概率论与数理统计作业卷（五）

一、 填空题

1. 设 $X_1,...,X_5 \sim i.i.d.N(0,1)$, 若 $\frac{C\cdot(X_1+X_2)}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}} \sim t(n)$, 则 $(C,n) =$ ____________

2. 设 $X_1,...,X_n$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，样本均值 $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, 样本二阶中心矩 $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$, X_{n+1} 是第 $n+1$ 个样本，则 $\frac{X_i-\bar{X}_n}{S_n}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$ 的分布为 ____________

3. 设 $X_1,...,X_4$ 是来自总体 $N(0,9)$ 的样本，$Y = a(X_1-X_2)^2+b(3X_3+4X_4)^2$, 当 $a =$ ____________, $b =$ ____________ 时，统计量 Y 服从 $\chi^2(2)$ 分布

4. 从正态总体 $N(3.4,6^2)$ 中抽取容量为 n 的一组样本 $X_1,...,X_n$, 若要求样本均值 $\bar{X} \in (1.4,5.4)$ 的概率不小于 0.95, 则样本容量 n 至少取 ____________

二、 选择题

1. 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 其中 μ 已知, σ^2 未知, X_1,X_2,X_3 是取自该总体的三个样本，则不是统计量的是 ____________

$(A)X_1+X_2+X_3$ $\quad$ $(B)\max\{X_1,X_2,X_3\}$ $\quad$ $(C)\sigma^2(X_1+X_2+X_3)$ $\quad$ $(D)\frac{1}{2}(X_1+X_2+X_3)$

2. 设 $X_1,...,X_n$ 是正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一组样本, μ 和 σ^2 均已知, $\bar{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差，则下列选项错误的是 ____________

$(A)\bar{X} \sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$ $\quad$ $(B)\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ $\quad$ $(C)\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ $\quad$ $(D)\frac{(n-1)S}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

3. 设 $X_1,...,X_n$ 的样本均值为 $\bar{X}$，样本方差为 $S_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$, 作变换 $Y_i = \frac{X_i-a}{b}, i=1,...,n$, $a,b \neq 0$ 均为常数, $Y_1,...,Y_n$ 的样本均值为 $\bar{Y}$，样本方差为 $S_Y^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2$, 则正确的是 ____________

(A)$\bar{X} = a+b\bar{Y}, S_X^2 = b^2S_Y^2$ $\quad$ (B)$\bar{Y} = a+b\bar{X}, S_X^2 = b^2S_Y^2$
(C)$\bar{X} = a+b\bar{Y}, S_Y^2 = b^2S_X^2$ $\quad$ (D)$\bar{Y} = a+b\bar{X}, S_Y^2 = b^2S_X^2$

4. 设 (X_1,X_2,X_3,X_4) 为取自正态总体 $N(1,\sigma^2)$ 的简单随机样本，则统计量 $\frac{X_1-X_2}{|X_3+X_4-2|}$ 服从的分布为 ____________

$(A)N(0,1)$ $\quad$ $(B)t(1)$ $\quad$ $(C)\chi^2(1)$ $\quad$ $(D)F(1,1)$

三、 计算、证明题

1. 设总体 X **服从正态分布** $N(\mu, 2^2)$**,** $X_1, ..., X_7$ **是取自总体** X **的七个样本，若要求统计量** $a(X_1 - 2X_2 + X_3)^2 + b(X_4 - X_5 + X_6 - X_7)^2 \sim \chi^2(n)$**, 则** a, b, n **应取何值？**

2. 设总体 X **的概率密度为** $f(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$**,** $X_1, ..., X_5$ **为** X **的一组样本，分别求** $X_{(1)} = \min\{X_1, ..., X_5\}$ **和** $X_{(5)} = \max\{X_1, ..., X_5\}$ **的概率密度。**

3. 已知 $T \sim t(n)$**，证明** $T^2 \sim F(1, n)$