概率论与数理统计作业卷（四）

一、 填空题

1. 某医院当新生儿诞生时，医生要根据婴儿的皮肤颜色、肌肉弹性、反应的敏感性、心脏的搏动等方面的情况进行评分，新生儿的得分 X 是一个随机变量，据以往的资料表明 X 的分布律如下表，则 X 的数学期望 $E(X)=$ ____________

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_k	0.002	0.001	0.002	0.005	0.02	0.04	0.18	0.37	0.25	0.12	0.01

解：

$$\begin{aligned}E(X)=&0\times 0.002+1\times 0.001+2\times 0.002+3\times 0.005+4\times 0.02\\&+5\times 0.04+6\times 0.18+7\times 0.37+8\times 0.25+9\times 0.12+10\times 0.01\\=&7.15\end{aligned}$$

2. 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $P(X=E(X^2))=$ ____________

解：由方差的计算公式以及泊松分布的数字特征得 $E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=\lambda+\lambda^2=2$, 则 $P(X=E(X^2))=P(X=2)=\frac{e^{-1}\cdot 1^2}{2!}=\frac{e^{-1}}{2}=\frac{1}{2e}$

3. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}a+bx^2, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$, 已知 $EX=\frac{3}{5}$, 则 $DX=$ ____________

解：由规范性 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^1(a+bx^2)dx=a+\frac{1}{3}b$ 得 $3a+b=3$ $\cdots\cdots(1)$
由 $\frac{3}{5}=EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1x(a+bx^2)dx=\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}b$ 得 $2a+b=\frac{12}{5}$ $\cdots\cdots(2)$
联立 (1)(2) 两式解得 $a=\frac{3}{5},b=\frac{6}{5}$
$\therefore EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^1(\frac{3x^2}{5}+\frac{6x^4}{5})dx=\frac{11}{25}$ $\therefore DX=EX^2-(EX)^2=\frac{11}{25}-(\frac{3}{5})^2=\frac{2}{25}$

4. 设 10 次独立射击中命中目标次数为 X, 每次射击命中目标概率为 0.4, 则 $EX^2=$ ____________

解：由题意 $X\sim B(10,0.4)$, 因此 $EX=10\times 0.4=4$, $DX=10\times 0.4\times(1-0.4)=2.4$
$\therefore EX^2=DX+(EX)^2=2.4+4^2=18.4$

5. 设随机变量 X 的方差为 3，则据切比雪夫不等式有估计 $P\{|X-EX|\ge 4\}\le$ ____________

解：有切比雪夫不等式 $P\{|X-EX|\ge\epsilon\}\le\frac{DX}{\epsilon^2}$ 得 $P\{|X-EX|\ge 4\}\le\frac{3}{4^2}=\frac{3}{16}$

二、 选择题

1. 设 $P\{X=n\}=a^n,(n=1,2,\ldots)$ 且 $EX=1$, 则 $a=$ ____________

$(A)\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ $(B)\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ $(C)\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ $(D)\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

解：$E(X)=\sum_{n=1}^{+\infty}nP\{X=n\}=\sum_{n=1}^{+\infty}na^n=a\sum_{n=1}^{+\infty}na^{n-1}=a\frac{d}{da}(\sum_{n=1}^{+\infty}a^n)=a\frac{d}{da}(\frac{a}{1-a})$
$=a\frac{d}{da}(1-\frac{1}{1-a})=\frac{a}{(1-a)^2}=1 \quad\Rightarrow\quad a=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$
由分布律性质知 $0\le a\le 1$, 故应选择 (B)

2. 设离散型随机变量 X 服从 0-1 分布，即 $P\{X=0\}=p, P\{X=1\}=1-p$，则正确的是____________

$(A)EX=p$　　$(B)EX<1-p$　　$(C)DX=p^2$　　$(D)DX\le 0.25$

解：$\because EX=0\times p+1\times(1-p)=1-p, EX^2=0^2\times p+1^2\times(1-p)=1-p$

$\therefore DX=EX^2-(EX)^2=(1-p)-(1-2p+p^2)=p-p^2=\frac{1}{4}-(p-\frac{1}{2})^2\le\frac{1}{4}=0.25$　　故应选择 (D)

3. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且已知 $E[(X-1)(X-2)]=1$，则 $\lambda=$____________

$(A)0$　　$(B)\frac{1}{2}$　　$(C)1$　　$(D)2$

解：由泊松分布的数字特征得

$E(X)=\lambda, D(X)=\lambda, E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=\lambda+\lambda^2$

由期望的性质得

$E[(X-1)(X-2)]=E[X^2-3X+2]=E(X^2)-3E(x)+2=\lambda+\lambda^2-3\lambda+2=1$

因此 $\lambda^2-2\lambda+1=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda=1$　　故应选择 (C)

4. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\le x\le 0\\ 1-x, & 0<x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，则数学期望 $EX=$____________

$(A)\frac{1}{6}$　　$(B)\frac{1}{2}$　　$(C)1$　　$(D)0$

解：由于密度函数为偶函数，积分区间对称，故 $EX=0$（也可直接计算）故应选择 (D)

三、 计算、证明题

1. 已知连续型随机变量 X 的概率密度函数为 $p(x)=\frac{1}{\sqrt{6\pi}}e^{-\frac{x^2-4x+4}{6}}, -\infty<x<+\infty$. (1) 求 $E(X)$ 和 $D(X)$；(2) 若已知 $\int_{-\infty}^{c}p(x)dx=\int_{c}^{+\infty}p(x)dx$，求常数 c.

