq 0.$

例 **3.** Komatzu 估計 (1955)

$x \geq 0, f(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \displaystyle\int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

試証：$h(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+4}+x} < f(x) < \dfrac{2}{\sqrt{x^2+2}+x} = g(x).$

分析：

1. f 滿足常微分方程式

$$f' = xf - 1 \tag{20}$$

2. $g(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+2}+x} = \sqrt{x^2+2} - x$
   $\Rightarrow$

$$g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} - 1 < \frac{2x}{\sqrt{x^2+2}+x} - 1 = xg(x) - 1 \tag{21}$$

3. (21) − (20) 得

   $(g-f)' < x(g-f) \ \forall \ x > 0$
   $\Rightarrow [e^{-\frac{x^2}{2}}(g-f)]' < 0 \ \forall \ x > 0$
   $\therefore e^{-\frac{x^2}{2}}(g-f) \searrow$ strictly on $(0, \infty)$
4. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}(g(x) - f(x)) = 0$（請驗之）
   故 $e^{-\frac{x^2}{2}}(g-f) > 0 \ \forall \ x \geq 0 \Rightarrow g(x) > f(x) \ \forall \ x \geq 0$
5. $h(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+4}+x} = \dfrac{1}{2}(\sqrt{x^2+4} - x)$
   $\Rightarrow$

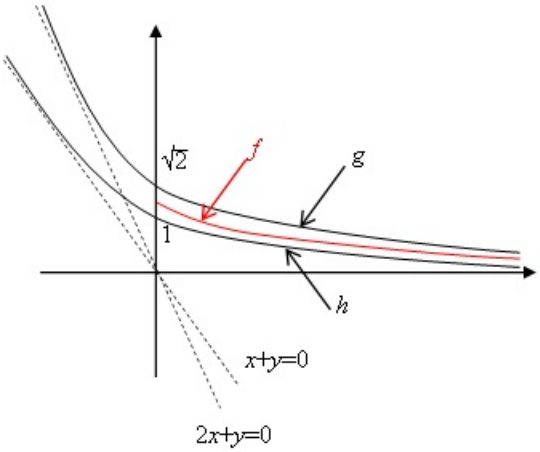
$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} + 1\right) - 1 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+4}+x}{\sqrt{x^2+4}} - 1 \\ &> \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}+x} - 1 \quad (\because (a+b)^2 < 4ab) \\ &= xh - 1 \end{aligned}$$

6. 故同理可証：$h(x) < f(x) \ \forall \ x \geq 0.$

Remark:

1. Komatzu 估計在機率論中有其用處。
2. 令 $y=\sqrt{x^2+2}-x$，則 $(y+2x)y=2$，故 g 爲以 $y=0$ 及 $y+2x=0$ 爲漸近線的雙曲線。
3. 令 $y=\dfrac{1}{2}(\sqrt{x^2+4}-x)$，則 $(y+x)y=1$，故 h 爲以 $y=0$ 及 $y+x=0$ 爲漸近線的雙曲線。

   f,g,h 的關係圖示如下：



b. 二階判斷（局部判斷）

<u>定理 **10-12**</u> $f'(x_0)=0, f''$ 在 x_0 點連續，若 $f''(x_0)>0$，則 x_0 爲 f 的極小點。

說明：

1. f'' 在 x_0 點連續，$f''(x_0)>0 \Rightarrow \exists\,\delta>0$ 使 $f''(x)>0\ \forall\, x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$
   $\Rightarrow f'\nearrow$ strictly on $(x_0-\delta,x_0+\delta)$
2. $f'(x_0)=0, f'\nearrow$ strictly on $(x_0+\delta,x_0-\delta)$
   $\Rightarrow f'(x)>0$ on $(x_0,x_0+\delta)$, $f'(x)<0$ on $(x_0-\delta,x_0)$

3. 根據一階判斷，$f(x)>f(x_0)\ \forall\, x\in(x_0-\delta,x_0+\delta), x\neq x_0$，故 x_0 爲極小點。

Remark:

1. x_0 爲 f 的極大點 $\Leftrightarrow$ x_0 爲 $-f$ 的極小點，故 $f'(x_0)=0, f''(x_0)<0 \Rightarrow x_0$ 爲 f 的極大點。

2. 說明 1 中，$\exists\,\delta>0,\cdots,\delta$ 到底多大不得而知。
   即：二階判斷只告訴我們在 x_0 點附近 $f(x)>f(x_0), x\neq x_0$，這個鄰域多大？不知道！
   顯然美中不足，故在處理不等式問題時，用處不大。

3. 二階估計也可以由 Taylor 展式得知：

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2,\ \xi\text{介於}x, x_0\text{之間}$$

$f''(x_0) > 0, \therefore f''(x) > 0$ on $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ for some $\delta > 0$
$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow \xi \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow f''(\xi) > 0$

故 $f(x) > f(x_0)\ \forall\ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \neq x_0$

這個方法可以推廣得下列定理（定理 10-13）。

c. n 階判斷

<u>定理 **10-13**</u>

f 在 x_0 點附近的 n 階導數連續：

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

則

(a) 當 n 爲偶數時，x_0 爲極值點。

$f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ 爲極小點
$f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ 爲極大點。

(b) 當 n 爲奇數時，x_0 非極值點。

分析：

1. f 在 x_0 點的泰勒展式

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= f(x_0) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n \end{aligned}$$

其中 ξ介於x, x_0之間 $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ for some $\delta_1 > 0$

2. $f^{(n)}$ 在 x_0 點連續，$f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \delta_2$ 使 $f^{(n)}(x) > 0\ \forall\ x \in (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2)$.
3. 取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$，則
$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow \xi \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow f''(\xi) > 0$
4. n 爲偶數 $\Rightarrow (x - x_0)^n > 0$ 當 $x \neq x_0$
故 $f(x) > f(x_0)\ \forall\ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \neq x_0$
$\therefore x_0$ 爲極小點。
5. 同理 $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ 爲極大點。
6. n 爲奇數，不妨設 $f^{(n)}(x_0) > 0$，δ 如上
$(x - x_0)^n > 0$ 當 $x > x_0$，$(x - x_0)^n < 0$ 當 $x < x_0$
故 $f(x) > f(x_0)$ 當 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$，$f(x) < f(x_0)$ 當 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$

$\therefore x_0$ 非極值點。

B. 二變數函數

<u>Lemma 10-1</u>

$ax^2+2bxy+cy^2>0\ \forall\ x,y\neq 0$

$\Leftrightarrow a>0,\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}>0,(a,b,c\in\mathbb{R})$

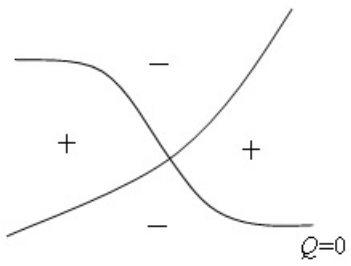
這是高中時代，大家都學過的數學，等一下要用到它，在此陳述之。

<u>Lemma 10-2</u>

$a(x,y),b(x,y),c(x,y)$ 在 $B_\rho(0,0)$ 上連續，$Q(x,y)=a(x,y)x^2+2b(x,y)xy+c(x,y)y^2$，若

$$\begin{vmatrix} a(0,0) & b(0,0) \\ b(0,0) & c(0,0) \end{vmatrix} \overset{\text{記作}}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}_{(0,0)} <0$$

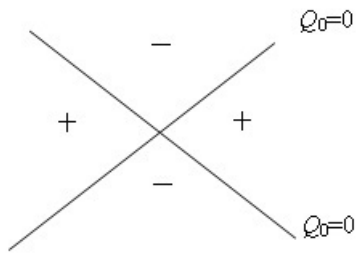
則 Q 在 $(0,0)$ 點附近變號四次（如圖 (a) 所示）



圖(a)

分析：爲了符號的簡便，令 $a_0=a(0,0),b_0,c_0$ 同，$a=a(x,y),b,c$ 同，$\Delta_0=a_0c_0-b_0^2,\Delta=ac-b^2,Q_0(x,y)=a_0x^2+2b_0xy+c_0y^2.$

1. **<u>Lemma 10-2</u>** 對 Q_0 顯然成立。
   $z=Q_0(x,y)$ 爲一雙曲面 $(\because \Delta_0<0)$，切 xy 平面於原點，其於原點附近行爲如圖 (b) 所示。



圖(b)

2. 令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, a = a(r\cos\theta, r\sin\theta) \to a_0$ 當 $r \to 0$，b, c 亦同，而 $Q_0(x,y) \neq 0$，故有：

$$\frac{Q(x,y)}{Q_0(x,y)} = \frac{ax^2+2bxy+cy^2}{a_0x^2+2b_0xy+c_0y^2} = \frac{a\cos^2\theta+2b\cos\theta\sin\theta+c\sin^2\theta}{a_0\cos^2\theta+2b_0\cos\theta\sin\theta+c_0\sin^2\theta} \to 1 \text{ 當 } r \to 0$$

因此，$\exists\, \delta > 0$ 使 $Q(x,y)$ 和 $Q_0(x,y)$ 在 $B_\delta(0,0)$ 上同號（請想一想）

故 $Q(x,y)$ 在 $B_\delta(0,0)$ 上正負一如上圖，其 0 等高線以 $Q_0 = 0$ 爲切線。

<u>定義</u> 稱 (x_0, y_0) 爲 $f(x,y)$ 的極小點，若 $\exists\, \delta > 0$ 使

$$f(x,y) \geq f(x_0,y_0)\ \forall\ (x,y) \in B_\delta(x_0,y_0)$$

稱 (x_0, y_0) 爲 f 的鞍點若

(i) f 在 (x_0, y_0) 點的切平面水平

(ii) $\forall\ \delta > 0,\ \exists\ (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in B_\delta(x_0,y_0)$ 使

$$f(x_1,y_1) < f(x_0,y_0), f(x_2,y_2) > f(x_0,y_0)$$

<u>定理 **10-14**</u>

設 f 在 $B_\rho(x_0,y_0)$ 上二階偏導數連續，$f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$，

令 $H(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}_{(x_0,y_0)}$（在 (x_0,y_0) 取值），則

(a) $H(x_0,y_0) > 0 \Rightarrow (x_0,y_0)$ 爲極值點。

(i) $f_{xx}(x_0,y_0) > 0, (x_0,y_0)$ 爲極小點

(ii) $f_{xx}(x_0,y_0) < 0, (x_0,y_0)$ 爲極大點

(b) $H(x_0,y_0) < 0 \Rightarrow (x_0,y_0)$ 爲鞍點。

(c) $H(x_0,y_0) = 0$，不定。

Remark:

$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}_{(x,y)} = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}^2(x,y)$ 稱爲 f 在 (x,y) 點的 Hessian，

顯然 H 在 $B_\rho(x_0,y_0)$ 上連續。

分析：

1. f 對 (x_0,y_0) 點作 Taylor 展開至二階：

$$\begin{aligned} f(x_0+h,y_0+k) &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k + \frac{1}{2!}R_2 \\ &= f(x_0,y_0) + \frac{1}{2}R_2 \\ R_2 &= (f_{xx}\cdot h^2 + 2f_{xy}\cdot hk + f_{yy}\cdot k^2)\Big|_{(x_0+\theta h, y_0+\theta k)}, 0<\theta<1 \\ &= a(h,k)h^2 + 2b(h,k)hk + c(h,k)k^2 \end{aligned}$$

   其中 $a(h,k) = f_{xx}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)$，$b,c$ 類同。

2. $H(x_0,y_0)>0$, $\exists\ \delta_1$ 使 $H(x,y)>0\ \forall\ (x,y)\in B_{\delta_1}(x_0,y_0)$
   $f_{xx}(x_0,y_0)>0$, $\exists\ \delta_2$ 使 $f_{xx}(x,y)>0\ \forall\ (x,y)\in B_{\delta_2}(x_0,y_0)$

   取 $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$，則

$$f_{xx}(x,y)>0, H(x,y)>0\ \forall\ (x,y)\in B_\delta(x_0,y_0)$$

3. $(x,y)\in B_\delta(x_0,y_0) \Rightarrow (x_0+\theta h, y_0+\theta k)\in B_\delta(x_0,y_0)$，故 $a>0, ac-b^2 = H(x_0+\theta h, y_0+\theta k)>0$。依 **<u>Lemma 10-1</u>**，得

$$ah^2+2bhk+ck^2>0\ \forall\ (h,k), h^2+k^2<\delta^2$$

   亦即：$R_2>0\ \forall\ h^2+k^2<\delta^2$，故 (x_0,y_0) 爲極小點。

4. $f_{xx}(x_0,y_0)<0 \Rightarrow -f_{xx}(x_0,y_0)>0$，而對應之 H 不變，故 (x_0,y_0) 爲 $-f$ 之極小點，即 (x_0,y_0) 爲 f 的極大點。
5. $H(x_0,y_0)<0$，根據 **<u>Lemma 10-2</u>**, (x_0,y_0) 爲鞍點。
6. $H(x_0,y_0)=0$，不定。

   例如：

   (a) $f(x,y) = x^4+y^4 \Rightarrow H(0,0)=0$, 此時 $(0,0)$ 爲極小點。
   (b) $f(x,y) = -x^4-y^4 \Rightarrow H(0,0)=0$, 此時 $(0,0)$ 爲極大點。
   (c) $f(x,y) = x^2+y^3 \Rightarrow H(0,0)=0, f_x(0,0)=0, f_y(0,0)=0$

$$x=0 \Rightarrow f(0,y) = y^3 \begin{cases} >0 & 當 y>0 \\ <0 & 當 y<0 \end{cases}$$

   此時 $(0,0)$ 爲鞍點

C. n 個變數的情形

設 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 爲 $n \times n$ 方陣，$a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$,

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ 表 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 的內積。

令 $Q(\mathbf{x}) = (A\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ 表 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次型 (Quadratic Form)。

我們稱 $Q(\mathbf{x})$ 爲正定，若 $Q(\mathbf{x}) > 0 \ \forall \ \mathbf{x} \neq 0$

一個二次型什麼時候爲正定？下面這個 Lemma 是線性代數中一個重要的定理，在此引述備用。

<u>Lemma 10-3</u>

設 $\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \cdots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，我們有

$$Q(\mathbf{x}) > 0 \ \forall \ \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \cdots, \Delta_n > 0$$

即對角線的各階行列式 > 0

仿<u>定理 **10-14**</u>，我們有如下的定理：

<u>定理 **10-15**</u>

設 f 在 $B_\rho(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$ 上的二階篇導數連續，$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = 0, i = 1, 2, \cdots, n.$

令 $H_1(\mathbf{x}_0) = f_{11}(\mathbf{x}_0), H_2(\mathbf{x}_0) = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}(\mathbf{x}_0), \cdots, H_n(\mathbf{x}_0) = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix}(\mathbf{x}_0)$

其中 $f_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$。

若 $H_k(\mathbf{x}_0) > 0 \ \forall \ k = 1, 2, \cdots, n$，則 $\mathbf{x}_0$ 爲 f 的極小點。

Remark:

1. f 在 $\mathbf{x}_0$ 點取極大值 $\Leftrightarrow -f$ 在 $\mathbf{x}_0$ 點取極小值，故其充分條件爲

$$H_1(\mathbf{x}_0) < 0, H_2(\mathbf{x}_0) > 0, H_3(\mathbf{x}_0) < 0, H_4(\mathbf{x}_0) > 0, \cdots$$

2. 若 $\exists\, i, j$ 使 $\begin{vmatrix} f_{ii} & f_{ij} \\ f_{ji} & f_{jj} \end{vmatrix}(\mathbf{x}_0) < 0$，則 $\mathbf{x}_0$ 爲鞍點。

重複那句話：心有靈犀一點通，不必多言。

例 **1.** $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$，求 f 的極值。

解：令 $\begin{cases} f_x(x,y) = 3x^2 - 3y &= 0 \\ f_y(x,y) = 3y^2 - 3x &= 0 \end{cases}$

解之得 $(x,y) = (0,0)$ 或 $(x,y) = (1,1)$

又 $f_{xx}(x,y) = 6x, H(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 9$

(i) 於 $(0,0)$ 點，$H(0,0) = -9 < 0$，故 $(0,0)$ 爲鞍點。

(ii) 於 $(1,1)$ 點，$f_{xx}(1,1) = 6 > 0, H(1,1) = 27 > 0$，故 $(1,1)$ 爲極小點，極小值 $f(1,1) = -1$.

例 **2.** $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$，試討論 f 的極值。

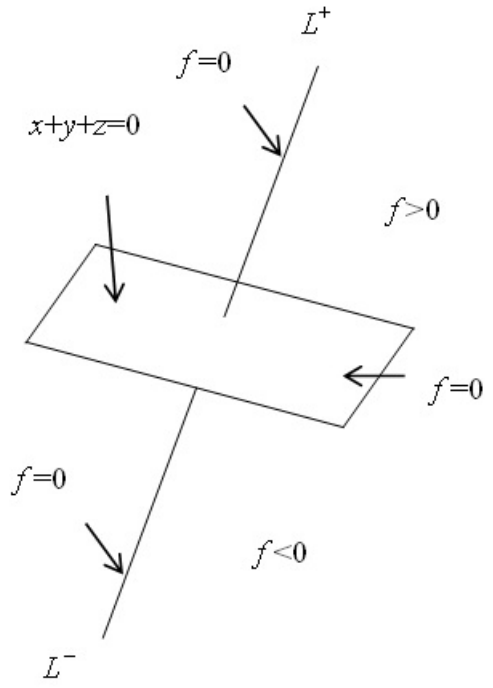
解：

1. 令 $\begin{cases} f_x = 3x^2 - 3yz &= 0 \\ f_y = 3y^2 - 3xz &= 0 \\ f_z = 3z^2 - 3xy &= 0 \end{cases}$

   解之得 $x = y = z$。

   又 $H(x,y,z) = \begin{vmatrix} 6x & -3z & -3y \\ -3z & 6y & -3x \\ -3y & -3x & 6z \end{vmatrix} = 27(6xyz - 2x^3 - 2y^3 - 2z^3)$,

   $H = 0$ 當 $x = y = z$，定理無法判斷。



2. 不過，

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz) \\ &= \frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2] \end{aligned}$$

$f \geq 0$ 當 $x+y+z>0$
$f \leq 0$ 當 $x+y+z<0$

又 $f=0$ 當 $x=y=z$，
令 $L^+=\{(x,x,x)|x>0\}$，$L^-=\{(x,x,x)|x<0\}$，

$P \in L^+ \Rightarrow P$ 爲 f 的極小點，
$P \in L^- \Rightarrow P$ 爲 f 的極大點。
$\mathbf{0}=(0,0,0)$ 爲鞍點。

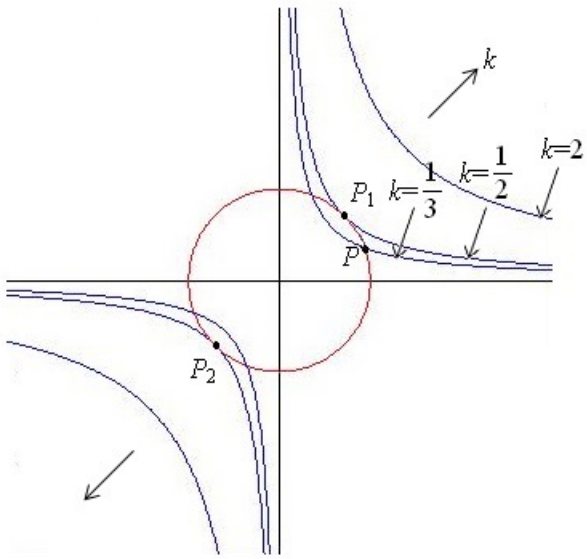
10.10 限制條件下的極值問題－ Lagrange 乘子法 (Method of Lagrange's Multiplier)

A. 二變數函數

例. 在 $x^2+y^2=1$ 的條件下，求 xy 的極值。

分析：

1. 令 $\Gamma=\{(x,y)|x^2+y^2=1\}, C_k=\{(x,y)|xy=k\}$，並設 $\Gamma, C_k\in C^1$，欲在 Γ 上求 k 的極值。
2. C_k 表一族以 x,y 軸爲漸近線的雙曲線。$k>0$，雙曲線落在第一、三象限，且當 k 由 0 漸增至 ∞ 時，C_k 由座標軸漸次向外退開至遙遠之處。
   $k<0$，雙曲線落在第二、四象限，且當 k 由 0 漸減至 $-\infty$，C_k 逐漸退開一如 $k>0$ 之情形。
3. C_k 與 Γ 的關係圖示如下。



$k>0$

4. 當 $k=\dfrac{1}{2}$ 時，C_1 與 Γ 相切於 $P_1\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$，如圖，$P$ 爲 Γ 上 P_1 點附近的點，則過 P 點的雙曲線 C_k，其 k 必小於 1，因此 P_1 爲 k 在 Γ 上的極大值，同理 P_2 亦爲 k 在 Γ 上的極大點。

   故當 $(x,y)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 或 $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 時，xy 有最大值 1。
5. 當 $k<0$ 時，同理可得 $(x,y)=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 或 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 時，xy 有最小值 -1。

結論：極值點必發生在 C_k 與 Γ 相切處。

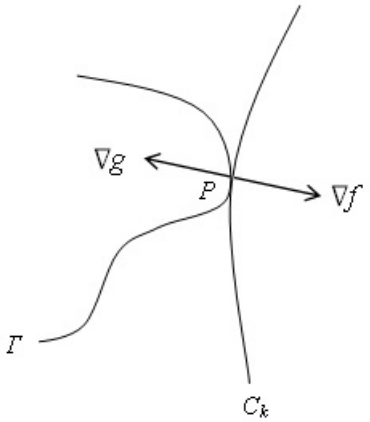
現在進入正題：

給定 $g(x,y)=0$，欲在此條件下求 $f(x,y)$ 的極值。

當然，g,f 都是平滑的函數（$f,g\in C^1$）

分析：

1. 令 $\Gamma=\{(x,y)|g(x,y)=0\}, C_k=\{(x,y)|f(x,y)=k\}$，欲在 Γ 上求 k 的極值，一如上例，極值點必發生在 C_k 與 Γ 的相切處。



2. 設 P 爲 C_k 與 Γ 的切點，$\nabla f(P)\perp C_k, \nabla g(P)\perp\Gamma$，$C_k$ 與 Γ 相切於 P 點 $\Rightarrow \nabla f(P)$ 與 $\nabla g(P)$ 共線，
   即：$\exists\,\lambda$ 使
$$\nabla f(P)=\lambda\nabla g(P)$$

3. $\nabla f=\lambda\nabla g$ 給出兩個方程式：
$$f_x-\lambda g_x=0, f_y-\lambda g_y=0$$
   再加上限制條件 $g=0$，三個方程式，三個未知數 x,y,λ，可解。

Remark:

1. 上述 λ 即所謂的 Lagrange 乘子，是一個借助量，非所欲求。
2. 令 $L(x,y)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$，稱爲 f,g 的 Lagrange 函數，解
$$\begin{cases} L_x &= 0 \\ L_y &= 0 \\ g &= 0 \end{cases}$$
   消去 λ，解 x,y 即得極值點。

3. Lagrange 乘子法只提供極值點的必要條件，到底是極大（最大）或極小（最小），還得就問題本身判斷之。

B. 三變數

a. 一個限制條件

設 $f, g \in C^1$，欲在 $g(x,y,z)=0$ 的條件下，求 $f(x,y,z)$ 的極值。

分析：

1. 令
$$\Sigma = \{(x,y,z)|g(x,y,z)=0\}\text{，}g\text{ 的 0 等溫面}$$
$$S_k = \{(x,y,z)|f(x,y,z)=k\}\text{，}f\text{ 的 }k\text{ 等溫面}$$
並設 $\Sigma, S_k \in C^1$，欲在 Σ 上求 k 的極值。
2. 一如二變數的情形，極值點必發生在 S_k 與 Σ 相切處。
3. 設 P 爲 S_k 與 Σ 的切點，則 $\nabla f(P) \perp S_k, \nabla g(P) \perp \Sigma$
S_k 與 Σ 相切於 $P \Rightarrow \nabla f(P)$ 與 $\nabla g(P)$ 共線，
即：$\exists\, \lambda$ 使 $\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P)$
若 $\nabla f(P) \neq 0$.
4. 令 $L(x,y,z) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z)$，稱爲 f, g 的 Lagrange 函數，解：
$$\begin{cases} L_x &= 0 \\ L_y &= 0 \\ L_z &= 0 \\ g &= 0 \end{cases}$$
消去 λ，解 x, y, z 即得極值點。

b. 兩個限制條件

設 $g_1, g_2, f \in C^1$，欲在 $g_1(x,y,z)=0$ 及 $g_2(x,y,z)=0$ 的條件下，求 f 的極值。

分析：

1. 令
$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \{(x,y,z)|g_1(x,y,z)=0\} \\ \Sigma_2 &= \{(x,y,z)|g_2(x,y,z)=0\} \\ S_k &= \{(x,y,z)|f(x,y,z)=k\} \\ \Gamma &= \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \end{aligned}$$
並設 $\Sigma_1, \Sigma_2, S_k, \Gamma \in C^1$，欲在 Γ 上求 k 的極值。
2. 一如二變數的論述，極值點必發生在 S_k 與 Γ 相切處。
3. 設 P 爲 S_k 與 Γ 的切點，T 爲 Γ 在 P 點的切線，則 T 切 S_k 於 P 點，
$$\nabla f(P) \perp S_k \Rightarrow \nabla f(P) \perp T \qquad [1]$$
若 $\nabla f(P) \neq 0, \nabla g(P) \neq 0$.

4. 又 $\Gamma \subset \Sigma_1$，T 切 Γ 於 P 點 $\Rightarrow T$ 切 Σ_1 於 P 點，即 $T \subset \Sigma_1$ 的切平面（過 P 點），而

$$\nabla g_1(P) \perp \Sigma_1 \Rightarrow \nabla g_1(P) \perp T \qquad [2]$$

5. 同理

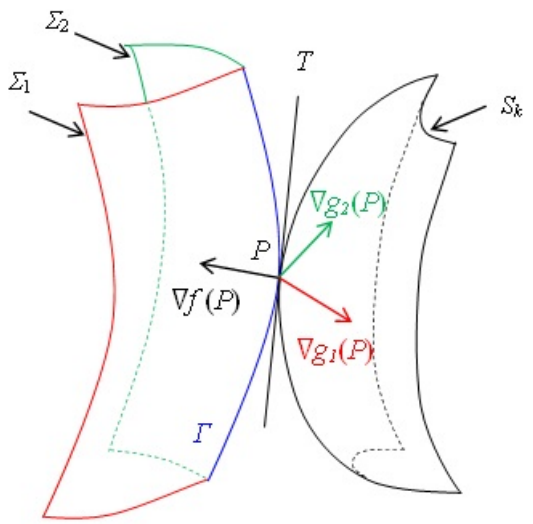
$$\nabla g_2(P) \perp \Sigma_2 \Rightarrow \nabla g_2(P) \perp T \qquad [3]$$

6. 由 [1][2][3]$\Rightarrow \nabla f(P), \nabla g_1(P), \nabla g_2(P)$ 共平面。
即：$\exists\, \lambda_1, \lambda_2$ 使 $\nabla f(P) = \lambda_1 \nabla g_1(P) + \lambda_2 \nabla g_2(P)$，若 $\nabla f(P) \neq 0$ 且 $\nabla g_1(P), \nabla g_2(P)$ 線性獨立。

7. 令 $L(x, y, z) = f(x, y, z) - \lambda_1 g_1(x, y, z) - \lambda_2 g_2(x, y, z)$ 稱爲 f, g_1, g_2 的 Lagrange 函數，解

$$\begin{cases} L_x &= 0 \\ L_y &= 0 \\ L_z &= 0 \\ g_1 &= 0 \\ g_2 &= 0 \end{cases}$$

消去 λ_1, λ_2，解 x, y, z 即得極值點。



C. n 個變數的情形

將上述推論推廣到 n 個變數，m 個限制條件，$m < n$，我們有如下定理：

<u>定理 **10-16**</u>

設 $f(\mathbf{x}), g_i(\mathbf{x}), i = 1, 2, \cdots, m$ 爲 $\mathbb{R}^n$ 中的 C^1 函數，$m < n$，欲在 $g_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1, 2, \cdots, m$ 的條件下求 f 的極值。

設 $\mathbf{x}_0$ 爲極值點，$f(\mathbf{x}_0)=k_0$，令

$$\begin{aligned}\Sigma_i &= \{\mathbf{x}|g_i(\mathbf{x})=0\}\\ \Gamma &= \bigcap_{i=1}^{m}\Sigma_i\\ S_{k_0} &= \{\mathbf{x}|f(\mathbf{x})=k_0\}\end{aligned}$$

並設 Σ_i,Γ,S_{k_0} 在 $\mathbf{x}_0$ 點附近平滑，且 $\nabla g_i(\mathbf{x}_0), i=1,2,\cdots,m$ 線性獨立，則 S_{k_0} 必與 Γ 相切於 $\mathbf{x}_0$ 點，因此 $\exists\ \lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_m$ 使

$$\nabla f(\mathbf{x}_0)=\lambda_1\nabla g_1(\mathbf{x}_0)+\lambda_2\nabla g_2(\mathbf{x}_0)+\cdots+\lambda_m\nabla g_m(\mathbf{x}_0)$$

令 $L(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_i(\mathbf{x})$，解

$$\begin{cases} L_{x_j} &= 0, \quad j=1,2,\cdots,n\\ g_i &= 0, \quad i=1,2,\cdots,m\end{cases}$$

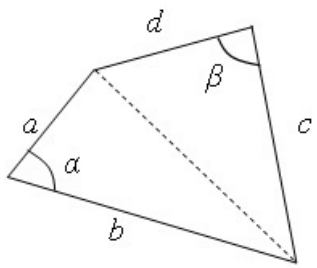
消去 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 即得極值點。

再重複那句話：心有靈犀一點通，不必多言。

Remark:

Lagrange 乘子法較嚴謹的處理應該引用隱函數定理，我們將於第十五章介紹它。上面的推論訴諸幾何上的直觀，我認爲是很好的方法。嚴謹有其邏輯上的必要，直觀有其心靈上的神會。

例 **1.** 四邊形四邊邊長 a,b,c,d 給定，問何時有最大面積？



分析：

1. 如圖，設 a,b 二邊之夾角爲 α，c,d 二邊之夾角爲 β，則四邊形面積爲

$$\frac{1}{2}ab\sin\alpha+\frac{1}{2}cd\sin\beta$$

2. α,β 並非自由，它受對角線長所牽引，依餘弦定律

$$a^2+b^2-2ab\cos\alpha=c^2+d^2-2cd\cos\beta$$

3. 令 $f = ab\sin\alpha + ab\sin\beta$,
$g = (a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha) - (c^2 + d^2 - 2cd\cos\beta)$,
$L = f - \lambda g$，則極值點應滿足：

$$\begin{cases} L_\alpha &= ab\cos\alpha + \lambda \cdot 2ab\sin\alpha &= 0 \\ L_\beta &= ab\cos\beta - \lambda \cdot 2ab\sin\beta &= 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \cos\alpha\sin\beta = -\sin\alpha\cos\beta$，即

$$\sin(\alpha+\beta) = 0$$

$\Rightarrow \alpha + \beta = 0$ 或 π

(i) $\alpha + \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0 \quad (\because \alpha, \beta \geq 0)$，非所欲求。

(ii) $\alpha + \beta = \pi \Rightarrow$ 四邊形四頂點共圓，相應極大值。
爲什麼？還請聰明的你，替它說清楚，講明白。

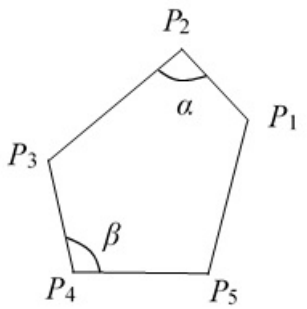
故當四邊形內接於圓時有最大面積。

例 **2.** n 邊形 A 之各邊邊長給定，問何時有最大面積？

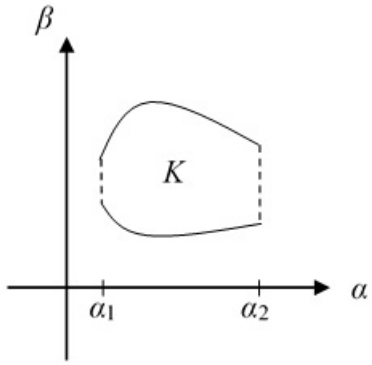
分析:

1. 先就 $n = 5$ 的情形來研究。設 $A = A(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$，$P_i, i = 1, \cdots, 5$ 依逆時序分別表 A 的頂點，$l_i = \overline{P_iP_{i+1}} =$ 定長，$i = 1, 2, \cdots, 5$，$P_6 = P_1$，設 $|A|$ 表 A 的面積。

2. 最大值存在，如圖，設 $\alpha = \angle P_1P_2P_3, \beta = \angle P_3P_4P_5, l_i, i = 1, \cdots, 5$ 給定，α 可以自由地在某 $[\alpha_1, \alpha_2]$ 之間變動，給定 $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$，$\beta$ 可以自由地在某 $[\beta_1(\alpha), \beta_2(\alpha)]$ 之間自由地變動。



令 $K=\{(\alpha,\beta)|\alpha_1\le\alpha\le\alpha_2,\beta_1(\alpha)\le\beta\le\beta_2(\alpha)\}$，則 K 爲 compact，$|A|=|A|(\alpha,\beta)$ 在 K 上連續



$\therefore |A|$ 在 K 上取最大值。

3. 設 A_M 表最大值所相應之多邊形，其頂點仍以 $P_1,P_2,\cdots,P_5$ 表示之

   (i) 固定 $\Delta P_4P_5P_1$，根據例 1.，P_1,P_2,P_3,P_4 必須共圓，設此圓爲 Γ_1

   (ii) 固定 $\Delta P_5P_1P_2$，根據例 1.，P_2,P_3,P_4,P_5 必須共圓，設此圓爲 Γ_2

   (iii) (i)(ii)$\Rightarrow P_2,P_3,P_4\in\Gamma_1,P_2,P_3,P_4\in\Gamma_2$，而平面上三點定一圓，$\therefore \Gamma_1=\Gamma_2$

4. 結論：P_1,P_2,P_3,P_4,P_5 共圓！

5. 對任意 n 邊形，可依此類推，知：當 n 邊形個頂點共圓時，有最大面積。

例 **3.** 等周界問題

給定周長 L，欲在平面上圈圍出一區域 A，使 A 有最大面積，這就是歷史上有名的等周界問題。

憑直覺，大家都知道要圍圓形才能得到最大面積，但是邏輯上如何說清楚、講明白，並不是一件容易的事。

等周界不等式：

設 B 表以 L 爲邊界的圓盤，則 B 的半徑 $R=\dfrac{L}{2\pi}$，因此，B 的面積 $|B|=\pi\cdot\left(\dfrac{L}{2\pi}\right)^2=\dfrac{L^2}{4\pi}$，$|B|\ge|A|$，對一切周長 L 的領域 A 成立，故有

$$L^2\ge 4\pi|A|$$

等號成立 $\Leftrightarrow$ A 爲圓盤

上面這個不等式，數學上稱之爲平面上的等周界不等式。

等周界問題是個古老的數學問題，但直到十九世紀才有嚴格的數學証明。J. Steiner(1796∼1863) 是這問題的先驅者，他想出幾個巧妙的辦法來証明等周界不等式，可算得上青史留名。1902 年，A.Hurwitz(1859∼1919) 利用 Fourier Series 展開來証明等周界不等式，是個簡潔有力的方法，常被引用。1938 年，E. Schmidt 利用基礎的微積分工具 Green's 定理及 Cauchy-Schwartz 不等式，導出等周界不等式，堪稱巧思獨具。Schmidt 的方法你們可參考 M.P. Do Carmo 所著：Differential Geometry of Curves and Surfaces, 1976 Printice Hall, P.33-35。我在這裡將利用例 2. 來分析這個問題。

分析：

1. 設 ∂A 爲片段平滑 (piecewise smooth)
   依弧長定義，$\exists\ \partial A$ 上的分割 $\mathbf{P}_1 \subset \mathbf{P}_2 \subset \mathbf{P}_3 \subset \cdots$，$\mathbf{P}_n = \{\mathbf{x}_{n,1}, \mathbf{x}_{n,2}, \cdots, \mathbf{x}_{n,n_k}\}$, $\|\mathbf{P}_n\| = \max l_i \to 0$ 當 $n \to \infty$，$i = 1, 2, \cdots, n_k$，其中 $l_i = |\mathbf{x}_{n,i} - \mathbf{x}_{n,i+1}|$，$i = 1, \cdots, n_k$, $\mathbf{x}_{n,n_k+1} = \mathbf{x}_{n,1}$，使 $L_n = \sum_{i=1}^{n_k} l_i \nearrow L$ 當 $n \to \infty$

2. 令 A_n 表由 $\mathbf{P}_n$ 所決定的多邊形，$l_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 給定，根據例 2.，當多邊形的各頂點共圓時，有最大面積，設此多邊形爲 B_n, 我們有
$$|A_n| \le |B_n| \ \forall\ n$$

3. $\mathbf{P}_n \subset \mathbf{P}_{n+1} \Rightarrow |B_n| \le |B_{n+1}| \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |B_n|$ 存在。

4. $\mathbf{P}_n \to 0$ 且 $|\partial B_n| = L_n \to L$ 當 $n \to \infty$

   $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |B_n| = |B|$，$|B|$ 爲以 L 爲邊界的圓盤。

   <u>理由</u>：(以下所討論到的圓，圓心都在 $\mathbf{O}$ 點)

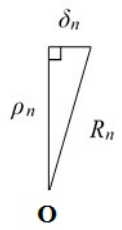
   (i) 給定 $\varepsilon > 0$, $\exists\ N$ 使 $L_n < L - \varepsilon$, 當 $n > N$

   令 B_ε 爲以 $L - \varepsilon$ 爲邊界的圓盤，其半徑 $R_\varepsilon = \dfrac{L-\varepsilon}{2\pi}$

   設 Γ_n 爲 B_n 所共之圓，其半徑爲 R_n，則
$$2\pi R_n = |\Gamma_n| > L_n > L - \varepsilon$$

   $\therefore R_n > R_\varepsilon$ 當 $n > N$

   令 $2\delta_n = \|\mathbf{P}_n\|, \rho_n = \partial B_n$ 到原點的距離，則
$$\rho_n^2 + \delta_n^2 = R_n^2 > R_\varepsilon^2$$



$\delta_n \to 0$ 當 $n \to \infty \Rightarrow \rho_n > R_\varepsilon$ 當 n 夠大
$\Rightarrow B_\varepsilon \subset B_n$, 當 n 夠大

$\therefore |B_n| > |B_\varepsilon| = \dfrac{(L-\varepsilon)^2}{4\pi}$ 當 n 夠大
ε 任意，故 $\lim\limits_{n\to\infty} |B_n| \geq \dfrac{L^2}{4\pi} = |B|$

(ii) 又 $|B_n| \leq \pi R_n^2 = \pi(\rho_n^2 + \delta_n^2)$
$2\pi\rho_n < |\partial B_n| = L_n < L$ (Remark 1)
$\delta_n \to 0$ 當 $n \to \infty$

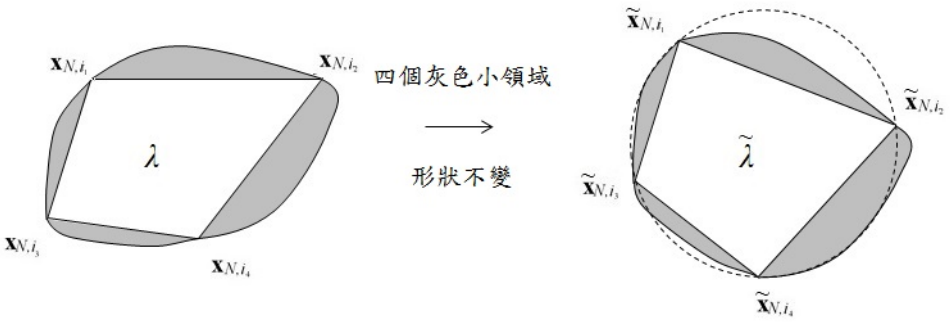
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |B_n| = \lim_{n\to\infty} \pi\rho_n^2 \leq \pi \cdot \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 = |B|$$

(i)(ii)$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |B_n| = |B|$

5. $|A| = \lim\limits_{n\to\infty} |A_n| \leq \lim\limits_{n\to\infty} |B_n| = |B| = \dfrac{L^2}{4\pi}$
6. 等號成立 $\Leftrightarrow$ A 爲圓盤

理由：若 A 非圓盤，則 $\exists\, N$ 使 $\mathbf{P}_N$ 不共圓
$\Rightarrow \exists\, i_1, i_2, i_3, i_4,\ 0 \leq i_j \leq n_k, j = 1,2,3,4$ 使 $\mathbf{x}_{N,i_1}, \mathbf{x}_{N,i_2}, \mathbf{x}_{N,i_3}, \mathbf{x}_{N,i_4}$ 不共圓

如圖，在不改變四邊形邊長的情形下，使共圓，得新的四邊形 $\mathbf{x}_{\tilde{N},i_1}, \mathbf{x}_{\tilde{N},i_2}, \mathbf{x}_{\tilde{N},i_3}, \mathbf{x}_{\tilde{N},i_4}$



設 $\lambda, \tilde{\lambda}$ 分別表這兩個四邊形面積，並設在此操作下，A 變成 $\tilde{A}$，則

$$|\tilde{A}| - |A| = \tilde{\lambda} - \lambda = \text{定值} > 0$$

設 $\tilde{A}_n$ 爲 $\mathbf{P}_n$ 對 $\tilde{A}$ 所相應之多邊形，根據上述分析，

$$|\tilde{A}| = \lim_{n\to\infty} |\tilde{A}_n| \leq \lim_{n\to\infty} |B_n| = |B| = \frac{L^2}{4\pi}$$

而 $A < \tilde{A} \leq \dfrac{L^2}{4\pi}$，故有 $L^2 < 4\pi A$，等號不成立！

反之，若 A 爲圓盤，等號成立，當然。

Remark:

1. 由於 $\theta < \tan\theta,\ \forall\ 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$，故

$$\text{圓之周長} < \text{外切多邊形之周長}$$

故若圓包含於某多邊形內，則有：

$$\text{圓之周長} < \text{此多邊形之周長}$$

因爲你恆可以將多邊形各邊平行內縮，使其外切於圓，而平行內縮後，多邊形的邊長變小了。

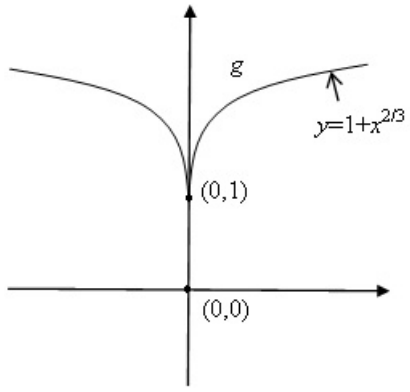
2. 上面對等周界問題的分析，應該是一個新的嘗試，但此方法無法推廣到 $\mathbb{R}^3$，有關等周界問題的介紹，同學可參考：
Courant and Robbins: What is mathematics

如欲更深入，可參考；
R.Ossermann: The isoperimetric inequality. Bulletin of the American Mathematical society Vol. 84, No. 6, P. 1182∼1238, 1978.
這是一篇很值得一讀的文章。

例 **4.** 求曲線 $g(x,y) = x^2 - (y-1)^3 = 0$ 與原點間的最短距離。

分析：

1. $g(x,y) = 0$ 的圖形大致如下：



顯然，極小點發生在 $(0,1)$，最小值爲 1。

2. 令 $f(x,y)=x^2+y^2$，依題意：

$$\text{欲在 } g(x,y)=0 \text{ 的條件下求 } f \text{ 的極值。}$$

依 Lagrange 乘子法：

令 $L(x,y)=x^2+y^2-\lambda[x^2-(y-1)^3]$，解

$$\begin{cases} L_x &= 2x-2\lambda x &= 0 \cdots (1) \\ L_y &= 2y+3\lambda(y-1)^2 &= 0 \cdots (2) \\ & x^2-(y-1)^3 &= 0 \cdots (3) \end{cases}$$

由 (1)，$x(1-\lambda)=0 \Rightarrow x=0$ 或 $\lambda=1$

(i) $x=0$，代入 (3) 式，得 $y=1$，但 $y=1$ 並非 (2) 式之解。

(ii) $\lambda=1,(2) \Rightarrow 3y^2-4y+3=0$ 無實數解。

顯然，極小點 $(0,1)$ 無法由 (1)(2)(3) 式解出！

怎麼會這樣？明明是極值點，可是 Lagrange 乘子法解不出來！

同學請回想 Lagrange 乘子法是怎麼導出來的！

它要求 g 的 0 等高線 Γ 及 f 的 k 等高線 C_k 在極值點 P 附近 smooth，可是我們現在這個 Γ，在 $P(0,1)$ 附近並不 smooth，事實上，

$$\nabla g(0,1)=0$$

Lagrange 的推論：$\exists\ \lambda$ 使 $\nabla f(P)=\lambda\nabla g(P)$ 並不成立！

(第十章全文完)

102學年度高等微積分(下) 習題十

1. (a) 過曲線$\Gamma:\{(x,y)|f(x,y)=0\}$ 上一點$P(x_0,y_0)$作切線。試證切線方程式爲：$(x-x_0)f_x(x_0,y_0)+(y-y_0)f_y(x_0,y_0)=0$。
   (b) 過曲面$S:\{(x,y,z)|f(x,y,z)=0\}$ 上一點$P(x_0,y_0,z_0)$作切線。試證切平面方程式爲：$(x-x_0)f_x(x_0,y_0,z_0)+(y-y_0)f_y(x_0,y_0,z_0)+(z-z_0)f_z(x_0,y_0,z_0)=0$。
   (c) 請寫出$\mathbb{R}^n$中相應的公式。

2. $T:(x,y)\to(u,v)$爲x,y平面到u,v平面的C^1寫像，其反函數$T^{-1}:(u,v)\to(x,y)$存在，令J_T及$J_{T^{-1}}$分別表它們的Jacobian。試證：$J_T(x,y)\cdot J_{T^{-1}}(u,v)=1$ (此結論在$\mathbb{R}^n$中也成立)。
   Remark：$T^{-1}\in C^1$，根據反函數定理，我們將於第十五章證明之。

3. (a) 試證明曲線$x^2-y^2=\xi$及$xy=\eta$相互正交$\forall\xi,\eta$。
   (b) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$。若$f$的一階偏導數連續且滿足$xf_x-yf_y=0\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$，試證明：$f(x,y)=g(xy)$，其中$g\in C^1(\mathbb{R})$。

4. $a>b>0$，給定$(x,y)\in\mathbb{R}^2$，方程式$\dfrac{x^2}{a-t}+\dfrac{y^2}{b-t}=1$爲$t$的二次式，設其二根爲$u,v$，則$u=u(x,y),v=v(x,y)$爲$x,y$平面到$u,v$平面的寫像
   (a) 試證：u,v的等高線分別表x,y平面上共焦點的橢圓及雙曲線。
   (b) 試證這些橢圓及雙曲線正交。
   (c) 求$\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$。

5. $f(x,y)=\begin{cases}|xy|^\alpha\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$
   (a) $\alpha=1$，試證：f_x,f_y在$(0,0)$點並不連續。
   (b) 決定α之值使f在$(0,0)$點可微分。

6. (a) 求$\dfrac{x^2+6xy+3y^2}{x^2-xy+y^2}$的極值，$(x,y)\in\mathbb{R}^2$
   (b) $f(x,y)=x^2+2x-y^2$，$D=\{(x,y)|x^2+4y^2\le4\}$，求f在D上的最大最小值
   (c) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$，$D=\{(x,y)||x|+|y|\le2\}$，求f在D上的最大最小值
   (d) $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$，$D=[-1,1]\times[-1,1]\times[-1,1]$，求$f$在$D$上的最大最小值

7. 定義$Q(x_1,x_2,x_3)=\alpha_{11}x_1^2+\alpha_{22}x_2^2+\alpha_{33}x_3^2+2\alpha_{12}x_1x_2+2\alpha_{23}x_2x_3+2\alpha_{31}x_3x_1$，令$\Delta_1=\alpha_{11}$、$\Delta_2=\begin{vmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}\end{vmatrix}$、$\Delta_3=\begin{vmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\\\alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{vmatrix}$。試證：$Q(x_1,x_2,x_3)>0\ \forall x_1,x_2,x_3\Leftrightarrow\Delta_1>0$、$\Delta_2>0$、$\Delta_3>0$。

8. (a) $f\in C^2(a-\delta,a+\delta)$，$|h|<\delta$，依均值定理，$f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)\cdot h$，$0<\theta<1$，$\theta=\theta(h)$。若$f''(a)\neq0$，試求$\lim_{h\to0}\theta$之值 (提示：Taylor展開至二階)。
   (b) 若$f''(a)=0$，上述推論並不正確，試舉一例。

9. (a) 在單位圓周上任取三點A, B, C作三角形，求ΔABC面積的最大值，此時相應之三角形爲何？
(b) 在橢圓$\dfrac{x^2}{2^2}+y^2=1$上，任取三點A, B, C作三角形，求ΔABC面積的最大值，此時相應之三角形爲何？

10. (a) 求單位圓之諸外切四邊形面積的最小值，此時相應之四邊形爲何？
(b) 求橢圓$\dfrac{x^2}{2^2}+y^2=1$之諸外切四邊形面積的最小值，此時相應之四邊形又如何？

11. (a) 橢圓上諸平行弦中點共線，試證之。
(b) 橢球$E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leq 1$，被一組平行平面$L_t$所截，令$A_t=E\cap L_t$，$P_t$爲$A_t$的重心。試證：$P_t$共線$\forall t$。

12. (a) 求內接於橢球$x^2+\dfrac{y^2}{2^2}+\dfrac{z^2}{3^2}=1$的諸四面體體積之最大值，其相應之形狀爲何？
(b) 求外切於上述橢球的諸四面體體積之最小值，其相應之形狀爲何？

13. 橢圓$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$包含圓$(x-1)^2+y^2=1$。求$a, b$使橢圓面積最小。

14. 過橢圓$5x^2-6xy+5y^2=4$上一點作切線L，令ρ表原點到L的最短距離，求ρ的最大、最小值。

15. 過橢球$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$上一點作切平面，設切平面與三座標軸之截距分別爲$A, B, C$，求
(a) $A+B+C$的最小值。
(b) $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$的最小值。

16. (a) 試設計一物體Ω，使Ω對三個座標平面的正投影分別爲圓盤、正方形、三角形。如欲使三角形爲正三角形，辦得到嗎？
(b) Ω爲空間中一物體，Ω對任意平面的正投影恆爲圓盤，問Ω爲何物？

17. (*) (a) $L_i: a_ix_1+b_ix_2+c_ix_3+d_ix_4=e_i$，$i=1,2,\cdots k$，表$\mathbb{R}^4$中$k$個超平面，諸$L_i$要圍一有界領域，問$k$至少爲何？
(b) k既定，這些L_i"外切"於"球"$S: x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1$，求$\Omega$的最小"體積"。
(記得那句老話：若見諸相非相，即見如來。)

18. 試證：
(a) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$的k等高線恆以$x+y+1=0$爲漸近線。
(b) $g(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$的$k$等溫面恆以$x+y+z=1$爲其漸近面。

19. 已知三次方程式$x^3+px+q=0$，判別式$D=\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^2$，當$D<0$有三相異實根，$D=0$有二實重根及另一實根(含三重根)，$D>0$有一實根二複根。據此，欲了解函數$z=x^3+y^3-3xy$的圖形：
(a) 試就$x=0, y=0, y=x$分別繪z的圖形。
(b) 當$z=0$時，$x^3+y^3-3xy=0$即所謂的Descastes葉形線(Folium of Descartes)，試繪其圖形。
(c) 試就$z=-\dfrac{1}{2}, -1, -2$及$z=1,2,3$簡繪z的等高線

20. (黃氏不等式) $u, v \in C^1(\Omega)$，$\Omega \subset \mathbb{R}^n$，open region。試證：$(Tu - Tv) \cdot (Du - Dv) \geq \dfrac{\sqrt{1+||Du||^2} + \sqrt{1+||Dv||^2}}{2} ||Tu - Tv||^2 \geq ||Tu - Tv||^2$，其中$Du$表示$u$的梯度向量、$Tu = \dfrac{Du}{\sqrt{1+||Du||^2}}$。
Remark: 證明這個不等式不難，發現它則需要才華，你們的學長J. F. Huang (1985台大Ph.D) 發現此不等式，利用它解決了無界域上最小曲面(Minimal Surface)的唯一性問題，是篇擲地有聲的論文，值得喝采。

21. $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt,\ x \geq 0$
(a) 試證：$f \downarrow$ strictly on $[0, \infty)$。
(b) 問：f是否strictly convex on $[0, \infty)$？
Remark：$g(x) = e^{x^2} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$也具(a)，(b)之性質。仿Komatzu估計，可找到兩雙曲線把g夾住，從而導出之。

22. (*) $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \dfrac{1}{x} & ,\ x \neq 0 \\ 0 & ,\ x = 0 \end{cases}$，$0 < \alpha < 2$。試證：$|f(x) - f(y)| < K|x - y|^{\frac{\alpha}{2}}\ \forall x, y \in [0, 1]$，其中$K$是常數。

23. (a) 給定周長$l > 0$，欲在上半平面上圈地，使所圈土地面積最大，問應如何劃圈？
(b) 給定周長$l > 0$，欲以拋物線$y = x^2$，$x \in \mathbb{R}$爲界，在平面上圈地，使所圈土地面積最大，問應如何劃圈？

24. (a) $\Gamma = \{(x, y) | y = x^2, x \geq 0\}$，問：是否存在$P, Q \in \Gamma$，使過$P, Q$二點的圓垂直於$\Gamma$？
(b) (*) 給定周長l，欲以Γ爲界，在平面上圈地，使所圈土地面積最大，問應如何劃圈？

25. (*) 在單位正方形的土地上築籬圈地，設籬笆總長度$l < 4$，欲使所圈面積最大，問應如何築法？(註：籬笆必須是封閉的)

102 學年度台灣大學數學系高等微積分下
由陳金次教授製作，以創用 CC 姓名標示-
非商業性-禁止改作 3.0 台灣 授權條款釋出

Chapter 11

再談 Riemann 積分

11.1 積分的回顧

a. Riemann 的觀點

設 f 爲定義於 $[a,b]$ 上的實函數。

$P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ 爲 $[a,b]$ 上的一分割，

令 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，$\|P\| = \max\limits_{i=1,2,\cdots,n} \Delta x_i$ (the mesh of P)

任取 $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$，考慮

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$$

稱爲 f 的一個 Riemann sum。

Riemann 說：若存在一實數 A 滿足：

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \text{ 使得 } \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i - A\right| < \epsilon,\ \text{當} \|P\| < \delta \tag{1}$$

那麼稱 f 在 $[a,b]$ 上可積分，那個 A 就以 $(R)\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ 表示之，

稱爲 f 在 $[a,b]$ 上的 Riemann 積分。

Remark:

1. 根據 (1)，對 $\epsilon = 1$, $\exists\, \delta$ 使

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i\right| < A + 1,\ \text{當} \|P\| < \delta$$

因此 $f(t_i)$ 不可以任意大，$\forall\, t_i \in [x_{i-1}, x_i],\ i = 1, 2, \cdots$

換言之，f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可積分 $\Rightarrow f$ 在 $[a, b]$ 上有界。

2. (1) 式中的 A 是唯一的，不在話下。

3. 任取 $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$, (1) $\Rightarrow \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,$ 使

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\Delta x_i \right| < \epsilon,\ \text{當} \|P\| < \delta$$

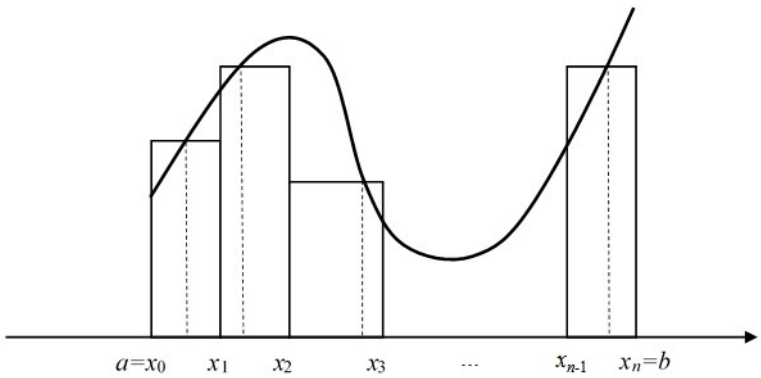


圖 11-1 Riemann Sum

b. Darboux 的觀點

設 f 爲定義於 $[a, b]$ 上的有界實函數。

$P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ 爲 $[a, b]$ 上的一分割，

令 $M_i = \sup\limits_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x),\ m_i = \inf\limits_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)$，考慮

$U(P, f) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$, 盈和 (Upper sum)，及

$L(P, f) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$, 虧和 (Lower sum)，並令

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_P U(P, f)$$
$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_P L(P, f)$$

分別稱爲 f 在 $[a, b]$ 上的上積分 (Upper Integral) 和下積分 (Lower Integral)

若 $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$，我們稱 f 在 $[a,b]$ 上 Darboux 可積分，以 $(D)\int_a^b f(x)dx$ 表此共同值，稱爲 f 在 $[a,b]$ 上的 Darboux 積分。

Remark:

1. Riemann(1826∼1866)，Darboux(1842∼1917)，Riemann 提出他的積分觀點，約在 1854 年，此時實數系的建構還沒誕生，只能這樣處理。Darboux 的觀點約在 1870 年代提出，此時實數系的建構已經完成，實數系具完備性，上面的 M_i, m_i 存在，盈和、虧和可定義。

   處理積分問題，Darboux 的方法比較簡潔，一般採用之，我們第四章中直接稱它爲 Riemann 積分，因爲 $(R)\int_a^b f(x)dx = (D)\int_a^b f(x)dx$，這是我們下面要証明的定理。

2. $P_1 \subset P_2$，則

$$U(P_2, f) \le U(P_1, f)$$
$$L(P_2, f) \ge L(P_1, f)$$

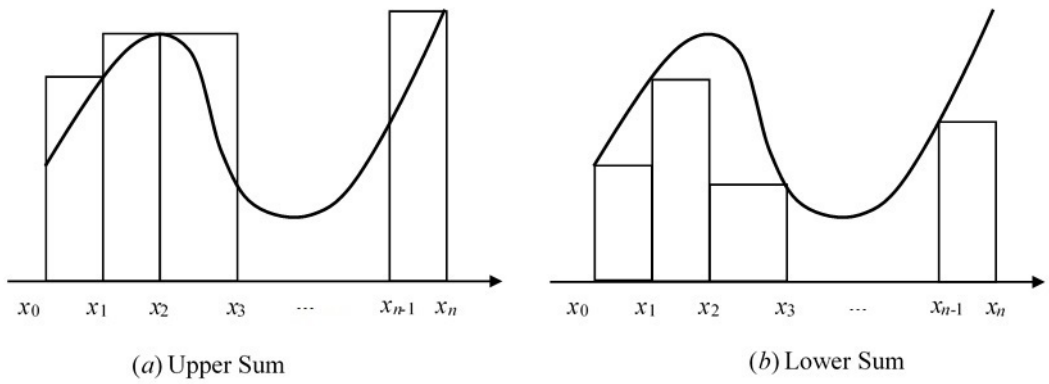


圖 11-2

<u>定理 **11-1**</u> f 在 $[a,b]$ 上 Darboux 可積分 $\Leftrightarrow$ $\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, P,$ 使

$$U(P, f) - L(P, f) < \epsilon$$

這個定理於第四章中証過，因爲簡單而重要，在此再次引述之。

c. Riemann 積分 =Darboux 積分

<u>定理 **11-2**</u> 設 f 爲定義於 $[a,b]$ 上的有界實函數，則 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分 $\Leftrightarrow$ f 在 $[a,b]$ 上 Darboux 可積分，且

$$(R)\int_a^b f(x)dx = (D)\int_a^b f(x)dx$$

在証明這個定理前，我們先引述下面一個引理，其對 $(D) \Rightarrow (R)$ 是個關鍵的鑰匙。

<u>Lemma 11-1</u> 設 f 爲定義於 $[a,b]$ 上的有界實函數，則 $\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ \delta$ 使

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx - \epsilon < L(P,f),\ U(P,f) < \overline{\int_a^b} f(x)f(x)dx + \epsilon,\ \text{當}\|P\| < \delta$$

分析：

1. 給定 $\epsilon > 0$，欲証 $\exists\ \delta_1 > 0$ 使 $U(P,f) < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \epsilon,\ \text{當}\|P\| < \delta_1$。
2. 依 $\overline{\int_a^b}$ 的定義，$\exists\ P_0$ 使 $U(P_0,f) < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \dfrac{\epsilon}{2}$

   令 $P_0 : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,\ \lambda = \min \Delta x_i$

   考慮 $\delta_1 < \lambda$，δ_1 待定，

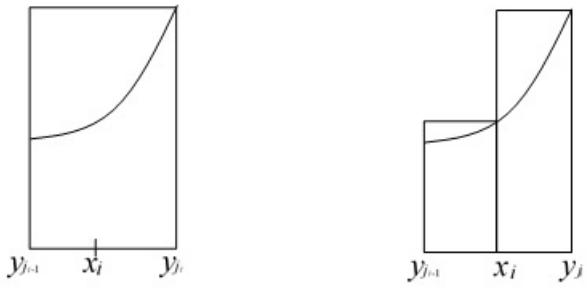
   對 $\|P\| < \delta_1, P : a = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_m = b,\ m > n$，令 $P' = P \cup P_0$，則

   $$U(P',f) < U(P_0,f) < \int_a^b f(x)dx + \frac{\epsilon}{2}$$

3. $U(P,f) - U(P',f) < \dfrac{\epsilon}{2}$，當 δ_1 夠小，

   理由：設 $x_i \in [y_{j_i-1}, y_{j_i}] = I_{j_i}$，如圖所示

   $U(P,f)$ 和 $U(P',f)$ 在其他非 I_{j_i} 的區間上，其盈和同，而在 I_{j_i} 上，其盈和如圖所示：



(a) $U(P,f)$在 I_{j_i}上　　(b) $U(P',f)$在 I_{j_i}上

設 $|f(x)| < M,\ \forall\ x \in [a,b]$，則

$$U(P,f) - U(P',f) \le \sum_{i=1}^{n} 2M \cdot |\Delta y_{j_i}| < 2nM \cdot \delta_1 < \frac{\epsilon}{2},\ 當 \delta_1 < \frac{\epsilon}{4nM}$$

故 $U(P,f) < U(P',f) + \dfrac{\epsilon}{2} < \displaystyle\int_a^b f(x)dx + \epsilon,\ 當 \|P\| < \delta_1$

4. 同理，$\exists\ \delta_2$ 使

$$L(P,f) > \int_a^b f(x)dx - \epsilon,\ 當 \|P\| < \delta_2$$

令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ 即爲所求。

<u>定理 **11-2**</u> 的証明：

1. $(R) \Rightarrow (D)$

分析：f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分，給定 $\epsilon > 0\ \exists\ \delta$, 使

$$|\sum f(t_i)\Delta x_i - \sum f(s_i)\Delta x_i| < \frac{\epsilon}{2},\ 當 \|P\| < \delta$$

上式對任意 $t_i, s_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 成立。固定 P，於 $[x_{i-1}, x_i]$ 中分別對 t_i 取 sup，對 s_i 取 inf，得

$$|\sum M_i \Delta x_i - \sum m_i \Delta x_i| \le \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

依定理 10-1，知 f 在 $[a,b]$ 上 Darboux 可積分。

2. $(D) \Rightarrow (R)$

依 Lemma，$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ \delta$, 使

$$(D)\int_a^b f(x)dx - \epsilon < L(P,f) < \sum f(t_i)\Delta x_i < U(P,f) < (D)\int_a^b f(x)dx + \epsilon,\ 當 \|P\| < \delta$$

即

$$\left|\sum f(t_i)\Delta x_i - (D)\int_a^b f(x)dx\right| < \epsilon,\ 當 \|P\| < \delta$$

故 $(R)\displaystyle\int_a^b f(x)dx = (D)\int_a^b f(x)dx$

11.2 Riemann 積分的幾個基本性質

<u>定理 **11-3**</u> 設 f, g 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分，則

(a) $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx,\ \forall\ k \in \mathbb{R}$

(b) $a < c < b$，則

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

(c) $f+g$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分，且

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

(d) $f(x)g(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分。

以上 (a)(b)(c) 的証明留給同學當習題，在此僅就 (d) 說明之。

分析：

1. 設 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 爲 $[a,b]$ 上的一分割，$M_i(f\cdot g)$ 與 $M_i(f)$ 及 $M_i(g)$、$m_i(f\cdot g)$ 與 $m_i(f)$ 及 $m_i(g)$ 之間實在看不出有任何必然關係，怎麼辦？

2. 窮則變，變則通，不妨看最簡單的情形：$f=g$，$M_i(f^2)$ 與 $M_i(f)^2$、$m_i(f^2)$ 與 $m_i(f)^2$，有必然的關係嗎？

3. 還是看不出來，不過當 $f(x) > 0\ \forall\ x \in [a,b]$ 時，則有 $M_i(f^2) = M_i(f)^2, m_i(f^2) = m_i(f)^2$，於是

$$\begin{aligned} U(P,f^2) - L(P,f^2) &= \sum [M_i(f^2) - m_i(f^2)]\Delta x_i \\ &= \sum [(M_i(f))^2 - (m_i(f))^2]\Delta x_i \\ &\le 2M \sum [M_i(f) - m_i(f)]\Delta x_i,\ (\text{設}|f(x)| < M,\ \forall\ x \in [a,b]) \\ &= 2M[U(P,f) - L(P,f)] \end{aligned}$$

   f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分，依定理 10-1，$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ P$ 使 $U(P,f) - L(P,f) < \dfrac{\epsilon}{2M}$ $\Rightarrow U(P,f^2) - L(P,f^2) < \epsilon$，故 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分 (定理 10-1)

4. 對一般的有界函數 f，$\exists\ k$ 使 $f(x) + k > 0\ \forall\ x \in [a,b]$. 據 3.，$f+k$ Riemann 可積分 $\Rightarrow (f+k)^2$ Riemann 可積分，而 $(f+k)^2 = f^2 + 2kf + k^2$，$(f+k)^2,\ kf,\ k^2$ 皆可積分，故 f^2 可積分。

5. f, g 可積分 $\Rightarrow f+g$ 可積分 $\Rightarrow (f+g)^2$ 可積分，而 $(f+g)^2 = f^2 + 2f\cdot g + g^2$，$(f+g)^2,\ f^2,\ g^2$ 皆可積分，故 $f\cdot g$ 可積分。

<u>定理 **11-4**</u> f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分，Range of $f \subset [c,d]$，g 在 $[c,d]$ 上連續，則 $g(f(x))$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分。

分析：

1. 先假設 g' 存在，且在 $[c,d]$ 上連續，令 $K = \max\limits_{y\in[c,d]} |g'(y)|$

   設 P 爲 $[a,b]$ 上一分割，$P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，則

$$\begin{aligned} |\sum [g(f(t_i))\Delta x_i - g(f(s_i))]\Delta x_i| &\le \sum |g'(y_i)[f(t_i) - f(s_i)]|\Delta x_i \\ &\le K \sum |f(t_i) - f(s_i)|\Delta x_i \\ &< K \sum (M_i(f) - m_i(f))\Delta x_i \\ &= K[U(P,f) - L(P,f)] \end{aligned}$$

2. 上式分別於 $[x_{i-1}, x_i]$ 中對 t_i 取 sup，對 s_i 取 inf，得

$$\sum [M_i(g \circ f) - m_i(g \circ f)]\Delta x_i \leq K[U(P, f) - L(P, f)]$$

即 $U(P, g \circ f) - L(P, g \circ f) \leq K[U(P, f) - L(P, f)]$.

3. f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可積分，給定 $\epsilon > 0$, $\exists\, P$ 使

$$U(P, f) - L(P, f) < \frac{\epsilon}{K}$$

$\Rightarrow U(P, g \circ f) - L(P, g \circ f) < \epsilon$，故 $g \circ f$ 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可積分。

4. 對 $g \in C[c, d]$，給定 $\epsilon' > 0$, $\exists\, h \in C^1[c, d]$, 使 $|g(y) - h(y)| < \epsilon'$ (請想一想)

對此 ϵ'，根據 3.，$\exists\, P$ 使 $U(P, h \circ f) - L(P, h \circ f) < \epsilon'$，於是

$$\begin{aligned}
&|\sum g(f(t_i))\Delta x_i - \sum g(f(s_i))\Delta x_i| \\
&\leq \sum |g(f(t_i)) - h(f(t_i))|\Delta x_i + |\sum [h(f(t_i))\Delta x_i - h(f(s_i))\Delta x_i]| + \sum |h(f(s_i)) - h(f(s_i))|\Delta x_i \\
&= (I) + (II) + (III)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(I), (III) \leq \epsilon' \sum \Delta x_i = \epsilon'(b - a) \\
&(II) < U(P, h \circ f) - L(P, h \circ f) < \epsilon'
\end{aligned}$$

故

$$|\sum g(f(t_i))\Delta x_i - \sum g(f(s_i))\Delta x_i| < [2(b - a) + 1]\epsilon' < \frac{\epsilon}{2}$$

取 $\epsilon' = \dfrac{\epsilon}{2[2(b - a) + 1]}$

5. 上式分別對每個 t_i 取 sup，對 s_i 取 inf，得

$$U(P, g \circ f) - L(P, g \circ f) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

故 $g \circ f$ 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可積分。

<u>系</u> f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可積分，則 $|f|$ 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可積分。

<u>定理 **11-5**</u> f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可積分，

令 $f^+(x) = \begin{cases} f(x) & 若 f(x) > 0 \\ 0 & 若 f(x) \leq 0 \end{cases}$，$f^-(x) = \begin{cases} 0 & 若 f(x) > 0 \\ -f(x) & 若 f(x) \leq 0 \end{cases}$

則 f^+, f^- 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可積分，且

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx$$

說明：$f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f), f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$，$f$ Riemann 可積分 $\Rightarrow |f|$ Riemann 可積分 $\Rightarrow f^+, f^-$ Riemann 可積分。

又 $f = f^+ - f^-$，故

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx$$

在第四章中，我們証明了連續函數的可積性，再次陳述如下：

<u>定理</u> 設 f 在 $[a, b]$ 上連續，則 f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可積分。

我們現在要反問：如果 f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可積分，那麼 f 應該是個什麼樣的函數？習題四中我們看到了這個例子：

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & x\text{是有理數} \\ 0 & x\text{是無理數} \end{cases}$$

這個函數 Riemann 不可積分，因爲它實在太糟糕了，處處不連續。

$$f_2(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & 0 \le x \le 1 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

這個函數 Riemann 可積。注意：它的不連續點只有一個：$x = 0$

$$f_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{p} & x\text{爲}[0,1]\text{中有理數}, x = \frac{q}{p}, p, q\text{互質} \\ 0 & x\text{爲}[0,1]\text{中無理數} \end{cases}$$

這個函數 Riemann 可積分。注意：f_3 在無理點上連續，在有理點上不連續，f_3 的不連續點是可數集。再看下例：

設 E 表 $[0, 1]$ 中的 Cantor set,

$$f_4(x) = \begin{cases} 1 & , x \in E \\ 0 & , x \in [0,1] - E \end{cases}$$

這個函數 Riemann 可積分 (exercise)，注意：E 爲 f 的不連續點集，其測度爲 0。

看來，一個函數在 $[a, b]$ 上 Riemann 可積分，它的不連續點集不能太大，下面這個定理，對 Riemann 可積函數給了一個清楚的描述，在此述而不証，其証明請同學參考任何一本 Real Analysis 的書都必提它。Rudin 的書，第十一章定理 11-33 是個便捷的參考。

<u>定理 **11-6**</u> 設 f 爲定義於 $[a,b]$ 上的有界實函數，則 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分 $\Leftrightarrow$ f 在 $[a,b]$ 上迨連續 (continuous almost everywhere)。

所謂的迨連續是指 f 的不連續點集的 Lebesgue 測度爲 0。

11.3 瑕積分 (Improper Integral)

Riemann 積分只限定義於 $[a,b]$ 上的有界實函數 f

(a) 如果 f 無界呢？例如 $f=\dfrac{1}{\sqrt{x}}, 0<x\leq 1$

(b) 如果領域無界呢？例如 $g(x)=e^{-x}, 0\leq x<\infty$

是否可引進一個概念以定義 f 的積分，

例如 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}, 0<x\leq 1$，依 Riemann 積分的概念，$f$ 在 $(0,1]$ 上的 Riemann 積分不存在，但如果我們考慮 f 在 $[\epsilon,1]$ 上，則

$$\int_{\epsilon}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2(1-\sqrt{\epsilon})\to 2 \text{ 當}\epsilon\to 0$$

因此，我們定義

$$\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\epsilon}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2$$

同理，$g(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上 Riemann 積分不存在，但如果我們考慮 g 在 $[0,N]$ 上，則

$$\int_{0}^{N}e^{-x}dx=1-e^{-N}\to 1 \text{ 當}N\to\infty$$

因此，我們定義

$$\int_{0}^{\infty}e^{-x}dx=\lim_{N\to\infty}\int_{0}^{N}e^{-x}dx=1$$

這類積分統稱爲瑕積分 (Improper Integral)

<u>定義 11-1</u> 設 f 在 $(a,b]$ 上無界，但在 $[a+\epsilon,b]$ 上 Riemann 可積分，若 $\lim\limits_{\epsilon\to 0^+}\displaystyle\int_{a+\epsilon}^{b}f(x)dx$ 存在，定義

$$\int_{a}^{b}f(x)dx=\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{a+\epsilon}^{b}f(x)dx$$

稱爲 f 在 $(a,b]$ 上的瑕積分。

<u>定義 11-2</u> 設 f 定義在 $[a,\infty)$ 上，f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分 $\forall\ b>a$，若 $\lim\limits_{b\to\infty}\displaystyle\int_{a}^{b}f(x)dx$ 存在，定義

$$\int_{a}^{\infty}f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_{a}^{b}f(x)dx$$

對於 $[a,b),(-\infty,b]$ 上的函數，可依上述觀念定義其瑕積分。

例 **1.** $f(x)=\dfrac{1}{x^p},\ 0<x\le 1$, 試定 p 值使 f 在 $(0,1]$ 上瑕可積。

解：

(i) $p\neq 1,\ \displaystyle\int_\epsilon^1 x^{-p}dx=\frac{1}{-p+1}x^{-p+1}\Big|_\epsilon^1\to\begin{cases}\dfrac{1}{1-p} & ,若p<1\\ \infty & ,若p>1\end{cases}$ 當$\epsilon\to 0.$

(ii) $p=1,\ \displaystyle\int_\epsilon^1 x^{-1}dx=\ \ln x\Big|_\epsilon^1=-\ln\epsilon\to\infty,$ 當$\epsilon\to 0.$

故 f 在 $(0,1]$ 上瑕可積 $\Leftrightarrow p<1.$

例 **2.** $f(x)=\dfrac{1}{p},\ 1\le x<\infty$, 試定 p 之值使 f 在 $[1,\infty)$ 上瑕可積

解：

(i) $p\neq 1,\ \displaystyle\int_1^b x^{-p}dx=\frac{1}{-p+1}x^{-p+1}\Big|_1^b\to\begin{cases}\dfrac{1}{p-1} & 若p>1\\ \infty & 若p<1\end{cases}$ 當$b\to\infty$

(ii) $p=1,\ \displaystyle\int_1^b x^{-1}dx=\ \ln x\Big|_1^b=\ln b\to\infty$ 當$b\to\infty.$

故 f 在 $[1,\infty)$ 上瑕可積 $\Leftrightarrow p>1.$

例 **3.** 試判斷下列二積分是否收斂：

(a) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx$ (b) $\displaystyle\int_0^\infty\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$

分析：

1. 如圖，

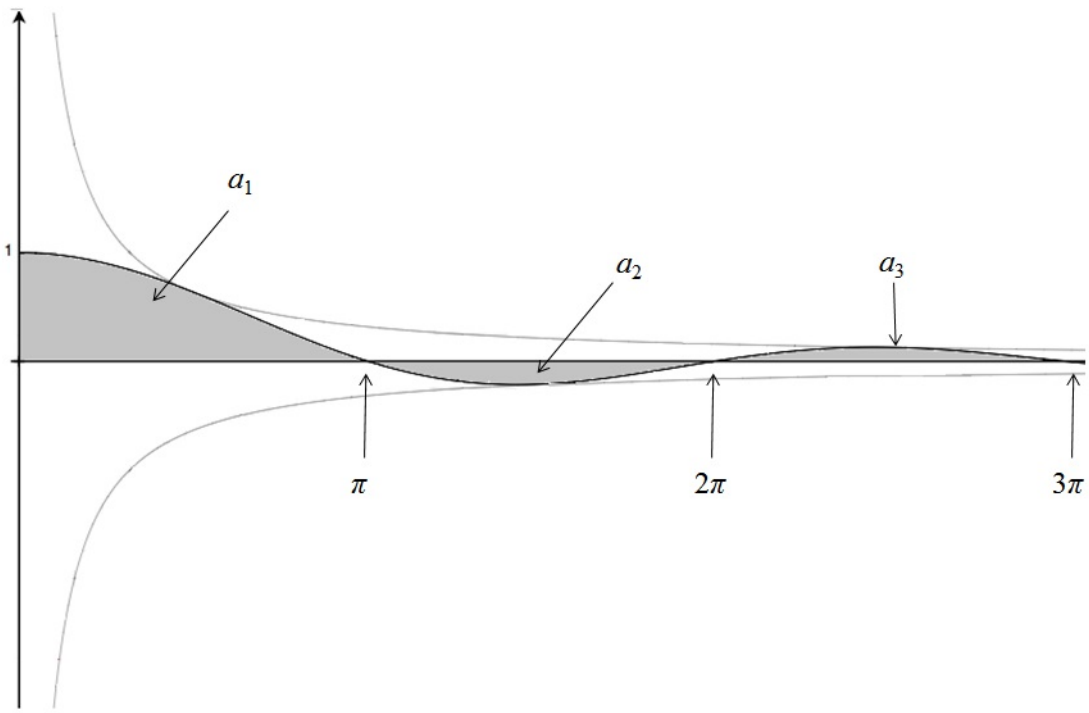


圖 11-4 $y = \dfrac{\sin x}{x}$ 的圖形

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots .$$

其中

$$\begin{aligned} a_n &= \left| \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\sin x}{x} dx \right| = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \\ &\overset{(n>1)}{<} \frac{1}{(n-1)\pi} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin x| dx \\ &= \frac{2}{(n-1)\pi} \to 0 \text{ 當 } n \to \infty \\ \text{又 } a_n &> \frac{1}{n\pi} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin x| dx = \frac{2}{n\pi}, \ \forall\ n = 1, 2, 3, \cdots \end{aligned}$$

故 $a_{n+1} < \dfrac{2}{n\pi} < a_n$，即：$a_n \searrow 0$ 當$n \to \infty$, 依交錯級數收斂判斷定理知 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ 收斂。

2. $\displaystyle\int_0^\infty \left| \frac{\sin nx}{x} \right| dx = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} = \infty$，發散。

Remark: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ 是個有名的瑕積分，收斂歸收斂，其值如何？卻是一個頗具挑戰性的問題。

歷史上有許多不同的方法求其值，其值爲 $\dfrac{\pi}{2}$，我們將於第十四章中見到它。

11.4 Riemann 積分的竅門

庖丁解牛，知其筋脈；魯班刨木，識其紋理。凡事都有竅門，聰明的人能看到事物的竅門，直入問題的本質，從而輕易地解決它。

Riemann 積分有什麼竅門嗎？且看下面的分析：

設 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分，P_n 爲 $[a,b]$ 上一組分割，$\|P_n\| \to 0$ 當$n \to \infty$，

則 $L(P_n, f) \to \int_a^b f(x)dx$ 當$n \to \infty$.

