

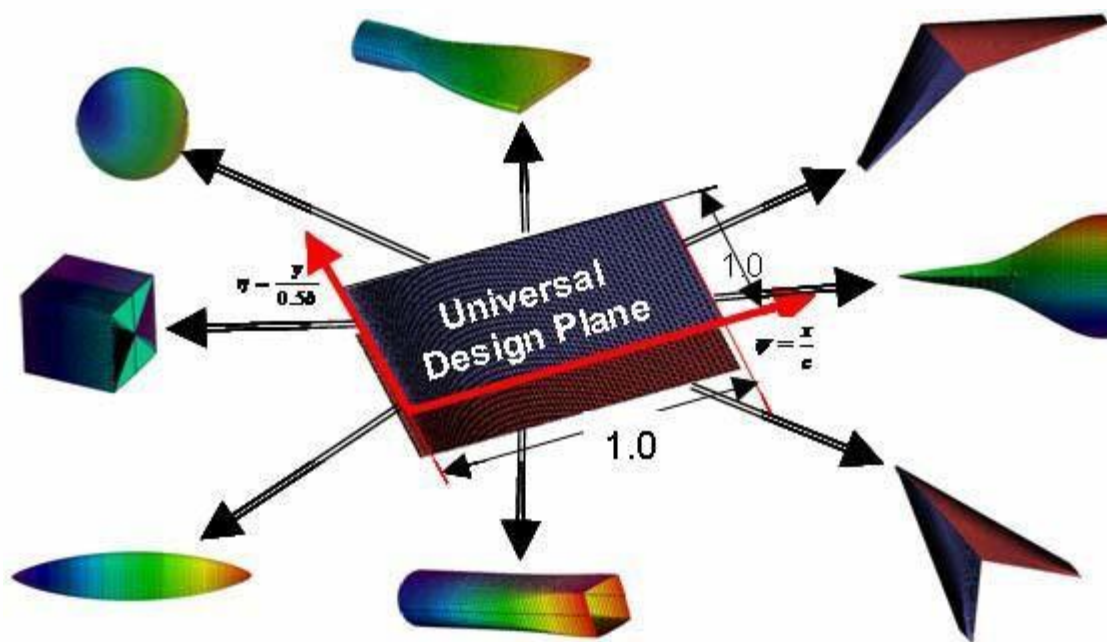


AIAA-2007-0062

## 一种通用的参数化几何表示方法 - "CST"

Brenda M. Kulfan

波音商用飞机集团，华盛顿州西雅图，98124



第45届AIAA航空航天科学会议和展览

2007年1月8-11日 里诺希尔顿酒  
店 里诺·内华达州

Copyright © 2006 by Boeing Commercial Airplanes.

Published by the American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., with permission.

美国航空和航天学会

# 一种通用的参数化几何表示方法--"CST"

Brenda M. Kulfan\*

波音商用飞机集团，华盛顿州西雅图，98124

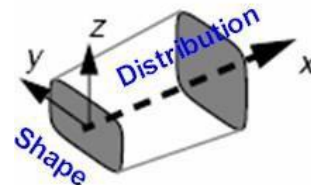
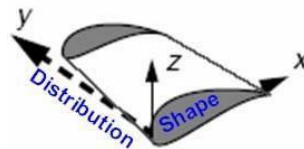
对于空气动力学设计优化，限制几何设计变量的数量是非常可取的。在参考文献1中，提出了一种“基本的”参数化机翼几何表示方法。该方法包括引入几何“形状函数/类函数”转换技术，这样，圆头/尖尾的几何形状以及其他类别的几何形状可以通过具有易于观察的物理特征的分析性良好和简单的数学函数来精确表示。基本的参数化几何表示方法被证明可以描述一个基本上无限的设计空间，完全由分析性平滑的几何形状组成。在本文中“形状函数/类函数”方法被扩展到更普遍的三维应用，如机翼、机身、管道和机舱。结果表明，任何一般的三维几何体都可以用基本形状的分布来表示，而“形状函数/类函数”方法可以用来描述基本形状以及基本形状的分布。介绍了代表三维几何体的“CST”方法。通过这种非常稳健、通用和简单的方法，一个三维几何体在设计空间中由类函数和形状函数的分布来定义。然后，这个设计空间的几何体被转换到实际几何体定义的物理空间中。CST方法在机舱、管道、机翼和机体上的一些应用，说明了这种新方法的多功能性。它表明，需要相对较少的变量来表示任意的三维几何形状，如飞机机翼、机舱或机身。

## I. 简介

任何飞机的基本空气动力学定义都包括利用两种基本类型的形状来表示构型的基本定义成分，<sup>2</sup>，同时沿每个成分的形状分布。

两个基本的定义形状包括。

- 第1类：机翼类型的形状，定义了诸如以下的部件。
  - 机翼
  - 飞机机翼
  - 直升机旋翼
  - 涡轮机械叶片
  - 水平和垂直尾翼，鸭舌帽
  - 小翼机
  - 铁塔/支杆
  - 机舱（由流向剖面定义）
- 第2类：身体横截面类型的形状，定义了诸如以下的组件。
  - 飞机机身（横截面）
  - 转子轮毂和护罩
  - 渠道、管道和管子
  - 轴对称体
  - 抬升机体
  - 机舱（当由横截面定义时）



\* 工程师/科学家-技术研究员，Enabling Technology & Research, PO Box 3707, Seattle, WA 98124 / MS 67-LF, AIAA会员。

定义形状的特定设计特征确实相当依赖于应用以及流动环境，特别是巡航马赫数。在一些高度集成的配置中，如高超音速波浪器，单个部件可能不容易辨别。一些部件，如机舱，可以利用这两种基本类型中的任何一种来定义。例如，机舱可以用围绕机舱中心线圆周分布的机翼型截面来定义。机舱也可以由沿机舱轴线分布的体型截面来定义。

以前的一篇论文<sup>1</sup>，主要是关于具有圆头和尖尾的第一类二维机翼形状。提出了一种新的和强大的方法来描述这种几何形状。在本文中，该方法被扩展到代表第二类几何形状以及一般三维几何形状。

我们将对上一篇论文中提出的方法进行简要描述和回顾，因为对这些信息的了解对于理解本文中提出的方法的扩展至关重要。讨论了用基本形状的分布来表示任意的三维几何形状的概念。研究表明，以前为二维机翼和公轴对称体或机舱开发的方法，可以用来数学地描述基本形状以及相当任意的三维几何形状的分布。该方法在包括机翼和机舱在内的各种三维几何形状中的应用被展示出来。

## II. 圆鼻翼的表现

一个典型的亚音速机翼截面如图1所示。如图所示的圆鼻翼，在前缘有一个无限的斜率和一个无限的二阶导数，在翼面上的曲率变化很大。因此，机翼的数学描述必须处理机翼表面上相当复杂的非解析函数。因此，通常需要大量的“ $x, z$ ”坐标，并仔细选择插值技术，以便对凸面机翼的表面进行数学或数字描述。

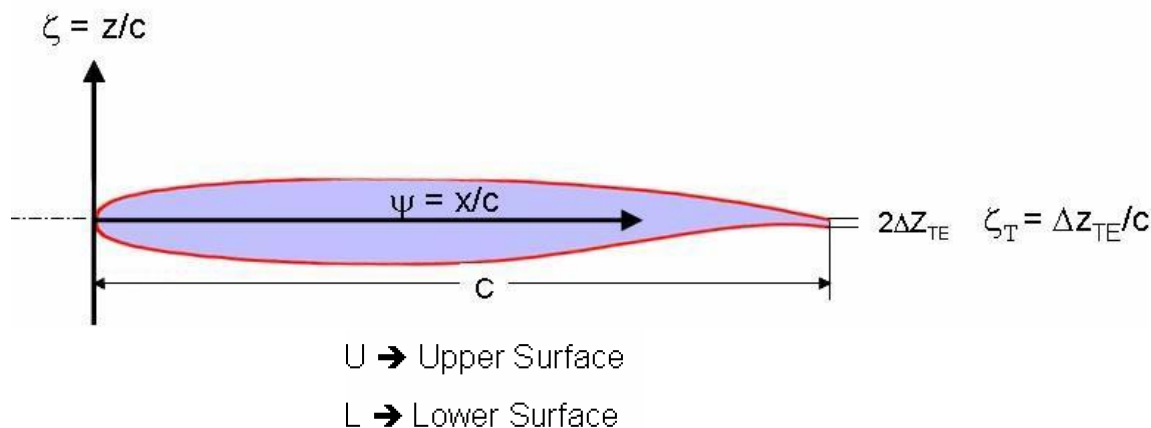


图1：典型的机翼截面

在任何特定的空气动力学设计优化过程中，机翼的数学表示法的选择，以及优化算法类型的选择，对以下事情有深刻的影响。

计算时间和资源

设计空间的范围和一般性质，决定了设计空间中包含的几何图形是否平滑或不规则，甚至是物理上的现实或可接受的。

如果一个有意义的“最优”甚至包含在设计空间中的话

如果存在最佳设计，是否可以找到它们。

几何图形的表示方法也会影响到所选优化过程的适用性。例如，使用离散坐标作为设计变量可能不适合与遗传优化过程一起使用，因为所产生的设计空间可能有大量具有凹凸不平表面的机翼，从而使找到最佳平滑度的可能性几乎不可能。

任何几何表现技术的理想设计特征包括：。

- 表现良好，能产生平滑和逼真的形状
- 数学上高效和数字上稳定的过程，快速、准确和一致
- 灵活性
  - 需要相对较少的变量来代表足够大的设计空间，以包含各种设计条件和约束条件下的最佳空气动力学形状
  - 允许指定关键设计参数，如前缘半径、船尾角、机翼闭合。
  - 为设计和编辑曲线的形状提供方便的控制手段
- 直观 – 几何算法应该有一个直观的几何解释。
- 系统性和一致性 – 表示、创建和编辑不同类型的曲线（如直线、圆锥曲线和立方曲线）的方式必须相同。
- 稳健性 – 所表示的曲线在几何变换（如平移、旋转和仿射变换）下不会改变其几何形状。

常用的几何体表示方法通常不能满足完整的理想特征<sup>1</sup>。

### III. 翼面几何学的数学描述

参考文献1中用于开发改进的机翼几何表示方法的方法是基于作者过去经常成功使用的技术，即开发有效的计算方法来处理数值上的困难函数。

在固定的笛卡尔坐标系中描述的圆鼻翼的情况下，表面几何的斜率和2nd导数在机头处是无限的，在整个机翼表面发生了巨大的曲率变化。因此，机翼表面的数学特征是非解析函数，在机头的所有导数中都有奇点。

用于开发一种有效的、行为良好的方法来对这种几何形状进行几何描述的技术包括以下步骤。

1. 建立一个必要的和足够的一般数学方程来描述任何圆鼻/尖尾翼的几何结构。
  2. 检查该数学表达式的一般性质，以确定该数学表达式中作为数字奇异性来源的元素
  3. 重新排列或转换数学表达式的各部分，以消除数字奇异性。
  4. 这导致识别和定义了一种“形状函数”转换技术，使利用这种形状函数的机翼“设计空间”成为一个简单的、行为良好的分析函数，除了拥有固有的强大的平滑能力外，还具有易于控制的关键物理设计特征。
  5. 随后，一个“类函数”被引入，以使该方法适用于各种基本的二维机翼和轴对称机舱和机体的几何形状。
- 下面将讨论这一方法的摘要。

代表图1所示典型机翼几何形状的数学表达式的一般和必要形式是：。

$$\zeta(\psi) = \sqrt{\psi} \cdot (1 - \psi) \cdot \sum_{i=0}^N A_i \cdot \psi^i + \psi \cdot \zeta_T \quad (1)$$

其中  $\psi = x/c$   $\zeta = z/c = z/c$  和  $\zeta_T = \Delta\zeta_{TE}/C$

该术语  $\sqrt{\psi}$  是唯一能提供圆鼻子的数学函数。

术语  $(1-\psi)$  是为确保尖锐的尾部边缘而要求的。

术语  $\psi \cdot \zeta_T$  提供了对后缘厚度的控制。

术语  $\sum_{i=0}^{\infty} A_i \psi^i$  表示一个通用函数，该函数描述圆鼻尖尾。

这一术语是为了方便地表示为一个幂级数，但它可以用任何适当的良好行为解析数学函数表示。

#### IV. 翼片形状的功能

基本机翼方程的非分析特性的来源与方程1中的平方根项有关。让我们定义形状函数  $1^c S(\psi)^T$ ，它是通过首先减去基底面积项，然后除以圆鼻和尖头项而从基本几何方程中得到的。

$$S(\psi) \equiv \frac{\zeta(\psi) - \psi \zeta_T}{\sqrt{\psi} \cdot [1 - \psi]} \quad (2)$$

代表 “S” 函数的方程由方程1和2得到，成为相当简单的表达

$$S(x/L) = \sum_{i=0}^N \left[ A_i \cdot \left[ \frac{x}{L} \right]^i \right]$$

形状函数“方程是一个简单的、行为良好的分析方程，“眼睛”被很好地采用，以看到机翼的代表细节特征，并在各种几何形状之间进行关键比较。

在参考文献1中显示，机头半径、后缘厚度和船尾角与“S()”函数的唯一边界值直接相关。

$x/c=0$ 处的形状函数值与机翼前缘机头半径直接相关，关系为：

$$S(0) = \sqrt{2R_{LE} / C}$$

$x/c=1$ 处的形状函数值与机翼舟尾角和后缘厚度Zte直接相关，关系如下。

$$S(1) = \tan \beta + \frac{\Delta Zte}{C}$$

因此，在转换后的坐标系中，指定“S”函数的端点提供了一个简单的方法来定义和控制前缘半径、封闭船尾角和后缘厚度。图2显示了实际机翼几何形状与相应形状函数的转换实例。恒定的Zmax高度线和恒定的船尾角线的变换，也在变换后的平面上显示为曲线。

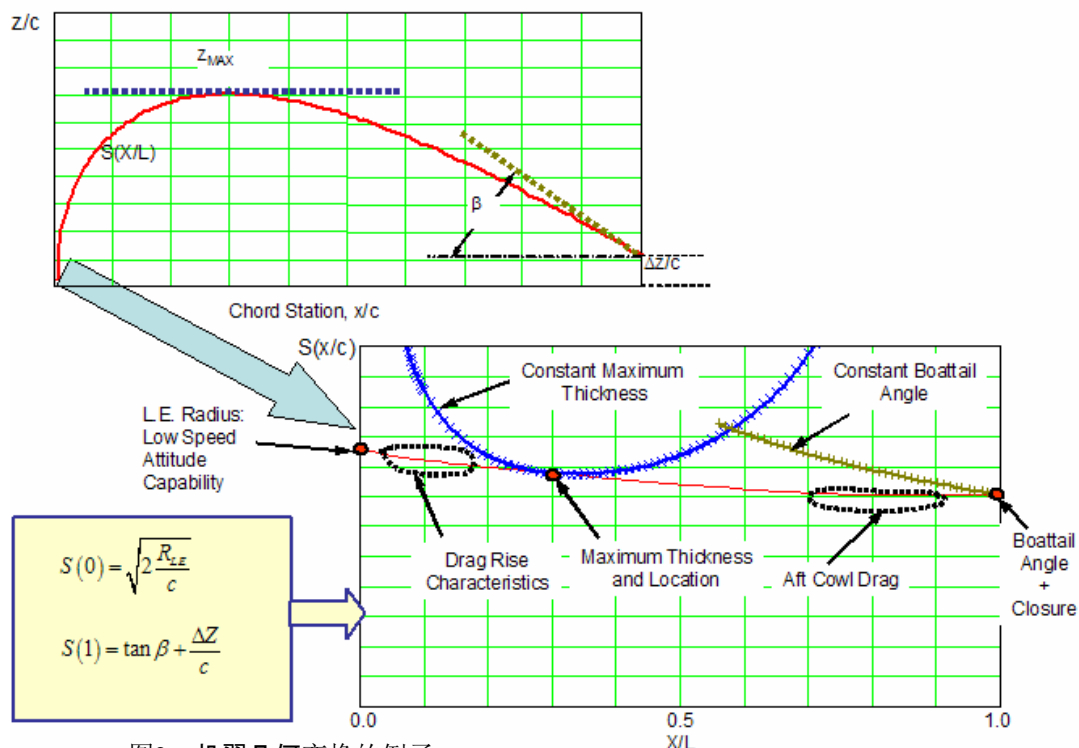


图2：机翼几何变换的例子

这个例子中的机翼的形状函数被认为是一条近似的直线，零点的值与前缘曲率半径有关，而后端的值等于船尾角的切线加上后缘厚度/弦长的比率。很容易看出，形状函数确实是一个非常简单的分析函数。如图所示，机翼上影响其阻力和性能特征的区域在形状函数曲线上很容易看到。此外，形状函数提供了对机翼关键设计参数的简单控制。

