概率论与数理统计作业卷（五）

一、 填空题

1. 设 $X_1,...,X_5 \sim i.i.d.N(0,1)$, 若 $\frac{C\cdot(X_1+X_2)}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}} \sim t(n)$, 则 $(C,n) =$ ____________

解：$X_1+X_2 \sim N(0,2)$, $X_3^2+X_4^2+X_5^2 \sim \chi^2(3)$ 且两者独立，由 t 分布定义得 $C=\sqrt{1.5}, n=3$

2. 设 $X_1,...,X_n$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，样本均值 $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, 样本二阶中心矩 $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}_n)^2$, X_{n+1} 是第 $n+1$ 个样本，则 $\frac{X_i-\bar{X}_n}{S_n}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$ 的分布为 ____________

解：由 $\bar{X}_n \sim N(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2)$ 和 $X_{n+1} \sim N(\mu,\sigma^2)$ 且两者相互独立得 $X_{n+1}-\bar{X}_n \sim N(0,\frac{n+1}{n}\sigma^2)$

从而 $\frac{X_{n+1}-\bar{X}_n}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{n+1}} \sim N(0,1)$, 再由 $\frac{nS_n}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ 及 t 分布定义得

$\frac{X_{n+1}-\bar{X}_n}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{n+1}}/\sqrt{\frac{nS_n}{\sigma^2}/(n-1)} = \frac{X_i-\bar{X}_n}{S_n}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \sim t(n-1)$

3. 设 $X_1,...,X_4$ 是来自总体 $N(0,9)$ 的样本, $Y=a(X_1-X_2)^2+b(3X_3+4X_4)^2$, 当 $a=$ ____________, $b=$ ____________ 时，统计量 Y 服从 $\chi^2(2)$ 分布

解：$X_1-X_2 \sim (0,2\times 9)$, 即 $\frac{X_1-X_2}{3\sqrt{2}} \sim N(0,1)$

$3X_3+4X_4 \sim (0,25\times 9)$, 即 $\frac{3X_3+4X_4}{15} \sim N(0,1)$

根据 $\chi^2(2)$ 分布定义知

$$Y = \left(\frac{X_1-X_2}{3\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{3X_3+4X_4}{15}\right)^2 \sim \chi^2(2)$$
$$Y = \frac{1}{18}(X_1-X_2)^2 + \frac{1}{225}(3X_3+4X_4)^2$$

故 $a=\frac{1}{18}, b=\frac{1}{225}$

4. 从正态总体 $N(3.4,6^2)$ 中抽取容量为 n 的一组样本 $X_1,...,X_n$, 若要求样本均值 $\bar{X} \in (1.4,5.4)$ 的概率不小于 0.95, 则样本容量 n 至少取 ____________

解：$\because \bar{X} \in N(3.4,\frac{36}{n}) \therefore P(1.4<\bar{X}<5.4) = 2\Phi(\frac{\sqrt{n}}{3})-1 \geq 0.95$

$\Rightarrow \quad \Phi(\frac{\sqrt{n}}{3}) \geq 0.975 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{n}}{3} \geq 1.96 \quad \Rightarrow \quad n \geq 34.5744$ 故 n 至少应取35

二、 选择题

1. 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 其中 μ 已知, σ^2 未知, X_1,X_2,X_3 是取自该总体的三个样本，则不是统计量的是 ____________

$(A) X_1+X_2+X_3$ $\qquad$ $(B)\max\{X_1,X_2,X_3\}$ $\qquad$ $(C)\sigma^2(X_1+X_2+X_3)$ $\qquad$ $(D)\frac{1}{2}(X_1+X_2+X_3)$

解：统计量是不含任何未知参数的样本的函数 $\qquad$ 故应选择 (C)

2. **设 $X_1,...,X_n$ 是正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一组样本, μ 和 σ^2 均已知, $\bar{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差，则下列选项错误的是 ____________**

$(A)\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$ $(B)\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$ $(C)\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$ $(D)\frac{(n-1)S}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

解：由数理统计基本知识知 $(A)(B)(C)$ 正确，而 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ 故应选择 (D)

3. **设 $X_1,...,X_n$ 的样本均值为 $\bar{X}$，样本方差为 $S_X^2=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$, 作变换 $Y_i=\frac{X_i-a}{b}, i=1,...,n$, $a,b\neq 0$ 均为常数, $Y_1,...,Y_n$ 的样本均值为 $\bar{Y}$，样本方差为 $S_Y^2=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2$, 则正确的是 ____________**

