Классическое вероятностное пространство. Урновые схемы.

Введение

- итуитивное определение вероятности события через повторение эксперимента большое число раз;
- повторение не всегда возможно организовать: пример с игрой сборной Англии и Франции на Евро2024;
- решение: в математике вероятность задается заранее, но из интуитивных соображений.

Вероятностное пространство

Пространство элементарных исходов

- с помощью пространства элементарных исходов можно закодировать или математически описать эксперимент;
- есть эксперимент с N возможными исходами, тогда в качестве пространства элементарных исходов возьмем множество $\Omega_N = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$;
- эксперимент с подбрасыванием монетки один или несколько раз; как закодировать выпадение на ребро?
- как соотносится случайность и пространство элементарных исходов, при чем здесь события: природа с некоторой вероятностью выбирает какой-то элементарный исход;
- событие в теории вероятностей – множество каких-то элементарных исходов.

Алгебра событий (дополнительный материал)

- обычно нас интересует "суммарная" вероятность сразу нескольких элементарных исходов – для этого исходы объединяют в события;
- получается, что вероятность – функция, принимающая на вход множество и возвращающая число;
- алгебра событий $\mathcal{F}$ – область определения такой функции, то есть это набор множеств, вероятность которых мы можем измерить; элементы $\mathcal{F}$ – события;
- в случае дискретного (не более чем счетного) пространства элементарных исходов можно взять в качестве $\mathcal{F}$ множество всех подмножеств Ω;
- алгебры можно брать разными, но все они обязаны удовлетворять условиям: пустое множество и пространство элементарных исходов принадлежат алгебре; операции объединения, пересечения и разности (не более чем счетного числа) множеств не выводят из алгебры;
- пример с алгеброй для подбрасывания одной и двух монеток;
- почему нужно задавать алгебру и почему недостаточно брать в качестве нее все возможные подмножества пространства элементарных исходов: алгебра может получиться слишком обширной, и на ней не получится задать вероятность, удовлетворяющую классическим условиям (`https://en.wikipedia.org/wiki/Vitali_set`).

Вероятность

- вероятность можно определить, как отображение из множества подмножеств Ω (то есть из $\mathcal{F}$) на отрезок $[0,1]$, удовлетворяющее условиям (аксиомам):
  - неотрицательность: $\mathbb{P}(A) \geq 0$;
  - конечность: $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
  - аддитивность:
    $$\mathbb{P}(A+B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B),$$
    для непересекающихся A и B;
  - сигма-аддитивность (счетная аддитивность):
    $$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(A_i\right),$$
    где $A_1, A_2, \ldots$ не пересекаются.
- в случае, если пространство элементарных исходов дискретно, то вероятность можно сначала задать на элементарных исходах, а потом продолжить ее на все возможные события:
  $$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega),\ A \subseteq \Omega;$$
- формулы включения и исключения, следующие из аксиом:
  $$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B),$$
  $$\mathbb{P}\left(\cup_{i \leq n} A_i\right) = \sum_{i \leq n} \mathbb{P}\left(A_i\right) - \sum_{i_1 < i_2} \mathbb{P}\left(A_{i_1} A_{i_2}\right) + \ldots - (-1)^n\, \mathbb{P}\left(A_1 \ldots A_n\right).$$

Классическое вероятностное пространство

- так все-таки из каких соображений задавать вероятность?
- из соображений симметрии можно считать, что все элементарные исходы равновероятны, то есть $\mathbb{P}(\omega) = 1/N$ для любого $\omega \in \Omega_N$;
- пример симметричного и несимметричного пространства исходов при подбрасывании двух монеток/кубиков.

Урновые схемы

- рассмотрим урну с шарами, пронумерованными от 1 до n, мы вытягиваем k шаров и записываем их номера;
- упорядоченный, с возвращением:
  $$\Omega = \left\{(i_1, \ldots, i_k) : 1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n\right\},$$
  количество элементарных исходов равно n^k;
- упорядоченный, без возвращения:
  $$\Omega = \left\{(i_1, \ldots, i_k) : 1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n,\ i_m \neq i_l\right\},$$
  количество элементарных исходов равно A_n^k;

- неупорядоченный, без возвращения:

$$\Omega = \{\{i_1, \ldots, i_k\} : 1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n,\ i_m \neq i_l\},$$

количество элементарных исходов равно C_n^k;

- неупорядоченный, с возвращением:

$$\Omega = \{(i_1, \ldots, i_n) : i_1 + \cdots + i_n = k\},$$

количество элементарных исходов равно C_{n+k-1}^{n-1}:

  - подсчет количества шаров заданного класса: i_1 – количество шаров типа с номером 1;
  - расстановка $n-1$ перегородки между k черными шарами;
  - раскраска $n-1$ шара в белый цвет среди $n+k-1$.

Задачи

Задача 1. *Известно, что* $\mathbb{P}(A) = 0.7$, $\mathbb{P}(A \setminus B) = 0.4$, $\mathbb{P}(B) = 0.4$. *Найти вероятность того, что произойдет только одно из событий* A *или* B. *Какова вероятность того, что не случится ни одно из событий* A *или* B. *Можно ли в условии задачи заменить* $\mathbb{P}(A \setminus B)$ *на* 0.2*?*

Задача 2. *Две ладьи ставятся наугад на шахматную доску на различные клетки. Опишите вероятностное пространство. Какая вероятность того, что ладьи бьют друг друга?*

Задача 3. *В партии* 16 *деталей из которых* 4 *бракованных. Найти вероятность того, что из* 5 *выбранных деталей ровно* 2 *бракованных.*

Задача 4. *Найти вероятности того, что при броске* 10 *игральных кубиков выпало ровно три шестерки.*

Задача 5. *У человека* n *ключей. Найти вероятность, что потребуется ровно* k *попыток, чтобы открыть дверь, если не подошедшие ключи (а) откладываются, (б) не откладываются.*