令 $P_n : a = x_{0,n} < x_{1,n} < x_{2,n} < \cdots < x_{k_n,n},\ I_{j,n} = [x_{j-1,n}, x_{j,n}], m_{j,n} = \inf\{f(x)|x \in I_{j,n}\}$

$$\phi_n(x) = \sum_{j=1}^{k_n} m_{j,n}\chi_{I_{j,n}}(x), \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases},\ A \subset \mathbb{R}$$

稱爲 A 的特徵函數 (Characteristic function), ϕ_n 爲 f 的一個 lower function，則

$$\int_a^b \phi_n(x)dx = L(P_n, f) \to \int_a^b f(x)dx \text{ 當} n \to \infty$$

因此，我們要問 f 是否具有某些性質，只要問 ϕ_n 是否具有此性質，此性質是否可以 pass limit 傳遞到 f 上? 而要問 ϕ_n 使否具有此性質，只要看此性質對 $\chi_I,\ I = [\alpha, \beta]$，成立否即可。我稱它爲 Riemann 積分的竅門，許多有關 Riemann 可積函數的特性，可以由此觀察得之。

Remark: 將來你們學 Lebesgue 積分，請記住，Lebesgue 可積函數與 Riemann 可積函數同竅。

<u>定理 **11-7**</u> (Riemann-Lebesgue Lemma)

設 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分，則

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \sin nx\, dx = 0 \tag{*}$$

分析：

1. (*) 式對 $f = \chi_I, I = [\alpha, \beta]$ 成立否？且看：

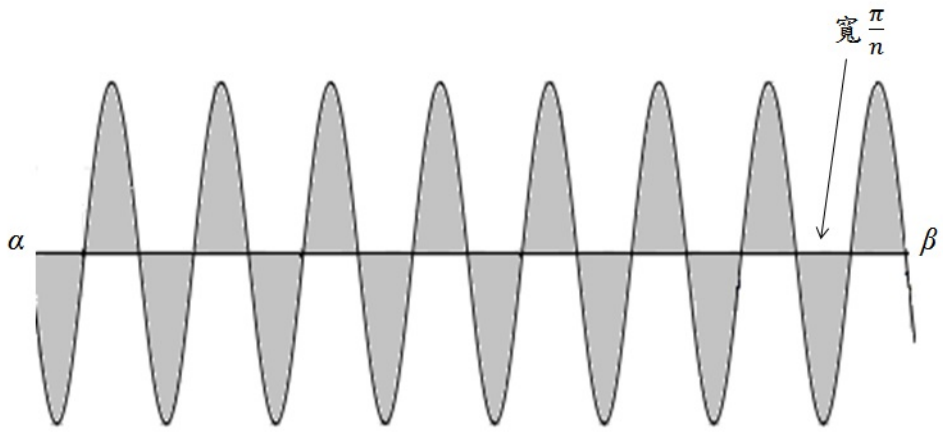


圖 11-5 $\sin nx$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上的震盪

$\sin nx$ 是把 $\sin x$ 的週期壓縮 n 倍，它在 $[\alpha, \beta]$ 上正負擺盪，其積分相互抵消，了不起，留下前後三處無人和它抵消，而這三塊的面積和不超過 $3 \cdot \dfrac{\pi}{n}$，於是

$$\left| \int_a^b \chi_I \sin nx \, dx \right| < \frac{3\pi}{n} \to 0 \text{ 當} n \to \infty.$$

2. 據 1., (*) 式對 step function $\varphi(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} c_j \chi_{I_j}$ 成立

3. f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可積分，$\forall\ \epsilon > 0$, $\exists$ step function φ, $\varphi \leq f$，使 $\displaystyle\int_a^b (f(x) - \varphi(x))dx < \epsilon$，於是

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(x) \sin nx \, dx \right| &\leq \left| \int_a^b (f(x) - \varphi(x)) \sin nx \, dx \right| + \left| \int_a^b \varphi(x) \sin nx \, dx \right| \\
&\leq \int_a^b (f(x) - \varphi(x))dx + \left| \int_a^b \varphi(x) \sin nx \, dx \right| \\
&< \epsilon + \left| \int_a^b \varphi(x) \sin nx \, dx \right|
\end{aligned}$$

令 $n \to \infty$ 得

$$\limsup_{n \to \infty} \left| \int_a^b f(x) \sin nx \, dx \right| \leq \epsilon$$

ϵ 任意，故

$$\limsup_{n \to \infty} \left| \int_a^b f(x) \sin nx \, dx \right| = 0$$

$\therefore$

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f(x) \sin nx \, dx = 0$$

Remark:

1. (*)$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos nx\,dx = 0$

2. 當 $[a,b]=[0,2\pi]$，$a_0=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$, $a_n=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos\ nx\,dx$,
   $b_n=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx$, $n\geq 1$ 稱爲 f 的 Fourier coefficient.

   Riemann Lebesgue Lemma 的內涵即：可積函數的 Fourier coefficient$\to 0$ 當 $n\to\infty$.

   相應物理上弦的震動，第 n 主波的影響隨 n 而式微。

例 **1.** f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分，若 $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0\ \forall\ a\leq\alpha<\beta\leq b$，則 $\int_a^b |f(x)|dx=0$（換言之，f 迨爲 0）

分析：

1. $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0,\ \forall\ [\alpha,\beta]\subset[a,b]$，則

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=0,\ \forall \text{ step function } \varphi$$

2. f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分，$\forall\ \epsilon>0,\ \exists$ step function $\varphi\leq f$ 使

$$\int_a^b (f(x)-\varphi(x))dx<\frac{\epsilon}{M},\ M=\sup_{[a,b]}|f(x)|$$

3.

$$\begin{aligned}\int_a^b f^2(x)dx &= \int_a^b f(x)(f(x)-\varphi(x))dx\\ &\leq \int_a^b |f(x)|(f(x)-\varphi(x))dx\\ &\leq M\cdot\int_a^b (f(x)-\varphi(x))dx<\epsilon\end{aligned}$$

4. ϵ 任意，$\therefore \int_a^b f^2(x)dx=0$，

   而 $\int_a^b |f(x)|dx\leq (b-a)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}=0$ (Cauchy 不等式)

   得証。

例 **2.** $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$，試証：

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h)-f(x)|dx = 0 \tag{*}$$

分析：

1. $(*)$ 式對 $f=\chi_I, I=[\alpha,\beta]$ 顯然成立，因此 $(*)$ 對任意 step function φ 成立。
2. 給定 $\epsilon>0$, $\exists\, N$ 使
$$\int_{|x|>N} |f(x)|dx < \frac{\epsilon}{4}$$
3. f 在 $[-N,N]$ 上 Riemann 可積分，故對任意 $\epsilon>0$, $\exists$ step function $\varphi\le f$，在 $[-N,N]$ 上，使
$$\int_{|x|\le N} (f(x)-\varphi(x))dx < \frac{\epsilon}{4}$$
4. 令 $\varphi(x)=0$, 當 $x>N$，則
$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h)-f(x)|dx \\
&\le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h)-\varphi(x+h)|dx + \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x+h)-\varphi(x)|dx + \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)-\varphi(x)|dx \\
&= 2\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)-\varphi(x)|dx + \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x+h)-\varphi(x)|dx \\
&= 2\left[\int_{|x|>N} |f(x)|dx + \int_{|x|\le N} |f(x)-\varphi(x)|dx\right] + \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x+h)-\varphi(x)|dx \\
&\le 2\left[\frac{\epsilon}{4}+\frac{\epsilon}{4}\right] + \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x+h)-\varphi(x)|dx
\end{aligned}$$

$\therefore\ \limsup_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h)-f(x)|dx \le \epsilon,$
ϵ 任意，$\therefore \limsup_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h)-f(x)|dx = 0$，
故
$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h)-f(x)|dx = 0$$

Remark:

1. f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分，$\forall\ \epsilon>0$, $\exists$ step function $\varphi\le f$ 使
$$\int_a^b (f(x)-\varphi(x))dx < \frac{\epsilon}{2}$$
2. 每一個 step function φ 又可用連續的梯形函數 g, $g\le\varphi$, 來逼近 (如圖所示)，使
$$\int_a^b (\varphi(x)-g(x))dx < \frac{\epsilon}{2}$$

3. 故 f 可以用 g, $g \le f$ 來逼近，使

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx < \epsilon$$

4. 令 $L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f \,\middle|\, \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty \right\}, C_c(\mathbb{R}) = \{g | g\text{在}\mathbb{R}\text{上連續，在某 compact set 之外爲 } 0\}$，

   則 $C_c(\mathbb{R})$ dense in $L^1(\mathbb{R})$. 這個 $C_c(\mathbb{R})$ 稱爲 The space of continuous functions with compact support in $\mathbb{R}$.

5. 例 2 中可採用 $g \in C_c(\mathbb{R}$ 來逼近，$g = 0$ 當 $x > N$，使

$$\int_{|x| \le N} (f(x) - g(x))dx < \frac{\epsilon}{4}$$

   g 在 $[-N, N]$ 上連續 $\Rightarrow$ g 在 $[-N, N]$ 上均勻連續 $\Rightarrow \cdots$，得証。(請同學試著完成它)

11.5 Riemann Stieltjes 積分

A. 遞增函數的 Riemann Stieltjes 積分

設 α 在 $[a, b]$ 上遞增，$P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 爲 $[a, b]$ 上一分割，令 $\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})$，設 f 爲定義於 $[a, b]$ 上的實函數，

令

$$M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x),\ m_i = \lim_{[x_{i-1}, x_i]} f(x),$$
$$U(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, L(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$
$$\overline{\int_a^b} f\, d\alpha = \inf_P U(P, f, \alpha), \underline{\int_a^b} f\, d\alpha = \sup_P L(P, f, \alpha)$$

若 $\overline{\int_a^b} f\, d\alpha = \underline{\int_a^b} f\, d\alpha$，我們稱 f 在 $[a, b]$ 上對 α Riemann Stieltjes 可積分，以 $\int_a^b f\, d\alpha$ 表此共同值，稱 f 爲在 $[a, b]$ 上對 α 的 Riemann Stieltjes 積分。

討論：若 $\alpha \in C^1[a, b]$，則 $\Delta\alpha_i = \alpha'(\xi_i)\Delta x_i,\ x_{i-1} < \xi_i < x_i$
仿定理 11-2，Darboux 積分 $\Leftrightarrow$ Riemann 積分的推論，可得

$$\int_a^b f\, d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx$$

恕我不欲多言。

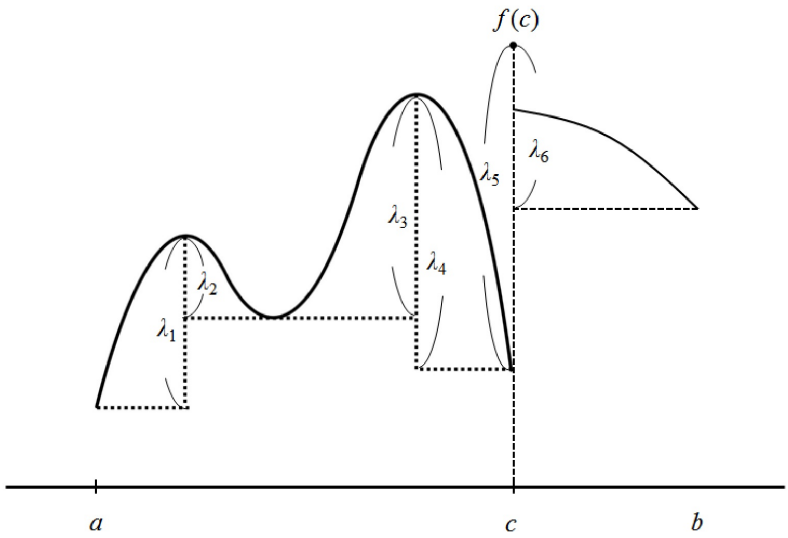
B. 有界變分函數 (Functions of Bounded Variation)

設 f 爲定義於 $[a,b]$ 上的實函數，$P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ 爲 $[a,b]$ 上的分割，令 $\Delta f_i = f(x_i) - f(x_{i-1}), V_a^b(f) = \sup\limits_P \sum\limits_P |\Delta f_i|$

若 $V_a^b(f) < \infty$，我們稱 f 在 $[a,b]$ 上有界變分 (Bounded Variation)，$V_a^b(f)$ 稱爲 f 在 $[a,b]$ 上的總變分 (Total Variation)，以 $f \in B.V.[a,b]$ 表示 f 在 $[a,b]$ 上爲有界變分。

在這一小節裡我們將把 Riemann Stieltjes 積分推廣到 α 爲有界變分函數。

例 **1.** f 在 $[a,b]$ 上遞增，則 $V_a^b(f) = f(b) - f(a)$
例 **2.** 如圖，$V_a^b(f) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6$



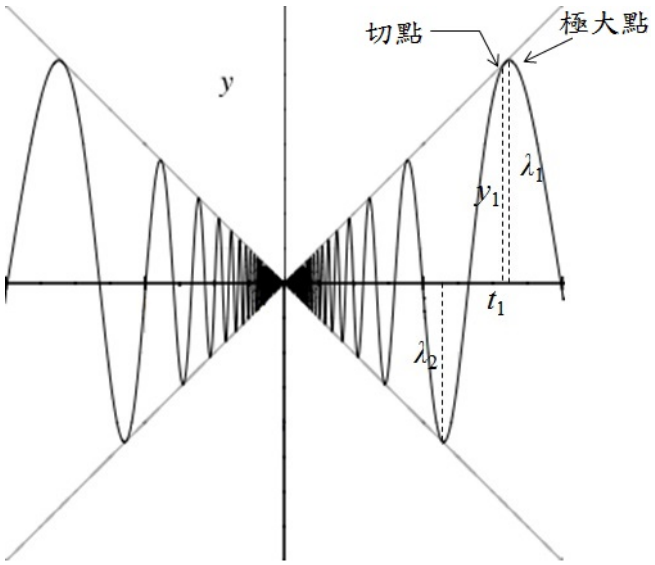
例 **3.** $f(x) = x - [x],\ 0 \le x \le n, V_0^n(x) = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n項} = n$

例 **4.** $f(x) = \dfrac{1}{[x]}, \dfrac{1}{n} \le x \le 1,\ V_{\frac{1}{n}}^1(f) = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n-1項} = n - 1$

(事實上，$f \downarrow$ on $\left[\dfrac{1}{n}, 1\right]$, $V_{\frac{1}{n}}^1(f) = f\left(\dfrac{1}{n}\right) - f(1) = n - 1$.)

例 **5.**

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & 0 \le x \le 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



$\sin\dfrac{1}{x}=0 \Leftrightarrow x=x_n=\dfrac{1}{n\pi},\ n=1,2,3\cdot$

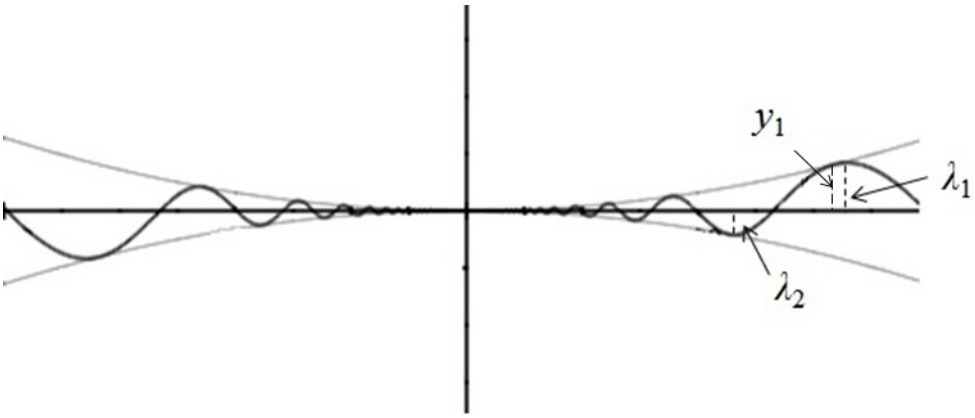
$\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|=1 \Leftrightarrow x=t_n=\dfrac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi},\ n=0,1,2,3,\cdots$

設 f 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的極值爲 $\lambda_n, y_n=|f(t_n)|=t_n=\dfrac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}$ 則 $|\lambda_n|>y_n$

$V_0^1(f)=\sum 2|\lambda_n|>2\sum\dfrac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}=\infty$，故 $f\notin B.V.[0,1]$

例 **6.**

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & 0\le x\le 1 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$



設 f 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的極值爲 λ_n, 令 $y_n=|f(t_n)|=t_n^2=\dfrac{1}{\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right]^2}$

如圖：$|\lambda_2|<y_1$，同理 $|\lambda_{n+1}|<y_n$,

$\sum\limits_{n\ge 2}|\lambda_n|<\sum\limits_{n\ge 1}\dfrac{1}{\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right]^2}<\infty$，故 f 在 $[0,1]$ 上有界變分。

有界變分函數的幾個性質

1. $f \in B.V.[a,b] \Rightarrow f$ 在 $[a,b]$ 上有界。

   說明：任取 $x \in [a,b]$，則 $\{a,x,b\}$ 爲 $[a,b]$ 上之分割，依定義

$$|f(x)-f(a)|+|f(b)-f(x)| < V_a^b(f)$$

   $\Rightarrow$

$$2|f(x)| < |f(a)|+|f(b)| < V_a^b(f),\ \forall\ x \in [a,b]$$

   故 f 在 $[a,b]$ 上有界。

2. $f,g \in B.V.[a,b]$，則
   (a) $f+g \in B.V.[a,b]$，且 $V_a^b(f+g) \le V_a^b(f)+V_a^b(g)$
   (b) $kf \in B.V.[a,b]$，且 $V_a^b(kf) = |k|V_a^b(f)$
   (c) $|f| \in B.V.[a,b]$，且 $V_a^b(|f|) \le V_a^b(f)$
   (d) $f \cdot g \in B.V.[a,b]$，且 $V_a^b(f\cdot g) \le M_f V_a^b(g) + M_g V_a^b(f)$, 其中

$$M_f = \sup_{[a,b]}|f(x)|, M_g = \sup_{[a,b]}|g(x)|$$

   說明：(a)(b)(c) 不在話下，今說明 (d)。

   設 $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ 爲 $[a,b]$ 上的分割，

$$\begin{aligned}\sum \Delta_i(f\cdot g) &= \sum |f(x_i)g(x_i) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})| \\ &\le \sum |f(x_i)|\cdot|g(x_i)-g(x_{i-1})| + \sum |g(x_{i-1})|\cdot|f(x_i)-f(x_{i-1})| \\ &\le M_f \sum |\Delta_i g| + M_g \sum |\Delta_i f| \\ &\le M_f V_a^b(g) + M_g V_a^b(g)\end{aligned}$$

3. $f \in B.V.[a,b]$，Range$(f) \subset [c,d]$, $\varphi \in C^1[c,d] \Rightarrow \varphi \circ f \in B.V.[a,b]$

   說明：$\varphi \in C^1[c,d], P$ 爲 $[a,b]$ 上之分割，

$$\begin{aligned}\sum |\varphi(f(x_i)) - \varphi(f(x_{i-1}))| &= \sum |\varphi'(\xi_i)|\cdot|f(x_i)-f(x_{i-1})| \\ &< M_{\varphi'} \sum |\Delta_i f| \\ &< M_{\varphi'} V_a^b(f)\ \ \forall\ P\end{aligned}$$

   其中 ξ_i 介於 $f(x_i), f(x_{i-1})$ 之間，$M_{\varphi'} = \sup_{[c,d]} \varphi'(y)$
   $\Rightarrow V_a^b(\varphi\circ f) \le M_{\varphi'} V_a^b(f)$
   Remark: 於 3. 中，若只要求 $\varphi \in C[c,d]$，結論不成立。

例如：$f(x)=x, 0\le x\le 1$，$\varphi(y)=\begin{cases} y\sin\dfrac{1}{y}, & y\neq 0 \\ 0, & y=0 \end{cases}$

顯然 φ 在 $[0,1]$ 上連續，但 $(\varphi\circ f)(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & 0\le x\le 1 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

$\varphi\circ f\notin B.V.[0,1]$(例 5.)

4. $f\in B.V.[a,b], c\in(a,b)$，則

$$V_a^b(f)=V_a^c(f)+V_c^b(f)$$

說明：

(i) $\forall\ \epsilon>0,\ \exists\ [a,b]$ 上的分割 P 使

$$V_a^b(f)-\epsilon<\sum_P|\Delta_i f|$$

令 $P'=P\cup\{c\}, P_1=P'\cap[a,c], P_2=P'\cap[c,b]$，我們有

(a) $P\subset P'\Rightarrow\sum\limits_P|\Delta_i f|\le\sum\limits_{P'}|\Delta_i f|$

(b) $\sum\limits_{P'}|\Delta_i f|=\sum\limits_{P_1}|\Delta_i f|+\sum\limits_{P_2}|\Delta_i f|$

故

$$V_a^b(f)-\epsilon\le\sum_{P_1}|\Delta_i f|+\sum_{P_2}|\Delta_i f|<V_a^c(f)+V_c^b(f)$$

ϵ 任意，$\therefore$

$$V_a^b(f)\le V_a^c(f)+V_c^b(f)$$

(ii) 給定 $\epsilon>0,\ \exists\ [a,c]$ 上的分割 P_1 使 $V_a^c(f)-\dfrac{\epsilon}{2}<\sum\limits_{P_1}|\Delta_i f|$,

$\exists\ [c,b]$ 上的分割 P_2 使 $V_c^b(f)-\dfrac{\epsilon}{2}<\sum\limits_{P_2}|\Delta_i f|$

令 $P=P_1\cup P_2$，則 P 爲 $[a,b]$ 上的分割，且

$$\sum_P|\Delta_i f|=\sum_{P_1}|\Delta_i f|+\sum_{P_2}|\Delta_i f|$$

故

$$V_a^c(f)+V_c^b(f)-\epsilon\le\sum_P|\Delta_i f|<V_a^b(f)$$

ϵ 任意，$\therefore$

$$V_a^c(f)+V_c^b(f)\le V_a^b(f)$$

上面第 4 點是下面主要定理的依據：

<u>定理 **11-8**</u> (Main Theorem of B.V. functions)

$f\in B.V.[a,b]\Rightarrow\ \exists\ g,h\ \uparrow\text{on}[a,b]$，使 $f=g-h$.

分析：

1. 令 $g(x) = V_a^x(f)$，則 $f \uparrow$ on $[a, b]$
2. 令 $h(x) = g(x) - f(x)$，對 $x_1 < x_2, x_1, x_2 \in [a, b]$，我們有：

$$h(x_2) - h(x_1) = g(x_2) - g(x_1) - [f(x_2) - f(x_1)] = V_{x_1}^{x_2}(f) - [f(x_2) - f(x_1)] \geq 0$$

$\therefore h \uparrow$ on $[a, b]$

3. $f = g - h$，得証。

C. 有界變分函數的 Riemann Stieltjes 積分

設 $\alpha(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界變分，根據定理 11-8，$\alpha(x) = \alpha_1(x) - \alpha_2(x)$，$\alpha_1, \alpha_2 \nearrow$ on $[a, b]$，於是可定義 f 對 α 的 Riemann Stieltjes 積分：

$$\int_a^b f\, d\alpha = \int_a^b f\, d\alpha_1 - \int_a^b f\, d\alpha_2$$

若 $\alpha \in C^1[a, b]$，我們有：

$$\int_a^b f\, d\alpha = \int_a^b f \cdot \alpha' dx$$

Remark: 上述 $\displaystyle\int_a^b f\, d\alpha$ 的定義牽涉到 well-defined 的問題，若對另一組 $\beta_1, \beta_2 \nearrow$ on $[a, b]$，滿足 $\alpha(x) = \beta_1(x) - \beta_2(x)$，依定義

$$\int_a^b f\, d\alpha = \int_a^b f\, d\beta_1 - \int_a^b f\, d\beta_2$$

它們代表同一個值嗎？

這件事情是對的，上課的時間有限，而要講的題材那麼多，請恕我在此打住。志於道的同學，就當作一個習題吧。

11.6 多變數函數的 Riemann 積分

曲面 $z = f(x, y) \geq 0, (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$，如何求曲面在 Ω 上所圍領域的體積？

Ω 爲空間中一物體，其上一點 (x, y, z) 的密度 $\rho(x, y, z)$ 已知，如何求 Ω 的質量？

這些問題就牽涉到多變數函數的積分。

爲了簡明，以下就以 $\mathbb{R}^2$ 爲例說明之。

A. 定義域爲長方形

設 $K=[a,b]\times[c,d]$，f 爲定義於 K 上的函數

$P_x: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 爲 $[a,b]$ 上一分割，
$P_y: c=y_0<y_1<\cdots<y_n=d$ 爲 $[c,d]$ 上一分割，

則 $P=P_x\times P_y$ 爲 K 上的一分割。

設 $K_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$ 爲第 i,j 塊小長方形，令

$$M_{ij}=\sup_{(x,y)\in K_{ij}} f(x,y), m_{ij}=\inf_{(x,y)\in K_{ij}} f(x,y)$$
$$U(P,f)=\sum M_{ij}\Delta x_i\Delta y_j, L(P,f)=\sum m_{ij}\Delta x_i\Delta y_j$$
$$\overline{\int}_K f(x,y)dxdy=\inf_P U(P,f),$$
$$\underline{\int}_K f(x,y)dxdy=\sup_P L(P,f)$$

若 $\overline{\int}_K f(x,y)dxdy=\underline{\int}_K f(x,y)dxdy$，我們稱 f 在 K 上 Riemann 可積分，

以 $\int_K f(x,y)dxdy$ 表此共同值，稱爲 f 在 K 上的 Riemann 積分。

$\int_K f(x,y)dxdy$ 有時又寫成 $\iint_K f(x,y)dxdy$，表示它是二維的重積分 (Multiple Integral)

B. 定義域非長方形

設 Ω 爲 $\mathbb{R}^2$ 中有界領域，f 爲 Ω 上的有界實函數

a. $f\geq 0$

設 $\Omega\subset[a,b]\times[c,d]=K$, 令 P 爲 K 上一分割，$K=\cup K_{ij}, K_{ij}$ 如前所述

$$\Omega_-=\{K_{ij}|K_{ij}\subset\Omega\}, \Omega_+=\{K_{ij}|K_{ij}\cap\Omega\neq\phi\}$$

令 $f=0$，在 $K-\Omega$ 上，根據 1.，f 在 Ω_- 及 Ω_+ 上其積分可定義，

設 f 在 Ω_- 及 Ω_+ 上可積分，$\forall\ P$，並令

$$\underline{\int}_\Omega f\,dxdy=\sup_P\int_{\Omega_-} f\,dxdy$$
$$\overline{\int}_\Omega f\,dxdy=\inf_P\int_{\Omega_+} f\,dxdy$$

若 $\underline{\int}_{\Omega} f\,dxdy = \overline{\int}_{\Omega} f\,dxdy$，我們稱 f 在 Ω 上 Riemann 可積分，

以 $\int_{\Omega} f\,dxdy$ 表此共同值，稱爲 f 在 Ω 上的 Riemann 積分。

討論：$\underline{\int}_{\Omega} f = \overline{\int}_{\Omega} f$，暗示 $\partial\Omega$ 不能太複雜，而 f 有界。因此，若 $\partial\Omega$ 可以被有窮個小方塊蓋住，而這些小方塊的面積可以任意小，則 $\int_{\Omega_+} f - \int_{\Omega_-} f$ 可以任意小，故

$$\overline{\int}_{\Omega} f = \underline{\int}_{\Omega} f$$

若它們存在。這樣的領域 Ω 稱爲 Jordan Region.

<u>定義 11-3</u> 稱 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 爲 Jordan region，若對任意 $\epsilon > 0$，恆存在 $\mathbb{R}^n$ 中有窮個長方體 $K_1, K_2, \cdots, K_n$ 使 $\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{N} K_i$，且 $\sum_{i=1}^{N} |K_i| < \epsilon$

換言之，

$$\sup_P |\Omega_-(P)| = \inf_P |\Omega_+(P)|$$

即：從 Ω 內部用有窮個小長方塊去逼近，量其體積，與從 Ω 外部用有窮個小長方塊去逼近，量其體積，兩者無異。

Remark:

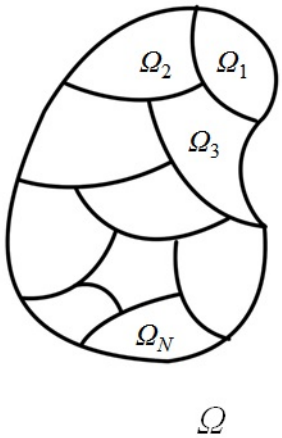
1. 仿 Lemma 11-1 的論述，我們有：

   <u>Lemma 11-2</u> 設 f 爲 Ω 上有界實函數，則給定 $\epsilon > 0$，$\exists\, \delta$ 使

   $$\underline{\int}_{\Omega} f\,dxdy - \epsilon \le L(P, f) \le U(P, f) < \overline{\int}_{\Omega} f\,dxdy + \epsilon$$

   當 $\|P\| < \delta$.

2. 設 Ω 爲 Jordan Region，$f \ge 0$ 在 Ω 上，



將 Ω 任意分割成 $\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_N$，每個 Ω_i 亦爲 Jordan Region.

設此分割爲 Q，令 $M_i = \sup\limits_{\Omega_i} f,\ m_i = \inf\limits_{\Omega_i} f$，
$U(Q,f) = \sum M_i|\Omega_i|,\ L(Q,f) = \sum m_i|\Omega_i|, |\Omega_i|$ 表 Ω_i 的面積，

$$\overset{*}{\int_{\Omega}} f\,dxdy = \inf_{Q} U(Q,f)$$
$$\underset{*}{\int_{\Omega}} f\,dxdy = \sup_{Q} U(Q,f)$$

因長方形分割爲 Jordan 分割的一種，故有

$$\underline{\int_{\Omega}} f\,dxdy \le \underset{*}{\int_{\Omega}} f\,dxdy \le \overset{*}{\int_{\Omega}} f\,dxdy \le \overline{\int_{\Omega}} f\,dxdy$$

因此，以長方形分割處理的積分存在 $\Rightarrow$ 對任意 Jordan 分割處理的積分存在，且兩者相等。

反之，若以任意分割處理的積分存在，即

$$\underset{*}{\int_{\Omega}} f\,dxdy = \overset{*}{\int_{\Omega}} f\,dxdy = (Q)\int_{\Omega} f\,dxdy$$

$(Q)\int_{\Omega} f\,dxdy$ 表任意分割處理的 Riemann 積分。

給定 $\epsilon > 0$, $\exists\ \Omega$ 上的一分割 $Q : \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \cdots \cup \Omega_N$, Ω_i 爲 Jordan Region, $\forall\ i = 1, 2, \cdots, N$，使

$$\underset{*}{\int_{\Omega}} f\,dxdy - \frac{\epsilon}{4} < L(Q,f)$$

$\partial\Omega_i$ 可以被有窮個長方形小方塊蓋住，$i = 1, 2, \cdots, N$.

這些小長方塊的面積和可以任意小，又 f 有界，因此，$\exists\ \delta_1 > 0$ 使

$$L(P,f) > L(Q,f) - \frac{\epsilon}{4},\ \text{當}\|P\| < \delta_1$$

P 表長方形分割，代入上式，有

$$\int\limits_{*\ \Omega} f\,dxdy - \frac{\epsilon}{2} < L(P,f),\ \text{當}\|P\| < \delta_1$$

$\Rightarrow$

$$\int\limits_{*\ \Omega} f\,dxdy - \frac{\epsilon}{2} < \underline{\int}_{\Omega} f\,dxdy,\ \text{當}\|P\| < \delta_1$$

同理，$\exists\ \delta_2 > 0$，使

$$\overline{\int}_{\Omega} f\,dxdy \le \overset{*}{\int}_{\Omega} f\,dxdy + \frac{\epsilon}{2},\ \text{當}\|P\| < \delta_2$$

因此，若 $(Q)\int_{\Omega} f\,dxdy$ 存在，則

$$(Q)\int_{\Omega} f\,dxdy - \frac{\epsilon}{2} \le \underline{\int}_{\Omega} f\,dxdy \le \overline{\int}_{\Omega} f\,dxdy \le (Q)\int_{\Omega} f\,dxdy + \frac{\epsilon}{2}$$

ϵ 任意，故有

$$\overline{\int}_{\Omega} f\,dxdy = \underline{\int}_{\Omega} f\,dxdy = (Q)\int_{\Omega} f\,dxdy$$

結論：

<u>定理 **11-9**</u>

$$(P)\int_{\Omega} f\,dxdy = (Q)\int_{\Omega} f\,dxdy,\ \text{若}\Omega\text{爲 Jordan Region}$$

(P) 表長方形分割，(Q) 表任意 Jordan 分割。

b. 對一般的函數 f

令

$$f^+(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & f(x,y) \ge 0 \\ 0, & f(x,y) < 0 \end{cases}$$

$$f^-(x,y) = \begin{cases} 0, & f(x,y) \ge 0 \\ -f(x,y), & f(x,y) < 0 \end{cases}$$

則 $f = f^+ - f^-$，$f^+, f^- \ge 0$

若 f^+, f^- 在 Ω 上 Riemann 可積，定義

$$\int_\Omega f\,dxdy = \int_\Omega f^+\,dxdy - \int_\Omega f^-\,dxdy$$

稱爲 f 在 Ω 上的 Riemann 積分。

設 Ω 爲 $\mathbb{R}^n$ 上的 Jordan Region，以上對 $\mathbb{R}^2$ 中 Riemann 積分的處理及相關定理，都可推廣到 $\mathbb{R}^n$ 中，了無障礙，這裡不再重複。我們以

$$\int_\Omega f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

表 f 在 Ω 上的 Riemann 積分，$d\mathbf{x} = dx_1dx_2\cdots dx_n$ 表 $\mathbb{R}^n$ 中直角坐標系的體元。

定理 11-9 再述如下：

<u>定理 **11-10**</u> 設 Ω 爲 $\mathbb{R}^n$ 中 Jordan Region，f 爲 Ω 上有界實函數，則

$$(P)\int_\Omega f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = (Q)\int_\Omega f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

若其中有一個存在，

$(P)\displaystyle\int_\Omega f$ 表採長方體分割相應之 Riemann 積分，

$(Q)\displaystyle\int_\Omega f$ 表任意 Jordan 分割相應之 Riemann 積分。

相應於 Lemma 11-2，對任意分割的 Riemann 積分，我們有：

<u>**Lemma 11-3**</u> f, Ω 如上，$Q : \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \cdots \cup \Omega_N$ 爲 Ω 上分割，則給定 $\epsilon > 0$, $\exists\,\delta$ 使

$$\underset{*}{\int}_\Omega f\,d\mathbf{x} - \epsilon < L(Q,f) \le U(Q,f) < \overset{*}{\int}_\Omega f\,d\mathbf{x} + \epsilon,\ \text{當}\|Q\| < \delta$$

其中 $\|Q\| = \max\limits_i\{\text{diam}\Omega_i | i = 1, 2, \cdots, N\}$,

$$\overset{*}{\int}_\Omega f\,d\mathbf{x} = \inf_Q U(Q,f), \underset{*}{\int}_\Omega f\,d\mathbf{x} = \sup_Q L(Q,f)$$

$\mathbb{R}^n$ 中 **Riemann** 積分的竅門：

根據 Lemma 11-3，若 f 在 Ω 上 Riemann 可積分，則

$$L(Q,f) \to \int_\Omega f\,d\mathbf{x},\ \text{當}\|Q\| \to 0$$

設 $Q:\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup\cdots\cup\Omega_N$ 爲 Ω 的分割。

令 $\varphi=\sum m_i\chi_{\Omega_i},\ m_i=\min\limits_{\Omega_i} f$，

則 $\varphi\le f$, 且

$$\int_\Omega \varphi\, d\mathbf{x}=\sum m_i|\Omega_i|=L(Q,f)\to\int_\Omega f\, d\mathbf{x}$$

欲問某性質對 Riemann 可積函數 f 成立否？可分析如下：

(i) 我們可先試 $f=\chi_A$，A 爲長方塊，看它成立否？

(ii) 若 (i) 過關，則問題對 $\varphi=\sum m_i\chi_{A_i}$ 過關。

(iii) 利用 (ii) 及 $\displaystyle\int_\Omega \varphi\, d\mathbf{x}\to\int_\Omega f\, d\mathbf{x}$，看看此性質是否可以 pass 到 f 上。

χ_A, A 爲長方塊是竅門，與 $\mathbb{R}^1$ 中的 Riemann 積分同。

11.7 Fubini 定理

$\mathbb{R}^n$ 上的 Riemann 積分理論上如上述，但實際上要算它的積分值還得借助 $\mathbb{R}^1$ 上的積分，分別對各個變數逐次積分之。$\mathbb{R}^1$ 上有微積分基本定理，化成 $\mathbb{R}^1$ 上的積分才能運轉。這就是下面要介紹的 Fubini 定理。爲了簡明，以下且以 $\mathbb{R}^2$ 爲例說明之。

<u>定理 **11-11**</u> (Fubini 定理)

設 f 爲定義在 $K=[a,b]\times[c,d]$ 上的 Riemann 可積函數，固定 y，$\displaystyle\int_a^b f(x,y)dx$ 存在 $\forall\, y\in[c,d]$；固定 x，$\displaystyle\int_c^d f(x,y)dy$ 存在，$\forall\, x\in[a,b]$

則

$$\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy,\ \int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx$$

存在且

$$\iint_K f(x,y)dxdy=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx$$

分析：

1. 令 $\varphi(x)=\displaystyle\int_c^d f(x,y)dy$，欲証：$\varphi$ 在 $[c,d]$ 上可積分，且

$$\iint_K f(x,y)dxdy=\int_a^b\varphi(x)dx.$$

設 P_x,P_y 分別爲 $[a,b]$ 及 $[c,d]$ 上二分割，
$P_x: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$

$P_y : c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_m = d$
則 $P = P_x \times P_y$ 爲 K 上之一分割。

令 $K_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j],\ m_{ij}(x) = \inf\limits_{K_{ij}} f(x,y),\ M_{ij}(x) = \sup\limits_{K_{ij}} f(x,y),$
$n_i = \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} \varphi(x),\ N_i = \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} \varphi(x)$

又固定 $x \in [x_{i-1}, x_i]$，顯然：

$$m_{ij} \le m_j(x) \le M_j(x) \le M_{ij},\ \forall\ x \in [a,b]$$

其中 $m_j(x) = \inf\limits_{y_{j-1}<y<y_j} f(x,y),\ M_j(x) = \sup\limits_{y_{j-1}<y<y_j} f(x,y)$

2. 固定 x，據 1.，我們有

$$\sum_j m_{ij}\Delta y_j \le \sum_j m_j(x)\Delta y_j \le \sum_j M_j(x)\Delta y_j \le \sum_j M_{ij}\Delta y_j$$

而

$$\sum_j m_j(x)\Delta y_j \le \int_a^b f(x,y)dy = \varphi(x) \le \sum_j M_j(x)\Delta y_j$$

故

$$\sum_j m_{ij}\Delta y_j \le \varphi(x) \le \sum_j M_{ij}\Delta y_j,\ \forall\ x \in [a,b]$$

於是有

$$\sum_j m_{ij}\Delta y_j \le n_i \le N_i \le \sum_j M_{ij}\Delta y_j$$

上式對 $i = 1, 2, \cdots, n$ 成立，從而：

$$\sum_i \left(\sum_j m_{ij}\Delta y_j\right)\Delta x_i \le \sum_i n_i\Delta x_i \le \sum_i N_i\Delta x_i \le \sum_i \left(\sum_j M_{ij}\Delta y_j\right)\Delta x_i$$

即：

$$L(P,f) \le L(P_x,\varphi) \le U(P_x,f) \le U(P,f) \tag{*}$$

3. 而

$$L(P_x,\varphi) \le \underline{\int_a^b} \varphi(x)dx \le \overline{\int_a^b} \varphi(x)dx \le U(P_x,\varphi)$$

代入 $(*)$ 得

$$L(P,f) \le \underline{\int_a^b} \varphi(x)dx \le \overline{\int_a^b} \varphi(x)dx < U(P,f),\ \forall\ P$$

$\Rightarrow$

$$\underline{\iint_K} f(x,y)dxdy \le \underline{\int_a^b} \varphi(x)dx \le \overline{\int_a^b} \varphi(x)dx \le \overline{\iint_K} f(x,y)dxdy$$

f 在 K 上 Riemann 可積分，$\underline{\iint}_K f = \overline{\iint}_K f = \iint_K f$，故有

$$\underline{\int}_a^b \varphi(x)dx = \overline{\int}_a^b \varphi(x) = \iint_K f(x,y)dxdy$$

即：

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \iint_K f(x,y)dxdy$$

4. 同理，

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy = \iint_K f(x,y)dxdy$$

Remark:

1. 定理 11-11 的證明，可利用微分與積分的對調來處理，更爲簡潔，我們將於第十三張中介紹之。

2. 在處理重積分問題時常會碰到領域非 compact 或函數非 bounded 的情形，這就牽涉到 $\mathbb{R}^n$ 中的瑕積分 (Improper Integral) 了。對瑕積分，Fubini 還成立嗎？這些問題幾乎可透過 Lebesgue 積分的 Fubini 定理來處理。Riemann 積分要求 f 是 bounded、Domain 是 bounded. Lebesgue 積分不做這些要求，因此，$\mathbb{R}^n$ 中的瑕積分的 Fibini 定理幾乎都可用 Lebesgue 積分的 Fubini 定理來了解。

對 Bounded function on compact domain 而言，Riemann 可積 $\Rightarrow$Lebesgue 可積且其積分值相等。換言之，Lebesgue 積分爲 Riemann 積分的推廣。因此，我不想花篇幅去談 $\mathbb{R}^n$ 中瑕積分的 Fubini 定理，僅在此引述 Lebesgue 積分的 Fubini 定理以供參考。

<u>定理 **11-12**</u> (Lebesgue 積分的 Fubini 定理)

設 $A, B \subset \mathbb{R}$ 爲 Lebesgue 可測集，f 在 $A \times B$ 上 Lebesgue 可積分 (f 可以是 unbounded!)

令 $I = \iint_{A\times B} f(x,y)dxdy, I_{xy} = \int_B \left(\int_A f(x,y)dx\right) dy, I_{yx} = \int_A \left(\int_B f(x,y)dy\right) dx$

則 I_{xy}, I_{yx} 存在，且 $I = I_{xy} = I_{yx}$。

定理中的 A, B 可以是 $[0,\infty), (-\infty,0], (-\infty,\infty), (0,1], [0,1), \cdots$

Remark:

1. Fubini 定理的應用，首先必須檢驗 f 是否爲可積函數。通常，對 f 的檢驗較不容易，而 $f = f^+ - f^-$，f 可積分 $\Leftrightarrow f^+, f^-$ 可積分，故 $|f|$ 可積分。

反之，若 $|f|$ 可積分，$|f| = f^+ + f^-, 0 \le f^+ \le |f| \Rightarrow f^+$ 可積分 (Lebesgue 可積)，同理 f^- 可積 $\Rightarrow f = f^+ - f^-$ 可積。

即：f Lebesgue 可積分 $\Rightarrow |f|$ Lebesgue 可積分

故我們通常檢測 $\iint_{A\times B} |f|$ 是否 $< \infty$，據以判斷 f 是否可積。

有關 Lebesgue 積分相關內容，同學可參考 Rudin 課本第 11 章: The Lebesgue Theory 或 Royden 的 Real Analysis 一書。

2. 怪哉，f 可積 $\Leftrightarrow |f|$ 可積，這在 Riemann 積分中是不可思議的！

例如：$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x,y\text{爲有理數} \\ -1 & \text{其他} \end{cases}$, $(x,y) \in [0,1]\times[0,1]$

$|f(x,y)| = 1,\ \forall\ (x,y) \in [0,1]\times[0,1]$

因此，$|f|$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上 Lebesgue 可積，但 f 並非 Riemann 可積！

爲什麼會這樣呢？

因爲，Riemann 積分是在 Domain 做分割，Lebesgue 積分是在 Range 上做分割。

有理點雖在 $[0,1]\times[0,1]$ 上稠密，可是它的測度爲 0，對 Lebesgue 積分不起作用。

上例，以 Lebesgue 積分的觀點，可作如下了解：

有一賭局，在 $[0,1]\times[0,1]$ 上均勻地任扎一針，扎中有理點集 $A = \{(x,y)|x,y\text{爲有理數}\}$ 得一元，扎中非有理點集 $B = [0,1]\times[0,1] - A$ 需付一元，此賭局公平否？

Lebesgue 說：得一元的機率 $m(A) = 0$ (Lebesgue 測度)，輸一元的機率 $m(B) = 1$(同上)，

因此，期望值 (Lebesgue 積分)$= 1\cdot 0 + (-1)\times 1 = -1$

依大數法則，賭 n 次所得 S_n，有如下定則：

$$\frac{S_n}{n} \to -1 \text{ with probability } 1$$

不可賭！不可賭！! 即使射中 A 給你千億元，也是不公平的賭局。不過斷頭的勾當都有人幹，那千億元也實在太吸引人了，不怕匹夫匹婦不來下注。

對 Lebesgue 來說，f 是可積函數，$\iint f(x,y)dxdy = -1$

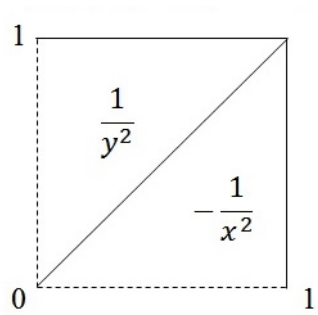
3. 於 $\mathbb{R}^1$ 中，Riemann 瑕積分和 Lebesgue 對 unbounded domain 或 range 的積分概念並不相同，Riemann 瑕積分存在並不保証 Lebesgue 可積，且看下例：

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

我們知道它的 Riemann 瑕積分 $\int_0^\infty f(x)dx$ 是存在的，但 $\int_0^\infty |f(x)|dx = \infty$，因此它的 Lebesgue 積分並不存在。

對於 $\mathbb{R}^n (n > 1)$ 中 Riemann 瑕積分的定義，同學可參考 J Cooper 所著 Working Analysis, Elsevier 2005, P.536∼545，那裏有詳細的介紹，它是對 $|f|$ 的收斂行爲做規範，因此和 Lebesgue 積分的存在無異。同學可直接用 Lebesgue 積分的 Fubini 定理來處理，了無障礙。

例 **1.** $f(x,y) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2}, & 0 < y \le x \le 1 \\ \frac{1}{y^2}, & 0 < x \le y \le 1 \end{cases}$



固定 y，我們有

$$\int_0^1 f(x,y)dx = \int_0^y \frac{1}{y^2}dx + \int_y^1 -\frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{y} + \left(1 - \frac{1}{y}\right) = 1$$

$\therefore$

$$I_{xy} = \int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)dx\right] dy = 1$$

又 $f(x,y) = -f(y,x)$，故

$$I_{yx} = \int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)dy\right] dx = -1$$

$I_{xy} \neq I_{yx}$

注意：f 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上並非有界函數，因此牽涉到的是瑕積分，借用 Lebesgue 積分來看它：

$$\iint f^+(x,y)dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^y \frac{1}{y^2}\right] dy = \int_0^1 \frac{1}{y} dy = \infty$$

同理 $\iint f^-(x,y)dxdy = \infty$

f 在 $(0,1]\times(0,1]$ 上是 Lebesgue 不可積！

例 **2.** $A = [-1,1]\times[-1,1]$,

$f(x,y) = \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2},\ (x,y)\neq(0,0),\ f(0,0)=0$

觀察：

1. $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x,y)dx = \int_{-1}^1 f(x,y)dy = 0$，因此

$$\int_{-1}^1 \left[\int_{-1}^1 f(x,y)dx\right] dy = \int_{-1}^1 \left[\int_{-1}^1 f(x,y)dy\right] dx = 0$$

2. 令 $B = \{(x,y)|x^2+y^2<1\}$，則 $B\subset A$

$$\iint_A |f(x,y)|dxdy > \iint_B |f(x,y)|dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} \frac{|\sin\theta\cos\theta|}{r} d\theta\right] dr = 2\int_0^1 \frac{1}{r} dr = \infty$$

   雖然 $I_{xy} = I_{yx}$ 也無濟於事，$I \neq I_{xy}$.

對非方領域，我們有如下定理。

<u>定理 **11-13**</u> 設 $\Omega = \{(x,y)|a\le x\le b, y_1(x)\le y\le y_2(x)\}, y_1, y_2$ 在 $[a,b]$ 上連續，f 在 Ω 上可積分，則

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right] dx$$

說明：

1. 取 $K = [a,b]\times[c,d]\supset\Omega$，令 $F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y)\in\Omega \\ 0, & f(x,y)\in K-\Omega \end{cases}$

   則 F 在 K 上可積分。

2. 於 K 上對 F Fubini，即得定理。

高維度的 Fubini 定理敘述如下：
<u>定理 **11-14**</u> $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_m),\mathbf{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n),d\mathbf{x}=dx_1dx_2\cdots dx_n,d\mathbf{y}=dy_1dy_2\cdots dy_n$

$A\subset\mathbb{R}^m,B\subset\mathbb{R}^m$ 爲可測集，f 爲 $A\times B$ 上的可積函數，則

$$\int_{A\times B}f(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{x}d\mathbf{y}=\int_B\left[\int_A f(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{x}\right]d\mathbf{y}=\int_A\left[\int_B f(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{y}\right]d\mathbf{x}$$

11.8 弧長公式 (Arc length)

設 $\Gamma:(x(t),y(t)),a\le t\le b,x,y\in C^1[a,b]$，爲平面上一平滑曲線，欲求 Γ 的弧長。

a. 物理觀點

想像 $(x(t),y(t))$ 表質點運動的軌跡，則 $\mathbf{v}(t)=(x'(t),y'(t))$ 表 t 時刻的速度，$v(t)=|\mathbf{v}(t)|=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}$ 表 t 時刻的速率，故質點在 $[a,b]$ 區間所行距離

$$|\Gamma|=\int_a^b\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$$

b. 數學上的定義

設 $P:a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b$ 爲 $[a,b]$ 上一分割，
$A_i=(x(t_i),y(t_i)),i=1,2,\cdots,n$ 爲 Γ 上相應點。

令 $L(P)=\sum\limits_{i=1}^n\overline{A_{i-1}A_i}=\sum\limits_{i=1}^n\sqrt{[x(t_i)-x(t_{i-1})]^2+[y(t_i)-y(t_{i-1}]^2}$,
$|\Gamma|=\sup\limits_P L(P)$ 稱爲 Γ 的弧長。

弧長公式：

(i) 函數型

$\Gamma:(x,f(x)),a\le x\le b$，則

$$\begin{aligned}L(P)&=\sum_{i=1}^n\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+[f(x_i)-f(x_{i-1})]^2}\\&=\sum_{i=1}^\infty\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\Delta x_i,\ \xi_i\in(x_{i-1},x_i)\end{aligned}$$

上式爲 $\sqrt{1+f'^2(x)}$ 在 $[a,b]$ 上對 P 的 Riemann Sum，故

$$|\Gamma|=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx$$

(ii) 參數型

根據均值定理 A

$$L(P)=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x'^2(\xi_i)+y'^2(\eta_i)}\Delta t_i,\ \ \xi_i,\eta_i\in(t_{i-1},t_i)$$

注意上式，ξ_i 未必等於 η_i，故 $L(P)$ 非 $g(t)=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}$ 的 Riemann Sum，不過公式是對的，怎麼說清楚，講明白呢？

根據不等式：

$$||\vec{a}|-|\vec{b}||\leq|\vec{a}-\vec{b}|$$

對一切 $\mathbb{R}^n$ 中的向量 $\vec{a},\vec{b}$ 成立。

令 $\vec{a}=(x'(\xi),y'(\eta),\vec{b}=(x'(\xi),y'(\xi))$，則

$$|\sqrt{x'^2(\xi)+y'^2(\eta)}-\sqrt{x'^2(\xi)+y'^2(\xi)}|\leq|y'(\xi)-y'(\eta)|$$

y' 在 $[a,b]$ 上連續 $\Rightarrow y'$ 在 $[a,b]$ 上均勻連續。

給定 $\epsilon>0,\exists\,\delta_1$，使 $|y'(s)-y'(t)|<\dfrac{\epsilon}{b-a}$ 當 $|s-t|<\delta_1$

故當 $\|P\|<\delta_1\Rightarrow|\xi-\eta|<\delta_1$

$\Rightarrow$

$$|\sqrt{x'^2(\xi)+y'^2(\eta)}-\sqrt{x'^2(\xi)+y'^2(\xi)}|<\frac{\epsilon}{b-a}$$

$\Rightarrow$

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x'^2(\xi_i)+y'^2(\eta_i)}\Delta t_i-\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x'^2(\xi_i)+y'^2(\xi_i)}\Delta t_i\right|<\epsilon$$

其中 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{x'^2(\xi_i)+y'^2(\xi_i)}\Delta t_i$ 爲 $\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}$的 Riemann Sum。

又 $\exists\,\delta_2$ 使 $\|P\|<\delta_2\Rightarrow$

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x'^2(\xi_i)+y'^2(\xi_i)}\Delta t_i-\int_a^b\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt\right|<\epsilon$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，則

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x'^2(\xi_i)+y'^2(\eta_i)}\Delta t-\int_a^b\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt\right|<2\epsilon,\ \text{當}\|P\|<\delta$$

$\Rightarrow$

$$\left||\Gamma|-\int_a^b\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt\right|<2\epsilon$$

ϵ 任意 $\Rightarrow |\Gamma| = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$

同理：$\Gamma : \mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)), a \leq t \leq b$ 表 $\mathbb{R}^n$ 中一平滑曲線，則

$$|\Gamma| = \int_a^b |\mathbf{x}'(t)|dt$$

11.9 線積分 (Line integral)

a. 直線上的線元

於 $[a, b]$ 間築籬，點 x 上籬高 $f(x)$，則籬笆面積 $A = \int_a^b f(x)dx$

dx 表 x 軸上的線元，$f(x) \cdot dx$ 表 dx 線段上的籬笆面積。

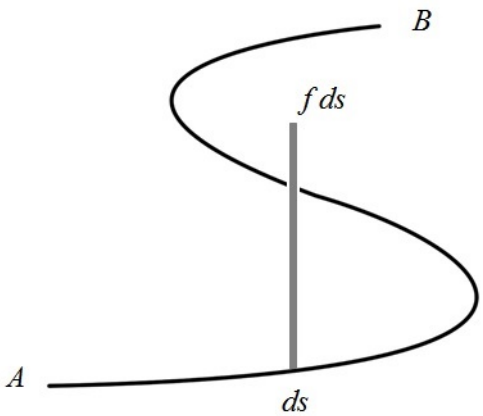
b. 曲線上的線元

設 $\Gamma : (x(t), y(t)), a \leq t \leq b$ 表平面上一平滑曲線，令 $ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$ 稱爲曲線 Γ 上的線元。

今在 Γ 上築籬，點 $(x(t), y(t))$ 上籬高 $f(t)$，則 Γ 上籬笆面積：

$$A = \int_\Gamma f\, ds = \int_a^b f(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$$

稱爲 f 在 Γ 上的線積分。



這個線積分可以如下理解：ds 表 Γ 上的線元，$f\ ds$ 表 ds 上的籬笆面積，這些小小的面積加起來求極限就是 $\int_\Gamma f\, ds$

c. 功

設 $\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$ 表平面上的力場，$\Gamma:(x(t),y(t)),a\le t\le b$ 表平面上一平滑曲線，$A=(x(a),y(a)),B=(x(b),y(b))$

$\vec{T}(t)=(x'(t),y'(t))/\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}$ 表 Γ 上的單位切向量，

則 $\vec{F}$ 將單位質量沿 Γ 自 A 至 B 所作功

$$W=\int_\Gamma \vec{F}\cdot\vec{T}ds$$

$ds=\sqrt{x'^2+y'^2}dt$，故 $\vec{T}ds=(x'(t),y'(t))dt=(dx,dy)$

$\Rightarrow \vec{F}\cdot\vec{T}ds=Pdx+Qdy$

$\therefore$

$$W=\int_\Gamma Pdx+Qdy=\int_\Gamma[P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)]dt$$

Remark: 以上所談線積分，曲線 Γ 至少必須是片段平滑，否則 $ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}$ 將失所依靠。

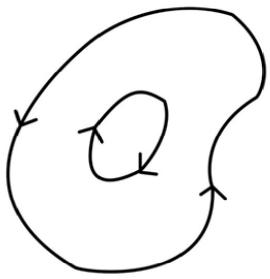
$W=\int_\Gamma Pdx+Qdy$ 中，P,Q 連續以確保積分存在。

d. Green's 定理

<u>定理 **11-15**</u> 設 Ω 爲 $\mathbb{R}^2$ 中封閉領域，$\partial\Omega$ 爲片段平滑 (piecewise smooth)，$P,Q\in C^1(\Omega)$，則

$$\int_{\partial\Omega}Pdx+Qdy=\iint_\Omega(Q_x-P_y)dxdy$$

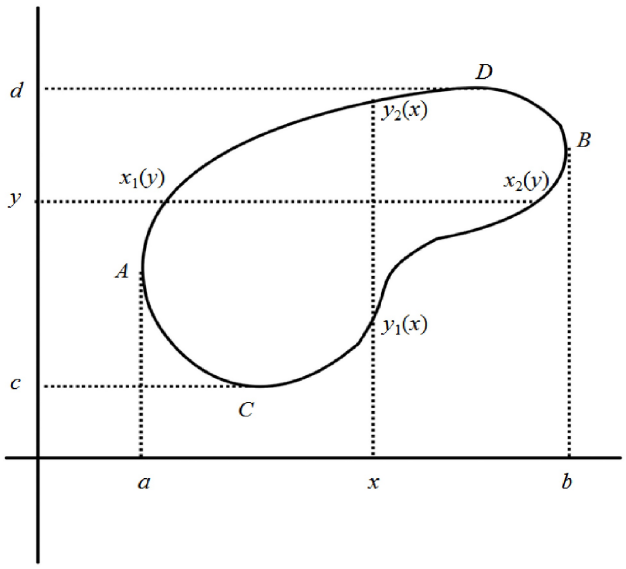
Remark: 上式左邊線積分規定爲逆時向積分，所謂逆時向只是簡略說法，更精確地描述應該是：想像 Ω 爲一島嶼，一人沿水而行，陸地恆在人之左側，人行方向即爲積分方向，因此人沿海岸而行走的是逆時向，若島中有湖，人沿湖而行，則走的是順時向。



Ω

分析：

1. 不妨先考慮 Ω 爲單連通集 (simply connected)(即，Ω 內任意簡單封閉曲線，恆可在 Ω 內連續地縮成一點)，且 $\partial\Omega$ 可以分別對 x 軸及 y 軸，表成上下兩函數，如圖所示：



如圖：$\partial\Omega$ 對 x 軸有上下二函數 $y_2(x), y_1(x), a \le x \le b$
對 y 軸有左右二函數 $x_1(y), x_2(y), c \le y \le d$

2. 觀察：

$$\begin{aligned}
\iint_\Omega Q_x\, dxdy &= \int_c^d \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} Q_x\, dx \right] dy \\
&= \int_c^d Q(y, x_2(y))dy - \int_c^d Q(y, x_1(y))dy \\
&= \int_c^d Q(y, x_2(y))dy + \int_d^c Q(y, x_1(y))dy \\
&= \int_{\partial\Omega} Q\, dy
\end{aligned}$$

同理

$$\iint_\Omega -P_y\, dxdy = \int_{\partial\Omega} Pdx$$

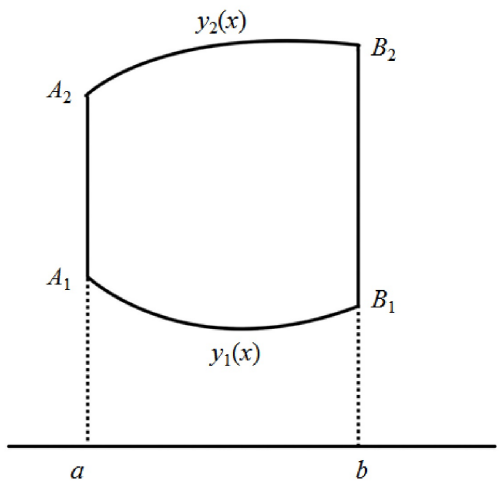
$\therefore$ 定理成立。

3. 若 $\partial\Omega$ 含鉛直線段

如圖，在 $\overline{A_2A_1}$ 及 $\overline{B_1B_2}$ 上 $dx=0$

$$\begin{aligned}\iint_\Omega -P_y\,dxdy &= \int_a^b\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} -P_y\,dy\right]dx\\ &= \int_a^b (P(x,y_1(x))dx + \int_b^a P(x,y_2(x))dx\\ &= \int_a^b P(x,y_1(x))dx + \int_{B_1}^{B_2} P\,dx + \int_b^a P(x,y_2(x))dx + \int_{A_2}^{A_1} P\,dx\\ &= \int_{\partial\Omega} P\,dx\end{aligned}$$

故定理成立。



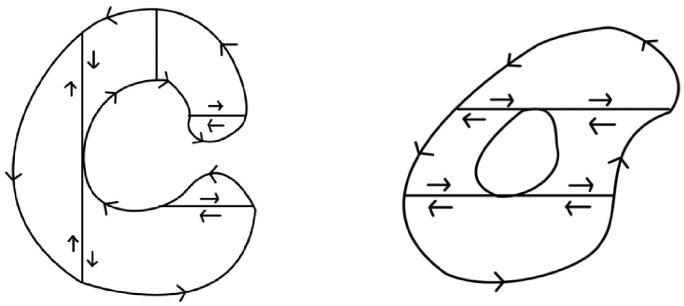
4. 同理，若 $\partial\Omega$ 含水平線段，

$$\iint_\Omega Q_x\,dxdy = \int_{\partial\Omega} Q\,dy$$

亦成立，故定理成立。

5. 對一般領域 Ω，恆可用鉛直或水平線段把 Ω 分割成有窮領域 $\Omega_1,\Omega_2,\cdots,\Omega_n$, $\bigcup_{i=1}^{n}\Omega_i=\Omega$，每一個 Ω_i 滿足上述 Ω 的性質 (如圖 (a),(b))，於是：

$$\begin{aligned}\iint_\Omega (Q_x-P_y)dxdy &= \sum\iint_{\Omega_i}(Q_x-P_y)dxdy\\ &= \sum\int_{\partial\Omega_i} Pdx+Qdy\\ &= \int_{\partial\Omega} Pdx+Qdy\ (\partial\Omega_i\text{在}\Omega\text{內部的線積分相互抵消})\end{aligned}$$



(a)　　(b) Ω中空
外圈逆時，內圈順時

系 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\partial\Omega$ piecewise smooth，則

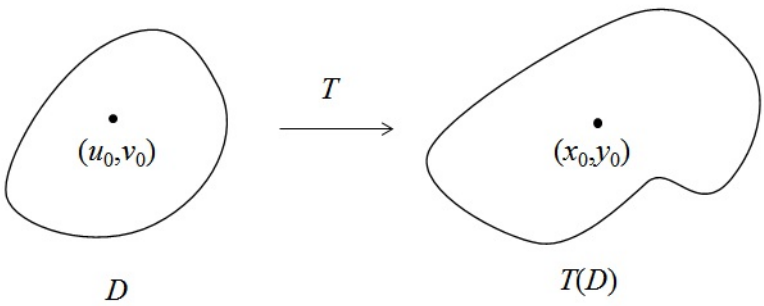
$$|\Omega| = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} x\,dy - y\,dx,\ |\Omega|\text{表}\Omega\text{的面積}$$

11.10　坐標變換

a. 面元間的放大率

設 $\mathbf{T}:(u,v)\to(x,y)$ 表從 u，v 平面到 x，y 平面上的座標變換，
$x = x(u,v), y = y(u,v) \in C^1, \mathbf{T}:(u_0,v_0)\to(x_0,y_0)$

在 (u_0,v_0) 附近任取一適當領域 D，∂D piecewise smooth，則 $(x_0,y_0)\in\mathbf{T}(D)$



設 ∂D 可表爲參數式 $(u(t),v(t)), a\le t\le b$

依 Green's 定理：

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{T}(D)| &= \frac{1}{2}\int_{\partial\mathbf{T}(D)} x\,dy - y\,dx \quad (\text{逆時向積分，在}x,y\text{平面上}) \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b x(u(t),v(t))dy(u(t),v(t)) - y(u(t),v(t)dx(u(t),v(t)) \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b [x(y_u\cdot u' + y_v\cdot v') - y(x_u\cdot u' + x_v\cdot v')]dt \qquad (2) \\
&= \pm\frac{1}{2}\int_{\partial D}(xy_u - yx_u)du + (xy_v - yx_v)dv \ (\text{拉到}u,v\text{平面上積分}) \qquad (3) \\
&= \pm\int_{\partial D} Pdu + Qdv \\
&= \pm\iint_D (Q_u - P_v)dudv
\end{aligned}
$$

(3) 式中 $\int_{\partial D}\cdots$，依規定，指逆時向線積分 (在 u,v 平面)，

但由 (2) 進入 (3) 所相應於 u,v 平面上的線積分未必爲逆時向，放上正負號以調整之，使等式成立。逆取正，順取負。

其中 $P = xy_u - yx_u,\ Q = xy_v - yx_v$，經簡單計算，

$$Q_u - P_v = 2(x_uy_v - x_vy_u)$$

設 $x_uy_v - y_ux_v \neq 0$，在 D 上，$x,y \in C^1(D)$

$\Rightarrow x_uy_v - y_ux_v$ 在 D 上恆正或恆負，故

$$|\mathbf{T}(D)| = \iint_D |x_uy_v - x_vy_u|dudv \qquad (4)$$

於是：

$$\lim_{D\to(u_0,v_0)}\frac{|\mathbf{T}(D)|}{|D|} = |x_uy_v - x_vy_u|_{(u_0,v_0)} = \left\|\begin{matrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{matrix}\right\|_{(u_0,v_0)} \qquad (5)$$

<u>定義 11-4</u> $J_{\mathbf{T}}(u,v) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}_{(u,v)}$ 稱爲此座標變換下的 Jacobian，有時以 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ 表示之。

由 (4) 式，可看出 $|J_{\mathbf{T}}(u,v)|$ 即表示此座標變換下，面元間在 (u,v) 點的放大率，簡記作：$dxdy = \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$

b. 二變數函數座標變換下的積分公式

(i) 回憶單變數函數的變數變換

$I = \int_a^b f(x)dx$，指在 x 軸上的積分，今變換變數，$x = x(t), \alpha \le t \le \beta$，則

$$I = \int_c^d f(x(t))x'(t)dt$$

爲在 t 軸上的積分，其中 $x'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ 表線元間的放大率。

(ii) 設 $\Omega \subset x$，y 平面，$\partial\Omega$ piecewise smooth，f 爲定義於 Ω 上的 Riemann 可積函數，

$\iint_\Omega f(x,y)dxdy$ 可能不好計算，例如 Ω 爲單位圓盤時，宜採用極座標 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta,\ (r,\theta) \in [0,1] \times [0,2\pi]$

拉到 r，θ 平面後變成方塊上的積分，好處理。

今設 $x = x(u,v), y = y(u,v), (u,v) \in D \subset u, v$ 平面，

Jacobian 既表面元間的放大率，那麼：

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \iint_D f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

應該成立。

應該歸應該，天馬行空，固然令人讚嘆，但腳不著地，力從何來，到後來就淪爲白雲蒼狗，隨風幻化。還是給個証明吧！

<u>定理 **11-16**</u> 設 Ω, G 分別表 x，y 平面及 u，v 平面上二領域，其邊界片段平滑，$\mathbf{T} : D \to \Omega$ 爲對射寫像，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = J_{\mathbf{T}} \ne 0$ 在 D 上，則

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \iint_D f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

証：

(i) 設 $f \geq 0$，令 $Q_x = f, P = 0$，依 Green's 定理：

$$\begin{aligned}
\iint_\Omega f\,dxdy &= \iint_\Omega (Q_x - P_y)dxdy \\
&= \int_{\partial\Omega} Pdx + Qdy \quad (\text{逆時向積分}) \\
&= \int_{\partial\Omega} Qdy \\
&= \pm \int_{\partial D} Q \cdot (y_u du + y_v dv) \quad (\text{加上} \pm \text{號以調整之，如 } (3)) \\
&= \pm \int_{\partial D} Qy_u du + Qy_v dv \\
&= \pm \iint_D [(Qy_v)_u - (Qy_u)_v]dudv \\
&= \pm \int_D [Q_u y_v - Q_v y_u]dudv
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[Q_u y_v - Q_v y_u] &= (Q_x \cdot x_u + Q_y \cdot y_u)y_v - (Q_x \cdot x_v + Q_y \cdot y_v)y_u \\
&= Q_x(x_u y_v - y_u x_v) \\
&= f\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}
\end{aligned}$$

