概率论与数理统计作业卷（一）

一、 填空题

1. 设 A,B,C 是三个任意的随机事件，那么 $P(A)$，$P(AB)$，$P(A\cup B)$ 的大小关系是 ____________

解：$A\subseteq A\cup B \Rightarrow P(A)\le P(A\cup B)$

$AB\subseteq A \Rightarrow P(AB)\le P(A)$

故　$P(AB)\le P(A)\le P(A\cup B)$

2. 已知 A,B 两个事件满足条件 $P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})$，且 $P(A)=p$，则 $P(B)=$ ____________

解：由$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ 和 $P(A\cup B)=1-P(A\bar{\cup}B)=1-P(\bar{A}\bar{B})$

得　$P(A)+P(B)=1$

故　$P(B)=1-p$

3. 设 A,B 是两个随机事件，$P(B)=0.3$，$P(A\cup B)=0.6$，则 $P(A\bar{B})=$ ____________

解：$P(A\bar{B})=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=P(A)-[P(A)+P(B)-P(A\cup B)]=0.3$

4. 将 10 本书随意放在书架上，则其中指定的 3 本书放在一起的概率为 ____________

解：可以将指定的 3 本书看成一组，与另外 7 本书全排列（8!）；指定的 3 本书内部也有顺序（3!）

故概率为$P=\frac{8!\times 3!}{10!}=\frac{1}{15}$

5. 从 5 双不同号码的鞋中任取 4 只，则这 4 只鞋至少有两只可以配成 1 双的概率为 ____________

解：没有成双的事件数为 $C_5^4\cdot 2^4$，基本事件总数为 C_{10}^4，故所求概率为 $P=1-\frac{C_5^4\cdot 2^4}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}$

二、 选择题

1. 当事件 A 与 B 同时发生时，事件 C 必发生，则下列结论正确的是 ____________

$(A)P(C)=P(AB)$　　　　$(B)P(C)=P(A\cup B)$

$(C)P(C)\le P(A)+P(B)-1$　　$(D)P(C)\ge P(A)+P(B)-1$

解：由题意可知 $AB\subseteq C$，再由概率加法公式 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ 可得

$P(C)\ge P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\le P(A)+P(B)-1$　　　故应选择 (D)

2. 在数集 {1,2,3,4,5} 中依次取出 4 个数，每次取 1 个，记 A=“取出的 4 个数依次为 1,2,4,3”，若依次取出，取后放回时记 $P(A)=p_1$，若依次取出，取后不放回时记 $P(A)=p_2$，则 ____________

$(A)p_1<p_2$　　$(B)p_1>p_2$　　$(C)p_1=p_2$　　(D)无法比较p_1,p_2的大小

解：两种取法，A 的有利基本事件只有 1 个

$p_1=\frac{1}{5^4}<p_2=\frac{1}{5\times4\times3\times2}$　　　故应选择 (A)

3. 一个人要开门，他共有 n 把钥匙，其中仅有一把能开这门。他每次随机选取一把钥匙开门，若开门失败则排除该钥匙，那么这人在第 s 次试开门才成功的概率是 ____________

$(A)\frac{1}{n}$ $(B)(\frac{n-1}{n})^{s-1}\frac{1}{n}$ $(C)\frac{s}{n}$ $(D)\frac{n-s}{n}$

解：为了第 s 次尝试成功，前 s−1 次尝试都必须失败，而第 s 次尝试必须成功。第一次开门失败概率为 $\frac{n-1}{n}$，此时去除一把错误钥匙后第二次开门失败概率为 $\frac{n-2}{n-1}$，$\cdots$，第 s-1 次开门失败概率为 $\frac{n-s+1}{n-s+2}$；去除一把错误钥匙后第 s 次开门成功概率为 $\frac{1}{n-s+1}$，因此第 s 次试开门才成功概率为

$\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdots\frac{n-s+1}{n-s+2}\cdot\frac{1}{n-s+1}=\frac{1}{n}$ 故应选择 (A)