(A)$\bar{X}=a+b\bar{Y}, S_X^2=b^2S_Y^2$ (B)$\bar{Y}=a+b\bar{X}, S_X^2=b^2S_Y^2$

(C)$\bar{X}=a+b\bar{Y}, S_Y^2=b^2S_X^2$ (D)$\bar{Y}=a+b\bar{X}, S_Y^2=b^2S_X^2$

解：$\because \bar{Y}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}Y_i=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{X_i-a}{b}=\frac{1}{b}(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-a)=\frac{\bar{X}-a}{b}$ $\therefore \bar{X}=a+b\bar{Y}$

$\because S_Y^2=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{X_i-a}{b}-\frac{\bar{X}-a}{b})^2=\frac{1}{b^2}\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\frac{S_X^2}{b^2}$

故应选择 (A)

4. **设 (X_1,X_2,X_3,X_4) 为取自正态总体 $N(1,\sigma^2)$ 的简单随机样本，则统计量 $\frac{X_1-X_2}{|X_3+X_4-2|}$ 服从的分布为 ____________**

$(A)N(0,1)$ $(B)t(1)$ $(C)\chi^2(1)$ $(D)F(1,1)$

解：易得 $X_1-X_2\sim N(0,2\sigma^2)$, 标准化有 $\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$.

同理可得 $\frac{X_3+X_4-2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$. 由 χ^2 分布的定义得 $(\frac{X_3+X_4-2}{\sqrt{2}\sigma})^2\sim\chi^2(1)$

显然这里 $\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}$ 与 $(\frac{X_3+X_4-2}{\sqrt{2}\sigma})^2$ 独立,

因此由 t 分布的定义有 $\frac{(X_1-X_2)/\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{(\frac{X_3+X_4-2}{\sqrt{2}\sigma})^2/1}}=\frac{X_1-X_2}{|X_3+X_4-2|}\sim t(1)$ 故应选择 (B)

三、 计算、证明题

1. **设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,2^2)$, $X_1,...,X_7$ 是取自总体 X 的七个样本，若要求统计量 $a(X_1-2X_2+X_3)^2+b(X_4-X_5+X_6-X_7)^2\sim\chi^2(n)$, 则 a,b,n 应取何值？**

解：$\because E(X_1-2X_2+X_3)=0, D(X_1-2X_2+X_3)=DX_1+4DX_2+DX_3=24$

$\therefore X_1-2X_2+X_3\sim N(0,24)$ $\frac{X_1-2X_2+X_3}{\sqrt{24}}\sim N(0,1)$ $\therefore \frac{1}{24}(X_1-2X_2+X_3)^2\sim\chi^2(1)$

类似可得 $\frac{1}{16}(X_4-X_5+X_6-X_7)^2\sim\chi^2(1)$ 由独立 χ^2-分布随机变量具有可加性得

$\frac{1}{24}(X_1-2X_2+X_3)^2+\frac{1}{16}(X_4-X_5+X_6-X_7)^2\sim\chi^2(2)$

故 $a=\frac{1}{24}, b=\frac{1}{16}, n=2$

2. 设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}3x^2, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，$X_1,\ldots,X_5$ 为 X 的一组样本，分别求 $X_{(1)}=\min\{X_1,\ldots,X_5\}$ 和 $X_{(5)}=\max\{X_1,\ldots,X_5\}$ 的概率密度。

解：易得总体 X 的分布函数 $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x^3, & 0\le x\le 1\\ 0, & x>1\end{cases}$

由 $f_{X_{(1)}}(x)=n[1-F(x)]^{n-1}f(x)$, $f_{X_{(n)}}(x)=n[F(x)]^{n-1}f(x)$ 得

$f_{X_{(1)}}(x)=\begin{cases}15x^2(1-x^3)^4, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ $f_{X_{(5)}}(x)=\begin{cases}15x^{14}, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

3. 已知 $T\sim t(n)$，证明 $T^2\sim F(1,n)$

证明：设 $X\sim N(0,1)$, $Y\sim\chi^2(n)$, 且 X 与 Y 相互独立, 则由 t-分别定义知

$$T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}\sim t(n)$$

又因为 $X^2\sim\chi^2(1)$ 并由 F-分布定义知 $T^2=\frac{X^2}{Y/n}=\frac{X^2/1}{Y/n}\sim F(1,n)$