$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \in C(D),\ \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq \text{on } D$，

$\therefore \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ 在 D 上恆正或恆負，$f \geq 0$，故

$$\iint_\Omega f\,dxdy = \iint_D f \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

(ii) f 在 Ω 上可積，$f = f^+ - f^-, f^+, f^- \geq 0$ 可積，

定理對 f^+ 及 f^- 成立，故對 f 成立。

保積寫像：

現代人過年，年節必需品超市幫你準備齊全，只要你口袋裡有錢，要什麼有什麼，年糕、蘿蔔糕、芋粿、發粿、紅龜粿、菜包粿、$\cdots$，應有盡有，年糕還有鹹的、紅豆的、八寶的、紫米的、養生的、外省的、$\cdots$，真是玲瑯滿目，方便極了。方便是方便，但年節的過程和內容不見了，少了一種年節應有的生命力和氛圍。

我小時在農村長大，每到年節，半個月前就開始準備過年，年節必需品樣樣自己做，從購買糯米 (年糕)、在來米 (蘿蔔糕)，洗浸、磨漿、壓乾，倒入竹篇大盤搗碎成粉，放

入幾塊煮過的熱粉團，加糖搓揉成膏狀，放入蒸籠蒸煮幾小時，就成年糕。小孩子們最期盼媽媽做菜包粿，包上花生、紅豆或蘿蔔乾，又香又好吃。我和弟弟要到田野裡採集野生” 鼠殼”，一連好幾天才有足夠的量，好給媽媽做菜包粿，走在田野裡，陽光斜照，大地蟲鳴，枝枒粼粼，迎風點點，有的像搶頭香似地，已綻放出五顏六色的花朵，乾坤間充滿迎春的喜悅。

那個年代大人小孩都忙著過年，男孩推石磨，大人貼春聯，家家戶戶炊煙裊裊，喜氣洋洋，媽媽最是忙碌，兒女最是歡樂，圍繞在媽媽身邊，幫忙打點，心中充滿新年的期待。

對農家來說，過年是一年辛勤的休息和慶祝，也是對來年的盼望和祝福，鄭板橋說：笑山妻塗粉過新年，田家樂。雖是鄉野村婦，一年到頭在田裡忙碌，過新年也要打扮一下，讓自己開心。孩子長大了，那舊衣褲已穿不下，父母通常會幫我們買一件卡其上衣和長褲。所謂：穿新衣，過新年，好不快樂。至於鞋子，那就不必了，天生的那雙永遠穿不壞，破了，留幾滴血，他自已又會修補好，不用操心。

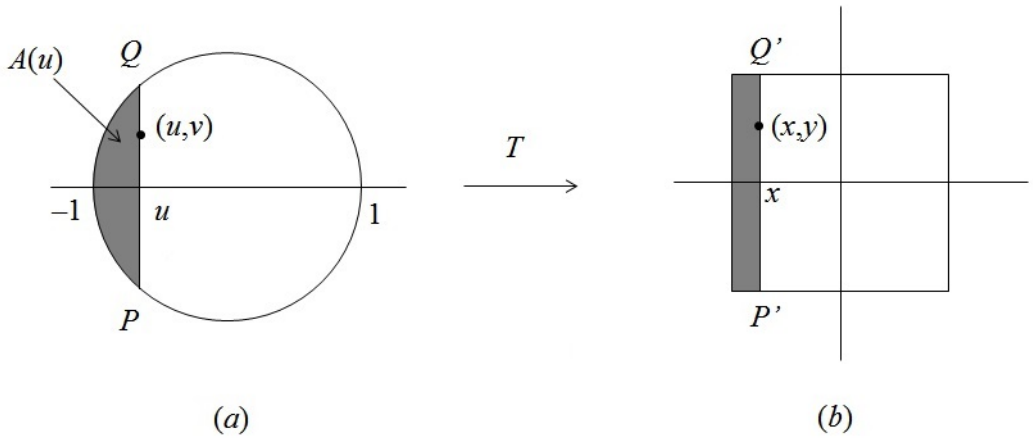
糕粿的製作，媽媽在竹盤上搓那粿團，揉來搓去，粿團因時變形，但任何一區塊在搓揉的過程中體積恆不變，這種過程稱爲保積 (體積) 寫像。

平面上的情形類似，設 D, Ω 爲 $\mathbb{R}^2$ 中二領域，$T : D \to \Omega$ 爲連續對射寫像，若

$$|T(A)| = |A|,\ \forall\ A \subset D,\ |A|\text{表}A\text{的面積。}$$

我們稱 T 爲 D 到 Ω 的保積寫像。

例 **1.** 試造一保積寫像，把單位圓盤映成正方形。



分析：

1. 單位圓盤面積爲 π，故正方形邊長爲 $\sqrt{\pi}$

2. 設 $D: u^2+v^2 \le 1,\ \Omega = \{(x,y)|0 \le x, y \le \sqrt{\pi}\}$

令 $A(u) = 2\int_0^u \sqrt{1-t^2}dt$ 表 D 在 $[-1,u]$ 上的領域 (圖 (a) 著色域)，將此領域映至 Ω 中 $[0,x]\times[0,\pi]$ 上 (圖 (b) 著色域)，並將 $\overline{PQ}$ 等比例映成 $\overline{P'Q'}$

$\mathbf{T}: (u,v) \to (x,y)$，則有

$$x = \frac{A(u)}{\sqrt{\pi}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-1}^u \sqrt{1-t^2}dt$$
$$y = \frac{v}{2\sqrt{1-u^2}} \cdot \sqrt{\pi}$$

3. 此寫像保積，因

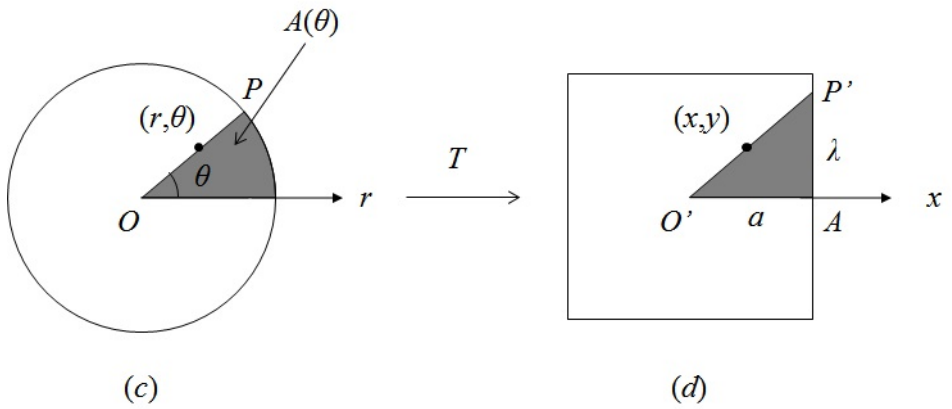
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{\pi}} & 0 \\ \cdots & \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-u^2}} \end{vmatrix} = 1$$

Remark:

1. 此寫像僅能將 $D - \{(u,0)|u=\pm 1\}$ 映成 $\Omega = (0,\sqrt{\pi})\times[0,\sqrt{\pi}]$

   因 $(u,v) = (-1,0)$ 及 $(1,0)$ 在此對應下不知所措

2. 不過寫像千千萬萬，如果你考慮極座標：



$\mathbf{T}$ 將圖 (c) 中著色域映至圖 (d) 中著色域，並將 $\overline{OP}$ 等比例映成 $\overline{O'P'}$

$\mathbf{T}: (r,\theta) \to (x,y)$，令 $a = \overline{OA} = \frac{\sqrt{\pi}}{2},\ \lambda = \overline{P'A}$，則 $\frac{1}{2}a\lambda = \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \theta,\ \lambda = \frac{\theta}{a}$

$$\begin{cases} y = \frac{\lambda}{a}x \\ \sqrt{x^2+y^2} = r\sqrt{a^2+\lambda^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &= ar \\ y &= \lambda r = \frac{1}{a}r\theta \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ \cdots & \frac{1}{a}r \end{vmatrix} = r$$

故此寫像爲保積，**T** 將

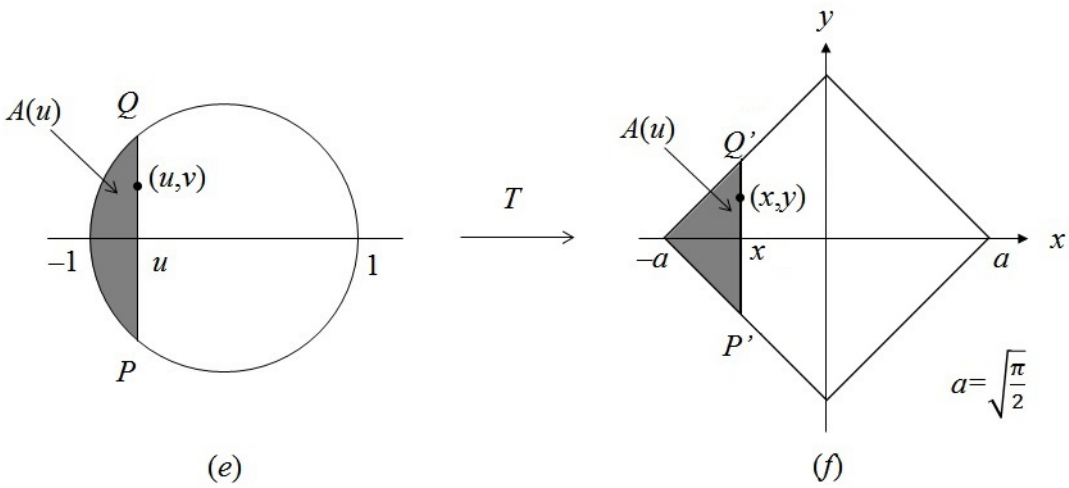
$$D_1 = \{(r,\theta)|0 \le r \le 1, -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}\}$$

映至

$$\Omega_1 = \{(x,y)|0 \le x \le \frac{\sqrt{\pi}}{2}, -x \le y \le x\}$$

設 $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4, \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4$，其中 $D_2, D_3, D_4; \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ 分別表 D_1, Ω_1 對原點旋轉 $90°, 180°, 270°$ 所得的全等領域，令 **T** 分別把 $D_i \to \Omega_i, i = 2,3,4$，即得 D 到 Ω 上的保積寫像。

3. 或者，你也可以把 Ω 轉個 $45°$ 來處理：



T 把圖 (e) 中著色域映至圖 (f) 中著色域，把 $\overline{PQ}$ 等比例映成 $\overline{P'Q'}$

令 $l(u) = \sqrt{1-u^2}$，則 $A(u) = \int_{-1}^{u} 2l(t)dt$，設 $a = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

則 $A(u) = (x+a)^2,\ \therefore\ x = \sqrt{A(u)} - a,\ -a \le x \le 0$

又 $\frac{y}{x+a} = \frac{v}{l(u)},\ \therefore\ y = \frac{v}{l(u)}\sqrt{A(u)}$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}A(u)^{-\frac{1}{2}} \cdot A'(u) & 0 \\ \cdots & \frac{\sqrt{A(u)}}{l(u)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{l(u)}{\sqrt{A(u)}} & 0 \\ \cdots & \frac{\sqrt{A(u)}}{l(u)} \end{vmatrix} = 1$$

故 **T** 爲保積，把左半圓盤映至左半三角形。

將 **T** 對 y 軸反射，即得 D 到 Ω 上的保積寫像，此寫像將 ∂D 對射到 $\partial\Omega$，不再有迷失點。

4. 在 $\mathbb{R}^3$ 中欲找一保積寫像將單位求映至立方體，就留給同學當習題吧。

5. 我曾經想過這樣的問題：

   班上開過同樂會後，桌椅凌亂無序，今欲將它們恢復秩序，但要最節省能量 (例如總位移最小，或者位移的平方和最小...)，如何設計這個搬遷？

   保積寫像也有類似的問題，以例 1. 爲例，從單位圓盤映至正方形的保積寫像千千萬萬，如何找一最節能的保積寫像，好比說：求 $\mathbf{T}$，使 $\int_D |\mathbf{Tx}-\mathbf{x}|^2 d\mathbf{x}$ 最小 (取平方數學上好處理)。

   我思考這個問題數年，自覺沒找到門路，不過我總認爲人外有人，後生可畏，在此把問題提出，或許那一天你們當中有出類拔萃的後起俊秀，解決此問題，我將爲你讚嘆。

c. 多變數函數座標變換下的積分公式

我們在 b. 小節中利用 Green's 定理導出二維坐標系變換下的積分公式，並藉此介紹 Jacobian 的幾何意義。

於 $\mathbb{R}^3$ 的情形，可利用 divergence 定理仿照二維的情形推導出相應的積分公式，但計算上稍嫌繁複。

這一小節裡，我們將改用另一種思維來看待此問題。

<u>定理 **11-17**</u> 設 $\Omega \subset \mathbb{R}^n(\mathbf{x}-\text{space})$，$f$ 在 Ω 上 Riemann 可積分，
$D \subset \mathbb{R}^n(\mathbf{y}-\text{space})$，$\mathbf{g}: D \to \Omega$ 爲 C^1 對射寫像，
$\mathbf{g} = (g_1, g_2, \cdots, g_n)$，$D\mathbf{g}(\mathbf{y}) = [D_i g_j(\mathbf{y})]$ 表 $\mathbf{g}$ 在 $\mathbf{y}$ 點的 Jacobian Matrix，$\det D\mathbf{g}(\mathbf{y}) \neq 0 \ \forall\ \mathbf{y} \in D$，則

$$\int_\Omega f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_D f(\mathbf{g}(\mathbf{y}))|\det D\mathbf{g}(\mathbf{y})|d\mathbf{y}$$

上式右邊積分爲確保積分存在，我們設 D 爲 Jordan Region，即：∂D 可以用有窮個方塊蓋住，這些方塊的總體積可以任意小。

其中 $D_i g_j = \dfrac{\partial g_j}{\partial y_i},\ \forall\ i, j = 1, 2, \cdots, n$

$|\det D\mathbf{g}(\mathbf{y})|$ 爲此座標變換的 Jacobian，其幾何內涵爲從 $\mathbf{y}$-space 到 $\mathbf{x}$-space n 維體元間的放大率。

爲了証明上述定理，我們引述如下的 Lemma：

<u>Lemma 11-4</u> 設 G 爲 $\mathbb{R}^n$ 中開集，$\mathbf{g}: G \to \mathbb{R}^n$ 爲 C^1, 1-1 寫像，$\det D\mathbf{g}(\mathbf{x}) \neq 0 \, \forall \, \mathbf{x} \in G$，給定 $\mathbf{x}_0 \in G$，令 $A = D\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$，則 $\forall \, \epsilon > 0, \, \exists \, \delta$ 使得，對任意 $\mathbf{G}$ 中以 $\mathbf{x}_0$ 爲心的長方體 K，$\mathrm{diam} K < \delta$，有

$$(1-\epsilon)^n |\det A| \cdot \mathrm{Vol}(K) \leq \mathrm{Vol}(\mathbf{g}(K)) \leq (1+\epsilon)^n |\det A| \cdot \mathrm{Vol}(K)$$

Remark: 上面的 Lemma 說明在座標變換下，$\mathrm{Vol}(K)$ 與 $\mathrm{Vol}(\mathbf{g}(K))$ 間的關係，並隱示 $\det A$(Jacobian of $\mathbf{g}$ at $\mathbf{x}_0$) 爲體元間的放大率。

這個 Lemma 的証明，需要一些基礎工具，引介如下：

工具 **1:** $A = [a_{ij}]$ 表 $n \times n$ 方陣，令 $\mathbf{a}_j$ 表 A 中第 j 個行向量，則 $|\det A| =$ 向量 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中所張平行多面體體積。

若將 A 視爲 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的寫像，則對 $\mathbb{R}^n$ 中任意長方體 K，恆有

$$\mathrm{Vol}(A(K)) = \det A \cdot \mathrm{Vol}(K)$$

工具 **2:** $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，$f_i$ 在 $\mathbf{x}$ 點可微分若

$$f_i(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}) + Df_i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} + E_i \|\Delta\mathbf{x}\|, \; E_i \to 0 \text{ 當 } \|\Delta\mathbf{x}\| \to 0$$

$\mathbf{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbb{R}^n, \mathbf{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$，每個 f_i 在 $\mathbf{x}$ 點可微分，則有

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + D\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{E}\|\Delta\mathbf{x}\|, \; \mathbf{E} = (E_1, E_2, \cdots, E_n), \; \|\mathbf{E}\| \to 0 \text{ 當} \|\Delta\mathbf{x}\| \to 0$$

其中 $D\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}$ 表 Jacobian Matrix 對 $\mathbf{x}$ 作用。

工具 **3:** f 在 (a, b) 上一階導數連續，則 f 對 (a, b) 中每一點可微分，即：

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + E \cdot \Delta x, \; E \to 0 \text{ 當 } \Delta x \to 0$$

亦即：$\forall \, \epsilon > 0, \, \exists \, \delta$(與 x 有關)，使得

$$|E| < \epsilon \text{ 當} |\Delta x| < \delta$$

令 K 爲 (a, b) 中的 compact set，則 $E \to 0$ uniformly on K 當 $\Delta x \to 0$.
亦即：$\forall \, \epsilon > 0, \, \exists \, \delta$(與 x 無關) 使

$$|E| < \epsilon \text{ 當} |\Delta x| < \delta, \; \forall \, x \in K$$

以上，工具 1 爲線性代數的基本知識，在此不欲多言。工具 2 只是符號的介紹，工具 3 則有待說明如下：

考慮
$|[f(x+\Delta x)-f(x)-f'(x)\Delta x]-[f(x+\Delta x_1)-f(x)-f'(x)\Delta x_1]|$
$=|(f(x+\Delta x)-f(x+\Delta x_1))-f'(x)(\Delta x-\Delta x_1)|$
$=|f'(\xi)(\Delta x-\Delta x_1)-f'(x)(\Delta x-\Delta x_1)|,\ \xi$ 介於 $x+\Delta x$ 及 $x+\Delta x_1$
$=|f'(\xi)-f'(x)||\Delta x-\Delta x_1| \overset{(*)}{<} \epsilon(\Delta x-\Delta x_1)$ 之間。

$(*): f'$ 在 K 上連續，K 爲 compact，$\therefore f'$ 在 K 上均勻連續。

給定 $\epsilon>0,\ \exists\ \delta$ 使 $|f'(x)-f'(y)|<\dfrac{\epsilon}{2}$ 當 $|x-y|<2\delta,\ x,y\in K$

故

$$|f'(\xi)-f'(x)||\Delta x-\Delta x_1|<\frac{\epsilon}{2}|\Delta x-\Delta x_1| \quad 當|\Delta x|,|\Delta x_1|<\delta$$

令 $\Delta x_1\to 0$，我們有

$$|\underbrace{f(x+\Delta x)-f(x)-f'(x)\Delta x}_{=E\cdot\Delta x}|\le\frac{1}{2}\epsilon\Delta x<\epsilon\Delta x,\ 當|\Delta x|<\delta\ (\delta與x無關)$$

故

$$|E|<\epsilon\ 當\Delta x<\delta,\ \forall\ x\in K$$

Lemma 11-4 的証明：

1. Translation to the origin

   令 $\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x})=\mathbf{g}(\mathbf{x}+\mathbf{x}_0)-\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$，則 $\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$
   $\mathrm{Vol}(\mathbf{g}(K))=\mathrm{Vol}(\tilde{\mathbf{g}}(K)),\ \mathrm{Vol}(\mathbf{g}(K))$ 表 $\mathbf{g}(K)$ 的" 體積"
2. Normalization at the origin

   令 $\mathbf{h}(\mathbf{x})=A^{-1}\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}), A=D\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{0})=D\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$

   則 $D\mathbf{h}(\mathbf{x})=A^{-1}D\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x})$，故 $D\mathbf{h}(\mathbf{0})=\mathbb{I}$ (Identity matrix)
3. Approximation by linear function

   $\mathbf{h}\in C^1,\ \mathbf{h}(\mathbf{0})=\mathbb{I}$，故

$$\mathbf{h}(\mathbf{x})=\mathbf{x}+\mathbf{E}\cdot\|\mathbf{x}\|,\ \|\mathbf{E}\|\to 0\ 當\ \|\mathbf{x}\|\to 0$$

給定 $\epsilon > 0$, $\exists\, \delta$ 使得

$$\|E\| < \epsilon \text{ 當} \|\mathbf{x}\| < \delta$$

於是有

$$(1-\epsilon)\|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{h}(\mathbf{x})\| \leq (1+\epsilon)\|\mathbf{x}\|$$

4. K 爲以 $\mathbf{0}$ 爲心的長方體，$\mathrm{diam}K < \delta$，故有

$$(1-\epsilon)K \subset \mathbf{h}(K) \subset (1+\epsilon)K$$

5. 將 A 作用於上式，我們有

$$(1-\epsilon)A(K) \subset A\mathbf{h}(K) \subset (1+\epsilon)A(K)$$

而 $A(\mathbf{h}(K)) = \tilde{\mathbf{g}}(K) = \mathbf{g}(K)$，故

$$(1-\epsilon)A(K) \subset \mathbf{g}(K) \subset (1+\epsilon)A(K)$$

6. 取 Volume，則有

$$(1-\epsilon)^n \|\det A\| \mathrm{Vol}(K) \leq \mathrm{Vol}(\mathbf{g}(K)) \leq (1+\epsilon)^n \|\det A\| \mathrm{Vol}(K)$$

Remark:

1. 這個 Lemma 是整個問題証明的關鍵。Lemma 既証，則定理呼之欲出。

   這個 Lemma 對問題的處理很聰明，我尤其稱讚上述證明的第 2 點，Normalization at the origin，一下子使問題變得很簡單，真是妙招。

2. 定理 11-17 的証明在高等微積分中是一項大工程。我參閱群書，最後採 J. Cooper 所著 Working Analysis(2005, Elsvier 出版) 的處理方法，簡潔、有力、用心，好！(我稍作修改)

定理的証明：

我在 11-4 節中提到 Riemann 積分有它的竅門，我們現在就來觀它的竅門。

1. 設 $K \subset D$ 爲 $\mathbb{R} - \mathbf{y}$ space 中的長方體，$f = \chi_{\mathbf{g}(K)}$，則

$$\int_\Omega f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_\Omega \chi_{\mathbf{g}(K)}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \mathrm{Vol}(g(K)) = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{Vol}(\mathbf{g}(K))$$

   其中 $K = \bigcup_{i=1}^{N} K_i$ 爲 K 上的分割，每個 K_i 爲一小長方體，心在 $\mathbf{y}_i$

2. $\mathbf{g} \in C^1(D)$，K 爲 D 中 compact set，依上述工具 3 的分析，Lemma 11-4 中的 δ 與 K 的中心點無關，設 K 分得夠細，使 $\mathrm{diam}(K_i) < \delta$，則有

$$(1-\epsilon)^n |\det D\mathbf{g}(\mathbf{y}_i)| \mathrm{Vol}(K_i) \leq \mathrm{Vol}(\mathbf{g}(K_i)) \leq (1+\epsilon)^n |\det D\mathbf{g}(\mathbf{y}_i)| \mathrm{Vol}(K_i)$$

$\forall\ i = 1, 2, \cdots, N$，從而

$$(1-\epsilon)^n \sum_{i=1}^{N} |\det D\mathbf{g}(\mathbf{y}_i)| \mathrm{Vol}(K_i) \leq \int_\Omega \chi_{\mathbf{g}(K)}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq (1+\epsilon)^n \sum_{i=1}^{N} |\det D\mathbf{g}(\mathbf{y}_i)| \mathrm{Vol}(K_i)$$

而 $\sum\limits_{i=1}^{N} |\det D\mathbf{g}(\mathbf{y}_i)| \mathrm{Vol}(K_i)$ 爲 $|\det D\mathbf{g}(\mathbf{y})|$ 對 $K_1, K_2, \cdots, K_n$ 的 Riemann Sum，它要 $\to \int_K |\det D\mathbf{g}(\mathbf{y})| d\mathbf{y}$ 當$\delta \to 0$

又 ϵ 任意，故有

$$\int_\Omega \chi_{\mathbf{g}(K)}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_K |\det D\mathbf{g}(\mathbf{y})| d\mathbf{y} = \int_D \chi_K(\mathbf{g}(\mathbf{y})) \det D\mathbf{g}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

故定理對特徵函數成立，因此對 step function 成立。

3. $\mathbf{g}$ 連續，$\mathrm{diam} K_i \to 0 \Rightarrow \mathrm{diam}\mathbf{g}(K_i) \to 0$

故若 D 上的 step function $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i \chi_{K_i}(\mathbf{y}) |\det D\mathbf{g}(\mathbf{y})|$ 的積分趨近於

$$\int_D f(\mathbf{g}(\mathbf{y})) \det |D\mathbf{g}(\mathbf{y})| d\mathbf{y}$$

當 $\delta_\varphi = \max\{\mathrm{diam} K_i\} \to 0, i = 1, 2, \cdots, N$，

則相應於 Ω 上的 step function

$$\psi = \sum_{i=1}^{N} m_i \chi_{\mathbf{g}(K_i)}(\mathbf{x})$$

的積分趨近於

$$\int_\Omega f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

而 $\int_\Omega \psi = \int_D \varphi$，定理對 step function 成立，故定理對 f 成立。

4. 對一般 Riemann 可積函數 f，$f = f^+ - f^-, f^+, f^- \geq 0$
f Riemann 可積 $\Leftrightarrow f^+, f^-$ Riemann 可積

定理對 f^+, f^- 成立 $\Rightarrow$ 定理對 f 成立。

最常見的座標變換，在平面上，有極座標變換。$\mathbb{R}^3$ 中有圓柱座標及球面座標，在初微中都已熟悉，在此重述如下：

1. 平面上極座標變換：$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$
   $(x, y) \in \Omega \Leftrightarrow (r, \theta) \in D$，則
   $$\int_\Omega f(x, y)dxdy = \int_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,drd\theta$$
2. $\mathbb{R}^3$ 中圓柱座標變換：$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$
   $(x, y, z) \in \Omega \Leftrightarrow (r, \theta, z) \in D$，則
   $$\int_\Omega f(x, y, z)dxdydz = \int_D f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)r\,drd\theta dz$$
3. $\mathbb{R}^3$ 中球面座標變換：$x = (r\sin\varphi)\cos\theta, y = (r\sin\varphi)\sin\theta, z = r\cos\varphi$

   $$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = -r^2\sin\varphi$$

   $(x, y, z) \in \Omega \Leftrightarrow (r, \theta, \varphi) \in D$，則
   $$\int_\Omega f(x, y, z)dxdydz = \int_D f(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\,drd\theta d\varphi.$$

11.11 曲面面積

a. 回憶曲線長度的求法：

設 Γ 爲平面上一平滑曲線，$P : A_0, A_1, A_2, \cdots, A_n$ 爲 Γ 上的分割，

令 $L(P) = \sum_{i=1}^{n} \overline{A_{i-1}A_i}$

定義 Γ 的弧長 $|\Gamma| = \sup_P L(P)$

這個概念可不可以推廣到曲面上，據以求曲面面積呢？

換言之，設 $S \subset \mathbb{R}^3$ 爲一有界平滑曲面，在 S 上任取 n 點，相鄰三點可定一三角形。

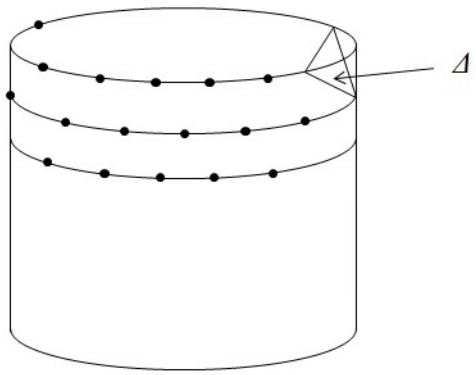
令 $S(P) =$ 諸三角形之面積和

是否可定義 S 的面積 $|S| = \sup_P S(P)$ 呢？

不可！不可！不可！H.Schwartz(1843-1921，德國數學家) 這樣說。

b. Schwartz 的反例

Schwartz 觀察如下的例子：設 S 爲半徑 1、高 1 的圓柱面



1. 將圓周 n 等分，高 m 等分

   第 1、3、5、$\cdots$ 環等分點對齊
   第 2、4、6、$\cdots$ 環等分點對齊

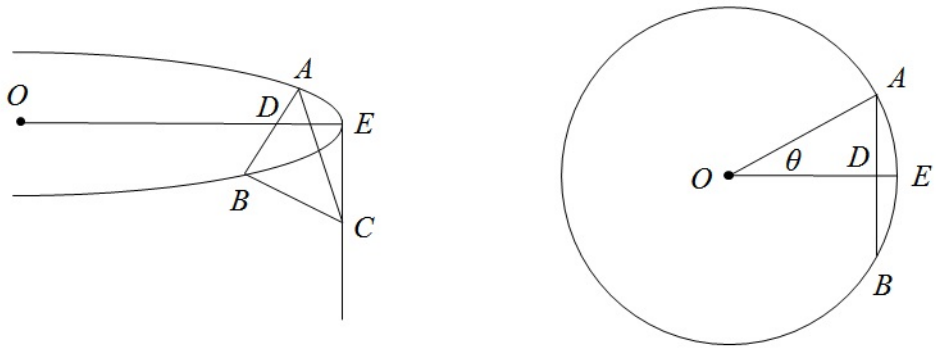
   奇數環和偶數環互相對稱錯開

2. 任意相鄰三點定一三角形，諸三角形全等，令 Δ 表這些三角形面積。
3. 每一環有 $2n$ 個 Δ，共 m 環，故諸三角形面積和

$$S_{m,n} = 2mn\Delta$$

4. $\Delta = ?$

   如圖，$\Delta = \dfrac{1}{2}\overline{CD} \cdot \overline{AB}$



(a) (b)

令

$$\begin{aligned}
\theta = \angle AOD &= \frac{\pi}{n} \\
\overline{AB} &= 2\sin\theta = 2\sin\frac{\pi}{n} \\
\overline{DE} &= 1-\cos\theta = 1-\cos\frac{\pi}{n} \\
\overline{CD} &= \sqrt{\overline{CE}^2+\overline{DE}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2+\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2}
\end{aligned}$$

$\therefore$

$$\Delta = \sin\frac{\pi}{n}\cdot\sqrt{\frac{1}{m^2}+\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2}$$

$$\begin{aligned}
S_{m,n} &= mn\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{\frac{1}{m^2}+\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2} \\
&= n\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{1+\left[m\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)\right]^2}
\end{aligned}$$

5. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

   取 $m=n^3$，發現 $S_{m,n}\to\infty$ 當$n\to\infty$

   而圓柱面積 $S=2\pi$，上面的推論顯然謊謬！

c. 爲什麼會有這麼大的差異呢？

1. 曲線的情形，以 $\Gamma=\{(x,f(x)|a\le x\le b\}$ 爲例，

   將 $[a,b]$ 作分割 $P: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$

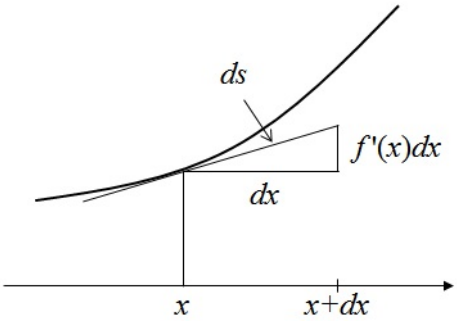
   $A_i=(x_i,f(x_i))$

   $\overline{A_{i-1}A_i}=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+[f(x_i)-f(x_{i-1})]^2}=\sqrt{1+f'(\xi_i)^2}\Delta x_i$

   $L(P)=\sum\sqrt{1+f'(\xi_i)^2}\Delta x_i\to\displaystyle\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx$ 當$\|P\|\to 0$

   $ds=\sqrt{1+f'^2(x)}dx$

圖示之：



即：曲線的弧元恆沿切方向計算，和曲線很貼切。

2. 上述 Schwartz 的例子，$m = n^3$

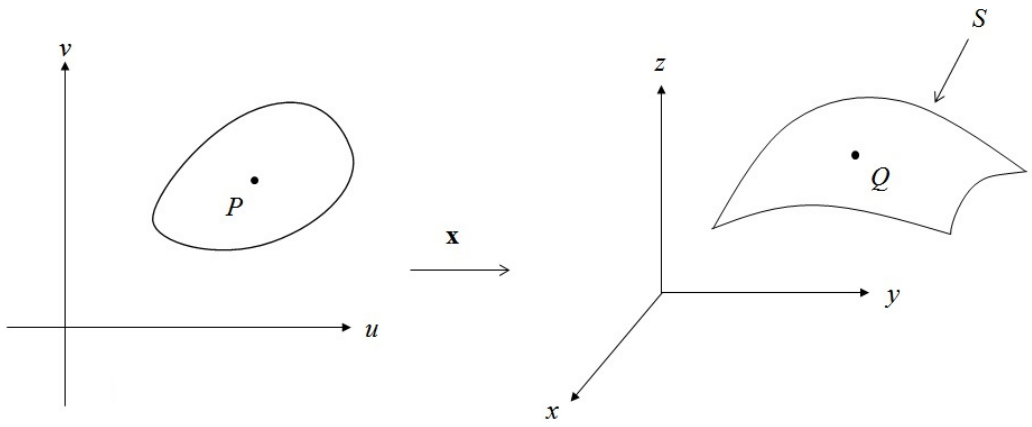
圓周上作 10 等分，鉛直方向作 10^3 等分
圓周上作 100 等分，鉛直方向作 10^6(一百萬) 等分

當 n 很大時，那些諸 Δ 不是貼著柱面走，而是近乎垂直於柱面走，弄出來的東西當然不會是柱面面積了。

d. 該怎麼辦？

沿切平面逼近就對了！

設 $S = \{(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) | (u,v) \in D\}$
令 $\mathbf{x} = (x, y, z)$，表此寫像



$\mathbf{x}$: $P(u_0,v_0) \to Q(x_0,y_0,z_0)$

(i) 固定 $v = v_0$，$L_{v_0}(u) = (u, v_0)$ 爲平行 u 軸直線，
$\Gamma_{v_0} = \mathbf{x}(u, v_0)$

Γ_{v_0} 在 Q 點的切向量 $\mathbf{a} = \mathbf{x}_u(u_0, v_0)$

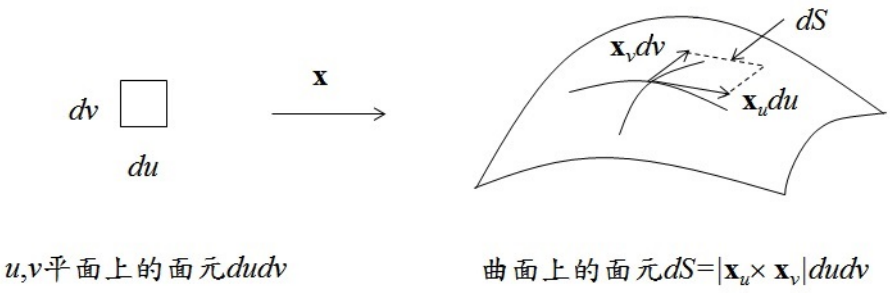
當 u 沿 L_{v_0} 上有微小增量 du，相應於 Γ_{v_0} 上切方向的增量爲 $\mathbf{x}_u(u_0, v_0)du$

(ii) 固定 $u = u_0$，$L_{u_0}(v) = (u_0, v)$ 爲平行 v 軸直線，
$\Gamma_{u_0} = \mathbf{x}(u_0, v)$

Γ_{u_0} 在 Q 點的切向量 $\mathbf{b} = \mathbf{x}_v(u_0, v_0)$

當 v 沿 L_{u_0} 上有微小增量 dv，相應於 Γ_{u_0} 上切方向的增量爲 $\mathbf{x}_v(u_0, v_0)dv$

將 (i)(ii) 圖示如下：



$\mathbf{x}_u du, \mathbf{x}_v dv$ 所張平行四邊形面積爲 $|\mathbf{x}_u du \times \mathbf{x}_v dv|$

令 $dS = |\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| dudv$，即爲曲面 S 上的面元。

定義：S 的面積 $|S| = \int_D |\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| dudv$

$$|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| = \left\| \begin{matrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{matrix} \right\| = \sqrt{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}^2}$$

故

$$|S| = \iint_D \sqrt{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}^2} dudv$$

當 $S = \{(x, y, f(x, y)) | (x, y) \in D\}$ 表函數型曲面，

$dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dxdy$

$|S| = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dxdy$

(第十一章全文完)

102學年度高等微積分(下) 習題十一

1. f在$[a,b]$上有界
   (a) f^2在$[a,b]$上Riemann可積分$\not\Rightarrow f$在$[a,b]$上Riemann可積分，試舉一例。
   (b) f^3在$[a,b]$上Riemann可積分$\Rightarrow f$在$[a,b]$上Riemann可積分，試證之。
   (c) $f>0$，$\log f(x)$在$[a,b]$上可積分$\Rightarrow f$在$[a,b]$上可積分。

2. $A\subset[0,1]$，$\chi(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases}$，稱爲$A$的特徵函數(characteristic function)。"若χ_A在$[0,1]$上Riemann可積，且$\int_0^1\chi_A(x)dx>0$，則$\exists$open interval I使$A\supset I$." 上述命題正確否？

3. (a) $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x\le 1\\ -1 & -1\le x<0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，$g(x)=\chi_{[0,\delta]}(x)$，$\delta>0$.
   試作$(f*g)(x)=\int f(t)g(x-t)dt$的圖形。
   (b) f在$[0,1]$上Riemann可積，g如前。試證：$f*g$連續(視$f=0$當$x\notin[0,1]$)。
   (c) f,g在$[0,1]$上Riemann可積，則$f*g$連續，試證之。

4. f在$[a,b]$上Riemann可積分，試求：
$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)|\sin nx|dx$$
   之值。

5. f在$(-\infty,\infty)$上瑕可積(improperly integrable)，試證：
   (a) $\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\dfrac{1}{x})dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$。
   (b) $\int_{-\infty}^{\infty}f(x+\dfrac{x}{1-x^2})dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$
   (a)的提示：作$t=x-\dfrac{1}{x}$的圖形，固定t，x有兩根$x_1(t),x_2(t)$，$x_1<0,x_2>0$，將左式化成對t的積分。

6. (a) 決定α之值使$\int_0^\infty\dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx$收斂。
   (b) 試證：$\int_1^\infty\dfrac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x}dx$收斂 (提示：拿它和$\int_1^\infty\dfrac{\sin x}{x}dx$比較)。
   (c) 試證：$\int_1^\infty\dfrac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x+\frac{1}{x}}dx$收斂 (提示：拿它和(b)比較)。從而$\int_0^\infty\dfrac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x+\frac{1}{x}}$收斂。

7. Riemann Lebesgue lemma 也可以如下證明：
   (a) 觀察：$\int_a^b f(x)\sin nxdx=-\dfrac{1}{n}\int_a^b f(x)d\cos nx=-\dfrac{1}{n}[f(x)\cos nx|_a^b-\int_a^b f'(x)\cos nxdx]\to 0$當$n\to\infty$，若$f'$在$[a,b]$上連續。因此，定理對$f\in C^1[a,b]$成立。
   (b) $f\in C[a,b]$，給定$\epsilon>0$，$\exists g\in C^1[a,b]$使$|f(x)-g(x)|<\epsilon\ \forall x\in[a,b]$，$\cdots\cdots$請完成之。

8. (a) $\int_0^\infty|f(x)|dx<\infty$，試證：$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f(x)\sin nxdx=0$。
   (b) $|f|$在$[a,b)$上瑕可積，試證：$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nxdx=0$。

9. 求下列各Riemann Stieltjes積分：
(a) $\int_{-1}^{2} x^5 d|x|^3$。
(b) $\int_0^\infty \frac{1}{x^2} d[x]$。
(c) $\int_0^1 x d[\frac{1}{x}]$。
(d) $\int_0^{10} x d[x]^2$。
(e) $\int_0^{10} x d[x^2]$。

10. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$，$f_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt$，$h > 0$，試證：

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} |f_h(x) - f(x)|dx = 0.$$

11. $f \in BV[a,b]$，$f(x) \geq c > 0\ \forall x \in [a,b]$。試證：$\frac{1}{f} \in BV[a,b]$且$V_a^b\left(\frac{1}{f}\right) \leq \frac{1}{c^2}V_a^b(f)$。

12. $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$，試決定$\alpha$之值使$f \in BV[a,b]$。

13. 試證：$f \in BV[a,b] \Leftrightarrow f$在$[a,b]$上弧長有窮(finite arc length)。

14. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$，我們已知$f \in BV[0,1]$且$f'(0) = 0$。令$g(x) = V_0^x(f)$，問$g$在$x = 0$點可微分否？

15. 汽泡很聰明，它懂經濟學原理，恆以最小表面積去擁有最大體積。假設$\mathbb{R}^3$中等周界不等式成立，今在平面玻璃板上吹一汽泡，問汽泡的形狀。

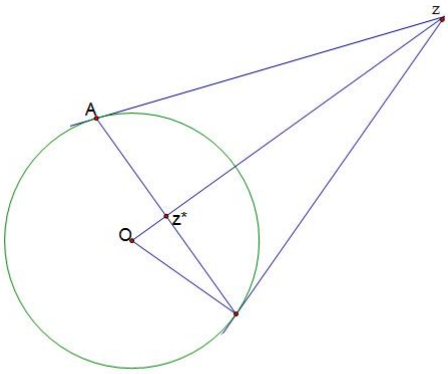
16. (a) 求曲面$z = xy$在$x^2 + y^2 \leq 1$上的面積。
(b) $A : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$、$B : x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 \leq (\frac{1}{2})^2$，求$A \cap B$的體積及表面積。

17. (a) 半徑爲a的二圓柱相互正交，求交集的體積及表面積。
(b) 半徑爲a的三圓柱相互正交，求交集的體積及表面積。

18. (a) $\Omega = \{(x,y)|1 \leq x + y < 2, 0 < x - y < 1\}$，求$\int\int_\Omega xydxdy$之值。
(b) $\Omega = \{(x,y)|1 \leq x^2 - y^2 \leq 2, 1 \leq xy \leq 2\}$，求$\int\int_\Omega \frac{xy(x^2+y^2)}{x^2-y^2}dxdy$之值。
(c) 求四維球$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 \leq a^2$的體積。

19. f, g在$[a,b]$上連續，Range$f \times$Range$g \subset D \subset \mathbb{R}^2$，$\varphi(x,y) \in C^1(D)$。設$P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$爲$[a,b]$上的分割，$\xi_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$。試證：$\sum_P \varphi(f(\xi_i), g(\eta_i))\Delta x_i \to \int_a^b \varphi(f(t), g(t))dt$ 當$||P|| \to 0$。

20. $\Omega:\{z|z\in\mathbb{C},|z|\geq 1\}$，$D=\{z|z\in\mathbb{C},|z|\leq 1\}$。如圖，$z\in\Omega$，過$z$作單位圓$|z|=1$的二切線，設切點爲$A,B$，連$\overline{AB}$，交$\overline{OZ}$(連線)於$z^*$，$z^*$稱爲$z$對單位圓$|z|=1$的鏡射點。
(a) 試證：$\bar{z}\cdot z^*=1$。
(b) 設$T:\underset{\xi+i\eta}{z^*}\underset{\mapsto}{\to}\underset{x+iy}{z}$，$u\in C^1(\Omega)$。試證：$\int\int_{T(A)}u_x^2+u_y^2dxdy=\int\int_A u_\xi^2+u_\eta^2d\xi d\eta$ $\forall A\subset\Omega$。



21. $\{a_{m,n}\}$如下圖：

$$\begin{array}{lllllllll}
a_{1,n} & 0, & 1, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{2^2}, & \frac{1}{2^3}, & \frac{1}{2^4}, & \cdots \\
a_{2,n} & -1, & 0, & 1, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{2^2}, & \frac{1}{2^3}, & \cdots \\
a_{3,n} & -\frac{1}{2}, & -1, & 0, & 1, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{2^2}, & \cdots \\
a_{4,n} & -\frac{1}{2^2}, & -\frac{1}{2}, & -1, & 0, & 1, & \frac{1}{2}, & \cdots
\end{array}$$

試驗證：$\sum_{m=1}^{\infty}(\sum_{n=1}^{\infty}a_{m,n})\neq\sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{m=1}^{\infty}a_{m,n})$.

22. (a) $0<x,y<1$，x,y爲有理數，稱x,y爲同分母，若x,y的最簡分式分母相同，令$A=\{(x,y)|x,y$爲有理數，且爲同分母$\}$。$D=[0,1]\times[0,1]$，$f(x,y)=\begin{cases}0 & (x,y)\in A\\ 1 & (x,y)\in D-A\end{cases}$。
試證：$\int_0^1(\int_0^1 f(x,y)dx)dy=\int_0^1(\int_0^1 f(x,y)dy)dx$，但$\int\int_D f(x,y)dxdy$不存在。
(b) $D=[0,1]\times[0,1]$，$f(x,y)=\begin{cases}1 & x\text{爲無理數}\\ 4y^3 & x\text{爲有理數}\end{cases}$
。試證：$\int_0^1(\int_0^1 f(x,y)dy)dx=1$、$\int_0^1(\int_0^1 f(x,y)dx)dy$不存在。

23. 設$B=B_1(0)$表$\mathbb{R}^3$中單位球，
(a) 求$\int\int\int_B\cos kzdxdydz$。
(b) 求$\int\int\int_B\cos(ax+by+cz)dxdydz$。

24. 數列$S=\{x_1,x_2,x_3,\cdots\}\subset[0,1]$，我們稱$S$在$[0,1]$上均勻分佈若對任意$[a,b]\subset[0,1]$。令$A_n=\{x_i|x_i\in[a,b],i=1,2,\cdots,n\}$，則$\lim_{n\to\infty}\frac{\#A_n}{n}=b-a$，其中$\#A_n$表$A_n$的基數。
試證：S在$[0,1]$上均勻分佈$\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}=\int_0^1 f(x)dx$，對一

切Riemann可積函數f成立。
(Polyz and Szegö - Problems and Theorems in Analysis I, p.88 #162)

25. 承上，令$S_n(a,b)=\sum_{x_i\in A_n} x_i$，試證：$\lim_{n\to\infty}\dfrac{S_n(a,b)}{n}=\dfrac{b^2-a^2}{2}$。
(Polyz and Szegö - Problems and Theorems in Analysis I, p.88 #163)

26. (a) $f\in C^2(0,\infty)$，$\int_0^\infty |f(x)|dx<\infty$，$f$未必是bounded，試舉一例。
(b) 若加上$\int_0^\infty |f''(x)|dx<\infty$這條件限制，試證：$\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$且$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$。

102 學年度台灣大學數學系高等微積分下
由陳金次教授製作，以創用 CC 姓名標示-
非商業性-禁止改作 3.0 台灣 授權條款釋出

Chapter 12

形上觀微積分基本定理

12.1 引言

邏輯的推演與論証固然是數學的核心部分，但定理的提出則在邏輯推演之前，你怎麼知道要提它，並試著想証明它？那是基於你內在心靈的判斷，這件事應該是對的，我試著來証証看。証出來就是定理，証不出來就成 conjecture，留待後人來回答。

一個人能提出 conjecture，絕非泛泛之輩。它對相關內容一定有極深入的了解，因了解而有形而上的感覺，因有此感覺，故能直入問題的核心、思考、提問。

不只數學如此，世間任何學問無不如此，即使是人文歷史，也是如此。對歷史有深入了解的人，能在大方向上預測歷史。

這一章裡，我將把微積分基本定理提到形而上的層次，用它來統觀相關定理。

首先，由物理中直線上的質點運動來看，設 $S(t)$ 表質點在 $[0,t]$ 區間內的里程，則

$$\frac{dS(t)}{dt} = v(t)$$

表質點在 t 時刻的瞬時速度。

$v(t)$ 在 $[0,t]$ 區間內的積分：

$$\int_0^t v(\tau)d\tau$$

要還原成 $[0,t]$ 上的里程，簡單記作：

$$\frac{dS}{dt} = v \Rightarrow \int v\ dt = S$$

又如 Ω 表空間中一物體，$P \in \Omega$，在 P 點附近任取一適當領域 V 包含 P。設 $M(V)$ 表 V 的質量，則

$$\lim_{V \to P} \frac{M(V)}{V} = \rho(P) \quad (V\text{表體積})$$

表 P 點的密度。

反之，若 ρ 給定，則又有

$$\int_V \rho \, dV = M(V)$$

換言之，質量對體積微分得到密度；密度對體積積分要還原成質量，簡記作：

$$\frac{dM}{dV} = \rho \Rightarrow \int \rho \, dV = M$$

抽象化：

石頭對時間微分＝泥沙，則泥沙對時間積分要還原成石頭，簡記作：

$$\frac{d(\text{石})}{dt} = \text{泥沙} \Rightarrow \int \text{泥沙} \, dt = \text{石}$$

抽象之：

$$\frac{dQ}{dP} = R \Rightarrow \int R \, dP = Q$$

12.2 曲線曲率

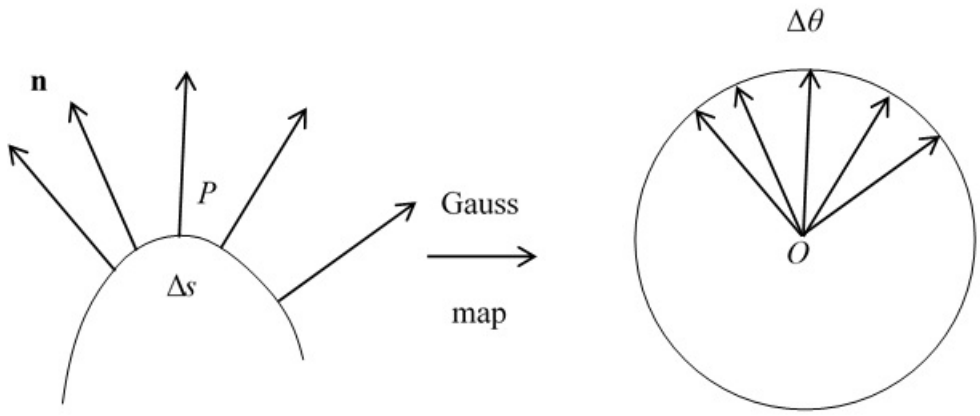
你走北宜公路，要下宜蘭平原之前有著名的九彎十八拐，道路彎曲得很厲害。
什麼叫彎曲得很厲害？你在台北仁愛路上開車，不覺得彎曲，因你走了半天，方向幾乎不變。
你在九彎十八拐開車，短短的距離內，方向改變很大，這代表它彎曲得厲害。

速度是單位時間內的位移，
曲率是單位弧長上切向角度的變量。

注意：切向角度的變量即法向角度的變量。

數學上的定義：

設 Γ 爲平面上一平滑曲線，$P \in \Gamma$，在 Γ 附近任取一小弧 $\Delta S, Q \in \Delta S$，令 $\mathbf{n}(Q)$ 表 Γ 在 Q 點的單位法向量，將 $\mathbf{Q}$ 平移至單位圓心：



如圖，諸 $\mathbf{n}(Q)$ 在單位圓周上，掃出的弧長即法向量在 Δs 上法向角度的變量。

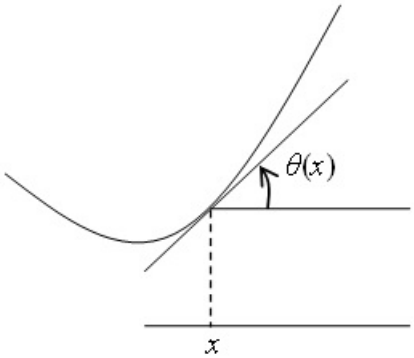
定義：$\kappa(P) = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \dfrac{\Delta\theta}{\Delta s}$ (此處 Δs 代表 Δs 的弧長)

亦即：$\kappa = \dfrac{d\theta}{ds}$

亦即：曲率＝法 (切) 向角對弧長微分。

(a) 函數型曲線

設 $\Gamma = \{(x, f(x)) | a \le x \le b, f \in C^1[a,b]\}$，爲便於計算，考慮切向角的變率。令 $\theta(x) =$ 曲線 Γ 在 x 點的切線與 x 軸正向間的夾角。



則 $\theta = \tan^{-1} f'(x)$,

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{f''(x)}{1 + (f'(x))^2}$$

又 $s(x) = \displaystyle\int_a^x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dt$，$\therefore \dfrac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$，故

$$\kappa(x) = \frac{d\theta}{ds} = \frac{\frac{d\theta}{dx}}{\frac{ds}{dx}} = \frac{f''(x)}{[(1 + (f'(x))^2]^{3/2}}$$

(b) 參數型

設 $\Gamma = \{(x(t), y(t) | a \le t \le b\}$ 表平面上一參數曲線，則 (x', y') 表 Γ 於 $(x(t), y(t))$ 點的切向量。$\theta = \tan^{-1} \dfrac{y'}{x'}$ 表切向量與 x 軸正向所夾之角，$s(t) = \displaystyle\int_a^t \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$，

則 $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{y''x' - x''y'}{x'^2 + y'^2}$，$\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$，故

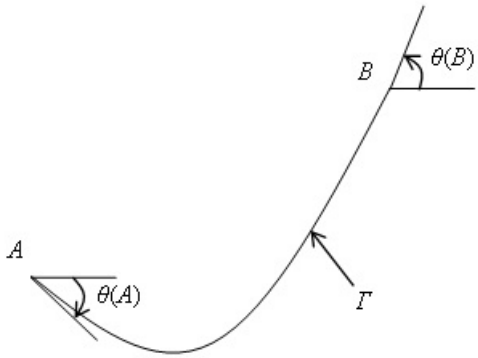
$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{\frac{d\theta}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

(c) 形上觀

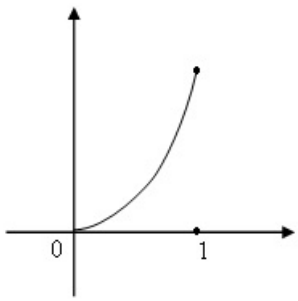
曲率既是切 (法) 向角對弧元微分，那曲率對弧元積分應還原成切 (法) 向量的變量。

<u>定理 **12-1**</u>

$$\frac{d\theta}{ds} = \kappa \Rightarrow \int_\Gamma \kappa ds = \text{切(法)向角在 } \Gamma \text{ 上的變量} = \theta(B) - \theta(A) \tag{1}$$



例 **1.** $\Gamma = \{(x,y)|y = x^2, 0 \le x \le 1\}$，求 $\int_\Gamma \kappa ds$



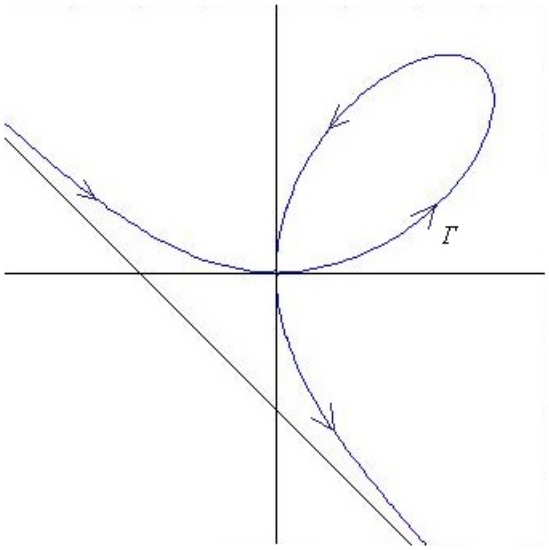
解：$y' = 2x, y'(0) = 0, y'(1) = 2 \ \therefore \theta(0) = 0, \theta(1) = \tan^{-1} 2$，$\theta$ 表切向量與 x 軸正向間的夾角。

依形上觀微積分基本定理，

$$\int_\Gamma \kappa ds = \theta(1) - \theta(0) = \tan^{-1} 2$$

例 **2.** $\Gamma = \{(x,y)|x^3+y^3-3xy, x\geq 0, y\geq 0\}$
表 Descartes 葉形線於第一象限上的部分，求 $\displaystyle\int_\Gamma \kappa ds$

解：Descartes 葉形線如圖



當 x 由 $-\infty \to \infty$，Γ 第一次過 0 點，切向爲 $(1,0)$；第二次過 0 點，切向爲 $(0,-1)$，故切向在 Γ 上的增量爲 $\dfrac{3\pi}{2}$，$\therefore \displaystyle\int_\Gamma \kappa ds = \frac{3\pi}{2}$ (積分方向如箭頭所示)

公式 (1) 的証明：

設 $\Gamma : (x(t), y(t)), a\leq t\leq b$，$\theta(t)$ 表 Γ 在 $(x(t), y(t))$ 的切向與 x 軸正向所夾角，則

$$\int_\Gamma \kappa ds = \int_\Gamma \frac{d\theta}{ds}\cdot ds = \int_\Gamma d\theta = \int_a^b \theta'(t)dt = \theta(b)-\theta(a).$$

12.3 曲面曲率

給定空間中一曲面 S，$P \in S$，如何描述 S 在 P 點的曲率呢？

(a) 高斯曲率

高斯把平面上曲線曲率的概念推廣到曲面上：

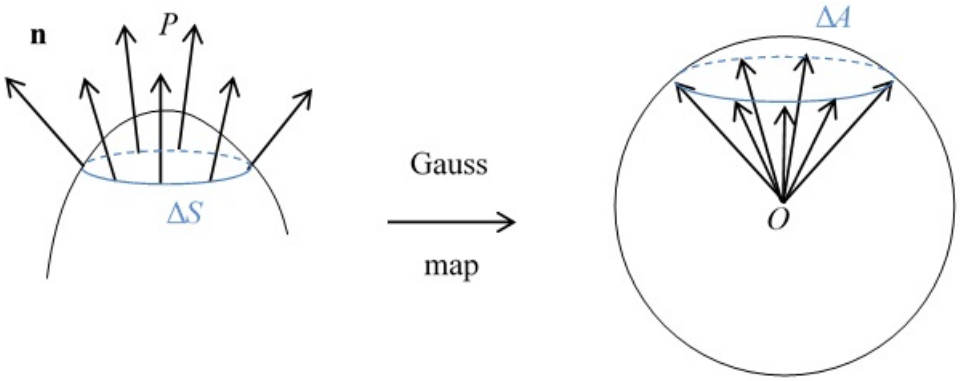
Gauss map

在 P 點附近任取一適當領域 ΔS, $\forall\, Q \in \Delta S$，令 $\mathbf{n}(Q)$ 表曲面 S 在 Q 點朝上的單位法向量。將 $\mathbf{n}(Q)$ 平移至單位球的球心，諸法向量在單位球面上掃描出一領域 ΔA，ΔA 的面積，仍以 ΔA 表示之，表諸法向量所張之立體角。

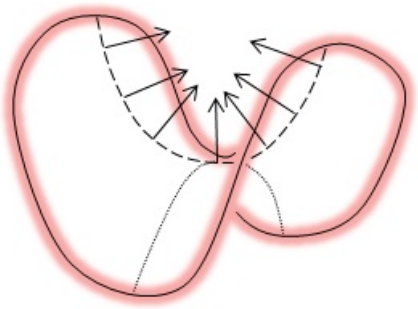
定義：$K(P) = \lim\limits_{\Delta S \to P} \dfrac{\Delta A}{\Delta S}$，$\Delta S, \Delta A$ 此時表 ΔS 與 ΔA 的面積。

上述把 $\mathbf{n}(Q)$ 平移至單位球球心的寫像稱爲 Gauss map.

換言之，所謂曲面的高斯曲率乃法向量所張立體角對面元微分：$K = \dfrac{dA}{dS}$，dS 表曲面 S 上的面元。



Remark: 高斯曲率觀念上如上所述，但當曲面爲馬鞍狀時，它的 Gauss map 顯然和凸曲面有所差別，方向上有所對調，



這時它在單位球面上所張面積，我們就冠以負號以示區別。因此，這種曲面的高斯曲率爲負的。

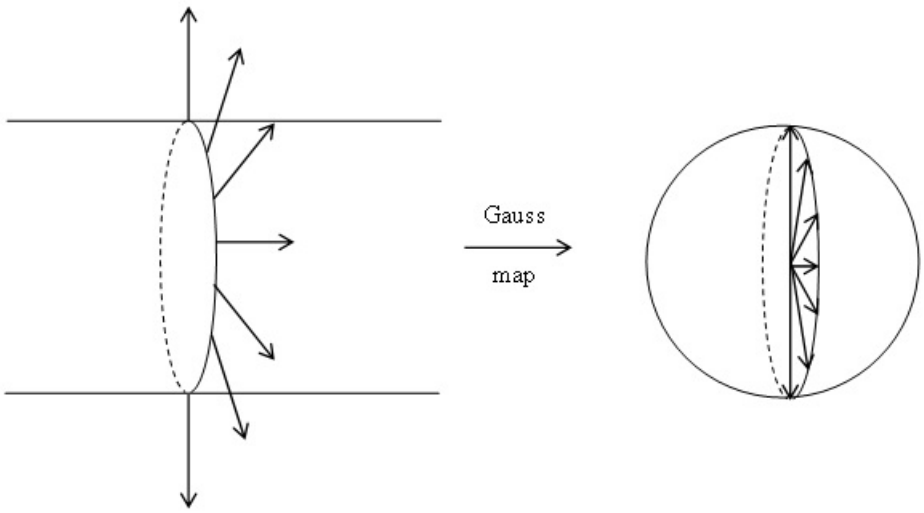
現在我們來觀察一件事情：

平面上的法向量只有一個方向，因此 $\Delta A = 0$，故 $K(P) = 0$

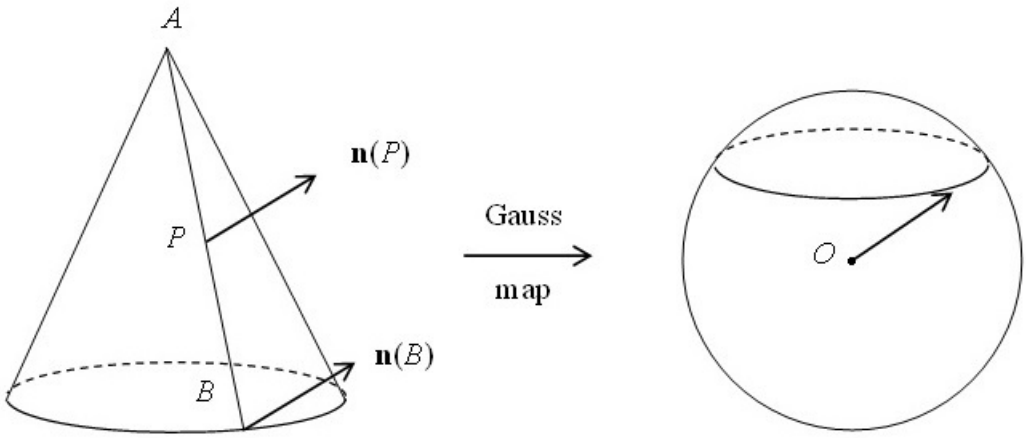
把平面捲起成圓柱狀，其法向量經 Gauss map 後在單位球面上爲一圓弧，故 $\Delta A = 0$

$\therefore K(P) = 0 \ \forall \ P$

怪哉！圓柱的高斯曲率爲 0！



再來看看圓錐 S



如圖，$P \in \overline{AB}$，則 $\mathbf{n}(P) = \mathbf{n}(B)\ \forall\ P$，因此 S 的法向量經 Gauss map 後爲一圓弧，故 $\Delta A = 0\ \forall\ \Delta S$

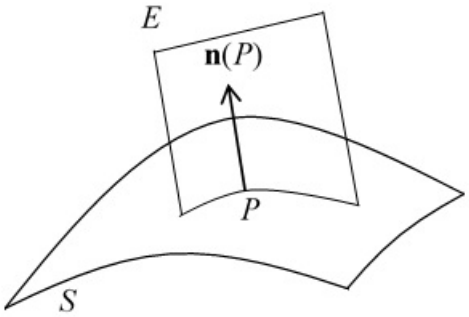
$\therefore K(P) = 0\ \forall\ P \in S$

怪哉！圓錐的高斯曲率也是 0！太離譜了吧！

這是高斯曲率不足之處，但並不是說它不好，它需要另一個曲率來和它作伴，這個曲率數學上稱爲均曲率 H，有了 K 和 H，曲面 S 的彎曲就可以清晰地描述了。

(b) 均曲率 (Mean curvature)

設 S 爲 $\mathbb{R}^3$ 中平滑曲面，$P \in S$，設 $\mathbf{n}(P)$ 爲 S 在 P 點法向量，E 爲過 P 點平面，$\mathbf{n}(P) \in E$，則 $\Gamma = S \cap E$ 爲 E 上一平滑曲線，Γ 在 P 點的曲率 $\kappa(P)$ 可定義。



想像 $\mathbf{n}(P)$ 爲軸，E 爲以 $\mathbf{n}(P)$ 爲轉軸的一扇門，門開到哪裡，那裏就有 Γ，因此就有 $\kappa(P)$

令 $\kappa_1(P) = \max\limits_{E} \kappa(P) = \max\limits_{0 \le \theta \le \pi} \kappa(\theta)$，$\kappa_2(P) = \min\limits_{E} \kappa(P) = \min\limits_{0 \le \theta \le \pi} \kappa(\theta)$，

$E = E(\theta), 0 \le \theta \le \pi$，$\theta$ 表門與" 牆" 間所開角度，這個牆可以是某一含 $\mathbf{n}(P)$ 的平面 E，

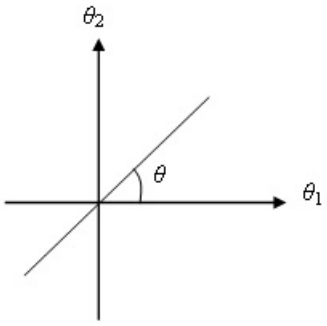
定義：$H(P) = \dfrac{\kappa_1(P) + \kappa_2(P)}{2}$，稱爲曲面 S 在 P 點的均曲率。

以下我引述微分幾何的一些定理：

1. $K(p) = \kappa_1(P) \cdot \kappa_2(P)$
2. κ_1, κ_2 的方向垂直，即 κ_i 若由 $E(\theta_i)$ 所定，$i = 1, 2$，則 $|\theta_1 - \theta_2| = \dfrac{\pi}{2}$

3. 設 $\theta_1 = 0, \theta_2 = \dfrac{\pi}{2}$，則由 E_θ 所定之曲線 Γ_θ，其於 P 點的曲率爲 $\kappa(\theta)$，則

$$\kappa(\theta) = \kappa_1 \cos^2\theta + \kappa_2 \sin^2\theta \ - \ \text{Euler formula}$$



4. $H(P) = \kappa_1(\theta) + \kappa_2(\theta + \dfrac{\pi}{2})$
5. 若曲面 S 由函數 $z = f(x,y), (x,y) \in \Omega$ 所描述，$P(x,y,f(x,y)) \in S$，則

$$\begin{aligned} K(P) &= K(x,y) = \frac{f_{xx} \cdot f_{yy} - {f_{xy}}^2}{(1+f_x^2+f_y^2)^2} \\ H(P) &= H(x,y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+f_y^2)f_{xx} - 2f_x \cdot f_y \cdot f_{xy} + (1+f_x^2)f_{yy}}{(1+f_x^2+f_y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

這些定理，在微分幾何裡都會學到，在此介紹給同學認識。

現在回過頭來看 K, H 及 Euler formula

K, H 已知，則 κ_1, κ_2 可求；κ_1, κ_2 既知，則 $\kappa(\theta)$ 可由 Euler formula 求出。

換言之，K, H 決定了曲面任何方向的曲率，K, H 已知，則曲面彎曲的內容清晰在目。

Gauss 曲率和均曲率是研究曲面性質的兩大要素。

Gauss 曲率和曲面的幾何性質息息相關，
均曲率則和物理性質息息相關。

例如，把一封閉的鐵絲線圈放入肥皂水中，取出，線圈內會掛著一張曲面 S，這個 S 數學上稱爲最小曲面，其均曲率處處爲 0。

把吸管一端放入肥皂水中，取出，在任意曲面上吹一氣泡 S，則 S 爲一常均曲率曲面 (constant mean curvature surface) 且垂直於給定曲面。

我們都聽過阿基米德的故事，當他發現浮力原理時，高興得從浴缸裡跳出來，在街上狂奔，大呼 Eurika！Eurika！Eurika！

高斯也有類似的經驗，不過他比較保守，得意之餘把他的發現稱作 Theorema Egregium，意思是 Theorem of the King，並沒有在街上大喊 Eurika！

所謂 Theorema Egregium 是指：在保距變換下，高斯曲率不變。

例如平面的高斯曲率是 0，把它捲成圓柱或圓錐，並沒有改變其上的內蘊賦距，故高斯曲率都是 0。

均曲率則隨你擺放的形狀而變。平面的均曲率爲 0，捲成圓柱或錐面，其均曲率改變了。

我們可以這樣子來了解：

Gauss 曲率是曲面內蘊的性質，不隨你擺放的形狀而變。
均曲率是外爍曲率，隨你擺放的形狀而異。

打一個比方，變色龍 Akola 走到哪裡都是 Akola，不論外在環境如何，他的身體如何擺放，不過它的顏色卻隨外在環境而調整改變，那不變的就是 Gauss 曲率，那調整的就是均曲率。

當一 compact smooth surface S，高斯曲率恆常，問 S 是否爲球面？這是十九世界末數學上的一個重要問題，1899 年 H.Liebmann 証明它是對的。

Gauss Theorema Egregium 和 Liebmann 的定理說明了球是剛性的，即：你把球變形，都會改變其上的賦距。

相對於 Liebmann 的定理，人們自然會問：

當一個 compact smooth surface 均曲率恆常，問：S 是否爲一球面？這就是數學上有名的 Hopf conjecture.

Hopf 於 1952 年証明定理成立，若 S 和球同構。

Alexandrov 於 1956 年証明定理成立，若 S 不自相交 (附錄 B)，對一般的曲面 S，定理不成立，H.Wente 於 1985 年給出了反例。

以上當作故事，聽聽就好。

(c) 形上觀

<u>定理 **12-2**</u>

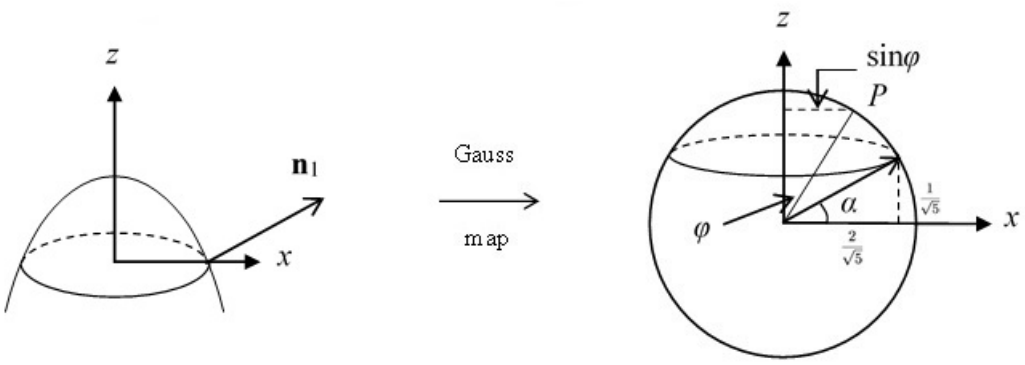
由 $\dfrac{dA}{dS} = K \Rightarrow \displaystyle\int_S K dS = A(S) = S$ 上法向量在單位球面上所張立體角。

例. 拋物線 $z = 1 - x^2, -1 \le x \le 1$，對 z 軸旋轉一圈，得旋轉面 S，令 K 表其上的高斯曲率，求 $\displaystyle\int_S K dS$

分析：

1. 根據形上觀微積分基本定理，

$$\int_S K dS = A(S) = S \text{ 上諸法向量經 Gauss map 後在單位球面上所張面積 (立體角)}$$



2. $z'(x) = -2x, z'(1) = 2, \mathbf{n}_1 = \mathbf{n}(1,0,0) = (2,0,1)/\sqrt{5}$，經 Gauss map 後諸法向量所張立體角爲上半單位球面在 $z \ge \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ 上的面積。

3. 設 $P \in A(S)$，ϕ 表 $\overline{OP}$ 與 z 軸間的夾角，則

$$\begin{aligned} A(S)(\text{面積}) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha} 2\pi \sin\phi \cdot d\phi \\ &= 2\pi \ (1-\cos\phi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \\ &= 2\pi(1-\sin\alpha) \\ &= 2\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \end{aligned}$$

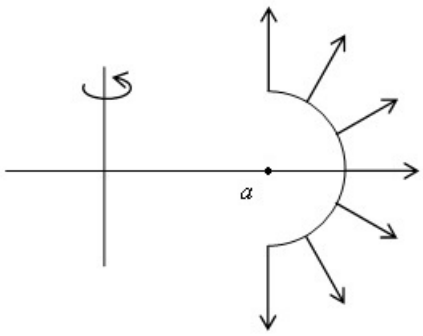
故 $\displaystyle\int_S K dS = 2\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

驗證；$z = 1-(x^2+y^2), z_x = -2x, z_y = -2y, z_{xx} = -2, z_{xy} = 0, z_{yy} = -2$
$K = \dfrac{z_{xx}\cdot z_{yy} - z_{xy}}{(1+z_x^2+z_y^2)^2} = \dfrac{4}{[1+4(x^2+y^2)]^2}, dS = \sqrt{1+4(x^2+y^2)}dxdy$

令 $D = \{(x,y)|x^2+y^2 \le 1\}$，則

$$\begin{aligned}
\iint_S KdS &= 4\iint_D \frac{dxdy}{[1+4(x^2+y^2)]^{3/2}} \\
&= 8\pi\int_0^1 \frac{1}{(1+4r^2)^{3/2}} rdr \\
&= \pi\int_0^1 \frac{1}{(1+4r^2)^{3/2}} d(1+4r^2) \\
&= \pi\left[-2(1+4r^2)^{-\frac{1}{2}}\right]\Big|_0^1 \\
&= 2\pi\left(1-\sqrt{5}\right)
\end{aligned}$$

例. $\Gamma : (x-a)^2+y^2 = b^2, x \ge a, a > b$，$\Gamma$ 對 y 軸旋轉得輪胎外側 S^+，求 $\displaystyle\int_{S^+} KdS$.



