Случайные величины, векторы. Распределение случайных величин

Последовательность независимых испытаний (дополнительно)

- каждому эксперименту соответствует свое вероятностное пространство; есть серия независимых экспериментов, как сконструировать пространство, описывающее серию?
- конструкция такого пространства на примере схемы Бернулли;
- про общую конструкцию можно почитать по ссылке.

Случайные величины

- **случайная величина** – *измериомое* относительно борелелевской сигма-алгебры $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ отображение из Ω в $\mathbb{R}$;
- **распределение случайной величины** X – вероятностная мера $\mathbb{P}_X$, опредленная на измеримом пространстве $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, удовлетвроящая условию

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}\left(\{\omega : X(\omega) \in B\}\right),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R});$$

- **функция масс**, как вероятность заданного значения случайной величины

$$\mathbb{P}_X(x_i) = \mathbb{P}\left(\{\omega : X(\omega) = x_i\}\right);$$

- задание функции масс табличкой: пример на одной монетке и схеме Бернулли;
- вероятностное пространство $(\mathcal{X} = Im(X), 2^{\mathcal{X}} \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X)$, порожденное случайной величиной X, позволяет нам забыть про исходное вероятностное пространство;
- этого пространства не достаточно, если речь идет о вероятности события, определнного двумя случайными величинами: пусть $\Omega = \{1, 2, 3\}, X(\omega) = \omega, Y_1(\omega) = \omega, Y_2(\omega) = (\omega + 1) \bmod 3 + 1$, тогда распределения X, Y_1, Y_2 совпадают, но

$$\mathbb{P}(X = 1, Y_1 = 1) \neq \mathbb{P}(X = 1, Y_2 = 1).$$

Классические дискретные распределения

- бернуллиевское распределение $Bernoulli(p)$: $\mathcal{X} = \{0, 1\}$, $\mathbb{P}_X(0) = 1-p$, $\mathbb{P}_X(1) = p$, соответсвует подбрасыванию одной несимметричной монеты;
- биномиальное распределение $Binom(n, p)$: $\mathcal{X} = \{0, 1, \ldots, n\}$, $\mathbb{P}_X(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, соотвествует числу решек (1) при n бросаниях несимметричной монеты;
- дискретное равномерное распределение $R\{1, \ldots, N\}$: $\mathcal{X} = \{1, \ldots, N\}$, $\mathbb{P}_X(k) = 1/N$, описывает номер шара, извлеченного из урны с N шарами;
- геометрическое распределение $Geom(p)$: $\mathcal{X} = \mathbb{N}_0$, $\mathbb{P}_X(k) = (1-p)^k p$, соответсвует количеству орлов (0), выпавших при бросании монеты до первой решки (1);

- пуассоновское распределение $Poiss(\lambda)$: $\mathcal{X} = \mathbb{N}_0$, $\mathbb{P}_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, оно хорошо приближает биномиальное распределение $Binom(n, pn)$ с $pn \sim \lambda/n$ при больших n;

- отрицательное биномиальное распределение $NegBinom(r, p)$: $\mathcal{X} = \mathbb{N}_0$, $\mathbb{P}_X(k) = C_{r+k-1}^{r-1}(1-p)^k p^r$, соответствует количеству орлов (0), выпавших при бросании монеты до r-ой решки (1);

- гипергеометрическое распределени $HyperGeom(N, M, n)$:

$$\mathcal{X} = \{\max(0, n - N + M), \ldots, \min(M, n), \ \mathbb{P}_X(k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},$$

  соответствует количеству белых шаров среди n извлеченных шаров из урны с N шарами, из которых M белых.

Случайные вектора

- случайный вектор, как отображение из Ω в $\mathbb{R}^d$;
- случайный вектор, как набор случайных величин;
- распределение и функцию масс дискретного случайного вектора можно задать табличкой;
- независимость случайных величин.

Задачи

Задача 1. *Есть три стрелка. Первый попадает в мишень с вероятностью* 0.2*, второй* 0.3*, третий* 0.4*. Они вместе выстрелили по мишени (каждый один раз). Случайная величина X — число пуль, попавших в мишень. Запишите ее функцию масс.*

Задача 2. *Игрок подбрасывает пару кубиков, пока не выпадут одновременно две шестерки. Случайная величина X – число подбрасываний. Составьте функцию масс. Как называется такая случайная величина?*

Задача 3. *Первый стрелок попадает в мишень с вероятностью* 0.4*, а второй — с вероятностью* 0.75*. Они стреляют по очереди, начиная с первого, до первого попадания. Случайная величина X — число сделанных выстрелов. Найдите ее функцию масс.*

Задача 4. *Функция масс двумерного случайного вектора имеет вид:*

Y / X	*0*	*1*	*2*
-1	*0.2*	*0.05*	*0.15*
0	*0.05*	*0.1*	*0.05*
1	*0.05*	*0.15*	*0.2*

Найдите функцию масс X, функцию масс Y, функцию масс $X + Y$, функцию масс XY.

Задача 5. *В ящике три красных, четыре синих и пять зеленых шаров. Наугад (без возвращения) достали четыре шара. Случайная величина X — число красных шаров в выборке. Случайная величина Y — число синих. Зависимы ли они? Найдите функцию масс случайного вектора (X, Y).*

Задача 6. *Случайные величины X, Y независимы и $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = 2^{-k}, k = 1, 2, \ldots$. Найти вероятности $\mathbb{P}(X \leq k)$, $\mathbb{P}(X = Y)$, $\mathbb{P}(X < Y)$, $\mathbb{P}(\min(X, Y) \leq k)$.*