# 概率论与数理统计作业卷（三）

## 一、 填空题

**1. 设 $X$ 和 $Y$ 为两个随机变量，且 $P\{X \ge 0, Y \ge 0\} = \frac{3}{7}$, $P\{X \ge 0\} = P\{Y \ge 0\} = \frac{4}{7}$, 则 $P\{\max(X,Y) \ge 0\} =$ ____________**

解：$P\{\max(X,Y) \ge 0\} = P\{X \ge 0 或 Y \ge 0\} = P\{X \ge 0\} + P\{Y \ge 0\} - P\{X \ge 0, Y \ge 0\} = \frac{5}{7}$

**2. 一整数 $N$ 等可能地在 $1, 2, 3, ..., 10$ 十个值中取一个值。设 $D = D(N)$ 是能整除 $N$ 的正整数的个数，$F = F(N)$ 是能整除 $N$ 的素数的个数（注意 1 不是素数）。请写出 $D$ 和 $F$ 的联合分布律和边缘分布律，即将下表补充完整：**

| F \ D | | $P\{F = j\}$ |
|---|---|---|
| | | |
| $P\{D = i\}$ | | 1 |

解：先将饰演的样本空间及 $D, F$ 取值的情况列出如下：

| 样本点 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| D | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 4 | 2 | 4 | 3 | 4 |
| F | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 |

$D$ 所有可能取得值为 $1, 2, 3, 4$；$F$ 所有可能取的值 $0, 1, 2$.
容易得到 $(D, F)$ 取值 $(i, j), i = 1, 2, 3, 4, j = 0, 1, 2$ 的概率，例如
$P\{D = 1, F = 0\} = \frac{1}{10}, P\{D = 2, F = 1\} = \frac{4}{10}$
可得 $D$ 和 $F$ 的联合分布律和边缘分布律如下表：

| F \ D | 1 | 2 | 3 | 4 | $P\{F = j\}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{10}$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{10}$ |
| 1 | 0 | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{7}{10}$ |
| 2 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |
| $P\{D = i\}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{3}{10}$ | 1 |

**3.** **设随机变量 $X$ 和 $Y$ 相互独立，且** $f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$, $f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ **,则二次方程 $\mu^2-2X\mu+Y=0$ 具有实根的概率为 ____________**

解：$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}2xe^{-y}, & 0<x<1, y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$\mu^2-2X\mu+Y=0$ 具有实根等价于 $\Delta=4X^2-4Y\geq 0$, 即 $X$ 与 $Y$ 满足 $Y\leq X^2$，故所求概率为

$P=\iint\limits_{y\leq x^2} f(x,y)dxdy=\int_0^1 2xdx\int_0^{x^2} e^{-y}dy=\int_0^1 2x(1-e^{-x^2})dx=1+(e^{-1}-1)=e^{-1}=\frac{1}{e}$

**4.** **设相互独立的随机变量 $X$ 和 $Y$ 具有同一分布律，且 $X$ 的分布律为 $P\{X=0\}=P\{X=1\}=\frac{1}{2}$，则随机变量 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布律为 ____________**

解：$P\{Z=0\}=P\{\max\{X,Y\}=0\}=P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0\}=\frac{1}{4}$

$P\{Z=1\}=1-P\{Z=0\}=\frac{3}{4}$

故 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布律为$Z\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$

## 二、 选择题

**1.** **已知随机变量 $X$ 和 $Y$ 独立且有 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$, 若 $P\{X+Y\leq 1\}=0.5$, 则以下关系一定成立的是 ____________**

$(A)\mu_1+\mu_2=1$ $(B)\mu_1=\mu_2$ $(C)\sigma_1^2+\sigma_2^2=1$ $(D)\sigma_1^2=\sigma_2^2$

解：由独立性及正态分布性质知 $X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$, 再根据题设条件

$P\{X+Y\leq 1\}=P\{\frac{X+Y-(\mu_1+\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\leq\frac{1-(\mu_1+\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\}=\Phi(\frac{1-(\mu_1+\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}})=0.5 \Rightarrow \frac{1-(\mu_1+\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}=0$ 故应选择 (A)

**2.** **设 $p(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 均为二维连续型随机变量的联合密度，令 $f(x,y)=ap(x,y)+bg(x,y)$. 要使 $f(x,y)$ 是某个二维连续型随机变量的联合密度，则 $a,b$ 应满足 ____________**

$(A)a+b=1$ $(B)a>0,b>0$ $(C)0\leq a\leq 1, 0\leq a\leq 1$ $(D)a\geq 0, b\geq 0,$ 且$a+b=1$

解：要求 $f(x,y)$ 满足非负性和规范性条件 故应选择 (D)

**3.** **设随机变量 $X$ 和 $Y$ 相互独立，且 $X\sim N(0,1)$，$Y$ 的概率分布为 $P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$. 则 $Z=XY$ 的分布函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为 ____________**