解：Γ 上的法向量沿經線自北極至南極，旋轉一圈後佈滿至整個球面，故

$$\int_{S^+} KdS = 4\pi$$

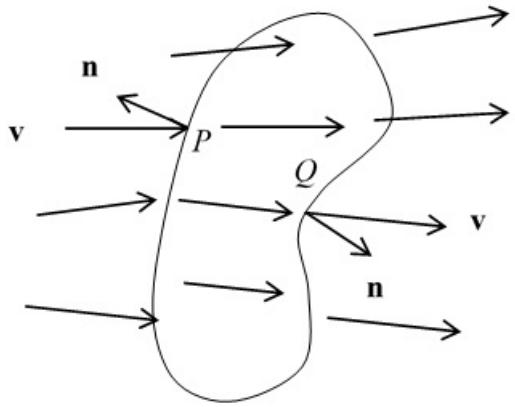
定理 12-2 的証明就留待給微分幾何的老師吧。

12.4 淨流量與散度定理

A. $\mathbb{R}^2$ 中的散度定理

a. 淨流量

設 $\mathbf{V}$ 爲 $\mathbb{R}^2$ 中一向量場，Ω 爲 $\mathbb{R}^2$ 中片段平滑封閉領域。$\mathbf{n}$ 爲 $\partial\Omega$ 上朝外單位法向量，



定義：

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}ds$$

爲 $\mathbf{v}$ 在 Ω 上的淨流量，其中 ds 表 $\partial\Omega$ 上的弧元。

b. 散度

設 P 爲 $\mathbf{V}$ 之定義域中的給定點，在 P 點附近任取一適當領域 D，考慮：

$$\frac{1}{|D|}\int_D \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}ds$$

其中 $|D|$ 表 D 的面積。此式表示 $\mathbf{V}$ 在 D 上的平均淨流量。

若 $\lim\limits_{D\to P}\dfrac{1}{|D|}\displaystyle\int_D \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}ds$ 存在，我們稱此極限爲 $\mathbf{V}$ 在 P 點的散度 (Divergence)，

以 $\mathrm{div}\mathbf{V}(P)$ 表示之。

$$\mathrm{div}\mathbf{V}(P) = \lim_{D\to P}\frac{1}{|D|}\int_D \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}ds \tag{2}$$

其意爲單位面積上的淨流量。

對 (2) 式，我們可以這樣理解：

散度是淨流量對面積微分

c. 形上觀－散度定理

散度既是淨流量對面積微分：

$$\frac{d(\text{淨})}{d(\text{面})} = \text{散}$$

依形上觀微積分基本定理：

$$\text{散度對面積積分要還原成淨流量：} \int_{\Omega} \text{散}\ d(\text{面}) = \text{淨}(\Omega)$$

更精確地說即：

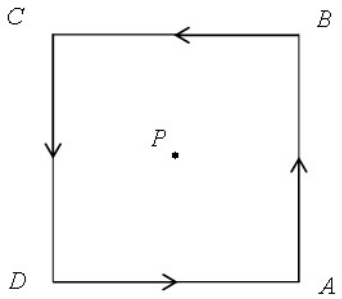
<u>定理 **12-3**</u> 二維的散度定理 (The Divergence Theorem in $\mathbb{R}^2$)

$$\int_{\Omega} \text{div}\mathbf{V}\ dxdy = \int_{\partial\Omega} \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\ ds \quad (\mathbf{V}\text{在}\Omega\text{上的淨流量}) \tag{3}$$

d. 對直角坐標系的表示式

給定直角坐標系，設 $\mathbf{V}$ 對此坐標系可表爲 $\mathbf{V} = (A(x,y), B(x,y))$，div$\mathbf{V}$ 如何表示？

設 $P = (x_0, y_0)$，在 P 點附近取 $G = [x_0-h, x_0+h]\times[y_0-h, y_0+h]$，$\partial G = \square ABCD$，如圖所示，



$$\begin{aligned}\int_{\partial G} \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}ds &= \left(\int_A^B + \int_C^D \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}ds\right) + \left(\int_B^C + \int_D^A \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}ds\right)\\ &= \qquad I_1 \qquad\qquad + \qquad\qquad I_2\end{aligned}$$

注意：

於 $\overline{AB}$ 上，$\mathbf{n} = (1,0), ds = dy$
於 $\overline{CD}$ 上，$\mathbf{n} = (-1,0), ds = -dy$

於是有：

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_{y_0-h}^{y_0+h} [A(x_0+h,y) - A(x_0-h,y)]dy\\ &= [A(x_0+h,\eta) - A(x_0-h,\eta)]\cdot 2h, \quad y_0-h<\eta<y_0+h\\ &= A_x(\xi,\eta)(2h)^2, \quad \xi = \xi(\eta) \in (x_0-h, x_0+h)\end{aligned}$$

$\therefore \lim_{G\to P} \frac{1}{|G|} \cdot I_1 = A_x(x_0, y_0)$

同理，$\lim_{G\to P} \frac{1}{|G|} \cdot I_2 = B_y(x_0, y_0)$，故

$$\text{div}\mathbf{V}(x_0, y_0) = A_x(x_0, y_0) + B_y(x_0, y_0) \tag{4}$$

又設 $\partial\Omega = (x(t), y(t))$，逆時向參數，$\mathbf{T} = (x', y')/\sqrt{x'^2 + y'^2}$ $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}$
$\Rightarrow \mathbf{T}ds = (x', y')dt = (dx, dy)$

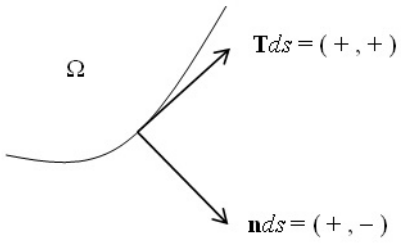
而 $\mathbf{n}ds \perp \mathbf{T}ds$

$\therefore$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}ds &= (-dy, dx) \ \cdots \ \text{(i)} \\ &= (dy, -dx) \ \cdots \ \text{(ii)} \end{aligned}$$

取哪一個呢？

如果 $\mathbf{T}ds$ 落第一象限，$(dx, dy) = (+, +)$，$\mathbf{n}$ 爲 $\partial\Omega$ 上朝外法向量，$\mathbf{n}ds$ 應指向第四象限，$\mathbf{n}ds = (+, -)$，故應取 (ii)，即：$\mathbf{n}ds = (dy, -dx)$



$\therefore$

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \ ds = \int_{\partial\Omega} -Adx + Bdy$$

代入 (2)，得 Divergence 定理對直角坐標系的表示式爲：

$$\int_{\Omega} (A_x + B_y)dxdy = \int_{\partial\Omega} -Adx + Bdy \tag{5}$$

回憶 Green's 定理：

$$\int_{\partial\Omega} Pdx + Qdy = \int_{\Omega} (Q_x - P_y)dxdy \tag{6}$$

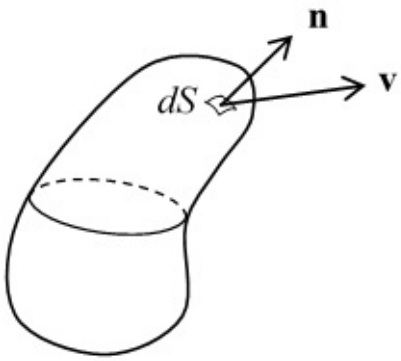
(5) $\Leftrightarrow$ (6)，取 $P = -A, Q = B$。

換言之，在 $\mathbb{R}^2$ 中，Divergence 定理和 Green's 定理是等價的。

B. $\mathbb{R}^3$ 中的散度定理

a. 淨流量

設 $\mathbf{V}$ 爲 $\mathbb{R}^3$ 中一向量場，Ω 爲 $\mathbb{R}^3$ 中片段平滑封閉領域，$\mathbf{n}$ 爲 $\partial\Omega$ 上朝外單位法向量，



定義：

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\ dS$$

爲 $\mathbf{V}$ 在 Ω 上的淨流量。(dS 表 $\partial\Omega$ 上的曲面面元)

b. 散度

設 P 爲 $\mathbf{V}$ 之定義域中的給定點，在 P 點附近任取一適當領域 D，考慮：

$$\frac{1}{|D|}\int_D \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\ dS,\quad |D|\text{表}D\text{的體積}$$

此爲 $\mathbf{V}$ 在 D 上的平均淨流量，若

$$\lim_{D\to P}\frac{1}{|D|}\int_D \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\ dS$$

存在，我們稱此極限爲 $\mathbf{V}$ 在 P 點的散度 (Divergence)，以 $\mathrm{div}\mathbf{V}(P)$ 表示之，即

$$\mathrm{div}\mathbf{V}(P)=\lim_{D\to P}\frac{1}{|D|}\int_D \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\ dS \tag{7}$$

上式表示單位體積上的淨流量。

對 (7) 式，我們可以這樣理解：

散度是淨流量對體積微分

依形上觀微積分基本定理，

散度對體元在 Ω 上積分要還原成 Ω 上的總淨流量

即：

<u>定理 **12-4**</u> ($\mathbb{R}^3$ 中的散度定理)

$$\int_{\Omega} \mathrm{div}\mathbf{V} d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \tag{8}$$

當然 (7) 式左右兩邊必須是可積分。爲確保此，我們假設：

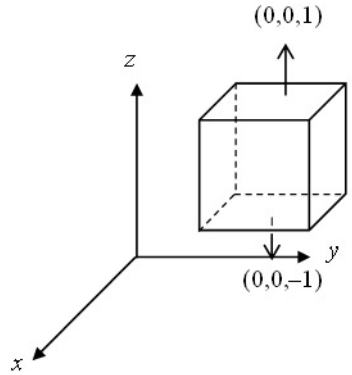
(i) $\mathbf{V} \in C^1(\Omega)$

(ii) $\partial\Omega$ 爲 Piecewise smooth

今給定直角坐標系，設 $\mathbf{V}$ 對此坐標系的表示爲 $\mathbf{V} = (A(x,y,z), B(x,y,z), C(x,y,z))$，$P(x_0, y_0, z_0)$ 爲定義域中給定點，

取 $D = [x_0 - h, x_0 + h] \times [y_0 - h, y_0 + h] \times [z_0 - h, z_0 + h]$，

$$\mathrm{div}\mathbf{V}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{(2h)^3} \int_{\partial D} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \; dS = ?$$



看上下兩片正方形，上片：$\mathbf{n} = (0,0,1)$，下片：$\mathbf{n} = (0,0,-1)$，

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} &= C(x, y, z_0 + h) \text{ 在上片} \\ &= -C(x, y, z_0 - h) \text{ 在下片} \end{aligned}$$

因此 $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$ 在此上下兩片的積分爲

$$\begin{aligned} &\int_{D_{xy}} [C(x, y, z_0 + h) - C(x, y, z_0 - h)] dxdy \\ &(D_{xy} = [x_0 - h, x_0 + h] \times [y_0 - h, y_0 + h]) \\ &= [C(\xi, \eta, z_0 + h) - C(\xi, \eta, z_0 - h)] \cdot area(D_{xy}), \; \xi, \eta \in D_{xy} \\ &= C_z(\xi, \eta, \zeta)(2h)^3, \quad z_0 - h < \zeta < z_0 + h \end{aligned}$$

故

$$\lim_{h \to 0} \frac{\text{上下兩片淨流量}}{(2h)^3} = C_z(x_0, y_0, z_0)$$

同理，

$$\lim_{h\to 0}\frac{\text{前後兩片淨流量}}{(2h)^3}=A_x(x_0,y_0,z_0)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\text{左右兩片淨流量}}{(2h)^3}=B_y(x_0,y_0,z_0)$$

故

$$\mathrm{div}\mathbf{V}(x_0,y_0,z_0)=A_x(x_0,y_0,z_0)+B_y(x_0,y_0,z_0)+C_z(x_0,y_0,z_0)$$

設 $\mathbf{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 表 $\partial\Omega$ 上朝外單位法向量，則 (8) 對直角坐標系的表示式可寫成

$$\int_\Omega A_x+B_y+C_z\ dxdydz=\int_{\partial\Omega}(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)dS \tag{9}$$

散度定理的証明：

我們以下証明 (9) 式成立，注意：

$$\begin{aligned}dS\cos\gamma &= dxdy\\ dS\cos\beta &= dzdx\\ dS\cos\alpha &= dydz\end{aligned}$$

(i) 設 Ω 不錯，$\partial\Omega$ 可以表成上下兩個函數 $z^+=f(x,y)$ 及 $z^-=g(x,y)$ 的形式，$(x,y)\in\Omega_{xy},\Omega$ 在 x,y 平面上的投影。

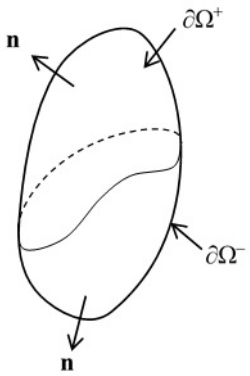
觀察 $\int_\Omega C_z dxdydz$ 這一項：

$$\begin{aligned}\int_\Omega C_z dxdydz &= \int_{\Omega_{xy}}\left(\int_{g(x,y)}^{f(x,y)}C_z dz\right)dxdy\\ &= \int_{\Omega_{xy}}C(x,y,f(x,y))-C(x,y,g(x,y))dxdy\\ &= \int_{\partial\Omega^+}C\cos\gamma dS-\int_{\partial\Omega^-}C\cos\gamma dS\quad(\text{指}\partial\Omega^-\text{上朝上法向量的}\cos\gamma)\\ &= \int_{\partial\Omega}C\cos\gamma dS\end{aligned}$$

(吸收到 $\partial\Omega$ 後，$\partial\Omega$ 上朝外單位法向量在 $\partial\Omega^-$ 上爲朝下，故變號之)

其中

$$\begin{aligned}\partial\Omega^+ &= \{(x,y,f(x,y))|(x,y)\in\Omega_{xy}\}\\ \partial\Omega^- &= \{(x,y,g(x,y))|(x,y)\in\Omega_{xy}\}\end{aligned}$$



同理

$$\begin{aligned}\int_\Omega B_y dxdydz &= \int_{\partial\Omega} B\cos\beta dS\\ \int_\Omega A_x dxdydz &= \int_{\partial\Omega} A\cos\alpha dS\end{aligned}$$

若 $\partial\Omega$ 對 y 軸、對 x 軸都可表示成左右、前後兩個函數的形式。

(ii) 仿 Green's 定理的說明，當 $\partial\Omega$ 含平行於座標軸的平面時定理成立。

(iii) 對一般領域，再仿 Green's 定理的處理，可把 Ω，以平行座標軸的平面切割成 $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \cdots \cup \Omega_N$，每個 Ω_i 滿足 (i) 所要求，定理在 Ω_i 成立 $\forall\, i \Rightarrow$ 定理對 Ω 成立。

例 **1.** S 表單位球面，求 $I = \int_S x^4 dS$ 之值。

分析：

1. 你可以採球面座標 $x = \sin\phi\cos\theta, dS = 1^2\sin\phi d\theta d\phi$，
   $\Rightarrow I = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi}\cos^4\theta\cdot\sin^5\theta d\phi d\theta = \left(\int_0^{2\pi}\cos^4\theta d\theta\right)\left(\int_0^{\pi}\sin^5\phi d\phi\right) = \cdots$
2. 不過 S 是單位球面，$\mathbf{n} = (x, y, z), (x, y, z) \in S$，球無方向性，故

$$\int_S x^4 dS = \int_S y^4 dS = \int_S z^4 dS$$

$\therefore$

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{3}\int_S (x^4 + y^4 + z^4) dS\\ &= \frac{1}{3}\int_S \mathbf{V}\cdot\mathbf{n} dS, \quad \mathbf{V} = (x^3, y^3, z^3)\\ &= \frac{1}{3}\int_\Omega \mathrm{div}\mathbf{V}\ dx\ dy\ dz,\ \Omega: \text{單位球體}\\ &= \int_\Omega r^4\sin\phi\ dr\ d\theta\ d\phi\\ &= \frac{4}{5}\pi\end{aligned}$$

例 **2.** 調和函數的球均定理

設 u 在 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 上調和 (Harmonic)，即

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \text{ 在}\Omega\text{上}, \ u \in C^2(\Omega)$$

$\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Omega$, S_r 爲以 $\mathbf{x}_0$ 爲心，半徑 r 的球面，則 u 在 S_r 上的平均值恆等於 u 在球心的值 $u(\mathbf{x}_0)$， $\forall\ \mathbf{x}_0 \in \Omega$

即：

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0, z_0) &= \frac{1}{|S_r|}\int_{S_r} u\ dS_r \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi} u(x_0 + r\sin\phi\cos\theta, y_0 + r\sin\phi\sin\theta, z_0 + r\cos\phi)\sin\phi\ d\phi\ d\theta \end{aligned}$$

分析：

1. 令 $I(r) = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u(\cdots)\sin\phi d\phi d\theta$
   欲証：$I(r) = u(x_0, y_0, z_0)\ \forall\ r$
   先証：$I(r)$ =constant, 再証此 constant 爲 $u(x_0, y_0, z_0)$

2. $\dfrac{d}{dr}I(r) = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\partial}{\partial r}u(\cdots)\sin\phi\ d\phi\ d\theta$
   (不妨大膽地把微分號搬進去)
   $= \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(u_x\cdot x_r + u_y\cdot y_r + u_z\cdot z_r)\sin\phi\ d\phi\ d\theta$
   $= \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(u_x\cdot\sin\phi\cos\theta + u_y\cdot\sin\phi\sin\theta + u_z\cos\phi)\sin\phi\ d\phi\ d\theta$
   $= \dfrac{1}{4\pi r^2}\displaystyle\int_{S_r}\nabla u\cdot\mathbf{n}dS_r$
   ($dS_r = r^2\sin\phi\ d\phi\ d\theta, \mathbf{n} = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)$ 爲 S_r 上朝外單位法向量)
   $= \dfrac{1}{4\pi r^2}\displaystyle\int_{B_r}\mathrm{div}\nabla u\ d\mathbf{x}$
   (B_r 表半徑 r，心在 $\mathbf{x}_0$ 的球)
   $= \dfrac{1}{4\pi r^2}\displaystyle\int_{B_r}\Delta u\ d\mathbf{x} = 0$

   故 $I(r) = k$ =constant.

3. u 在 $\mathbf{x}_0$ 點連續，$\therefore \lim\limits_{r\to 0} I(r) = u(\mathbf{x}_0)$，故 $k = u(\mathbf{x}_0)$，定理証畢。

Remark: $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d \frac{\partial}{\partial x}f(x,y)dy$ 若 $f \in C^1[a,b]\times[c,d]$

我們將於第十四章中詳論之。

例 **3.** 熱傳導方程式 (Heat equation)

設 $u(x,y,z,t)$ 表空間中某物體 Ω 內一點 (x,y,z) 於 t 時刻的溫度，已知熱量傳遞的方向恆沿 ∇u 方向流動，且其速率與 $|\nabla u|$ 成正比，試証：u 滿足熱傳導方程

$$u_t = k\Delta u, \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

(設物體密度 ρ 爲常數)

分析：

1. 設該物體比熱爲 s，$\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 爲該物體內某點，在 $\mathbf{x}_0$ 附近任取一適當領域 D 包含 $\mathbf{x}_0$

   由已知條件，物體在 D 上由 t 時刻到 $t+\Delta t$ 時刻熱量的增量爲

$$\int_t^{t+\Delta t} \left(\int_{\partial D} c\nabla u \cdot \mathbf{n} dS \right) d\tau,\ c\text{爲某常數} \tag{10}$$

2. 又依熱量守恆定律，流進的熱量導致溫度的增加，其表現的形式爲

$$\int_D \rho s[u(\mathbf{x}, t+\Delta t) - u(\mathbf{x}, t)] d\mathbf{x} \tag{11}$$

   ρ 爲密度，s 爲比熱，$u(\mathbf{x}, t+\Delta t) - u(\mathbf{x}, t)$ 表 $\mathbf{x}$ 在 $t \to t+\Delta t$ 時間內所增加溫度。

3. (11) = (10)，兩邊除以 Δt，令 $\Delta t \to 0$，有

$$\int_D u_t(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\partial D} k\nabla u \cdot \mathbf{n} dS = \int_D k(\text{div})\nabla u d\mathbf{x} = \int_D k\Delta u d\mathbf{x}, k = \frac{c}{\rho s} \tag{12}$$

4. (12) 式兩邊除以 $|D|$，令 $D \to \mathbf{x}_0$，得

$$u_t(\mathbf{x}_0, t) = k\Delta u(\mathbf{x}_0, t)$$

5. 上式對一切 $\mathbf{x}_0$ 成立，故有

$$u_t(\mathbf{x}, t) = k\Delta u(\mathbf{x}, t)\ \forall\ \mathbf{x}_n \Omega, t \geq 0$$

例 **4.** 毛細現象 (Capillary phenomenon)

設 U 爲一鉛直柱狀長管，其水平截面爲 Ω，將 U 插入某液體中，由於附著力、表面張力與地心引力的交互作用，液體在 U 內會上升 (如水與玻璃) 或下降 (如水銀與玻璃)，並在 U 內構成一曲面 S，此曲面稱爲毛細面 (Capillary surface)

設 $S : u = u(x,y),\ (x,y) \in \Omega$，

$$Tu = \frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}},\quad Du = (u_x, u_y)$$

根據最小作用原理，u 滿足如下方程式：

$$\mathrm{div}Tu = \kappa u + H \quad 在\Omega內 \tag{13}$$

$$Tu \cdot \nu = \cos\gamma \quad 在\partial\Omega上 \tag{14}$$

其中 κ, H, γ 爲常數，$\kappa = \dfrac{\rho g}{\sigma}$，$\rho =$ 密度，$\sigma =$ 表面張力常數，$g =$ 重力常數。

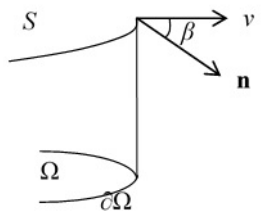
Remark:

1. $\mathrm{div}Tu = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} + \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} = \cdots$
   $= [(1+u_y^2)u_{xx} - 2u_xu_yu_{xy} + (1+u_x^2)u_{yy}]/(1+u_x^2+u_y^2)^{3/2} = 2H(x,y)$
   $H(x,y)$ 表曲面 S 在 (x,y) 點的均曲率。
2. γ 表液體與柱壁間的接觸角（如圖），由液體與柱壁的物理性質所決定。
3. 當 $g \neq 0$，令 $v = u + \dfrac{H}{\kappa}$，(1)(2) 可寫成

$$\mathrm{div}Tv = \kappa v \tag{15}$$

$$Tv \cdot \nu = \cos\gamma \tag{16}$$

   此爲無體積限制下的毛細面，想像把 U 插入超大容器中內，液體自由上升或下降，所得曲面即是。



   $\mathbf{n}$ 爲 S 在 $\partial\Omega$ 上朝下單位法向量，$\nu = (\nu_1, \nu_2, 0), \mathbf{n} \cdot \nu = Tu \cdot \nu$
4. 當 $g = 0$ 時，我們有

$$\mathrm{div}Tu = H \quad 在\Omega內 \tag{17}$$

$$Tu \cdot \nu = \cos\gamma \quad 在\partial\Omega上 \tag{18}$$

   (17)(18) 式的解釋是：S 爲常均曲率曲面，且與柱壁接觸角爲 γ。

   (17) 式兩邊在 Ω 上積分，我們有

$$H|\Omega| = \int_\Omega \mathrm{div}Tu d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} Tu \cdot \nu dS = \cos\gamma \cdot |\partial\Omega|$$

   得

$$H = \frac{|\partial\Omega|}{|\Omega|} \cdot \cos\gamma$$

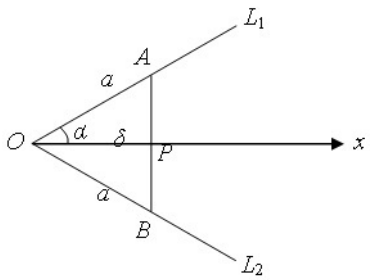
   其中 $|\Omega|$ 表 Ω 的面積，$|\partial\Omega|$ 表 $\partial\Omega$ 的周長。

以下我將探討 $\partial\Omega$ 有稜角的一些毛細現象。

爲方便討論，我將設 $\mathbf{O} \in \partial\Omega$, $\partial\Omega$ 在 $\mathbf{O}$ 點附近由二線段 L_1, L_2 所構成，並設 L_1, L_2 之夾角爲 2α.

a. $g = 0$

以 L_1, L_2 之分角線爲 x 軸，設 S 在 O 點附近可表爲 $u = u(x, y)$ 的函數型式。在 x 軸上任取一點 P，過 P 作 x 軸的垂線，交 L_1, L_2 於 A, B 二點，令 Δ 表三角形域 ΔOAB，$a = \overline{OA}, \delta = \overline{OP}$.



(17) 式兩邊在 Δ 上積分：

$$\begin{aligned} H|\Delta| &= \int_{\Delta} \mathrm{div} Tu \; dxdy \\ &= \int_{\partial\Delta} Tu \cdot \nu ds \\ &= \int_{\overline{AO}} + \int_{\overline{OB}} + \int_{\overline{BA}} (Tu \cdot \nu) ds \\ &= 2a\cos\gamma + \int_{\overline{BA}} Tu \cdot \nu ds \end{aligned} \tag{19}$$

注意：$|Tu \cdot \nu| \le |Tu| \le 1$, (19) $\Rightarrow$

$$H|\Delta| \ge 2a\cos\gamma - \overline{AB} = 2a\cos\gamma - 2a\sin\alpha$$

從而有

$\cos\gamma - \sin\alpha \le \dfrac{|\Delta|}{2a} \cdot H \to 0$ 當 $a \to 0$

$\Rightarrow \cos\gamma \le \sin\alpha$，或 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \gamma\right) \le \sin\alpha$

$\Rightarrow \alpha + \gamma \ge \dfrac{\pi}{2}$

換言之，若 $\alpha + \gamma < \dfrac{\pi}{2}$，$u$ 不存在 (當 Δ 夠小)

即：當 $\alpha+\gamma<\dfrac{\pi}{2}$ 時，毛細面不會以 graph 的型態定義在 O 點附近。

那麼液面將如何？

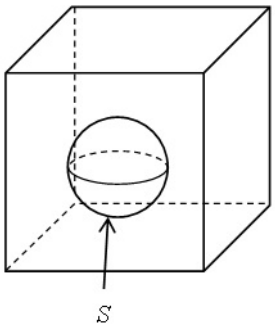
地心引力在此缺席，液面可以自由上升 (其實已無所謂” 上升”)，將跑到 ∞ 點！

當然，現實生活中，體積是有限的，管長是有窮的。不妨假設容器是一立方體 Q，上方有蓋，Q 由玻璃構成。已知水與玻璃 $\gamma=0$，在 Q 內倒入一些水 W，將它送往太空 $(g=0)$，液面將如何？

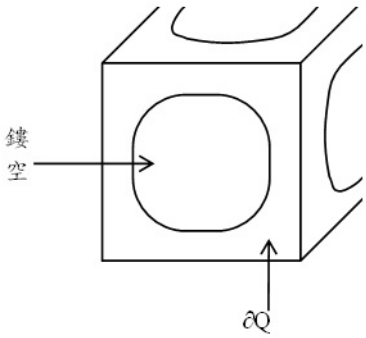
這要看 Q 中的水有多少。設 Q 的邊長爲 1，

(i) $|W|\geq 1-\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$, $|W|$ 表水量，則 W 在 Q 中包一空球 S，S 即爲所得毛細面，S 可以在 Q 中移動，只要它動得了，都是解。

等號成立時，S 爲內切於 Q 之空球。



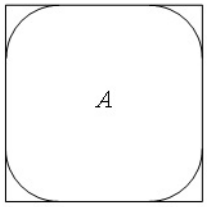
(ii) $|W|<1-\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$，此時水量不夠，不足以讓 W 在 Q 內包出一球，它在 ∂Q 上必須鏤空，如圖。



這個空該怎麼鏤？
問得很好，不過我也沒辦法告訴你，這是個 open problem.
想像你把一個氣球 A 裝入 Q 內，當 Q 容不得 A 在 Q 內自由移動時，A 必須變形，才能裝入 Q 內 (當然，$|A|\leq|Q|$)，此時 A 的解就是太空中毛細面的解。

在平面上有所謂等周界不等式：

給定面積 A，以圓形的周界最小。今設若於單位方塊 Q 內，欲圍 A



$\mathbb{R}^2$ 中方塊內等周界問題的解。

(i) 當 $|A| < \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2$ 時，可在 Q 內圍圓。

(ii) 當 $|A| > \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2$ 時，∂A 必須有一部分貼著 ∂Q 走，其不貼著 $\partial\Omega$ 走的 (在 Ω 內部)，必須是相等的圓弧，且與 ∂Q 相切。

在 $\mathbb{R}^2$ 中方塊內的等周界問題，已知如此。

$\mathbb{R}^3$ 中單位立方塊 Q 內的等周界問題，其解如何？

聰明的，等你來回答吧！

b. $g \neq 0,\ \alpha + \gamma < \frac{\pi}{2}$

此時我們的方程式爲

$$\mathrm{div} Tu = \kappa u \quad 在\Omega內 \tag{20}$$

$$Tu \cdot \nu = \cos\gamma \quad 在\partial\Omega上 \tag{21}$$

(i) 取 Δ 如 $g = 0$ 中的 ΔOAB

(20) 式兩邊在 Δ 上積分，利用散度定理，及 $|Tu| \leq 1$ 的特性，我們有

$$2a\cos\gamma - 2a\sin\alpha \leq \int_\Delta \kappa u\ dxdy \leq 2a\cos\gamma + 2a\sin\alpha \tag{22}$$

$\alpha + \gamma < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\gamma - \sin\alpha > 0$

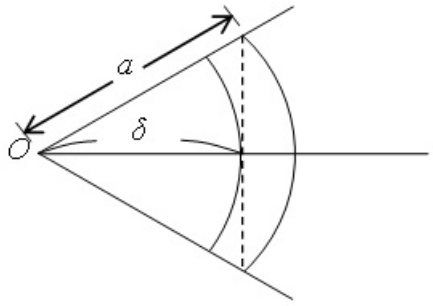
又 $\int_\Delta \kappa u\ dxdy = \kappa u(\mathbf{x})|\Delta| = \kappa u(\mathbf{x}) 2a^2 \sin 2\alpha, \mathbf{x}$ 爲 Δ 中某點，

(22) $\Rightarrow u(\mathbf{x}) \geq \dfrac{\cos\gamma - \sin\alpha}{\kappa a \sin 2\alpha} \to \infty$ 當 $a \to 0$ (設 $\kappa > 0$)

即：u 在 $\mathbf{o}$ 點附近 unbounded!

(ii) u 在 **o** 點附近的行爲如何？

不妨設 $u = O(r^\lambda)$ (即 $\lim\limits_{r\to 0^+} \dfrac{u}{r^\lambda}$ =constant)



令 $\Omega_r = \Omega \cap B_r(\mathbf{o})$，根據 (i)，不妨設 $u > 0$ 在 Ω_a 上 (設 $\kappa > 0$)

$\Omega_\delta < \Delta < \Omega_a$，故有

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\delta} \kappa u \cdot r \ drd\theta &\le \int_\Delta \kappa u \ dxdy \\ &\le 2a(\cos\gamma + \sin\alpha) \\ &= 2\delta \sec\alpha(\cos\gamma + \sin\alpha) \end{aligned} \tag{23}$$

$$\int_{\Omega_a} \kappa u \cdot r \ drd\theta \ge \int_\Delta \kappa u \ dxdy \ge 2a(\cos\gamma - \sin\alpha) > 0 \tag{24}$$

$(23), (24) \Rightarrow \ \exists$ constants M_1, M_2 使

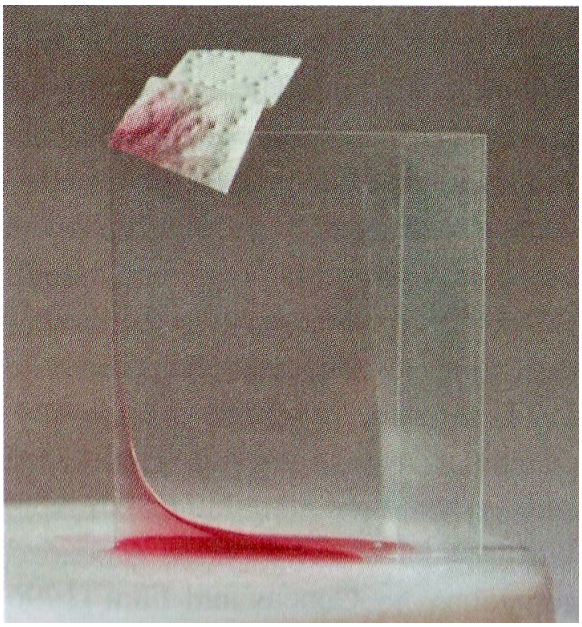
$$\frac{1}{\delta}\int_0^\delta r^{1+\lambda} dr < M_1 \tag{25}$$

$$\frac{1}{a}\int_0^a r^{1+\lambda} dr > M_2 \tag{26}$$

$(25), (26) \Rightarrow 1 + \lambda = 0 \ \therefore \lambda = -1$

故我們可猜測：$u = O\left(\dfrac{1}{r}\right)$，在 O 點附近。

如圖 (Pacific Journal of Mathematics Vol. 236, No.2, 2008, P.283)



$\alpha+\gamma<\dfrac{\pi}{2}$，毛細面在稜角附近的行爲。

(iii) 比較函數 (Comparison function)

u 既然 $=O\left(\dfrac{1}{r}\right)$，表示 u 在鉛直方向" 幾乎" 是直的 (當 $r\to 0$)，

因此對曲率的貢獻幾乎是 0。

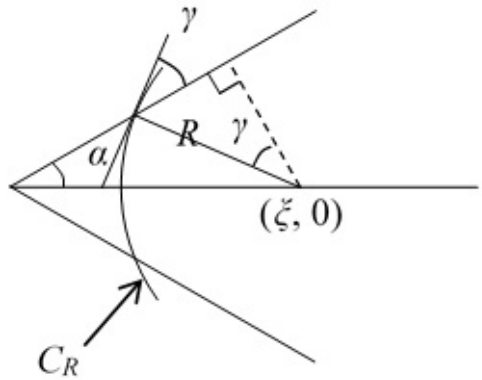
換言之，u 的均曲率" 幾乎" 由等高線所提供，當 $r\to 0$(這兩個方向互相垂直，他們兩個曲率的平均值就是均曲率)

就以上的分析，想把 u 在 O 點附近的行爲作更清晰的描述，想法：

尋找曲面 $v=v(r,\theta)$ 滿足

$$\begin{cases} v(r,0)=\dfrac{1}{r} \\ v\text{的等高線爲圓弧}C_R,\ C_R\text{與柱壁交角爲}\gamma,\ R\text{表圓弧半徑} \\ C_R\text{的曲率}=\kappa v \end{cases}$$

設 C_R 的心爲 $(\xi,0)$，如圖，$R\cos\gamma=\xi\sin\alpha$



$\therefore$

$$\xi = \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha}R = \lambda R, \lambda = \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha} > 1 \tag{27}$$

設 $(x, y) \in C_R$，則

$$(x-\xi)^2 + y^2 = R^2$$

以極座標 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 及 (27) 代入，得

$$r^2 - 2\lambda R \cdot r\cos\theta + \lambda^2 R^2 = R^2$$

$\Rightarrow$

$$\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2\lambda\cos\theta \cdot \left(\frac{r}{R}\right) + (\lambda^2 - 1) = 0$$

解之得

$$\frac{r}{R} = \lambda\cos\theta \pm \sqrt{1-\lambda^2\sin^2\theta}$$

取負號 (+ 號非所求) 得

$$\frac{1}{R} = \frac{\lambda\cos\theta - \sqrt{1-\lambda^2\sin^2\theta}}{r}$$

而 C_R 的曲率 $= \kappa v, \therefore$

$$v = \frac{1}{\kappa}\cdot\frac{1}{R} = \frac{\lambda\cos\theta - \sqrt{1-\lambda^2\sin^2\theta}}{\kappa r}, \ -\alpha < \theta < \alpha$$

猜：$u \sim v$ 當 $r \sim 0$

Concus and Finn 於 1974 証明：$\exists$ constant A 使

$$\left| u - \frac{\lambda\cos\theta - \sqrt{1-\lambda^2\sin^2\theta}}{\kappa r} \right| < A$$

在 O 點的某鄰域 Ω_ρ 內，A 與 u, ρ 有關。

這是毛細面研究上一個重要的發現。

世界上有高達百米的巨樹，這些樹如何把水分送往樹尖？
是利用 $\alpha + \gamma < \frac{\pi}{2}$ 的原理或者其他的機制？有待生物學家來回答。

我想一棵巨樹能把水分送上百米高處，光靠 $\alpha + \gamma < \frac{\pi}{2}$ 的毛細機制，似乎力有未逮，它的管線應該有更複雜的結構，不會僅僅是一根單純的空心管。

一棵樹有這種能耐，不覺讓我肅然起敬。

12.5 旋度與 Stokes 定理

a. 循環量 (Circulation)

設 $\mathbf{F}$ 爲 $\mathbb{R}^3$ 中定義於某開領域 Ω 上的向量場，$\mathbf{F} \in C^1(\Omega)$，$\Gamma \subset \Omega$ 爲一片段平滑封閉曲線。

定義：$\displaystyle\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$ 稱爲 $\mathbf{F}$ 在 Γ 上的循環量。

其中積分方向以右手拇指指向 z 軸正向，四指所指方向即爲積分方向。

$\mathbf{T}$ 表 Γ 上單位切向量，ds 表 Γ 上弧元，給定直角坐標系，設

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)) \\ \Gamma &: (x(t), y(t), z(t)),\ a \le t \le b \end{aligned}$$

則

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= (x', y', z')/\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \\ ds &= \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt \\ \mathbf{T} ds &= (x', y', z') dt = (dx, dy, dz) \end{aligned}$$

故

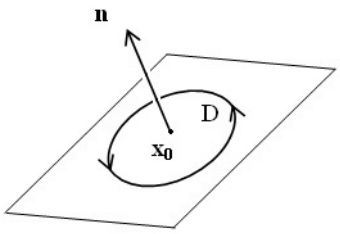
$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} = \int_\Gamma P dx + Q dy + R dz$$

b. 旋度

承上，設 $\mathbf{x}_0 \in \Omega$，給定方向 $\mathbf{n}$，過 $\mathbf{x}_0$ 以 $\mathbf{n}$ 爲法向作平面 E，於 E 上，在 $\mathbf{x}_0$ 點附近任取適當領域 $D \subset E$，考慮：

$$\lim_{D \to \mathbf{x}_0} \frac{1}{|D|} \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds,\ |D| \text{表} D \text{的面積}$$

若此極限存在，我們稱它爲 $\mathbf{F}$ 在 $\mathbf{x}_0$ 點，以 $\mathbf{n}$ 爲軸的旋度。

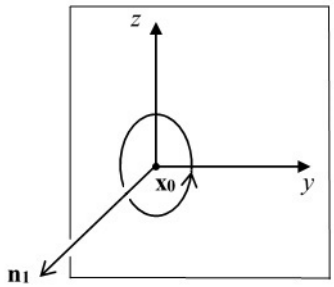


注意：旋度是循環量對垂直於旋軸之平面面元的微分，可以這樣的理解。

有三個方向的旋度特別值得注意：

(i) $\mathbf{n}_1 = (1, 0, 0)$

如圖，

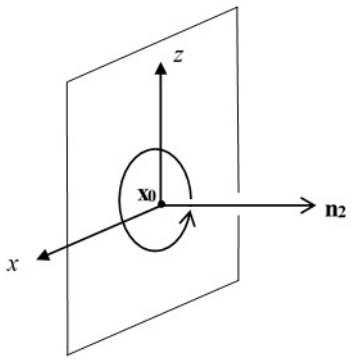


$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \int_{\partial D} Q dy + R dz = \int_D (R_y - Q_z) dy dz \quad \text{(Green's 定理)}$$

$$\therefore \lambda_1 = \lim_{D \to \mathbf{x}_0} \frac{1}{|D|} \int_D (R_y - Q_z) dy dz = R_y(\mathbf{x}_0) - Q_z(\mathbf{x}_0)$$

同理，

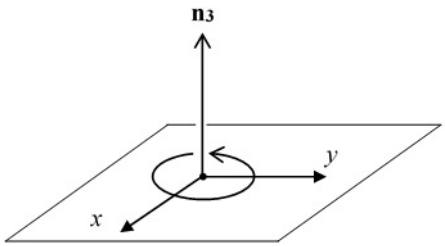
(ii) $\mathbf{n}_2 = (0, 1, 0)$



$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \lim_{D \to \mathbf{x}_0} \frac{1}{|D|} \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds \\ &= \lim_{D \to \mathbf{x}_0} \frac{1}{|D|} \int_D R dz + P dx \\ &= P_z(\mathbf{x}_0) - R_x(\mathbf{x}_0) \end{aligned}$$

(注意積分的方向導致 $P_z - R_x$ 而不是 $R_x - P_z$)

(iii) $\mathbf{n}_3 = (0, 0, 1)$



$$\begin{aligned}\lambda_3 &= \lim_{D\to\mathbf{x}_0}\frac{1}{|D|}\int_{\partial D}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds\\ &= \lim_{D\to\mathbf{x}_0}\frac{1}{|D|}\int_{D}Pdx+Qdy\\ &= Q_x(\mathbf{x}_0)-P_y(\mathbf{x}_0)\end{aligned}$$

c. 旋度向量

定義：$\mathrm{curl}\mathbf{F}=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\ (R_y-Q_z,P_z-R_x,Q_x-P_y)\Big|_{\mathbf{x}_0}$

記作 $=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}_{\mathbf{x}_0}$，稱爲 $\mathbf{F}$ 在 $\mathbf{x}_0$ 點的旋度向量。

其中 $f\Big|_{\mathbf{x}_0}$ 表示 f 在 $\mathbf{x}_0$ 點取值。

一如方向導數，f 在 $\mathbf{x}_0$ 點沿 $\mathbf{u}$ 方向的方向導數

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0)=\nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{u}$$

其中 $\nabla f(\mathbf{x}_0)=(f_x(\mathbf{x}_0),f_y(\mathbf{x}_0),f_z(\mathbf{x}_0))$，$f_x(\mathbf{x}_0),f_y(\mathbf{x}_0),f_z(\mathbf{x}_0)$ 分別表 f 在 $\mathbf{x}_0$ 點沿三個座標軸的偏導數。

對於旋度，我們有如下定理：

<u>定理 **12-2**</u>

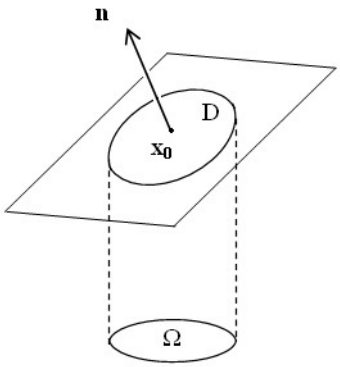
$\mathbf{F}$ 在 $\mathbf{x}_0$ 點，以 $\mathbf{n}$ 爲軸的旋度 $=\mathrm{curl}\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{n}$

証：設 $E: z=ax+by+c$ 過 $\mathbf{x}_0$ 點，以 $\mathbf{n}$ 爲法向量，則
$\mathbf{n}=(-z_x,-z_y,1)/\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

注意：

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy \\ dS\cos\alpha &= -z_x dxdy \\ dS\cos\beta &= -z_y dxdy \\ dS\cos\gamma &= dxdy \end{aligned}$$

D 爲 E 上含 $\mathbf{x}_0$ 點的適當領域，Ω 爲 E 在 x, y 平面上的投影，



$$\int_{\partial D} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds = \int_{\partial D} Pdx + Qdy + Rdz$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} Pdx &= \int_{\partial\Omega} P(x,y,z(x,y))dx \\ &= \int_{\Omega} -\frac{\partial}{\partial y}P\ dxdy \quad \text{(Green's 定理)} \\ &= \int_{\Omega} -(P_y + P_z\cdot z_y)dxdy \\ &= \int_{D} (-P_y\cos\gamma + P_z\cos\beta)ds \end{aligned} \tag{28}$$

同理，

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} Qdy &= \int_{\partial\Omega} Q(x,y,z(x,y))dy \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x}Qdxdy \\ &= \int_{\Omega} -(Q_x + Q_z\cdot z_x)dxdy \\ &= \int_{D} (Q_x\cos\gamma - Q_z\cos\alpha)ds \end{aligned} \tag{29}$$

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial D} R dz &= \int_{\partial\Omega} R(x,y,z(x,y))dz, \quad dz = z_x dx + z_y dy \\
&= \int_{\partial\Omega} (Rz_x)dx + (Rz_y)dy \\
&= \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}(Rz_y) - \frac{\partial}{\partial y}(Rz_x)\right] dxdy \\
&= \int_{\Omega} (R_x \cdot z_y - R_y \cdot z_x)dxdy \\
&= \int_{D} (-R_x \cos\beta + R_y \cos\alpha)ds \qquad (30)
\end{aligned}
$$

(28)(29)(30) $\Rightarrow$

$$
\int_{\partial D} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}dS = \int_{D} [(R_y - Q_z)\cos\alpha + (P_z - R_x)\cos\beta + (Q_z - P_y)\cos\gamma]dS
$$

$\therefore$

$$
\begin{aligned}
\lim_{D\to\mathbf{x}_0} \frac{1}{|D|}\int_{\partial D} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds &= [(R_y - Q_x)\cos\alpha + (P_z - R_x)\cos\beta + (Q_x - P_y)\cos\gamma]\Big|_{\mathbf{x}_0} \\
&= \mathrm{curl}\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{n}
\end{aligned}
$$

d. Stokes 定理

設 S 爲 $\mathbb{R}^3$ 中平滑曲面，$\mathbf{x}\in S, \mathbf{n}=\mathbf{n}(\mathbf{x})$ 爲 S 在 $\mathbf{x}$ 點朝上單位法向量。
$\mathbf{F}$ 如前所述，由旋度的定義及定理 12-2，

$$
\mathrm{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = \text{以 } \mathbf{n} \text{ 爲軸，循環量對切平面面元的微分}
$$

$$
\mathrm{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = \frac{d(\text{循環量})}{dS}
$$

切平面面元即曲面面元，此處 dS 表曲面面元，依形上觀微積分基本定理，

$$
\mathrm{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} \text{ 在 } S \text{ 上對面元積分要還原成 } \mathbf{F} \text{ 在 } \partial S \text{ 上的循環量}
$$

即：

<u>定理 **12-3**</u> (Stokes 定理)

$$
\int_S \mathrm{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = \int_{\partial S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds
$$

分析：設 S 可表成 $z = z(x,y), (x,y)\in\Omega$

Stokes 定理的証明，在定理 12-2 中已演習完畢，只不過把 D 換成 S，$z = ax + by + c$ 改成 $z = z(x,y)$，一切進行如前，不再重複。

例 **1.** 陀螺以等角速度 ω 對中心軸旋轉，求其對轉軸的旋度。

解：設轉軸爲 z 軸，陀螺上一點 P 與轉軸距離爲 r，設 $\mathbf{F}$ 表速度向量場，D_r 表陀螺內垂直於 z 軸，半徑爲 r 的圓盤。

於 ∂D_r 上，$\mathbf{F}\cdot\mathbf{T} = v$(切線速度)$= r\omega$，故

$$\frac{1}{D_r}\int_{\partial D_r}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds = \frac{1}{\pi r^2}\int_0^{2\pi} r\omega\cdot r d\theta = 2\omega$$

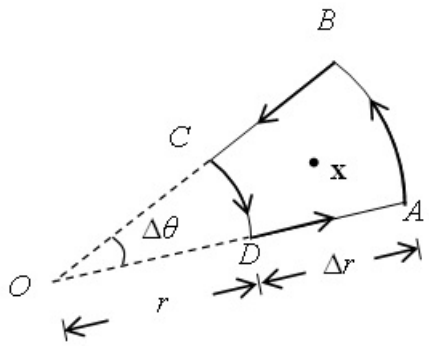
即；陀螺對稱軸上任一點沿軸方向的旋度爲 2ω.

此向量場對轉軸外一點 $\mathbf{x}$ 沿軸方向的旋度如何？

取扇窗域 Ω 如圖：

$$|\Omega| = \Delta r\cdot\left(r+\frac{1}{2}\Delta r\right)\Delta\theta$$

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds &= \int_A^B + \int_B^C + \int_C^D + \int_D^A \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds\\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4\end{aligned}$$



$I_2 = I_4 = 0$, 因 $\mathbf{F}\cdot\mathbf{T} = 0$ 在 $\overline{BC}$ 及 $\overline{DA}$ 上

$$I_1 = \int_\theta^{\theta+\Delta\theta}(r+\Delta r)\cos(r+\Delta r)d\theta = (r+\Delta r)^2\omega\theta$$

$$I_3 = \int_{\theta+\Delta\theta}^{\theta}(-r\omega)(-rd\theta) = -r^2\omega\Delta\theta$$

(注意：在 $\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ 上，$\mathbf{F}\cdot\mathbf{T} = -r\omega, ds = -rd\theta$)

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_{\partial\Omega}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds = \frac{(r+\Delta r)^2 - r^2}{(r+\frac{1}{2}\Delta r)\Delta r}\omega \to 2\omega\text{，當 }\Delta r\to 0$$

curl$\mathbf{F}$ 又如何？

陀螺上一點 P 的運動軌跡

$$x = r\cos\omega t, y = r\sin\omega t$$

$\mathbf{F} = (x', y', 0) = (-\omega r\sin\omega t, \omega r\cos\omega t, 0) = \omega(-y, x, 0)$，故

$$\mathrm{curl}\mathbf{F} = \omega \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = \omega(-1, -1, 2)$$

例 **2.**

(a) $\mathbf{V} = \mathrm{curl}\mathbf{F}$，則 $\mathrm{div}\mathbf{V} = 0$

(b) $\mathbf{V} = (x - y, y - z, x + y - 2z)$，顯然 $\mathrm{div}\mathbf{V} = 0$

問：是否存在 $\mathbf{F}$ 使 $\mathrm{curl}\mathbf{F} = \mathbf{V}$？

分析：

(a) 顯然。

(b) 設 $\mathbf{F} = (P, Q, R)$，欲問：

$$\begin{cases} R_y - Q_z &= x - y \\ P_z - R_x &= y - z \\ Q_x - P_y &= x + y - 2z \end{cases}$$

是否可解？

不妨試 $R = 0$，問題簡化成：尋 P, Q 使

$$-Q_z = x - y \tag{31}$$

$$P_z = y - z \tag{32}$$

$$Q_x - P_y = x + y - 2z \tag{33}$$

由 (31)，$Q = -xz + yz + g(x, y)$
由 (32)，$P = yz - \dfrac{1}{2}z^2 + f(x, y)$

$$Q_x - P_y = (-z + g_x) - (z + f_y) \tag{34}$$

比較 (33)(34) 得

$$-f_y + g_x = x + y$$

取 $f = -xy, g = xy$，得

$$\begin{aligned} P &= yz - \frac{1}{2}z^2 - xy \\ Q &= -xz + yz + xy \end{aligned}$$

令 $\mathbf{F} = (P, Q, \mathbf{0})$ 即得。

上面的處理方法，可以推廣到一般的向量場，我把它列爲定理陳述如下，其証明就留給同學當習題吧。

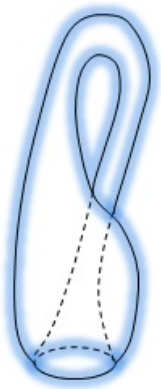
<u>定理 **12-4**</u>

設 $\mathbf{V} \in C(\Omega)$ 爲 $\mathbb{R}^3$ 中向量場，$\mathrm{div}\mathbf{V} = 0 \ \forall \ \mathbf{x} \in \Omega$，則存在一向量場 $\mathbf{F} \in C^1(\Omega)$ 使 $\mathrm{curl}\mathbf{F} = \mathbf{V}$.

附錄 A

Kleine Bottle (自我相交的封閉曲面)
一根塑膠管，把它加熱彎曲，首尾相接，得到一輪胎面。

一根塑膠管，下半段加熱撐開成酒瓶狀，上半段加熱拉長如鶴頸，下彎穿入瓶身，向下拉長至瓶底，首尾相接－如上述輪胎之建造，得一自我相交的封閉曲面，稱爲 Kleine Bottle(如圖)



輪胎有內外之分，生活在 Kleine Bottle 上的生物，不知有內外。

附錄 B: 再談高斯曲率

爲了介紹形上觀微積分基本定理，我於 12-3 節中介紹了高斯曲率和均曲率，這兩個曲率統籌了曲面的性質，各領風騷，高斯曲率與曲面的內蘊性質相關，均曲率與曲面的外置性質相關，這是微分幾何相當精華的一章。

通常在高等微積分裡是不會談曲面的曲率的，我這樣講好像已經逾越了傳統高等微積分的內容。不過，數學無定則，我希望你們能從各個層面上來了解微積分基本定理的內涵，高斯曲率是個很好的題材。

既然談了高斯曲率，我難免有" 不吐不快" 的內傷。又不好在高微教材內談它，只好把它放在這裡當成附錄，希望對你們將來學習微分幾何有所幫助。

整本微分幾何最重要的定理就是 Gauss-Bonnet 定理，我這樣認爲。Gauss 提出它，Bonnet 推廣它，就成了 Gauss-Bonnet 定理。

我們且就 Gauss 原始提出的定理內容來了解它：

a. 測地線 (Geodesic of a surface)

設 S 爲 $\mathbb{R}^3$ 中 C^2 曲面，$P, Q \in S$，存在一曲線 $\Gamma \subset S$，連接 P, Q 兩點，具有以下性質：

$$|\Gamma| \leq |C| \ \forall\ C \subset S\text{，}C \text{ 爲連接 } P, Q \text{ 兩點的曲線。}$$

其中 $|\Gamma|$ 表 Γ 的曲線長，$|C|$ 同。

這條曲線 Γ 就稱爲 S 上連接 P, Q 兩點的測地線。

想像有一種生物，生活在 S 上，測地線就是他們認爲的直線。

當生物由 P 點到 Q 點，沿 Γ 行走，它覺得沒有" 左右" 偏離，走冤枉路，就像船航行於赤道上 (或地球的大園上) 一樣，自覺勇往直前。

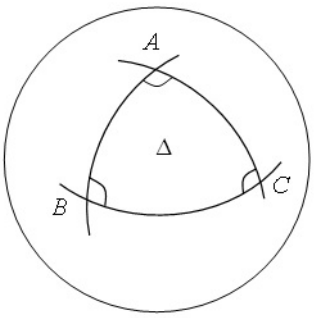
b. Gauss 定理

我們於第一章的習題中曾見過 Gauss 的 genius 推論：

$$\text{單位球面上三角形內角和} \ - \ \text{三角形面積} = \pi$$

如圖，即：

$$\angle A + \angle B + \angle C - |\Delta| = \pi,\ |\Delta| \text{表三角形} \Delta \text{的面積}$$

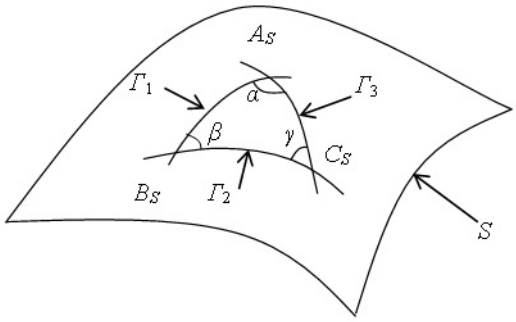


這件事，對任意曲面 S 上的三角形 Δ_S 都成立，就是 Gauss 定理，
只不過 $|\Delta|$ 要換成 $\int_{\Delta_s} KdS$

Gauss 定理：

設 S 爲 $\mathbb{R}^3$ 中 C^2 曲面，$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ 爲 S 中三測地線，在 S 上構成一三角形 $\Delta_s = \Delta A_s B_s C_s$，令 α, β, γ 分別表此三角形的三內角，則

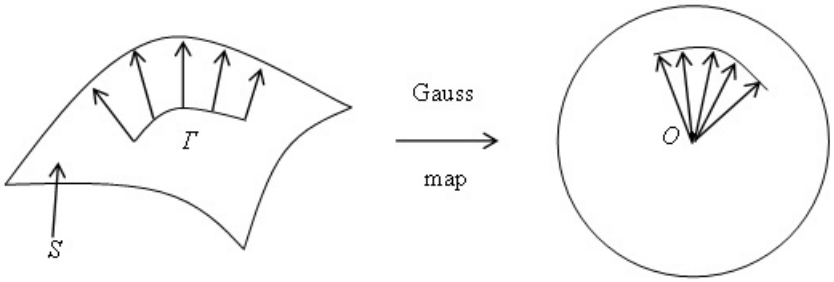
$$\alpha + \beta + \gamma - \int_{\Delta_S} KdS = \pi \tag{35}$$



Gauss 是怎麼看出這個定理呢？

我且試著了解 Gauss，分析如下：

1. 設 Γ 爲 S 上的測地線，人沿 Γ 行走，只有上下起落，沒有左右偏移，因此 S 在 Γ 上的單位法向量經 Gauss map 後在單位球面上爲一直線 (大圓)



2. 因此，Δ_S 上的單位法向量經 Gauss map 後在單位球面上構成一球面三角形 $\Delta = \Delta ABC$，$\Gamma_1 \to \widehat{\mathrm{AB}}, \Gamma_2 \to \widehat{\mathrm{BC}}, \Gamma_3 = \widehat{\mathrm{CA}}$，此映射不改面三角形的內角。$\alpha = \angle A, \beta = \angle B, \gamma = \angle C$

3. 由形上觀微積分基本定理知

$$\int_{\Delta_S} K dS = |\Delta|$$

故

$$\alpha + \beta + \gamma - \int_{\Delta_s} K dS = \angle A + \angle B + \angle C - |\Delta| = \pi$$

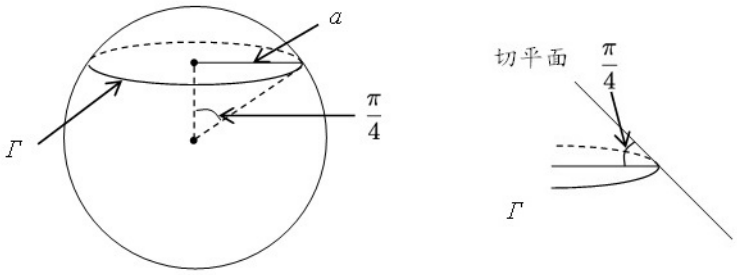
以上我只是和你談看法，許多” 因此” 都需要証明，嚴格的証明還是要到微分幾何課本內去探尋。

有時候你的 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ 未必是測地線，領域也未必是三角形，那麼 Gauss 定理該如何推廣呢？Bonnet 引入了測地曲率 (Geodesic curvature)，把 Gauss 定理推廣到一般領域上，就是所謂的 Gauss-Bonnet 定理，這是微分幾何的核心定理，讀微分幾何必須要清楚它的內容，才稱得上修過微分幾何。

什麼是測地曲率呢？

一個人在測地線上行走，只有上下起伏，沒有左右偏離。沒有覺得偏離，測地曲率爲 0。

一個人在北緯 45° 上行走，他的行跡 Γ 是向北極彎曲的，Γ 的半徑 $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，Γ 作爲 $\mathbb{R}^3$ 中的曲線，其曲率爲 $\kappa = \sqrt{2}$



(a) (b)

Γ 作爲單位球面 S 上的曲線，它向北極彎曲的曲率爲 κ 在切平面上的分量

$$\kappa_g = \kappa \cos 45^\circ = \kappa \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

這個 κ_g 就是 Γ 對球面的測地曲率。

今設 Γ_a 爲單位球上的小圓，$\Gamma_a \subset \mathbb{R}^3$，半徑爲 a，其 $\mathbb{R}^3$ 中曲率爲 $\kappa = \dfrac{1}{a}$

$$\kappa_g = \kappa \cos\theta = \frac{1}{a} \cdot \sqrt{1-a^2}$$

$$\int_{\Gamma_a} \kappa_g ds = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \cdot 2\pi a = 2\pi\sqrt{1-a^2}$$

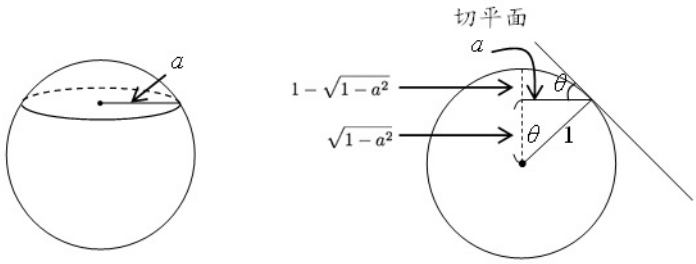
令 Σ 爲 Γ_a 在 S 上所圍曲面領域 (取小的那一片)，

則 $|\Sigma|$(Σ 的面積)$= \dfrac{1-\sqrt{1-a^2}}{2} \cdot 4\pi = 2\pi(1-\sqrt{1-a^2})$(請想一想)

$$\int_{\Sigma} K dS = |\Sigma| = 2\pi(1-\sqrt{1-a^2})$$

且看

$$\int_{\Gamma_a} \kappa_g ds + \int_{\Sigma} K dS = 2\pi \tag{36}$$



(a) (b)

上面這個式子對任何曲面 S 上的平滑曲線 Γ 都成立，

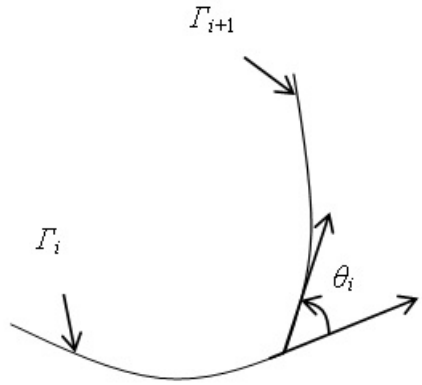
$\Rightarrow$

$$\int_{\Gamma} \kappa_g ds + \int_{\Sigma} K dS = 2\pi \tag{37}$$

$\Sigma \subset S, \Gamma = \partial\Sigma, \kappa_g$ 爲 Γ 在 S 上的測地曲率。

當 $\partial\Sigma$ 爲片段平滑時，設 $\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \cdots \cup \Gamma_n, \Gamma_i \in C^1$，令 θ_i 爲 Γ_i, Γ_{i+1} 的切向量，依逆時爲正，順時爲負，所夾之角 (如圖)。θ_i 相當於多邊形的外角，則有

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i + \sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma_i} \kappa_g ds + \int_{\Sigma} K dS = 2\pi \tag{38}$$



再補充說明 $\displaystyle\int_{\Gamma} \kappa_g ds$ 的意義：

Γ 作爲 $\mathbb{R}^3$ 中的曲線，有其 $\mathbb{R}^3$ 中的曲率 κ，此曲率在 S 的切平面上的分量即爲 κ_g。

κ 如何求？

設 $\mathbf{x}(s)$ 爲 Γ 的弧長參數表示式，則 $\mathbf{x}'(s)$ 爲 Γ 的單位切向量，$\mathbf{x}''(s)$ 即 Γ 的曲率向量，$\kappa = |\mathbf{x}''(s)|$。

如何了解 (38) 式呢？

a. 以平面上的情形來看 $(K = 0)$ 有如下解讀：

- **(i)** 多邊形外角和 $= 2\pi$, $(\kappa_g = 0)$
- **(ii)** 若 $\Gamma = \partial\Sigma$ 爲平滑封閉曲線，則 $\displaystyle\int_{\Gamma} \kappa ds = 2\pi$，$\kappa$ 表 Γ 的曲率，此即定理 12-1 的內容。
- **(iii)** 若 Σ 爲由 $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_n$ 所圍區域，$\Gamma_i \in C^1$，則 Σ 的諸外角和 $+ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma_i} \kappa ds = 2\pi$

b. 在單位球面上則有

$$\text{多邊形的外角和} + \text{多邊形的面積} = 2\pi, \ (\kappa_g = 0)$$

c. 在任意 C^2 曲面上則有

$$\text{多邊形的外角和} + \text{多邊形法向所張之立體角} = 2\pi, \ (\kappa_g = 0)$$

我衷心盼望你們讀書要培養看法，有了看法，觸類旁通，才能進入形而上世界，對事務有所靈判，日久生功，匯百川而成大河，氣象自是非凡，信手捻來盡是學問。能引領風騷，成一家之言，能嘉惠後進，育無數之人才。雖然我沒有做到，不過我曾見過這樣的人，如沐春風，如飲甘泉，終生受益不盡。

大學之道在明明德，在親民，在止於至善。我希望年輕人讀書要有這樣的胸襟和氣魄。可和天地對話，能探宇宙奧秘。

讀書之餘，我常會問：生命的本質是什麼？

不要笑我思考這樣的 ”Stupid Problem!” 人知道探詢這樣的問題，人就不一樣。讀數學要問數學的本質是什麼？ 何況遷涉到生命價值的人生！

既生為人卻不知道思考這個問題，就像進了數學系，不知要問數學的本質是什麼一樣，終究是糊里糊塗的進來，糊里糊塗的出去。

讀聖賢書使我受益無窮，稍有所悟，欣然於心。人生不再糊塗，是非善惡，皓月千里，行所該行，止所該止，俯仰無愧於天地，一呼一吸都覺得自在芬芳。

讀歷史，來到南宋末年，天地變色。我常問：是什麼力量讓文天祥展現那麼偉大的氣節？

元相孛羅把他押到樞密院親自審問，他昂然而立，只拱手作禮，孛羅怒，令人強押於地，問：你還有何話可說？答：天下事有興有衰，國亡受戮，夫復何言，但願早死。

妻女淪為奴隸，女兒寫信向他求救，他回信道：收女兒信，痛割肝腸，人誰無妻兒骨肉，但今日事，於義當死。命也，奈何！爹爹我救不了你，望你在世認真做人。

投降的宋恭帝來到牢房，勸他投降，他北跪於地，背對降帝，痛哭流涕，對趙說道：聖駕請回。

軟的不吃，就來硬的，把他押入苦牢，潮濕陰冷，坐立不得，他寫下正氣歌。

如是三年，不改其志。

大可汗忽必略親自招見，他依然昂立，可汗勸降，允諾厚祿，他道：但求一死。

1282，十二月初九日，終於就義。

皇路當清夷，含和吐明庭。時窮節乃見，一一垂丹青。

那力量來自對生命的體悟，超越一切宗教，直接遁入無窮，是一種內在生命價值的呈現與完成。凌駕死生，光照日月。偉哉！斯人。

「可以託六尺之孤，可以寄百里之命，臨大節而不可奪。」風簷展書讀，古道照顏色。美哉，中華文化！

(第十二章全文完)

102學年度高等微積分(下) 習題十二

1. (a) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$爲compact and connected，$f$爲$\Omega$上的實連續函數，$g$在$\Omega$上可積分且$g(\mathbf{x}) \geq 0$ $\forall \mathbf{x} \in \Omega$。試證：$\exists \mathbf{x}_0 \in \Omega$使$\int_\Omega f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})d\mathbf{x} = f(\mathbf{x}_0)\int_\Omega g(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ ($\int_\Omega \cdots d\mathbf{x}$表$\mathbb{R}^n$上的積分)。
   (b) 若connected這條件拿掉，上述結論還成立嗎？
   (c) 若compact這條件拿掉，上述結論還成立嗎？

2. Ω爲$\mathbb{R}^2$中的開領域，$u \in C^2(\Omega)$，若u滿足$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$在$\Omega$上，稱$u$爲$\Omega$上的調和函數 (harmonic function)。
   (a) 今由直角坐標轉換成極座標，試證Δu對極座標的表示式爲：
   $\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$。
   (b) u在$\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$上調和，u與θ無關，求u。

3. 定義$C_0^1[a,b] = \{\varphi \in C^1[a,b]; \varphi(a) = \varphi(b) = 0\}$，令$S = \{\varphi \in C_0^1[a,b]; \|\varphi\| \leq 1\}$，$\|\varphi\| = \max_{a \leq x \leq b} |\varphi(x)|$
   (a) 試證：$V_a^b(f) = \sup_{\varphi \in S} \int_a^b f \cdot \varphi' dx$。
   (b) 若$f \in C^1[a,b]$，則$V_a^b(f) = \int_a^b |f'(x)|dx$。

4. $f \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$，定義$f$在$\Omega$上的總變分$V_\Omega(f) = \int_\Omega |Df(\mathbf{x})|d\mathbf{x}$。
   (a) 求雙曲面$z = xy$在單位圓盤上的總變分。
   (b) 求拋物面$z = x^2 + y^2$在$[0,1] \times [0,1]$上的總變分。
   (c) 圓錐底盤半徑R，高h，你能適當定義此圓錐的總變分，並求其值嗎？
   (d) 有一三層塔圓形蛋糕如下：

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & 2 < x^2 + y^2 \leq 3 \\ 2 & 1 < x^2 + y^2 \leq 2 \\ 3 & x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$

   你能適當定義f在Ω：$x^2 + y^2 \leq 3$上的總變分嗎？並求$V_\Omega(f)$之值。

5. (a) $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ open，$f \in C^1(\Omega)$，$\varphi(f) = \int\int_\Omega \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}dxdy$，試證：$\varphi$爲$C^1(\Omega)$上的convex functional。
   (b) Steiner利用(a)"證明"等周界不等式：表面積相同的諸平滑領域中以球的體積最大，即：$S^3 \geq 36\pi V^2$，等號成立$\Leftrightarrow \Omega$爲球 ($\mathbb{R}^3$中的等周界不等式，其中V表Ω的體積、S表Ω的表面積)。 Stiner的方法，稱爲Stiner symmetrization：設Ω爲convex，設E爲任意平面，垂直於E的直線交$\partial\Omega$於P, Q二點，令M爲P, Q中點，將M平移到E上，則P, Q分別對應到P', Q'，此手續將Ω變形爲對稱於E的新領域Ω'，試證：此變換保持體積不便，但表面積縮小了 (因此，最大體積領域"若存在"，其必對稱任意平面E，唯有球具此性質，注意這個"若存在"，Stiner symmetrization方法並沒有解決存在問題)。

6. (a) 單位球面被二平行平面所截。試證：所截球表面積(球面在二平面間的面積)只與二平面的距離有關，與所截位置無關。
   (b) S爲一旋轉面，S被二垂直於旋轉軸的平面所截，若所截S表面積具(a)中性質，問S爲何物？
   Remark: 我曾經想過，若S爲任意平滑封閉曲面，具(a)之性質，問S爲何物？不得要領。

7. (a) $\gamma : z(t) = x(t) + iy(t)$，$a \le t \le b$，表複數平面上的平滑曲線。$f$爲定義在$\gamma$上的複函數，定義$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt$，稱爲$f$在$\gamma$上的線積分。Cauchy證明：「若$\gamma$爲簡單封閉、片段平滑曲線，$f$在$\gamma$上及其內部可導，則$\int_\gamma f(z)dz = 0$」此爲複變函數天字第一號定理，一切複變理論由此展開。微積分誕生於1670年代，複變函數發展於1820年代，當時的數學家都知道，當$f'(z)$連續時，$\int_\gamma f(z)dz = 0$，因此相信對一般可導函數f也應該成立。才華洋溢的Cauchy揭開了神祕的面紗，你們將來在複變函數論中所看到的證明是Goursat的妙證，法國人在複變函數理論的發展獨領風騷。請問：當時的數學家怎麼知道$\int_\gamma f(z)dz = 0$當$f'(z)$連續？(考慮$f = u + iv$、$dz = dx + idy$，化成$\mathbb{R}^2$上的線積分，$\cdots$)
(b) 複變函數不具均值定理的特性：
$\exists f$在Ω上解析，$a, b \in \Omega$，a, b的連線$\subset \Omega$，但$\nexists z \in a, b$的連線，使$f(b) - f(a) = f'(z)(b - a)$，試造一例。
(c) 複變函數雖不具均值定理的特性，但微積分基本定理是成立的。即：f在Ω上解析，$a, b \in \Omega$，γ爲Ω內連接a, b兩點的C^1曲線，則$\int_\gamma f'(z)dz = f(b) - f(a)$，試證之。

8. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $u \in C^2(\Omega)$, $S = \{(x, y, u(x, y))|(x, y) \in \Omega\}$。已知$S$在$P(x, y, u(x, y))$點的均曲率$H(x, y)$由下式給定

$$2H(x, y) = \frac{(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy}}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{3/2}}.$$

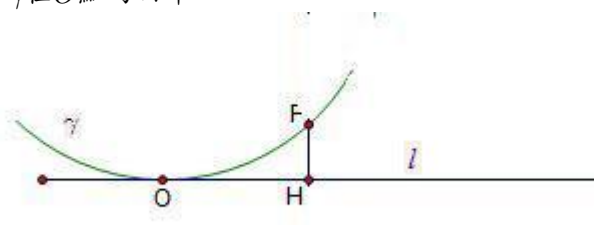
令$Tu = \dfrac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}}$, $Du = (u_x, u_y)$。試驗證：divTu=2H 。

9. S表示下列各曲面，K爲其上高斯曲率，利用形上觀微積分基本定理求$\int_S KdS$
(a) S表上半橢球面$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$。
(b) S表下半雙曲面$x^2 + y^2 - z^2 = 1$，$z \le 0$。
(c) S表由曲線$z = \cos x$，$-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$，對$z$軸旋轉所得所得旋轉面。

10. 設γ爲平面上C^2曲線 (二階導數連續)，$O \in \gamma$，過O作γ的切線l，$P \in \gamma$，作$\overline{PH} \perp l$，交l於H。試證：

$$k(O) = \lim_{H \to O} \frac{2\overline{PH}}{\overline{OH}^2},$$

其中$k(O)$表示γ在O點的曲率。



11. (a) γ爲單位圓內C^2封閉曲線，試證：$\exists P \in \gamma$使$k(P) \ge 1$。
(b) S爲單位球內C^2封閉曲面，試證：$\exists P \in S$使$K(P) \ge 1$且$H(P) \ge 1$，$K(P), H(P)$分別表S在P點的高斯曲率及均曲率。

