概率论与数理统计作业卷（二）

一、 填空题

1. 一个袋中有编号为 1,2,3,4,5 的五指球，在其中任取 3 只，以 X 表示取出的 3 只球中的最大号码，则 X 的概率分布为 ____________

解：若最大号码为 k，则另外两只球只能在编号为 1,2,...,k-1 的 k-1 只球中取出，故
$PX=k=\frac{C_{k-1}^2}{C_5^3}=\frac{(k-1)(k-2)}{20},(k=3,4,5)$，故 X 的概率分布为

X	3	4	5
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$

2. 设离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\}=b\lambda^k,(k=1,2,3,\ldots)$ 且 $b>0$，则 $\lambda=$ ____________

解：由分布律规范性得 $\sum_{k=1}^{\infty} b\lambda^k=b\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k=b\frac{\lambda}{1-\lambda}=1 \quad\Rightarrow\quad \lambda=\frac{1}{1+b}$

3. 某人进行射击，设每次射击的命中率为 0.02，独立射击 400 次，至少击中两次的概率为 ____________

解：将一次射击看成是一次试验，设击中的次数为 X, 则 $X\sim b(400,0.02)$. X 的分布律为
$P\{X=k\}=C_{400}^k 0.02^k 0.98^{400-k},(k=0,1,\cdots,400)$
故所求概率为

$$\begin{aligned}P\{X\geq 2\}&=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}\\&=1-0.98^{400}-400\times 0.02\times 0.98^{399}=0.9972\end{aligned}$$

4. 一个靶子是半径为 2m 的圆盘，设击中靶上任一同心圆盘上的点的概率与该圆盘的面积成正比，并设射击都能中靶，以 X 表示弹着点与圆心的距离，则随机变量 X 的分布函数为 ____________

解：若 $x<0$，则 $\{X\leq x\}$ 是不可能事件，于是 $F(x)=P\{X\leq x\}=0$.

若 $0\leq x\leq 2$，由题意 $P\{0\leq X\leq x\}=kx^2$, k 是某一常数，为了确定它的值，取 $x=2$，有 $P\{0\leq X\leq 2\}=4k$，但已知 $P\{0\leq X\leq 2\}=1$，故 $k=\frac{1}{4}$, 即

$$P\{0\leq X\leq x\}=\frac{x^2}{4}$$

于是

$$F(x)=P\{X\leq x\}=P\{0\leq X\leq x\}+P\{X<0\}=\frac{x^2}{4}$$

若 $x\geq 2$，则 $\{X\leq x\}$ 是必然事件，于是 $F(x)=P\{X\leq x\}=1$.

综上所述，X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{x^2}{4}, & 0\leq x\leq 2\\ 1, & x\geq 2\end{cases}$$

5. 某地区一个月内发生交通事故的次数 X 服从参数为 λ 的泊松分布，据统计资料知，该地区一个月内发生 8 次交通事故的概率是发生 10 次交通事故的 2.5 倍，则一个月内最多发生 2 次交通事故的概率为 ____________

解：由题意 $P\{X=8\}=2.5P\{X=10\}$，即 $\frac{\lambda^8 e^{-\lambda}}{8!}=2.5\times\frac{\lambda^{10}e^{-\lambda}}{10!} \quad \Rightarrow \quad \lambda=6$

故 $P\{X\le 2\}=\sum_{k=0}^{2}P\{X=k\}=\frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!}+\frac{\lambda^1 e^{-\lambda}}{1!}+\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}=25e^{-\lambda}=25e^{-6}\approx 0.062$

二、 选择题

1. 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 是某两个随机变量的分布函数，为使 $F(x)=aF_1(x)-bF_2(x)$ 成为某一随机变量的分布函数，在下列给定的各组数值中应取 ____________

$(A)a=\frac{3}{5},b=-\frac{2}{5}$　　$(B)a=\frac{2}{3},b=\frac{2}{3}$　　$(C)a=\frac{1}{2},b=-\frac{3}{2}$　　$(D)a=-\frac{1}{2},b=\frac{3}{2}$

解：由分布函数规范性得 $F(+\infty)=aF_1(+\infty)-bF_2(+\infty)=a-b=1$　　故应选择 (A)

2. 设随机变量 X 具有对称的概率密度，即 $f(x)=f(-x)$，则对任意 $a>0$，有 $P(|X|\le a)=$ ____________

$(A)1-2F(a)$　　$(B)2F(a)-1$　　$(C)2-F(a)$　　$(D)2[1-F(a)]$

解：$\because f(x)=f(-x)$　　$\therefore F(-a)=\int_{-\infty}^{-a}f(x)dx=\int_{a}^{\infty}f(x)dx=1-\int_{-\infty}^{a}f(x)dx=1-F(a)$

