概率论与数理统计作业卷（六）

一、　填空题

1. 设 $X_1, ..., X_n$ 是取自总体 X 的样本，总体 X 的分布律如下, 其中 θ 未知, $0 < \theta < 1$, 则 θ 的矩估计量为 ____________

X	-1	0	1
概率	$\frac{\theta}{2}$	$1-\theta$	$\frac{\theta}{2}$

解：易得 $E(X) = 0$，可见 θ 无法表达成总体的一阶矩的函数

因此进一步计算 $E(X^2) = \frac{\theta}{2} + 0 + \frac{\theta}{2} = \theta$

用样本的二阶原点矩替换总体的二阶原点矩，即得θ 的矩估计量为 $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$

2. 设 X_1, X_2, X_3 相互独立, 分别服从参数为 $\theta, 2\theta, 3\theta$ 的泊松分布, 利用 X_1, X_2, X_3 可得 θ 的极大似然估计 $\hat{\theta} =$ ____________, 并判断它是否为无偏估计 ____________

解：$L(\theta) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3) = \frac{e^{-\theta}\theta^{x_1}}{x_1!}\frac{e^{-2\theta}(2\theta)^{x_2}}{x_2!}\frac{e^{-3\theta}(3\theta)^{x_3}}{x_3!} = \frac{2^{x_2}3^{x_3}e^{-6\theta}}{x_1!x_2!x_3!}\theta^{\sum\limits_{i=1}^{3} x_i}$

令 $\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = 0$ 得极大似然估计 $\hat{\theta} = \frac{1}{6}\sum\limits_{i=1}^{3} X_i = \frac{1}{2}\bar{X}$

由于 $E\hat{\theta} = \frac{1}{6}\sum\limits_{i=1}^{3} EX_i = \frac{1}{6}(\theta + 2\theta + 3\theta) = \theta$　　故它是无偏估计

3. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, X_1, X_2, X_3 是 X 的一组样本，那么 $\hat{\mu}_1 = \frac{1}{4}(X_1 + 2X_2 + X_3)$ 是否为总体期望 μ 的无偏估计：________，$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$ 是否为总体期望 μ 的无偏估计：________，二者哪个更有效：________

解：$\because E\hat{\mu}_1 = \mu, E\hat{\mu}_2 = \mu$　　故二者都是总体期望 μ 的无偏估计

$\because D\hat{\mu}_1 = \frac{1}{16}(DX_1 + 4DX_2 + DX_3) = \frac{3}{8}\sigma^2 > \frac{1}{3}\sigma^2 = D\hat{\mu}_2$　　故$\hat{\mu}_2$ 比 $\hat{\mu}_1$ 更有效

4. 某厂生产的 100 瓦灯泡的使用寿命 $X \sim N(\mu, 100^2)$(单位：小时). 现从一批灯泡中随机抽取 5 只测得它们的使用寿命如下：1455,1502,1370,1610,1430. 由此可得这批灯泡平均使用寿命 μ 的置信度为 95% 的置信区间为 ________. 已知 $\mu_{0.025} = 1.96$

解：$\bar{x} = 1473.4$, 所求置信区间为 $(\bar{x} - \mu\alpha/2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \mu\alpha/2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = (1385.75, 1561.05)$

二、　选择题

1. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 现对 μ 进行假设检验，若在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下接受了 $H_0 : \mu = \mu_0$, 则在显著性水平 $\alpha = 0.01$____________

(A) 接受 H_0　　(B) 拒绝 H_0　　(C) 可能接受，也可能拒绝 H_0　　(D) 犯第一类错误概率变大

解：应选择 (A)

2. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, $\mu, \sigma^2 > 0$ 均未知，若样本容量 n 和样本值不变，当置信度 $1 - \alpha$ 缩小时，总体均值的置信区间长度 L____________

(A) 增大　　(B) 缩短　　(C) 不变　　(D) 以上三项都不对

解：$L=\frac{2S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)$ 当 $1-\alpha$ 缩小时 α 增大，导致 $t_{\alpha/2}(n-1)$ 缩小，从而 L 缩短　　故应选择 (B)

3. 设总体 X 的概率密度 $f(x,\theta)=\frac{\theta^x}{x!}e^{-\theta}, x=0,1,2,\ldots$，未知参数 $\theta>0$，现有 θ 的两个独立无偏估计 $\hat\theta_1$ 和 $\hat\theta_2$, 满足 $D(\hat\theta_1)=3D(\hat\theta_2)$, 为使 $c_1\hat\theta_1+c_2\hat\theta_2$ 也是 θ 的无偏估计，且在所有这样的线性估计中有最小方差，则 $(c_1,c_2)=$ ____________

$(A)(0.5,0.5)$　　$(B)(0.25,0.75)$　　$(C)(0.75,0.25)$　　$(D)(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$