12. (a) 設曲線$\gamma:(x,f(x))$，$f\in C^2(a,b)$，試證：γ在$(x,f(x))$的曲率$k(x)=\left(\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}}\right)'$。
(b) γ爲平面上過A,B兩點的函數曲線(Graph)，$\overline{AB}>2$ (單位圓直徑)。試證：$\exists P\in\gamma$使$|\kappa(P)|<1$。
(c) $\Omega\subset\mathbb{R}^2$，$u\in C^2(\Omega)$，$S=\{(x,y,u(x,y))|(x,y)\in\Omega\}$，若$H(P)\geq 1\ \forall P\in S$。試證：$\Omega$不可能包含任何單位圓盤，除非$\Omega$本身即單位圓盤，且$H(P)\equiv 1\ \forall P$(此時$u$即下半球面)。
(d) (c)中均曲率$H(P)$改爲高斯曲率$K(P)$，結論仍成立。
(c)的提示：若Ω包含某單位圓盤B，根據第八題，$\mathrm{div}Tu=2H\geq 2$，兩邊在B上積分，利用divergence定理，注意$|Tu|\leq 1$。
(d)的提示：根據習題九第9題，S爲convex，若$\Omega\supset B$，取單位球在B上凌空而下，當它第一次碰觸到S時，$K(P)\leq 1$，P爲碰觸點，如何把$K(P)=1$排除，考驗你的智慧。
另一比較簡潔的方法是(d)$\Rightarrow$(c)$\Rightarrow\cdots$。

13. (a) $\gamma=\{(x,f(x))|f\in C^2(\mathbb{R})\}$，$k(P)\geq 0\ \forall P\in\gamma$。若$\gamma$上方有界，試證：$\gamma$爲水平直線。
(b) $S=\{(x,y,f(x,y))|f\in C^2(\mathbb{R}^2)\}$，$K(P)\geq 0\ \forall P\in S$。若$S$上方有界，試證：$S$爲水平平面。

14. $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, $\partial\Omega$爲$\mathbb{R}^3$中的C^1封閉曲面，在Ω中任取一點O，$\mathbf{x}\in\partial\Omega$，過$\mathbf{x}$點作$\partial\Omega$的切平面$E$。令$\rho(\mathbf{x})$表$O$到$E$的距離，試證：$\dfrac{1}{|\Omega|}\int_{\partial\Omega}\rho(\mathbf{x})d\mathbf{x}$爲一常數，與$\Omega,O$無關 (只與dimension有關)。
(提示：散度定理，$\rho=\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$，$\mathbf{v}=?$)

15. $S=\{(x,y,z)|z=xy,x^2+y^2\leq 1\}$，點$P(x_0,y_0,z_0)\in S$，過$P$作$S$的切平面$E$
(a) 試證：在(x_0,y_0)點附近，E把S分割成$+,-$相間的四領域。
(b) E交∂S於相異四點。
(c) 試驗證：$(|\partial S|)^2>4\pi|S|$ (等周界不等式)。

16. $u\in C^2(\Omega)$, $\Omega\subset\mathbb{R}^2$, 有界連通區域。$S=\{(x,y,u(x,y))|(x,y)\in\Omega\}$, $P\in S$, $K(P)<0$, $\forall P$。過P作S的切平面E。
(a) 試證：E在P點附近將S分割成$+,-$相間的四小領域。
(注意：$K<0\Leftrightarrow u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2<0$)
(b) E至少交∂S於四點，試證之。
(Remark: 等周界不等式$(|\partial S|)^2>4\pi|S|$成立，當故事聽就好)

17. (a) $\mathbf{v}=(x^2-yz,y^2-zx,-2(x+y)z)$，試驗div$\mathbf{v}$=0，並造一向量場$\mathbf{F}=(P,Q,R)$使curl$\mathbf{F}=\mathbf{v}$。
(b) div$\mathbf{v}$=0在Ω上，$\mathbf{v}\in C^0(\Omega)$。試證：存在一向量場$\mathbf{F}$使$\mathbf{v}$ =curl$\mathbf{F}$，$\mathbf{F}\in C^1(\Omega)$。

18. Γ表過點$(1,0,0)$、$(0,1,0)$、$(0,0,1)$的圓，求$\int_\Gamma F\cdot\mathbf{T}ds$、其中
(a) $\mathbf{F}=(y^2-z^2,z^2-x^2,x^2-y^2)$。
(b) $\mathbf{F}=(y-z,z-x,xy)$。
提示：不可硬來，Γ的參數式很不好寫，可利用Stokes定理把它化成面積分，這個面該如何尋覓最省事？

19. (a) Ω爲$\mathbb{R}^n$中片斷平滑封閉領域，$f \in C^1(\Omega)$，$\mathbf{v}$爲Ω上C^1向量場。試證：

$$\int_\Omega f \mathrm{div}\mathbf{v} d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} f\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} dS - \int_\Omega \nabla f \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}.$$

(b) $u, v \in C^2(\Omega)$，試證：

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u) d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} (u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}) dS$$

其中$\mathbf{n}$表$\partial\Omega$上朝外單位法向量，$\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = D_{\mathbf{n}} f$表$f$沿$\mathbf{n}$方向的方向導數。

(c) u滿足：$\begin{cases} \Delta u = \lambda u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$，$\lambda$稱爲$\Delta$(讀作Laplacian) 在$\Omega$上的eigenvalue，相應的函數$u$稱爲$\Delta$在$\Omega$上的eigenfunction。若$\lambda_1, \lambda_2$爲$\Omega$上兩個相異的eigenvalues，$u_1, u_2$分別爲它們相應的eigenfunctions，試證

$$\int_\Omega u_1 u_2 dxdy = 0.$$

Remark：$n = 2$時，Ω可看成一塊鼓皮，鼓皮震動，λ_1, λ_2表相異頻率，上式表示不同頻率所相應的波動函數互相垂直。

20. (Maximum Principle)
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$爲compact，$u \in C^2(\Omega)$，若$u$在$\Omega$上調和(即$\Delta u = 0$在$\Omega$上)，試證：$u$在$\Omega$上的最大點只能發生在$\partial\Omega$上，除非$u$爲常函數 (提示：$u$具球均性質)。

21. $u \in C^2(\Omega)$，$\Omega \subset \mathbb{R}^2$爲有界連通集，若$u$滿足$\Delta u = 0$，在$\Omega$上，令$S = \{(x, y, u(x, y)) | (x, y) \in \Omega\}$
(a) 若$u(0,0) = u_x(0,0) = u_y(0,0) = 0$，試證：$u$的0等高線"至少"將$(0,0)$點附近分割成$+, -$相間的四領域。
提示：Taylor展開，令$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，觀察$u$在$x^2 + y^2 = r^2$上的行爲，當$r$夠小。
(b) $P \in S$，過P作S的切平面E，則E"至少"交∂S於四點。
提示：Maximum principle。
Remark：(i) $u_{xx} + u_{yy} = 0 \Rightarrow u_{xx} \cdot u_{yy} - u_{xy}^2 \leq 0 \Rightarrow K \leq 0$。當$K < 0$在$\Omega$上，此即第16題，不過$K$可能爲0，此時第16題力有未逮...。
(ii) (a)純爲2維的推論，在$\mathbb{R}^n$中無相應的推廣。H. Lewy有反例。

22. 試造一保積寫像把單位球映成正立方體。

23. 試造一保積寫像把上半單位球面映成正方形。
Remark：習題十二第6題(a)是個可以參考的問題。有一種地圖是根據這個方法繪製的，它保積不保形。

24. f在$[0,1]$上Riemann可積，g爲$\mathbb{R}$上週期1的函數，在$[0,1]$上Riemann可積，試證：

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)g(nx)dx = \int_0^1 f(x)dx \cdot \int_0^1 g(x)dx.$$

25. (*) $A \subset \mathbb{R}^2$，$|P-Q| \leq 2r\ \forall P,Q \in A$。試證：$|A| \leq \pi r^2$，等號成立$\Leftrightarrow A$爲半徑$r$的圓盤，其中$|A|$表$A$的面積。(提示：引進極座標，以$A$的直徑爲$x$軸，巧妙的利用$d(P,Q) \leq 2r$...)
Remark: 我曾經苦思$\mathbb{R}^3$的情形，想把上述結論推廣到$\mathbb{R}^3$中，不得要領...。

26. (a) $\varphi(\mathbf{x}) = \int_B \frac{1}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^\alpha} d\mathbf{y}$，$B$表$\mathbb{R}^3$中單位球、$0 < \alpha < 2$。試證：$\varphi$在$x = 0$點連續且$\varphi(\mathbf{x}) \downarrow 0$ strictly當$||\mathbf{x}|| \uparrow \infty$。
(b) (*) $f(\mathbf{x})$在$\mathbb{R}^3$中連續且$f(\mathbf{x}) \downarrow$ in $||\mathbf{x}||$，$\varphi(\mathbf{x}) = \int_B \frac{f(\mathbf{y})}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^\alpha} d\mathbf{y}$。試證：$\varphi$連續且$\varphi(\mathbf{x}) \downarrow$ strictly in $||\mathbf{x}||$
(c) $\lim_{||\mathbf{x}|| \to \infty} \varphi(\mathbf{x}) = 0$。

27. (a) 河水流速$\overrightarrow{c}$恆常，一人在河中A, B兩點，以常速率v沿直線($v = |\overrightarrow{v}|$恆常，$\overrightarrow{v}$必須調整方向才能沿直線)在A, B間來回划船一趟。試證：來回一趟所需時間以$\overrightarrow{c} = 0$時最省。
(b) Γ爲河面上固定曲線，此人沿Γ在河面上划繞一圈。試證：所需時間以$\overrightarrow{c} = 0$時最省。 (當然，$v > |\overrightarrow{c}|$，不然就被河水沖走了！)

102 學年度台灣大學數學系高等微積分下
由陳金次教授製作，以創用 CC 姓名標示-非商業性-禁止改作 3.0 台灣 授權條款釋出

Chapter 13

探測與逼近

13.1 有窮與無窮之間

近代數學之所以多彩繽紛，是因為它通往無窮，無窮是個浩瀚無垠的神秘世界，而人類所能掌控的是具體的有窮世界，以有窮探無窮，以已知問未知，就是一個逼近的過程。

我於第一章中談數學的本質，$\sqrt{2}$ 雖存在於人的理性世界裏，但工程師要用它，毫不遲疑會以

$$\sqrt{2} = 1.414213562\cdots$$

來計算，看他的需要，取適當的近似值。圓周率 π 是個超越數，人們要算圓面積，會以

$$\pi = 3.141592654\cdots$$

因需要而取適當的有理數來逼近圓的面積。

高中數學裡有三角函數表、對數表，那都是近似值，用人類熟悉的有理數來逼近。

你打開電腦，輸入某個函數，電腦會給你畫出圖形來，那也是一種近似圖形，用有理數逼近運算出來的結果。

工程師建造偉大的工程，建築師設計不朽的建築，一切都是逼近，就是人類利用太空導航，把太空船送上火星，也是一種逼近的過程。

可以這麼說，整個人類的科技文明都是以有窮探無窮的逼近文明，數學的本質雖是存在於人類的理性世界哩，現實世界裡找不到 $\sqrt{2}$，找不到 π，但數學既從生活中來，那 $\sqrt{2}, \pi$ 並非不食人間煙火，它透過逼近來展現它的存在，幫助人類處理所面對的問題。就像任何宗教的無窮，都要透過有窮的生命去展現那無窮的價值一樣，生命的可貴在此。

就以現代數學的研究內容來說，許多數學模型本身就是一種逼近模型，例如對波的研究，那波動方程式本身就是一種逼近模型，原始模型是個非線性方程式，但由於震幅很小，把它忽略掉，就成為線性方程式。線性方程式的好處多多，容易處理。那逼近的模型，在實務操作

上並未發現有任何不妥之處，而且能十分巧妙地表現出各種波的特性，妙哉！波動方程式。

以有窮探無窮，以已知測未知，有窮的已知世界具有某些特性，那探測的無窮是不是也具有該特性？這要看你怎麼探測，如果你探測的很粗糙，那預測常是不準的。當你的探測精準到某個程度，那無窮是可預測的。我們以下要談的，簡單說，就是這樣的內容。

13.2 逐點收斂 (Pointwise Converge)

給定實函數列 $\{f_n(x)\},\ n = 1, 2, 3, \cdots, x \in I \subset \mathbb{R}$，固定 $x \in I$，$\{f_n(x)\}$ 為一實數列，我們說 $\{f_n\}$ 在 x 點收斂若 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 存在，以 $f(x)$ 表示之。

若 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 存在 $\forall\ x \in I$，我們稱 $\{f_n\}$ 在 I 上逐點收斂 (pointwise converge)，令 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), x \in I$

今設 f_n 逐點收斂到 f，我們想知道

(a) f_n 在 I 上連續，問 f 是否在 I 上連續？

(b) f_n 在 I 上 Riemann 可積分，問 f 是否在 I 上可積分？

且 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_I f_n(x)dx = \int_I f(x)dx$ 成立否？

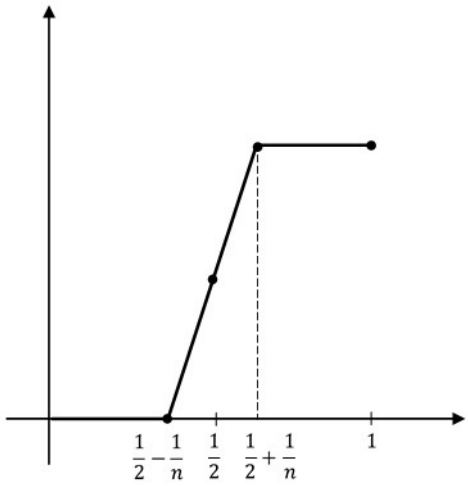
(c) f_n 在 I 上可導，問 f 在 I 上是否可導？且 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$ 成立否？

很不幸地，上面三個問題的答案都是否定的。

(a) 連續性不可遞

例 **1.** $f_n(x) = \begin{cases} 0 & ,0 \le x \le \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ \frac{n}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} & ,\frac{1}{2} - \frac{1}{n} < x < \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1 & ,\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$

f_n 的圖形如下圖



f_n 在 $[0,1]$ 連續，但

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & ,0 \le x < \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & ,x = \dfrac{1}{2} \\ 1 & ,\dfrac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

f 在 $[0,1]$ 上並不連續。

(b) 可積性不可遞

例 **2.** 設 $A = \{r_1, r_2, r_3, \cdots\}$ 表 $[0,1]$ 中的有理數集，$A_n = \{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$

令 $f_n(x) = \chi_{A_n}(x) = \begin{cases} 1 & ,x \in A_n \\ 0 & ,x \notin A_n \end{cases}$, $0 \le x \le 1$.

因此，f_n 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可積分，但

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1 & ,x \in A \\ 0 & ,x \notin A \end{cases}$$

$\overline{\int}_0^1 f(x)\,dx = 1$, $\underline{\int}_0^1 f(x)\,dx = 0$，顯然，$f$ 在 $[0,1]$ 上不可積分。

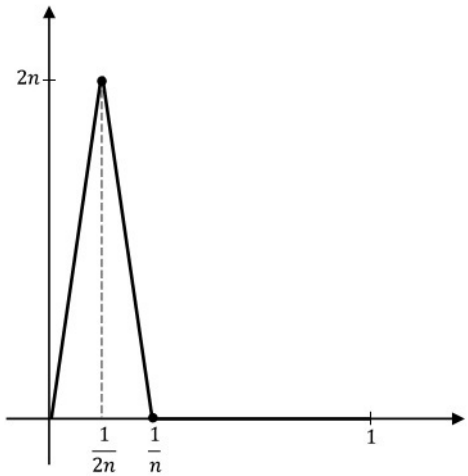
即使 f Riemann 可積，也不能保證

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$$

且看下例：

例 **3.** $f_n(x) = \begin{cases} 4n^2x & , 0 \le x \le \dfrac{1}{2n} \\ -4n^2\left(x - \dfrac{1}{n}\right) & , \dfrac{1}{2n} < x \le \dfrac{1}{n} \\ 0 & , \dfrac{1}{n} < x \le 1 \end{cases}$

f_n 的圖形如下圖



$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0,\ \forall\, x \in [0,1]$，$f_n, 0$ 都是 Riemann 可積，但

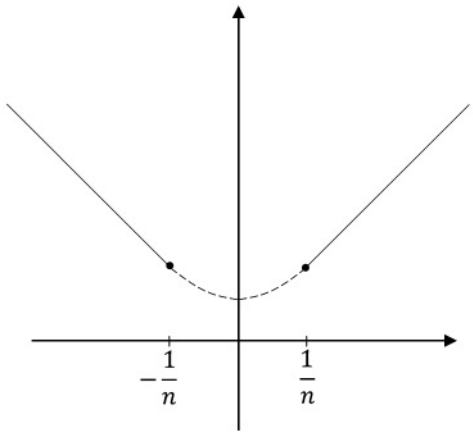
$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1\ \ \forall\, n,\ \int_0^1 0\,dx = 0\ !$$

積分值不能遞！

(c) 可微性不可遞

例 **4.** $f_n(x) = \begin{cases} |x| & , |x| \geq \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{n}{2} \cdot x^2 + \dfrac{1}{2n} & , |x| < \dfrac{1}{n} \end{cases} \quad , -1 \leq x \leq 1$

f_n 的圖形如下圖



f_n 在 $[-1, 1]$ 上處處可導，

$$f_n'(x) = \begin{cases} 1 & , \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1 \\ nx & , |x| < \dfrac{1}{n} \\ -1 & , -1 \leq x \leq -\dfrac{1}{n} \end{cases} \quad , -1 \leq x \leq 1$$

$f_n' \in C[-1, 1]$，但 $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) = |x|$，$f$ 在 $x = 0$ 點並不可微！

由此觀之，逐點收斂並非嚴格的探測，不足以將 f_n 的一些重要性質傳遞到 f 上。

什麼樣的探測可以將 f_n 的連續性、可積性和可微性傳遞到 f 上呢？以下我們將引入均勻收斂的概念，並逐一回答上述問題。

13.3 均勻收斂 (Uniformly Converge)

A. 均勻收斂

設 $\{f_n\}$ 在 I 上逐點收斂到 f 上，給定 $x \in I$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$，根據極限的定義；

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, N, \text{使}\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon\ \text{當}\ n > N$$

注意，對同樣的 ϵ，這個 N 因 x 而變，不同的 x 所需的 N 各異，能否找到一個 N，與 x 無關，使

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon\ \forall\, x \in I, \text{當}\ n > N$$

如果對任意 $\epsilon > 0$，恆存在有這樣的 N，我們稱 f 在 I 上均勻收斂到 f。

把它寫成定義：

<u>定義 **13-1**</u>

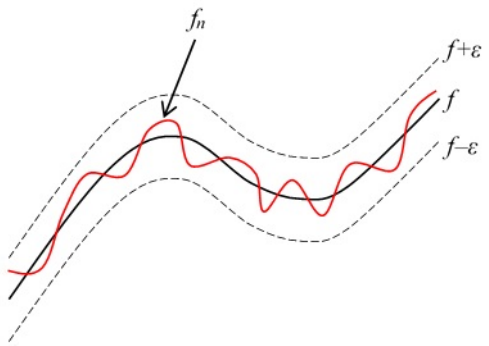
$\{f_n\}$ 為定義在 I 上的實函數，$I \subset \mathbb{R}$，若對任意 $\epsilon > 0$，$\exists\, N$，只與 ϵ 有關，使

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon,\ \forall\, x \in I,\ \text{當} n > N$$

我們稱 f_n 在 I 上均勻收斂到 f。

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon,\ \forall\, x \in I \Leftrightarrow f(x) - \epsilon < f_n(x) < f(x) + \epsilon,\ \forall\, x \in I$$

圖示之，如下：



均勻收斂示意圖

例 **1.** $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}, 0 \le x \le \pi$。

$|f_n(x)| < \dfrac{1}{n}$，給定 $\epsilon > 0$，$\exists\ N > \dfrac{1}{\epsilon}$，則有

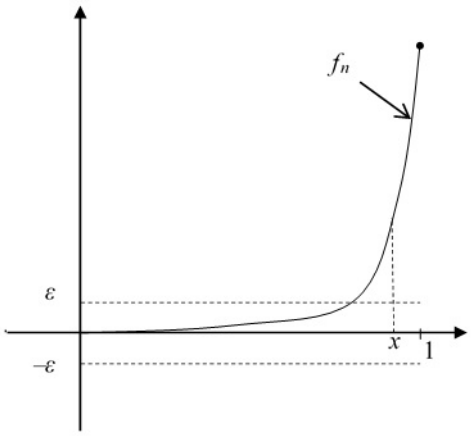
$n > N \Rightarrow \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{N} < \epsilon \Rightarrow |f_n(x)| < \dfrac{1}{n},\ \forall\ x \in [0, \pi]$

$\therefore\ f_n \to 0$ uniformly on $[0, \pi]$

例 **2.** $f_n(x) = x^n, 0 < x < 1$

固定 x，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$。

f_n 的圖形如下：



顯然：對 $0 < \epsilon < 1$，例如取 $\epsilon = \dfrac{1}{10},\ \forall\ N,\ \exists\ n > N$ 及 $x \in [0, 1]$，使 $|x^n| > \epsilon$.
故 f_n 雖在 $[0, 1]$ 上逐點收斂到 0，但此收斂並非均勻。

例 **3.** $f_n(x) = nx(1-x)^n,\ 0 \le x \le 1$

固定 x，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0,\ \therefore\ f_n(x) \to 0,\ \forall\ x \in [0, 1]$。
問：此收斂均勻否？

分析：

1. 如果 $f_n \to 0$ 在 $[0, 1]$ 上均勻，令 $M_n = \max\limits_{0\le x\le 1} f_n(x)$，則 $M_n \to 0$ 當 $n \to \infty$
2. 我們現在就來看看 M_n：

$$f_n'(x) = n(1-x)^n - n^2x(1-x)^{n-1} = n(x-1)^{n-1}[1-(n+1)x]$$

$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1,\ \dfrac{1}{n+1}$

$f_n(1) = 0$，$\therefore$ 1 非極大值。

而 $f_n'(x) > 0$ 當 $x < \dfrac{1}{n+1}$；$f_n'(x) < 0$ 當 $x > \dfrac{1}{n+1}$

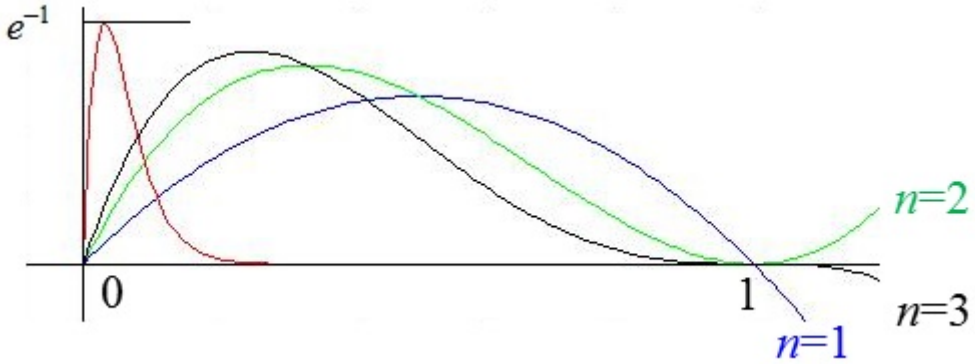
$\therefore f_n \nearrow$ strictly on $\left[0,\ \dfrac{1}{n+1}\right]$, $\searrow$ strictly on $\left(\dfrac{1}{n+1},\ 1\right]$

$\therefore f_n$ 在 $x_n = \dfrac{1}{n+1}$ 取最大值，$M_n = f(x_n) = n \cdot \dfrac{1}{n+1}\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

3. 我們已知 $b_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1} \searrow e$，故 $M_n = \dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} \nearrow e^{-1}$ ，

因此，f_n 在 $[0,1]$ 上非均勻收斂。

圖示之如下：



B. Cauchy 準則 (Cauchy's criterion.)

對均勻收斂，Cauchy 給了如下判斷準則：

$\{f_n\}$ converges uniformly on $I \Leftrightarrow \forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ N$, 使

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon\ \forall\ x \in I,\ \text{當}\ m, n > N$$

証明：($\Rightarrow$)

設 f_n 均勻收斂到 f，給定 $\epsilon > 0,\ \exists\ N$ 使 $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\epsilon}{2}$, 當 $n > N$。於是，

$$|f_m(x) - f_n(x)| \le |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,\ \text{當} m, n > N$$

($\Leftarrow$)

給定 $\epsilon > 0$, $\exists\, N$ 使

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{2},\ \forall\, x \in I,\ 當 m, n > N \tag{1}$$

固定 x，$\{f_n(x)\}$ 為 Cauchy sequence，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 存在，令其為 $f(x)$。
於 (1) 式中，令 $m \to \infty$，得

$$|f(x) - f_n(x)| \le \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,\ \forall\, x \in I,\ 當 n > N$$

即：f_n 在 I 上均勻收斂到 f。

例 **1.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$ 在 $(0, \delta)$ 上非均勻收斂

分析：

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$ 的收斂，$\forall\, x \in [-\pi, \pi]$, 可用 Dirichlet test 方法判斷之，在此不再論述。
2. 令 $S_n(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\sin jx}{j}$，若 S_n 均勻收斂，在 $(0, \delta)$ 上，依 Cauchy 準則，$\forall\, x > 0$, $\exists N$，與 x 無關，使

$$|S_m(x) - S_n(x)| < \epsilon,\ \forall\, x \in (0, \delta),\ 當 m, n \ge N$$

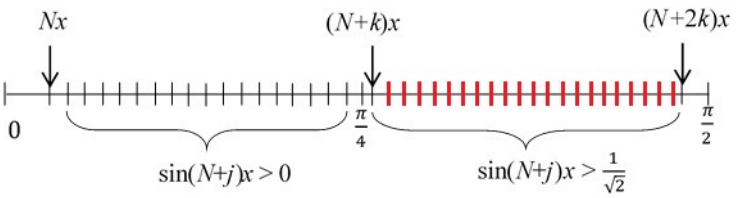
3. 欲証 S_n 在 $(0, \delta)$ 上非均勻收斂，即証：
   $\exists\, \epsilon > 0$, $\forall\, N$, $\exists\, m, n \le N$，使

$$|S_m(x) - S_n(x)| \ge \epsilon,\ 對某些\ x \in (0, \delta)\ 成立$$

   且由：

$$\begin{aligned}
|S_{N+2k}(x) - S_N(x)| &= \sum_{j=1}^{2k} \frac{\sin(N+j)x}{N+j},\ x, k 待定 \\
&> \sum_{j=k}^{2k} \frac{\sin(N+j)x}{N+j},\ 若 (N+j)x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),\ \forall\, j = 1, 2, \cdots, 2k. \\
&> \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=k}^{2k} \frac{1}{N+j},\ 若 (N+j)x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right),\ \forall\, j = k, k+1, \cdots, 2k \\
&> \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot k \cdot \frac{1}{N+2k} \\
&\overset{k=N}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{3} = \epsilon,\ 選定 \epsilon = \frac{1}{3\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

上面的操作圖示如下：



4. $k = N$ 既定，根據上圖選 x

   (i) $Nx < \dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow x < \dfrac{\pi}{4N}$

   (ii) $2Nx > \dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow x > \dfrac{\pi}{8N}$

   (iii) $3Nx < \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow x < \dfrac{\pi}{6N}$

   $\therefore$ (i)(ii)(iii) 成立 $\Leftrightarrow \dfrac{\pi}{8N} < x < \dfrac{\pi}{6N}$

5. 整理之，對 $\epsilon = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}$, 取 N 夠大，使 $\dfrac{\pi}{6N} < \delta$。

   N 既定，取 $x = \dfrac{\pi}{7N}$，則 $\dfrac{\pi}{8N} < x < \dfrac{\pi}{6N}$，因此上面的估計成立，對此 x，我們有

$$|S_{3N}(x) - S_N(x)| > \epsilon$$

   故 $\{S_n(x)\}$ 在 $(0, \delta)$ 上非均勻收斂。

例 **2.** $f_n(x) = \sin nx,\ 0 \le x \le \pi$，問：$f_n$ 在 $[0, \pi]$ 上是否有均勻收斂子序列？

分析：

1. 設 $\{f_n\}$ 有均勻收斂子序列 $\{f_{n_k}\}$，依 Cauchy's criterion,
   $\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ N$ 使 $|f_{n_k}(x) - f_{n_l}(x)| < \epsilon,\ \forall\ x \in [0, \pi],$ 當 $k, l > N$
2. $\epsilon^2 > (\sin n_k x - \sin n_l x)^2 = \sin^2 n_k x - 2 \sin n_k x \cdot \sin n_l x + \sin^2 n_l x$
   上式兩邊在 $[0, \pi]$ 上積分，記住：

$$\int_0^\pi \sin^2 nx\, dx = \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2nx}{2} dx = \frac{\pi}{2}$$
$$\int_0^\pi \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0,\ \text{若}\ m \neq n$$

   我們有

$$\epsilon^2 \pi > \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

   此為不可能，當 $0 < \epsilon < 1$
3. 結論：$\{f_n\}$ 在 $[0, \pi]$ 上不可能有均勻收斂子序列。

Remark:

利用 Lebesgue Dominate Convergence Theorem 可判定 $f_n(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上甚至無逐點收斂子序列，這一部分就留給同學當習題吧。

<u>Lebesgue Dominate Convergence Theorem</u>:

$I \subset \mathbb{R}$ 為可測集，f_n 在 I 上可積，$f_n(x) \to f(x)\ \forall\ x \in I$

若 $|f_n(x)| \leq g(x),\ \displaystyle\int_I g(x)dx < \infty$，則：

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)dx = \int_I f(x)dx$$

簡言之，若 f_n 逐點收斂，$|f_n|$ 在 I 上被一可積函數所控，則 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_I f_n = \int_I \lim_{n\to\infty} f_n$

注意：定理中的 I 可以是 $[0,\infty), (-\infty,\infty), \cdots$，很厲害。

這個定理是實變函數論中非常重要的定理，在此先拿來借用吧。

13.4 可遞性

在這一節裡我們將對 f_n 給出適當條件，以確保連續、積分、微分這些性質可以傳遞到 f 上。

A. 連續性的可遞

<u>定理 **13-1**</u> f_n 在 $[a,b]$ 上連續，若 $f_n \to f$ 在 $[a,b]$ 上均勻，則 f 在 $[a,b]$ 上連續。

分析：

1. $|f(x)-f(y)| \le |f(x)-f_n(x)| + |f_n(x)-f_n(y)| + |f_n(y)-f(y)| = I_1 + I_2 + I_3.$

2. $f_n \to f$ uniformly on $[a,b]$

   給定 $\epsilon > 0$, $\exists\, N$ 使 $|f_n(x)-f(x)| < \dfrac{\epsilon}{3}\ \forall\, x \in [a,b]$, 當 $n > N$

   選定 $n > N$, 則分析 1. 中 $I_1, I_3 < \dfrac{\epsilon}{3}$

3. f_n 在 $[a,b]$ 上連續，$\therefore f_n$ 在 $[a,b]$ 上均勻連續。
   對此 $\epsilon > 0$, $\exists\, \delta$ 使 $|f_n(x)-f_n(y)| < \dfrac{\epsilon}{3}$, 當 $|x-y| < \delta$

4. 對此 δ，我們有

$$|f(x)-f(y)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon,\ 當 |x-y| < \delta$$

   $\therefore f$ 在 $[a,b]$ 上均勻連續。

Remark:

連續是局部性質，定理 13-1 中 $[a,b]$ 可改為 $[0,\infty), (a,b), [a,b), (a,b], (-\infty,\infty), \cdots$ 只要 I 具以下性質：

$$\forall\, x \in I,\ \exists\, [a,b] 使 x \in [a,b] \subset I$$

則定理 13-1 對 I 成立。

例. 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$ 收斂到 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi - x}{2} & ,0 < x \le \pi \\ 0 & ,x = 0 \\ -\dfrac{\pi + x}{2} & ,-\pi \le x < 0 \end{cases}$

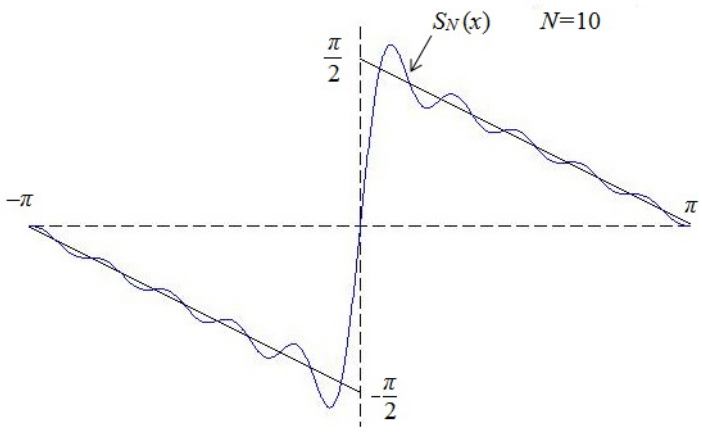
根據定理 13-1，可斷定此收斂在任意 $(-\delta,\delta)$ 上非均勻，因若為均勻收斂，f 必須在 $(-\delta,\delta)$ 上連續，但 f 顯然在 $x=0$ 點並不連續。

Remark: $f(x)$ 的 Fourier Series 為 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$，而 $f \in C^1$，除了 $x=0$ 這點，f 在 $x=0$ 雖不連續，不過在 $x=0$ 點滿足 $f(0) = \dfrac{1}{2}[f(0^+) + f(0^-)]$，根據 Fourier Series 的

理論，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = f(x),\ \forall\ x \in [-\pi, \pi]$$

令 $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin nx}{n}$，$S_N$ 與 f 的關係圖示如下：



$S_N(x)$ 均勻收斂到 $f(x)$，在 $[\delta, \pi]$ 上，但在 $(0, \delta)$ 上則非，$\forall\ \delta > 0$.

B. Riemann 積分的可遞

<u>定理 **13-2**</u> 設 f_n 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可積分，$f_n \to f$ 在 $[a, b]$ 上均勻，則

(a) f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可積分

(b) $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

分析：

(a) 1. 欲証 f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可積分，我們只需驗證：$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ [a, b]$ 的分割 P 使

$$U(P, f) - L(P, f) < \epsilon$$

2. $f_n \to f$ uniformly on $[a, b]$，$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ N$
使 $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{4(b-a)}$，當 $n > N$

即：$f_n(x) - \frac{\epsilon}{4(b-a)} < f(x) < f_n(x) + \frac{\epsilon}{4(b-a)}$，當 $n > N$

3. 設 $P := \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = b\}$ 為 $[a, b]$ 上的分割，
$M_i(f) = \max_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) < \max_{x_{i-1} \le x \le x_i} \left[f_n(x) + \frac{\epsilon}{4(b-a)} \right] = M_i(f_n) + \frac{\epsilon}{4(b-a)}$

同理，$m_i(f) = \min_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) \ge m_i(f) - \frac{\epsilon}{4(b-a)}$

$\Rightarrow$

$$U(P,f) < U(P,f_n) + \frac{\epsilon}{4}$$

$$L(P,f) > L(P,f_n) - \frac{\epsilon}{4}$$

$\therefore$

$$U(P,f) - L(P,f) < U(P,f_n) - L(P,f_n) + \frac{\epsilon}{2},\ 當 n > N \tag{2}$$

4. 選定 $n > N$，f_n 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分，
   給定 $\epsilon > 0$, $\exists\ [a,b]$ 上的分割 P 使

$$U(P,f_n) - L(P,f_n) < \frac{\epsilon}{2}$$

   代入 (2) 式得

$$U(P,f) - L(P,f) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

   故 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積分。

(b) $f_n \to f$ uniformly on $[a,b]$, $\forall\ \epsilon > 0, \exists\ N$ 使 $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\epsilon}{(b-a)}$，當 $n > N$

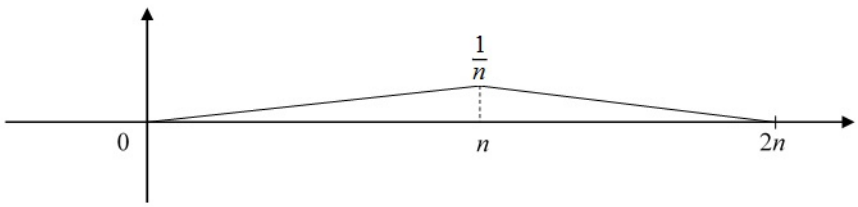
$\Rightarrow \left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx < \dfrac{\epsilon}{(b-a)} \cdot (b-a) = \epsilon$，當 $n > N$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Remark: 若 $[a,b]$ 改為 $[0,\infty)$，Riemann 積分改為瑕積分，分析 (b) 中的論述將失所依據，定理 13-2(b) 不再成立，且看下例。

例 **1.** $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{n^2} & ,0 \leq x \leq n \\ -\dfrac{1}{n^2}(x-2n) & ,n < x \leq 2n \\ 0 & ,x > 2n \end{cases}$

f_n 的圖形如下：



顯然，$|f_n(x)| < \dfrac{1}{n} \to 0$ uniformly on $[0, \infty)$，

$$\int_0^\infty f_n(x)dx = 1,\ \forall\ n，但 \int_0^\infty 0\,dx = 0，\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)dx \neq \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

我們於 13-2 節例 2. 中，利用 $\{\sin nx\}$ 的正交性來推論其無均勻收斂子序列，對一般函數列可沒有這麼美好的性質。利用定理 13-1 及 13-2，也可以推論 $\{\sin nx\}$ 無均勻收斂子序列，這個方法適用於一般函數列。

例 **2.** 試証 $\{\sin nx\}, 0 \leq x \leq \pi$ 無均勻收斂子序列。

分析：

1. 若 $\{\sin nx\}$ 有均勻收斂子序列 $\{\sin n_k x\}$，收斂到 f，根據定理 13-1，f 必為連續函數。

2. $\sin n_k x \to f$ uniformly on $[0, \pi]$
   $\Rightarrow f(x)\sin n_k x \to f^2$ uniformly on $[0, \pi]$

   根據定理 13-2 及 Riemann Lebesgue Lemma，

   $$\int_0^\pi f^2(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^\pi f(x)\sin n_k x\,dx = 0$$

   $\Rightarrow$

   $$f(x) = 0,\ \forall\ x \in [0, \pi]$$

3. $\sin n_k x$ 在 $1, -1$ 間飛舞擺盪，顯然不會均勻收斂到 0。

Remark:

分析 2 透過 Riemann Lebesgue Lemma 得到 $\displaystyle\int_0^\pi f^2(x)dx = 0$ 從而推論 $f = 0$，

同學也可以直接由 $\sin n_k x \to f$ uniformly on $[0, \pi]$，兩邊對 $[\alpha, \beta]$ 積分，令 $n_k \to \infty$ 得 $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0,\ \forall\ \alpha, \beta \in [0, \pi]$，據此推論 $f = 0$，無須 Riemann Lebesgue Lemma.

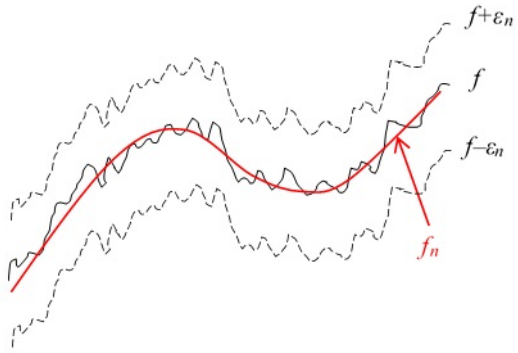
C. 導數的傳遞問題

導數牽涉到函數的平滑性問題，平滑性無法由均勻收斂傳遞。

例如：一維的布朗運動 (醉漢走路)，醉漢下一刻要往左或右走，完全隨機，無法預測，設 $f(t)$ 表醉漢在 t 時刻的位置，則 f 為一連續，但處處不可導的函數。

設 f 為一維布朗運動 (或股市大盤走勢圖)，考慮 $0 \le t \le 1$，對 $\epsilon_n = \dfrac{1}{n}$，我們恆可找到一個非常 smooth 的曲線 $f_n(t)$，

使 $f(t) - \epsilon_n < f_n(t) < f(t) + \epsilon_n$，如圖所示。



$f_n \to f$ uniformly on $[0,1]$，$f_n'(x)$ 存在 $\forall\, x \in [0,1]$，但 f 處處不可導。

Remark: 根據 Weierstrass Approximation Theorem(接下來會談)，那 f_n 可以選為 polynomial，好到不行，而 f 卻壞到不行，處處不肯導！

均勻收斂既然無法傳遞函數的平滑性，該如何是好？

下面的定理告訴我們，那均勻收斂應該放到 f_n' 上，而不是 f_n。

<u>定理 **13-3**</u> (推窗望月)

設 $f_n \in C^1[a,b]$, $f_n(x) \to f(x)$ pointwise on $[a,b]$，$f_n'(x) \to g(x)$ uniformly on $[a,b]$，

則

(a) $f'(x)$ 存在 , $\forall\ x \in [a,b]$

(b) $f'(x) = g(x)$

分析：回憶微積分基本定理：

第一基本定理 f 在 $[a,b]$ 上連續，$G(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$，則 $G'(x) = f(x),\ \forall\ x \in [a,b]$

第二基本定理 f 在 $[a,b]$ 上連續，$F'(x) = f(x),\ \forall\ x \in [a,b]$，則

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

現在 $f_n \in C^1[a,b]$，即 f_n' 在 $[a,b]$ 上連續，根據微積分第二基本定理，

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)dt \tag{3}$$

而 $f_n' \to g$ uniformly on $[a,b]$，根據定理 13-2，於 (3) 式中令 $n \to \infty$，得

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt \tag{4}$$

f_n' 連續，依定理 13-1，知 g 連續，再依微積分第一基本定理，於 (4) 式中兩邊求導得

$$f'(x) = g(x)$$

Remark:

上面這個定理，由於假設：$f_n \in C^1[a,b]$，條件太好了，利用微積分基本定理，定理很容易導出，猶如桌上取柑。雖是桌上取柑，實務上碰到的問題條件都不致太壞，這個定理應用起來游刃有餘。

例. 我們之前談過冪級數基本定理：

$f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，$\dfrac{1}{R} = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$，則

(a) f 在 $|x| \le \rho,\ \rho < R$，上均勻收斂

(b) $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},\ \forall\ |x| < R$

這個定理的 (b) 可利用定理 13-3 輕易導出。

分析：令 $S_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k$，則 $S_n'(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}ka_kx^{k-1}$

$\dfrac{1}{R'}=\limsup\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{k|a_k|}=\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}=\dfrac{1}{R}$

$\therefore S_n'(x)$ 在 $|x|\le\rho,\rho<R$, 上均勻收斂到 $g(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k-1}$

又 $S_n(x)$ 收斂到 $f(x)$，依定理 13-3：

$$f'(x)\text{ 存在且等於 }g(x)$$

即：

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

Remark: 根據冪級數的唯一定理，上面的例子對實冪函數成立，對複級數自然也成立，留給同學當習題吧。

<u>定理 **13-4**</u> (靈貓捕鼠)

設 $f_n'(x)$ 存在 $\forall\ x\in[a,b]$，並設 $f_n'(x)\to g(x)$，在 $[a,b]$ 上均勻，若 $\exists\ x_0$ 使 $\{f_n(x_0)\}$ 收斂，則

(a) f_n 在 $[a,b]$ 上均勻收斂

(b) 令 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$，則 $f'(x)=g(x),\ \forall\ x\in[a,b]$

分析：

1. 現在只知道 $f_n'(x)$ 存在 $\forall\ x\in[a,b]$，f_n' 連不連續毫無訊息，因此，那強而有力的工具－微積分基本定理在此愛莫能助！怎麼辦？

   好在還有個均值定理，它說：

   若 f 在 $[a,b]$ 上連續，在 (a,b) 上可導，則 $\exists\ c\in[a,b]$ 使

   $$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

2. 欲証 f_n 在 $[a,b]$ 上均勻連續，可驗證它滿足 Cauchy's criterion，且看:

   $$|(f_m(x)-f_n(x))-(f_m(x_0)-f_n(x_0))|=|f_m'(\xi)-f_n'(\xi)|\cdot|x-x_0|$$

   故

   $$\begin{aligned}|f_m(x)-f_n(x)|&\le|f_m(x_0)-f_n(x_0)|+|f_m'(\xi)-f_n'(\xi)|\cdot|x-x_0|\\&=I_1+I_2\end{aligned}\tag{5}$$

其中 ξ 為介於 x, x_0 之間某點。

而 f_n' 在 $[a,b]$ 上均勻收斂，給定 $\epsilon > 0$, $\exists\ N_1$ 使

$$|f_m'(x) - f_n'(x)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)},\ \forall\ x \in [a,b],\ 當 m,n > N_1$$

$$\therefore I_2 = |f_m'(\xi) - f_n'(\xi)| \cdot |x - x_0| < \frac{\epsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \frac{\epsilon}{2}$$

又 $\{f_n(x_0)\}$ 收斂，對此 ϵ， $\exists\ N_2$ 使

$$|f_m(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{2},\ 當 m,n > N_2$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，根據 (5) 式，則有

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,\ \forall\ x \in [a,b],\ 當 m,n > N$$

故 f_n 在 $[a,b]$ 上均勻收斂。

3. 固定 $x \in [a,b]$，令 $\phi_n(t) = \begin{cases} \dfrac{f_n(t) - f_n(x)}{t-x} & ,t \neq x \\ f_n'(x) & ,t = x \end{cases}$

顯然，$\phi_n(t)$ 在 $[a,b]$ 上連續，若能証明 $\phi_n(t)$ 在 $[a,b]$ 上均勻收斂，

由於 $\phi_n(t) \to \phi(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t) - f(x)}{t-x} & ,t \neq x \\ g(x) & ,t = x \end{cases}$ ，

$\phi_n(t)$ 在 $[a,b]$ 上連續 $\Rightarrow \phi$ 在 $[a,b]$ 上連續

特別 ϕ 在 x 點連續，$\therefore \lim\limits_{t \to x} \dfrac{f(t) - f(x)}{t-x} = g(x)$，

即：$f'(x) = g(x)$.

4. $\phi_n(t)$ 在 $[a,b]$ 上均勻收斂的証明：

(i) $t \neq x$

$$\begin{aligned} |\phi_m(t) - \phi_n(t)| &= \left| \frac{(f_m(t) - f_n(t)) - (f_m(x) - f_n(x))}{t-x} \right| \\ &= |f_m'(\xi) - f_n'(\xi)| && \xi 介於 x,t 之間 \\ &< \epsilon && 當 m,n > N \end{aligned}$$

(ii) $t = x$

$$|\phi_m(x) - \phi_n(x)| = |f_m'(x) - f_n'(x)| < \epsilon,\ 當 m,n > N$$

$\therefore \{\phi_n(t)\}$ 滿足 Cauchy's criterion $\forall\ t \in [a,b]$

故 $\{\phi_n\}$ 在 $[a,b]$ 上均勻收斂。

靈貓為了捕鼠，或潛藏，或伏進，耐心等待，最後縱身一撲，終於捕到老鼠。條件強則推窗望月，條件弱則靈貓捕鼠。數學家，很有能耐。

13.5 均勻收斂的判斷

均勻收斂好處多多，如何判斷一函數級數在某區間上均勻收斂？

A. Weierstrass M-test.

Weierstrass 對函數級數給出一個簡單而有力的判斷，稱為 M-test.

<u>定理 **13-5**</u> $|f_n(x)| < M_n,\ \forall\, x \in I$，若 $\sum M_n < \infty$，則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 I 上均勻收斂。

証明：依 Cauchy's criterion，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty &\Rightarrow \text{給定 } \epsilon > 0,\ \exists\, N\text{使 } \sum_{i=m}^{n} M_i < \epsilon,\ \text{當} n > m > N \\ &\Rightarrow \sum_{i=m}^{n} |f_i(x)| < \sum_{i=m}^{n} M_i < \epsilon,\ \forall\, x \in I,\ \text{當} n > m > N \\ &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\text{在} I \text{上均勻收斂}\end{aligned}$$

例 **1.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{2^n},\ -\pi \le x \le \pi$, 均勻收斂。

因 $\left|\dfrac{\cos nx}{2^n}\right| < \dfrac{1}{2^n}, \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} < \infty$，依 M-test，知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{2^n}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上均勻收斂。

令 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{2^n}$，問：

(a) $f'(x)$ 存在否？

(b) $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} -\dfrac{n \sin nx}{2^n}$ 成立否？

觀察：

1. $\left|\dfrac{-n \sin nx}{2^n}\right| < \dfrac{n}{2^n}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n} < \infty$，依 M-test，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} -\dfrac{n \sin nx}{2^n}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上均勻收斂。

2. 再依定理 13-4，知 $f'(x)$ 存在 $\forall\, x \in [-\pi, \pi]$，且 $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} -\dfrac{n \sin nx}{2^n}$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2^n} < \infty,\ \therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty} -\dfrac{n^2 \cos nx}{2^n}$ 均勻收斂 $\Rightarrow f''(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} -\dfrac{n^2 \cos nx}{2^n}$

   依此類推，可一直再導下去，$\therefore\ f \in C^{\infty}$

Remark: 令 $A(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{2^n},\ B(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{2^n}$

則 $A+iB=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}=\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=f(z)$，其中 $z=\cos n\theta+i\sin n\theta$

$f(z)$ 在 $|z|<2$ 上解析，故 A,B 為解析函數。

例 **2.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2},\ -\pi\le x\le\pi$，均勻收斂，因 $\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right|<\frac{1}{n^2},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$，
依 M-test，知 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上均勻收斂。

令 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$，問：

(a) $f'(x)$ 存在否？$x\in[-\pi,\pi]$

(b) 若 $f'(x)$ 存在，$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{\sin nx}{n}$ 成立否？

觀察：$\left|-\frac{\sin nx}{n}\right|<\frac{1}{n}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$，$M$-test 失效。

怎麼辦？

下面我們再介紹另一個判斷法，可以處理上面的困擾。

B. Dirichlet test.

Dirichlet test 是對形如 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$ 均勻收斂的判斷。

<u>定理 **13-6**</u> 設 $a_n(x),b_n(x)$ 為定義於 $I\subset\mathbb{R}$ 上的實函數，

令 $B_n(x)=b_1(x)+b_2(x)+\cdots+b_n(x)$，若

(i) $\exists\ M$ 使 $|B_n(x)|\le M,\ \forall\ x\in I$

(ii) $a_n(x)\searrow 0$ 在 I 上均勻

則 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上均勻收斂。

證明：其方法一如第八章中 Dirichlet test 的証明，檢驗 Cauchy criterion:

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{k=m}^{n} a_k(x)b_k(x)\right| &= |a_m(x)(B_m(x)-B_{m-1}(x)) + a_{m+1}(x)(B_{m+1}(x)-B_m(x)) \\
&\quad + \cdots + a_n(x)(B_n(x)-B_{n-1}(x))| \\
&= \left|\sum_{k=m}^{n-1} B_k(x)(a_k(x)-a_{k+1}(x)) + a_n(x)B_n(x) - a_m(x)B_{m-1}(x)\right| \\
&\le M\sum_{k=m}^{n-1}(a_k(x)-a_{k+1}(x)) + Ma_n(x) + Ma_m(x) \\
&= M(a_m(x)-a_n(x)) + Ma_n(x) + Ma_m(x) \\
&= 2Ma_m(x) \qquad (6)
\end{aligned}
$$

根據 (ii)，$a_m(x) \searrow 0$ uniformly on I, $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, N$ 與 x 無關，使

$$0 \le a_m(x) < \frac{\epsilon}{2M},\ \forall\, x \in I,\ 當 m > N$$

依此，代入 (6)，得

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k(x)b_k(x)\right| < \epsilon,\ \forall\, x \in I,\ 當 n > m > N$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上均勻收斂。

例 **3.** 現在回過頭來看前面的例 2.

M-test 雖然失效，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$ 卻符合 Dirichlet test 的形式：

(i) $a_n(x) = \dfrac{1}{n} \searrow 0$ uniformly on $[-\pi, \pi]$

(ii) $B_n(x) = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \dfrac{\sin\frac{n}{2}x \cdot \sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$,

$$|B_n(x)| < \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} < \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}},\ \forall\, x \in [\delta, \pi],\ \delta > 0.$$

依 Dirichlet test, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$ 在 $[\delta, \pi]$ 上均勻收斂

$\therefore\ f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} -\dfrac{\sin nx}{n}$, 在 $[\delta, \pi]$ 上，$\forall\, \delta > 0$

$\therefore$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\sin nx}{n},\ \forall\ x \in [-\pi, \pi], x \neq 0 \tag{7}$$

於 $x = 0$ 這點如何？函數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ 在這一點取極大值，它可導嗎？我們且由

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi - x) & 0 < x \leq \pi \\ 0 & x = 0 \\ -\frac{1}{2}(\pi + x) & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

此級數在 $[-\pi, -\delta) \cup (\delta, \pi]$ 上均勻收斂 $\forall\ \delta > 0$。
任取 $x \in (\delta, \pi]$，於 $[x, \pi]$ 上積分之，得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} + \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots \right) = \frac{1}{4}(\pi - x)^2$$

據例. **2**，$f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上連續。
令 $x = 0$，得

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

據此，可得

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}$$

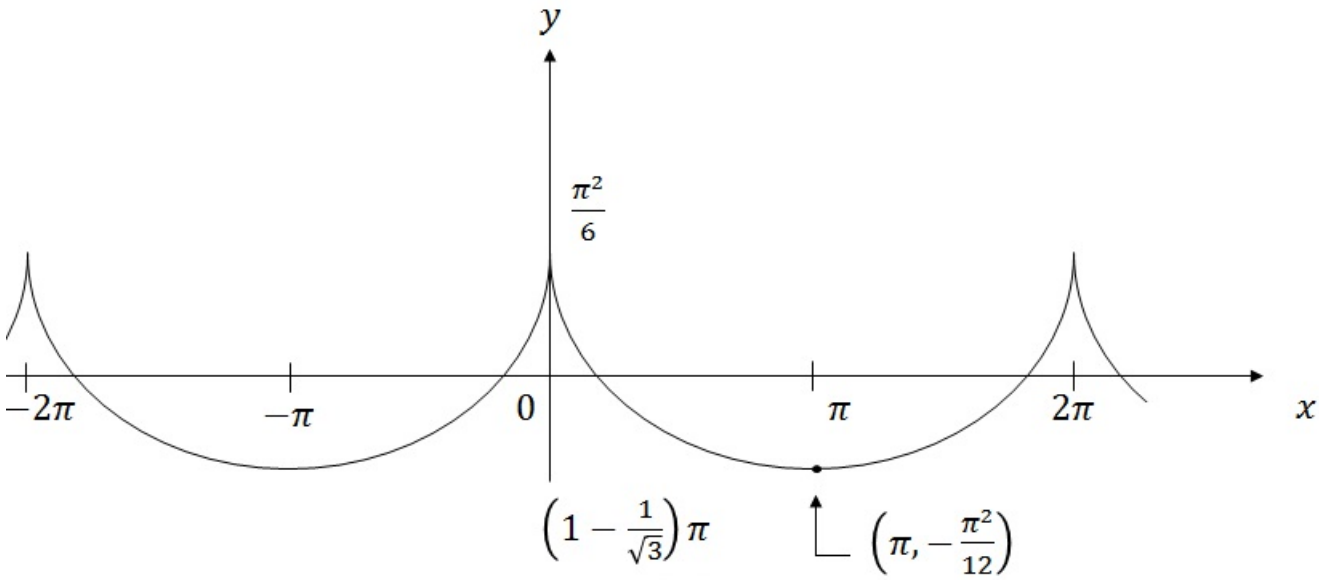
於是有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \begin{cases} \frac{1}{4}(\pi - x)^2 - \frac{\pi^2}{12} & 0 < x \leq \pi \\ \frac{\pi^2}{6} & x = 0 \\ \frac{1}{4}(\pi + x)^2 - \frac{\pi^2}{12} & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

得 $f'(0^+) = -\dfrac{\pi}{2}, f'(0^-) = \dfrac{\pi}{2}$.

$f'(0^+) \neq f'(0^-)$，故 f 在 $x = 0$ 不可導！

f 的圖形簡繪如下：



Remark:

1. 十九世紀中葉以前的數學家直覺上認為連續函數應該不至於太壞，不可導的點應該很稀疏，直到 1860 年代以後，人們才對連續與可導之間有更清楚的認識，Riemann 認為

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$$

不可導的點在 $[0, \pi]$ 上稠密，但他並沒有給出明確的証明。1872，Weiestrass 証明

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),\ 0 < a < 1, b \text{ 為奇數}$$
$$ab > 1 + \frac{3\pi}{2} \simeq 5.712389$$

在 $\mathbb{R}$ 上連續，但處處不可導。
f 的連續性很容易從 M-test 得到，因 $\sum a_n^2 < \infty$。
$\cos(b^n \pi x)$ 表示週期被壓縮 b^n 倍，而 $\cos(b^n \pi x)$ 在 $-1, 1$ 間震盪飛舞，乘上 a^n 倍後，將它們疊加起來，使收斂，就成了一個" 毛茸茸" 的函數，一個函數毛茸茸就處處不可導了。

現代人對碎形 (fractal) 有清晰的認識，大部分的碎形邊界都是不可導的。有的雖在某些點上可導，但這些點的測度為 0。

其實自然界的連續函數幾乎都是處處不可導的，你很難想像一顆花粉在水中作布朗運動，它會跑出一條平滑曲線來。

有關 Weiestrass function 的介紹，請同學上網看 Wikipedia，點 Weiestrass function，那裏有圖，以及相關的資訊，勝過我千言萬語。

Hardy 對這"continuous but no where differentiable" 函數的尋覓有更簡單的建構，同學如有興趣，可參考 Rudin: Principles of Mathematical Analysis, 3rd Edition, P.154, Theorem 7.18.

2. 另一個更驚人的事是：

$$\text{存在一連續寫像把 } [0,1] \text{ 映成 } [0,1]\times[0,1]$$

怎麼可能？連續寫像竟然把一維的區間映成二維的方塊，太不可思議了吧！

G.Peano 於 1890 首次發現這樣的" 曲線"，震驚了當時的數學界，之後陸續有人提出不同的" 曲線"，這類曲線，數學上稱為 Space filling curve，有關它的介紹，也請同學上網看 Wikipedia，點 Space filling curve，那裏有生動的介紹，值得一閱。

例 **4.** $L^p(0,1)\subset L^1(0,1),\ \forall\, p>1$，但 $L^1(0,1)\neq \bigcup\limits_{p>1} L^p(0,1)$

觀察：

1. $\|f\|_1\le \|f\|_p,\ \forall\, f\in L^p(0,1),\ \therefore L^p(0,1)\subset L^1(0,1),\ \forall\, p>1$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx = \frac{1}{-p+1}x^{-p+1}\Big|_0^\infty = \begin{cases} \infty & ,當 p>1 \\ \dfrac{1}{1-p} & ,當 p<1 \end{cases}$

3. 令 $f_n(x)=x^{-\left(1-\frac{1}{n}\right)}$，則 $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx = n<\infty$

   $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)^p\,dx=\infty$ 當 $p\left(1-\dfrac{1}{n}\right)>1.$

4. 又令 $\phi(x)=\dfrac{1}{x}$, 則 $f_n(x)<\phi(x),\ \forall\, 0<x<1,$ 並令 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n(x)}{2^n}$

   則 $0\le f(x)\le \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi(x)}{2^n}<\phi(\delta)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\phi(\delta),\ \forall\, x\in(\delta,1)$

   依 M-test，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n(x)}{2^n}$ 在 $(\delta,1)$ 上均勻收斂，

   f_n 在 $[\delta,1]$ 上連續，$\therefore\ f$ 在 $[\delta,1]$ 上連續，$\forall\,\delta>0$，故 f 在 $(0,1)$ 上連續。

5. $\|f\|_1\le \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|f_n\|_1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}<\infty,\ \therefore\ f\in L^1(0,1)$

   $\forall\, p>1,\ \exists\, n$ 使 $p\left(1-\dfrac{1}{n}\right)>1$，對這個 n，有：

$$\int_0^1 f(x)^p dx > \int_0^1 \left|\frac{f_n(x)}{2^n}\right|^p dx=\infty,\ \therefore\ f\notin L^p(0,1)$$

故 $L^1(0,1) \neq \bigcup_{p>1} L^p(0,1)$

13.6 Weierstrass 逼近定理 (The Weierstrass Approximation Theorem.)

A. 古典 Weiestrass 逼近定理

任意連續函數，都可以用多項式在閉區間上均勻地逼近，這就是古典 Weiestrass 逼近定理的內容，寫成定理如下：

<u>定理 **13-7**</u> 設 f 為定義於 $[a,b]$ 上的實連續函數，則給定 $\epsilon > 0$，存在多項式 P 使

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon,\ \forall\ x \in [a,b]$$

有關 Weiestrass 逼近定理的証明，通常所見有：

1. 加權平均 (convolution) 的觀點
2. Bernstein polynomial 的觀點

   Bernstein 透過機率的觀點，利用大數法則，直接把那多項式

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

   寫出，証明

$$|f(x) - B_n(x)| < \epsilon,\ \forall\ x \in [0,1],\ \text{當}n\text{夠大}$$

   實在是慧眼獨具。不過太多巧妙，而且只限單變數函數，在此，我捨而不取。

以下介紹透過加權平均的觀點，把那多項式找出。
此方法有其脈絡可循，且可推廣到多變數函數。

回憶 convolution 中核函數的性質：

設 $\{\kappa_n(x)\}$ 為定義於 $\mathbb{R}$ 上的一組核函數，即：

(i) $\kappa_n(x) \geq 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$

(ii) $\displaystyle\int \kappa_n(x)dx = 1,\ \forall\ n$

(iii)

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|x|>\delta} \kappa_n(x)dx = 0,\ \forall\ \delta > 0 \tag{8}$$

若 f 為定義於 (c,d) 上的實連續函數，則

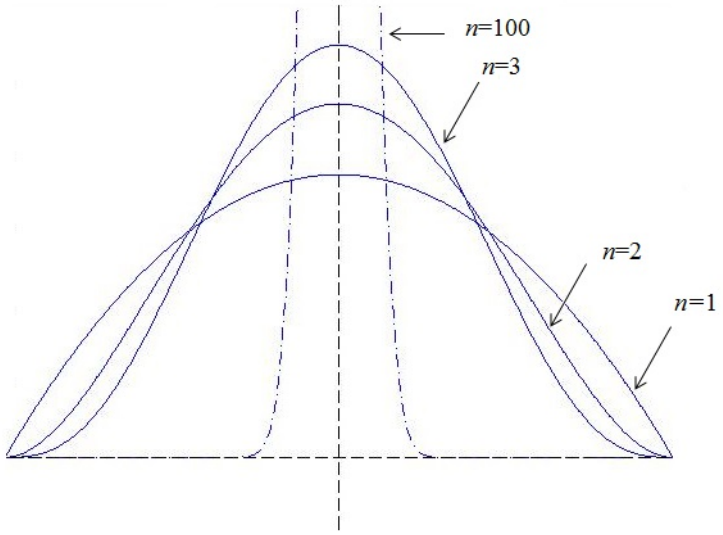
$$\lim_{n\to\infty} (\kappa_n * f)(x) = f(x),\ \forall\ x \in (c,d)$$

此收斂在 $[a,b]$ 上均勻， $\forall\ [a,b] \subset (c,d)$

考慮拋物線 $y = 1 - x^2$，只取 $-1 \le x \le 1$ 這一區段，

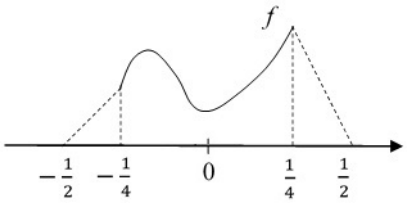
令 $\kappa_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\alpha_n}(1-x^2)^n & , -1 \le x \le 1 \\ 0 & , |x| > 1 \end{cases}$

其中 $\alpha_n = \displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n dx$



直覺上 $\{\kappa_n\}$ 應是一組核函數，事實上的確如此，(i)(ii) 顯然成立，(iii) 稍後再驗。

設 f 為定義於 $\left[-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right]$ 上的實連續函數，將 f 線型延拓到 $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ 上，如下圖



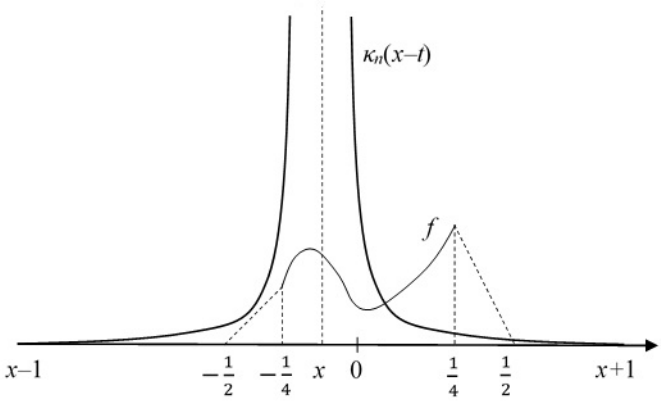
則 f 為定義於 $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ 上的連續函數，依核函數的加權平均定理，我們有：

$$(\kappa_n * f)(x) \to f(x) \text{ uniformly on} \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$$

而

$$
\begin{aligned}
(\kappa_n * f)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \kappa_n(x-t) f(t) dt \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \kappa_n(x-t) f(t) dt \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [1-(x-t)^2]^n f(t) dt, \text{ 當} x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\
&= \text{polynomial in } x, \text{degree } 2n
\end{aligned}
$$

取 $P_{2n}(x) = (\kappa_n * f)(x)$ 即為所求。
上面積分上下限圖示如下：



注意：$x, t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow x - t \in [-1, 1]$

$\Rightarrow \kappa_n(x-t) = [1-(x-t)^2]^n$

$\Rightarrow (\kappa_n * f)(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [1-(x-t)^2]^n f(x) dt$

積分的上下限與 x 無關，$\forall\, x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

3. 對一般的 $[a,b]$，可將 $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$ 線性映射至 $[a,b]$，

令 $x = a + \frac{b-a}{2}\left(t+\frac{1}{4}\right), -\frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{4}$

則 $f(x) = f(x(t))$，為定義在 $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$ 上的連續函數。

$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists$ 多項式 $P(t)$ 使

$$|f(x(t)) - P(t)| < \epsilon,\ \forall\ t \in \left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$$

即

$$|f(x) - P(t(x))| < \epsilon,\ \forall\ x \in [a,b]$$

而 $P(t(x))$ 為 x 的多項式，得証。

4. 現在回過頭來驗証我們所取的 $\{\kappa_n(x)\}$ 滿足 (8) 式。

$$\int_{|x|>\delta} \kappa_n(x)dx = \frac{\beta_n}{\alpha_n},\ \beta_n = \int_\delta^1 (1-x^2)^n dx$$

$$\alpha_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx > \int_0^1 (1-x)^n dx = \frac{1}{n+1}$$

$$\beta_n = \int_\delta^1 (1-x^2)^n dx < \int_\delta^1 (1-\delta^2)^n dx = (1-\delta^2)^n \cdot (1-\delta)$$

$$\therefore\ \int_{|x|>\delta} \kappa_n(x)dx < \frac{(1-\delta^2)^n(1+\delta)}{n+1}) \to 0 \quad 當\ n \to \infty$$

故 $\{\kappa_n\}$ 確實為一組 summability kernel.

Remark: 對定義於 $Q = \left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right] \times \left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right] \times \cdots \times \left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$ 上的實連續函數 f，

仿上可將它連續延拓到 $D = \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right] \times \cdots \times \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 上，

使 f 在 D 以外恆為 0，則

$$P_n = \frac{1}{\alpha_n^n}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cdots \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t_1,t_2,\cdots,t_n)[1-(x_1-t_1)^2]^n \cdots [1-(x_n-t_n)^2]^n dt_1 \cdots dt_n$$

(其中 $\alpha_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt$) 為 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的多項式，$P_n \to f$，在 Q 上均勻，當 $n \to \infty$。

對一般的定義域 $Q = [a_1,b_1] \times \cdots \times [a_n,b_n]$，可仿上將 $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$ 線性映射到 $[a_i,b_i]$ 上，即得：$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ \mathbf{x}$ 的多項式 P 使

$$|f(\mathbf{x}) - P(\mathbf{x})| < \epsilon,\ \forall\ \mathbf{x} \in Q$$

例. f 在 $[a,b]$ 上連續，若 $\int_a^b x^n f(x)dx = 0,\ \forall\ n = 0,1,2,\cdots$

試証；$f(x) = 0,\ \forall\ x \in [a,b]$

分析：

1. $\int_a^b x^k f(x) = 0,\ \forall\ k \Rightarrow \int_a^b P(x)f(x) = 0$，對一切多項式成立。

2. 根據 Weierstrass 逼近定理，給定 $\epsilon > 0,\ \exists$ 多項式 P 使

$$|f(x) - P(x)| < \frac{\epsilon}{M(b-a)}$$

   其中 $M = \max\limits_{a \le x \le b} f(x)$.

3. 據 2.，

$$\int_a^b f^2(x)dx = \int_a^b f(x)(f(x) - P(x))dx \le \epsilon$$

   ϵ 任意 $\Rightarrow \int_a^b f^2(x)dx = 0$
   f^2連續 $\ge 0 \Rightarrow f^2(x) = 0\ \forall\ x \in [a,b] \Rightarrow f = 0,\ \forall\ x \in [a,b]$

利用定理 13-7，可得到單位圓周上的三角多項式逼近定理，如下：

<u>定理 **13-8**</u>

設 T 表單位圓周，$f(\theta)$ 為定義於 T 上的連續函數，則 $f(\theta)$ 可以用三角多項式均勻地逼近，即：

$\forall\ \epsilon > 0$, 存在三角多項式

$$\tau(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)$$

使

$$|f(\theta) - \tau(\theta)| < \epsilon,\ \forall\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

分析：

1. f 在 $[0,\pi]$ 上連續，$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists$ 偶三角多項式

$$\tau(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos k\theta$$

   使

$$|f(\theta) - \tau(\theta)| < \epsilon,\ \forall\ 0 \le \theta \le \pi$$

理由：考慮 $g(y) = f(\cos^{-1} y)$，$-1 \le y \le 1$

g 在 $[-1, 1]$ 上連續，依定理 13-7，$\exists$ 多項式 $P(y)$ 使

$$|g(y) - P(y)| < \epsilon,\ 0 \le \theta \le \pi$$

而 $\cos^k \theta$ 可表為 $\cos j\theta, j = 0, 1, \cdots, k$ 的線性組合 (請同學自行推導)，

$$P(\cos\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos k\theta$$

2. 據 1.，f 為 T 上的偶函數 $(f(-\theta) = f(\theta))$

   $\Rightarrow \exists$ 偶三角函數 τ 使 $|f(\theta) - \tau(\theta)| < \epsilon,\ \forall\ 0 \le \theta \le 2\pi$

3. 對任意函數 f，$f(\theta) + f(-\theta), [f(\theta) - f(-\theta)]\sin\theta$ 為偶函數。

   據 2.，$\exists$ 偶三角多項式 $\tau_1(\theta), \tau_2(\theta)$ 使

$$f(\theta) + f(-\theta) = \tau_1(\theta) + \alpha_1(\theta),\ |\alpha_1(\theta)| < \frac{\epsilon}{2} \tag{9}$$

$$[f(\theta) - f(-\theta)]\sin\theta = \tau_2(\theta) + \alpha_2(\theta),\ |\alpha_2(\theta)| < \frac{\epsilon}{2} \tag{10}$$

   $\forall\ 0 \le \theta \le 2\pi$.

4. $\frac{1}{2}[(9)\times \sin^2\theta + (10)\times \sin\theta]$ 得

$$f(\theta)\sin^2\theta = \tau_3(\theta) + \beta_1(\theta),\ \beta_1 = \frac{1}{2}[\alpha_1 \cdot \sin^2\theta + \alpha_2 \cdot \sin\theta],\ |\beta_1| < \frac{\epsilon}{2} \tag{11}$$

   同理，對函數 $f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$，我們有

$$f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\sin^2\theta = \tau_4(\theta) + \beta_2(\theta),\ |\beta_2| < \frac{\epsilon}{2}$$

   變數變換：$\frac{\pi}{2} - \theta \to \theta$，有

$$f(\theta)\cos^2\theta = \tau_5(\theta) + \beta_2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \tag{12}$$

   由於正餘弦函數有積化和差公式，上面 τ_3, τ_4, τ_5 為三角多項式。

5. (11)+(12) 得

$$\begin{aligned} &f(\theta) = \tau(\theta) + E(\theta) \\ &\tau(\theta) = \tau_4(\theta) + \tau_5(\theta) \text{ 為一三角多項式} \\ &|E| < |\beta_1| + |\beta_2| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

Remark: f 在 T 上連續與 f 在 $[0,2\pi]$ 上連續有別，前者要求 $f(0)=f(2\pi)$，後者不做此要求。

例. f 在 T 上連續，滿足

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos k\theta\, d\theta = 0, \int_0^{2\pi} f(\theta)\sin k\theta\, d\theta = 0,\ \forall\ k=0,1,2,\cdots$$

則 $f(\theta)=0,\ \forall\ 0\le\theta\le 2\pi$

此例的証明與上例同，不再重複。

B. Stone 的推廣 (Stone-Weierstrass 定理)

M.H.Stone (1903∼1989)，美國數學家，於 1948 年推廣了 Weierstrass 逼近定理，數學上稱為 Stone-Weierstrass 定理。

Stone 的推廣，與古典 Weiestrass 逼近定理的處理，是完全不同的思維。他把那形而下的多項式、三角多項式，抽離出它們的特性，稱為 Algebra。設 $\mathbf{X}$ 為一 compact metric space，$C(\mathbf{X})$ 為定義於 $\mathbf{X}$ 上的一切實連續函數，A 為 $C(\mathbf{X})$ 中的一個 Algebra，則 A 在 $C(\mathbf{X})$ 中稠密，簡單說，其內容如此。當然，A 必須再加上一個條件：它的元素必須夠多。什麼叫 Algebra？什麼叫夠多？讓我慢慢道來。

定義 **13-2** 設 $\mathbf{X}$ 為一 compact metric space，

$C(\mathbf{X})=\{f|f$ 為定義於 $\mathbf{X}$ 上的實連續函數 $\}$，$A\subset C(\mathbf{X})$, 稱 A 為一 Algebra 若：

(i) $1\in A$, (1 表取值恆為 1 的常函數)

(ii) $f\in A\Rightarrow cf\in A\ \forall\ c\in\mathbb{R}$

(iii) $f,g,\in A\Rightarrow f+g, f\cdot g\in A$

例 **1.** $\mathbf{X}=[0,1]$
$A_1=$ 一切多項式，為 $C[0,1]$ 中的一個 Algebra.
$A_2=$ 一切偶次多項式，為 $C[0,1]$ 中的一個 Algebra.
$A_3=$ 一切奇次多項式，並不夠成為一個 Algebra.
$A_4=$ 一切常函數，為 $C[0,1]$ 中的一個 Algebra.
$A_5=\{f|\ \exists\ n$ 使$f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k e^{kx},\ 0\le x\le 1\}$ 為 $C[0,1]$ 中的一個 Algebra.