术语  $\sqrt{\psi} \cdot [1 - \psi]$  将被称为 "类函数"  $C()$  具有一般的形式

$$C_{N2}^{N1}(\psi) = (\psi)^{N1} [1 - \psi]^{N2} \quad (6)$$

对于圆头机翼  $N1 = 0.5$  和  $N2 = 1.0$

在参考文献1中显示，类函数中指数的不同组合定义了各种基本的几何图形的一般类别。

- $C_{1.0}^{0.5}(\psi) \rightarrow$  定义了一个NACA型圆头和尖尾的机翼。
- $C_{05}^{0.5}(\psi) \rightarrow$  定义了一个圆头/圆尾的椭圆机翼，或一个椭圆体的旋转。
- $C_{1.0}^{1.0}(\psi) \rightarrow$  定义了一个双凸形机翼的尖头和尖尾的机翼，或一个椭圆体。
- $C_{0.75}^{0.75}(\psi)$  定义一个西尔斯哈克机身，这是超音速最小波阻体指定的体积。
- $C_{0.25}^{0.75}(\psi) \rightarrow$  定义了一个低阻力的弹丸 (6.5)
- $C_{0.001}^{1.0}(\psi) \rightarrow$  定义了一个锥形或楔形的机翼。 (6.6)
- $C_{0.001}^{0.001}(\psi) \Rightarrow$  定义了一个矩形，圆形管道或圆形杆。 (6.7)

类函数 “用于定义几何体的一般类别，而”形状函数 “则用于定义几何体类别中的特定形状。

定义一个机翼形状函数并指定它的几何类，相当于定义实际的机翼坐标，这些坐标是由形状函数和类函数得到的。

$$\zeta(\psi) = C_{N2}^{N1}(\psi) \cdot S(\psi) + \psi \cdot \zeta_T \quad (7)$$

参考文献1包含了各种二维机翼和公轴对称体及机舱的形状函数。

## V. 表示形状函数

本报告将介绍一些不同的代表形状函数的技术，用于描述各种几何形状。最简单的方法如图3所示。该图显示了从所有形状函数中最简单的单位形状函数得出的基本基线机翼几何形状。 $S(\psi) = 1$  基线机翼的简单变化也显示了前缘半径和后缘船尾角的个别参数变化。

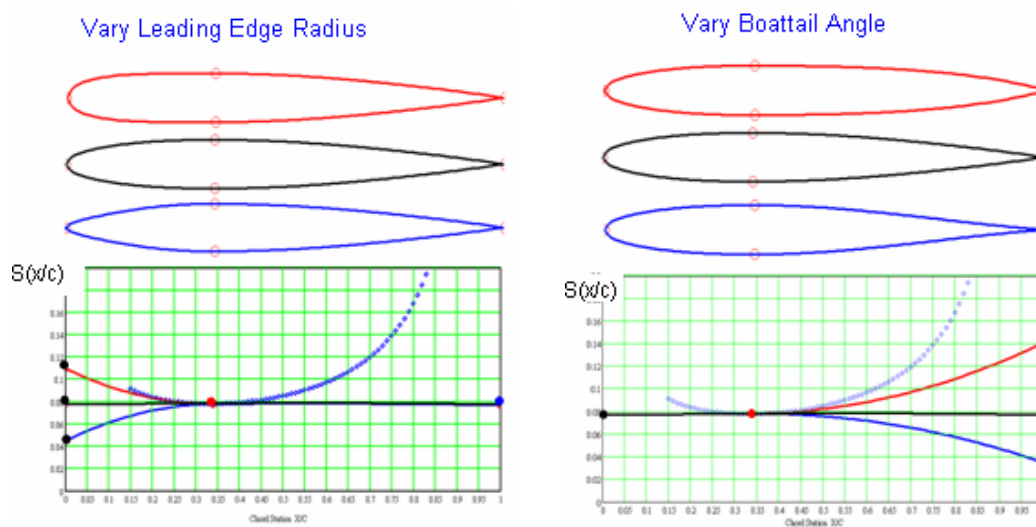


图3：单变量机翼变化的例子

左图显示了前缘半径和机翼前部的变化，通过改变 $S(0)$ 的值得到的二次方程，在 $x/c$ 处与 $Z_{max}$ 曲线相切的 $Z_{max}$ 。最大厚度、最大厚度位置和船尾角保持不变。

右图显示了通过改变尾端形状因子的值， $x/c=1$ ，而机翼前端不变的情况下得到的船尾角变化。在每一个例子中，机翼形状的变化都是由一个单一的变量控制的，在所有情况下，产生的机翼都是平滑和连续的。

图4显示了一个五变量的对称性定义。 $C_{1.0}^{0.5}(\psi)$ 使用形状函数的机翼。该

相应的机翼几何形状也被显示出来。变量包括

1. 前缘半径
2. 最大厚度
3. 最大厚度的位置
4. 船尾角度
5. 封闭厚度



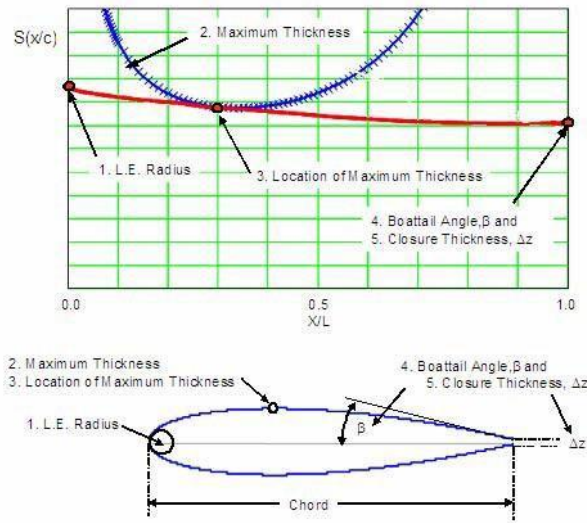


图4：对称机翼五种变量的定义

通过对上表面和下表面应用同样的技术，可以定义一个凸面机翼。在这种情况下，上表面机头处的形状函数值 $S(0)$ 的大小与下表面的形状函数值相等。这保证了前缘半径从机翼的上表面到下表面是连续的。后缘的半厚度值对于两个表面也是相等的。因此，如图5所示，需要八个变量来定义前述的凸面机翼的参数集。

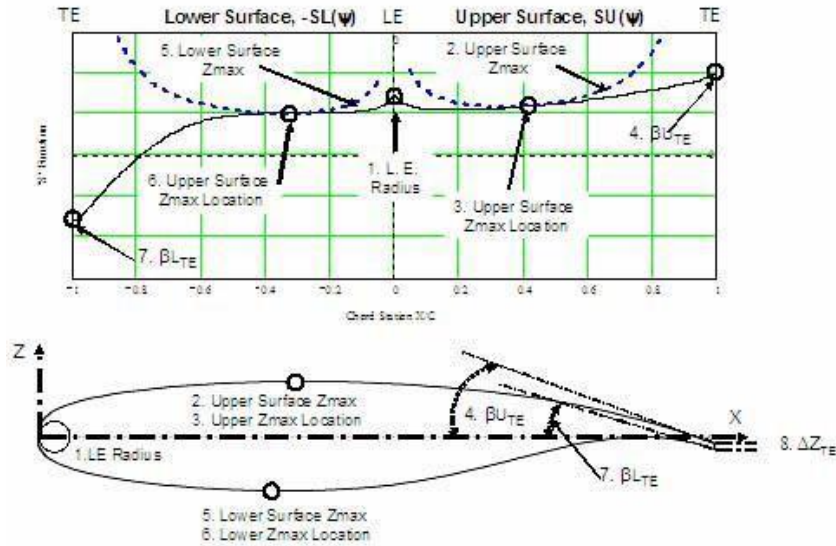


图5：凸面机翼八大变量定义定义

在图4和图5所示的例子中，机翼的关键定义参数都可以用形状函数轻松控制。

## VI. 翼面分解为组件形状

在图6中，显示了由 $S(\psi)=1$ 定义的单位形状函数，可以分解为两个分量的形状函数

$S1(\psi)=1-\psi$ ，对应于机头为圆形、船尾角为零 的机翼

$s2(\psi)=\psi$  对应于机头半径为零、船尾角为有限的机翼。



- "Sn(x)" Determines the Specific Geometry Shape

$$\zeta(\psi) = (\psi)^{N1} (1-\psi)^{N2} [S1(\psi) + S2(\psi)]$$

$$Sn(x/c) = S1(x/c) + S2(x/c)$$

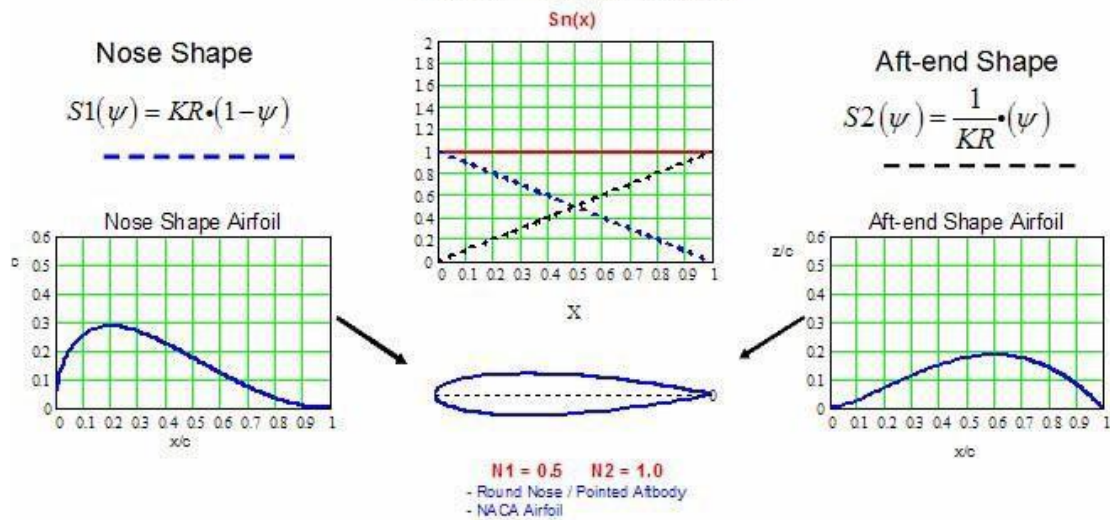


图6：机翼分解为组件形状或基函数

图中显示了一个任意的比例因子KR因子，作为两个组件机翼方程中的一个加权因子。如图7所示，通过改变比例因子KR，可以改变前缘半径和船尾角的大小。这就形成了一个前缘半径、船尾角和最大厚度位置不同的机翼系列。

- "Sn(x)" Determines the Specific Geometry Shape

$$\frac{z}{c} \left( \frac{x}{c} \right) = \left( \frac{x}{c} \right)^{N1} \left( 1 - \frac{x}{c} \right)^{N2} [S1\left(\frac{x}{c}\right) + S2\left(\frac{x}{c}\right)]$$

$$Sn(x/c) = S1(x/c) + S2(x/c)$$

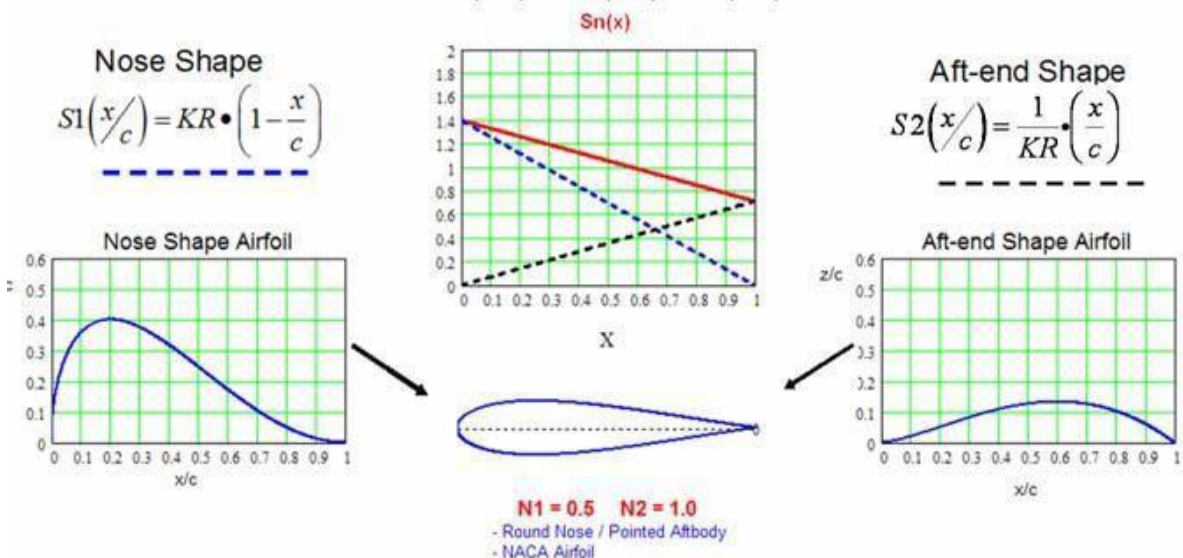


图7：通过改变组件形状函数来改变机翼的几何形状

如图8所示，通过用伯恩斯坦多项式表示形状函数的 "N" 阶，可以将单位形状函数进一步分解为组成机翼。

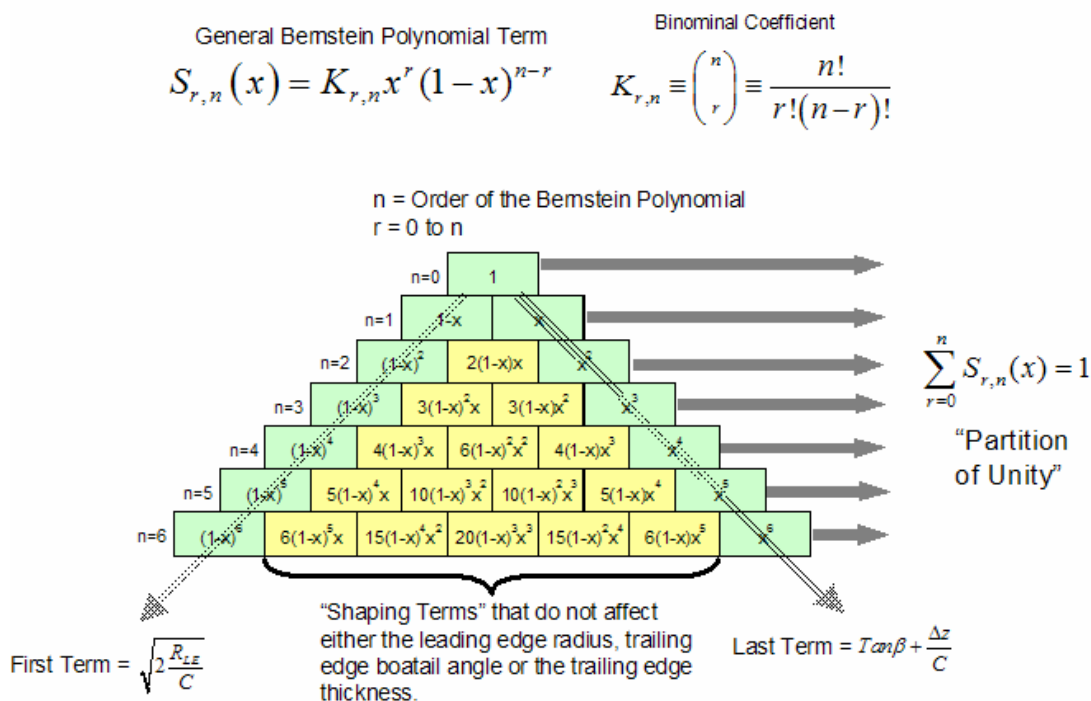


图8：单位形状函数的伯恩斯坦多项式分解

以伯恩斯坦多项式的递增阶数表示单位形状函数，可以将单位形状函数系统地分解为可扩展的组成部分。这是 "统一分割" 属性的直接结果，该属性指出，构成任何阶的伯恩斯坦多项式的项之和都等于1。这意味着每个伯恩斯坦多项式都代表单位形状函数。因此，多项式中的各个项可以按比例定义各种各样的机翼几何形状。

