Условная вероятность. Формула Байеса. Независимость.

Введение

- представление о вероятности события зависит от нашей информированности: пример с тузом пик в руке моего соперника;
- условная вероятность в классическом случае: обоснование формального определения условной вероятности.

Условная вероятность

- общее определение условной вероятности: $\mathbb{P}(A\,|B\,) = \mathbb{P}(AB)/\,\mathbb{P}(B)$;
- случай с последовательностью условий: последовательно произошло два события B и C, как пересчитать вероятность события A?
$$P(A\,|BC\,);$$
- вероятность того, что одновременно произошо несколько событий (**теорема умножения**):
$$\mathbb{P}\left(A_n \dots A_1\right) = \mathbb{P}\left(A_n\,|A_{n-1} \dots A_1\,\right) \cdots \mathbb{P}\left(A_2\,|A_1\,\right) \mathbb{P}\left(A_1\right);$$
- такой подход удобнее, мы легко можем найти условные вероятности (потому что легко работаем в новой реальности, заданной условием), а вот вероятности пересечения нам получить сложнее.

Формула полной вероятности и формула Байеса

- определение разбиения вероятностного пространства: $\Omega = \sum_{i=1}^{N} B_i$, где $\{B_i\}_{i=1}^{N}$ не пересекаются;
- как найти вероятность события, если мы знаем его условные вероятности на всем разбиении и вероятности разбиения (**формула полной вероятности**):
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}\left(A\,|B_i\,\right) \mathbb{P}(B_i);$$
- пусть произошло событие A, найдем вероятность того, что оно произошло при условии B_1, взятого из набора разбиения $\Omega = \sum_{i=1}^{N} B_i$, (**формула Байеса**):
$$\mathbb{P}(B_1\,|A\,) = \frac{\mathbb{P}(A\,|B_1\,)\,\mathbb{P}(B_1)}{\sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(A\,|B_i\,)\,\mathbb{P}(B_i)};$$

Независимость

- независимость двух событий определяется через условную вероятность или через правило произведение: события A и B независимы, если
$$\mathbb{P}(A\,|B\,) = \mathbb{P}(A), \text{ или } \mathbb{P}(B) = 0 \iff \mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B);$$

- совместная независимость набора событий $A_1, \ldots, A_n$: для любого набора $1 \le i_1 \le \ldots \le i_k \le n$ должно быть выполнено:

$$\mathbb{P}\left(A_{i_1} \cdot \ldots \cdot A_{i_k}\right) = \mathbb{P}\left(A_{i_1}\right) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}\left(A_{i_k}\right);$$

- обычно независимость явно проговаривается в условиях задачи;
- пример событий независимых попарно но не в совокупности: “при первом броске выпал орел”, “при втором броске выпал орел” и “ровно при одном из бросков выпал орел”.

Задачи

Задача 1. *Четыре человека А, Б, В, Г становятся в очередь в случайном порядке. Найдите:*
а) условную вероятность того, что А первый, если Б последний;
б) условную вероятность того, что А первый, если А не последний;
в) условную вероятность того, что А первый, если Б не последний.

Задача 2. *В ящике N шаров, K из которых белые, а остальные черные. Вынимают последовательно n шаров без возвращения. Какова вероятность, что j–ый шар в выборке белый, если известно, что в выборке ровно k белых шаров?*

Задача 3. *В ящике 12 белых шаров и 8 черных. Из ящика извлекли наудачу 3 шарика, причем известно, что один из них оказался белым. Какова вероятность, что белых шаров в выборке больше, чем черных?*

Задача 4. *Треть выпускников “ФБиБ” и четверть выпускников “Биофака” знают теорию вероятностей на “отлично”. На выпуске встретились студенты этих факультетов, причем “ФБиБ” было в 3/2 раза меньше. Произвольно выбранный студент знает курс на “отлично”. Отгадайте, какого факультета он выпускник?*

Задача 5. *а) Независимы ли события “первая карта – туз” и “вторая карта – туз” при вытаскивании двух карт без возвращения из колоды в 36 карт?*
б) Я купил два лотерейных билета “Русское лото”. Независимы ли события “первый билет выигрышный” и “второй билет выигрышный”?