例 **2.** $\mathbf{X}=T$，單位圓周

$A=$ 一切定義於 T 上的三角多項式為一 Algebra.

定義 **13-3** $A \subset C(\mathbf{X})$ 為一 Algebra，我們稱 A 可以辨識相異點 (separate points) 若 $\forall\, x, y \in \mathbf{X},\ x \neq y,\ \exists\, f \in A$，使 $f(x) \neq f(y)$

打一個比方，A 如鷹眼，視力絕佳，不同事物它看得一清二楚。

一個 Algebra 無法辨識不同點，猶如一個人老花了，兩點看成一點。

以下就以鷹眼、老花來比喻它們。

例 **3.** 例 1. 中，A_1, A_2, A_5 為鷹眼集，A_4 為老花集。

例 **4.** $\mathbf{X} = [-1, 1]$

$A_2 =$ 一切偶次多項式，則 A_2 為老花集，因它看不出 $-x$ 與 x 的相異，
雖然 A_2 在 $[0, 1]$ 上為鷹眼，但在 $[-1, 1]$ 上則老花了。

例 **5.** T 表單位圓周，A 表一切定義於 T 上的三角函數，則 A 為鷹眼集。

例 **6.** 例 5. 中 T 改為 $[0, 2\pi]$，則 A 就老花了，因 $0 \neq 2\pi$，但 A 無法辨識它們。
(注意：在 T 中，$0, 2\pi$ 為同一點)

例 **7.** $\mathbf{X} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$

A 為一切定義於 $\mathbf{X}$ 上的多項式，則 A 為一 Algebra，且為鷹眼。

$A \subset C(\mathbf{X})$，A 為鷹眼，表示 A 中函數足夠多，有能力辨識相異點，老花表示函數不夠多，視網膜不佳，兩點看成一點，有待加強。

<u>Lemma 13-1</u> $A \subset C(\mathbf{X})$ 為一 Algebra，則 $\bar{A}$ 亦為一 Algebra。

說明：$f, g \in \bar{A} \Rightarrow\ \exists\, f_n, g_n \in A$ 使

$$f_n \to f,\ g_n \to g,\ \text{在} C(\mathbf{X}) \text{上}$$

$\Rightarrow cf_n \to cf,\ f_n + g_n \to f + g,\ f_n \cdot g_n \to f \cdot g.$

$f_n, g_n \in A,\ A$ 為一 Algebra，$cf_n, f_n + g_n, f_n \cdot g_n \in A$，$\therefore cf, f + g, f \cdot g \in \bar{A}.$

<u>Lemma 13-2</u> $\forall\ \epsilon > 0,\ \exists$ 多項函數 $P(x)$ 使

$$||x| - P(x)| < \epsilon,\ \forall\ x \in [-1, 1]$$

說明：這個 Lemma 等一下要用到，根據 Weierstrass 逼近定理，此乃 obvious。Stone 為了表示他論文的完整獨立性，另有証明，在此不提。

<u>定理 **13-9**</u> (Stone-Weierstrass 定理)

設 $\mathbf{X}$ 為一 compact metric space，$C(\mathbf{X})$ 表一切定義於 $\mathbf{X}$ 上的實連續函數 ($f \in C(\mathbf{X}),\ \|f\| = \max\limits_{x\in\mathbf{X}} |f(x)|$，為 $C(\mathbf{X})$ 上的 norm)

$A \subset C(\mathbf{X})$ 為一鷹眼 Algebra，則 A 在 $C(\mathbf{X})$ 中稠密，即：

$$\text{給定 } f \in C(\mathbf{X}), \forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ g \in A \text{ 使 } |f(x) - g(x)| < \epsilon,\ \forall\ x \in \mathbf{X}$$

証明：欲証 $\bar{A} = C(\mathbf{X})$，分幾個步驟如下

1. $f \in \bar{A} \Rightarrow |f| \in \bar{A}$

   理由：

   (i) 先設 $\|f\| = \max\limits_{x\in\mathbf{X}} |f(x)| \leq 1$

   由 Lemma 13-2, $\forall\ \epsilon > 0,\ \exists$ 多項式 P 使

   $$||t| - P(t)| < \epsilon$$

   $f \in \bar{A},\ \bar{A}$ 為一 Algebra$\Rightarrow P(f) \in \bar{A}$

   取 $t = f(x)$，有

   $$||f(x)| - P(f(x))| < \epsilon,\ \forall\ x \in \mathbf{X}$$

   $\Rightarrow |f| \in \bar{\bar{A}} = \bar{A}$

   (ii) 對一般的 $f, \exists\ c > 0$，使 $\|cf\| \leq 1$.

   根據 (i)，$c|f| \in \bar{A}$，$\bar{A}$ 為一 Algebra$\Rightarrow\ |f| = \dfrac{1}{c}(c|f|) \in \bar{A}$.

2. 定義

   $$(f \vee g)(x) = \max(f(x), g(x))$$
   $$(f \wedge g)(x) = \min(f(x), g(x))$$

   $f, g \in \bar{A}$，則 $f \vee g, f \wedge g \in \bar{A}$.

   理由：

$$f \vee g = \frac{1}{2}(|f+g| + |f-g|)$$
$$f \wedge g = \frac{1}{2}(|f+g| - |f-g|)$$

根據 1.，$f \vee g,\ f \wedge g \in A$

3. $f \in C(\mathbf{X}), \forall\ x, y \in \mathbf{X},\ \exists\ f_{x,y} \in \bar{A},$ 使 $f_{x,y} = f(x), f_{x,y} = f(y).$

理由：

x 給定，令 $g(z) = f(x),\ \forall\ z \in \mathbf{X},$ (g 為常函數)，則 $g \in \bar{A}.$

A 為鷹眼，$\therefore\ \exists\ h \in A$ 使 $h(x) \neq h(y)$

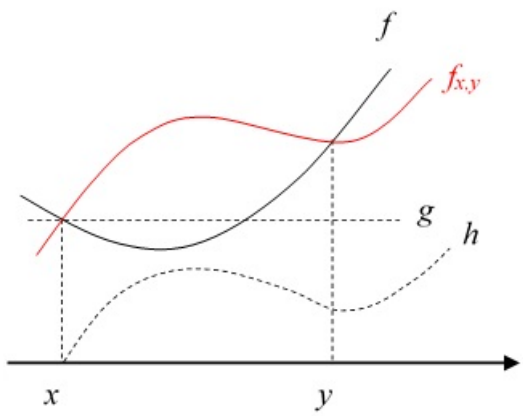
不妨設 $h(x) = 0$，否則考慮 $\tilde{h} = h - h(x)$

令 $f_{x,y} = g + \alpha h \in \bar{A}, \alpha$ 待取，且看：

$$f_{x,y}(x) = g(x) = f(x)$$
$$f_{x,y}(y) = g(y) + \alpha h(y) = f(x) + \alpha h(y)$$

欲使 $f_{x,y}(y) = f(y),$ 只要取 $\alpha = \dfrac{f(y) - f(x)}{h(y)}$ 。

$f_{x,y}$ 的尋覓，圖示如下：



4. 給定 $f \in C(\mathbf{X})$，欲尋覓 $g \in \bar{A}$ 使

$$f(z) - \epsilon < g(z) < f(z) + \epsilon,\ \forall\ z \in \mathbf{X}$$

(i) 先觀察右邊不等式

固定 x，對任意 $y \in \mathbf{X}$，$\exists\ f_{x,y} \in \bar{A}$ 使

$$f_{x,y}(x) = f(x), f_{x,y}(y) = f(y)$$

$f_{x,y}, f$ 在 y 點連續 $\Rightarrow\ \exists\ B_{\delta_y}(y)$ 使

$$f_{x,y}(z) < f(z) + \epsilon,\ \forall\ z \in B_{\delta_y}(y)$$

考慮 $\mathfrak{F}_1 = \{B_{\delta_y}(y) | y \in \mathbf{X}\}$，則 $\mathfrak{F}_1$ 為 $\mathbf{X}$ 上的一族 open covering，$\mathbf{X}$ 為 compact

$\Rightarrow\ \exists\ B_{\delta_1}(y_1) \cup B_{\delta_2}(y_2) \cup \cdots \cup B_{\delta_n}(y_n) \supset \mathbf{X},\ \delta_j = \delta_{y_j}$

每一 y_i 相應一函數 $f_{x,y_j} \in \bar{A}$，滿足

$$f_{x,y_j}(z) < f(z) + \epsilon,\ \forall\ z \in B_{\delta_j}(y_j)$$

令 $f_x(z) = \min\{f_{x,y_1}(z), f_{x,y_2}(z), \cdots, f_{x,y_n}(z)\}$

據 2.，$f_x \in \bar{A}$.

整理之：$f_x \in \bar{A},\ f_x(x) = f(x),\ f_x(z) < f(z) + \epsilon,\ \forall\ z \in \mathbf{X}$.

(ii) 現在讓 x 自由，希望建構左邊不等式。根據

$$f_x(x) = f(x) > f(x) - \epsilon$$

f, f_x 在 x 點連續 $\Rightarrow\ \exists\ B_{\delta_x}(x)$ 使

$$f(z) - \epsilon < f_x(z),\ \forall\ B_{\delta_x}(x)$$

考慮 $\mathfrak{F}_2 = \{B_{\delta_x}(x) | x \in \mathbf{X}\}$，則 $\mathfrak{F}_2$ 為 $\mathbf{X}$ 上的一族 open covering，$\mathbf{X}$ 為 compact

$\Rightarrow\ \exists\ B_{\delta_1}(x_1) \cup B_{\delta_2}(x_2) \cup \cdots \cup B_{\delta_m}(x_m) \supset \mathbf{X},\ \delta_j = \delta_{x_j}$

每一個 x_j，相應一函數 $f_{x_j} \in \bar{A}$，滿足

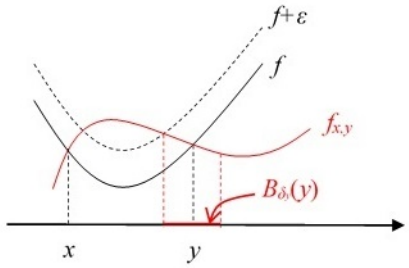
$$f(z) - \epsilon < f_{x_j},\ \forall\ z \in B_{\delta_j}(x_j)$$

令 $g(z) = \max\{f_{x_1}(z), f_{x_2}(z), \cdots, f_{x_m}(z)\},\ z \in \mathbf{X}$

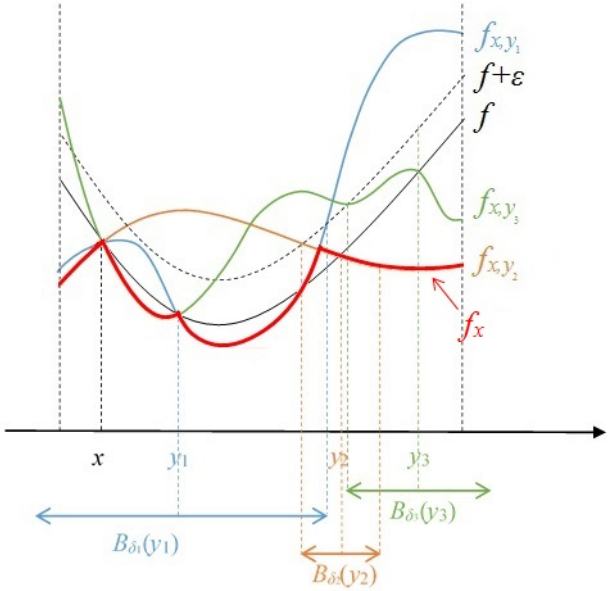
則 $g \in \bar{A}$，且滿足

$$f(z) - \epsilon < g(z) < f(z) + \epsilon,\ \forall\ z \in \mathbf{X}.$$

上面有關 f_x 的建構，圖示如下：



(a)



(b) 以 n=3 為例

短評：

從具象的多項式、三角多項式，抽離出他們的特性，提出 Algebra 的概念，把 Weierstrass 逼近定理推廣到一般 compact metric space 上的實連續函數空間上。

金剛經裡佛與須菩提有如下對話：

須菩提，於意云何，如來有肉眼不？
如是，世尊，如來有肉眼。

須菩提，於意云何，如來有天眼不？
如是，世尊，如來有天眼。

須菩提，於意云何，如來有慧眼不？
如是，世尊，如來有慧眼。

須菩提，於意云何，如來有法眼不？
如是，世尊，如來有法眼。

須菩提，於意云何，如來有佛眼不？
如是，世尊，如來有佛眼。

佛眼是什麼？我不敢妄言，不過 Stone 這個推廣，說他法眼獨具，並不為過。他能看出背後那個法，推陳出新，論述佳妙，值得品味學習。

有人常會問：讀數學有什麼用？
我要問：什麼叫做” 用”？

它能開你的腦竅，啟你的慧眼，導你的法眼，難道還不夠你” 用” 嗎？

有人說：什麼竅，什麼眼，都沒用，錢最有用！

據我的觀察，這樣的人通常是渾渾噩噩過此一生，飢渴難耐，可是又找不到水喝。少數祖上積德，擁有錢財，也不知道該怎麼” 用”，欠缺智慧和人生價值去管理那財富，災難就在得意處滋生，逐慾害身，禍延子孫者比比皆是，還有什麼富貴可言？

就在不久前，有人將大把的百元美鈔往馬桶裡丟，沖！沖！沖 !!! 糟糕，馬桶宣洩不了，堵住了！到庭院去！金紙桶、打火機，來，點火，快！大把大把的美鈔當金紙燒，那百元美鈔並非一般的紙張，燃燒起來味道特別辛辣，煙霧黑濃，嗆得呼吸困難，淚水直流，薰得滿頭灰黑，一身是汗。還這麼多，要燒到何時？有了，蓮花池，挖！挖！挖！快 !!!
這也是一種人生，後悔莫及的人生。
子曰：富與貴，是我所欲也，不以其道得之，不處也。
這樣的人，俯仰無愧於天地，能長能久。

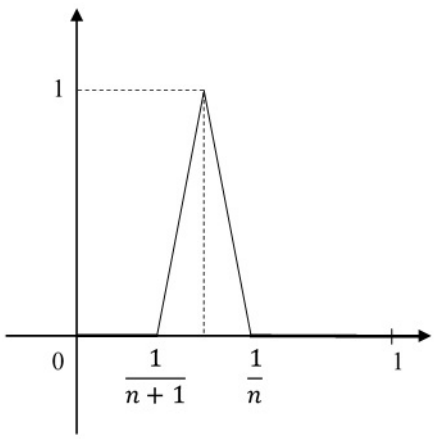
13.7 Arzela-Ascoli 定理

在 $\mathbb{R}^n$ 中，我們有 B-W 定理：

$$\{\mathbf{x}_k\} \subset \mathbb{R}^n,\ |\mathbf{x}_k| < M,\ \forall\ k \Rightarrow \{\mathbf{x}_k\} \text{ 有收斂子序列。}$$

這件事在無窮維空間中並不成立，例如在 l^2 中，$\mathbf{x}_k = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$，1 出現在第 k 坐標，$\|\mathbf{x}_k\| \leq 1,\ \forall\ k$，但 $\{\mathbf{x}_k\}$ 並無收斂子序列。

在 $C[0,1]$ 中，令 f_n 如下圖所示：



則 $\|f_n\| \leq 1,\ \forall\ n$，但 $\|f_m - f_n\| = 1,\ \forall\ m, n$

$\therefore \{f_n\}$ 在 $C[0,1]$ 中無收斂子序列。

所謂 Arzela-Ascoli 定理就是對 $C[a,b]$ 上的函數列，給出適當條件，以確保它有均勻收斂 ($C[a,b]$ 上的收斂) 子序列。

G.Ascoli(1843∼1896) 和 C.Arzela(1847∼1912) 是兩位義大利數學家，他們獨立地分別思考此問題，並各自有不同的貢獻，於 1880 年代提出一致連續 (equi-continuity) 的概念。我們今天把它們二位的結果綜合整理成一定理，數學上稱之為 Arzela-Ascola 定理。

定義 **13-4** 一致連續 (equi-continuity)

$\mathfrak{F} \subset C[a,b]$，稱 $\mathfrak{F}$ 在 $[a,b]$ 上一致連續若對任意 $\epsilon > 0,\ \exists\ \delta$，只與 ϵ 有關，使

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon,\ \forall\ x, y \in [a,b],\ \forall\ f \in \mathfrak{F}$$

Remark: $f \in \mathfrak{F} \subset C[a,b]$，則 f 在 $[a,b]$ 上均勻連續。

給定 $\epsilon > 0,\ \exists\ \delta$, 使

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon,\ \forall\ x \in [a,b] \cdots (*)$$

不同的 f，有不同的 δ，如果能夠找到一個 δ，使 $(*)$ 式對所有 $f \in \mathfrak{F}$ 成立，即 $\mathfrak{F}$ 中函數的連續行為一致，我們稱 $\mathfrak{F}$ 為一致連續。

例 **1.** $\mathfrak{F} = \{f \| f'(x)| \leq M,\ \forall\ x \in [a,b]\}$

則

$$|f(x) - f(y)| = |f'(z)||x-y| < M|x-y|$$

因此，給定 $\epsilon > 0$, 取 $\delta = \dfrac{\epsilon}{M}$，則

$$|f(x) - f(y)| < M \cdot \frac{\epsilon}{M} = \epsilon,\ 當 |x-y| < \delta$$

故 $\mathfrak{F}$ 為一致連續。

例 **2.** $\mathfrak{F} = \{f | \int_a^b f'^2(x)dx \leq M,\ f' \text{ conti. on } [a,b]\}$

根據微積分基本定理，

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \int_y^x f'(t)dt \right| \\ &\leq \left(\int_y^x f'^2(t)dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_y^x 1^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq M^{\frac{1}{2}} \cdot |x-y|^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

給定 $\epsilon > 0$, 取 $\delta = \dfrac{\epsilon^2}{M}$，則有：

$$"|f(x) - f(y)| < \epsilon,\ 當 |x-y| < \epsilon",\ \forall\ f \in \mathfrak{F}$$

故 $\mathfrak{F}$ 在 $[a,b]$ 上一致連續。

由上兩例，我們似乎可以感覺到一致連續和導數有點關係，我們再給一個例子：

稱 f 在 $[a,b]$ 上為 Hölder continuous of order α, $0 < \alpha \leq 1$

若，$\exists\ M > 0$ 使

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|^{\alpha},\ \forall\ x, y \in [a,b]$$

$\alpha = 1$，稱 f 為 Lipchitz continuous.

這個 M，稱為 f 在 $[a,b]$ 上的一個 Hölder bound.

一組函數若有共同的 Hölder bound，則它們為一致連續。明確陳述如下：

例 **3.** $\mathfrak{F} = \{f | \sup_{x,y\in[a,b]} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq M\}$

則 $\mathfrak{F}$ 在 $[a,b]$ 上一致連續。

就讓同學自己比劃比劃吧。

<u>定理 **13-10**</u> (Arzela-Ascoli 定理)

$\{f_n\} \subset C[a,b]$，滿足

(i) $\{f_n\}$ is uniformly bounded on $[a,b]$
($\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致有界)
即：$\exists\ M$ 使 $|f_n(x)| < M\ \forall\ x \in [a,b],\ \forall\ n = 1,2,3.$

(ii) $\{f_n\}$ is equi-continuous on $[a,b]$ (一致連續)

則 $\{f_n\}$ 有子序列在 $[a,b]$ 上均勻收斂。

Remark: 通常 uniformly 是指" 一族" 函數，對空間各點具有某相同性質，中文翻作均勻，翻得很好。嚴格講，條件 (i) 應該稱作"equi-bounded"，中文稱它為一致有界，比較恰當。

非洲的牛羚要渡河，奮力一跳，奔像前方的草原，行動一致。
深秋楓紅，寒氣逼人，群雁南飛，千里雁行，行動一致。

f_n 在 $[a,b]$ 上連續。

1. 因此，對每一個固定的 n，f_n 在 $[a,b]$ 有界，若存在 M，使 $|f_n(x)| \leq M\ \forall\ x \in [a,b],\ \forall\ n$，我們稱 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致有界。

   這是把每一個 f_n 看作一隻牛羚，或一隻雁子，他們行為一致。

2. 固定 $x \in [a,b]$，觀察集合 $\{|f_n(x)| : n = 1,2,3,\cdots\}$，若存在 M_x，使 $|f_n(x)| \leq M_x\ \forall\ n = 1,2,3,\cdots$，我們稱 $\{f_n\}$ 在 x 點有界。

這是把函數族套到 x 點上，得一集合，此集合有界，然後讓 x 在 $[a,b]$ 上跑，若對空間上的每一點，都可找到一個共同的上界，我們 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上均勻有界。

1, 2 是等價的，就看你從函數本身（每一隻牛羚或雁子）去看空間的每一點或從空間的每一點去看函數族。

我覺得牛羚度河、群雁南飛比叫生動活潑。

不過語言是約定成俗，一開始這樣稱呼它，沿襲下來，就成傳統，心裡明白就好。

Arzela-Ascoli 定理在現代分析學上是個非常重要的定理，尤其在處理常微分方程式、偏微分方程式，解的存在問題上，是個常用的工具。因其重要，我在這裡介紹兩個証明方法，觀點不同，各有千秋。希望同學們能從中學習到一點東西。

証一 (羅漢降龍)

1. $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致有界：$-M \leq f_n(x) \leq M,\ \forall\ x \in [a,b]$

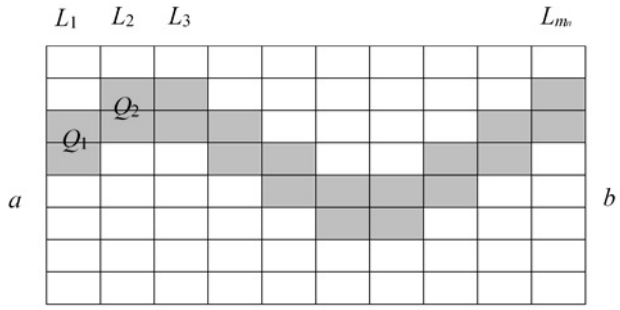
   把 $[-M,M]$ 2^{n+1} 等分，令 $\epsilon = \dfrac{M}{2^n}$

2. $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致連續，對此 ϵ, $\exists\ \delta$ 使

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon,\ \text{當}|x-y| < \delta,\ \forall\ n = 1,2,3,\cdots$$

3. 把 $[a,b]$ m_n 等分使每一等分 $< \delta$

$[-M, M]$ 的水平等分線和 $[a, b]$ 的鉛直等分線把 $[a, b] \times [-M, M]$ 分割成許多小方塊，如圖所示：



4. 設 $L_1, L_2, \cdots, L_{m_n}$ 分別表此分割的第一、第二、$\cdots$、第 m_n 個鉛直長條。即：$L_i = [x_{i-1}, x_i] \times [-M, M]$, $[x_{i-1}, x_i]$ 表對 $[a, b]$ 作分割而成的第 i 個小區間。

   觀察：

   (i) $|f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon,\ \forall\ x, y \in [x_0, x_1]$
   $\therefore f_n$ 在 L_1 上頂多可以" 住兩層樓"(上下跨越兩格)
   而 L_1 中上下相鄰的兩層樓閣有窮，函數 $\{f_n\}$ 無窮，故存在上下相連的二層樓閣，住有無窮多個函數，令其為 Q_1，如圖所示。

   (ii) 這些 Q_1 中的函數由 L_1 進入 L_2，因

   $$|f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon,\ \forall\ x, y \in [x_1, x_2]$$

   所以它們頂多只能再上層樓或再下層樓，即它們在 L_2 中只能住進上下相連的四個格子內。

   因此，存在上下相連的兩格 Q_2，住著無窮多的這些函數族，如圖所示。

   (iii) 依此類推，直到 L_{m_n}，得斜線域

   $$A_n = Q_1 \cup Q_2 \cup \cdots \cup Q_{m_n}$$

   A_n 含 $\{f_n\}$ 中無窮多函數。

5. 重複上述論述於 A_n 中，得 $A_{n+1} \subset A_n$，

   依此類推得斜線域方格

   $$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$$

   A_{n+1} 含 A_n 中無窮多函數，於 A_1 中任取一函數 $g_1 = f_{n_1}$，於 A_2 中任取一函數 $g_2 = f_{n_2}, n_2 > n_1$，依此類推，以致無窮，得 $\{f_n\}$ 的子序列 $\{g_n\}$.

6. $\{g_n\}$ 即為所求，

$$|g_m(x) - g_n(x)| < 2 \cdot \frac{M}{2^N} = \frac{M}{2^{N-1}},\ \forall\ x \in [a,b],\ 當 m,n > N$$

給定 $\epsilon > 0$, 取 N 夠大，使 $\dfrac{M}{2^{N-1}} < \epsilon$，依 Cauchy's criterion,$\{g_n\}$ 在 $[a,b]$ 上均勻收斂。

証二 (天女散花)

1. $[a,b]$ 中有稠密點列 (天女所散的花)，例如有理點列，令其為 $\{r_1, r_2, \cdots\}$
2. $\{f_n(r_1)\}_{n=1,2,\cdots}$ 有界，因此有收斂子點列，令其為 $f_{1,1}(r_1), f_{1,2}(r_2), f_{1,3}(r_3), \cdots$
3. $\{f_{1,n}(r_2)\}_{n=1,2,\cdots}$ 有界，因此有收斂子點列，令其為 $f_{2,1}(r_2), f_{2,2}(r_2), f_{2,3}(r_3), \cdots$
4. $\{f_{2,n}(r_3)\}_{n=1,2,\cdots}$ 有界，因此有收斂子點列，令其為 $f_{3,1}(r_2), f_{3,2}(r_2), f_{3,3}(r_3), \cdots$
5. 依此類推以致無窮，得函數列 $\{f_{j,n}\}$，滿足

   (i) $\{f_{j+1,n}\} \subset \{f_{j,n}\}$

   (ii) $\{f_{j,n}(r_j)\}_{n=1,2,\cdots}$ 收斂。

   取對角線函數 $f_{n,n}$，令 $g_n = f_{n,n}$，則

$$\lim_{n\to\infty} g_n(r_j)\ 存在\ \forall\ j$$

6. 到目前為止，我們還沒有用到 $\{f_n\}$ 的一致連續性，

   這個條件將用來保証 $\{g_n\}$ 均勻收斂。

   理由如下：

   $\{g_n\}$ 為一致連續，給定 $\epsilon > 0$, $\exists\ \delta$ 使 $|g_n(x) - g_n(y)| < \dfrac{\epsilon}{3}$, 當 $|x-y| < \delta$, $\forall\ n$

   考慮 $\mathfrak{F} = \{(r_j - \delta, r_j + \delta) | j = 1, 2, 3, \cdots\}$

   則 $\mathfrak{F}$ 為 $[a,b]$ 上的一族開覆蓋，根據 Heine-Borel 定理，$\exists$ 有窮開覆蓋，設其為

$$(r_{j_1} - \delta, r_{j_1} + \delta), (r_{j_2} - \delta, r_{j_2} + \delta), \cdots, (r_{j_k} - \delta, r_{j_k} + \delta)$$

   $\{g(r_{j_i})\}$ 收斂，對此 $\epsilon > 0$, $\exists\ N_i$ 使

$$|g_n(r_{j_i}) - g_m(r_{j_i})| < \epsilon,\ 當 m,n > N_i$$

   取 $N = \max\{N_1, N_2, \cdots, N_k\}$，則

$$|g_n(r_{j_i}) - g_m(r_{j_i})| < \epsilon,\ \forall\ i = 1, 2, \cdots, k,\ 當 m,n > N$$

$x \in [a,b] \Rightarrow x \in (r_{j_i} - \delta, r_{j_i} + \delta)$, for some i

於是：

$$\begin{aligned} |g_n(x) - g_m(x)| &\le |g_n(x) - g_n(r_{j_i})| + |g_n(r_{j_i}) - g_m(r_{j_i})| + |g_m(r_{j_i}) - g_m(x)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon,\ \forall\, x \in [a,b],\ \text{當} m,n > N \end{aligned}$$

依 Cauchy's criterion, $\{g_n\}$ 在 $[a,b]$ 上均勻收斂。

Remark: 羅漢降龍從 $\mathbb{R}^2$ 上的特性下手，空間平直，可以畫格子降龍，這個方法可以推廣到 $\mathbb{R}^n$ 上。

天女散花從 $[a,b]$ 中有可數稠密點著手，稠密是 Topology 性質，與空間的平直性無關，這個方法可以推廣到一般的 metric space 上。

你喜歡哪一個？

把天女散花中的要素抽離出來，Arzela-Ascoli 定理可以推廣到下列的空間上：

定義 **13-5** 設 $(\mathbf{X}, d)$ 為一 metric space，稱 $\mathbf{X}$ 為 separable 若 $\mathbf{X}$ 有 countable dense subset.

稱 $\mathbf{X}$ 具有 Bolzano-Weierstrass 特性，若 $\mathbf{X}$ 中任意有界點列都有收斂子點列。

設 $f_n : \mathbf{X} \to \mathbf{Y},\ (\mathbf{X}, d)$ separable，$(\mathbf{Y}, \rho)$ 具有 B-W 特性，

稱 $\{f_n\}$ 為 equi-continuous，若 $\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta$ 使

$$\rho(f_n(x), f_n(y)) < \epsilon,\ \text{當} d(x,y) < \delta,\ x, y \in \mathbf{X},\ \forall\, n$$

據此，Arzela-Ascoli 定理可推廣成：

<u>定理 **13-11**</u>

設 $(\mathbf{X}, d)$ 為 separable metric space,
$(\mathbf{Y}, \rho)$ 具有 B-W 性質的 metric space，

$f_n : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ 為一致連續函數族，且在 $\mathbf{X}$ 上一致有界，則 $\{f_n\}$ 有收斂子序列，此子序列在 $\mathbf{X}$ 的任意 compact subset $K \subset \mathbf{X}$ 上均勻收斂。

關於定理 13-11 的論証，就留給同學當習題吧。

定理中的 $(\mathbf{Y}, \rho)$，常碰到的是 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{C}^n$，$\mathbb{C}$ 為複數系，很實際。

又任意 compact metric space 都可找到 countable dense subset(習題)，因此為 separable，定理 13-11 成立，因其常被引用，我把他陳述於下：

<u>系</u> 設 $(\mathbf{X}, d)$ 為 compact metric space, $(\mathbf{Y}, \rho)$ 為具有 B-W 性質的 metric space

$f_n : \mathbf{X} \to \mathbf{Y},\ n = 1, 2, 3, \cdots$ 為一致連續，且一致有界的連續函數列，

則 $\{f_n\}$ 有子序列在 $\mathbf{X}$ 上均勻收斂。

關於這個系的証明，我也把它留給同學當習題。

(第十三章全文完)

102學年度高等微積分(下) 習題十三

1. $f_n(x) = \sin nx$，$0 \le x \le \pi$，問
   f_n是否有逐點收斂子序列？

2. (a) f_n在$[a,b]$上連續，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$；若$x_n \to x$，問：$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$正確否？
   (b) 若$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$在$[a,b]$上爲均勻收斂，問(a)之結論成立否？

3. (a) $f_n(x) = \dfrac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2}$，試證：$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0\ \forall x \in [0,1]$。並問：此收斂均勻否？
   (b) 決定h使下列級數在$|x| \le h$上均勻收斂
   (i) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)$、(ii) $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{x^n}{n\log n}$、(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1+nx^2}\sqrt{n}$。

4. (a) 決定p之值使$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^p}$在$(-\infty,\infty)$上均勻收斂。
   (b) 令$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^p}$，決定$p$使$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\dfrac{\sin nx}{n^p})'$ 。

5. $f_n \in C[0,1]$，$f_n \to f$在$[0,1]$上均勻。問：

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$$

   正確否？

6. 我們已證：$f \in C[a,b]$，若$\int_a^b x^n f(x)dx = 0\ \forall n = 0,1,2,3\cdots$ 。則$f(x) = 0\ \forall x \in [a,b]$。
   今設f在$[a,b]$上Rimann可積，且$\int_a^b x^n f(x)dx = 0\ \forall n = 0,1,2,3\cdots$。試證：$\int_a^b |f(x)|dx = 0$。
   (提示：令$F(x) = \int_a^x f(t)dt$，則$F \in C[a,b]$，利用(a))

7. 令(x)表示x的小數部分，定義

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2},\ x \in \mathbb{R}$$

   找出f的不連續點，證明這些點在實數中可數稠密，但f仍在任意閉區間上Riemann可積。

8. (*) Dirichlet test說：$a_n \downarrow 0$，$B_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$有界，則$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收斂，問：對於瑕積分，它還成立嗎？換言之，若$f(x) \downarrow 0$在$[0,\infty)$上，$|\int_0^x g(t)dt| < M\ \forall x > 0$，問：$\int_0^{\infty} f(x)g(x)dx$是否必收斂？

9. 函數g、f_n，$n = 1,2,3\cdots$爲$(0,\infty)$上實函數，且在任意有界區間$[a,b] \subset (0,\infty)$上Riemann可積分 。若
   (i) $f_n \to f$ uniformly on $[a,b]\ \forall [a,b] \subset (0,\infty)$；
   (ii) $|f_n(x)| \le g(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$，且$\int_0^{\infty} g(x)dx < \infty$。
   試證：$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} f_n(x)dx = \int_0^{\infty} f(x)dx$。

10. f爲實連續函數，定義$f_n(t) = f(nt)$，$\forall n = 1, 2, 3 \cdots$。若$\{f_n\}$在$[0,1]$上爲一致連續，試以此推導$f$之性質。

11. f_n爲定義在compact集K上的一致連續函數列，且f_n在K上逐點收斂，試證：f_n在K上均勻收斂。

12. f_n爲定義於$[a,b]$上Riemann可積函數，$|f_n(x)| \leq M$，$\forall x \in [a,b]$、$n = 1, 2, 3 \cdots$。定義

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt,\ a \leq t \leq b$$

試證：F_n有均勻收斂子序列。

13. $f_n \in C^1[a,b]$，$\exists M$使$|f_n(a)| + \int_a^b f_n'^2(x)dx < M\ \forall n$。試證：$\{f_n\}$有均勻收斂子序列。

14. (a) K爲compact metric space，試證：K有countable dense subset。
(b) $C(K) = \{f | f$爲K上的實連續函數$\}$，$\{f_n\} \subset C(K)$爲K上均勻有界、一致連續函數列。試證：$\{f_n\}$有均勻收斂子序列。

15. (a) f在$[0,1]$上連續，試證：f可以用偶次式多項式(even polynomial)逼近。
(b) f在$[0,1]$上連續且$f(0) = 0$，試證：f可以用奇次式多項式(odd polynomial)逼近。

16. $f_n \in BV[a,b]$，若$f_n \to f$在$[a,b]$上均勻，問
(a) $f \in BV[a,b]$且$\lim_{n\to\infty} V_a^b(f_n) = V_a^b(f)$，正確否？
(b) 上述結論如不正確，請給適當條件以確保其成立。

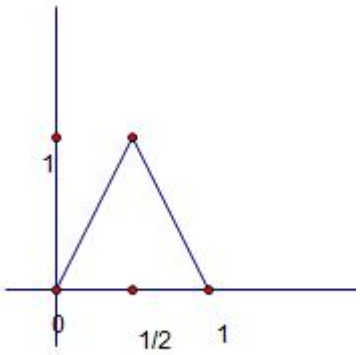
17. $\alpha \in BV[a,b]$，f在$[a,b]$上對α Rimann-Stieljes可積。
試證：$\exists$多項式P_n使$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f - P_n|^2 d\alpha = 0$。

18. 給定自然數k，令A爲由$\{1, x^k\}$所衍生的Algebra，試就$[a,b]$的座落，討論A是否在$C[a,b]$上稠密。

19. (a) 試證：$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \dfrac{1}{1+nx^{10}} dx = 0$ (Courant and John Vol I, p.322 #2)。
(b) $|\alpha| \neq |\beta|$，試證：$\lim_{T\to\infty} \dfrac{1}{T} \int_0^T \sin\alpha x \cdot \sin\beta x dx = 0$ (Courant and John Vol I, p.322 #7)。
(c) 試證：$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \dfrac{1}{1 + x\sin nx + nx^2} dx = 0$。

20. $f_n, f \in L^2(0,1)$，我們說$f_n \to f$ strongly in $L^2(0,1)$若$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0$；稱$f_n \to f$ weakly in $L^2(0,1)$若$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)g(x)dx = \int_0^1 f(x)g(x)dx\ \forall g \in L^2(0,1)$。
(a) 試證：$f_n \to f$ strongly in $L^2(0,1) \Rightarrow f_n \to f$ weakly in $L^2(0,1)$。
(b) $f_n(x) = \sin n\pi x$，試證：$f_n \to f$ weakly但非strongly in $L^2(0,1)$。

21. $\varphi(x)$是周期1的連續函數，其在$[0,1]$上的行爲如圖所示：$(\varphi(x) = 1 - |1 - 2x|)$



令$f_n(x)=\varphi(nx)$，$n=1,2,3\cdots$。問：
(a) f_n是否converges weakly in $L^2(0,1)$？若是，收斂到何函數？
(b) f_n是否converges strongly in $L^2[0,1]$？
(c) f_n在$[0,1]$上是否逐點收斂？
(d) f_n在$[0,1]$上是否有均勻收斂子序列？
(e) f_n在$[0,1]$上是否有逐點收斂的子序列？

22. (a) $f\in C(T)$，T表單位圓周，若$\int_T f(\theta)\cos k\theta d\theta=\int_T f(\theta)\sin k\theta d\theta=0\ \forall k=0,1,2,3,\cdots$。
試證：$f(\theta)=0$，$\forall\theta\in T$。
(b) f在$[0,2\pi]$上Riemann可積，若$\int_0^{2\pi} f(x)\cos kxdx=\int_0^{2\pi} f(x)\sin kxdx=0\ \forall k=0,1,2,3,\cdots$。
試證：$\int_0^{2\pi}|f(x)|dx=0$ ($f=0$ a.e. on $[0,2\pi]$) (參考第六題)。

23. 數列$\{x_1,x_2,x_3,\cdots\}$在$[0,1]$上均勻分佈$\Leftrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos 2\pi kx_1+\cos 2\pi kx_2+\cdots+\cos 2\pi kx_n}{n}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin 2\pi kx_1+\sin 2\pi kx_2+\cdots\sin 2\pi kx_n}{n}=0.$$

(Polya and Szegö - Problems and Theorems in Analysis I, p.88 #165)

24. $0<\alpha<1$，α爲無理數，試證：$x_n=n\alpha-[n\alpha]$，$n=1,2,3,\cdots$在[0,1]上均勻分佈。
(以上23,24有關均勻分佈的定義，請參考習題十一第24題)
(Polya and Szegö - Problems and Theorems in Analysis I, p.88 #166)

25. (*) 試造一函數$f\in C[0,1]$，但$f\notin BV[a,b]\ \forall 0<a<b<1$。

26. (*) 試造一函數$f\in L^1(0,1)$，但$\int_a^b|f(x)|^p dx=\infty$當$p>1$、$\forall 0<a<b<1$。
提示：$\exists g\in L^1(0,1)$、$g\notin L^p(0,1)\ \forall p>1$，據此造$f$。
已知$L^1(0,1)$爲complete metric space。

27. (*) 試造一例：f在$[0,\infty)$上連續，$\int_0^\infty x^n f(x)dx=0\ \forall n=0,1,2,\cdots$，但$f$並非0函數。
Remark：$[a,b]$爲compact，$\int_a^b x^n f(x)dx=0\ \forall n=0,1,2,\cdots$，迫使$f\equiv 0$。$[0,\infty)$非compact，$\int_0^\infty x^t f(x)dx=0\ \forall t\geq 0$才足以迫使$f\equiv 0$ (參考Laplace transform唯一定理)。Fourier series和Fourier tranform之間也有類似的關係。Compact與非compact有如此巨大的差異！

102 學年度台灣大學數學系高等微積分下
由陳金次教授製作，以創用 CC 姓名標示-非商業性-禁止改作 3.0 台灣 授權條款釋出

Chapter 14

微分與積分的交換

14.1 Riemann 積分

設 f 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上連續，問

$$\frac{d}{dx}\int_c^d f(x,y) \overset{?}{=} \int_c^d \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)dy \tag{1}$$

首先 (1) 式兩邊必須有意義

$$\int_c^d f(x,y)dy \quad \text{必須對}x\text{可導} \tag{2}$$

$$\int_c^d \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)dy \quad \text{積分必須存在} \tag{3}$$

若 f 及 $\dfrac{\partial}{\partial x}f$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上連續，則 (2) 及 (3) 式成立，

下面的定理告訴我們，這兩個條件足以確保 (1) 式成立。

<u>定理 **14-1**</u>

設 f 及 f_x 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上連續，則

$$\frac{d}{dx}\int_c^d f(x,y) = \int_c^d \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)dy$$

Remark: f 的連續性不可廢。
f_x 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上連續 $\not\Rightarrow$ f 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上連續。

例如：$\varphi(y) = \begin{cases} 1 & y\text{是有理數} \\ 0 & y\text{是無理數} \end{cases}$，$0 \le y \le 1$

令 $f(x,y)=\varphi(y), 0\le x\le 1, 0\le y\le 1$，則 $f_x(x,y)=0\ \forall\ (x,y)$，但 f 並不連續，不但如此，它甚至不能 Riemann 積分。

證明：

1. 令 $\varphi(x)=\int_c^d f(x,y)dy$，則

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}-\int_c^d f_x(x,y)dy\right|=\left|\int_c^d\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}dy-\int_c^d f_x(x,y)dy\right|\\&=\left|\int_c^d f_x(\xi,y)dy-\int_c^d f_x(x,y)dy\right|,\ \xi=\xi(y)\text{介於}x,\Delta x\text{之間，不同}y\text{，相應不同}\xi \qquad (4)\\&\le\int_c^d|f_x(\xi,y)-f_x(x,y)|dy\end{aligned}$$

2. f_x 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上連續，$[a,b]\times[c,d]$ 為 compact，$\therefore f_x$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上均勻連續。給定 $\epsilon>0,\ \exists\,\delta$，使

$$|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)|<\delta\Rightarrow|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\frac{\epsilon}{d-c}$$

代入 (4) 式，我們有

$$\left|\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}-\int_c^d f_x(x,y)dy\right|<\frac{\epsilon}{d-c}\cdot(d-c)=\epsilon,\ \text{當}|\Delta x|<\delta$$

即：$\varphi'(x)=\int_c^d f_x(x,y)dy$，得証。

例 **1.** $f(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\sin xt}{t} & t\neq 0\\ x & t=0\end{cases}$，令 $\varphi(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x,t)dt$，求 $\varphi'(x)$。

分析：f 在 $(-\infty,\infty)\times\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上連續，又 $f_x(x,t)=\begin{cases}\cos xt & t\neq 0\\ 1 & t=0\end{cases}$

$\therefore f_x$ 在 $(-\infty,\infty)\times\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上連續。

依定理 14-1，

$$\begin{aligned}\varphi'(x)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f_x(x,t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xt\ dt=\frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{x},\ x\neq 0\\ \varphi'(0)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f_x(0,t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dt=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

注意：$\lim\limits_{x\to 0}\phi'(x)=\phi(0)$，故 ϕ' 在 0 點連續。

例 **2.** (Liebniz Rule)

設 f 及 f_x 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上連續，$a(x),b(x)\in C^1[a,b]$，

令 $\varphi(x)=\int_{a(x)}^{b(x)}f(x,t)dt$，

則 $\varphi'(x)=f(x,b(x))\cdot b'(x)-f(x,a(x))\cdot a'(x)+\int_{a(x)}^{b(x)}f_x(x,t)dt$

分析：

1. 令 $g(x,y,z)=\int_y^z f(x,t)dt$，
   則 $g_x=\int_y^z f_x(x,t)dt$ (定理 14-1)，且 $g_y=-f(x,y), g_z=f(x,z)$ (微積分基本定理)
2. $\varphi(x)=g(x,a(x),b(x))$，依 Chain Rule,
   $\varphi'(x)=g_x+g_y\cdot a'(x)+g_z\cdot b'(x)$
   $=\int_a^b f_x(x,t)dt-f(x,a(x))\cdot a'(x)+f(x,b(x))\cdot b'(x).$

例 **3.** $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y}} & y>0\\ 0 & y=0\end{cases}$, $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$

觀察：

1. $\varphi(x)=\int_0^1 f(x,y)dy=-\int_0^1 x\cdot e^{-\frac{x^2}{y}}d\left(\dfrac{x^2}{y}\right)=x\cdot e^{-\frac{x^2}{y}}\Big|_{y=0}^{1}=xe^{-x^2}$

   $\therefore$

$$\varphi'(x)=e^{-x^2}(1-2x^2)\ \forall\ x \tag{5}$$

2.

$$f_x(x,y)=\begin{cases}e^{-\frac{x^2}{y}}\left(\dfrac{3x^2}{y^2}-\dfrac{2x^4}{y^3}\right) & y>0\\ 0 & y=0\end{cases} \tag{6}$$

   $\therefore f_x(0,y)=0$ 當 $y>0$

   $\int_0^1 f_x(0,y)dy=0\neq\varphi'(0)=1$

3. 定理 14-1 在 $x=0$ 點不成立！

   問題出在哪裡？且看 f 在 $(0,0)$ 點的行為。

   沿拋物線 $y=x^2$，觀察 f 及 f_x

$$\lim_{x\to 0}f(x,x^2)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}e^{-1}=\infty$$

   f 在 $(0,0)$ 點並不連續，

$$\lim_{x\to 0}f_x(x,x^2)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$$

   f_x 在 $(0,0)$ 點也不連續！

   雖然，f 及 f_x 在 $[0,1]\times[0,1]-\{(0,0)\}$ 上連續 (請同學檢驗之)，也無濟於事，功虧一簣，而那一簣對 $\varphi'(0)$ 及 $\int_0^1 f_x(0,y)dy$ 的影響，起了決定性的作用。

4. 當 $x \neq 0$，定理 14-1 成立，因 f 及 f_x 在 $[\delta, 1] \times [0, 1]$ 上連續。

事實上，

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_x(x,y)dy &= \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{y}}\left(\frac{3x^2}{y^2} - \frac{2x^4}{y^3}\right)dy \\ &= \cdots \text{ (經過少許計算)} \\ &= e^{-x^2}(1-2x^2) \\ &= \varphi'(x)\ \forall\ x \neq 0\end{aligned}$$

14.2 瑕積分－可控型

設 f_x 在 $[a, b] \times [0, \infty)$ 上連續，問：

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty f(x,y)dy = \int_0^\infty f_x(x,y)dy \tag{7}$$

成立否。

首先，f_x 在 $[a, b] \times [0, \infty)$ 上連續已不足以確保 (7) 式右邊積分的存在，故

$$\int_0^\infty f_x(x,y)dy \text{ 存在 } \forall\ x \in [a, b] \tag{8}$$

乃必加的條件。

光這樣夠嗎？我們不妨從定義出發，回顧 (7) 式，

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty f(x,y)dy = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\int_0^\infty f(x+\Delta x, y)dy - \int_0^\infty f(x,y)dy\right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\int_0^\infty \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}dy \tag{9}$$

$$\stackrel{?}{=} \int_0^\infty \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}dy \tag{10}$$

$$= \int_0^\infty f_x(x,y)$$

從 (9) 到 (10)，是問題的關鍵，$\lim\limits_{\Delta x \to 0}$ 在什麼條件下可以 pass 進去？

實變函數中，有一個非常基本而重要的定理，叫 Lebesgue Dominate Convergence Theorem，陳述如下：

設 E 為 $\mathbb{R}^n$ 中 Lebesgue 可測集，f_n 為 E 上 Lebesgue 可積函數，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\mathbf{x})$ 存在 a.e. on E，若存在 g，使 $|f_n(\mathbf{x})| \leq g(\mathbf{x})$，且 $\int_E g(\mathbf{x})d\mathbf{x} < \infty$，則

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

換言之，$|f_n|$ 被一 Lebesgue 可積函數 g 所控，則 limit 可以 pass.

回頭看 (9) 式，Δx 可以是任意 $\Delta x_n, \Delta x_n \to 0$
因此，若存在 $g, \displaystyle\int_0^\infty g(y)dy < \infty$，使

$$\left|\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}\right| \le g(y) \text{ 當}\Delta x\text{夠小} \tag{11}$$

則 limit 可以 pass.

據此，我們把 (11) 式稍作修改：

$$|f_x(x,y)| \le g(y) \ \forall \ (x,y) \in [a,b] \times [0,\infty) \tag{12}$$

下面定理告訴我們，(12) 足以保証 limit 可 pass.

<u>定理 **14-2**</u> 設 f 及 f_x 在 $[a,b] \times [0,\infty)$ 上連續，若存在 g，使

$$|f_x(x,y)| \le g(y) \ \forall \ (x,y) \in [a,b] \times [0,\infty)$$

且 $\displaystyle\int_0^\infty g(y)dy < \infty$，則

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty f(x,y)dy = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)dy$$

分析：

1. 令 $\varphi(x) = \int_0^\infty f(x,y)dy$，則

$$\begin{aligned}
& \left|\frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} - \int_0^\infty f_x(x,y)dy\right| \\
\le\ & \left|\int_0^N \left(\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} - f_x(x,y)dy\right)\right| \\
& + \left|\int_N^\infty \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} dy\right| + \left|\int_N^\infty f_x(x,y)dy\right|, \ N\text{待定} \\
\le\ & \int_0^N |f_x(\xi,y) - f_x(x,y)|dy + \int_N^\infty |f_x(\xi,y)|dy + \int_N^\infty |f_x(x,y)|dy \\
=\ & I_1 + I_2 + I_3, \ \xi = \xi(y), \ \text{介於}x\text{與}x+\Delta x\text{之間}
\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int_0^\infty g(y)dy < \infty$，給定 $\varepsilon > 0$, $\exists\ N$ 使 $\displaystyle\int_N^\infty g(y)dy < \frac{\varepsilon}{3}$
3. 依假設，$|f_x(x,y)| < g(y) \ \forall \ x, y$，故

$$I_2 < \int_N^\infty g(y)dy < \frac{\varepsilon}{3}, \quad I_3 \le \int_N^\infty g(y)dy < \frac{\varepsilon}{3}$$

4. f_x 在 $[a,b] \times [0,N]$ 上連續，
   $\therefore f_x$ 在 $[a,b] \times [0,N]$ 上均勻連續，

   對此 ε, $\exists\ \delta$，使

$$|f_x(x_1,y_1)-f_x(x_2,y_2)|<\frac{\varepsilon}{3N} \quad 當\ |(x_1,y_1)-(x_2,y_2)|<\delta$$
$$\forall\ (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in[a,b]\times[0,N]$$

依此，

$$I_1<\frac{\varepsilon}{3N}\cdot N=\frac{\varepsilon}{3},\ 當|\Delta x|<\delta$$

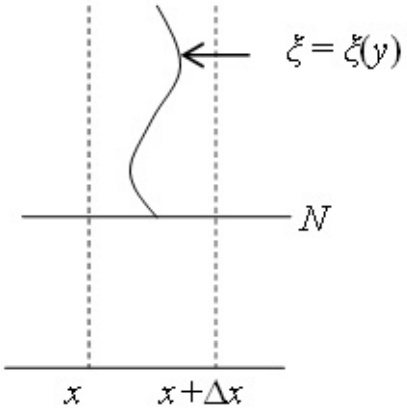
5. 結論：

$$\left|\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}-\int_0^\infty f_x(x,y)dy\right|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,\ 當|\Delta x|<\delta$$

即：$\varphi'(x)=\displaystyle\int_0^\infty f_x(x,y)dy.$

Remark:

1. g 稱為控制函數，$I_2=\displaystyle\int_N^\infty f_x(\xi,y)dy,\ \xi=\xi(y)$ 介於 x 和 $x+\Delta x$ 之間，如圖所示。



它無視於 $\xi=\xi(y)$，$|f_x(\xi,y)|\le g(y)$，恆被 g 所控，從而得到 $I_2<\dfrac{\varepsilon}{3}$，好厲害！

2. 定理 14-2 中的瑕積分未必一定要 $[0,\infty)$，可以是 $(-\infty,\infty),(-\infty,b],[a,b),(a,b]$ 等，只要存在控制函數 g，定理都成立。

例 **1.** $\phi(x) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\log t} dt,\ x \in [a, \infty),\ a > -1$，求 φ

分析：

1. $\lim_{t\to 1} \frac{t^x - 1}{\log t} = \lim_{t\to 1} \frac{xt^{x-1}}{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to 1} xt^x = x,\ t = 1$非奇點

   $$\lim_{t\to 0^+} \frac{t^x - 1}{\log t} = \lim_{t\to 0^+} xt^x \begin{cases} = -\infty & 當 x < 0 \\ = 0 & 當 x \geq 0 \end{cases}$$

   故 $\varphi(x)$ 為 Improper integral 當 $x < 0$，為 Riemann integral 當 $x \geq 0$.

2. 任取 $b > a$，令 $f(x,t) = \frac{t^x - 1}{\log t}$，則 $f_x(x,t) = t^x \ \ \forall\ (x,t) \in [a,b] \times (0,1)$，顯然 f 及 f_x 在 $[a,b] \times (0,1)$ 上連續。

3. $|f_x| \leq t^a\ \forall\ (x,t) \in [a,b] \times (0,1)$

   $$\int_0^1 t^a dt < \infty \ \because\ a > -1.$$

4. 依定理 14-2，$\varphi'(x) = \int_0^1 f_x(x,t)dt = \int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1}$

   $\therefore\ \varphi(x) = \log(x+1) + C,\ \varphi(0) = 0 \Rightarrow C = 0$

   b 任意，故 $\varphi(x) = \log(x+1),\ \forall\ x \in [a, \infty),\ a > -1.$

例 **2.** 求 $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\ dt$ 之值。

說明：這是數學上一個相當著名的瑕積分，其收斂我們已於之前討論過。收斂歸收斂，收斂到何值，則是一個具有深度的問題，有各種不同的方法可求其值。你們在大三時學複變函數，那時你們應該會看到利用複變的留數定理 (The Residue Theorem) 來求其值，那是一個很 powerful 的方法，許多困難的定積分或瑕積分都可透過它來求值。

下面我要介紹的是利用定理 14-2，把它化成常微分方程，求解。

分析：

1. 考慮函數 $\frac{\sin t}{t}$ 的 Laplace transform:

   $$\varphi(x) = \int_0^\infty e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt,\ x \geq 0 \tag{13}$$

   在此我們碰到第一個問題：(13) 式收斂嗎？

2. 設它收斂，令 $f(x,t)=\begin{cases} e^{-xt}\dfrac{\sin t}{t} & t>0 \\ 1 & t=0 \end{cases}$，則 $f_x(x,t)=\begin{cases} -e^{-xt}\sin t & t>0 \\ 0 & t=0 \end{cases}$

顯然 f 及 f_x 在 $[0,\infty)\times[0,\infty)$ 上連續，又 $|f_x(x,t)|\le e^{-xt}$，

$$\int_0^\infty e^{-xt}dt=-\frac{1}{x}e^{-xt}\Big|_0^\infty=\frac{1}{x}<\infty,\ 當x>0$$

依定理 10-2，我們有

$$\varphi'(x)=\int_0^\infty f_x(x,t)dt=-\int_0^\infty e^{-xt}\sin t\ dt,\ 當x>0 \tag{14}$$

3. 利用 Integration by parts, 我們有

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-xt}\sin t\ dt &= -\int_0^\infty e^{-xt}d\cos t \\
&= \ -e^{-xt}\cos t\Big|_0^\infty+\int_0^\infty \cos t\ de^{-xt} \\
&= 1-x\int_0^\infty e^{-xt}\cos t\ dt \\
&= 1-x\int_0^\infty e^{xt}d\sin t \\
&= 1-x\left[e^{-xt}\sin t\Big|_0^\infty-\int_0^\infty \sin t\ de^{-xt}\right] \\
&= 1-x^2\int_0^\infty e^{-xt}\sin t\ dt
\end{aligned}$$

$\therefore \displaystyle\int_0^\infty e^{-xt}\sin t\ dt=\frac{1}{1+x^2}$，代入 (14) 式得

4. $\varphi'=-\dfrac{1}{1+x^2}$ 當 $x>0$

$\therefore$

$$\varphi(x)=-\tan^{-1}x+C \quad 當x>0 \tag{15}$$

又 $|\varphi(x)|\le\displaystyle\int_0^\infty e^{-xt}dt=\frac{1}{x}$，當 $x>0$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=0$，於 (15) 式中，令 $x\to\infty$ 得 $C=\dfrac{\pi}{2}$，代入 (15) 式得

5.

$$\varphi(x)=-\tan^{-1}x+\frac{\pi}{2}\ 當x>0 \tag{16}$$

令 $x\to 0$，得

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt=\varphi(0)=\frac{\pi}{2}$$

在此，我們碰到第二個問題：

$$\lim_{x\to 0}\varphi(x)=\varphi(0)\text{，對嗎？}$$

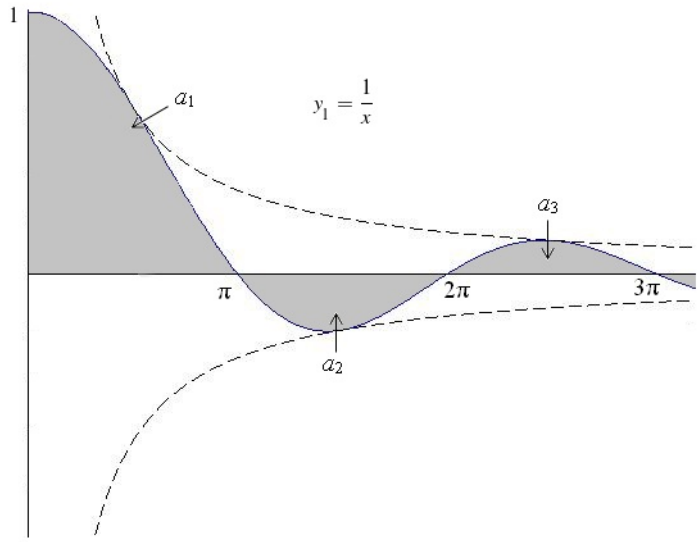
以下我們就來思考上面所提二問題。

第一問：$\displaystyle\int_0^\infty e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\,dt$ 的收斂問題。

分析：

1. 觀察 $\left|e^{-xt}\dfrac{\sin t}{t}\right|<\left|\dfrac{\sin t}{t}\right|\ \forall\ x,t>0$

2. $y=\dfrac{\sin t}{t}$ 的圖形如下：



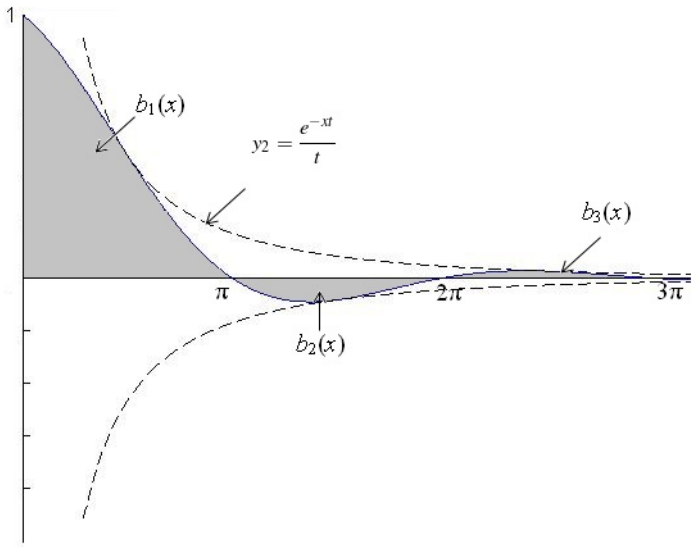
$$a_n=\left|\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{\sin t}{t}dt\right|=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\left|\frac{\sin t}{t}\right|dt$$

$$\frac{2}{n\pi}\le a_n\le\frac{2}{(n-1)\pi},\ a_n\downarrow 0\ \text{ 當 } n\to\infty$$

$\therefore$

$$\int_0^\infty\frac{\sin t}{t}dt=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots\text{收斂}\tag{17}$$

3. $y=e^{-xt}\dfrac{\sin t}{t}$ 的圖形如下：



$$\int_0^\infty e^{-xt}\frac{\sin t}{t}dt = b_1(x) - b_2(x) + b_3(x) - \cdots \tag{18}$$

由於 $0 < y_2 < y_1$, $\therefore\ 0 < b_n(x) < a_n \quad \forall n$,
$a_1 - a_2 + a_3 - \cdots$ 收斂

$\therefore b_1(x) - b_2(x) + b_3(x) - \cdots$ 均勻收斂，當 $x \geq 0$.

故第一問 pass 過關。

Remark: 第一問也可由：$\left|e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\right| < e^{-xt}, \int_0^\infty e^{-xt}dt = \frac{1}{x} < \infty$ 當 $x > 0$
$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-xt}\frac{\sin t}{dt}$ 收斂，當 $x > 0$，不過這樣的處理看不到 $\int_0^\infty e^{-xt}\frac{\sin t}{t}dt$ 在 $x \geq 0$ 上均勻收斂。

第二問：$\lim_{x\to 0^+}\varphi(x) = \varphi(0)$，對嗎？

分析：根據 (17) 和 (18) 式，

$$\varphi(0) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$
$$\varphi(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\frac{\sin t}{t}dt = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots$$
$$\left|\int_{N\pi}^\infty \frac{\sin t}{t}dt\right| = a_N - a_{N+1} + a_{N+2} - \cdots < a_N < \frac{1}{(N-1)\pi}$$
$$\left|\int_{N\pi}^\infty e^{-xt}\frac{\sin t}{t}dt\right| = b_N - b_{N+1} + b_{N+2} - \cdots < b_N < a_N < \frac{1}{(N-1)\pi}$$

給定 $\varepsilon > 0$, $\exists\, N$ 使 $\dfrac{1}{(N-1)\pi} < \dfrac{\varepsilon}{3}$，於是

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| \le \int_0^{N\pi} \left| e^{-xt}\frac{\sin t}{t} - \frac{\sin t}{t} \right| + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \tag{19}$$

$f(x,t) = \begin{cases} e^{-xt}\dfrac{\sin t}{t} & t \ne 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$ 在 $[0,1]\times[0,N\pi]$ 上連續，$\therefore$ 均勻連續。

對此 $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta$ 使

$$\left| e^{-xt}\frac{\sin t}{t} - \frac{\sin t}{t} \right| < \frac{\varepsilon}{3N\pi} \text{ 當} 0 < x < \delta$$

代入 (19)，我們有

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \text{ 當} 0 < x < \delta$$

故第二問也過關！

14.3 瑕積分－不可控型

定理 14-2 中，$|f_x(x,y)| \le g(y)$, $\displaystyle\int_0^\infty g(y)dy < \infty$，保証了定理的成立。當控制函數 g 找不到時，又如何確保定理成立？

例如：$f(x,t) = \dfrac{\cos xt}{t^2+1}$,
$f_x(x,t) = \dfrac{t\sin xt}{t^2+1} \Rightarrow |f_x(x,t)| \le \dfrac{t}{t^2+1}$，但 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{t}{t^2+1}dt = \infty$

定理 14-2 失敗了！

那麼：$\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^\infty f(x,t)dt = \int_0^\infty f_x(x,t)dt$ 還成立嗎？

以下我們引入均勻收斂的條件，以確保定理的成立。

f 在 $[a,b]\times[0,\infty)$ 上連續，設固定 $x \in [a,b]$，瑕積分 $\displaystyle\int_0^\infty f(x,y)dy$ 存在 $\forall\, x \in [a,b]$，因此

給定 $\varepsilon > 0$, $\exists\, N$ dependent on x，使 $\displaystyle\left|\int_N^\infty f(x,y)dy\right| < \varepsilon$

注意，不同 x，有不同的 N，能不能找到一個 N，與 x 無關，使

$$\left|\int_N^\infty f(x,y)dy\right| < \varepsilon \ \forall\, x \in [a,b]$$

如能辦到，我們稱 f 在 $[a,b]$ 上均勻收斂。

寫成定義如下：

定義 14-3：設 f 在 $I \times [0,\infty)$ 上連續，$I \subset \mathbb{R}$，$\int_0^\infty f(x,y)dy$ 存在 $\forall\ x \in I$，若對任意 $\varepsilon > 0$, $\exists\ N$ 使

$$\left|\int_N^\infty f(x,y)dy\right| < \varepsilon \quad \forall\ x \in I$$

我們稱 f 在 I 上的瑕積分均勻收斂。

Remark:

1. 當然，如果存在控制函數 g，使 $|f(x,y)| \le g(y)\ \forall\ (x,y) \in I \times [0,\infty)$，而 $\int_0^\infty g(y)dy < \infty$，則 f 在 I 上的瑕積分均勻收斂。
2. 上面的瑕積分未必一定要在 $[0,\infty)$ 上，它可以是 $[0,1), (0,1], (0,1), (-\infty,b], (-\infty,\infty), \cdots$。

<u>定理 **14-3**</u> 設 f 及 f_x 在 $[a,b] \times [0,\infty)$ 上連續，f_x 的瑕積分在 $[a,b]$ 上均勻收斂，則

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty f(x,y)dy = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)dy \quad \forall\ x \in [a,b]$$

Remark: 定理 14-2 顯然是定理 14-3 的特別情形。

分析：

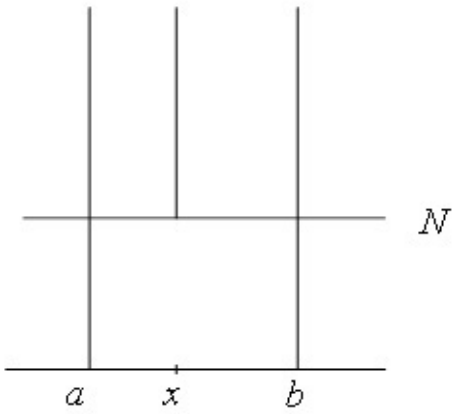
1. 定理 10-2 中，

$$I_2 = \left|\int_N^\infty f_x(\xi(y),y)dy\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

在此行不通了，因均勻收斂只保證

$$\int_N^\infty f_x(x,y)dy < \varepsilon$$

x 固定，不能隨 y 而變！(如圖所示)



怎麼辦？

2. 陸路走不通走水路，水路行不得還可坐飛機，且看：

令 $\varphi(x)=\int_0^\infty f(x,y)dy,\ \psi(x)=\int_0^\infty f_x(x,y)dy$，欲証：$\varphi'(x)=\psi(x)$。

依假設 $\int_0^\infty f_x(x,y)dy$ 在 $[a,b]$ 上均勻收斂，我們有

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^N f_x(x,y)dy \text{ 均勻收斂到 } \int_0^\infty f_x(x,y)dy=\psi(x) \text{ 在}[a,b]\text{上}$$

3. 任取 $x_0\in[a,b]$，固定之，$\forall\ x\in[a,b]$，我們有

$$\lim_{N\to\infty}\int_{x_0}^x\left(\int_0^N f_x(t,y)dy\right)dt \overset{(*)}{=} \int_{x_0}^x \lim_{N\to\infty}\left(\int_0^N f_x(t,y)dy\right)dt$$

$$=\int_{x_0}^x\left(\int_0^\infty f_x(t,y)dy\right)dt=\int_{x_0}^x\psi(t)dt \tag{20}$$

上面 $(*)$ 式成立，因 $[x_0,x]$ 為閉區間，其上均勻收斂函數列的積分，limit 可以 pass.

4. 定下眼睛看看 $(*)$ 式等號的左邊，$[x_0,x]\times[0,N]$ 為 compact，f 及 f_x 在 $[x_0,x]\times[0,N]$ 上連續，依定理 14-1，

$$\int_{x_0}^x\left(\int_0^N f_x(x,y)dy\right)dt=\int_{x_0}^x\frac{d}{dx}\left(\int_0^N f(x,y)dy\right)dt$$
$$=\int_0^N f(x,y)dy-\int_0^N f(x_0,y)dy \quad \text{(微積分基本定理)}$$

代入 (20) 式，有

$$\int_0^\infty f(x,y)dy-\int_0^\infty f(x_0,y)dy=\int_{x_0}^x\psi(t)dt \tag{21}$$

5. (21) 式兩邊對 x 求導，得

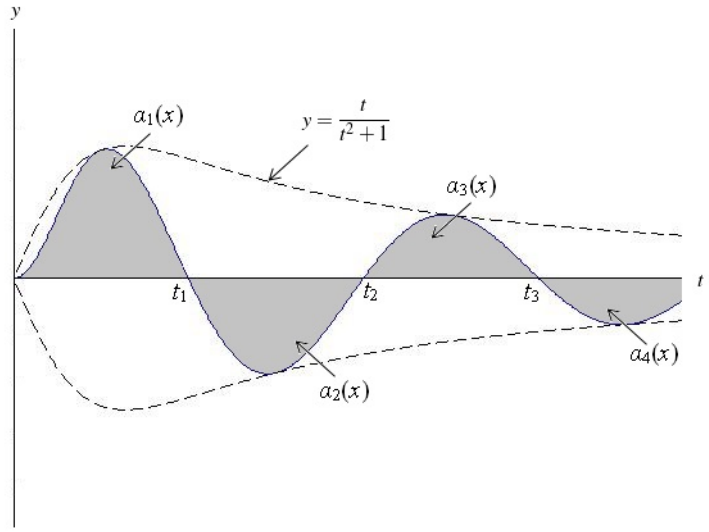
$$\varphi'(x)=\psi(x)$$

証畢。

例 **1.** $f(x,t)=\dfrac{\cos xt}{t^2+1}$，問：$\dfrac{d}{dx}\int_0^\infty f(x,t)dt=\int_0^\infty f_x(x,t)dt$ 成立否？

分析：

1. $f_x(x,t)=\dfrac{-t\sin xt}{t^2+1}$，作 $y=\dfrac{t\sin xt}{t^2+1}$ 的圖如下：



$\sin xt = 0 \Leftrightarrow xt = n\pi \Leftrightarrow t = t_n = \dfrac{n\pi}{x},\ n = 0, 1, 2, 3 \cdots,$

$$\alpha_n(x) = \left| \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{t}{t^2+1} \sin xt\ dt \right| = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{t}{t^2+1} |\sin xt| dt$$

$y = \dfrac{t}{t^2+1} \downarrow 0$ 當 $t > 1$, $\displaystyle\int_{t_{n-1}}^{t_n} |\sin xt| dt = \int_0^{\pi} \sin t\ dt = 2$

$$\therefore \frac{t_n}{t_n^2+1} \cdot 2 < \alpha_n(x) < \frac{t_{n-1}}{t_{n-1}^2+1} \cdot 2$$

$\Rightarrow \alpha_n(x) \downarrow 0$ 當 $n \to \infty\ \forall\ x > 0$ fixed.

2. 設 $x \in [a, \infty), a > 0$，

$$\alpha_{n+1}(x) < 2 \cdot \frac{t_n}{t_n^2+1} = \frac{2n\pi x}{(n\pi)^2 + x^2} < \frac{2n\pi a}{(n\pi)^2 + a^2} < \alpha_n(a),\ \alpha_n(a) \downarrow 0 \text{ 當} n \to \infty$$

給定 $\varepsilon > 0$, $\exists\ N$ 使 $\alpha_n(a) < \varepsilon$ 當$n > N$.