任何阶数 "n" 的伯恩斯坦多项式都是由形式为 "n+1" 的项组成。

$$S_{r,n}(x) = K_{r,n} x^r (1-x)^{n-r}$$

r=0至n

n = 伯恩斯坦多项式的阶数

在上述方程中，系数因素  $K_{r,n}$  是二项式系数，定义为：

$$K_{r,n} \equiv \binom{n}{r} \equiv \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

对于所选择的代表单位形状函数的任何阶的伯恩斯坦多项式，只有第一个项定义了前缘半径，只有最后一个项定义了船尾角。其他介于两者之间的项是 "塑形项"，既不影响前缘半径，也不影响后缘船尾角。

图9显示了使用不同阶数的伯恩斯坦多项式对单位形状函数进行分解的例子，以及相应的组成机翼。

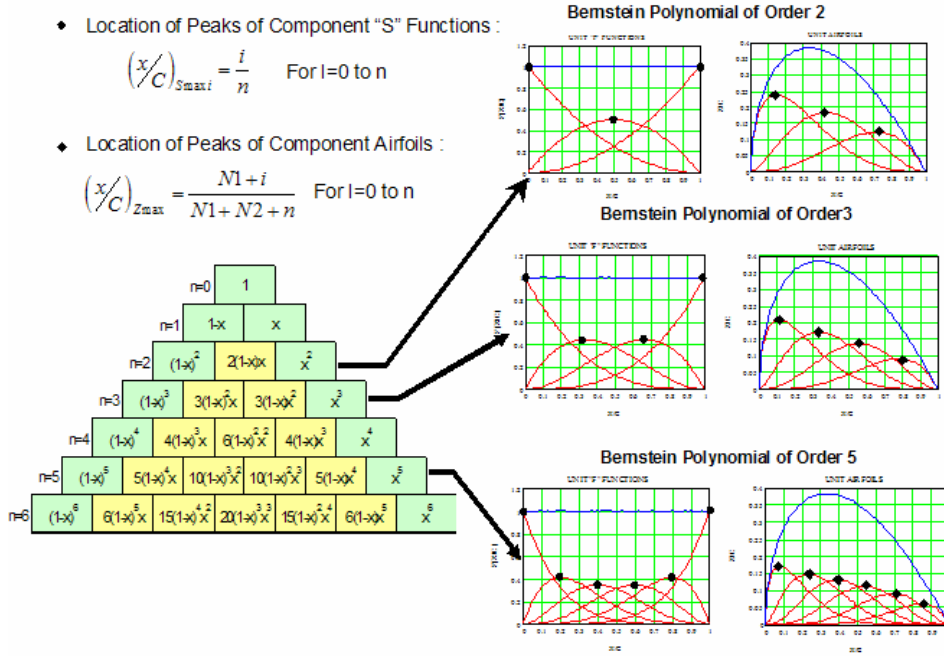


图9：伯恩斯坦多项式提供"自然形状"

分量 "S" 函数的峰值位置沿弦线等距分布，如公式所定义。

$$(\psi)_{S_{\max i}} = \frac{i}{n} \quad (10)$$

组成机翼的峰值的相应位置也是沿机翼的弦线等距分布，并以类函数指数和伯恩斯坦多项式的阶数来定义，其公式为：。

$$(\psi)_{Z_{\max}} = \frac{N1+i}{N1+N2+n}$$

使用伯恩斯坦多项式来表示现实中的机翼形状函数的技术，定义了一套系统的机翼形状组成，可以按比例来表示各种机翼的几何形状。

## VII. 使用单位形状函数的伯恩斯坦多项式表示法定义的机翼

凸面机翼的上表面和下表面，可以分别用任何选定的阶数n的伯恩斯坦多项式来定义，以描述一组由 "待定" 系数缩放的分量形状函数，如以下公式所示。

组件函数定义为  $S_i(\psi) = K_i \psi^i (1-\psi)^{n-i}$

Ki 定义为  $K_i \equiv \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$

让机翼上表面和下表面的后缘厚度比定义为：。

$$\Delta\xi_U = \frac{zu_{TE}}{C} \text{ and } \Delta\xi_L = \frac{zl_{TE}}{C}$$

机翼的类函数是。

$$C_{N2}^{N1}(\psi) = \psi^{N1} \cdot (1 - \psi)^{N2}$$

上表面的整体形状函数方程为  $Su(\psi) = \sum_{i=1}^n Au_i \cdot S_i(\psi)$

上表面的定义方程  $(\zeta)_{Upper} = C_{N2}^{N1}(\psi) \cdot Sl(\psi) + \psi \cdot \Delta\xi_{Upper}$

下表面同样由方程定义。  $Sl(\psi) = \sum_{i=1}^n Al_i \cdot S_i(\psi)$

系数 $Au_i$ 和 $Al_i$ 可以通过各种技术确定，这取决于特定研究的目标。一些例子包括：

- 数字化设计优化应用中的变量
- 最小二乘法拟合以匹配指定的几何形状
- 参数化的形状变化。

利用伯恩斯担多项式来表示机翼的方法具有以下独特和非常强大的特性<sup>1</sup>。

- 这种机翼表现技术，捕捉到了光滑机翼的整个设计空间
- 整个设计空间中的每个机翼都可以从单位形状函数机翼中推导出来
- 因此，设计空间中的每个机翼都可以从其他每个机翼中推导出来

## VIII. 翼面代表实例 - RAE2822

图10至13显示了类函数/形状函数方法对典型超临界机翼RAE2822的表现能力，其伯恩斯担多项式的阶数不断增加。

图10显示了由130个“x, z”坐标正式定义的机翼几何形状。从这些坐标计算出来的上表面和下表面的形状函数也被显示出来。与实际的机翼上下表面相比，形状函数曲线被认为是非常“简单”的曲线。用最小二乘法计算的形状函数与定义坐标相匹配，并对应于伯恩斯担多项式的递增阶数，与从实际RAE2822几何坐标图11确定的形状函数相比较。图12显示了相应的机翼几何表示。各分量形状函数的峰值位置和相应的分量机翼，在各个图中都有说明。

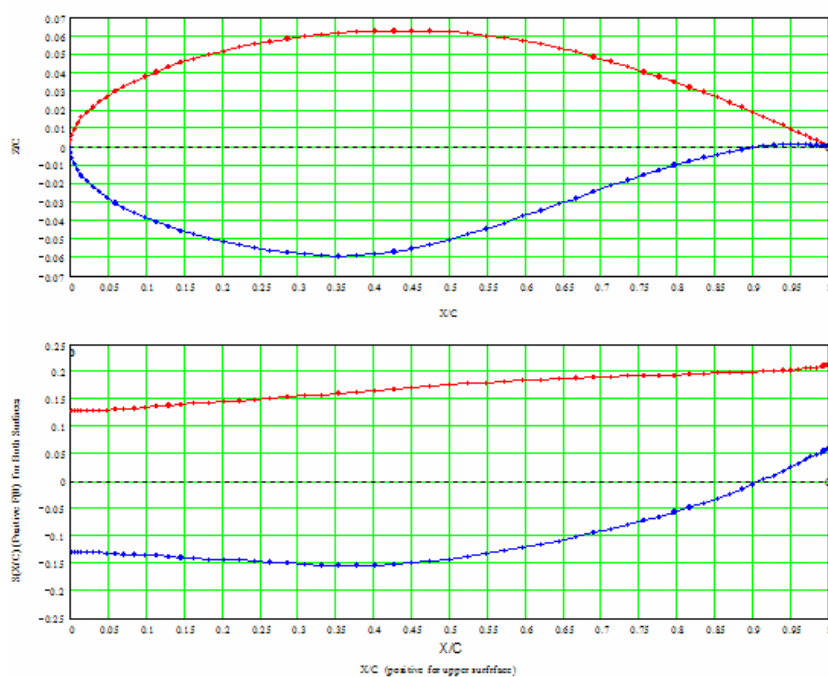


图10：RAE 2822机翼的几何形状--（由130个 "X, Z"坐标定义）。

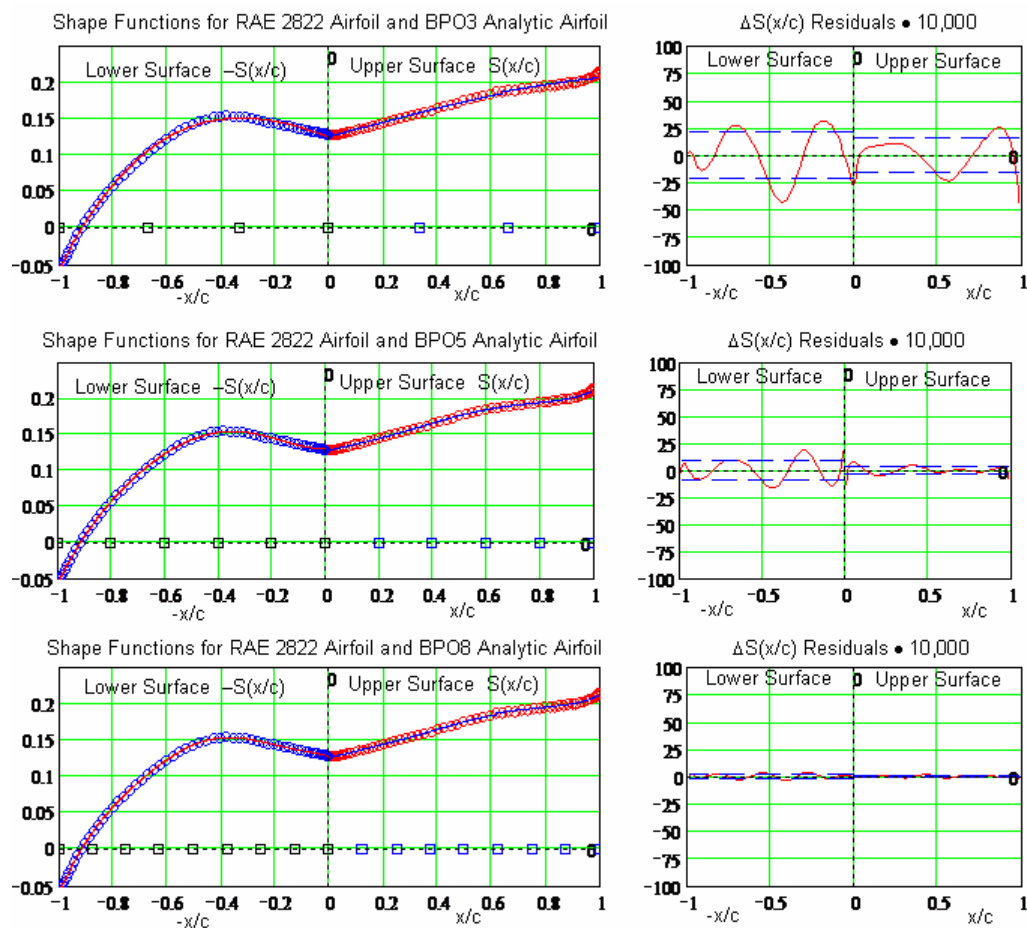


图11：RAE2822形状函数的收敛性研究

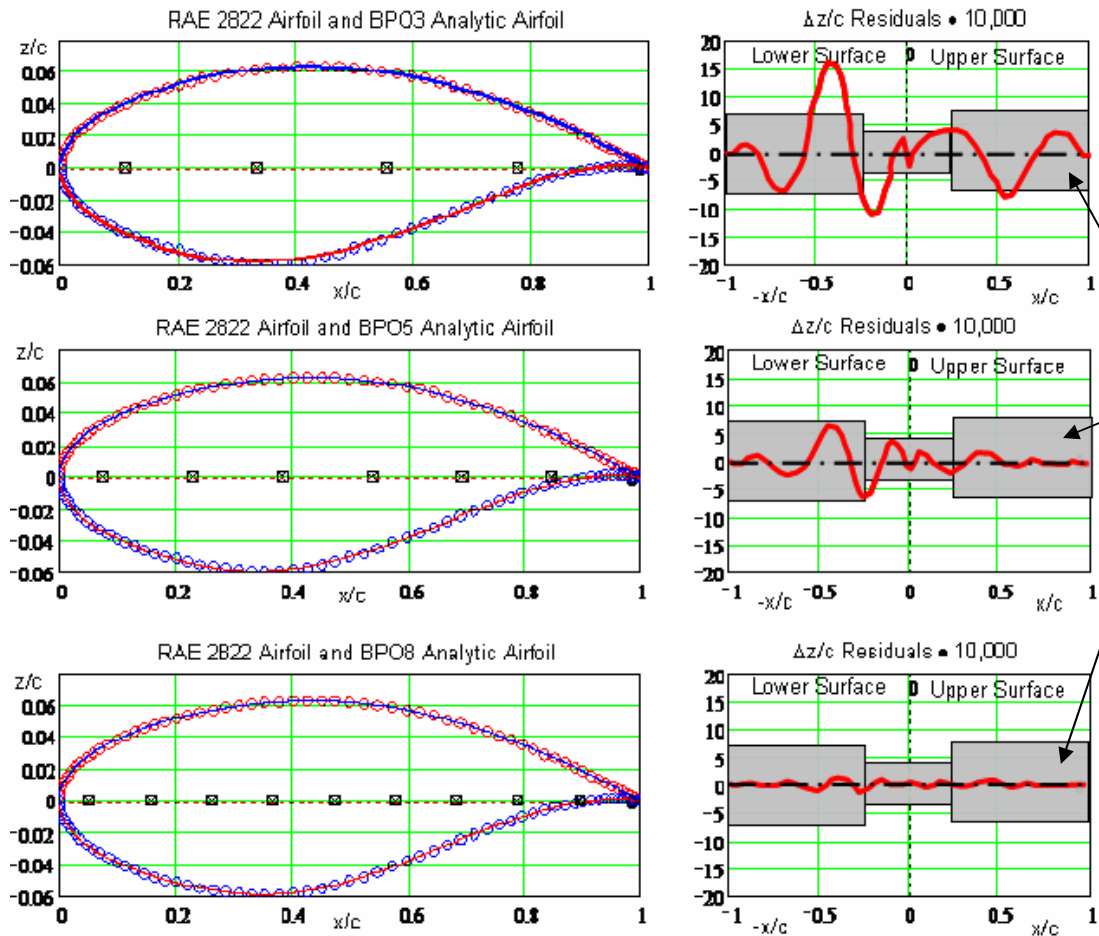


图12：RAE2822的几何学收敛性研究

图中还显示了形状函数残差和表面坐标残差。实际的和近似的形状函数和表面坐标之间的差异，即使对于3阶的伯恩斯坦多项式，BPO3，也很难分辨出来。残差曲线的震荡性质是任何最小二乘法拟合的典型。BPO5和BPO8的结果表明，随着代表伯恩斯坦多项式阶数的增加，残差迅速而均匀地消失了。BPO5和BPO8近似机翼与实际几何形状之间的差异完全在典型的风洞模型公差之内。