解：$\because p(x)=\frac{1}{\sqrt{6\pi}}e^{-\frac{x^2-4x+4}{6}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{3}}e^{-\frac{(x-2)^2}{2\times 3}}$　　$\therefore X\sim N(2,3)$

(1) 由正态分布性质得，$E(X)=2, D(X)=3$

(2) 由 $\int_{-\infty}^{c}p(x)dx=\int_{c}^{+\infty}p(x)dx$ 知 $\int_{-\infty}^{c}p(x)dx=P\{X\le c\}=\Phi(\frac{c-2}{\sqrt{3}})=\frac{1}{2}=\Phi(0)$

$\Rightarrow\quad c=2$

也可由 $N(\mu,\sigma^2)$ 的密度函数关于 $x=\mu$ 对称得 $c=\mu=2$

2. 设随机变量 $X\sim N(1,4), Y\sim N(0,9)$，且 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=\frac{1}{2}$. 记 $Z=\frac{X}{2}+\frac{Y}{3}$. 求 (1) $E(Z), D(Z)$; (2) $\mathrm{cov}(X,Z)$

解：有题易得 $E(X)=1, D(X)=4, E(Y)=0, D(Y)=9$.

(1) 由期望和方差性质得

$$\begin{aligned}E(Z)=&\frac{1}{2}E(X)+\frac{1}{3}E(Y)=\frac{1}{2}\\D(Z)=&\frac{1}{4}D(X)+\frac{1}{9}D(Y)+\frac{1}{3}cov(X,Y)\\=&\frac{1}{4}D(X)+\frac{1}{9}D(Y)+\frac{1}{3}\rho_{XY}\sqrt{D(X)D(Y)}\\=&\frac{1}{4}\times 4+\frac{1}{9}\times 9+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{4\times 9}=3\end{aligned}$$

(2) 由协方差性质得

$$
\begin{aligned}
cov(X,Z) =& cov(X, \frac{X}{2}+\frac{Y}{3}) \\
=& \frac{1}{2}D(X)+\frac{1}{3}cov(X,Y) \\
=& \frac{1}{2}\times 4+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{4\times 9}=3
\end{aligned}
$$

3. 某公司计划开发一种新产品市场，并试图确定该产品的产量。它们估计出售一件产品可获利 m 元，而积压一件产品将导致 n 元的损失。再者，他们预测销售量 Y（件）服从指数分布，其概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-y/\theta}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$ $\theta>0$，问若要获得利润的数学期望最大，应生产多少件产品 (m,n,θ 均为已知)?

解：设生产 x 件，则获利 Q 是 x 的函数

$$
Q=Q(x)=\begin{cases} mY-n(x-Y), & Y<x\\ mx, & Y\ge x\end{cases}
$$

Q 是随机变量，它是 Y 的函数，其数学期望为

$$
\begin{aligned}
E(Q)=&\int_0^{\infty}Qf_Y(y)dy=\int_0^{x}[my-n(x-y)]\frac{1}{\theta}e^{-y/\theta}dy+\int_x^{\infty}mx\frac{1}{\theta}e^{-y/\theta}dy\\
=&(m+n)\theta-(m+n)\theta e^{-x/\theta}-nx
\end{aligned}
$$

令 $\frac{d}{dx}E(Q)=(m+n)e^{-x/\theta}-n=0$,

得 $x=-\theta\ln\frac{n}{m+n}$。

而 $\frac{d^2}{dx^2}E(Q)=\frac{-(m+n)}{\theta}e^{-x/\theta}<0$

故当 $x=-\theta\ln\frac{n}{m+n}$ 时 $E(Q)$ 取极大值，且可知这也是最大值。

x应取整数，故选择向上取整和向下取整中能使E(Q)更大的值

4. 设某网点每天接到的订单数服从参数为 20 的泊松分布。若一年 365 天该网点都营业，且假设每天得到的订单数相互独立。求该网点一年至少得到 7400 个订单的概率的近似值。(要求用中心极限定理求解，已知 $\Phi(1.170)=0.8790$)

解：设 X_i 为 “第 i 天街道的订单数”，$i=1,2,...,365$, 则 $X_i\sim P(20)$, $i=1,2,...,365$

$E(\sum_{i=1}^{365}X_i)=365\times 20=7300$, $D(\sum_{i=1}^{365}X_i)=365\times 20=7300$

由林德伯格-列维中心极限定理知

$$
\frac{\sum_{i=1}^{365}X_i-7300}{\sqrt{7300}}\overset{\text{近似}}{\sim}N(0,1)
$$

该网点一年至少得到 7400 个订单的概率为

$P(\sum_{i=1}^{365}X_i\ge 7400)\approx 1-\Phi(\frac{7400-7300}{\sqrt{7300}})=1-\Phi(1.170)=1-0.8790=0.1210$