3. 故知 $\displaystyle\int_0^{\infty} f_x(x,t)dt$ 在 $[a, \infty)$ 上均勻收斂 $\forall\ a > 0$

$$\therefore \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} f(x,t)dt = \int_0^{\infty} f_x(x,t)dt, \quad \forall\ x > 0 \text{ 成立。}$$

4. $x = 0$ 點如何？下面的例子將回答這問題。

例 **2.** $\varphi(x)=\int_0^\infty \frac{\sin xt}{t(t^2+1)}dt,\ x\geq 0$，試証：$\varphi(x)=\frac{\pi}{2}(1-e^{-x}),\quad \forall\ x\geq 0.$

分析：

1. $f(x,t)=\frac{\sin xt}{t(t^2+1)}$，則
   $f_x(x,t)=\frac{\cos xt}{t^2+1}, f$ 及 f_x 在 $[0,\infty)\times[0,\infty)$ 上連續
   且 $|f_x(x,t)|\leq\frac{1}{t^2+1}, \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}dt<\infty$

   依定理 10-2，
$$\varphi'(x)=\int_0^\infty \frac{\cos xt}{t^2+1}dt\ \forall\ x\in[0,\infty)$$

2. 又根據例 1.，
$$\begin{aligned}\varphi''(x) &= -\int_0^\infty \frac{t\sin xt}{t^2+1}dt\ \text{當}x>0\\ &= \int_0^\infty \frac{1-(t^2+1)}{t(t^2+1)}\sin xt\ dt\\ &= \varphi(x)+\int_0^\infty \frac{\sin xt}{t}dt\\ &= \varphi(x)+\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

3. 解微分方程 $\varphi''-\varphi=\frac{\pi}{2}, x>0$，得
$$\varphi(x)=ae^x+be^{-x}+\frac{\pi}{2}, x>0 \tag{22}$$

   (i)
$$\begin{aligned}|\varphi(x)| &= \left|\int_0^\infty \frac{\sin xt}{t(t^2+1)}\right|\\ &= \left|x\int_0^\infty \frac{\sin xt}{xt}\frac{1}{t^2+1}dt\right|\\ &\leq |x|\cdot\int_0^\infty \frac{1}{t^2+1}dt\\ &= |x|\cdot\frac{\pi}{2}\\ &\to 0\ \text{當}x\to 0.\end{aligned}$$

   (ii) $\varphi'(x)=\int_0^\infty \frac{\cos xt}{t^2+1}dt,$
$$\left|\frac{\cos xt}{t^2+1}\right|<\frac{1}{t^2+1)},\ \int_0^\infty \frac{1}{t^2+1}dt<\infty$$

   依 Lebesgue Dominate Convergence Theorem (借用之)
$$\lim_{x\to 0}\int_0^\infty \frac{\cos xt}{t^2+1}dt=\int_0^\infty \lim_{x\to 0}\frac{\cos xt}{t^2+1}dt=\int_0^\infty \frac{1}{t^2+1}dt=\frac{\pi}{2}.$$

根據 (i)，於 (22) 式中，令 $x \to 0$，得

$$a + b + \frac{\pi}{2} = 0 \tag{23}$$

又 $\varphi'(x) = ae^x - be^{-x}$，根據 (ii)，令 $x \to 0$ 得

$$a - b = \frac{\pi}{2} \tag{24}$$

$(23)(24) \Rightarrow a = 0, b = -\frac{\pi}{2}$，故

$$\varphi(x) = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-x}) \text{ 當} x > 0 \tag{25}$$

又 $x = 0$ 時等號也成立，故有

$$\varphi(x) = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-x}) \ \forall \ x \geq 0$$

Remark: 當 $x = 0, \varphi(0) = 0$

(i) $\varphi'(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\varphi(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\pi}{2} \cdot \dfrac{1 - e^{-x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\pi}{2} \cdot e^{-x} = \dfrac{\pi}{2}, \displaystyle\int_0^\infty f_x(0,t)dt = \dfrac{\pi}{2}$

故 $\varphi'(0) = \displaystyle\int_0^\infty f_x(0,t)dt$

(ii) $\varphi'(0) = \dfrac{\pi}{2}, \varphi'(x) = \dfrac{\pi}{2}e^{-x}$

$\varphi''(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\varphi'(x) - \varphi'(0)}{x} = \dfrac{\pi}{2} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x} - 1}{x} = \dfrac{\pi}{2} \lim\limits_{x \to 0}(-e^{-x}) = -\dfrac{\pi}{2}.$

而 $f_{xx}(x,t)dt = -\dfrac{t \sin xt}{t^2 + 1}, \displaystyle\int_0^\infty f_{xx}(0,t)dt = 0$

$\therefore \ \varphi''(0) \neq \displaystyle\int_0^\infty f_{xx}(0,t)dt$，回答了例 1. 中分析 4 的提問。

14.4 Fubini 定理的回顧

1. 我們於第八章証明了冪級數基本定理：$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，收斂半徑 R，則有

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},\ \forall\ |x|<R.$$

上式可簡記為

$$\frac{d}{dx}\sum\cdots=\sum\frac{d}{dx}\cdots. \tag{26}$$

$\sum$ 可看成一種形式的積分，那麼 (26) 即為一種微分和積分的交換。

利用微積分基本定理，我們有 (見第八章)

$$\int\sum=\sum\int \tag{27}$$

$\sum$ 既是一種形式的積分，(27) 即是一種積分與積分的交換，換言之，微分和積分的可交換性及積分和積分的可交換性是等價的，中間的橋梁是微積分基本定理。

以下我將透過微分與積分的可交換性，再回顧 Fubini 定理。

2. Fubini 定理說：

$$\iint_K f(x,y)=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx \tag{28}$$

$$=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy \tag{29}$$

其中 $K=[a,b]\times[c,d]$，上面式中所牽涉到的積分都必須存在。

先來看 (28) = (29) 這件事：

令

$$g(t)=\int_a^t\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx$$

$$h(t)=\int_c^d\left(\int_a^t f(x,y)dx\right)dy$$

為了運算上的方便，對 f 做嚴苛一點的要求，設 f 在 K 上連續，於是

$$\begin{aligned}
g'(t) &= \int_c^d f(t,y)dy \quad (\text{微積分基本定理})\\
h'(t) &= \frac{d}{dt}\int_c^d\left(\int_a^t f(x,y)dx\right)dy\\
&= \int_c^d\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_a^t f(x,y)dx\right)dy \quad (\text{定理 14-1})\\
&= \int_c^d f(t,y)dy=g'(t)
\end{aligned}$$

而 $g(a)=h(a)=0$，故

$$g(t)=h(t),\ \forall\ a\le t\le b.$$

令 $t=b$ 得

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$$

3. 其次，我們來觀察 (28) 式：

先引介一個 lemma。

Lemma 14.1

設 f 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上連續，令 $K_t=[a,t]\times[c,d]$, $a\le t\le b$, $\varphi(t)=\iint_{K_t}f(x,y)dxdy$, 則

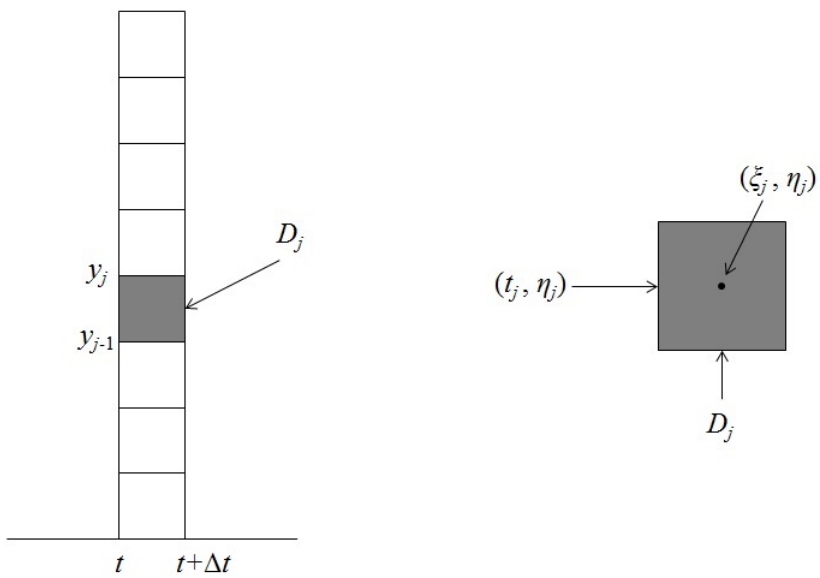
$$\varphi'(t)=\int_c^d f(t,y)dy,\ \forall\ a\le t\le b.$$

分析：

(a) $\varphi'(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{1}{\Delta t}\iint_{\Delta K_t}f(x,y)dxdy,\ \Delta K_t=K_{t+\Delta t}-K_t.$

(b) 把 $[c,d]$ n 等份，$c=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_n=d$，令 $D_j=[t,t+\Delta t]\times[y_{j-1},y_j]$，則

$$\iint_{K_t}f(x,y)dxdy=\sum_{j=1}^n\iint_{D_j}f(x,y)dxdy.$$



(c) f 在 D_j 上連續，依均值定理，

$$\iint_{D_j}f(x,y)dxdy=f(\xi_j,\eta_j)\Delta t\Delta y_j$$

於是有

$$\frac{1}{\Delta t}\iint_{\Delta K_t} f(x,y)dxdy = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j,\eta_j)\Delta y_j$$

(d) f 在 K 上連續，所以在 K 上均勻連續。給定 $\epsilon > 0$, $\exists\ \delta$，使

$$|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| < \frac{\epsilon}{2(d-c)},\ \text{只要}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} < \delta$$

故

$$|f(t,\eta_j) - f(\xi_j,\eta_j)| < \frac{\epsilon}{2(d-c)},\ \text{只要}\Delta t < \delta.$$

(e) 而 $\sum\limits_{j=1}^{n} f(t,\eta_j)\Delta y_j$，為 $\int_c^d f(t,y)dy$ 的 Riemann sum，對此 ϵ，$\exists\ N$ 使

$$\left|\int_c^d f(t,y)dy - \sum_{j=1}^{n} f(t,\eta_j)\Delta y_j\right| < \frac{\epsilon}{2},\ \text{只要}n > N$$

(f) 因此，當 $\Delta t < \delta$，選定 $n > N$，我們有：

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}{\Delta t} - \int_c^d f(t,y)dy\right| \\
&\le \left|\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j,\eta_j)\Delta y_j - f(t,\eta_j)\Delta y_j)\right| + \left|\sum_{j=1}^{n} f(t,\eta_j)\Delta y_j - \int_c^d f(t,y)dy\right| \\
&\le \frac{\epsilon}{2(d-c)}\cdot(d-c) + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

故 $\varphi'(t) = \int_c^d f(t,y)dy,\ a \le t \le b.$

4. 根據這個 Lemma，我們有

$$\varphi'(t) = g'(t),\ a \le t \le b.$$

而 $\varphi(a) = g(a) = 0$，依微積分基本定理得

$$\varphi(t) = g(t),\ \forall\ t,\ a \le t \le b$$

令 $t = b$，即得 (28) 式。於是，我們乃可宣告：

當 f 為連續函數時，**Fubini** 定理成立。

5. Fubini 定理對連續函數既然成立，那麼對 Riemann 可積函數是否成立呢？回答如下：

Riemann 可積函數可以用 step function 逼近，step function 又可用連續函數逼近，所以：

Riemann 可積函數可以用連續函數逼近。

(28) 式對連續函數成立，” 因此”，(28) 式對 Riemann 可積函數成立。

行家過招，可以這樣子談數學，不過對初學者，有如天馬行空，很不踏實。怎麼樣的”逼近”？那個” 因此” 又從何而來？請說個清楚，講個明白。

講義寫到這裡，讓我停頓了很久，我試著用最基本的工具，把它導出，但它的論述又和定理 **11-1** 無異，這樣，何必再來一遭呢？

於是，我乃鐵了心，借用 Lebesgue Dominate Convergence Theorem 來說明，這樣的處理方式，在數學上是一條康莊大道，早一點上路，並不是壞事。同學如果覺得難以下嚥，以下 6.7. 兩點的論述可略過。

6. Lesbesgue Dominate Convergence Theorem 說：

   $f_n \to f$ a.e on $(\mathbf{X}, \mu), |f_n| \leq g, \int_{\mathbf{X}} g\, d\mu < \infty,$
   則：f 可積，且
   $$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{X}} f_n\, d\mu = \int_{\mathbf{X}} f\, d\mu$$
   其中 $\mathbf{X}$ 是一個 space，μ 是其上的測度。

   $\mathbf{X}$ 可以是 $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, [a,b], [a,b]\times[c,d], \mathbb{N}, \mathbb{N}\times\mathbb{N}, \cdots,$
   μ 可以是 $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2$ 上的 Lebesgue 測度，或 $\mathbb{N}, \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 上的計數測度 (counting measure),$\cdots$

   所謂 $f_n \to f$ a.e. 是指集合 $\{x | \lim f_n(x) \neq f(x)\}$ 的測度為 0。a.e. 是 almost everywhere 的簡寫。

7. 首先：f 在 K 上 Riemann 可積，所以 f 是有界的。因此，$\exists\ \alpha$ 使 $f+\alpha \geq 0$，在 K 上。

   而 (28) 式對 $f+\alpha$ 成立 $\Leftrightarrow$ (28) 對 f 成立，我們不妨一開始就假設 $f \geq 0$.

   其次：f 在 K 上 Riemann 可積 $\Rightarrow \exists$ step functions $\varphi_n,\ 0 \leq \varphi_n \leq f$，使 $\varphi_n \nearrow f$ a.e. on K.

   ($\iint_K \varphi_n dxdy$ 即 f 在 K 上相應某個分割 P_n 的 lower sum，取 $P_n \subset P_{n+1}$ 即得 $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$.)

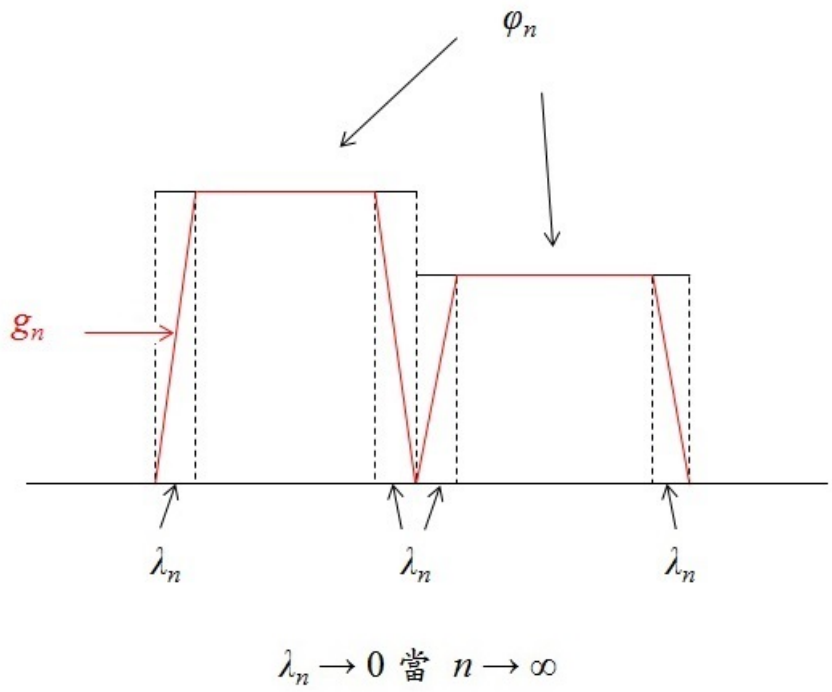
第三：設 $P_n = A_n \times B_n, A_n : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ 為 $[a,b]$ 上的分割，令 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$，於是有：

$$x \notin A,\ \text{則}\varphi_n(x,y) \nearrow f(x,y) \text{ a.e. on}[c,d] \text{ (請想一想)}$$

A 可數，$\therefore m(A) = 0$，換言之：

$$(\varphi_n(x,y) \nearrow f(x,y) \text{ a.e.}, y \in [c,d]) \text{ a.e. } x \in [a,b]$$

第四：每一個 step function φ_n，又可用連續函數 g_n 逼近，示意如下：



因此，$\exists$ continuous function g_n 滿足：

(i) $0 \le g_n \to f$ a.e. on K.

(ii) $(g_n(x,y) \to$ a.e. $y \in [c,d])$ a.e. $x \in [a,b]$.

第五：Fubini 定理對 g_n 成立：

$$\iint_K g_n(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d g_n(x,y)dy \right) dx$$

令 $n \to \infty$, 利用 Lebesgue Dominate Convergence Theorem 即得

$$\iint_K f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

Remark:

1. 看來定理 11-11 的証明直截了當，不用開車，直接登上峯頂，腳力很健，這種功夫，要好好學習，你的能力自然不凡。

2. 上面從連續函數推廣到可積函數，騎著一部 Lebesgue 牌的摩托車，走大馬路，繞幾個彎，兜風上頂，也很順暢，這部摩托車馬力很強，同學要學會騎它，以後才能越野度澗。

3. 反觀 7. 的" 其次"、" 第三" 兩小段。

   (a) $\exists$ step functions $\varphi_n,\ 0 \le \varphi_n \le f$，使 $\varphi_n \nearrow f$ a.e. on K.

   (b) $(\varphi_n(x,y) \nearrow f(x,y)$ a.e., $y \in [c,d])$ a.e. $x \in [a,b]$

   想想：Fubini 定理對特徵函數 (Characteristic function) $\chi_D, D : [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$，成立嗎？

   經檢驗，沒問題！(請同學自行驗之)

   那麼它對 φ_n 也成立！

   對 φ_n 也成立，再利用剛才那部摩托車，對 f 也要成立！

   這又是 Fubini 定理一個很簡單的証明，直接觀它的竅門，最省事。Lebesgue 積分中的 Fubini 定理就是這樣處理，因為它有那部摩托車可騎。

14.5 C^∞ function 的建構

我們於寒假作業中曾做過如下的問題：

$$\Omega : \{(x,y)|x^2+y^2<2\},\ K : [-1,1]\times[-1,1]$$

試造一 C^∞ 函數 f 滿足

(i) $f=1$，在 K 上

(ii) $f=0$，在 Ω 之外

(iii) $0<f<1$，在 Ω 與 K 之間

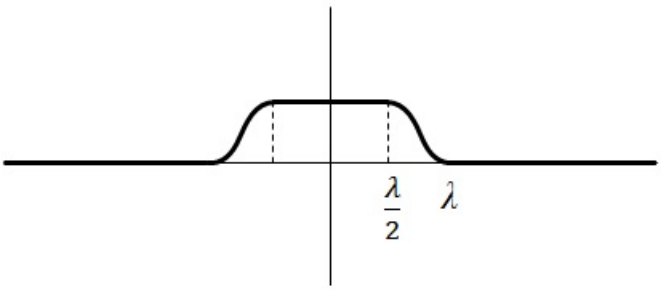
當 Ω 為 $\mathbb{R}^n$ 中任意 open set，$K\subset\Omega$ 為 compact，如何造一 C^∞ 函數滿足上述 (i),(ii),(iii) 三條件呢？
由於 Ω 和 K 之間關係並不規則，我們對 (iii) 稍微放寬，只要求：

(iii)' $0\le f<1$，在 Ω 與 K 之間。

分析如下：

1. 令 $\lambda\le\dfrac{1}{2}\inf\{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|\ |\mathbf{x}\in K,\mathbf{y}\in\Omega^C\}$
2. 造一 $\mathbb{R}^1$ 上的 C^∞ 函數 φ : (習題五，第四題)

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & 當|x|\le\dfrac{\lambda}{2}\\ 0, & 當|x|=0，當|x|\ge\lambda\\ 0\le\varphi(x)<1, & 當\dfrac{\lambda}{2}<|x|<\lambda\end{cases}$$



並將 φ 推廣到 $\mathbb{R}^n$ 中，令

$$\varphi(\mathbf{x})=\varphi(\|\mathbf{x}\|)$$

3. 令 $\alpha=\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x}, g(\mathbf{x})=\frac{1}{\alpha}\varphi(\mathbf{x})$，則

$$\int_{\mathbb{R}^n}g(\mathbf{x})d\mathbf{x}=\int_{B_\lambda(\mathbf{0})}g(\mathbf{x})d\mathbf{x}=1$$

4. 令 $K_\lambda = \{\mathbf{x}|\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \mathrm{dist}(\mathbf{x}, K) < \lambda$，其中 $\mathrm{dist}(\mathbf{x}, K) = \inf_{\mathbf{y}\in K} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$，並令

$$f(\mathbf{x}) = (\chi_{\ K_\lambda} * g)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\ K_\lambda}(\mathbf{y}) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

依定理 14-1，

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_i}[\chi_{\ K_\lambda}(\mathbf{y}) g(\mathbf{x} - \mathbf{y})] d\mathbf{y}$$

$$\varphi \in C^\infty,\ \therefore \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \text{ continuous},\ i = 1, 2, \cdots, n$$

上面的操作可以為所欲為，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \dfrac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}, \cdots$ 皆為連續函數，$\therefore f \in C^\infty$.

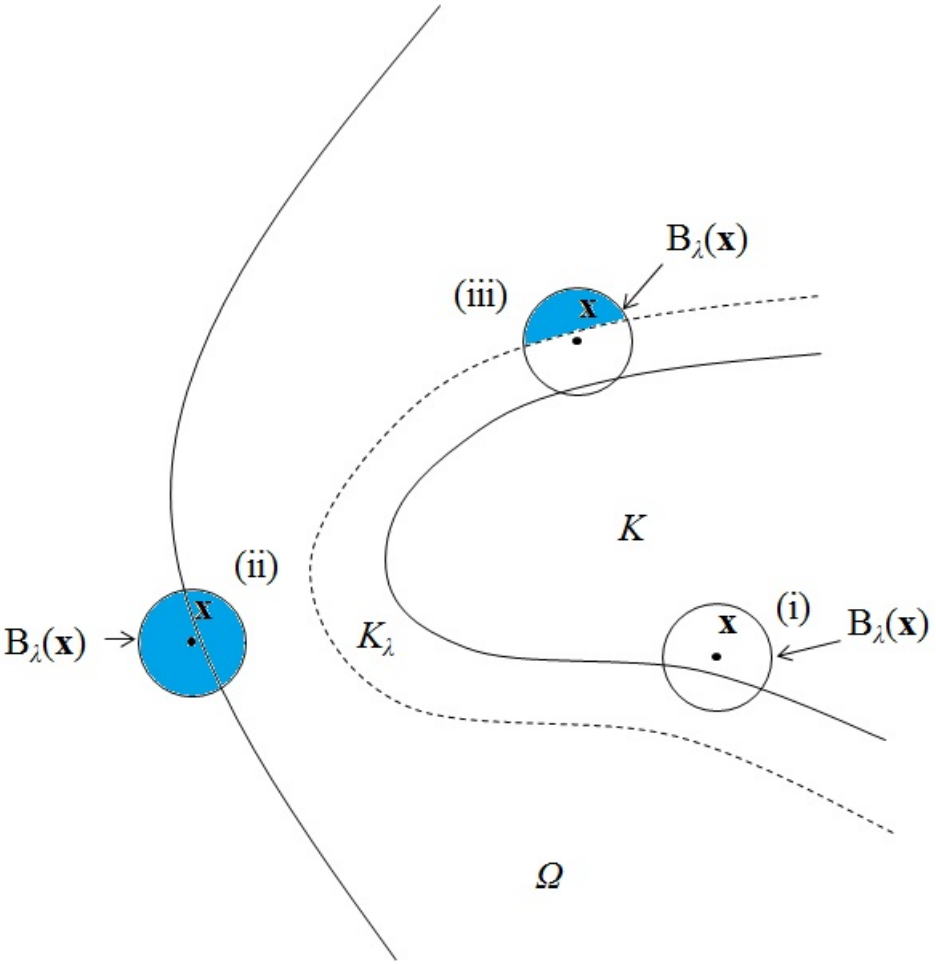
5. f 滿足上述 (i)(ii)(iii)' 三條件

(i) $\mathbf{x} \in K \Rightarrow B_\lambda(\mathbf{x}) \subset K_\lambda,\ \therefore\ f(\mathbf{x}) = 1.$

(ii) $\mathbf{x} \notin \Omega \Rightarrow B_\lambda(\mathbf{x}) \cap K_\lambda = \phi \Rightarrow \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| > \lambda,\ \forall\ \mathbf{y} \in K_\lambda \Rightarrow \chi_{K_\lambda}(\mathbf{y}) \cdot g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0,\ \forall\ \mathbf{y},$
$\therefore f(\mathbf{x}) = 0$

(iii)' $\mathbf{x} \in \Omega - K \Rightarrow B_\lambda(\mathbf{x}) \not\subset K_\lambda \Rightarrow \chi_{K_\lambda}(\mathbf{y}) \cdot g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) < 1$ 當 $\mathbf{y} \in B_\lambda(\mathbf{x}) - K_\lambda$.
$\therefore f(\mathbf{x}) < 1$

以上推論，圖示如下：



$\mathbf{y} \in$ 藍色部分表示 $\chi_{K_\lambda}(\mathbf{y})g(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = 0.$

打個比方來說：

$\mathbf{x}$ 好比一個人，他撐著一枝傘，半徑為 λ，(那隻傘就是 $B_\lambda(\mathbf{x})$)

K 是屋子，$K_\lambda - K$ 是遮雨棚，寬度為 λ，Ω 是庭院內。

(i) 表人在屋內，撐起傘來，傘在雨棚內，不會淋到雨，因此 $f(\mathbf{x}) = 1$。

(ii) 表人在庭院外，撐開傘，傘碰不到雨棚，全淋到雨，全淋到雨表示 $\chi_{K_\lambda} \cdot g \equiv 0$，因此 $f(\mathbf{x}) = 0.$

(iii) 表人在棚下或在棚院之間，因此傘必淋到雨，即 $\chi_{K_\lambda} \cdot g$ 至少某些地方為 0，因此 $f(\mathbf{x}) < 1$(傘可能全部淋到雨，此時 $f(\mathbf{x}) = 0$)

(第十四章全文完)

102學年度高等微積分(下) 習題十四

1. (a) 決定a, b使$\int_0^{2\pi}(\sin x - ax - b)^2 dx$最小。
   (b) 決定a, b, c使$\int_{-1}^{1}(x^3 - ax^2 - bx - c)^2 dx$最小。

2. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$，$u \in C^2(\Omega)$且滿足Laplace方程式$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$。在$\Omega$上，試證：$u$具有圓均性質，即
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)d\theta = u(x_0, y_0)$$
   $\forall B_r(x_0, y_0) \subset \Omega$。

3. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$，$u \in C^2(\Omega)$且具有圓均(盤均)性質，試證：$\Delta u = 0$在$\Omega$上。
   (提示：不妨設$(x_0, y_0) = (0, 0)$，$B_r = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$，$D_i$表$B_r$在第$i$象限上的部分，將$u$對$(0, 0)$點Taylor展開至二階，$\int_{B_r} u dxdy = \sum_{i=1}^{4}\int_{D_i} u dxdy$，利用加權平均值定理(習題十三#1)，令$r \to 0 \cdots$)
   Remark: $u \in C^2(\Omega)$這條件稍微強了一點，事實上只要u在Ω上連續，結論仍成立，那要透過Poisson integral formula來處理，P.D.E.中採用之。

4. 令$\varphi(x) = \int_0^\infty \dfrac{e^{-xt} - e^{-t}}{t} dt$，試就下列(a)、(b)兩種方法分別求$\varphi$：
   (a) 由$\dfrac{e^{-xt} - e^{-t}}{t} = \int_1^x e^{-yt} dy$，利用Fubini定理，求$\varphi$；
   (b) $\varphi' = \cdots$，求φ滿足的微分方程。

5. $x > 0$，求下列各積分值：
   (a) $\int_0^\infty \dfrac{\cos t}{t^2 + x^2} dt$；
   (b) $\int_0^\infty \dfrac{\sin t}{t^2 + x^2} dt$；
   (c) $\int_0^\infty \dfrac{t\cos t}{t^2 + x^2} dt$；
   (d) $\int_0^\infty \dfrac{t\sin t}{t^2 + x^2} dt$。

6. 試判斷下列二積分是否收斂，如收斂，你能求出其值嗎？
   (a) $\int_0^\infty \dfrac{\cos xt}{t(t^2 + 1)} dt$；
   (b) $\int_0^\infty \dfrac{1 - \cos xt}{t(t^2 + 1)} dt$。

7. 試證：$\int_0^1 \dfrac{t^x - 1}{\log t} dt$收斂，並求其值。

8. 試證：$\int_0^\infty \dfrac{1 - \cos xt}{t^2 e^t} dt$收斂，並求其值。

9. (a) 驗證$\int_0^\infty \dfrac{1}{t^2 + x} dt = \dfrac{\pi}{2} x^{-1/2},\ x > 0$；
   (b) 試證：$\int_0^\infty \dfrac{dt}{(t^2 + x)^{n+1}} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{-n-1/2}$。

10. $\Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$，$n>0$。試證：$\Gamma(n)=(n-1)!$。

11. Dirichlet Integral $I=\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$也可以利用如下的觀察求$I$之值。
(a) 令$I_M=\int_0^M \frac{\sin x}{x}dx$，$0<M<N$，有：$|I_M-I_N|<\frac{2}{M}$。
(b) 根據Cauchy's criterion，$\lim_{N\to\infty} I_N$存在$=I$，於(a)中令$N\to\infty$，有：$|I-I_M|\le \frac{2}{M}$。
(c) 設P爲任意正數，令$M=\lambda P$，則$I_{\lambda P}=\int_0^P \frac{\sin\lambda x}{x}dx$。
(d) 據此，有$I=\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^P \frac{\sin\lambda x}{x}dx$。
(e) 令$k(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sin(x/2)}$，$x>0$，$k(0)=0$，則$k$在$[0,\infty)$上連續，根據Riemann-Lebesgue lemma，有：$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^P k(x)\sin\lambda x dx=0$。
(f) 故$I=\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^P \frac{\sin\lambda x}{2\sin(x/2)}dx$，取$P=\pi$，$\lambda=n+\frac{1}{2}$，可得$I=\frac{\pi}{2}$。

12. (a) 試證：$\int_0^\infty \frac{\sin x\cdot\cos x}{x}dx=\frac{\pi}{4}$。
(b) 利用(a)導出$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}$。
(c) 利用(b)導出$\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2}dx=\frac{\pi}{4}$ (提示：$\sin^2 x+\cos^2 x=1$)。
(d) 據此，導出$\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^4}dx=\frac{\pi}{3}$。
(Apostal #14-18, p.456, 1957版)

13. (Fubini定理又回顧：從Monotone Convergence Theorem推導之)
Lebesgue積分理論中有一個簡單，基本，而重要的定理，叫作Monotonce Convergence Theorem，其內容如下：
$0\le f_1\le f_2\le\cdots$在$[a,b]$上，f_n在$[a,b]$上可測，則$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$。
所謂f_n在$[a,b]$上可測是指：$\{x|f_n(x)>t\}$爲可測集 $\forall t$。上面這個$[a,b]$可以改爲任意可測空間E。設μ爲E上的測度，上式的內容爲：$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)d\mu=\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)d\mu$，例如$E=\mathbb{R}^2$，$d\mu=dxdy\cdots$。現在回頭再看Fubini定理：

$$(*)\quad \iint_K f(x,y)dxdy=\int_a^b(\int_c^d f(x,y)dy)dx,\ K=[a,b]\times[c,d]$$

f在K上可積分。
(a) 試驗證(*)式對$f=\chi_D$，$D=[x_1,x_2]\times[y_1,y_2]\subset K$成立。
(b) 因此，(*)對一切step function成立。
(c) 任意Riemann可積函數f可以用step function Monotone逼近a.e.。(*)對step function成立，故對f成立。

14. f定義在$K=[a,b]\times[0,\infty)$上，$K_\lambda=[a,b]\times[0,\lambda]$，若$f$在$K_\lambda$上可積，且$\lim_{\lambda\to\infty}\iint_{K_\lambda} f(x,y)dxdy$存

在$=A$，我們定義$\iint_K f(x,y)dxdy = A$，稱爲f在K上的瑕積分。試證：

$$\begin{aligned}\iint_K f(x,y)dxdy &= \int_0^\infty (\int_a^b f(x,y)dx)dy \\ &= \int_a^b (\int_0^\infty f(x,y)dy)dx\end{aligned}$$

若$\iint_K |f(x,y)|dxdy < \infty$。

15. (a) 決定α之值使$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$收斂。
(b) 決定β之值使$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^\beta}dx$收斂。
(c) 試證：$\int_0^\infty \sin x^2 dx$，$\int_0^\infty \cos x^2 dx$收斂。
Remark：$s(x) = \int_0^x \sin t^2 dt$，$c(x) = \int_0^x \sin t^2 dt$稱爲Fresnel integral，Fresnel於研究遠距光線繞射現象時引入之。$s(\infty) = c(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$，可透過複變函數的留數定理求之。有人巧思獨具，把$s(\infty), c(\infty)$化成有理函數的積分，從而求其值，同學如有興趣，可參考Courant and John: Introduction to Calculus and Analysis, Vol II, p.474.
我喜歡用留數定理的方法，它像秋天染紅了山谷一樣，是全面的，適用各種問題。巧思固然令人驚豔，但它像一支鑰匙，只能開一扇門。還記得那位"i不存在"的女高中生嗎？不知道她有沒有體會到i的虛空妙有？

16. $f \in C^1(\mathbb{R})$，$\int_{-\infty}^\infty |f(x)|dx < \infty$。若$\int_{-\infty}^\infty |f(x+h) - f(x)|dx \le h^2\ \forall h$，試證：$f(x) = 0\ \forall x$。
Remark：$f \in C^1(\mathbb{R})$這條件給的很強，是希望你好好處理pass limit的問題，從而得$f'(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$。事實上$f \in C^1(\mathbb{R})$這條件是可以拿掉的，結論是$f = 0$ a.e. on $\mathbb{R}$，不過這樣問題變得很難，因爲不知道$f'(x)$到底存不存在。如果你學過Fourier transform，取f的Fourier transform $\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^\infty e^{-itx} f(x)dx$，則$f$ continuous on $\mathbb{R}$且$\lim_{|t|\to\infty} \hat{f}(t) = 0$。由所給已知條件可導出$\hat{f}(t) = 0\ \forall t \Rightarrow \cdots$。
如果$\mathbb{R}$改成單位圓周T，那相應的是取f的Fourier series $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_T e^{-in\theta} f(\theta)d\theta$，從而導出$\hat{f}(n) = 0\ \forall n \Rightarrow \cdots$。
這是我的想法，或許你有更高明的處理方法，請來信讓我知道。

102 學年度台灣大學數學系高等微積分下
由陳金次教授製作，以創用 CC 姓名標示-非商業性-禁止改作 3.0 台灣 授權條款釋出

Chapter 15

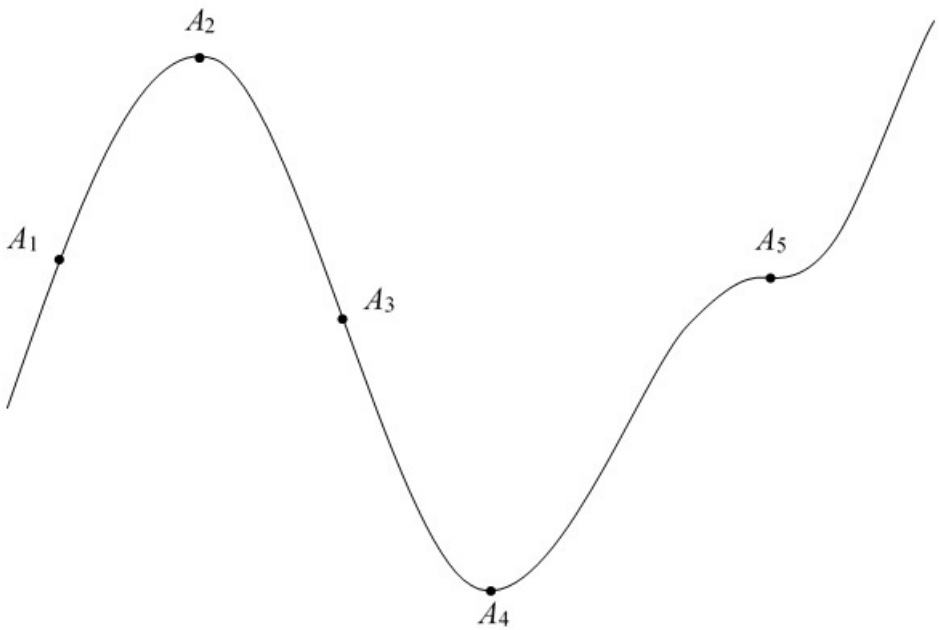
隱函數定理及相關問題

15.1 反函數定理 (The Inverse Function Theorem)

a. 單變數函數

給定 $y = f(x)$，問：x 是否可表成 y 的函數。

這樣提問，是很粗糙的問法，且看下圖：



設 $f \in C^1$，觀察：

1. 在 A_1, A_3 點附近，$f' \neq 0$

   $\therefore f$ 在 A_1, A_3 點附近嚴格遞增或遞減，因此，反函數存在

注意，反函數只能局部地存在。

2. 在 A_2, A_4, A_5 三點，$f' = 0$

   (i) A_2, A_4 兩點附近反函數不存在

   (ii) A_5 點附近，反函數存在

結論：

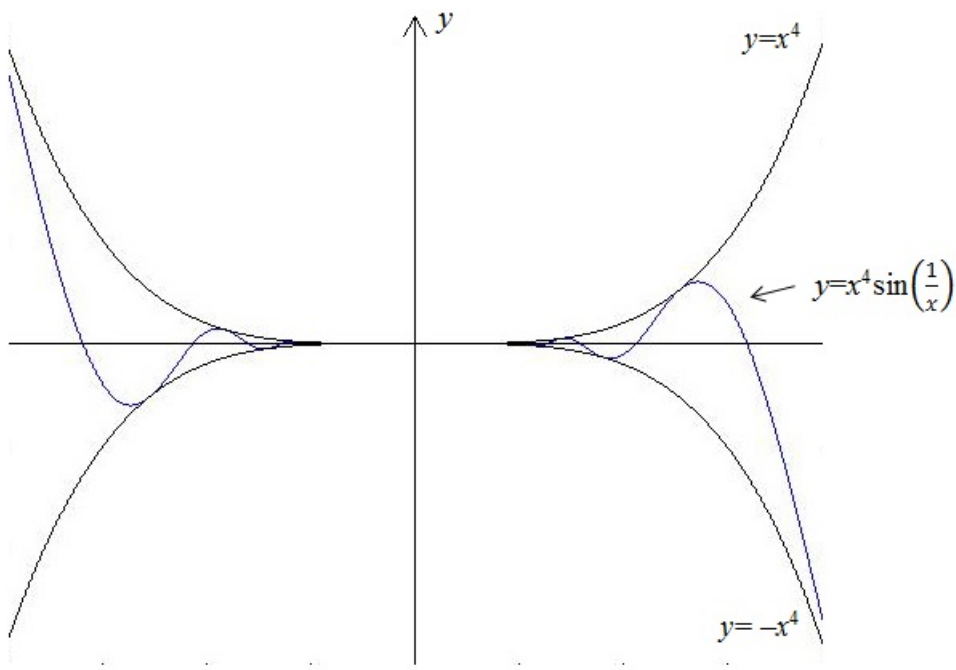
$f' \neq 0 \Rightarrow$ 反函數局部存在
$f' = 0$，不定

Remark: A_5 是鞍點，圖中反函數存在，但不要以為所有鞍點附近都有反函數，鞍點可以很複雜，且看：

例. $f(x) = \begin{cases} x^4 \sin \dfrac{1}{x}, & 0 < |x| < 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} 4x^3 \sin \dfrac{1}{x} - x^2 \cos \dfrac{1}{x}, & 0 < |x| < 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$f' \in C^1(-1, 1), 0$ 為鞍點，但 f 在原點附近任意小的鄰域上，正負來回擺盪，因此，反函數不存在。



b. 二維寫像

給定 $\begin{cases} u &= u(x,y) \\ v &= v(x,y) \end{cases}$

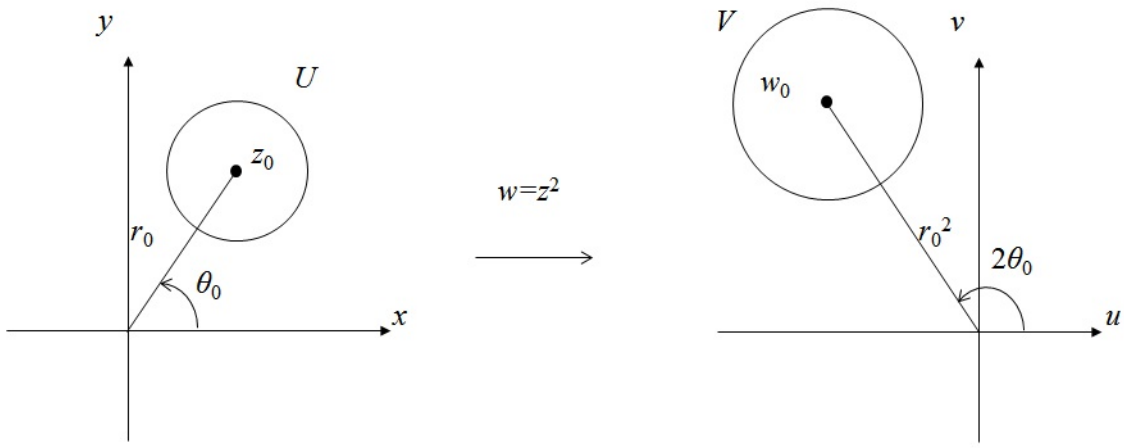
問：x, y 是否可局部地表成 u, v 的函數？

我們且以下例來了解這個問題：

$$\begin{cases} u &= x^2 - y^2 \\ v &= 2xy \end{cases}$$

$u + iv = x^2 - y^2 + i \cdot 2xy = (x+iy)^2 = z^2$

設 $z = x + iy, w = u + iv$, 則 $w = z^2$ 把 z 平面上的一點 z_0 映至 w 平面上的一點 w_0，圖示如下：



(i) $z_0 \neq 0$

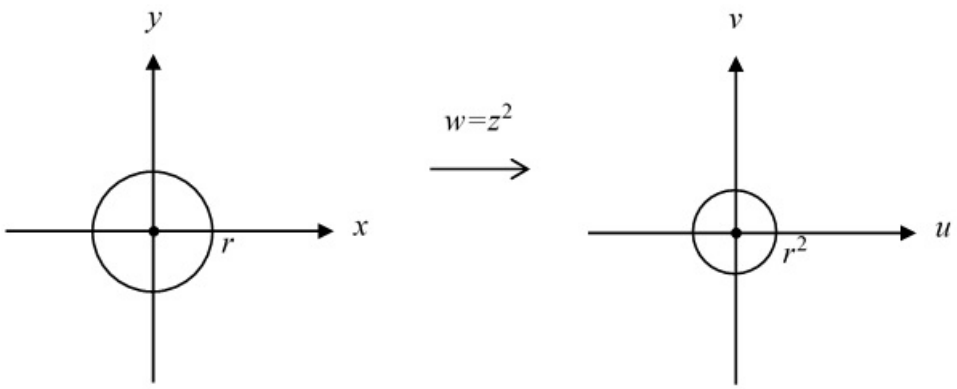
$\exists\ z_0$ 的某鄰域 U 及 w_0 的某鄰域 V 使

$$w : U \to V \text{ 為 1-1, onto 寫像}$$

(ii) $z_0 = 0$

對任意小的 r，考慮圓 $C_r : |z| = r$，

C_r 經 $w = z^2$ 映至 w 平面上成為半徑為 r^2 且繞原點兩圈的圓，$w(r) = w(-r) = r^2, \forall\ r$



因此，在原點附近，反函數不存在。

反函數存在的條件是什麼？

$w'(z) = 2z$

(i) $z_0 \neq 0, w'(z_0) = 2z_0 \neq 0$

(ii) $z = 0, w'(z_0) = 0$

因此，$w'(z_0) \neq 0$ 為反函數存在的保証。

對一般的解析寫像 (Analytic mapping)，設 $w = f(z) = u+iv, u, v$ 滿足 Cauchy Riemann equation:

$$u_x = v_y, u_y = -v_x$$

$$\begin{aligned} w' &= f(z)' \\ |w'|^2 &= |f(z)'|^2 = f(z)' \cdot \overline{f(z)'} = (u_x + iv_x)(u_x - iv_x) \\ &= u_x^2 + v_x^2 = u_x v_y - u_y v_x \\ &= \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \ (u, v\text{對}x, y\text{的 Jacobian}) \end{aligned}$$

換言之，$w'(z_0) \neq 0 \Leftrightarrow \left.\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|_{(x_0,y_0)} \neq 0, z_0 = x_0 + iy_0$

即：$\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(x_0, y_0) \neq 0$ 可以確保反函數在 (x_0, y_0) 附近存在。

想想：$\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(x_0, y_0)$ 表此寫像在 (x_0, y_0) 點面元的放大率，放大率 $\neq 0$，則反函數存在，蠻合理的。

對一般非解析映射 (即 u, v 不再滿足那 Cauchy Riemann equation)，這個條件也足以保証反函數的存在，這就是二維寫像反函數定理的內容。

(當然，u, v 必須是 C^1 函數，不在話下。)

c. n 維寫像

給定 n 個方程式：

$$\begin{cases} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ &\vdots \\ y_n &= f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases}$$

問：$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是否局部可表成 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的函數？

令

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \mathbf{y} &= (y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ \mathbf{f} &= (f_1, f_2, \cdots, f_n) \end{aligned}$$

則以上方程組可以簡寫為：

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

的向量型式。

令

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} D_1 f_1 & D_2 f_1 & \cdots & D_n f_1 \\ D_1 f_2 & D_2 f_2 & \cdots & D_n f_2 \\ \vdots & & & \\ D_1 f_n & D_2 f_n & \cdots & D_n f_n \end{vmatrix} (\mathbf{x}),\ D_k f_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}$$

表 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{x}$ 點的 Jacobian.

若 $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) \neq 0$，則 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{a}$ 點附近反函數存在，這就是 n 維反函數定理的大概內容。

更明確的敘述如下：

<u>定理 **15-1**</u> 反函數定理 (The Inverse Function Theorem)

設 $E \subset \mathbb{R}^n$ 為開集，$\mathbf{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_n) \in C^1(E), \mathbf{a} \in E, \mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{a})$, 若 $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) \neq 0$，則

(i) $\exists$ **a** 的某鄰域 U 及 **b** 的某鄰域 V 使

$$\mathbf{f} : U \to V \text{ 為 1-1, onto}$$

因此，$\exists\, \mathbf{g} : V \to U$ 滿足

$$\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{x},\ \forall\, \mathbf{x} \in U$$

(ii) $\mathbf{g} \in C^1(V)$

<u>歷史的回憶</u>

反函數定理在高等微積分裡算是一個大定理，據之，可導出我們這一章的主角－隱函數定理。隱函數定理在分析上、在幾何上，都扮演一個相當重要的角色，缺了它，戲就唱不下去。這兩個定理都有它的深度，許多同學讀到這裡猶如霧裡看花，甚至暈眩頭昏，我當年讀高等微積分，何嘗不是如此！我讀大學那個年代，教授常會考"State and prove xxx theorem"，The Inverse Function Theorem 是一再被考的期中考考題。考試前幾天，宿舍裡有人早晨五點鐘就起來，拿起一張白紙，口中念念有詞，振筆疾書，那是在默寫 Apostal(高微課本)，如此用功，真令人佩服。

回想那個時代，那些燈下獨早起的同學們，歷歷在目，他們之中有幾人日後相當有成就，我想不是因為他們默寫有功，應該是得力於那份認真、進取的精神吧。

反函數定理的証明，有數種不同的方法，各有千秋，但都非三言兩語能竟其功。1974 Nijenhuis 於 American Mathematics Monthly 提出利用收縮寫像的方法得到漂亮的証明，此後，許多教科書都採用之。同學可參考 Rudin: Principles of Mathematical Analysis 第三版，McGraw Hill(1976) P.221-223 或 Cooper: Working Analysis, Elsevier Academic Press(2005), P.347-351，那裏有詳細的介紹。

我在這裡要介紹的是比較古典的方法，利用 Cramer's Rule 以及連續函數在 compact set 上取最大最小值，把定理導出，它思緒清晰，功夫獨到，我認為很值得體會、學習。我們那些燈下獨早起的同學們，默的就是這個証法。

定理的証明：

第一部份：存在問題

1. 令

$$A(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_n) = \begin{vmatrix} D_1 f_1(\mathbf{P}_1) & D_2 f_1(\mathbf{P}_1) & \cdots & D_n f_1(\mathbf{P}_1) \\ D_1 f_2(\mathbf{P}_2) & D_2 f_2(\mathbf{P}_2) & \cdots & D_n f_2(\mathbf{P}_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_1 f_n(\mathbf{P}_n) & D_2 f_n(\mathbf{P}_n) & \cdots & D_n f_n(\mathbf{P}_n) \end{vmatrix}, \ \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_n \in E \subset \mathbb{R}^n$$

$\because D_k f_i \in C^1(E)$, $\therefore A$ 為 $E \times E \times \cdots \times E \subset \mathbb{R}^{n^2}$ 上的連續函數。

$A(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \cdots, \mathbf{a}) = J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) \neq 0$, $\therefore \exists\, \delta > 0$ 使

$$A(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_n) \neq 0 \ \forall\, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_n \in B_\delta(\mathbf{a}) \subset E$$

2. 取 $S = \overline{B_{\delta/2}(\mathbf{a})}$ (取 closure，目的在使其為 compact。compact 好處多多，其上的連續函數恆取最大、最小值，恆保 compact)，則 $\mathbf{f}$ 在 S 上 1-1.

理由：若 $\exists\, \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in S$，使 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}')$，即

$$f_i(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{x}') = 0, \ \forall\, i = 1, 2, \cdots, n$$

S 為 convex，依均值定理，$\exists\, \mathbf{P}_i$，在 $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ 兩點連續上，使

$$\nabla f(\mathbf{P}_i) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') = 0, \ \forall\, i = 1, 2, \cdots, n$$

即：

$$\sum_{k=1}^{n} D_k f(\mathbf{P}_i)(x_k - x'_k) = 0, \ \forall\, i = 1, 2, \cdots, n \tag{1}$$

(1) 式為 $x_k - x'_k$, $k = 1, 2, \cdot, n$, 的一次聯立方程組，其係數行列式為

$$A(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_n) \neq \mathbf{0}$$

依 Cramer's Rule, $\mathbf{0}$ 解為其唯一解，故 $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$

3. 令 $\mathbf{g} : \mathbf{f}(S) \to S$ 為 $\mathbf{f}$ 在 S 上的反函數，則 $\mathbf{g}$ 在 $\mathbf{f}(S)$ 上連續。

理由：S 為 compact, 設 K 為 S 中的 closed subset, 則 K 為 compact。又 $\mathbf{f}$ 在 S 上連續，$\therefore \mathbf{f}(K)$ 為 $\mathbf{f}(S)$ 中的 compact subset$\Rightarrow \mathbf{f}(K)$ 為 $\mathbf{f}(S)$ 中的 closed subset。

結論：K closed in $S \Rightarrow \mathbf{f}(K)$(即 $\mathbf{g}^{-1}(K)$) is closed in $\mathbf{f}(S)$。

換言之，$\mathbf{g}^{-1}(K)$ is closed $\forall\, K$ closed in S

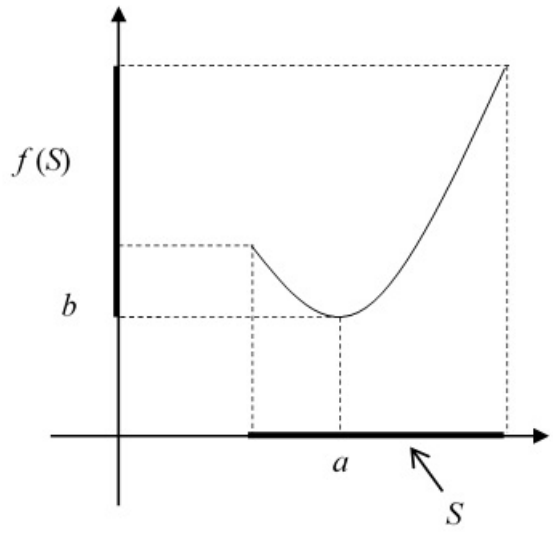
$\therefore \mathbf{g}$ 在 S 上連續。

4. $\mathbf{b} \in$ Interior of $\mathbf{f}(S)$

同學或許會納悶，$\mathbf{a} \in S,\ \mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{a}) \subset \mathbf{f}(S)$，難道 $\mathbf{b} \notin$ Interior of $\mathbf{f}(S)$？

就怕 $\mathbf{b} \in \partial\mathbf{f}(S)$，這樣就找不到 open set V 使 $\mathbf{b} \in V \subset \mathbf{f}(S)$

若無 $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \neq 0,\ \forall\ \mathbf{x} \in S$，這條件的守衛，上述條件是可能發生的，就以 $n = 1$ 為例，且看下圖：



上圖，$b \in \partial f(S)$，不過此時 $f'(a) = 0$！

對 n 個變數的函數，我們將根據 $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \neq 0,\ \forall\ \mathbf{x} \in S$ 導出 $\mathbf{b} \in$ Interior of $\mathbf{f}(S)$，這一步是反函數定理証明中精彩的一著，值得喝采學習。

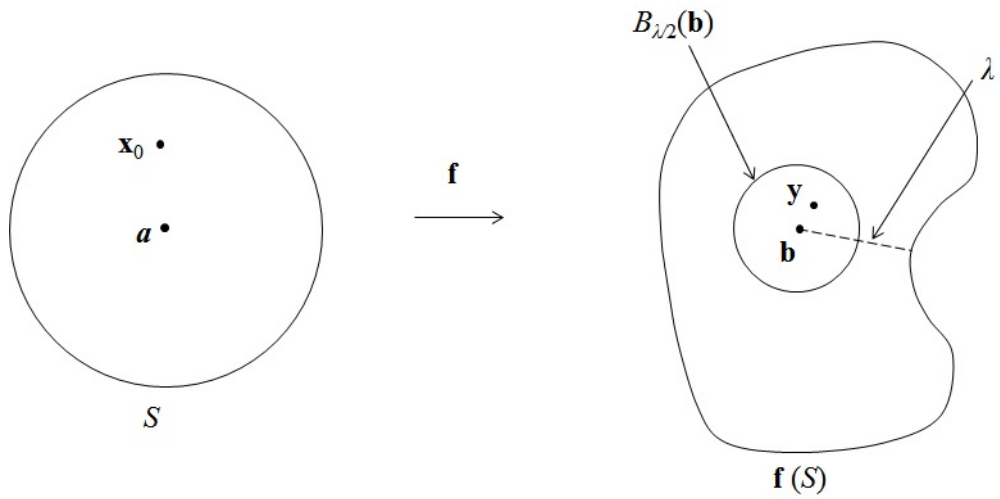
且看少林功夫：

<u>鳳凰舞空</u>：$\mathbf{f}$ 在 S 上 1-1，$\mathbf{a} \notin \partial S$，

$\therefore \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\| \neq 0,\ \forall\ \mathbf{x} \in \partial S,$
∂S 為 compact，$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\|$ 在 ∂S 上連續
$\therefore \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\|$ 在 ∂S 上取最小值 $\lambda > 0$。

注意，這個 $\lambda > 0$ 很重要，因為它騰空，我們就可以在空中畫一鄰域而不觸地。

玉蚌生珠：$\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{a})$，令 $V = B_{\lambda/2}(\mathbf{b})$，如圖所示



給定 $\mathbf{y} \in V$，考慮 $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\|$, $\mathbf{x} \in S$，為 S 上的連續函數，S 為 compact，$\therefore \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\|$ 在 S 上取最小值，又根據下面的觀察：

(i) $\mathbf{x} \in \partial S \Rightarrow \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\| > \dfrac{\lambda}{2}$

(ii) $\|\mathbf{f}(\mathbf{a}) - \mathbf{y}\| = \|\mathbf{b} - \mathbf{y}\| < \dfrac{\lambda}{2}$

可知此最小值必發生在 S 的內部，令其為 $\mathbf{x}_0 \in$ Interior of S，如圖所示。

仙女採珠：Claim:$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}$

考慮 $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (f_i(\mathbf{x}) - y_i)^2$

此函數在 $\mathbf{x}_0$ 點取最小值，$\mathbf{x}_0 \in$ Interior of S

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\sum_{i=1}^{n} (f_i(\mathbf{x}_0) - y_i)^2\right] = 0,\ \forall\ k = 1, 2, \cdots, n$$

即

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} f_i(\mathbf{x}_0) \cdot (f_i(\mathbf{x}_0) - y_i) = 0,\ \forall\ k = 1, 2, \cdots, n \tag{2}$$

(2) 式為 $f_i(\mathbf{x}_0) - y_i$ 的一次方程組，其係數行列式為 $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) \neq 0$ ($\because \mathbf{x}_0 \in S$)，依 Cramer's Rule，$\mathbf{0}$ 解是其唯一解，故 $f_i(\mathbf{x}_0) - y_i = 0,\ \forall\ i = 1, 2, \cdots, n$，即

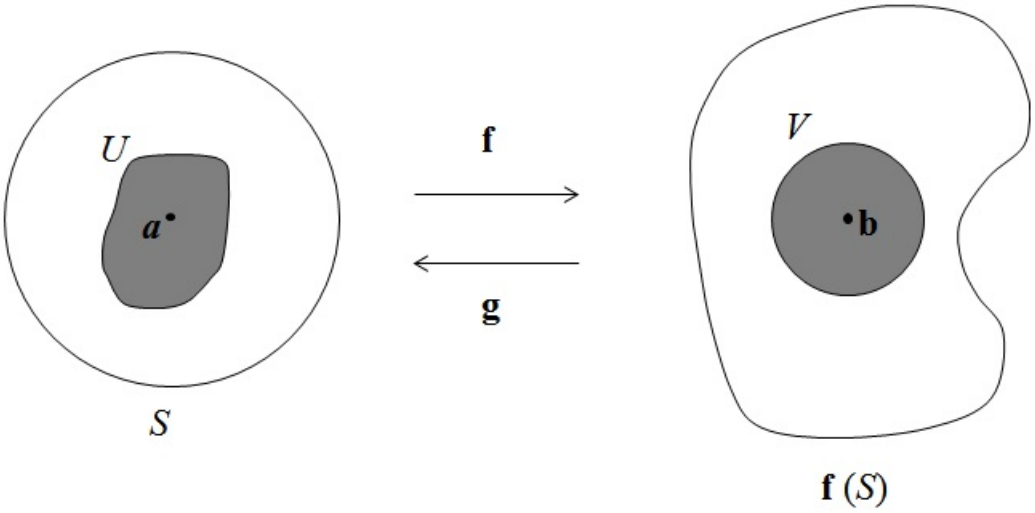
$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y} \tag{3}$$

(3) 式對一切 $\mathbf{y} \in V$ 成立，故

$$V \subset \mathbf{f}(S)$$

注意：$\mathbf{x}_0 \in$ Interior of S 才能確保 (2) 式成立，否則將無從下手。

5. 令 $U \in \mathbf{f}^{-1}(V)$



則 $\mathbf{f}: U \to V$ 為 1-1 且 onto，因此反函數存在，令其為 $\mathbf{g}$,

$\mathbf{g}: V \to U,\ \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{x},\ \forall\ x \in U.$

第二部份：$\mathbf{g} \in C^1(V)$

1. 設 $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \cdots, g_n),\ \mathbf{y} \in V$, 則 $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y}), x_j = g_j(\mathbf{y})$

   欲証：$\dfrac{\partial g_j}{\partial y_k}(\mathbf{y})$ 在 $\mathbf{y}$ 點連續，$\forall\ \mathbf{y} \in V,\ j = 1, 2, \cdots, n$

   設 $\mathbf{u}_k = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$(1 出現在第 k 座標)，則 $\mathbf{y} + t\mathbf{u}_k \in V$ 當 t 夠小。

2. 由 $\dfrac{\partial g_j}{\partial y_k}(\mathbf{y}) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{g_j(\mathbf{y} + t\mathbf{u}_k) - g_j(\mathbf{y})}{t}$ ，

   欲証它在 $\mathbf{y}$ 點連續，令 $\mathbf{x}' = \mathbf{g}(\mathbf{y} + t\mathbf{u}_k), \mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$，

   則 $\mathbf{f}(\mathbf{x}') = \mathbf{y} + t\mathbf{u}_k,\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$

   $\mathbf{f}(\mathbf{x}') - \mathbf{f}(\mathbf{x}) = t\mathbf{u}_k$

   $\Rightarrow f_i(\mathbf{x}') - f_i(\mathbf{x}) = t\delta_{i,k} = \begin{cases} t, & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$

   $\Rightarrow$

$$\nabla f_i(\mathbf{P}_i) \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) = t\delta_{i,k},\ \mathbf{P}_i \in \overline{\mathbf{x}, \mathbf{x}'}(\text{兩點連線}) \subset S$$

即：

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{P}_i)(x'_j - x_j) = t\delta_{i,k},\ i = 1, 2, \cdots, n \tag{4}$$

3. 請同學看看 (4) 式是什麼？

   它是 $x'_j - x_j$ 的一次聯立方程組，其係數行列式為

$$A(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_n) \neq 0,\ 因\ \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_n \in S$$

   依 Cramer's Rule，$x'_j - x_j$ 可解，其解為

$$x'_j - x_j = \frac{tA_j}{A(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_n)} \tag{5}$$

   其中 A_j 為行列式 $A(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_n)$ 中第 j 行 (column) 改為 $(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)^T$，1 出現在第 k 位。

4. $\dfrac{g_i(\mathbf{y} + t\mathbf{u}_k) - g_i(\mathbf{y})}{t} = \dfrac{x'_j - x_j}{t}$,

   (5)$\Rightarrow$

$$\frac{\partial g_j}{\partial y_k}(\mathbf{y}) = \lim_{t \to 0} \frac{A_j}{A(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_n)} = \frac{A_j(\mathbf{x})}{J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})} = \frac{A_j(\mathbf{g}(\mathbf{y}))}{J_{\mathbf{f}}(\mathbf{g}(\mathbf{y}))} \tag{6}$$

   其中 $A_i(\mathbf{x})$ 為 $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ 中第 i 行改為 $(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)^T$，1 出現在第 k 位。

5. $\mathbf{f} \in C^1, \mathbf{g} \in C^0$，$\therefore J_{\mathbf{f}}(\mathbf{g}(\mathbf{y})), A_j(\mathbf{g}(\mathbf{y})) \in C^0$

   $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{g}(\mathbf{y})) \neq 0, \therefore \dfrac{\partial g_j}{\partial y_k}(\mathbf{y}) \in C^0,\ \forall\ j, k = 1, 2, \cdots, n$

   結論：$\mathbf{g} \in C^1(V)$

Remark: 若 $\mathbf{f} \in C^2$，觀察 (6) 式。

依定理，$\mathbf{g} \in C^1, \therefore J_{\mathbf{f}}(\mathbf{g}(\mathbf{y})) \in C^1, A_j(\mathbf{g}(\mathbf{y})) \in C^1$

$\Rightarrow \dfrac{\partial g_i}{\partial y_k} \in C^1,\ \forall\ j, k = 1, 2, \cdots, n \therefore \mathbf{g} \in C^2$

依此類推知：

$$\mathbf{f} \in C^p,\ J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) \neq 0,\ U, V 如定理所述$$

則 $\mathbf{g} \in C^p(V)\ \forall\ p \geq 1$.

15.2 大域存在問題 (The Global Existence Problem)

反函數定理告訴我們若 $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) \neq 0$，反函數在 $\mathbf{a}$ 點附近局部存在，今設 $\mathbf{f}$ 滿足反函數定理的一切條件，且 $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) \neq 0 \ \forall \ \mathbf{a} \in E$

問：$\mathbf{f}$ 的反函數是否在 E 上大域存在？

我們不妨先來看看最簡單的情形；

例 **1.** 設 $f \in C^1(a,b), f'(x) \neq 0 \ \forall \ x \in (a,b)$

問：f^{-1} 是否在 (a,b) 上大域存在？

分析：$f'(x) \neq 0 \ \forall \ x \in (a,b)$，$f'$ 在 (a,b) 上連續

$\Rightarrow f'(x) > 0 \ \forall \ x \in (a,b)$ 或 $f'(x) < 0 \ \forall \ x \in (a,b)$

不妨設 $f'(x) > 0, \ \forall \ x \in (a,b)$，則 $f \nearrow$ strictly on (a,b)

設 $f : (a,b) \to (c,d), c = f(a), d = f(b)$

則存在反函數 $g : (c,d) \to (a,b)$，滿足

$$g(f(x)) = x \ \forall \ x \in (a,b)$$

且 $g \in C^1(c,d)$，根據反函數定理。

上面的例子告訴我們，當 $n = 1$ 時，答案是肯定的。

$n > 1$，答案還是肯定的嗎？

且來看看 $n = 2$ 的情形。

例 **2.** $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

令 $f = u + iv$，則

$$\begin{cases} u &= e^x \cos y \\ v &= e^x \sin y \end{cases}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0 \ \forall \ x, y$$

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} - \{0\}$，但 $f(z + i \cdot 2\pi k) = f(z)$，對一切整數 k 成立。

顯然，大域反函數問題是否定的。

上面這個寫像為多對一的寫像，$\sin y, \cos y$ 的週期為 2π，如果限定 $y_0 + 2k\pi < y < y_0 + 2(k+1)\pi$，$k$ 為整數，y_0 為給定常數，則 f 為 1-1，因此，反函數存在。

根據這個觀察我們有下例：

例 **3.** 接例 **2.**，設 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 為 compact，

若 f 在 $\partial\Omega$ 上為 1-1，則反函數在 Ω 上大域存在，即 $\exists\, g : f(\Omega) \to \Omega$，滿足

(i) $g(f(z)) = z \;\forall\, z \in \Omega$

(ii) g analytic on $f(\Omega)$

Remark: 在複變數函數中，$g'(w)$ 存在 $\forall\, w \in f(\Omega)$，則 g 在 $f(\Omega)$ 上解析，真是不可思議！主要是複數系的代數結構，使導數存在這件事，對函數本身做了非常嚴苛的要求，函數本身必須好到不行，一階導數存在，則各階導數存在。不但如此，它還可以 Taylor 展開，令活在實數系裡的人看得目瞪口呆。

例 **3.** 的結論，對 $\mathbb{R}^n$ 至 $\mathbb{R}^n$ 的寫像也成立，寫成定理如下：

<u>定義 **15-1**</u> $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 為一 compact set，$\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$，

我們說 $\mathbf{f} \in C^1(\Omega)$ 若 $\mathbf{f} \in C^1(\Omega')$，$\Omega'$ 為 $\mathbb{R}^n$ 中開集，$\Omega \subset \Omega'$。

<u>定理 **15-2**</u> 大域存在定理 (吳君淳)

設 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 為 compact，$\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n,\ \mathbf{f} \in C^1(\Omega)$

$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \neq 0 \;\forall\, \mathbf{x} \in \Omega$

若 $\mathbf{f}$ 在 $\partial\Omega$ 上為 1-1，則存在 $\mathbf{g}$，定義於 $\mathbf{f}(\Omega)$ 上，滿足

(i) $\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{x} \;\forall\, \mathbf{x} \in \Omega$

(ii) $\mathbf{g} \in C^1(\mathbf{f}(\Omega))$

分析：

1. 令 $A = \{\mathbf{x} \in \Omega | \exists\, \mathbf{x}' \in \Omega,\ \mathbf{x}' \neq \mathbf{x}, \text{使}\mathbf{f}(\mathbf{x}') = \mathbf{f}(\mathbf{x})\}$

   我想証明 $A = \phi$。

為此，我想証明 A 既 open 又 closed，如此則 $A=\phi$ 或 $A=\Omega$

$A=\Omega$ 為不可能，因為 $\mathbf{f}$ 在 $\partial\Omega$ 上為 1-1，

因此 $A=\phi$.

2. A 為 open

設 $\mathbf{x}\in A$，依定義，$\exists\ \mathbf{x}'\in\Omega,\ \mathbf{x}'\neq\mathbf{x}$，使 $\mathbf{f}(\mathbf{x}')=\mathbf{f}(\mathbf{x})$

令 $\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{f}(\mathbf{x}'),\ J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})\neq 0$，依反函數定理，$\exists\ \mathbf{x}$ 的某鄰域 $U(\mathbf{x})$ 及 $\mathbf{y}$ 的某鄰域 V 使

$$\mathbf{f}:U(\mathbf{x})\to V \text{ 為對射寫像}$$

同理，$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}')\neq 0,\ \exists\ \mathbf{x}'$ 的某鄰域 $U(\mathbf{x}')$ 及 $\mathbf{y}$ 的某鄰域 V' 使

$$\mathbf{f}:U(\mathbf{x}')\to V' \text{ 為對射寫像}$$

取 $B_\epsilon(\mathbf{y})\subset V\cap V'$，$\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{x},\mathbf{x}'$ 連續，對此 ϵ，$\exists\ \delta_1,\delta_2$ 滿足

$$B_{\delta_1}(\mathbf{x})\cap B_{\delta_2}(\mathbf{x}')=\phi,\ B_{\delta_1}(\mathbf{x})\subset U(\mathbf{x}),\ B_{\delta_2}(\mathbf{x}')\subset U(\mathbf{x}')$$

使

$$\mathbf{f}(B_{\delta_1}(\mathbf{x}))\subset B_\epsilon(\mathbf{y})$$
$$\mathbf{f}(B_{\delta_2}(\mathbf{x}'))\subset B_\epsilon(\mathbf{y})$$

再依反函數定理，$\mathbf{f}^{-1}_{U(\mathbf{x})}$ 及 $\mathbf{f}^{-1}_{U(\mathbf{x}')}$ 為連續

$\therefore\ \mathbf{f}_{U(\mathbf{x})}(B_{\delta_1}(\mathbf{x}))$ 及 $\mathbf{f}_{U(\mathbf{x}')}(B_{\delta_2}(\mathbf{x}'))$ 為 open

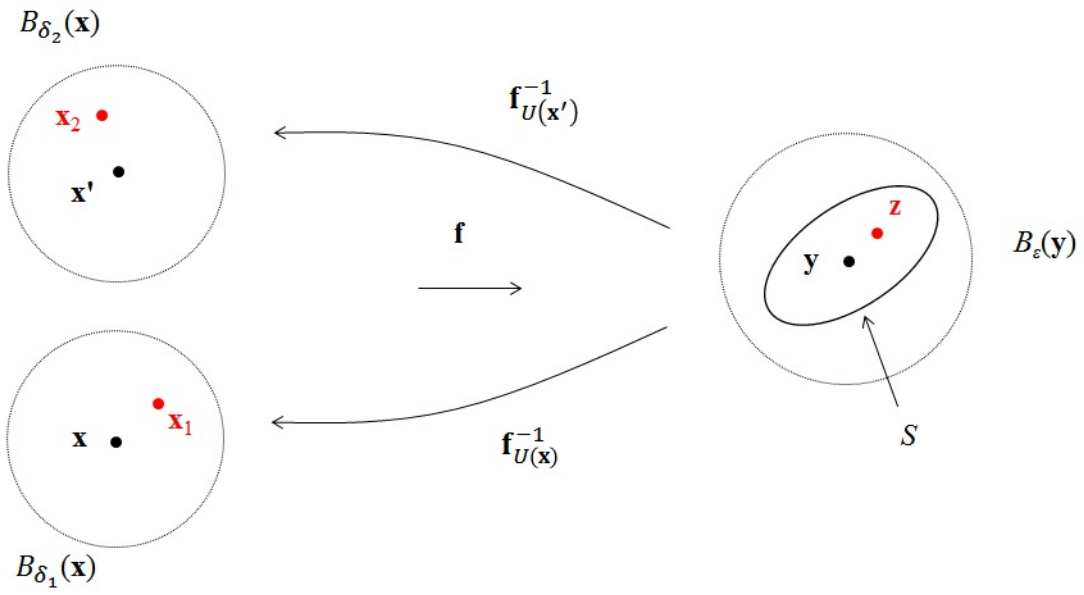
令 $S=\mathbf{f}^{-1}_{U(\mathbf{x})}(B_{\delta_1}(\mathbf{x}))\cap\mathbf{f}^{-1}_{U(\mathbf{x}')}(B_{\delta_2}(\mathbf{x}'))$

則 S 為 $\mathbf{y}$ 的鄰域

$\forall\ \mathbf{x}_1\in B_{\delta_1}(\mathbf{x})$，令 $\mathbf{z}=\mathbf{f}(\mathbf{x}_1)\in S$

$\exists\ \mathbf{x}_2\in B_{\delta_2}(\mathbf{x}')$ 使 $\mathbf{f}(\mathbf{x}_2)=\mathbf{z}=\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

$\Rightarrow B_{\delta_1}(\mathbf{x})\subset A$，$\therefore\ A$ 為 open



其中 $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}'), \mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)$

3. A 為 closed.

設 $\mathbf{x}$ 為 A 的匯聚點 (accumutation point, limit point)，並設 $\mathbf{x} \notin A$
$A \subset \Omega$，Ω 為 compact，$\therefore \mathbf{x} \in \Omega$
令 $B = \mathbf{f}(A)$，則 $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \notin B$
$\mathbf{x}$ 為 A 的匯聚點，$\exists$ 相異點列 $\{\mathbf{x}_n\} \subset A$，使 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$.
令 $\mathbf{y}_n = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$，$\mathbf{f}$ 連續，$\therefore \mathbf{y}_n \to \mathbf{y}$，當 $n \to \infty$.
又 $\mathbf{x}_n \in A, \therefore\ \exists\, \mathbf{x}'_n \in A, \mathbf{x}'_n \neq \mathbf{x}_n$，使 $\mathbf{f}(\mathbf{x}'_n) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{y}_n$
$\{\mathbf{x}'\} \subset A \subset \Omega$，依 $B-W$ 定理，$\{\mathbf{x}'_n\}$ 有收斂子點列，收斂到 $\mathbb{R}^n$ 中某點 $\mathbf{x}'$，Ω 為 compact，$\therefore \mathbf{x}' \in \Omega$，為了符號上的清晰，我們仍以 $\{\mathbf{x}'_n\}$ 表示此點列。

有兩種可能：

(i) $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}') = \lim_{n\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}'_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

違背了 $\mathbf{x} \notin A$ 的假設。

(ii) $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$

由 $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \neq 0$，依反函數定理，存在 $\mathbf{x}$ 的某鄰域 U 及 $\mathbf{y}$ 的某鄰域 V 使

$$\mathbf{f} : U \to V \text{ 為對射寫像}$$

但 $\mathbf{x}'_n \to \mathbf{x}' = \mathbf{x}$，$\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$，$\mathbf{x}'_n \neq \mathbf{x}_n$，$\mathbf{f}(\mathbf{x}'_n) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{y}_n$

又 $\mathbf{x}_n, \mathbf{x}'_n \in U$，當 n 夠大，違背了 $\mathbf{f}$ 在 U 上為 1-1 的特性。

結論：$\mathbf{x} \in A$，$\therefore A$ 為 closed.

4. A 既為 open 又 closed，$\therefore A = \phi$ 或 $A = \Omega$

5. 若 $A = \Omega$，則 $\partial\Omega \subset A$

   $\forall\ \mathbf{x} \in \partial\Omega,\ \exists\ \mathbf{x}' \in \Omega$ 使 $\mathbf{f}(\mathbf{x}') = \mathbf{f}(\mathbf{x})$

   $\mathbf{f}$ 在 $\partial\Omega$ 上為 1-1，$\therefore \mathbf{x}' \notin \partial\Omega$，換言之，$\mathbf{x}' \in \Omega^\circ$

   $\Rightarrow \mathbf{f}(\partial\Omega) \subset \mathbf{f}(\Omega^\circ)$.

   Ω 為 compact，$\mathbf{f}$ 在 Ω 上連續 $\Rightarrow \mathbf{f}(\Omega)$ 為 compact.