相应的表面坡度、二阶导数和表面曲率的详细比较也显示在参考文献1中。还使用TRANAIR3全势CFD代码与耦合边界层对实际和代表的几何形状之间的表面压力分布进行了计算。所有BPO5和更大的机翼的升力预测与RAE2822的预测相符。BPO8及以上机翼的阻力预测和压力分布与RAE2822的预测完全一致。

参考文献1中也显示了其他一些机翼几何形状类似结果。几何形状、CP和力的比较结果意味着，一个相对低阶的BP形状函数机翼，只有相对较少的变量，可以密切代表任何机翼1。

图13清楚地表明了机翼的形状函数表示法在数学上的简单性。在该图中，机翼表面的斜率、2nd 导数和表面曲率与由形状函数定义的机翼表示法定义的机翼的相应数值进行了比较。



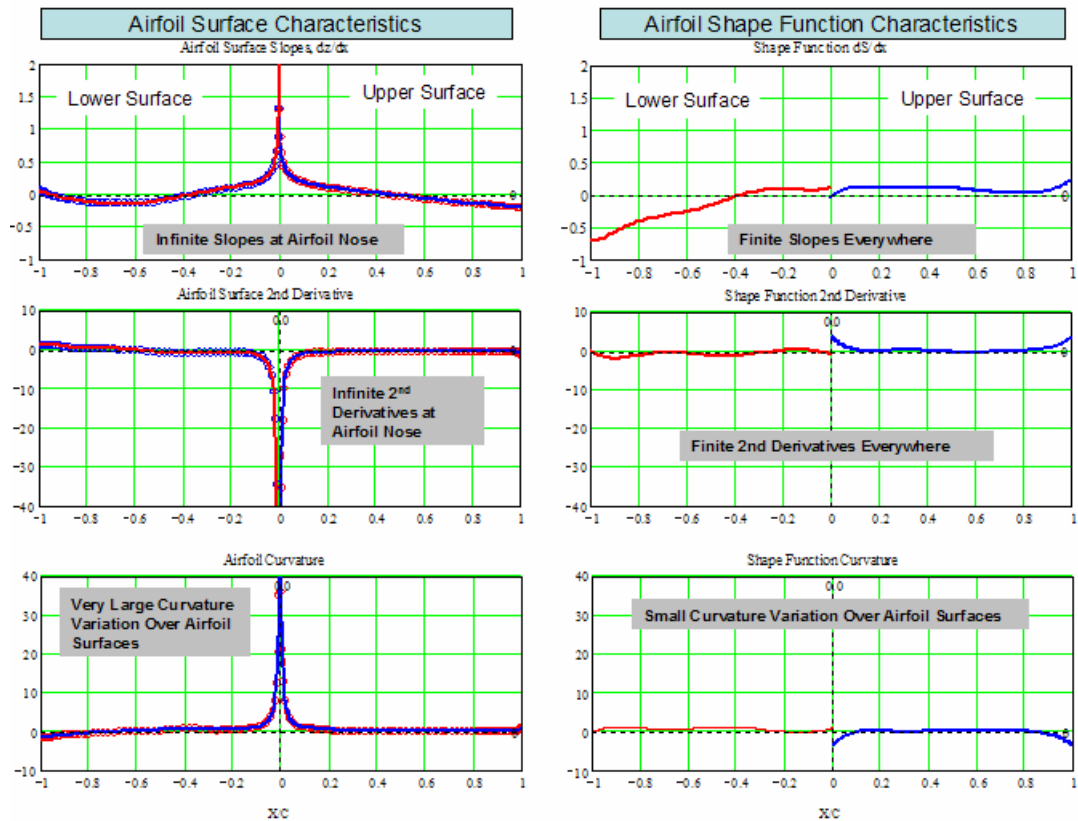


图13：形状函数的数学简单性 - RAE 2822

RAE2822机翼的斜率和二阶导数在机头处是无限的，而且曲率在机翼的表面上变化很大。RAE2822形状函数的斜率和二阶导数是有限的，而且每处都很小，形状函数的曲率基本上为零。这清楚地表明，相对于使用机翼的实际坐标，形状函数机翼表示方法具有明显的数学简单性优势。

之前报道的广泛调查<sup>1</sup>，利用伯恩斯坦多项式表示各种机翼的形状函数方法是否充分，结果表明，相对低阶的伯恩斯坦多项式（通常是BP06到BP09）与机翼的几何形状、斜率和2nd导数以及压力分布和空气动力<sup>1</sup>。结果还表明，较低阶的伯恩斯坦多项式，相当于较少的设计变量（也许是BP04到BP06），应该足以开发最佳设计。

该方法为设计优化提供了系统化的方法选择。优化过程最初可以用与形状函数的低阶BP表示相对应的机翼部件系列进行，以获得一个最佳设计。然后可以增加BP的阶数来进行另一次优化，以确定是否获得了更好的最佳设计。增加BP的阶数是增加设计变量数量的一种系统方法，从而探索最佳解决方案的收敛性。

到目前为止，讨论的重点是二维圆头/尖尾翼。然而，如图14所示，类函数中指数的不同组合定义了各种几何形状的机翼、旋转体和公转对称机舱的基本通用类。

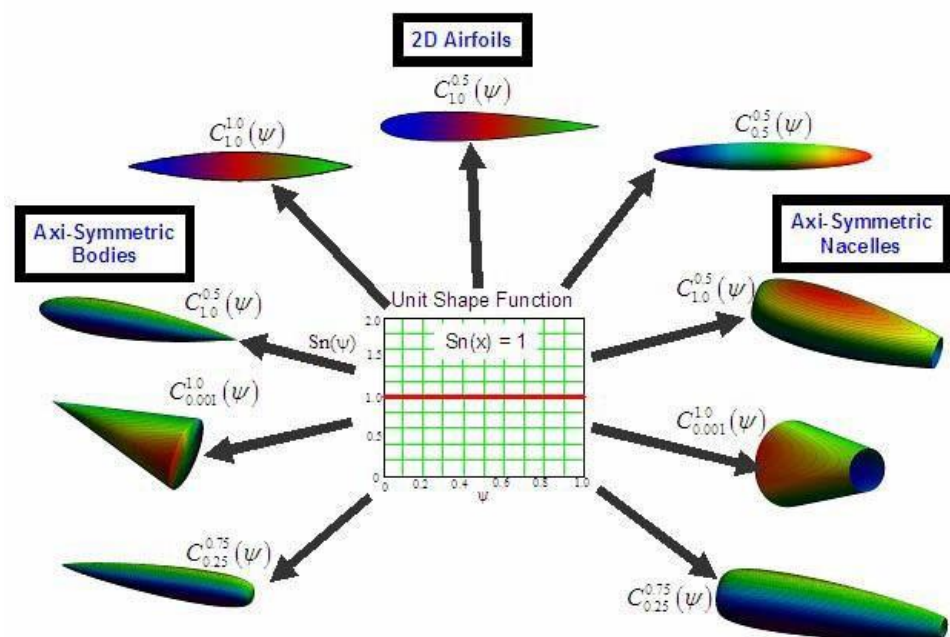


图14：从单位形状函数推导出的几何形状

因此，使用类函数可以使之前讨论的形状函数方法以及研究结论同样适用于各种二维和公轴对称的几何形状。

## IX. 扩展到任意的三维几何图形

表示二维或公转对称几何体的形状函数/类函数方法现在将被证明直接适用于表示作“体型”几何体的第二类空气动力部件的截面形状。让我们首先假设一个身体的横截面是横向对称的，并具有图15所示的椭圆形状。

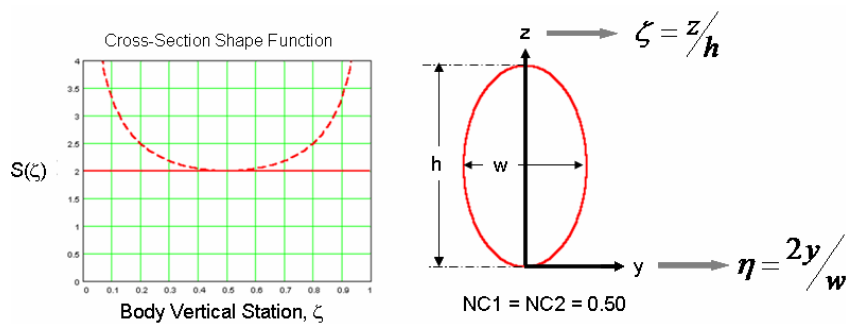


图15：身体横截面的形状函数/类函数表示法

随后，我们将利用类函数将结果推广到其他横截面的几何形状。如图所示，椭圆的方程是

$$\left(\frac{2Y}{w}\right)^2 + \left(\frac{2Z-h}{h}\right)^2 = 1$$

让  $\eta = 2y/w$  且  $\zeta = z/h$

椭圆方程表示为  $\eta^2 + (2\zeta - 1)^2 = 1$

横断面可以用类函数和形状函数表示为:  $\eta = S(\zeta) \cdot C_{0.5}^{0.5}(\zeta)$

截面形状函数只是一个常数:  $S(\eta) = 2$ 。对立面是由以下条件定义的横向对称性。如图16所示, 改变类函数的指数可以提供多种多样的体横截面形状。

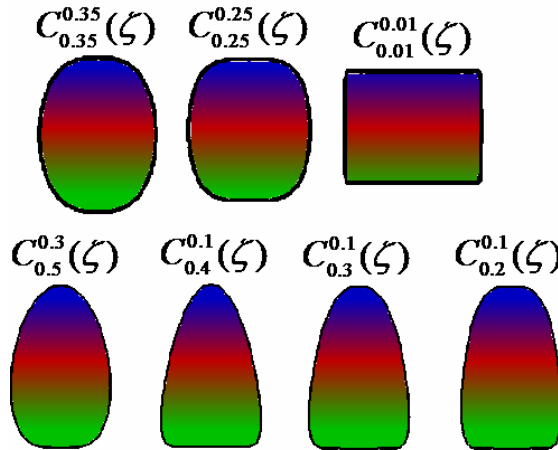


图16: 各种车身横截面形状

另一种描述身体横截面的方法是用形状函数来描述身体横截面的上叶和下叶, 如图17所示。

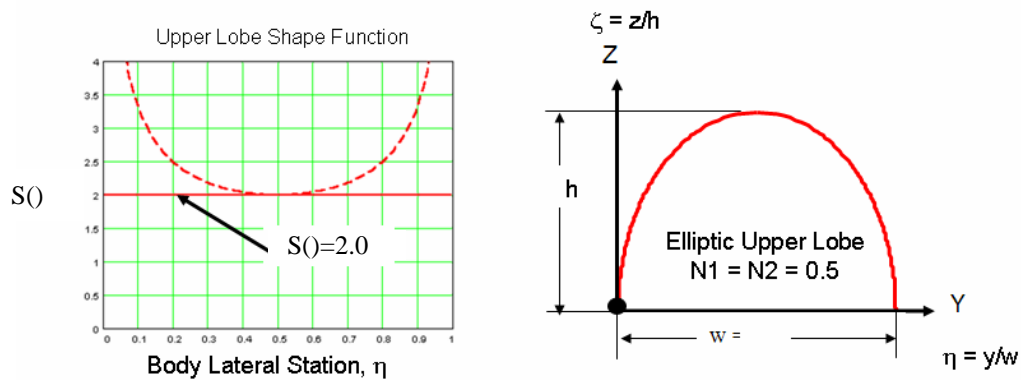


图17: 身体上部或下部叶子形状的表达方法在这种情况下, 上叶的定义方程是

$$\zeta u(\eta) = [S u(\eta) \equiv 2] \cdot C u_{0.5}^{0.5}(\eta)$$

图18显示了各种截面形状的例子, 这些截面形状可以通过独立改变身体截面的上叶和下叶的类函数系数而获得。

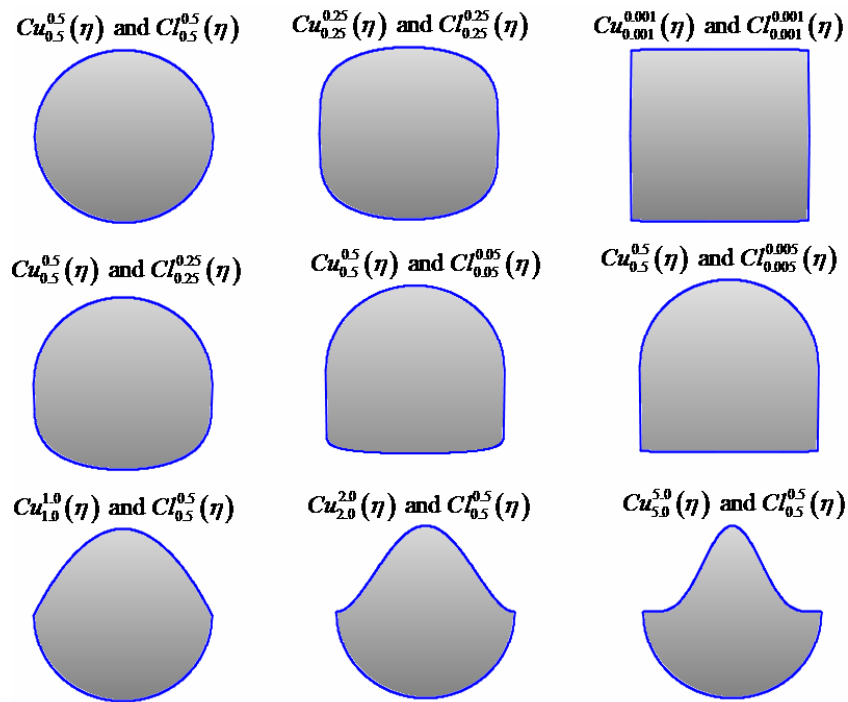
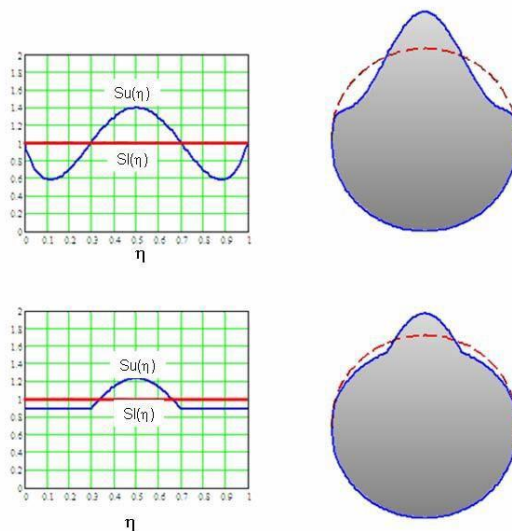


图18：上叶/下叶体横截面示例

图17和图18所示的例子横截面是用简单的单位形状函数但不同的类函数得到的。除了类函数之外，还可以通过改变形状函数的表述来产生非常一般的截面形状。如图19所示，改变上体叶的形状函数可以产生上表面的凸起或整流罩。在所示的例子中，几何形状是通过驾驶舱区域的机身横截面的代表。