故 $P(|X|\le a)=P(-a\le X\le a)=F(a)-F(-a)=2F(a)-1$　　故应选择 (B)

3. 设随机变量 $X\sim N(\mu,4^2)$, $Y\sim N(\mu,5^2)$, 记 $p_1=P\{X\le\mu-4\}$, $p_2=P\{Y\le\mu+5\}$，则 ____________

(A) 对任何实数 μ, 都有 $p_1=p_2$　　(B) 对任何实数 μ, 都有 $p_1<p_2$

(C) 对任何实数 μ, 都有 $p_1>p_2$　　(D) 只对 μ 的个别值，才有 $p_1=p_2$

解：由 $X\sim N(\mu,\sigma^2) \quad \Rightarrow \quad P(X\le x)=\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}), \Phi(-x)=1-\Phi(x)$, 故

$p_1=P\{X\le\mu-4\}=\Phi(\frac{\mu-4-\mu}{4})=\Phi(-1)=1-\Phi(1)$

$p_2=P\{X\le\mu+5\}=\Phi(\frac{\mu+5-\mu}{5})=\Phi(1)$

故应选择 (B)

4. 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，以 Y 表示对 X 的三次独立重复观测中事件 $\{X\le\frac{1}{2}\}$ 出现的次数，则 $P\{Y=1\}=$ ____________

$(A)\frac{1}{64}$　　$(B)\frac{9}{64}$　　$(C)\frac{27}{64}$　　$(D)\frac{9}{16}$

解：$p=P\{X\le\frac{1}{2}\}=\int_0^{\frac{1}{2}}2xdx=\frac{1}{4}, P\{Y=1\}=C_3^1 p(1-p)^2=3\times\frac{1}{4}\times(\frac{3}{4})^2=\frac{27}{64}$　　故应选择 (C)

三、 计算、证明题

1. 设随机变量 X 的概率密度 $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$，求随机变量 $Y=e^X$ 的概率密度 $f_Y(y)$

解：采用常规方法求解：先求分布函数，再求导数得到密度函数：

当 $y<1$ 时 $F_Y(y)=P(Y\le y)=0$

当 $y\ge 1$ 时 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(e^X\le y)=P(X\le \ln y)=\int_0^{\ln y}e^{-x}dx=1-\frac{1}{y}$

故 $f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\begin{cases}\frac{1}{y^2}, & y\ge 1\\ 0, & y<1\end{cases}$

2. 设连续型随机变量 X 的密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\frac{A}{\sqrt{1-x^2}}, & |x|<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，求 (1) 系数 A；(2)X 落在区间 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 的概率；(3)X 的分布函数

解：(1) 由 $\int_{-\infty}^{\infty}p(x)dx=\int_{-1}^{1}\frac{A}{\sqrt{1-x^2}}dx=A\arcsin x|_{-1}^{1}=A(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=1\quad\Rightarrow\quad A=\frac{1}{\pi}$

(2) $P(-\frac{1}{2}<X<\frac{1}{2})=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{\pi}\arcsin x|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{3}$

(3) $F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)dt=\begin{cases}0, & x<-1\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin x, & -1\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$

3. 设连续型随机变量 X 具有分布函数 $F(x)$，进一步，假设分布函数 $F(x)$ 满足严格单调递增，求 $-2\ln F(X)$ 的概率密度

解：我们需要求随机变量 $Y=-2\ln F(X)$ 的概率密度函数

首先证明 $F(X)$ 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布

这是因为 $0\le F(X)\le 1$,

故当 $x<0$ 时 $F_{F(X)}(x)=0$；当 $x\ge 1$ 时 $F_{F(X)}(x)=1$

当 $0\le x\le 1$ 时 $F_{F(X)}(x)=P[F(X)\le x]=P[X\le F^{-1}(x)]=F[F^{-1}(x)]=x$

从而 $F_{F(X)}(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & 0\le x\le 1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$, 即 $F(X)$ 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布

接下来我们计算 $Y=-2\ln F(X)$ 的概率密度:

首先求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$:

$F_Y(y)=P(Y\le y)=P[-2\ln F(X)\le y]=P[F(X)\ge e^{-\frac{y}{2}}]=1-P[F(X)<e^{-\frac{y}{2}}]=1-e^{-\frac{y}{2}}$

其中 $y\ge 0$，否则 $G(y)=0$

故 $Y=-2\ln F(X)$ 的概率密度为：$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & y\ge 0\\ 0, & y<0\end{cases}$