   任取 $\mathbf{b} \notin \mathbf{f}(\Omega)$，考慮

$$\varphi(\mathbf{x}) = |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}|^2 = \sum_{i=1}^{n} (f_i(\mathbf{x}) - b_i)^2,\ \mathbf{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$$

   φ 為 Ω 上的連續函數，Ω 為 compact，$\therefore \varphi$ 在 Ω 上取最大值。

   又由於 $\mathbf{f}(\partial\Omega) \subset \mathbf{f}(\Omega^\circ)$，此最大值發生在 Ω° 內，設 φ 在 $\mathbf{x}_0 \in \Omega^\circ$ 上取最大值，則

$$0 = \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)(f_i(\mathbf{x}_0) - b_i),\ j = 1, 2, \cdots, n \tag{7}$$

   (6) 式為 $f_i(\mathbf{x}_0) - b_i,\ i = 1, 2, \cdots, n$ 的一次聯立方程組，而 $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{b}$，故 (6) 式有非零解，依此，我們有 $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) = 0$

   這違背了 $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \neq 0\ \forall\ \mathbf{x} \in \Omega$ 的假設。

6. 因此，A 只能是空集合，即 : $\mathbf{f}$ 為 1-1，在 Ω 上。

   故反函數 $\mathbf{g}$ 在 Ω 上大域存在。

   又根據反函數定理，$\mathbf{g} \in C^1(\Omega)$.

Remark: 根據定理 15-1 的 Remark，若 $\mathbf{f} \in C^p(\Omega), p > 1$，則 $g \in C^p(\mathbf{f}(\Omega))$.

教學生涯點滴

其一：

這大域存在問題，是我當年在 Stanford 讀書時，自己問自己的問題。我好幾次教高等微積分，都把它當作習題，讓同學去挑戰。第一次出這問題那片刻，十分猶豫；心裡想，這未免也太難了吧！難道我在折騰學生？但又想，後生可畏，何妨試試。

台大，就是有這樣了不起的學生，你以為太難，可是偏偏就有學生可以提出解答，而且答得非常漂亮，比我原先的証明更簡潔有力。當你看到這樣的學生時，你看到的不只是個人的才華，更看到了我們未來的希望和光明。我在台大任教四十年，每年都看到幾位這樣的學生，讓我青春永駐，開心無比。

記得民國 87 年，我第一次接下高等微積分這門重課，於講完反函數定理後，在 101 大教室的黑板上寫下這個大域存在問題，幾天後，班上有三位同學提出解答，其中有一位女生，名叫吳君淳，答得最漂亮完整。上面的証明，應該就是她的想法，由於時隔十多年，又逢搬遷，她原來的証明，也被我弄丟了，依稀記得如此。以一個大一的學生 (她大一就直修高微)，而有如此深睿的火候，怎不叫人讚嘆！我把它陳述為定理，証明於上，並掛其名，一方面對反函數定理有所補充，一方面懷念、讚美這樣一位傑出的學生。

她是北一女的高材生，高三就來台大聽課。張海潮教授告訴我，那年他開線性代數，吳君淳下課趕來，常常課已進入相當階段。有一次，海潮教授在黑板上問了一個相當深度的問題，班上無人提解，正好君淳進來，教授請她上台，她看著問題，對教授說：我不會。教授稍做了提示，要她試試看，她試著試著，不久居然把問題解了，令教授印象深刻。

台大三年畢業後，她去了哈佛大學，許多教授無不期待一顆新星的誕生。

在一次閒談中，海潮教授告訴我，她已不再碰數學了，讓我有無限的哀傷。

窗外細雨霏霏，天地雲煙茫茫。醉月湖中夜鷺不知歸去，立在湖心亭上似入禪定。

垂垂柳枝，滴滴珠雨，寒鴨縮頸，錦鱗無蹤。

啊，燕子！怎麼也看不見妳那翻身點水的妙姿呢？

巍巍玉山，皚皚白雪，冬茶飄香，柑橘正甜。

啊，臘梅！怎麼竟沒聞到妳那歲寒飄逸的芬芳呢？

望著數學館的舊大樓，我想起台大第一年的服務課，腦中浮現一個清純瘦小的女孩，留著短髮，穿著白色上衣，帶著黑框眼鏡，手拿抹布，在 101 大教室認真擦拭的影子，不覺心痛落淚。

啊，夜鷺！你悟到了什麼？

但願燕子安好，臘梅無恙。

(以下文字，其二、其三，是夜鷺的感慨，其四是一則小故事，你可略過)

其二：

啊，同學！人生困頓難免，如何度過困頓，走過風風雨雨，才是人生精彩的內容。

我的小學歲月，十分辛酸。我曾被老師打昏在地；因為我交不起一塊五毛錢的甚麼費。我曾被老師用他的尖皮鞋，踢我小腿骨，頓時痛得尿失禁；因為寒流來襲，朝會上我冷得縮頸發抖，齒牙戰慄，站不直，沒精神，壞了四年乙班的美譽。我曾被老師用大毛筆在臉上塗鴉，額頭畫上一條夜盜蟲，左右兩頰分別書著害蟲二字；因為我的茶杯不小心掉落在地，喀咯一聲，破壞秩序。我曾被老師 ……，我曾經被老師 ……，啊！請恕我不忍多寫。

這些都沒有傷到我，因為我知道我沒做對不起天地良心的事，那是父母教我的簡單道理。眼淚風乾，日子還是要過，我照樣背著書包上學去。我沒告訴父母，讓他們操心，父母要養我們一群子女，已夠辛苦了，他們是鄉下農民，也無能為力 ……。我也沒記恨那些老師。不過，我覺得讀書很無趣，不如拿著鋤頭在田裡幹活，逍遙自在。水肥雖臭，卻不傷人；或見毒蛇，他卻怕人。我立志小學畢業後就要脫離苦海，到田裡工作。看布袋戲，是我童年最美好的回憶，戲裡的人物，善惡分明，很合我心。八魔燒濟公，火從八方來，眼看濟公深陷火海，逃竄無門。火勢瀰天，孤僧無援，糟糕！濟公倒下了，嗩吶聲音低沉，其音哀傷，看來已燒成了炭。就在那一刻，板鼓珠落，嗩吶悠揚，金光萬道，直上雲霄，濟公元真顯現，浮上了天空，是一尊佛！剎那間，魔火盡滅。哇！開心極了！戲台下歡欣一片。

老天不捨棄我，偏偏讓我走上讀書這條路，廣我的見聞，開我的智慧，啓我的心靈。我很感恩建國中學的讀書歲月，在那裏我碰到幾位非常傑出的好老師，以及那位讓我懷念終生的教育家 ¬¬—賀翊新校長，那氛圍孕育了我內心的理想，啟發我對人生的抱負。我今天能站在台大的講堂，面對全國最優秀的青年上課，無時不以感恩的心，回饋老天對我的垂愛。我衷心盼望，我們這塊土地上，能孕育出許多懷有抱負兼有人文精神的一流人才。我們的國運興隆，我們的文化源遠流長。

這些兒時不愉快的遭遇，對我並不是壞事，反而給了我很大的啟示 ——我常問那顆心！

什麼樣的一顆心，會那樣對待一個稚嫩的幼童？

什麼樣的一顆心，會那樣對待一個流鼻涕又冷得發抖的學生？

當我們看到一條狗躲在牆角發抖，都想給牠溫暖，何況那是人，是你的學生！為什麼？為什麼老師的那隻腳踢得下去？那是什麼樣的一顆心？

如果我將來當了老師，我將用什麼樣的心對待我的學生？我將用什麼樣的心對待我人生周遭的一切？

這問題常在我心中盤繞，年歲漸大，我漸漸若有所悟！我體會到生命的本質，此中有真意，欲辯已忘言。我看到絕大多數的人，那生命是扭曲的，參有很多雜質，隨識流轉，不能自主，可是他卻自以為是。

車拼又車拼，求名追利好滋味，為財為色費心機。一輩子醬在其中，那顆心也成了醬瓜，只知有醬味，不知有其它，很多人的生命如此。

我常想，如果父親是地方上的士紳，老師敢這樣子待我嗎？

農民子女，打赤腳，流鼻涕，臉生癬，頭長瘡，一身是土。功課不好，說話木訥，看來頭腦也不好。三月不洗澡，牙齒像蜜蠟，一無是處，打你是應該。我這樣解讀老師的那顆心，一顆極為世俗，嚴重缺愛的凡心！病了，老師的那顆心病了，病得很嚴重，可是老師渾然不知，更糟糕的是他們是小學老師，一生不知傷害了多少年幼的心靈。我的一位同學，爸爸以拖牛車謀生。某天下午無故缺課，隔天老師追問，不敢吐真言。為何不說！藤條抽屁股，幾十下，還是不說！可惡！再抽，看你說不說！整整一節課，屁股腫得像饅頭，不能坐椅。從此，那個坐位上再也見不到他的蹤影。

彼亦人子也，人情常附燄。可憐，那同學不姓蔣！人世，有說不盡的故事，令人心酸。

扭曲與雜質，多半來自他所處的時空思維，植入自己先天所秉賦的心田。一個時代的氛圍，例如昭和時代的軍國思想；和他所處環境，例如家庭所崇尚的價值觀，常常是影響一個人心靈的重要因素。猶如一個清淨的酒瓶，可盛以美酒，可是在那時空下，卻被裝上了糟粕。搖起來一樣嚦嚦有聲，包裝起來一樣美輪美奐，而瓶子本身不自知，自以為是一瓶美酒，隨境發酵，遍灑人間。

通常的人是不會打開瓶蓋，聞一聞自己的味道的。他也沒那個慧根，可以聞到自己的味到，好比口臭的人，聞不到自己口裡的味道一樣。願常常反省，一聞自己味道，而

驚訝自己原來並不芬芳的人，那是秉性深厚，有極高智慧的人，慢慢地，他就能化糟粕成美酒，芬芳人間。常人是沒有這個能耐的，或許有一天，他踢到了鐵板，痛得靈魂出竅，反觀自己，知道要努力，那也是老天垂愛啊。宗教在這個地方發揮很大的作用，使一部分有緣人，得以寄託生命，清洗雜質，得到內心的寧靜。

不過宗教都設了框框，用神話把人框在那裏，使守規矩；用糖果導引信徒上路，使知奮進。這本是聖人設教不得不的悲憫，凡人卻在框框與框框之間，爭個你死我活；糖果與糖果之間，比個高低。彼此不能相容，豈不可憐？

天地間第一等人，需要框框嗎？天地間第一等人，需要糖果才知努力嗎？

你要有那個良知和氣魄，做那個第一等人！不被框，不框人，不為什麼目的而認真做人。

人之將死也，靈明常浮現，回顧自己的一生，面對生命的終結，少有不恐懼的！宗教是很好的歸宿。那也只是安安心吧，一生昧著良心做事，傷害生靈無數，臨死才知恐懼，誰能救你？不過，臨終悟到一顆懺悔的心，老天慈悲，來生還是有救的。菩薩幫不了忙，還得自己救自己，就像你的學問要好，還得自己下功夫。

一個人的一生，內無愧於心，外無疚於神明，能創造價值，造福人間，光明磊落，孝親愛人，常存救世之心，悲憫苦難之人，何愁天地無處不是你的歸宿。

其三：

人生道上難行，有些框框是要人命的。

1975 年我到美國讀書，越戰剛結束，校園裡左派運動後勁正強，我當年也深受影響，讀了許多左派的書籍。有一部分留學生一頭栽進去，高舉旗幟，甚至穿起毛裝，一幅革命先鋒的模樣，雄赳赳，氣昂昂，走路有風。麥加朝聖回來，阿拉灌頂，若可乘雲駕霧，開口閉口為人民服務，打倒階級敵人，改造新世界。

如今，那偉大舵手躺在那裏，也沒人理他了。昨日的風，昨日的雲，已成過去；可是多少年青的生命都成了那風風雨雨，飄落大地，了無聲息？

可悲的是，那蒙古高原揚起的沙塵暴，瀰漫中華，久久不能清澈。天朦朧，地朦朧，日月星辰皆朦朧。心蒙塵，道蒙塵，古聖先賢盡蒙塵。那朦朧的大地，蒙塵的人性，不知何紀何代能綻放光芒，再創盛世文明？

浪滄之水不可濯纓，浪滄之水不可濯足。漁父啊，漁父！水中之魚可食否？

路迢遙，路迢遙。

布袋戲裡那老白闊出場，先咳幾聲，慢步駝腰，走到台前，然後道：

記得少年騎竹馬，轉眼變成老人翁

傳統宗教，框是慈悲的框，經過歷史的考驗，可以信賴。那裏面有許多高人，守衛著它的信眾，引領方向，博愛濟人，是安定社會的一股強大力量，令人尊敬。

政治的框框，叫人發狂，常是野心家翻雲覆雨的符咒。這種符咒通常都裹著理想的外衣，才能驅使年青人赴湯踏火。今日之所是，明日之所非。風雨過後，再回首，如果那命還在的話，已是老人翁矣。

er hm！er hm！er hm！嗯，嗯，Kar pui！

哎呀，差點被這口痰噎死！

老白闊慢步駝腰地步下了戲台。

其四：

1990 年我攜眷到美國訪問，順道去 Maryland 大學看我的弟弟，他們夫妻倆很熱情地接待我們，陪我們四處參訪。我看弟弟經常咳痰，那痰十分黏稠。我問他有沒去看醫生？他說有，可是無效，也不知該如何是好。我看他似有心事，便問究竟。

他說：我來這裡已經三年了，眼看學位遙遙無期，每次我向指導教授報告我的研究心得，他總是 say No!，我已成家，小孩就要出生，不知何年何月能出頭天，承擔這個家，壓力很大。

我聽完，建議他趕快換教授，你一定要離開這位教授才能見到陽光。我知道弟弟是個認真的人。

他接受我的建議，明告那位教授，那教授勃然大怒，出言不遜，揚言…..，要怎樣對他不利。但他意志已決，不接受威脅，勇敢的離開那實驗室。

三個月後，他打電話給我，感謝我的建言。他已找到一位很好的教授，很受肯定，工作順利，對未來充滿信心。那咳痰的問題也不藥而癒了。

Princeton 有一個極富盛名的教授，被稱 Genius Killer。能進 Princeton 的學生，都非等閒之輩，有些學生自命不凡，慕名拜在他門下。不久，教授給你一個問題，你認真研究，得到一點心得，就教於教授，結果兩三下就清潔溜溜，垂頭喪氣地走出教授辦公室。好，回去再想，不能再這樣丟臉。經過幾個月的努力，終於又悟到了一些心得，再找教授談，這次一定會得到教授的讚賞。照樣，兩三下就清潔溜溜，垂頭喪氣地走出教授辦公室。如是數次，驚覺自己在教授面前像一隻猴子，不堪一擊，信心盡失，從此不再碰數學。

人生阿，人生！不是你所遇到的每一個人都有菩薩心腸，名氣響亮的人，未必就是好的指導教授。你很努力，可是人家總是對你 say No!，你要有信心，不是你不好，你可能碰上怪咖。有一天，有一天！記住！你也要有勇氣對他 say No!，不再回頭！

人生道上暗礁重重，要懂得趨吉避凶。古人有一句話說：人有善願，天必從之。那個善願要常存於心，永不放棄，自能逢凶化吉，走過風風雨雨。

弟弟有一則小故事。他到 Maryland 大學之初，實驗室的頭頭是一位 Post Doctor，美國白人，平常趾高氣揚，自以為優越，很瞧不起你們這些東方來的劣等民族 (此人生命雜質不少，再多的阿們，也是枉然)。有一天，將近下午 5 點，他突然宣布，下班時間到了，馬上離開。弟弟正在收拾東西，5 點整，驚聞喀喳一聲，他走了，從外面把門鎖死。弟弟怎麼走出實驗室，我已記不清楚。

第二天，弟弟一早就到學校，等候那位大人，不久他果然來了。弟弟趨上前，用他的破英語劈頭就問：

Mr. Stone, do you know how to respect the others? If you don't know, let me teach you.

那 Stone 見弟弟一幅要揍人的樣子，臉色鐵青，急忙道：

No! No! No! Mr. Chen, please, please , please cease your anger, I, I, I think·····

實驗室中幾位印度留學生受盡 Stone 的欺負，隱忍許久，見狀無不開懷叫好。

從此那 Stone 先生，在走廊上碰到弟弟迎面而來，總把目光避開，不敢正視。

這個地方我倒很尊敬美國人的誠實，知道自己理曲。

請想想，如果 Stone 先生是現今的你或我，他會如何？值得我們深思啊！

上面的故事扯遠了，就當作苦讀高微的一點調心劑吧，你們當中很多人將來也會走上留學之路，或許有一天你也會碰上這樣的人。

做學問貴在熱情與持恆。因為熱情，你能樂在其中；因為持恆，你能深耕，開疆闢土。勤於灌溉，定能豐收。蘇東坡贈劉景文有如下的詩句：

一年好景君須記　正是橙黃橘綠時

辛勤耕耘，除草施肥，來到歲末，眼看一片橙黃橘綠，果實壘壘，何等開心！

農哥挑擔，趕赴市集，一路上想著：該如何為子女添新衣，為山妻購洗衣機，過年了，要買些魚肉孝敬父母，闔家團圓，真好！。啊，對了！酒，酒，酒，爸爸喜歡喝酒，帶兩瓶好酒 ·····

想著想著，那擔子隨著腳步韻律起落，農哥踩著節拍，竟不自覺地跟著哼起山歌來 ·····

其五：

2008 年 10 月 30 日，我收到如下的 email：

陳老師你好：

　　我是電信所的學生，之前學過一年的高等微積分。最近作題目，碰到一個問題想請教老師，去了老師辦公室三次，都沒找到老師，所以想先寄信，把我想問的題目寄給老師，看老師和石有空，我可以去找老師討論。

謝謝

學生　徐福得

我打開他的附件，內容如下：

$$S_i = P_i - \frac{1}{2}\sum_{j\in I_{-i}} P_iP_j + \frac{1}{3}\sum_{(j,k)\in I_{-i}} P_iP_jP_k - \frac{1}{4}\sum_{(j,k,l)\in I_{-i}} P_iP_jP_kP_l + \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\prod_{i=1}^{n} P_i,\ i = 1, 2, \cdots, n \tag{8}$$

$(x_1, x_2, \cdots, x_k) \in I_{-i}$ denotes $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$, chosen from node index set $\{1, 2, \cdots, n\} - \{i\}$.

我發現有下面的等式：

$$\sum_{i=1}^{n} S_i = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - P_i)$$

我的問題是：

$$n \text{ cube0} \le P_i \le 1,\ i = 1, 2, \cdots, n$$

利用式子 (8)，是否會 one to one and onto map 到 n simplex

$$\sum_{i=1}^{n} S_i \leq 1,\ S_i \geq 0.$$

我約了那位同學到我的辦公室交換意見，當 $n=2$ 時問題不難，當 $n=3$ 時，問題可以寫成

$$\begin{aligned} u &= x - \frac{1}{2}(xy+xz) + \frac{1}{3}xyz \\ v &= y - \frac{1}{2}(xy+yz) + \frac{1}{3}xyz \\ w &= z - \frac{1}{2}(xz+yz) + \frac{1}{3}xyz \end{aligned}$$

問：此寫像是否把 $Q=[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ one to one and onto map 到 $S=\{(u,v,w)|u+v+w\leq 1,\ u,v,w\geq 0\}$

我想利用反函數大域存在來証明它，不過光是計算那個 Jacobian $\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$ 就讓我覺得此路不通。$n=3$ 尚且如此，更何況任意的 n。

我一直也想不出什麼好辦法，只能給他一些建議，不知他後來怎麼處理他的問題。

三年後某一天的深夜，我又把這問題拿出來研究，靈光一閃，我終於看到了竅門，很高興傳 email 給他，可是如石沉大海，我想他也應該畢業了，或許出國深造，或許走進社會，不知在哪個地方駐腳，那 r96942059 台大電子郵址，似乎已沒有人再去開啟它。

每想及此，內心悵然，未能即時對他有所幫助，但願他終於找到解答。

我把這問題，放在習題裡，讓那些可畏的後生一展才華，或許你的解法會讓我自嘆不如呢！那時，請讓我把你的解法，寫進高等微積分的教科書裡，以嘉惠後進。

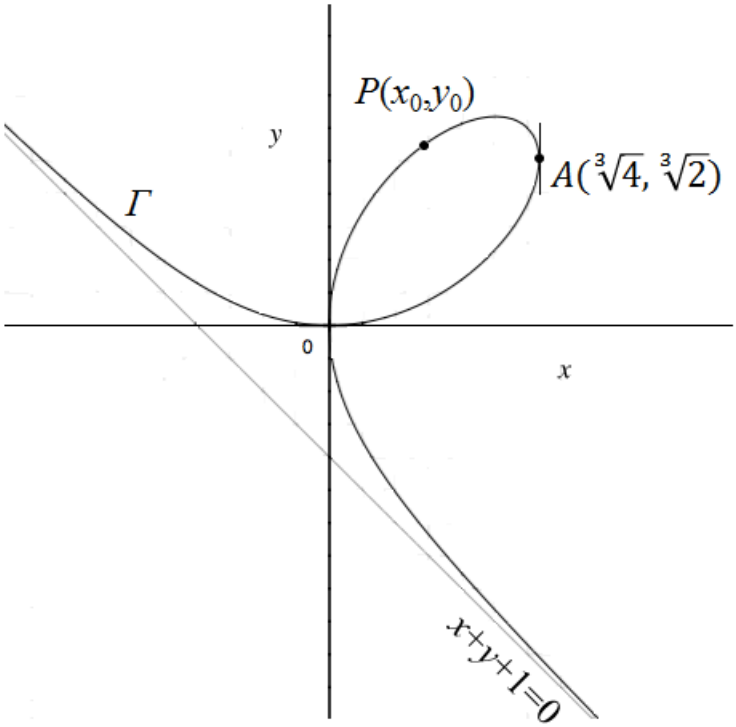
15.3 隱函數定理 (The Implicit Function Theorem)

1. 二變數情形

設 x, y 滿足方程式 $f(x,y)=0,\ \forall\ x,y \in \Gamma$
問：Γ 是否可以表成 $y=y(x)$ 的顯函數形式？

例如：$f(x,y)=x^3+y^3-3xy=0$

這是 Descartes 葉形線，其圖形 Γ 如下：



欲要求 Γ 可以表成：$y=y(x),\ \forall\ x \in \mathbb{R}$，是辦不到的事，顯函數只能局部地 (locally) 存在。

換言之，給定 $P(x_0,y_0) \in \Gamma$，只能問：

是否存在 $P(x_0,y_0)$ 的某鄰域 D 使得 $\Gamma \cap D$ 可以表成顯函數的形式。

即：是否存在 x_0 的某鄰域 $I_\delta(x_0)=(x_0-\delta, x_0+\delta)$，使 $\Gamma \cap \Omega$ 可以表成

$$y=y(x), \forall\ x \in I_\delta(x_0)$$

亦即：$f(x, y(x)) = 0,\ \forall\ x \in I_\delta(x_0)$

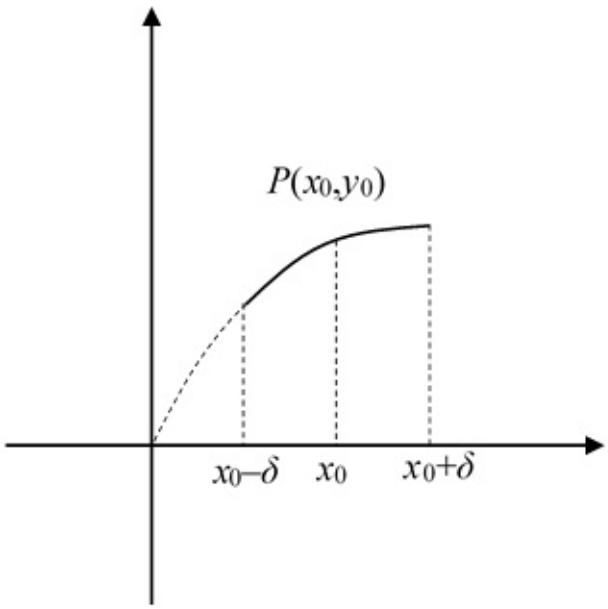
更進一步問：如果 $f \in C^1(D), y(x)$ 是否 $\in C^1(I_\delta(x_0))$？

<u>進一步的觀察</u>：

(i) 若 P 為 O 點，顯然辦不到。

(ii) 若 P 為 A 點，顯然也辦不到。

(iii) 除了 A, O 二點外，顯函數是局部存在的（如下圖所示）



A, O 二點有什麼特色？

先看 A 點：Γ 在 A 點有鉛直的切線，相應於 f，所顯示的為 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$

次看 O 點：Γ 在 O 點自我相交，相應於 f，所顯示的為 $\nabla f(x_0, y_0) = 0$

$$\nabla f(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

看來，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ 似乎應該是顯函數存在的保証。

今設 $y = y(x)$ 滿足

$$f(x, y(x)) = 0,\ \forall\ x \in I_\delta(x_0)$$

不妨大方地對 x 求導，根據 Chain Rule 有：

$$f_x(x, y) + f_y(x, y) \cdot y'(x) = 0,\ \forall\ x \in I_\delta(x_0)$$

由於 $f_y(x_0, y_0) \neq 0$，而 f 在 $P(x_0, y_0)$ 附近 $\in C^1$

$\therefore f_y(x, y) \neq 0$ 在 $P(x_0, y_0)$ 附近，故

$$y'(x) = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)} \text{ 在}x_0\text{點附近連續}$$

換言之：$f \in C^1(D)$，D 為 $P(x_0, y_0)$ 的某鄰域，則 $y \in C^1(I_\delta(x_0))$，存在這樣的 $\delta > 0$.

2. 三變數的情形

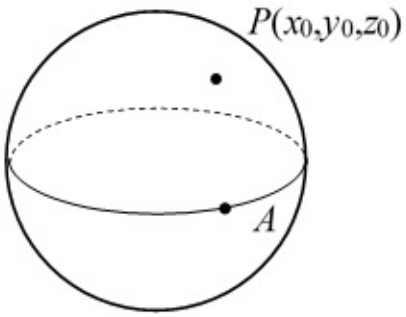
a. 單一條件

設 x, y, z 滿足方程式 $f(x, y, z) = 0,\ \forall\ (x, y, z) \in S$（隱函數形式）

問：S 是否可以表成 $z = z(x, y)$ 的函數形式？

例如：$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$

S 表單位球面。如二變數情形，欲將 S 表成 $z = z(x, y)$ 的函數形式是辦不到的，顯函數只能局部地存在。如圖，



當 $P(x_0, y_0, z_0)$ 落在上半球面 $(z > 0)$ 或下半球面 $(z < 0)$ 時，顯函數是存在的，當 P 為赤道 $(z = 0)$ 上的某點 A，則 S 在 A 點附近無法表成顯函數的形式。

A 點有什麼特性？它的切平面是鉛直的！相應於 f，所顯示的條件為：

$$f_z(A) = 0$$

反之，若 S 在 P 點附近可表成 $z = z(x, y),\ x, y \in B_\delta(x_0, y_0)$ 的函數形式，則

$$f(x, y, z(x, y)) = 0,\ \forall\ (x, y) \in B_\delta(x_0, y_0)$$

設 $f \in C^1$，在 P 點附近，上式兩邊分別對 x, y 偏導，得

$$f_x(x,y,z) + f_z(x,y,z) \cdot z_x(x,y) = 0$$
$$f_y(x,y,z) + f_z(x,y,z) \cdot z_y(x,y) = 0$$

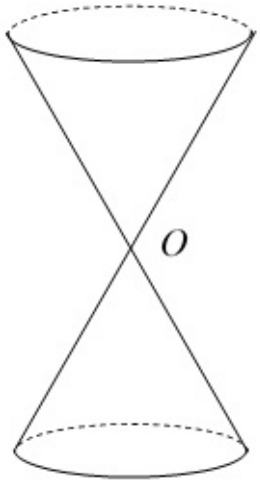
若 $f_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$，則 f_z 在 $P(x_0, y_0, z_0)$ 附近不為 0，故

$$z_x = -\frac{f_x(x,y,z)}{f_z(x,y,z)}$$
$$z_y = -\frac{f_y(x,y,z)}{f_z(x,y,z)}$$

$\Rightarrow z \in C^1$，在 (x_0, y_0) 點附近。

又如：$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$

此時 S 為一圓錐，如圖：



S 在 O 點附近無法表成顯函數的形式。

O 點有什麼特色？

曲面在 O 點自我相交！相應於 f 所顯示的條件為 $\nabla f(O) = 0$，而

$$\nabla f(O) = 0 \Rightarrow f_z(O) = 0$$

看來，$f_z(P) \neq 0$ 似乎是顯函數存在的保証。

b. 雙條件

設 x, y, z 滿足方程式

$$f_1(x, y, z) = 0 \text{ 及 } f_2(x, y, z) = 0$$

此二方程式分別表空間中二曲面 S_1 及 S_2，令 $\Gamma = S_1 \cap S_2$，則 Γ 表空間中一曲線，Γ 上的點即為此二方程式的共解。

今設 $P(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$

問：Γ 在 $P(x_0, y_0, z_0)$ 點附近是否可以表成 $y = y(x), z = z(x)$ 的顯函數形式？

換言之，是否存在 x_0 的某鄰域 $I_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 及函數 $y = y(x), z = z(x)$ 滿足 $y(x_0) = y_0, z(x_0) = z_0$ 且

$$f_1(x, y(x), z(x)) = 0 \tag{9}$$
$$f_2(x, y(x), z(x)) = 0 \tag{10}$$

$\forall\ x \in I_\delta(x_0)$

更進一步問：如果 $f \in C^1$，在 $P(x_0, y_0, z_0)$ 附近，那麼 $y(x), z(x)$ 可以好到什麼程度？它們是否 $\in C^1(I_\delta(x_0))$？

什麼條件可以確保上述問題安全無虞？

如果這樣的函數存在，(7), (8) 二式分別對 x 求導得

$$f_{1x} + f_{1y} \cdot y' + f_{1z} \cdot z' = 0 \tag{11}$$
$$f_{2x} + f_{2y} \cdot y' + f_{2z} \cdot z' = 0 \tag{12}$$

$\forall\ x \in I_\delta(x_0)$

將 (9),(10) 視為 y', z' 的聯立方程式，此聯立方程式在 x_0 點附近可解，若

$$\begin{vmatrix} f_{1y} & f_{1z} \\ f_{2y} & f_{2x} \end{vmatrix}_{(x_0, y_0, z_0)} \neq 0 \tag{13}$$

（注意，$f_1, f_2 \in C^1$，上行列式在 (x_0, y_0, z_0) 取值不為 0，則在 (x_0, y_0, z_0) 的某鄰域內取值不為 0）

看來，(11) 式似乎是顯函數存在的保障。事實的確如此，這就是隱函數定理的內

容。將之推廣到 $n+m$ 個變數：

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m) &= 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots & \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m) &= 0 \end{cases} \tag{14}$$

欲問：

(a) x_i 是否可以表成 $y_1, \cdots, y_m$ 的顯函數形式？
(b) $f_i \in C^1$，x_i 是否也 $\in C^1$？

令 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n), \mathbf{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$，(12) 式可以簡單表成：$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$

設點 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 滿足 $\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$，問：

(a) 在此點附近，$\mathbf{x}$ 是否可表成 $\mathbf{y}$ 的顯函數形式？
(b) 如果 $\mathbf{f} \in C^1$，$\mathbf{x}$ 是否也 $\in C^1$？

什麼條件可以確保上述問題安全無虞？

令 $J_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}_{(\mathbf{x},\mathbf{y})}$

若 $J_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$，則可保証上述問題安全無虞，這就是隱函數定理的簡單內容。

更精確的內容敘述如下：

<u>定理 **15-3**</u> 隱函數定理 (The Implicit Function Theorem)

設 E 為 $\mathbb{R}^{n+m}$ 中的開集，$\mathbf{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_n), f_i \in C^1(E), \mathbf{f} : E \to \mathbb{R}^n$，若 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in E$ 滿足 $\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ 且 $J_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$，則存在 $\mathbf{b}$ 的某鄰域 $B \subset \mathbb{R}^m$ 及唯一的函數 $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \cdots, g_n)$，滿足

(i) $\mathbf{g}(\mathbf{b}) = \mathbf{a}$ 且 $\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = 0, \ \forall\, \mathbf{y} \in B$

(ii) $g_i \in C^1(B), \ \forall\, i = 1, 2, \cdots, n$ (簡寫成 $\mathbf{g} \in C^1(B)$)

分析：

(a) 我們先來看 $\mathbb{R}^3$ 中雙條件的隱函數定理如何處理。

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) &= 0 \\ f_2(x,y,z) &= 0 \end{cases}$$

點 (x_0,y_0,z_0) 滿足此二條件，在此點附近 $f_1,f_2 \in C^1$ 且 $\begin{vmatrix} f_{1y} & f_{1z} \\ f_{2y} & f_{2z} \end{vmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)} \neq 0$.

欲將 y,z 在此點附近表成 x 的函數。令

$$\begin{cases} u &= f_1(x,y,z) \\ v &= f_2(x,y,z) \\ w &= x \end{cases}$$

$T:(x,y,z)\to(u,v,w)$，則 T 為 $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 的寫像，$T(x_0,y_0,z_0)=(0,0,x_0)$，其 Jacobian:

$$J(x,y,z)=\begin{vmatrix} f_{1x} & f_{1y} & f_{1z} \\ f_{2x} & f_{2y} & f_{2z} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_{1y} & f_{1z} \\ f_{2y} & f_{2z} \end{vmatrix}$$

$\therefore J(x_0,y_0,z_0)\neq 0$. 依反函數定理，存在 (x_0,y_0,z_0) 的某鄰域 U 及 $(0,0,x_0)$ 的某鄰域 V，使

$$T:U\to V \quad \text{為對射}$$

其反函數 $S:V\to U$ 存在且 $\in C^1$，
其中 $V\subset(u,v,w)$ space, $U\subset(x,y,z)$ space.

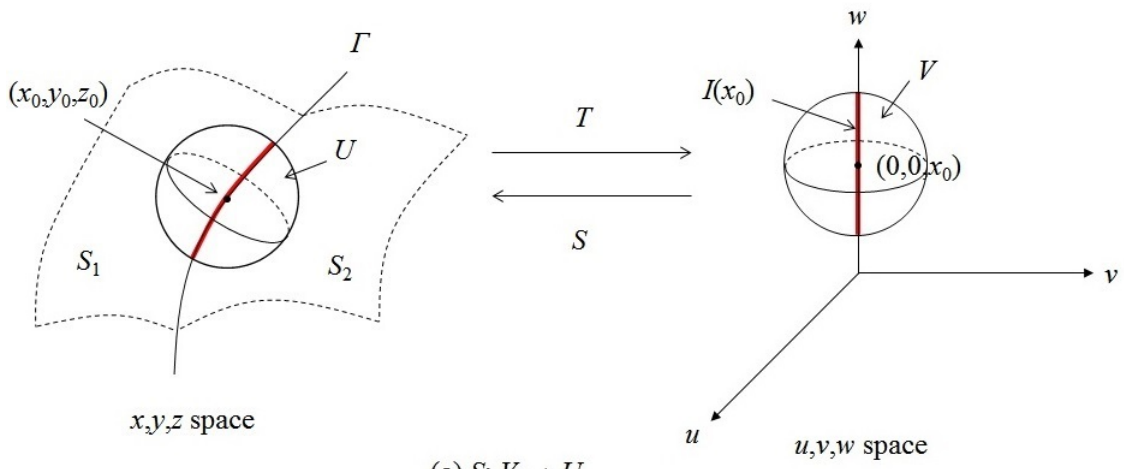
即：

$$x=x(u,v,w), y=y(u,v,w), z=z(u,v,w), x,y,z\in C^1(V). \tag{15}$$

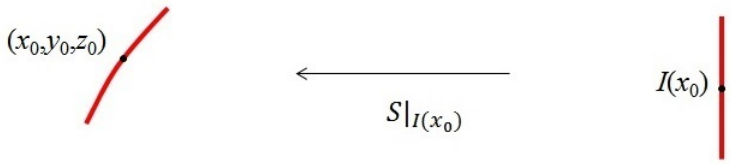
令 $I(x_0)=\{w|(0,0,w)\in V\}$，於 (14) 式中考慮 $u=v=0$ 即得：

$$y=y(0,0,w)=y(x), z=z(0,0,w)=z(x), x\in I(x_0), y,z\in C^1(I(x_0)).$$

上面的論述，圖示如下：



(a) S: $V \to U$



(b) S限定在$I(x_0)$上面的寫像

(b) 一般情形

令

$$\begin{cases} z_1 &= f_1(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m) \\ z_2 &= f_2(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m) \\ \vdots & \\ z_n &= f_n(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m) \\ z_1' &= y_1 \\ z_2' &= y_2 \\ \vdots & \\ z_m' &= y_m \end{cases} \tag{16}$$

令 $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \cdots, z_n), \tilde{\mathbf{z}} = (z_1', z_2', \cdots, z_m')$，則 (15) 式可寫成

$$\begin{cases} \mathbf{z} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \tilde{\mathbf{z}} &= \mathbf{y} \end{cases} \tag{17}$$

令 $T : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \to (\mathbf{z}, \tilde{\mathbf{z}})$ 為由 (16) 式所定的 $\mathbb{R}^{n+m}$ 到 $\mathbb{R}^{n+m}$ 之 C^1 寫像，則 $T(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{0}, \mathbf{b})$ (此式含 $\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{0}$)

且看 T 在 $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 點的 Jacobian:

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} & \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_m} \\ \hline & & & 1 & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} & & & \ddots & \\ & & & \mathbf{0} & & 1 \end{array}\right|_{(\mathbf{a},\mathbf{b})} = \left|\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array}\right|_{(\mathbf{a},\mathbf{b})} \neq 0$$

依反函數定理，$\exists$ $(\mathbf{0},\mathbf{b})$ 的鄰域 V 及 $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 的鄰域 U 及反函數 S 將 V 對射到 U

$$S \in C^1(V), S(\mathbf{0},\mathbf{b}) = (\mathbf{a},\mathbf{b})$$

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in U \Rightarrow (\mathbf{x},\mathbf{y}) = S(\mathbf{z},\tilde{\mathbf{z}}), (\mathbf{z},\tilde{\mathbf{z}}) \in V$$

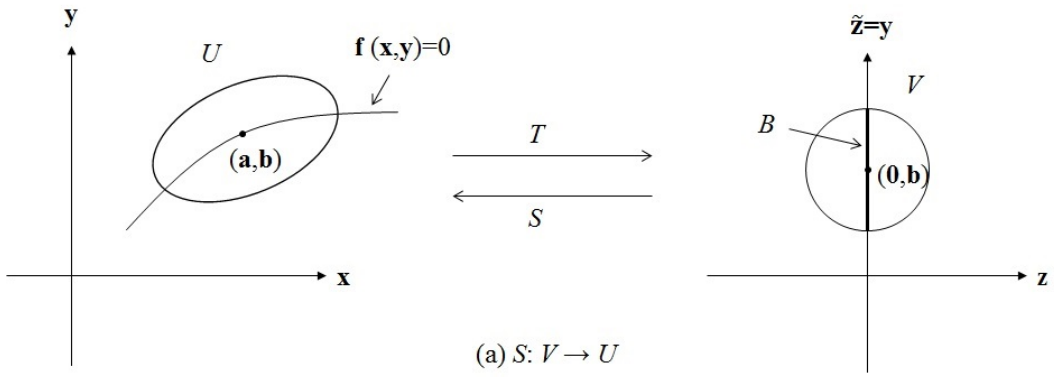
令 $B = V \cap \{z_1 = 0, z_2 = 0, \cdots, z_n = 0\}$，則 $(\mathbf{0},\mathbf{b}) \in B$，考慮 S 限定在 B 上面的行為：

$$S : B \to \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) | \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{0}\} \cap U$$

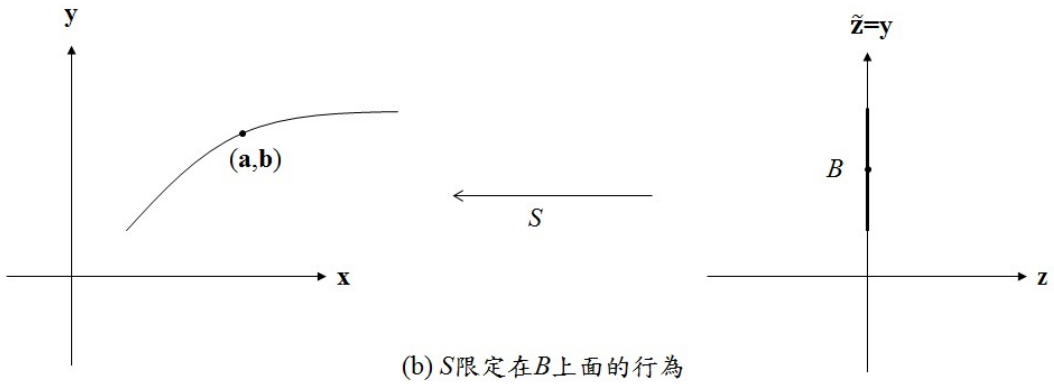
即得：

$$\mathbf{x} = S(\mathbf{0},\tilde{\mathbf{z}}) = S(\mathbf{0},\mathbf{y}) = \mathbf{g}(\mathbf{y}) \in C^1(B)$$

仿分析 (a)，上面的論述圖示如下：



(a) S: $V \to U$



(b) S限定在B上面的行為

Remark: 隱函數定理是由反函數定理導出，反函數定理中若 $\mathbf{f} \in C^p, p \geq 1$，則反函數 $\mathbf{g} \in C^p$(參見定理 15-1，Remark)，因此定理 15-3 中若 $\mathbf{f} \in C^p(E)$，則 $\mathbf{g} \in C^p(B), p \geq 1$

例 **1.** $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$，點 $(0,0,1)$ 滿足此方程式，問

(a) 在此點附近 z 是否可表此 $z = z(x,y)$ 的函數形式？x 是否可表成 $x = x(y,z)$ 的函數形式？

(b) 若可，其可微性如何？

分析：

(a) 令 $f = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 1$，依隱函數定理，欲問 z 在點 $(0,0,1)$ 附近是否可表成 $z = z(x,y)$ 的函數形式，只要檢驗 $f_z(0,0,1)$ 是否不為 0，而 $f_z = 3z^2 - 3xy$，$\therefore f_z(0,0,1) = 3 \neq 0$

故存在 $(0,0)$ 點的某鄰域 B 使 $z = z(x,y), (x,y) \in B.$，$z(0,0) = 1$。又 $f \in C^\infty, \therefore z \in C^\infty(B).$

(b) 欲解 x，看 $f_x(0,0,1)$ 是否不為 0

$f_x = 3x^2 - 3yz, \therefore f_x(0,0,1) = 0$

隱函數定理失敗了，無法透露任何訊息。

到底在 $(0,0,1)$ 附近 x 是否可以局部地表成 $x = x(y,z)$ 呢？

且看 f 在 $z = 1$ 平面上的行為，此時相應的 x, y 滿足方程式

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

此為 Descartes 葉形線，對此葉形線，在 $(0,0)$ 點附近，x 無法表成 $x = x(y)$ 的函數形式，因此，在 $(0,0,1)$ 點 x 無法表成 $x = x(y,z)$ 的函數形式。

例 **2.** $\begin{cases} x + y + uv &= 0 \\ uxy + v &= 0 \end{cases}$

(a) $x = y = 1, u = \sqrt{2}, v = -\sqrt{2}$ 滿足上聯立方程式，

問：在此點附近，u, v 可解否？如可，其可微性如何？

(b) $x = y = u = v = 0$ 也滿足此方程式，

問：在此點附近，u, v 可解否？如可，其可微性如何？

分析：

令

$$f(x,y,u,v) = x + y + uv = 0$$
$$g(x,y,u,v) = uxy + v = 0$$

則 $f, g \in C^p(\mathbb{R}^4),\ \forall\, p \geq 1.$

欲解 u, v，看

$$J_{u,v} = \begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & u \\ xy & 1 \end{vmatrix} = v - xy$$

(a) 於 $(1, 1, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$ 點，$J = -\sqrt{2} - 1 \neq 0$

依隱函數定理，在 x, y 平面上，存在 $(1, 1)$ 的某鄰域 B 使 $u = u(x, y), v = v(x, y)$ 滿足上列聯立方程組，又 $f, g \in C^\infty$ $\Rightarrow u, v \in C^\infty(B)$.

(b) 於 $(0, 0, 0, 0)$ 點，$J = 0$，隱函數定理無言以對！

到底 u, v 可否表成 x, y 的函數呢？

考慮 $ug - f$(聯立方程式中消去 uv 項) 得

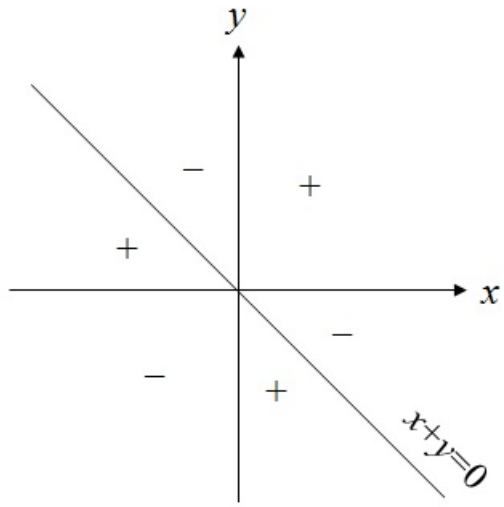
$$u^2xy - x - y = 0$$

或

$$u^2 = \frac{x+y}{xy},\ \text{當} xy \neq 0$$

上式左邊為完全平方項，故恆不為負，

上式右邊在 $(0, 0)$ 點附近變號六次，如圖所示：



此為不可能，

故不存在 $\delta > 0$ 使 $u = u(x, y)\ \forall\ (x, y) \in B_\delta(0, 0)$.

例 **3.** $P(x, t) = a_n(t)x^n + a_{n-1}(t)x^{n-1} + \cdots + a_0(t),\ a_i(t) \in C^p(-1, 1)$

設在 $t = 0$ 時多項式 $P(x, 0) = 0$ 有一單根 x_0，

問：是否存在 $\delta > 0$ 及函數 $x(t)$ 定義於 $(-\delta, \delta)$ 上，

滿足 $P(x(t), t) = 0,\ \forall\ t \in (-\delta, \delta)$？$x(t)$ 的可微性如何？

(換言之，即問：當多項式的係數平滑變動時，其單根是否隨著平滑變動？)

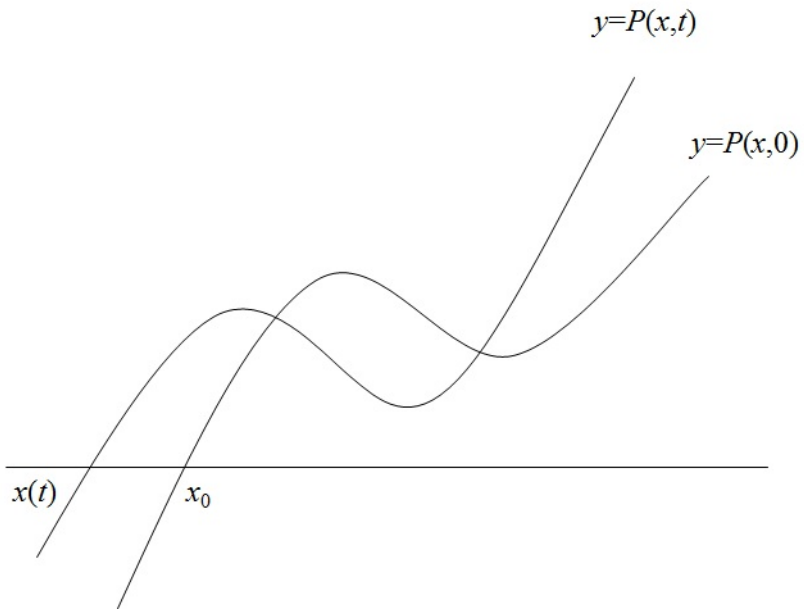
分析：x_0 為 $P(x, 0) = 0$ 的單根 $\Rightarrow P_x(x_0, 0) \neq 0$

依隱函數定理，$\exists\ t = 0$ 的某鄰域 $I_\delta(0)$ 及函數 $x = x(t)$ 滿足

$$x(0) = x_0 \text{ 且 } P(x(t), t) = 0$$

又 $a_i \in C^p(-1, 1) \Rightarrow P(x, t) \in C^p(\mathbb{R} \times (-1, 1))$

$\Rightarrow x(t) \in C^p(I_\delta(0))$



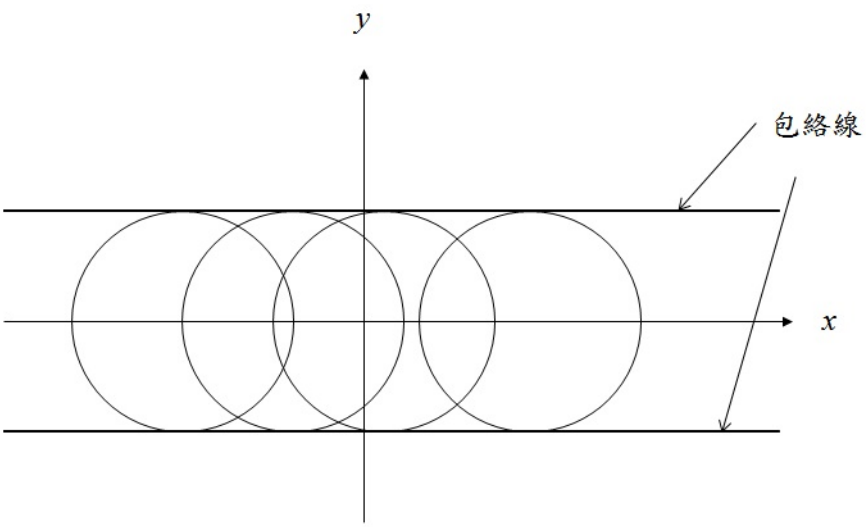
Remark: 若 x_0 為重根，上述結論不成立。

例如：$P(x,t) = x^2 + t$
$t = 0$ 時，$x = 0$ 為 $P(x,0) = 0$ 的重根；
$t > 0$ 時，$P(x,t) = x^2 + t = 0$ 無實根；
$t < 0$ 時，$P(x,t) = x^2 + t = 0$ 有二實根。

t 在 0 點附近微擾，向上微擾，根不見了，向下微擾，一根變兩根，顯然，不存在 $\delta > 0$ 及函數 $x(t)$ 定義在 $(-\delta, \delta)$ 上滿足 $P(x(t), t) = 0,\ \forall\, t \in (-\delta, \delta)$.

例 **4.** 包絡線 (面)(Envelope)

考慮 $C_t : (x-t)^2 + y^2 = 1,\ t \in \mathbb{R}$
當 t 由 $-\infty$ 跑到 $+\infty$，C_t 掃描出兩條直線 $y = \pm 1$
此二條直線就稱為 C_t 在 $\mathbb{R}$ 上的包絡線。



船在靜止的湖面上沿直線行駛，t 時刻前所造成漣漪為心在 $-vt$、半徑為 ct 的圓 (v 表船前進速度，c 表漣漪擴散速度)，諸漣漪在水面上會交出二曲線，線外為靜止水面，線內波濤起伏，此二直線就是諸漣漪的包絡線。

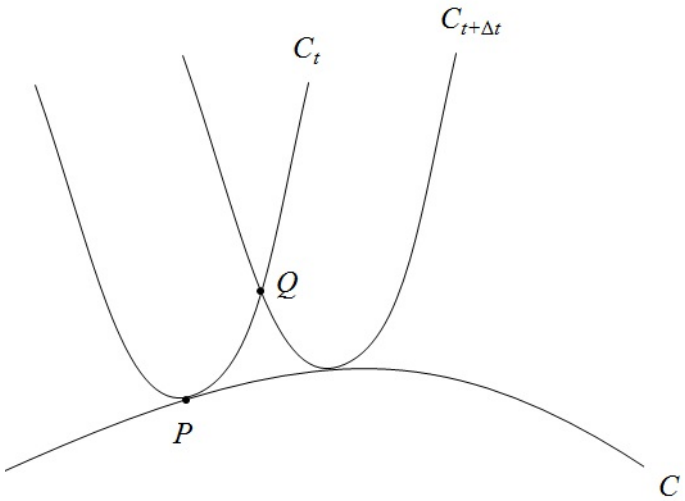
一般而言，給定平滑曲線

$$C_t : f(x, y, t) = 0,\ 0 < t < b$$

當 t 自 a 至 b 變動，諸 C_t 所掃描的曲線就稱為它們的包絡線 (Envelope)。

如何求此包絡線？

如圖，設 C 為包絡線，C_t 與 $C_{t+\Delta t}$ 相交於 Q，P 為 C_t 與 C 的切點



則 $Q \to P$ 當 $\Delta t \to 0$，而 Q 滿足 $f(x, y, t) = 0$ 且 $f(x, y, t + \Delta t) = 0$

$\Rightarrow Q$ 滿足

$$\frac{f(x, y, t + \Delta t) - f(x, y, t)}{\Delta t} = 0$$

令 $\Delta t \to 0$，得 P 點滿足

$$f_t(x, y, t) = 0$$

又 $P \in C_t$，$f(x, y, t) = 0$，故 P 滿足聯立方程式：

$$\begin{cases} f(x, y, t) &= 0 \\ f_t(x, y, t) &= 0 \end{cases} \tag{18}$$

依隱函數定理，若 f 及 $f_t \in C^p(E), E$ 為 $\mathbb{R}^3$ 中開集，$p \geq 1$，且

$$\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ f_{tx} & f_{ty} \end{vmatrix}_{(x_0, y_0, t_0)} \neq 0$$

則 $\exists\ t_0$ 的某鄰域 $I_\delta(t_0) = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ 及函數 $x(t), y(t) \in C^p(I_\delta(t_0))$，滿足 $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$ 及 (17) 式。

<u>包絡面</u>

a. 單一參數

設 $S_t : f(x, y, z, t) = 0, (x, y, z) \in \Omega, t \in (a, b)$ 表空間中 ((x, y, z) space) 以 t 為參數的曲面

當 t 由 a 跑到 b，諸 S_t 在空中掃描出一曲面 S，S 就稱為它們的包絡面。

一如上述包絡線的討論，S 上的點應滿足

$$\begin{cases} f(x, y, z, t) &= 0 \\ f_t(x, y, z, t) &= 0 \end{cases} \tag{19}$$

b. 二參數

設 $S_{u,v} : f(x, y, z, u, v) = 0, (x, y, z) \in \Omega, (u, v) \in (a, b) \times (c, d)$

表空間中 ((x, y, z)space) 以 u, v 為參數的曲面族，

當 u, v 在 $(a, b) \times (c, d)$ 上變動，$S_{u,v}$ 掃描出一曲面 S，稱為它們的包絡面。

一如二變數情形的討論，S 上的點應滿足

$$\begin{cases} f(x, y, z, u, v) &= 0 \\ f_u(x, y, z, u, v) &= 0 \\ f_v(x, y, z, u, v) &= 0 \end{cases} \tag{20}$$

有關包絡面的平滑問題就留給同學當習題吧。

例 **5.** 限制條件下的極值問題－ Lagrange Multiplier.

我們於第十章中利用幾何上的直觀導出 Lagrange 乘子法－限制條件下的極值問題。這個問題比較嚴謹的處理，應該是利用隱函數定理來推導，如今隱函數定理既已介紹如上，我們就來看看隱函數定理如何發揮它的功用。

a. 二變數函數

在 $g(x, y) = 0$ 的條件下求 f 的極值。

分析：設極值發生在 $P(x_0, y_0)$，f, g 在此點附近 $\in C^1$，並設 $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$

不妨假定 $g_y(x_0, y_0) \neq 0$，依隱函數定理，存在 x_0 的某鄰域 $I_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 及函數 $y(x) \in C^1(I_\delta(x_0))$ 滿足

$$y(x_0) = y_0 \text{ 且 } g(x, y(x)) = 0,\ \forall\ x \in I_\delta(x_0)$$

上式對 x 偏導得

$$g_x(x, y(x)) + g_y(x, y(x)) \cdot y'(x) = 0 \tag{21}$$

又 $f(x, y(x))$ 在 x_0 取極值 $\Rightarrow$

$$f_x(x_0, y(x_0)) + f_y(x_0, y(x_0)) \cdot y'(x_0) = 0 \tag{22}$$

特別地，(20) 在 x_0 點成立，即

$$g_x(x_0, y(x_0)) + g_y(x_0, y(x_0)) \cdot y'(x_0) = 0 \tag{23}$$

將 (21),(22) 視為 1，$y'(x_0)$ 的聯立方程式，它有非 0 解，故

$$\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}_{(x_0, y_0)} = 0$$

換言之，$< f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0) >$ 與 $< g_x(x_0, y_0), g_y(x_0, y_0) >$ 線性相依，故 $\exists\ \lambda$ 使

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$$

b. 三變數

(i) 單一限制條件

在 $g(x, y, z) = 0$ 的條件下，求 $f(x, y, z)$ 的極值。

分析：

設極值點發生在 $P(x_0, y_0, z_0)$，f, g 在此點附近 $\in C^1$，且 $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

不妨假設 $g_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$，依隱函數定理，$\exists\ (x_0, y_0)$ 的某鄰域 $B_\delta(x_0, y_0)$ 及函數 $z(x, y) \in C^1(B_\delta(x_0, y_0))$ 滿足

$$z(x_0, y_0) = z_0 \text{ 且 } g(x, y, z(x, y)) = 0,\ \forall\ (x, y) \in B_\delta(x_0, y_0)$$

上式分別對 x, y 偏導得

$$g_x(x, y, z(x, y)) + g_z(x, y, z(x, y)) \cdot z_x(x, y) = 0 \tag{24}$$

$$g_y(x, y, z(x, y)) + g_z(x, y, z(x, y)) \cdot z_y(x, y) = 0 \tag{25}$$

$\forall\ (x, y) \in B_\delta(x_0, y_0)$

又 $f(x,y,z(x,y))$ 在 (x_0,y_0) 取極值 $\Rightarrow$

$$f_x(x_0,y_0,z_0)+f_z(x_0,y_0,z_0)\cdot z_x(x_0,y_0)=0 \tag{26}$$
$$f_y(x_0,y_0,z_0)+f_z(x_0,y_0,z_0)\cdot z_y(x_0,y_0)=0 \tag{27}$$

特別地，(23),(24) 對 (x_0,y_0) 成立：

$$g_x(x_0,y_0,z_0)+g_z(x_0,y_0,z_0)\cdot z_x(x_0,y_0)=0 \tag{28}$$
$$g_y(x_0,y_0,z_0)+g_z(x_0,y_0,z_0)\cdot z_y(x_0,y_0)=0 \tag{29}$$

將 (25),(27) 看成 $1, z_x(x_0,y_0)$ 的聯立方程式，它有非 0 解，故

$$\begin{vmatrix} f_x & f_z \\ g_x & g_z \end{vmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)}=0 \tag{30}$$

同理，(26),(28)$\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)}=0 \tag{31}$$

(29),(30)$\Rightarrow \exists\ \lambda$ 使

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0)=\lambda\nabla g(x_0,y_0,z_0)$$

(ii) 雙限制條件

在 $g(x,y,z)=0$ 及 $h(x,y,z)=0$ 的條件下，求 $f(x,y,z)$ 的極值。

分析：

設極值點發生在 $P(x_0,y_0,z_0)$，f,g,h 在此點附近 $\in C^1$，

且 $\nabla g(x_0,y_0,z_0), \nabla h(x_0,y_0,z_0)$ 線性獨立，

由

$$\nabla g(P)=(g_x(P),g_y(P),g_z(P))$$
$$\nabla h(P)=(h_x(P),h_y(P),h_z(P))$$

兩向量線性獨立 $\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} g_x & g_y \\ h_x & h_y \end{vmatrix}_{(P)},\ \begin{vmatrix} g_y & g_z \\ h_y & h_z \end{vmatrix}_{(P)},\ \begin{vmatrix} g_z & g_x \\ h_z & h_x \end{vmatrix}_{(P)}$$

三者中，至少有一個不為 0。

不妨設

$$\begin{vmatrix} g_x & g_y \\ h_x & h_y \end{vmatrix}_{(P)} \neq 0$$

依隱函數定理，存在 x_0 的某鄰域 $I_\delta(x_0)$ 及函數 $y(x), z(x) \in C^1(I_\delta(x_0))$ 滿足

$$y(x_0) = y_0, z(x_0) = z_0 \text{ 且}$$
$$g(x, y(x), z(x)) = 0, h(x, y(x), z(x)) = 0, \ \forall\ x \in I_\delta(x_0)$$

上二式分別對 x 求導，得

$$g_x + g_y \cdot y' + g_z \cdot z' = 0, \ \forall\ x \in I_\delta(x_0) \tag{32}$$
$$h_x + h_y \cdot y' + h_z \cdot z' = 0, \ \forall\ x \in I_\delta(x_0) \tag{33}$$

又 $f(x, y(x), z(x))$ 在 x_0 點取極值 $\Rightarrow$

$$f_x(x_0, y_0, z_0) + f_y(x_0, y_0, z_0) \cdot y'(x_0) + f_z(x_0, y_0, z_0) \cdot z'(x_0) = 0 \tag{34}$$

特別地，(29),(30) 對 (x_0, y_0, z_0) 成立：

$$g_x(x_0, y_0, z_0) + g_y(x_0, y_0, z_0) \cdot y'(x_0) + g_z(x_0, y_0, z_0) \cdot z'(x_0) = 0 \tag{35}$$
$$h_x(x_0, y_0, z_0) + h_y(x_0, y_0, z_0) \cdot y'(x_0) + h_z(x_0, y_0, z_0) \cdot z'(x_0) = 0 \tag{36}$$

將 (33),(34),(35) 三式視為 $1, y'(x_0), z'(x_0)$ 的聯立方程式，它有非 0 解，故

$$\begin{vmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \\ h_x & h_y & h_z \end{vmatrix}_{(x_0, y_0, z_0)} = 0$$

$\Rightarrow \exists\ \lambda, \mu$ 使

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0) + \mu \nabla h(x_0, y_0, z_0).$$

上面的例子看懂了，一般情形的處理就蘊藏其中，無需多言，且讓我們喝杯茶吧。

（第十五章全文完）

102學年度高等微積分(下) 習題十五

1. 反函數定理中假設"$f \in C^1(B_\delta(a)),\ \delta > 0$" 條件不可廢，且看$n = 1$的情形，令$f(t) = t+2t^2 \sin \dfrac{1}{t}, t \neq 0, f(0) = 0$。試驗證：$f'(0) = 1 \neq 0$、$f'$在$(-1, 1)$上有界，但$f$在$t = 0$點附近任意小的鄰域上都不是1-1。

2. 設$1 + x_1 + x_2 + x_3 \neq 0$，$f = (f_1, f_2, f_3)$，$f_i(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{x_i}{1 + x_1 + x_2 + x_3}$，$i = 1, 2, 3$。
   (a) 試證：$J_f(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{1}{(1 + x_1 + x_2 + x_3)^4}$；
   (b) 試證：f爲1-1、並求f^{-1}。(Apostal # 7.2, 1957版)

3. $\begin{cases} u = x + xyz \\ v = y + xy \\ w = z + 2x + 3z^2 \end{cases}$ 此寫像把原點映至原點，問：在原點附近，x, y, z可否表成u, v, w的函數？如可，其可微性如何？

4. $\begin{cases} u^3 + vx + y = 0 \\ v^3 + uy - x = 0 \end{cases}$，試討論$u, v$在$(0, 0)$及$(1, 1)$兩點附近的可解性及其可微情況。

5. $u = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$、$v = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$，問$x, y$是否可以局部地表成$u, v$的函數？

6. $z^3 + (x^2 + y^2)z + f(x, y) = 0$，$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$，$f(0, 0) \neq 0$。問：在$(0, 0)$點附近$z$是否可以局部地表成$z = z(x, y)$的函數形式？如可，其可微性如何？又$f(0, 0) \neq 0$這條件可以去掉嗎？

7. 試證：矩陣的係數平滑的變動時，其固有值及單位固有向量(eigenvalue and unit eigenvector)亦隨之平滑的變動，更精確的說：設$a_{ij}(t) \in C^p$，$p \geq 1$，$i.j = 1, 2, \cdots, n$，$A = [a_{ij}]$，考慮$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$，在$t = 0$時有單根之eigenvalue $\lambda_0 > 0$，及其相應之一維eigenvector $\mathbf{x}_0$、$\|\mathbf{x}_0\| = 1$。試證：存在t_0的某鄰域$(-\delta, \delta)$及函數$\lambda(t)$、向量$\mathbf{x}(t) \in C^p(-\delta, \delta)$、$\|\mathbf{x}(t)\| = 1$，滿足$\lambda(0) = \lambda_0$、$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$且$A\mathbf{x}(t) = \lambda(t)\mathbf{x}(t)\ \forall t \in (-\delta, \delta)$。

8. 給定方程式：
$$\begin{cases} xy^2 + xzu + xv^2 = 3 \\ yzu^3 + 2xv - u^2v^2 = 2 \end{cases}$$
   點$(x, y, z) = (1, 1, 1)$、$(u, v) = (1, 1)$滿足此方程式，問：在此點附近，u, v可否表成x, y, z的函數？如可，試求$\dfrac{\partial v}{\partial y}(1, 1, 1)$之值。

9. $f(x, t) \in C^1$，當$t = t_0$時，$f(x, t_0)$在x_0點取local max。問：當t微小變動時，f是否恆在x_0點附近取local max？如爲否定，請對f給適當條件以確保$\exists\delta > 0$使$f(x, t)$在x_0點附近$x(t)$點取local max，且$x(t)$在$(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$上連續。
   如欲要求$x(t) \in C^1(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$，則條件又如何？

10. $f(x, y, t)$在$[a, b] \times [c, d] \times (-\delta, \delta)$上連續，當$t = 0$時，$\min_y \max_x f(x, y)$發生於$(x_0, y_0)$點，當$t$作微小變動時，$\min_y \max_x f(x, y, t)$發生於$(x(t), y(t))$。問：$x(t), y(t)$是否爲$t$的連續函數？若否，請給適當條件以確保之。
    如欲要求$x(t), y(t) \in C^1$在$t = 0$點附近，則條件又如何？

11. $A(t)=[a_{ij}(t)]$爲$n\times n$方陣，$a_{ij}(t)=a_{ji}(t)\in C^1(-\delta,\delta)$，若$t=0$時$A(0)$可對角化，即存在orthogonal matrix $P=[p_{ij}]$使$PA(0)P^{-1}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix}$、$\lambda_i\neq\lambda_j$當$i\neq j$。試證：$A(t)$在0點的某鄰域$(-\delta,\delta)$上恆可對角化，且$p_{ij}(t)$、$\lambda_i(t)\in C^1$在$t=0$點附近。

12. (徐得福，$n=2$)
$$\begin{cases}u=x-\dfrac{1}{2}xy\\ v=y-\dfrac{1}{2}xy\end{cases}\text{，}\mathbf{f}:(x,y)\to(u,v)\text{。}$$
試證：$\mathbf{f}$把$Q=[0,1]\times[0,1]$對射到$S=\{(u,v)|u+v\leq 1,u>\geq 0,v\geq 0\}$。

13. (*) (徐得福，$n=3$)
$$\begin{cases}u=x-\dfrac{1}{2}(xy+xz)+\dfrac{1}{3}xyz\\ v=y-\dfrac{1}{2}(xy+yz)+\dfrac{1}{3}xyz\\ w=z-\dfrac{1}{2}(xz+yz)+\dfrac{1}{3}xyz\end{cases}\text{，}\mathbf{f}:(x,y,z)\to(u,v,w)\text{。}$$
試證：$\mathbf{f}$把$Q=[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$對射到$S=\{(u,v,w)|u+v+w\leq 1,u,v,w\geq 0\}$。
$n=3$想通了，任意n的解法就蘊藏其中。

14. (*) 2013年7月22日我接到電機四李念澤同學的e-mail問題：

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,\cdots x_n) &= x_1(1-x_2)(1-x_3)\cdots(1-x_n)\\ &+ (1-x_1)x_2(1-x_3)\cdots(1-x_n)\\ &\vdots\\ &+ (1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_{n-1})x_n\end{aligned}$$

$0\leq x_i\leq P_i$，$0\leq P_i\leq 1$。
我的觀察：f的極值點應該發生在邊界上，並且是頂點。想請教老師該如何處理？
請你也來想一想，試就$n=2,3$，回答念澤的問題。$n=3$想通了，一般的n就迎刃而解。念澤後來找到方法，證明他的觀察是對的。

後　　語

偉哉！人類文明。蕩蕩呼！近代數學。妙哉！高等微積分！

由兩個不能問的事物---0 與 1， 而有整數系及四則運算； 由整數系而有有理數系; 由有理數系而有實數系的建構; 實數系具完備性而有連續函數諸性質，由此而有微積分基本定理，開啟了近代科學文明，改變了人類生活方式。何其有幸，能活在這個時代，何其有幸，能修這門課，在短短的一年內，能了解文明誕生的艱辛，能吸收消化前人數百年的智慧結晶，能看到許多睿智之士，一展長才，提出新觀念、新思維，為人類文明綻放異彩。

子曰：不學詩，無與言。

套用 孔子這句話：不學高等微積分，無與談數學。恭喜你修畢了這門課，恭喜你打造出一支龍泉寶劍，從此，可以進出江湖，不用害怕。那習題是煉劍的火爐，溫度不低，你要有耐心，好好的做，才能煉出一把好劍，興之所至，還可以舞上一段三才劍法：且看飛虹橫江，擎起玉柱；再看玉女送書，天邊掛月；回頭又來個龍躍天門，丹鳳朝陽。好不快哉！幾年前，物理系蔡李承同學，問我一個問題：

Can a set of Lebesgue measure zero be represented as the countable union of Jordan content zero sets？

我直覺地認為不對，但一時也想不出反例來，建議他往 Cantor type set 尋覓，三個禮拜後，他寫了兩頁文稿給我，裡面是他自己造的一個反例。學了一年高等微積分而能問這樣的問題，能沉潛深思，挑戰困難，終於悟得三昧，造出反例。論述精妙，劍法高超，實在叫人讚嘆！我在台大經常會看到這樣的學生，這塊土地上一定會出世界一流的人才，我深信著。

這個講義和一般的數學課本很不一樣，我認為數學課本不應該只是定義定理的堆砌，學問思想是活的，每一個人寫書應該展現自己的風格，用心靈和學生對話，我希望傳遞我對數學的看法和品味；簡繪了數學發展的大脈，希望年青人知道為什麼要學這些東西，了解它的歷史背景和艱難處，並介紹那些可敬的拓荒者，希望對年青人有所啟示。其間並談及一些人生問題，雖非數學內涵，不過，我認為做為一個人，不去思索這些問題，糊塗一生，實在冤枉。人活在世，除了謀生的專業學問之外，生命要有所寄託，有價值的追尋，人應該要有這樣的情懷，生命才有內涵。這些話就當作我和你們的聊天，輕鬆地聽，認真地想，對你不會有害。

有些定理，我不厭其煩，介紹了不同的證明。同樣的問題，不同的觀點有不同的巧妙，各有千秋，值得品味學習，希望對同學有所啟發。第十二章形上觀微積分基本定理，則是一種數學哲學，用它來統觀相關定理，使你對數學有形而上的體認。但數學不是物理，物理可以有形上觀的原理，藉它來統籌物理諸律。數學不能這樣，統觀歸統觀，只是方便的法門，散度定理、Stokes 定理及 Gauss Bonet 定理等，各有各的證明，風馬牛不相及。誰能引進一種空間的度量和其上的微分、積分概念，把這些定理統一起來，他將青史留名。這樣的定理可以用一句話來形容---It is great！

請同學了解，It is difficult 並不等於 It is great，The Riemann conjecture is difficult，但我不知道它是否 great？ 能夠稱得上 great 的定理非常稀少，它是一種大開大闔的提煉；是一種人跟上帝之間的對話；是一種為生民立命，為天地立心的壯舉。說不定你們當中會出這樣的人才，寫下這 great 定理呢！

這門課能在網路上和大家見面，要感謝台大科學教育中心的籌劃，其中林怡文小姐的督導，物研所辛柏伸助教 (Chapter 1---8， 赴美深造) 數研所李奇澔助教 (Chapter 9---15) 的打字、編圖，以及那幾位不知名的工作人員，謝謝他們的用心。

我也想對修這門課感到障礙的同學說幾句話，這門課每年總有那麼多同學不及格，一修、再修、甚至又修，這背後有多少喪氣的青年和心酸的父母？

年青人，不要喪氣。我在美國遇見一位中年婦人，兒女都已上大學了，她又回到大學修普通物理，她說：這門課是我的痛，一直讀不好，見到它就怕，我想好好地面對自己。她每一節課都提前五分鐘到教室，坐在第一排的正中央，聚精會神地上課，回家後馬上把今天上課的內容吸收消化，有所疑問，一定請教老師，老師交代的習題一定努力完成，遇到困難，一定請問助教，慢慢地，他讀出了味道，第一次期中考，出她意料，竟然是全班最高分。啊！這怎麼能？我居然可以把物理讀得這麼好！真是太棒了！從此她拾回信心，不但不再怕物理，而且喜歡物理。學期結束，老師特別在班上讚美她，她改變了自己的人生。

啊，同學！一個人肯下這樣的決心，沒有修不過高微的道理，不但高微難不倒你，人生的關關卡卡，也難不倒你，曾經滄海者難為水，正是這個道理。天下最讓父母開心的事，莫過於子女的成才。抬頭前進吧，年青人！

既使再好的學生，也有令人嘆息的境遇。幽蘭雖香，難歷風雨，信鴿善飛，羽斷關山。想來，要成就一個人，是多麼的不容易！啊，同學！鑽石不經琢磨，

不會發亮。境遇，是老天給人的功課，如何從逆境中成長，卻是人生可詩可歌的故事。幾年前，數學系學生的畢業典禮，要我說幾句話，我唱了一首歌，祝福他們。那歌的歌詞如下：

大江婉蜒曲折　　歷經重山阻隔

瀑下千仞崗　　浪捲萬里崖

漁唱夕陽紅　　稻舞平野青

漁唱夕陽紅　　稻舞平野青

高山靜默無語　　任憑雪封雨淋

寒風出勁柏　　絕壁有孤松

花開溪澗香　　獸潛山林深

花開溪澗香　　獸潛山林深

大江有自強不息的精神，高山有厚德載物的美德，一乾一坤，涵養萬物，有德君子，其敬法之。

願我們的國運昌隆，願天下有才華的年青人能懷有抱負，得其所安，站上舞台，高歌一曲，綻放光芒，寫下歷史新頁。