一般来说，三维体可以表示为截面形状以及截面形状的分布。这在图20中通过风道、高长径比机翼和超音速型综合机翼体的例子显示出来。

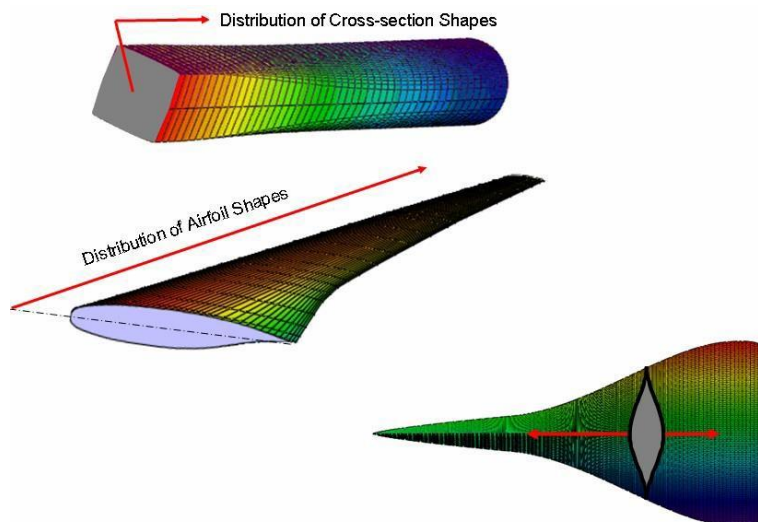


图20：作为形状分布的三维几何体的例子

使用形状函数/类函数方法来描述基本截面形状和沿体轴的形状分布的概念，在图21中显示了一个立方体的简单情况。

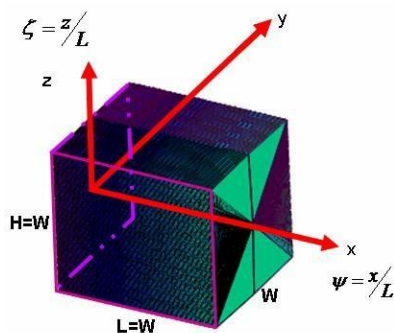


图21：横断面形状和分布的定义

正方形截面可以用一个具有“零指数”的类函数，和一个单位形状函数来描述。纵向面积分布控制着横截面形状的分布。立方体的纵向面积分布可以用一个类似的类函数来表示，图22显示了一个使用形状函数/类函数方法的例子，通过将一个立方体转变为一个等体积的Sears-Haack体，在很少的设计变量下做出明显的几何变化。西尔斯-哈克体的圆形横截面具有单位形状函数和等于类函数指数。

因此，立方体向西尔斯-哈克体的转化很容易通过同时得到。

- 将截面类函数指数从0.005提高到0.5
- 将纵向半径分布类函数指数从0.005提高到0.75
- 增加长度以保持体积不变。

图22显示了在立方体被转化为Sears-Haack体时的一些中间几何形状。

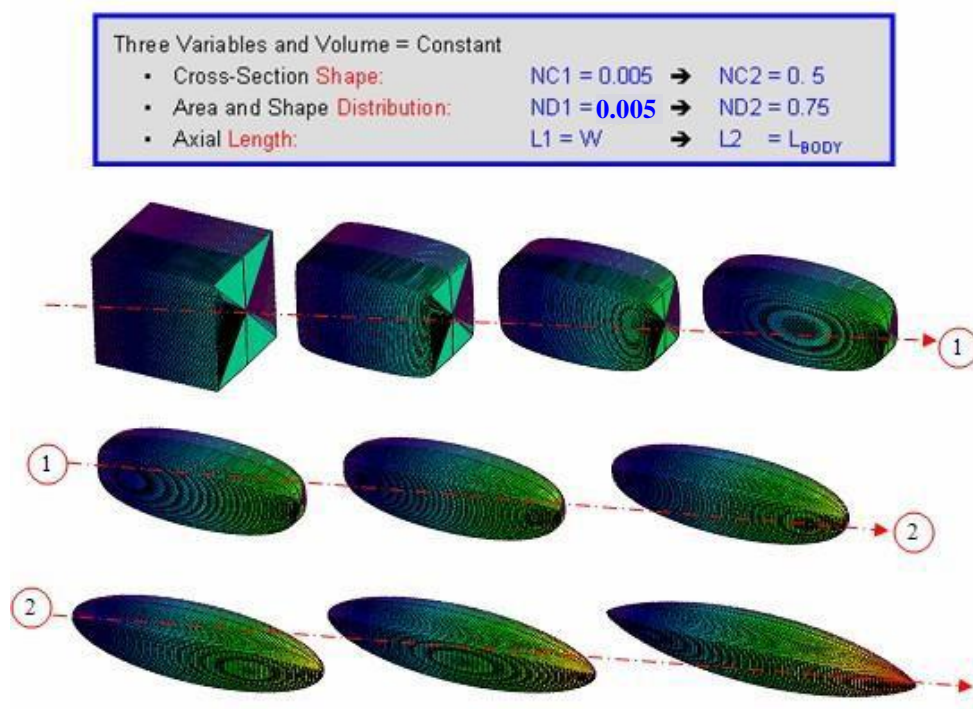


图22：立方体向西尔斯-哈克体的三变量转换

将一个恒定面积的圆形风管转变为一个几何形状从圆形入口到方形喷嘴变化的圆形风管的例子，可以很容易地使用是变量类函数指数来定义，如图23所示。

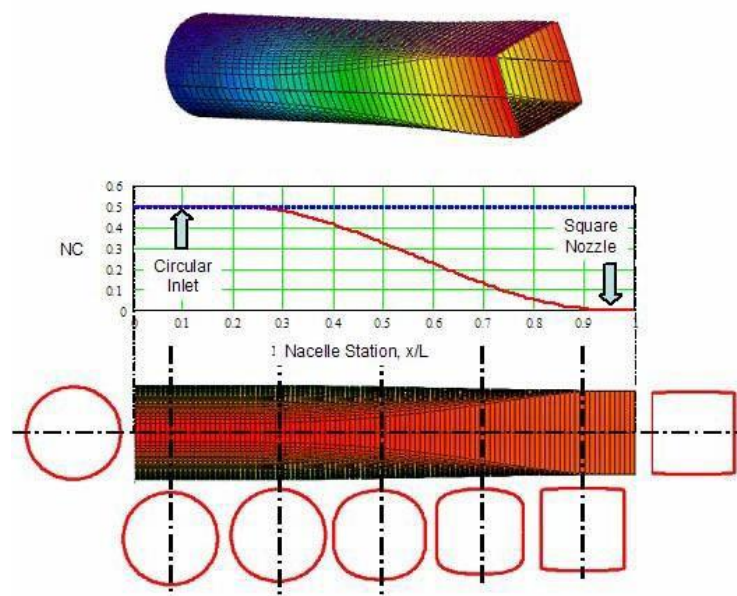


图23：带有方形喷嘴的圆形风道的单变量定义



入口处的初始几何形状是一个用指数等于“0.5”的横截面类函数定义的圆形管道。在这个例子中，风道的几何形状从0到20%的长度都保持恒定的横截面。风道最后5%的长度有一个方形截面，其类函数指数等于“0.005”。正方形的宽度/深度被确定为与圆形进气口面积相匹配。

在长度的20%和95%之间，类函数指数从20%的0.5下降到95%的0.005，两端的斜率为零，呈立方体变化。沿着过渡区域，宽度和深度被按比例缩放，以保持横截面积不变。整个几何形状实际上是由一个单一的变量驱动的，即船尾的恒定类函数指数

这是一个“标量”或“分析”阁楼的例子，其中几何形状是由形状参数沿管道长度的分析性变化产生的。

图24显示了两个三维体，它们总共由5个参数定义。

- 几何形状由横截面类函数和面积分布类函数定义。
- 身体尺寸由三个长度参数定义，包括总长度、宽度和高度。

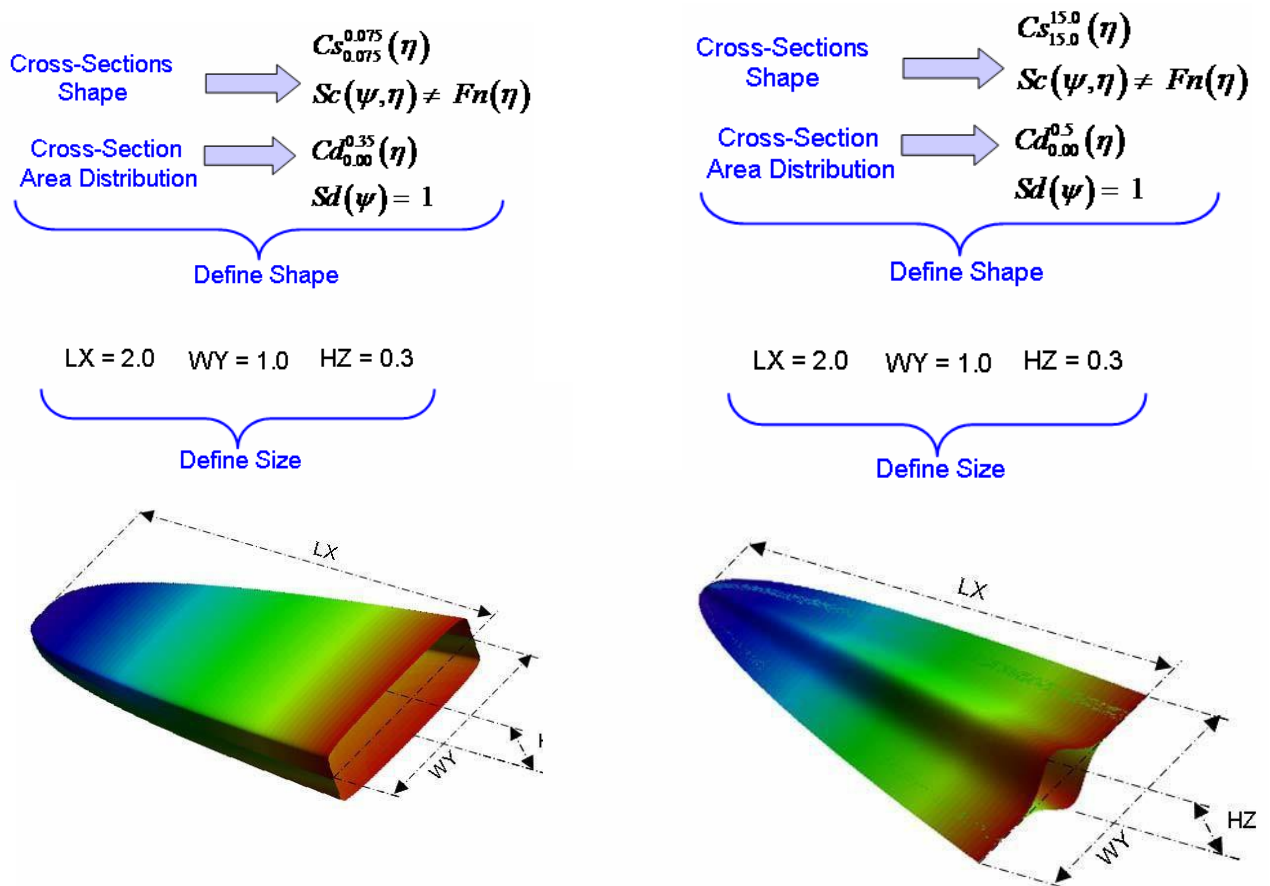

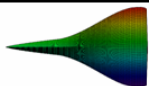


图24：由2个类函数和3个尺寸参数定义的简单三维体例

在图25中，使用与图23中定义风道类似的技术，一个圆形风道被转化为一个几何形状，看起来非常类似于超音速飞机的配置。

PARAMETER		
LENGTH, L	10	100
L/Dmax	5	5
$Cs_{NC}^{NC}(\eta)$	Nc = 0.5	Nc( $\psi$ ) [Figure A]
$e = W/H$	1.0	$\varepsilon(\psi)$ [Figure B]
STATION 1		0.35
STATION 2		0.9
$Cd_{Nd1}^{Nd1}(\eta)$	Nd1 = 0.0 Nd2 = 0.0	Nd1 = 0.75 Nd2 = 0.005

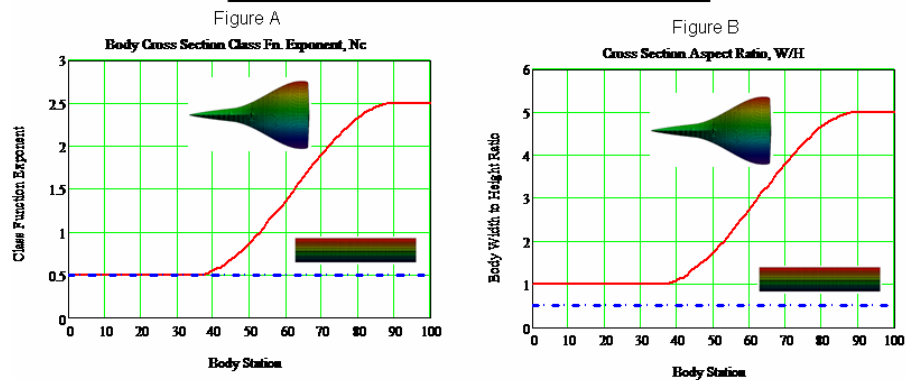


图25:圆柱体在 "超音速运输 "中的转变

这种几何变换是通过总共四个设计变量获得的。这四个设计变量包括：

- 纵向类函数指数。Nd1, Nd2
- 后端横截面类函数指数，NC。
- 舰尾的宽度与高度之比：e2

图26显示了一系列通过最终配置的横截面切割，以说明几何形状过渡的平稳性。

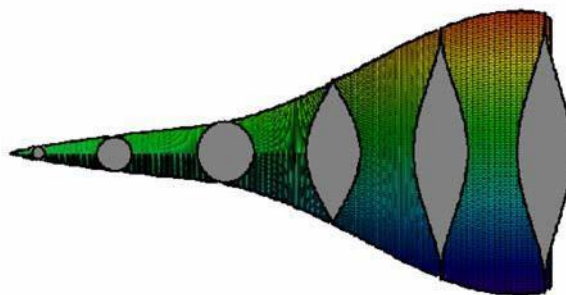


图26：机翼/机身横截面的切面

## X. 机舱设计--2种选择

在使用类函数和形状函数来定义机舱方面有两种选择。这包括

1. 定义冠状线、最大半宽和龙骨线的纵向剖面形状，然后将这些剖面圆周分布在纵轴上，以定义机舱的几何形状
2. 定义横截面形状，并按照面积分布的控制，沿纵轴分布形状。

在接下来的讨论中，我们将重点讨论第1种方案，因为这将提供一个本报告和以前的研究中所显示的许多概念的综合使用示范1。其目的是在使用很少的设计变量的情况下制定详细的机舱定义。

图27显示了使用机翼型截面定义机舱的常用方法，用于冠状线、龙骨线和最大半宽形状。在这个例子中，基本的机翼几何形状由超临界型机翼的BP5形状函数定义表示，因此有6个定义变量。

本例中的龙骨线机翼和最大半宽机翼都在最大厚度站前进行了参数化修改，在前一种情况下增加前缘半径，在后一种情况下减少前缘。这导致增加了两个与所需前缘半径相对应的定义变量。

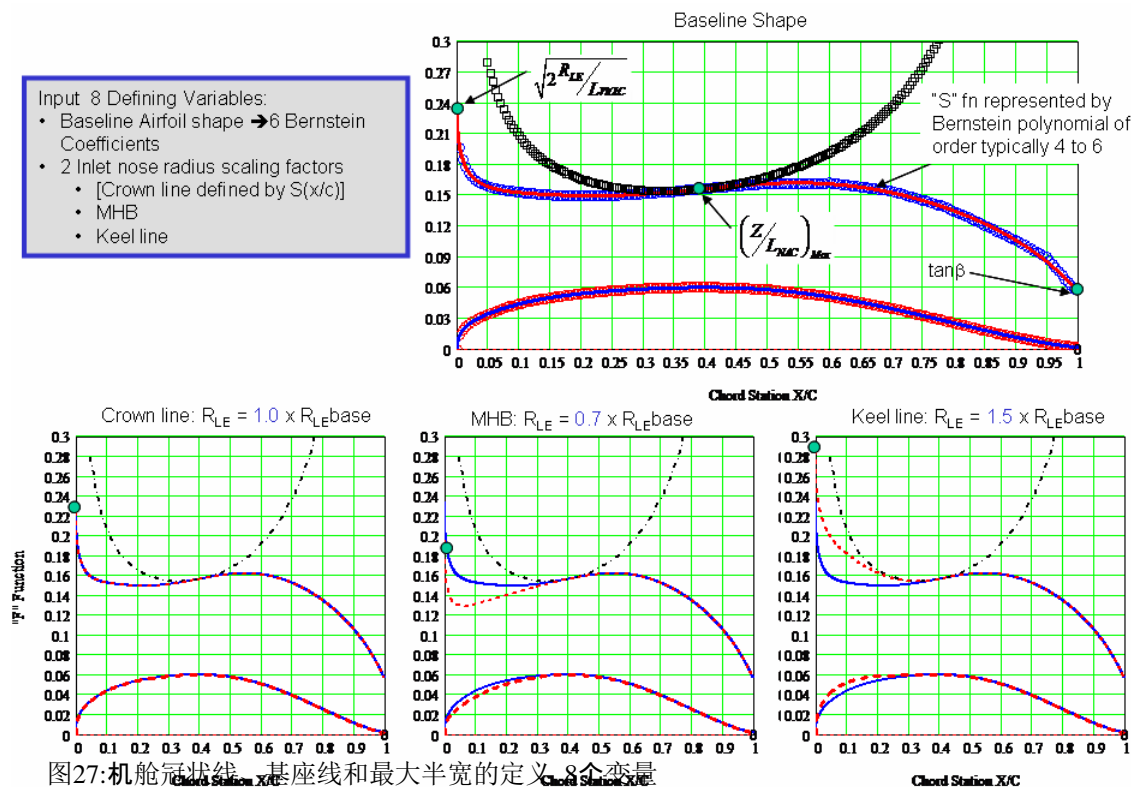


图27:机舱冠状线、基座线和最大半宽的定义，8个变量

机舱在冠部、最大半宽和龙骨之间的外部横截面形状由指数为NU的上叶类函数定义。机舱的下叶也同样由下叶类函数定义，指数为NL。图28显示了这种在机舱周围周向分布纵向机翼形状的方法。这是通过使用截面类函数来实现的，如图所示，类函数指数沿着机舱的长度变化。整个机舱的上叶是用0.5的常数级函数指数来定义的。这导致冠状线和最大半宽翼之间的椭圆/圆形截面形状分布。下叶截面类函数指数等于0.25，到定义站1，位于机舱长度的40%。这导致了从最大半宽的机翼到机舱前部的龙骨线机翼的“压缩”形状分布。