$(A)3$ $(B)2$ $(C)1$ $(D)0$

解：$F_Z(z)=P\{Z\leq z\}=P\{XY\leq z|Y=0\}P\{Y=0\}+P\{XY\leq z|Y=1\}P\{Y=1\}$

$=\frac{1}{2}P\{X\cdot 0\leq z|Y=0\}+\frac{1}{2}P\{X\leq z|Y=1\}=\begin{cases}\frac{1}{2}P\{X\leq z\}=\frac{1}{2}\Phi(z), & z<0\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}P\{X\leq z\}=\frac{1}{2}[1+\Phi(z)], & z\geq 0\end{cases}$

仅 $z=0$ 为间断点 故应选择 (C)

## 三、 计算、证明题

**1. 在一简单电路中，两电阻 $R_1$ 和 $R_2$ 串联连接，设 $R_1$ 和 $R_2$ 相互独立，它们的概率密度均为**

$$f(x)=\begin{cases}\frac{10-x}{50}, & 0\le x\le 10\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

**，求总电阻 $R=R_1+R_2$ 的概率密度。**

解：由卷积公式，$R$ 的概率密度为

$$f_R(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(z-x)dx$$

易知当 $\begin{cases}0\le x\le 10\\ 0\le z-x\le 10\end{cases}$，即 $\begin{cases}0\le x\le 10\\ z-10\le x\le z\end{cases}$ 时上述积分的被积函数不为 0，即得

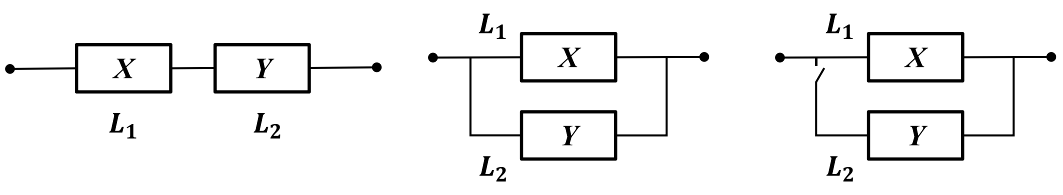
$$f_R(z)=\begin{cases}\int_0^z f(x)f(z-x)dx, & 0\le z<10\\ \int_{z-10}^{10} f(x)f(z-x)dx, & 10\le z\le 20\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

将 $f(x)$ 表达式代入上式得

$$f_R(z)=\begin{cases}\frac{1}{15000}(600z-60z^2+z^3), & 0\le z<10\\ \frac{1}{15000}(20-z)^3, & 10\le z<20\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

也可用分布函数法求解

**2. 设系统 $L$ 由两个相互独立的子系统 $L_1,L_2$ 连接而成，连接的方式分布为 (1) 串联，(2) 并联，(3) 备用(当系统 $L_1$ 损坏时，系统 $L_2$ 开始工作)，如下图所示，设 $L_1,L_2$ 的寿命分别为 $X,Y$，已知它们的概率密度分别为 $f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$，其中 $\alpha>0,\beta>0$ 且 $\alpha\ne\beta$. 试分别就以上三种连接方式写出 $L$ 的寿命 $Z$ 的概率密度**




(1) (2) (3)

解：(1) 串联的情况.

由于当 $L_1,L_2$ 中有一个损坏时，系统 $L$ 就停止工作，所以此时 $L$ 的寿命为 $Z=\min\{X,Y\}$.

由概率密度易得 $X,Y$ 的分布函数分别为

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases},\qquad F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\beta y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

$Z=\min\{X,Y\}$ 的分布函数为

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P\{Z \le z\} = 1 - P\{Z > z\} \\
&= 1 - P\{X > z, Y > z\} = 1 - P\{X > z\}P\{Y > z\} \\
&= 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)] \\
&= \begin{cases} 1 - e^{-(\alpha+\beta)z}, & z > 0 \\ 0, & z \le 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

故 $Z=\min\{X,Y\}$ 的概率密度为

$$
f_Z(z) = \begin{cases} (\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z > 0 \\ 0, & z \le 0 \end{cases}
$$

(2) 并联的情况.

当 $L_1, L_2$ 都损坏时，系统 $L$ 才停止工作，所以此时 $L$ 的寿命为 $Z=\max\{X,Y\}$.

$Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P\{Z \le z\} \\
&= P\{X \le z, Y \le z\} \\
&= F_X(z)F_Y(z) \\
&= \begin{cases} (1 - e^{-\alpha z})(1 - e^{-\beta z}), & z > 0 \\ 0, & z \le 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

故 $Z=\max\{X,Y\}$ 的概率密度为

$$
f_Z(z) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha z} + \beta e^{-\beta z} - (\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z > 0 \\ 0, & z \le 0 \end{cases}
$$

(3) 备用的情况.

当 $L_1$ 损坏时，系统 $L_2$ 才开始工作，所以此时 $L$ 的寿命为 $Z=X+Y$.

当 $z>0$ 时，$Z=X+Y$ 的概率密度为

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy \\
&= \int_0^z \alpha e^{-\alpha(z-y)}\beta e^{-\beta y}dy \\
&= \frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha z} - e^{-\beta z})
\end{aligned}
$$

当 $z=0$ 时,$f_Z(z)=0$, 故 $Z=X+Y$ 的概率密度为

$$
f_Z(z) = \begin{cases} \frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}), & z > 0 \\ 0, & z \le 0 \end{cases}
$$