事实上，第 s 次才成功与第 1 次就成功的概率是相等的。

注意 (B) 选项对应的是：每次随机选取一把钥匙开门，若开门失败则放回，即每次尝试开门选到正确钥匙的概率均为 $\frac{1}{n}$

4. 仓库中有甲、乙、丙三个工厂生产的灯管，其中甲厂生产的有 1000 支，次品率为 2%，乙厂生产的有 2000 支，次品率为 3%，丙厂生产的有 3000 支，次品率为 4%. 若从中随机抽取一支发现为次品，那么其为甲厂产品的概率为 ____________

$(A)30\%$ $(B)20\%$ $(C)15\%$ $(D)10\%$

解：B_1、B_2、B_3 分别表示抽到的灯管是甲、乙、丙三个工厂生产的产品，则 B_1、B_2、B_3 构成完备事件组，又设 A 表示抽到次品，则由题意知

$P(B_1)=\frac{1}{6},P(B_2)=\frac{2}{6},P(B_3)=\frac{3}{6},P(A|B_1)=0.02,P(A|B_2)=0.03,P(A|B_3)=0.04$

由贝叶斯公式得所求概率为 $P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)}=0.1$ 故应选择 (D)

三、 计算、证明题

1. 从 0,1,2,...,9 这十个数中任选三个不同的数，求下列事件的概率：（1）$A_1=$ “三个数中不含 0 和 5”；（2）$A_2=$ “三个数中不含 0 或 5”；（3）$A_3=$ “三个数中含 0 但不含 5”

解：$(1)P(A_1)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{56}{120}=\frac{7}{15}\approx0.46667$

$(2)P(A_2)=\frac{2C_9^3-C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{112}{120}=\frac{14}{15}\approx0.93333$ $-C_8^3$ 是因为“同时不含 0 和 5”重复

$(3)P(A_3)=\frac{C_8^2}{C_{10}^3}=\frac{28}{120}=\frac{7}{30}\approx0.23333$ $C_8^2=1\cdot C_8^2$：1 是因为“10 确定有”，C_8^2 是因为 5 确定没有，候选的 9 个数变成了 8 个数

2. 甲、乙两个乒乓球运动员进行单打比赛，每局比赛甲胜的概率为 0.6，乙胜的概率为 0.4. 比赛采用三局两胜制或五局三胜制，问哪种赛制对甲更有利？

解：(1) 若采用三局两胜制：记 $A=$“每局比赛中甲胜”，$B=$“每局比赛中乙胜”

则甲获胜的情形有：AA,ABA,BAA，故甲胜的概率为

$P_1=0.6^2+0.6\times0.4\times0.6+0.4\times0.6\times0.6=0.648$

(2) 若采用五局三胜制：记 $A=$“甲胜”；$A_1=$“前三局比赛中甲全胜”；

$A_2=$“前三局比赛中甲胜两局，乙胜一局，第四局甲胜”；

$A_3=$“前四局比赛中甲、乙各胜两局，第五局甲胜”；

则 A_1,A_2,A_3 互不相容且 $A=A_1+A_2+A_3$，故甲胜的概率为

$P_2 = P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i) = 0.6^3 + C_3^2 \times 0.6^2 \times 0.4 \times 0.6 + C_4^2 \times 0.6^2 \times 0.4^2 \times 0.6 = 0.68256$

由于 $P_1 < P_2$，因此采用五局三胜制对甲更有利。

3. 在区间 $(0,1)$ 中任取两个数，求这两个数的乘积小于 $\frac{1}{3}$ 的概率

解：设取出的两个数分别为 x 和 y，则 $\Omega = \{(x,y)|0 < x < 1, 0 < y < 1\}$,

要求“两个数的乘积小于 $\frac{1}{3}$”等价于“$(x,y) \in D = \{(x,y) \in \Omega | xy < \frac{1}{3}\}$”

$m_\Omega = 1, m_D = 1 - \int_{\frac{1}{3}}^{1} dx \int_{\frac{1}{3x}}^{1} dy = 1 - \int_{\frac{1}{3}}^{1} (1 - \frac{1}{3x}) dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \ln 3$

故所求概率为 $P((x,y) \in D) = \frac{m_D}{m_\Omega} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \ln 3$