定义站2后的下叶，发生在机舱长度的80%处，是圆形的，类函数指数等于0.5。因此，这导致了一个公轴对称的喷嘴几何形状。

在工位1和工位2之间，连接最大半呼吸几何形状和龙骨几何形状的下叶形状，从工位1的压扁部分到工位2的圆形部分平稳变化。

因此，截面形状分布完全由以下4个设计变量定义。

- 上叶类函数指数，NU
- 下叶类功能，NL
- 被压扁的下叶站的末端，第1站
- 环形下叶站的起点，2号站

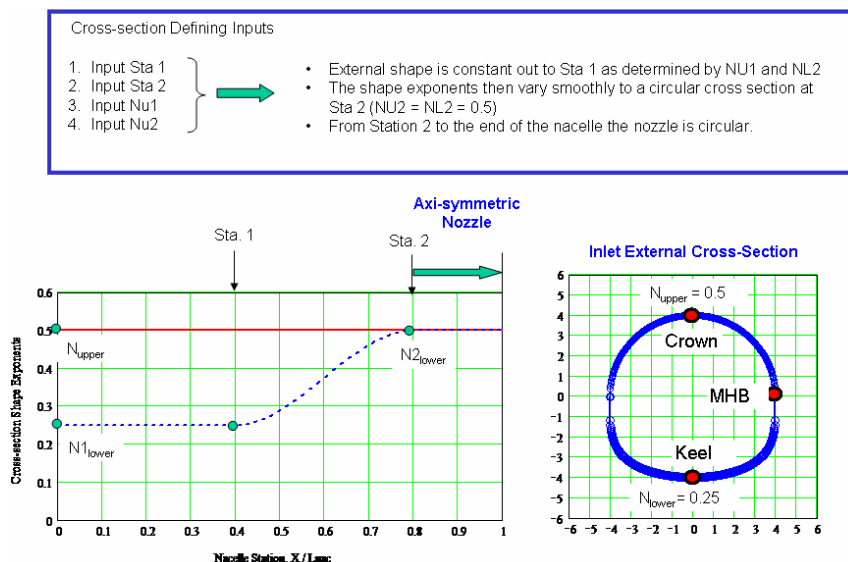


图28:机舱形状在机舱中心线周围的圆周分布 4个变量

进气口的定义如图29所示。内部进气口横截面形状和前缘半径分布被定义为与机舱头部的的外部整流罩横截面形状和流向  
前缘半径分布相匹配。

然后，内部进气口的形状从进气口唇部的"压扁"形状到喉部的圆形截面平滑变化。内部形状被定义为从咽喉站之后到进气口长度末端的圆形

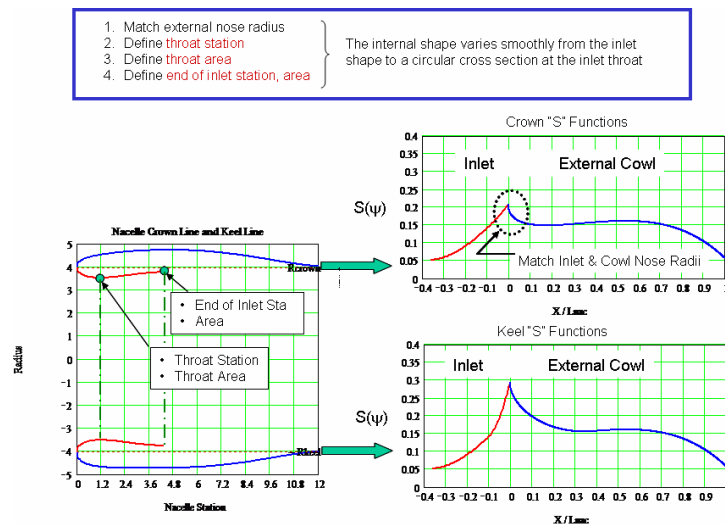
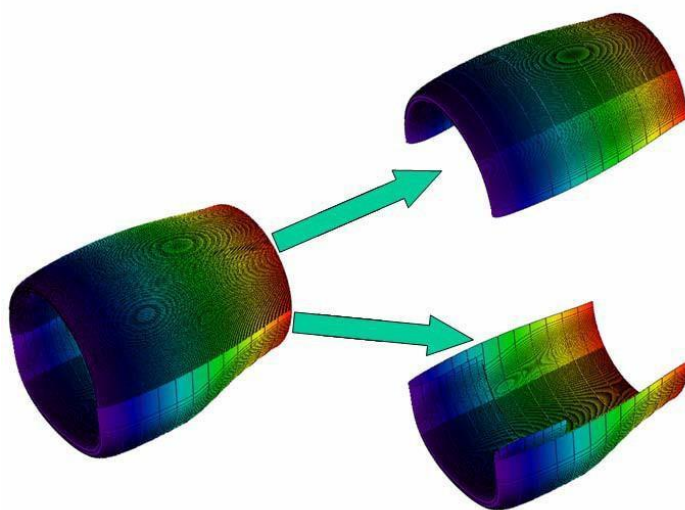


图29:机舱进气口的几何定义 4个变量

整个内部进气口的几何形状只需要4个以上的定义变量。这些变量包括

- 咽喉站
- 咽喉部位
- 进站口的末端
- 进气口区域的末端

由上述15个机舱设计变量定义的完整机舱几何形状如图所示



30. 可以看到几何形状到处都是平滑和连续的。

图30:总机舱外部形状和进气口几何形状的定义 15个变量

图31中还显示了一系列穿过机舱的截面切面。基于这个例子，似乎对于机舱外部形状的空气动力学设计优化，需要相对较少的变量来捕捉一个非常大的现实的平滑连续几何形状的设计空间。

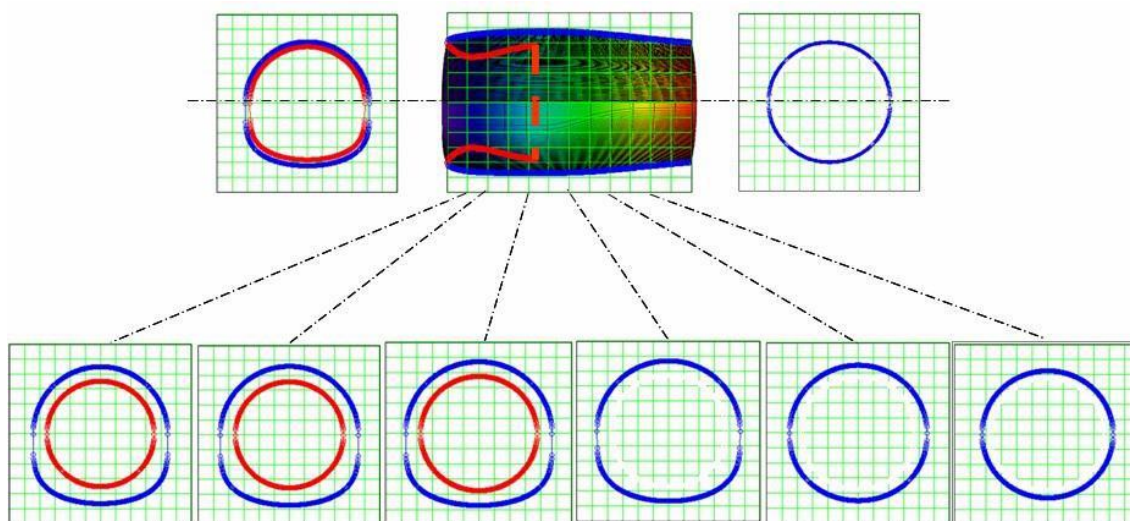


图31:机舱横截面图

## XI. 使用CST方法进行三维机翼定义

一个三维机翼可以被认为是整个翼展上的机翼分布。因此，我们可以使用之前讨论的类函数和形状函数来获得机翼部分的分析定义，然后简单地将分析公式分布在翼展上，以完全定义一个机翼。在这一节中，我们将首先为任意的机翼制定分析定义。我们将首先用一些简单的应用来说明该方法的使用。随后将对该方法在详细的亚音速和超音速机翼定义中的应用进行研究。

图32显示了一个典型的机翼截面。相对于之前显示的机翼定义（图1），**机翼截面**的定义有两个额外的参数

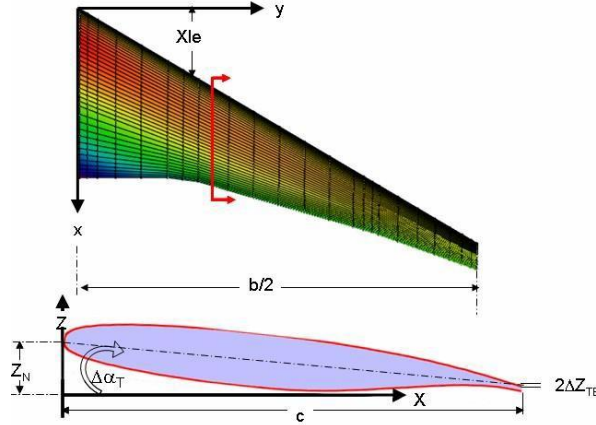


图31:机舱横截面图

局部机翼截面的分析定义与机翼定义相似，（公式1），有两个附加参数。

$$\zeta_U(\psi, \eta) = \zeta_N(\eta) + C_{1.0}^{0.5}(\psi) \cdot S_U(\psi, \eta) + \psi [\zeta_T(\eta) - \Delta\alpha_T(\eta)]$$

$$\psi = \frac{x - x_{LE}(\eta)}{C(\eta)}$$

$$\eta = \frac{2y}{b}$$

$$x_{LE}(\eta)$$

$$c(\eta)$$

$$\zeta_U(\eta) = \frac{z_U(\eta)}{c(\eta)}$$

$$\zeta_N(\eta) = \frac{z_N(\eta)}{c(\eta)}$$

$$\zeta_L(\psi, \eta) = \zeta_N(\eta) + C_{1.0}^{0.5}(\psi) \cdot S_L(\psi, \eta) + \psi [\zeta_T(\eta) - \Delta\alpha_T(\eta)]$$



物理Z坐标在形状函数中使用机翼形状函数程序的扩展进行转换，得出方程2。机翼上具有垂直剪切力和局部截面扭转的机翼截面的相应形状由方程式给出

$$S_U(\psi, \eta) = \frac{\zeta_U(\psi, \eta) - \zeta_N(\eta) - \psi [\zeta_T(\eta) - \Delta\alpha_T(\eta)]}{C_{1.0}^{0.5}(\psi)} \quad (22)$$

机翼下表面的相应形状函数方程为：

$$S_L(\psi, \eta) = \frac{\zeta_L(\psi, \eta) - \zeta_N(\eta) - \psi [\zeta_T(\eta) - \Delta\alpha_T(\eta)]}{C_{1.0}^{0.5}(\psi)}$$

对于一个给定的机翼定义，机翼的上部和下部形状函数可以用公式22和23来计算。

给定机翼定义为设计空间中的形状函数表面，物理空间中的机翼上表面和下表面可以由形状函数表面确定，扭曲、剪切和弦长的局部值为。

$$z_U(x, y) = \left\{ \zeta_N(\eta) + C_{1.0}^{0.5}(\psi, \eta) S_U(\psi, \eta) + \psi [\zeta_T(\eta) - \Delta\alpha_T(\eta)] \right\} C_{LOCAL}(\eta)$$

$$z_L(x, y) = \left\{ \zeta_N(\eta) + C_{1.0}^{0.5}(\psi, \eta) S_L(\psi, \eta) + \psi [\zeta_T(\eta) - \Delta\alpha_T(\eta)] \right\} C_{LOCAL}(\eta)$$

图32说明了将设计空间中机翼的形状函数面转化为机翼的物理定义的一般过程。单位设计空间由=0.0到1.0和=0.0到1.0定义，因此代表任何机翼的平面形状。

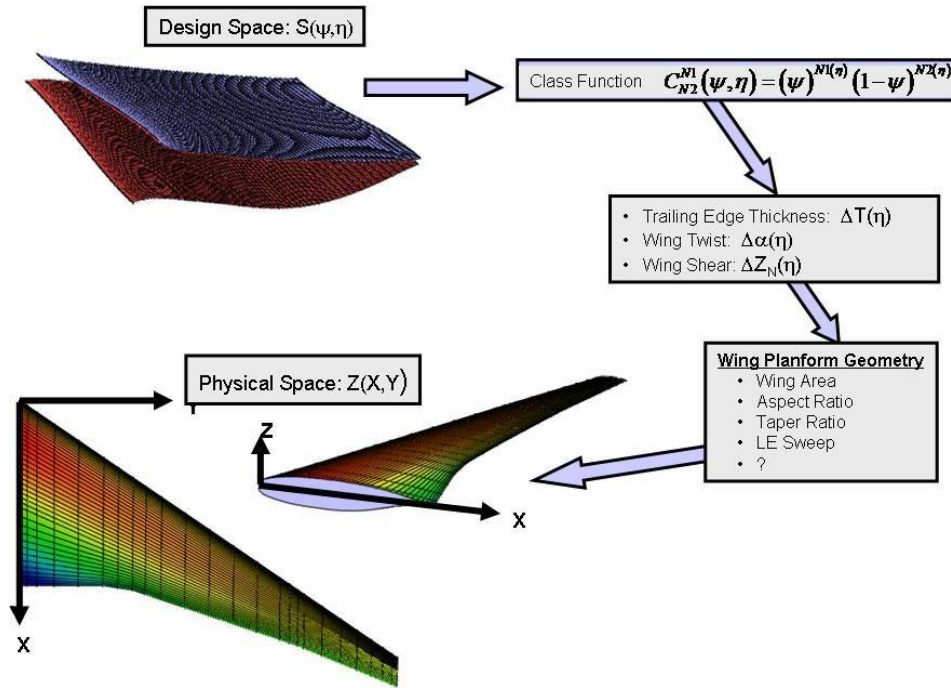


图32:从设计空间到物理空间的转换

图32中的类函数指数被显示为可能随跨度站的变化而变化，。对于亚音速机翼来说，整个机翼的类函数指数是恒定的。然而，超音速机翼类型的平面图通常有一个高度后掠的内侧面板，带有亚音速圆形机头前缘，以及一个减少后掠的外侧超音速前缘面板，带有形状的机头气膜。