解：$E(c_1\hat\theta_1+c_2\hat\theta_2)=(c_1+c_2)\theta=\theta \quad\Rightarrow\quad c_1+c_2=1......(1)$

$D(c_1\hat\theta_1+c_2\hat\theta_2)=c_1^2D(\hat\theta_1)+c_2^2D(\hat\theta_2)=(3c_1^2+c_2^2)D(\hat\theta_1)=g(c_1,c_2)D(\hat\theta_1)$

记 $g(c_1,c_2,\lambda)=3c_1^2+c_2^2+\lambda(c_1+c_2-1)$, 令该函数关于 c_1 和 c_2 的偏导数为 0

得 $6c_1+\lambda=0, 2c_2+\lambda=0$，解得 $c_2=3c_1$　　结合 (1) 解得 $c_1=0.25, c_2=0.75$

故应选择 (B)

三、　计算、证明题

1. 设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda^2xe^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$，其中参数 $\lambda(\lambda>0)$ 未知，$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ 是来自总体 X 的一个简单随机样本。求：(1) 参数 λ 的矩估计量；(2) 参数 λ 的极大似然估计量

解：(1) 由于 $EX=\int_0^{+\infty}\lambda^2x^2e^{-\lambda x}dx=\frac{2}{\lambda}\quad\Rightarrow\quad\lambda=\frac{2}{EX}\quad\Rightarrow\quad \hat\lambda_1=\frac{2}{\bar X}$ 为 λ 的矩估计量

(2) 似然函数

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^n f(x_i;\lambda)=\lambda^{2n}\times\prod_{i=1}^n x_i\times e^{-\lambda\sum\limits_{i=1}^n x_i}$$

对数似然函数

$$\ln L=2n\ln\lambda+\sum_{i=1}^n\ln x_i-\lambda\sum_{i=1}^n x_i \tag{1}$$

对数似然方程为

$$\frac{d\ln L}{d\lambda}=0\quad\Rightarrow\quad\frac{2n}{\lambda}-\sum_{i=1}^n x_i=0\quad\Rightarrow\quad\lambda=\frac{2n}{\sum\limits_{i=1}^n x_i}=\frac{2}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n x_i} \tag{2}$$

$\hat\lambda_2=\frac{2}{\bar X}$ 为 λ 的极大似然估计量

2. 某厂生产的维尼纶纤度 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 其中 σ^2 未知，正常生产时有 $\mu\geq 1.4$. 现从某天生产的维尼纶中随机抽取 5 根, 测得其纤度为 1.32, 1.24, 1.25, 1.14, 1.26. 问该天的生产是否正常？$(\alpha=0.05)$

解：易得 $\bar x=1.242$, $s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^n(x_i-\bar x)}=0.06496$

检验问题：$H_0:\mu\geq 1.4\Leftrightarrow H_1:\mu<1.4$

H_0 为真时检验统计量 $T=\frac{\bar X-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

对给定的检验水平 $\alpha=0.05$, $t_\alpha(n-1)=t_{0.05}(4)=2.1318$

由样本值计算得 $t=\frac{\bar x-\mu_0}{s}\sqrt{n}=\frac{1.242-1.4}{0.06496}\times\sqrt{5}=-5.439<-2.1318=t_{0.05}(4)$

故应拒绝 H_0，即认为该天的生产显著不正常

3. 某货车有 A 和 B 两条行车路线，行车所用时间分别服从 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$，现每条线路各跑 50 次，测得在 A 线上 $\bar{X} = 80, S_1^2 = 20$，在 B 线上 $\bar{Y} = 76, S_2^2 = 15$，取 $\alpha = 0.05$，问：(1) 方差是否相同？(2)B 线路是否比 A 线路用时更短？

解：(1)$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \Leftrightarrow H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

检验统计量 $F = S_1^2/S_2^2, H_0$ 成立时 $F \sim F(49, 49)$

拒绝域 $W = \{F < F_{0.975}(49, 49) = 0.567$或$F > F_{0.025}(49, 49) = 1.762\}$

计算得 $F \approx 1.333 \in (0.567, 1.762)$，不能拒绝 H_0，可以认为方差相同

(2)$H_0 : \mu_1 \leq \mu_2 \Leftrightarrow H_1 : \mu_1 > \mu_2$

检验统计量 $T = (\bar{X} - \bar{Y})/S_w\sqrt{\frac{1}{50} + \frac{1}{50}}, S_w = \sqrt{\frac{49S_1^2+49S_2^2}{50+50-2}}, H_0$ 成立时 $T \sim t(98)$

拒绝域 $W = \{(x_1, ..., x_n)|T \geq t_{0.05}(98)\} \approx \{T \geq 1.66\}$

计算得 $T \approx 4.781 > 1.66$,可以认为 B 线路比 A 线路用时更短