图33至图35显示了从设计空间中的单位基础机翼定义到具体的详细机翼定义的转换过程的例子。

图33显示了对应于单位基础形状函数表面的机翼截面形状，以及将单位形状函数变为对应于整个翼展的恒定RAE2822型机翼的形状函数的效果。这将需要，如之前图12所示，大约11个变量来定义机翼的上表面和下表面。

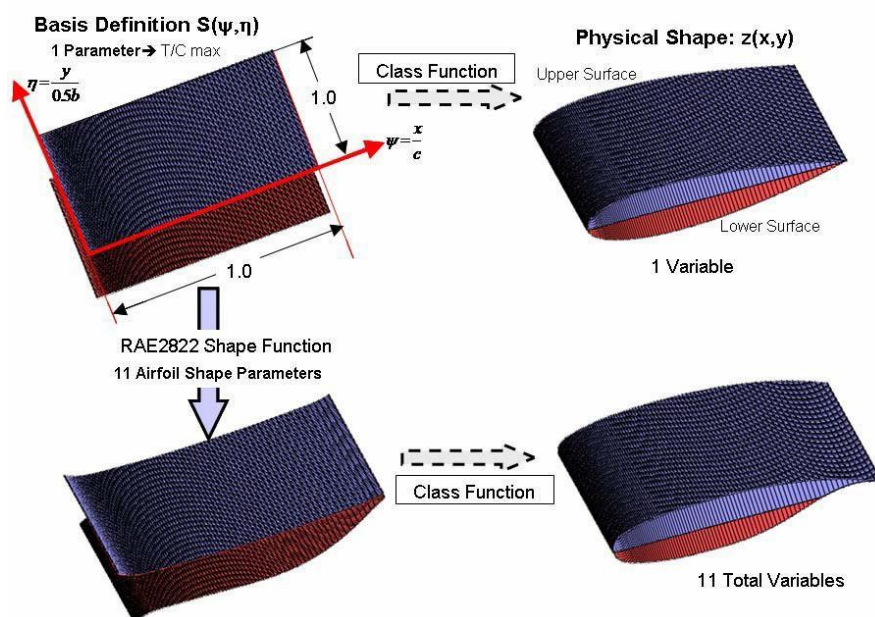


图33:参数化机翼设计空间， $S$

包括最大厚度比的跨度变化的效果如图34所示。对于这个例子，这代表了设计空间中完整的机翼定义。

图35显示了设计空间中的机翼转变为完整的物理机翼定义。图中还显示了定义机翼平面形状和跨度扭力分布的关键参数。

在这个例子中，完整的参数化凸面机翼定义与最大厚度和机翼扭曲的跨度变化，以及指定的机翼面积、横扫、纵横比和锥度比，只需要19个设计变量。

- 超临界机部分
- 跨越式厚度变化
- 跨越式扭动
- 机翼面积
- 纵横比
- 锥度比

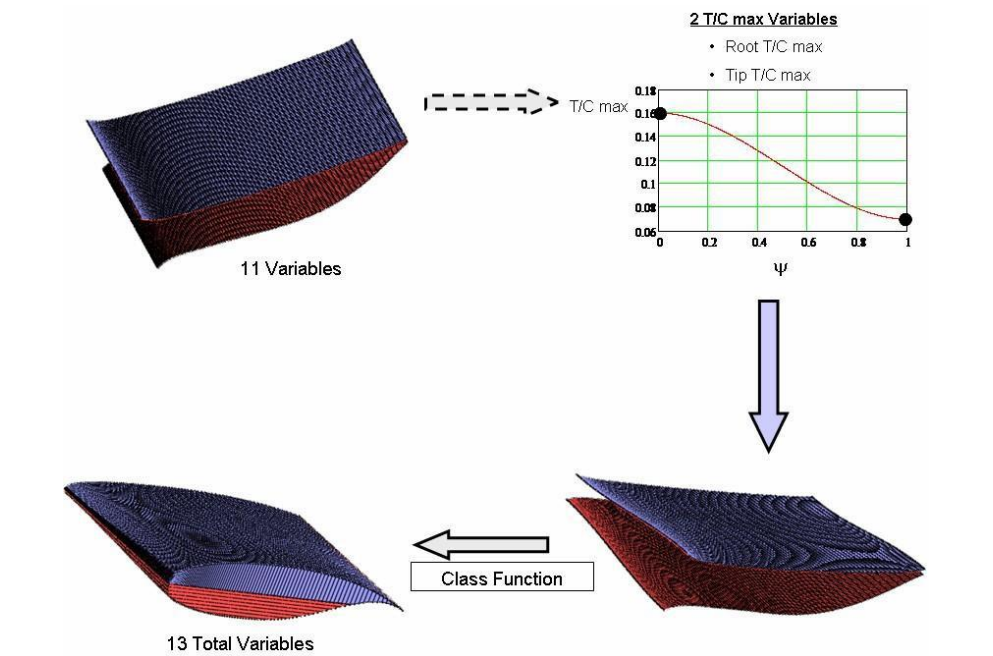


图34:纳入机翼厚度的跨度变化

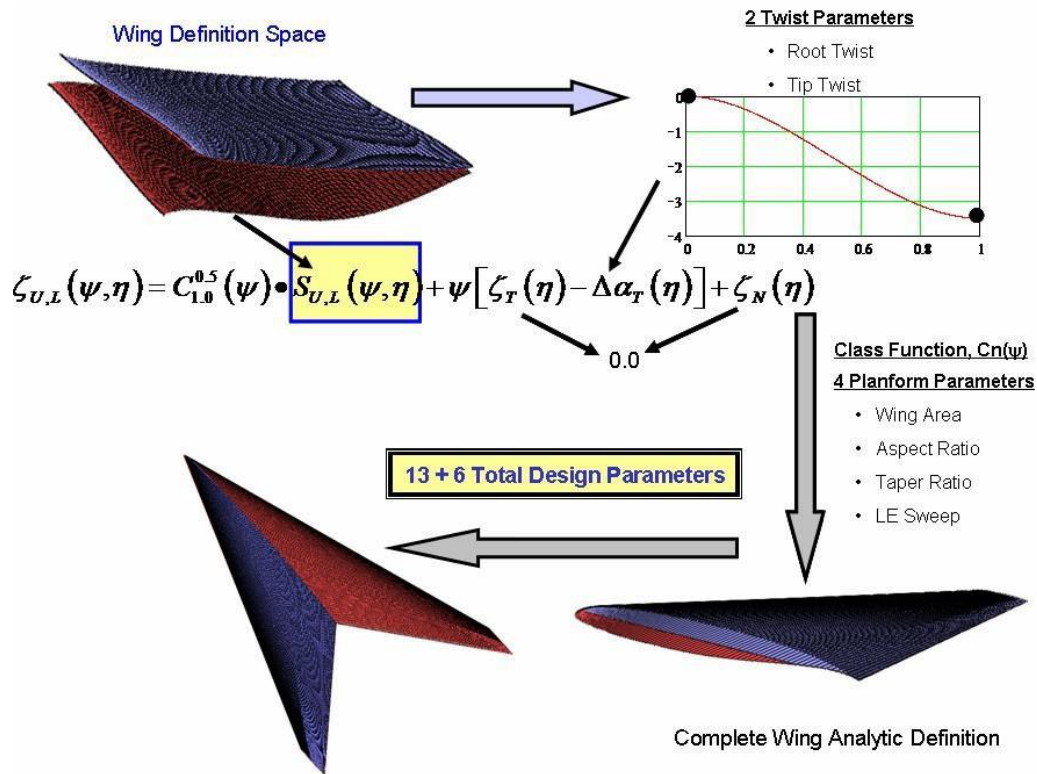


图35:完整的参数化机翼定义

图36显示，同样的机翼设计空间定义，可以为各种机翼平面形状定义详细的表面几何形状，这取决于平面形状的定义参数。在图中所示的情况下，在保持结构长宽比不变的情况下，通过改变翼展来获得不同的平面形状。

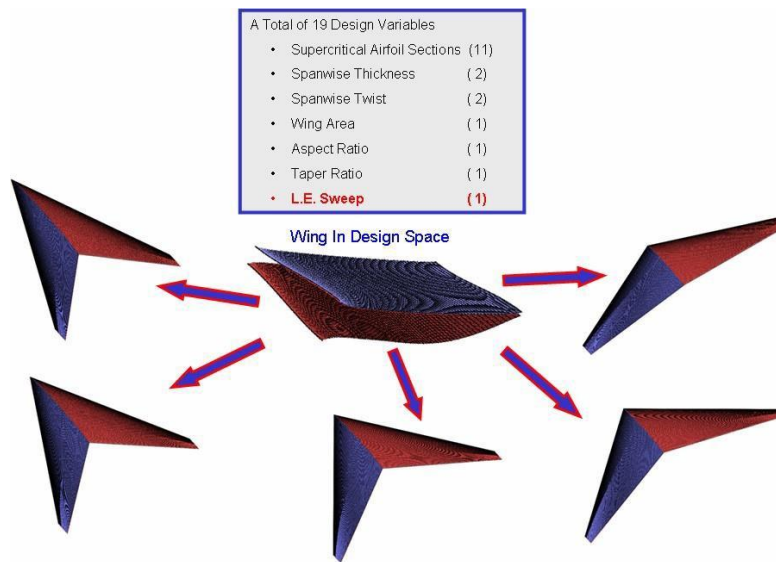


图36:参数化机翼定义 - 变更机翼扫描

## XII. 设计空间中的机翼的数学描述

与机翼的形状函数类似，简单机翼的形状函数设计面，如图36所示，是一个光滑的连续分析面。因此，形状函数表面可以用X和Y的泰勒级数展开来描述

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y \right]_{x_0, y_0} + \frac{1}{2!} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Delta y^2 \right]_{x_0, y_0} + \dots + \frac{1}{n!} \left[ \left( \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x, y) \right]_{x_0, y_0} + \dots$$

如图37所示，扩展中的条款可以以帕斯卡三角形的形式重新排列。

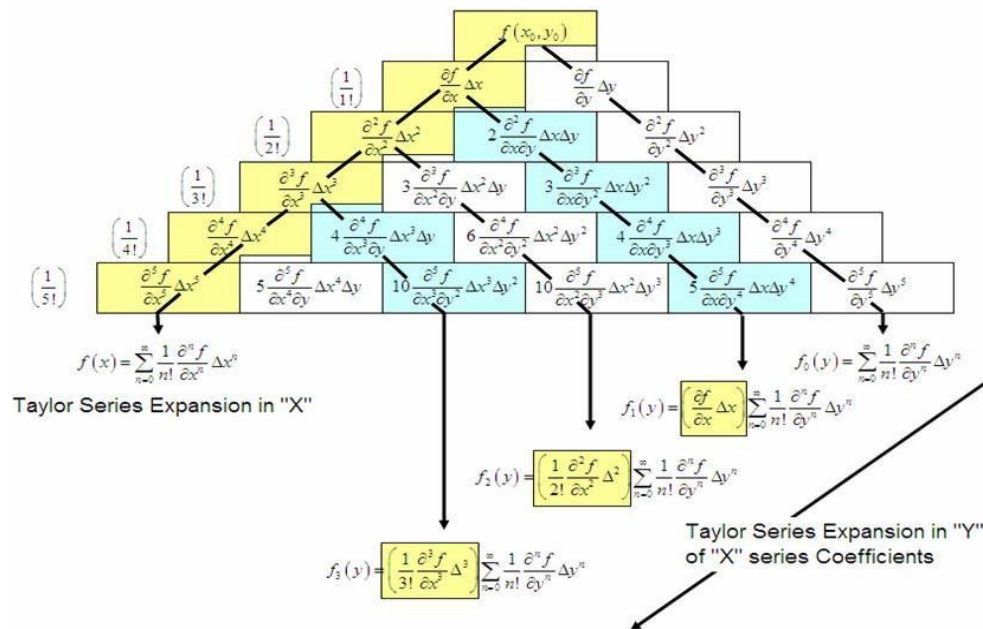


图37:Tavlors系列在两个变量中的扩展- 另

从图37所示的数列项的排列可以看出，x和y中的泰勒数列相当于首先在x方向上进行泰勒数列展开，然后将“x数列”的每个系数作为泰勒数列展开在y方向上。以类似的方式，可以证明x和y的幂级数等同于先在x方向进行展开，然后在y方向对x级数的每个系数进行幂级数展开。

这些结论意味着完整机翼表面的形状函数表面可以通过首先使用之前描述的伯恩斯坦多项式方法表示根部机翼来获得。然后，完整的机翼形状函数表面可以通过使用任何适当的数字技术在跨度方向上扩展伯恩斯坦的系数来定义。然后，机翼的表面定义通过形状函数表面与机翼等级函数相乘而得到。这在本质上提供了机翼表面的数字标量定义。

从物理上讲，这意味着根部机翼由一系列由选定的伯恩斯坦多项式定义的复合机翼来表示。然后，整个机翼由同一组复合机翼来表示。根据跨度扩展技术和机翼定义目标，每个复合机翼的大小在整个机翼跨度上是不同的。例如，定义目标可以是一个受限的机翼设计优化。

下面是这个过程的一个数学公式的例子，使用伯恩斯坦多项式来表示流向的机翼形状，以及流向系数的跨度变化。

$N_x$ 阶的伯恩斯坦多项式的单位流形函数定义为：

$$Sx_i(\psi) = Kx_i \psi^i (1-\psi)^{N_x-i}$$

其中流向二项式系数定义为

$$Kx_i \equiv \binom{N_x}{i} \equiv \frac{N_x!}{i!(N_x-i)!}$$

参考跨度站的流向上表面形状函数，

$$Su(\psi, \eta_{REF}) = \sum_{i=1}^{N_x} Au_i(\eta_{REF}) \cdot Sx_i(\psi)$$

让我们用伯恩斯坦多项式来表示每个系数的跨度变化，

$$Au_i(\eta) = \sum_{j=1}^{N_y} Bu_{i,j} \cdot Sy_j(\eta)$$

那么，机翼上表面的定义是：

$$\zeta_U(\psi, \eta) = C_{N2}^{N1}(\psi) \cdot \sum_i^{N_x} \sum_j^{N_y} [Bu_{i,j} \cdot Sy_j(\eta) \cdot Sx_i] + \psi \cdot (\zeta_T(\eta) - \tan \alpha_{T \text{ THIST}}(\eta)) + \zeta_N(\eta)$$



下层表面的类似方程是。

$$\zeta_L(\psi, \eta) = C_{N2}^{N1}(\psi) \cdot \sum_i \sum_j^{N_x N_y} [Bl_{i,j} \cdot Sy_j(\eta) \cdot Sx_i] + \psi \left( \zeta_T(\eta) - \tan \alpha_{T\pi ZST}(\eta) \right) + \zeta_N(\eta).$$

定义了机翼上表面和下表面的独特几何形状。从上表面绕过前缘到下表面的曲率的连续性是很容易的要求而获得的。

然后可以从方程中得到实际的翼面坐标。

$$\begin{aligned} y &= \frac{b}{2} \eta \\ x &= \psi C_{LOC}(\eta) + x_{LE}(\eta) \\ z_U(x, y) &= \zeta_U(\psi, \eta) C_{LOC}(\eta) \\ z_L(x, y) &= \zeta_L(\psi, \eta) C_{LOC}(\eta) \end{aligned} \quad (34)$$

这个使用方程32、33和34定义机翼几何的过程，可以被认为是一个机翼的标量俯视图，其中机翼表面的每一个点都被精确地定义为所需的，并且这些点都被分析方程“连接”。这与通常的机翼定义不同，机翼的矢量纬度定义为x、y、z坐标的有序集合，加上描述如何连接相邻点的“规则”。连接相邻点的常用方法是沿恒定跨度站和沿恒定百分弦线。

图38显示了一个高度后掠的风洞机翼的标量俯仰的例子，它被用来获得表面压力和机翼载荷数据，用

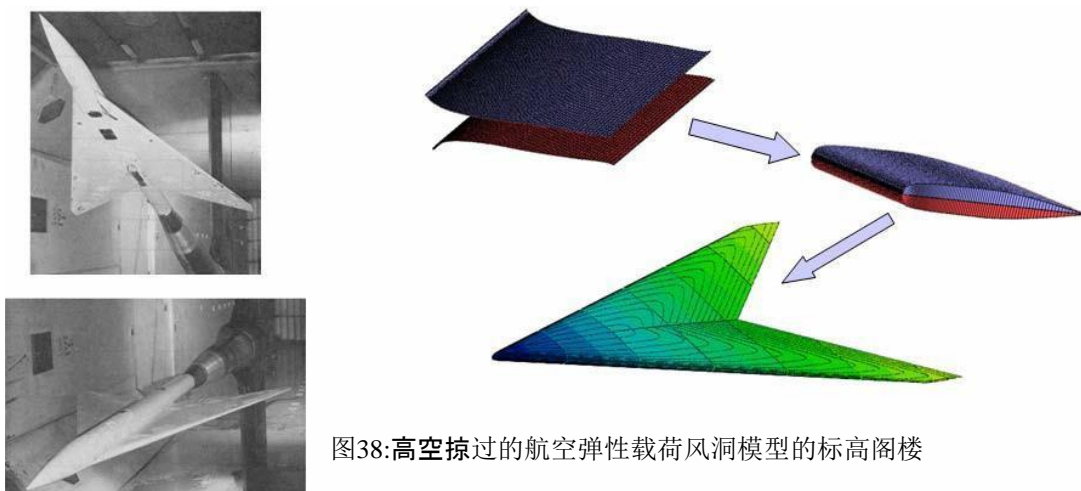


图38:高空掠过的航空弹性载荷风洞模型的标高阁楼

于CFD验证研究3, 4。该模型是用传统的矢量放线法建立的。

机翼的分析性标量阁楼可以由总共15个参数来定义。这些参数包括

- BPO8表示的基本机翼部分的9个参数
- 机翼面积
- 纵横比
- 锥度比
- 前缘扫描



- 后缘厚度=常数
- 恒定的机翼剪切力（将机翼安装在机体上作为低翼安装）。

分析翼面定义和 "建造时" 翼面坐标之间的差异远远小于整个翼面的风洞模型公差。

### XIII. 具有前缘和/或后缘断裂的机翼的数学描述

亚音速和超音速飞机的机翼通常在前缘（例如，襟翼）和/或后缘（例如，叶羽迪）有平面断裂，并有不连续的掠面变化。因此，机翼表面是非分析性的，特别是在边缘断裂的局部区域。然而，如前所述的定义完整机翼几何的方法应该是适用的。贯穿机翼的机翼部分可以由对应于选定的伯恩斯坦多项式表示顺序的组件机翼的复合集来定义。复合机翼比例系数的跨度变化，在平面断面之间很可能是片状连续的。

为了探索这个概念，我们深入分析了一个典型的亚音速飞机机翼的几何结构。大量跨度站的机翼截面由相应形状函数的等阶伯恩斯坦多项式表示来近似。通过计算实际机翼截面和由近似的伯恩斯坦多项式定义的截面之间的残差来确定复合表示的充分性。结果显示在图39和40中。

图39中显示了近似表面和实际表面的残差，其比例相当于3%的风洞模型。建立这种尺寸的风洞模型的允许公差通常是在局部翼弦的前20%上 $\pm 0.003$ 英寸，在翼弦的其余部分 $\pm 0.006$ 。

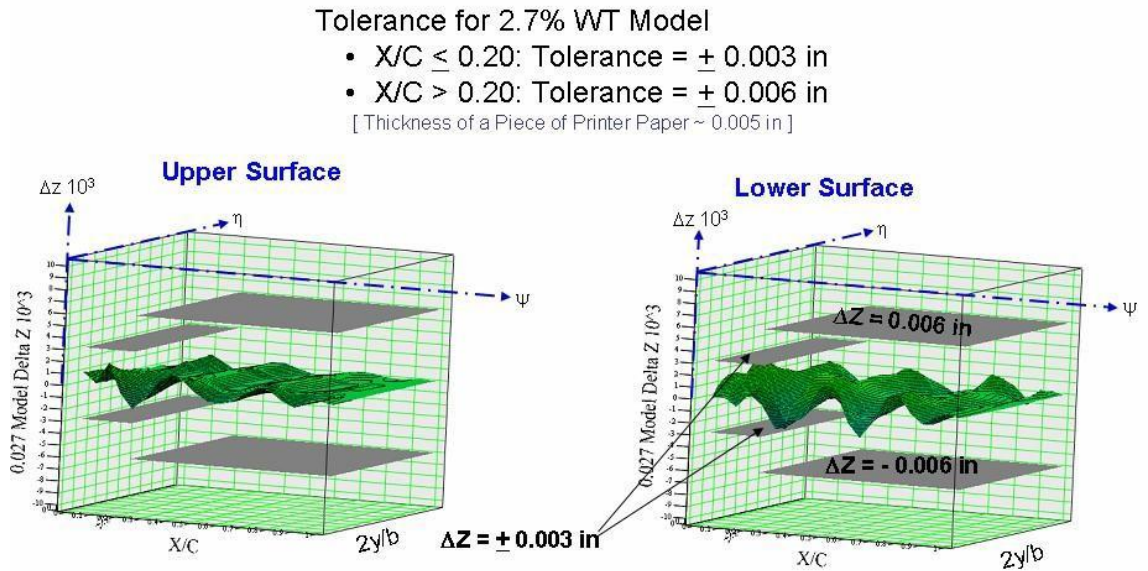


图39:BPO8亚音速飞机机翼表面表示法Z残差

机翼上下表面的残差远在水洞模型建造公差范围内。

与机翼上下表面相对应的形状函数表面显示在图40中。与平面断裂相关的表面的片状连续性质非常明显。相应的复合机翼比例系数（ $Bu_j$  和  $Bl_j$ ）的跨度变化也被显示出来。

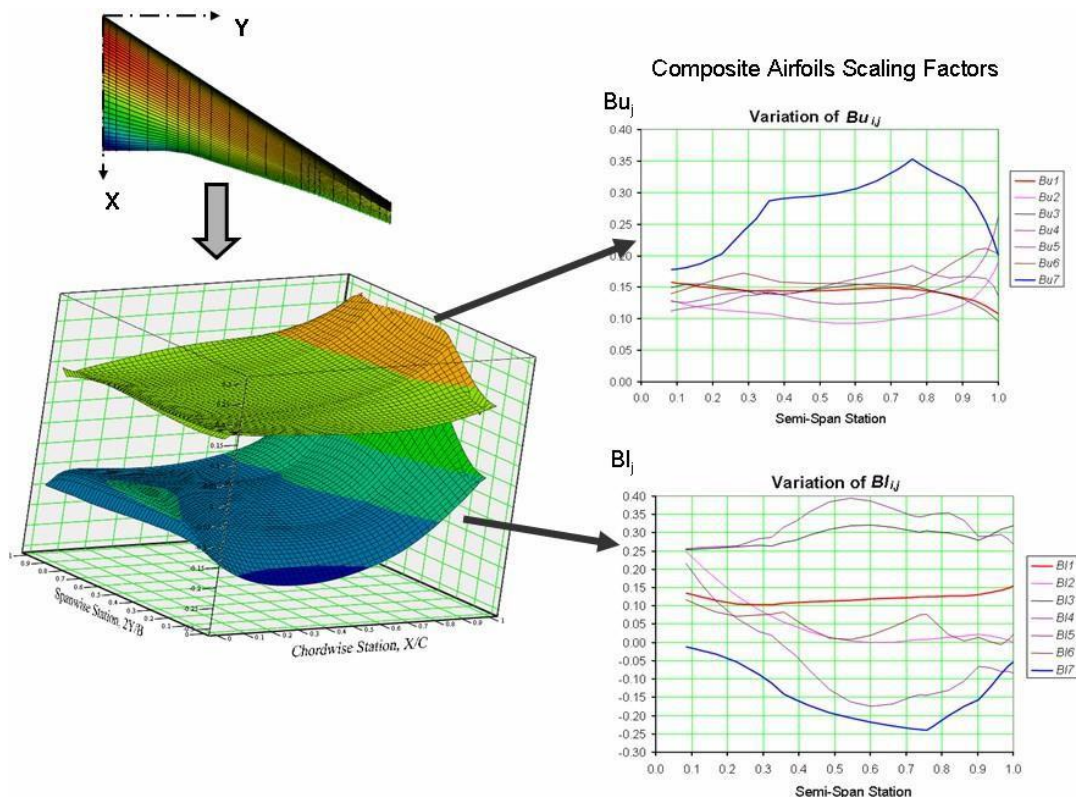


图40:BP "复合机翼比例系数的跨度变化

这些结果表明，伯恩斯坦系数在整个翼展上的变化是非常有规律的，是片状连续的，表现良好。高速民用运输机（RefH）机翼的形状功能面如图41所示。这个平面有一些前缘和后缘的断裂。该机翼有一个内侧的亚音速前缘机翼，机头为圆形机翼。在前缘的外侧，机翼有一个超音速前缘，有尖锐的机头翼。该机翼的形状函数也被认为是片状平滑和连续的。

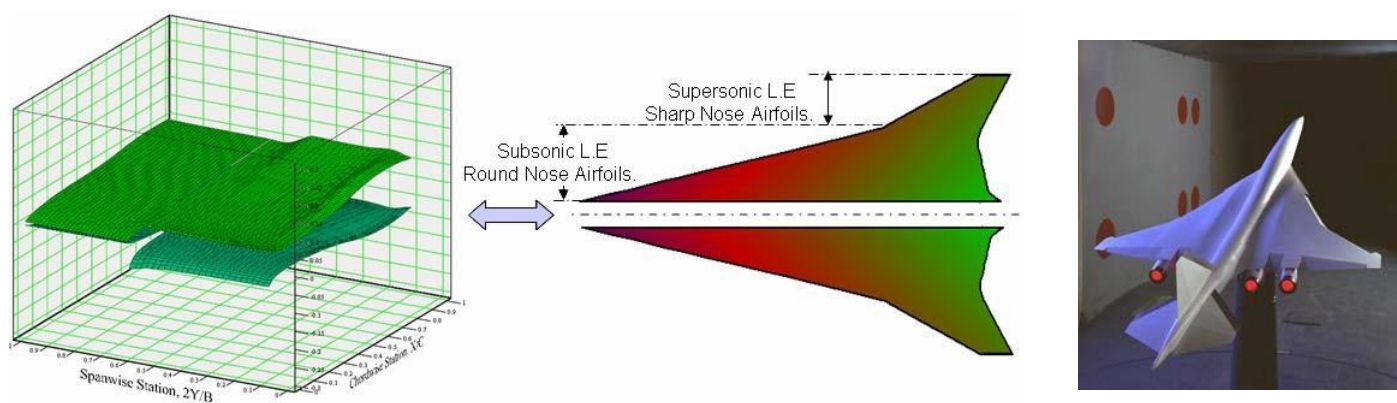


图41 HSCT超音速机翼的形状函数- 参考文献H

## XIV. 总结和结论

- 提出了类函数/形状函数转换，“CST”，几何表示方法，（公式7，图2）。
- 带有单位形状函数的类函数被证明可以定义机翼、公转对称体和公转对称机舱的基本类（公式6至6.7，图14）。形状函数在每个基本类中定义了独特的几何形状。
- 展示了一些使用形状函数进行参数化机翼修改或设计的不同方法的例子（图3，4 5）。
- 使用形状函数来表示几何体的基本数学简单性得到了证明。在圆鼻几何体的情况下，形状函数消除了斜率的数字前缘奇异性， $2^{\text{nd}}$  导数和整个几何体表面的曲率的巨大变化。（图13）
- 伯恩斯坦多项式的使用被证明是一种有吸引力的、系统的技术，可以将基本的单元形状分解成与组成机翼相对应的可扩展元素，（图8、9，参考文献1）。这种技术。
  - 提供对关键设计参数的直接控制，如前缘半径、前缘周围的连续曲率、船尾角和封闭到指定厚度。
  - 捕捉平滑机翼、轴对称机身和机舱的整个设计空间
  - 所有光滑的机翼、轴对称体和机舱都可以从单位形状函数中推导出来，因此也可以相互推导。
- CST方法被证明适用于定义车身横截面的几何形状。显示了一些与各种类函数相对应的截面几何形状（图1，6，18）。
- 一般来说，三维体可以被表示为基本截面形状的分布。类函数/形状函数转换的几何表示方法，CST，可以用来描述基本截面形状以及基本形状沿主要体轴的分布，（图20至26）
- 展示了使用少数设计变量来制定非对称机舱的外部形状和进气口的详细设计定义以及一些三维机翼的例子，（图30、35、36）。
- 引入了“翼面的分析标量定义”的概念。采用这种方法，翼面截面形状函数由伯恩斯坦多项式表示。所选择的伯恩斯坦多项式的阶数有效地定义了一组用于构建翼面定义的复合气膜。伯恩斯坦多项式的系数可以在跨度方向上进行数学扩展，以定义机翼的上、下形状函数表面。然后，形状函数表面很容易转化为物理机翼的几何形状，（公式32、33、34，图38）。
- 讨论了分析性标量翼定义在具有前缘和/或后缘断裂的平面上的应用，并通过实例加以说明，（图40, 41）。
- 本报告提出的CST几何分析表示方法提供了统一和系统的方法来表示各种各样的二维和三维几何，包括一个非常大的设计空间，而标量参数相对较少，（图42）。

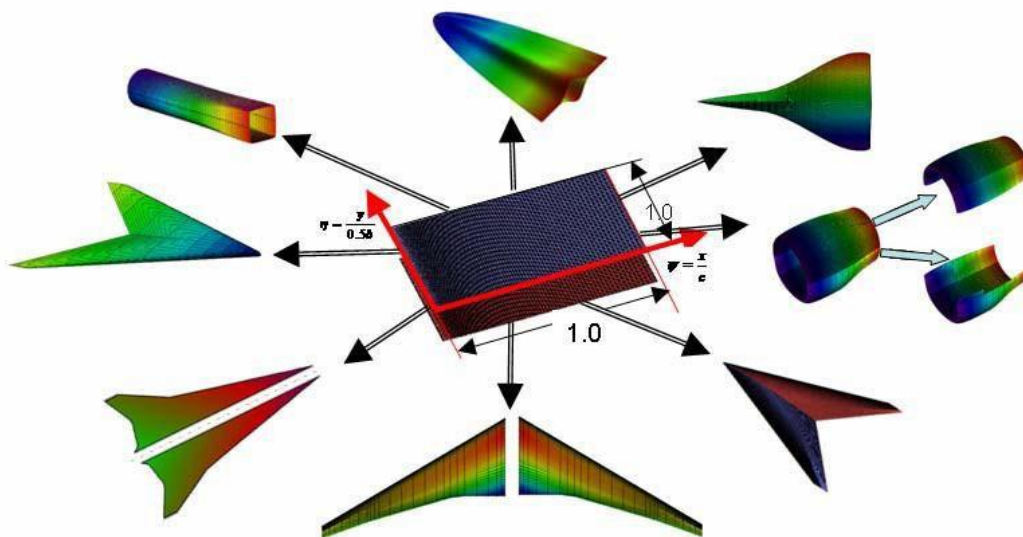


图42:CST设计方法

## XV. 参考文献

1. Kulfan, B.M, Bussoletti, J.E., "飞机部件形状的基本参数化几何表示". AIAA-2006-6948, 第11届AIAA/ISSMO多学科分析和优化会议。多学科设计优化的建模和仿真前沿, 2006年9月6-8日
2. Sobieczky, Helmut, "通过参数化几何预处理加速的空气动力学设计和优化工具", 欧洲应用科学和工程计算方法大会, ECCOMAS 2000
3. Manro, M.E., Percy J. Bobbitt, P.J. 和 Kulfan, R.M., "箭翼配置上压力分布的预测, 包括驼峰扭转和翼翘的影响", NASACP-2108号文件第3页59至115, 1979年11月
4. Wery, A.C. 和 Kulfan, R.M., "箭形机翼的航空弹性载荷预测——半经验方法的任务二评估", NASA CR-3641 1983年3月