要掌握的内容

基本概念： $\vec{E}$　　U

基本定理：

$$\boxed{\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i}\qquad \boxed{\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0}$$

基本计算： $\vec{E}$　　U_a　　U_{ab}　　W_a

$$\boxed{A_{ab} = q(U_a - U_b) = W_a - W_b = q\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}}$$

$$\boxed{U_a = \int_a^{参考点} \vec{E}\cdot d\vec{l}}\qquad \boxed{W_a = q\int_a^{参考点} \vec{E}\cdot d\vec{l}}\qquad \boxed{U_{ab} = U_a - U_b = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}}$$

本章内容要点：

静电场的场量	点电荷	电场叠加性	$\vec{E}$ U 关系
$\vec{E}=\dfrac{\vec{F}}{q_0}$	$\vec{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$	$\vec{E}=\begin{cases}\sum\vec{E}_i\\ \int d\vec{E}\end{cases}$	$U_P=\int_P^\infty \vec{E}\bullet d\vec{l}$
$U_a=\dfrac{W_a}{q_0}=\int_a^\infty \vec{E}\bullet d\vec{l}$	$U=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$	$U=\begin{cases}\sum U_i\\ \int dU\end{cases}$	$\vec{E}=-\nabla U$

场强的计算

- 叠加法 $\longrightarrow$ $\sum \vec{E}_i \quad \int d\vec{E}$
- 高斯定理法 $\longrightarrow$ $\oint \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_i$
- 梯度法 $\longrightarrow$ $\vec{E} = -\nabla U$

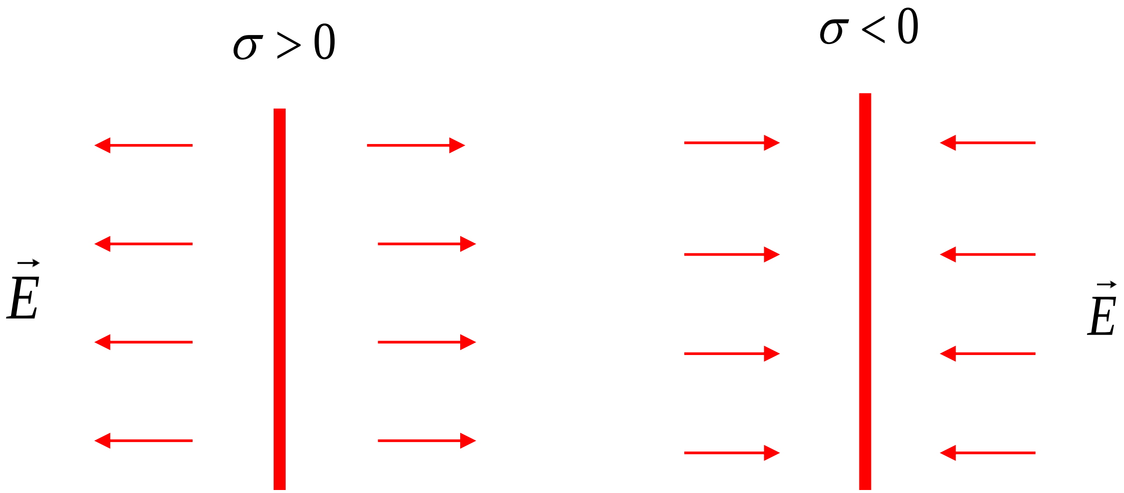
电势的计算

- 叠加法 $\longrightarrow$ $\sum U_i \quad \int dU$
- 定义法 $\longrightarrow$ $U_P = \int_P^{\infty} \vec{E} \bullet d\vec{l}$

几种特殊带电体的场强分布

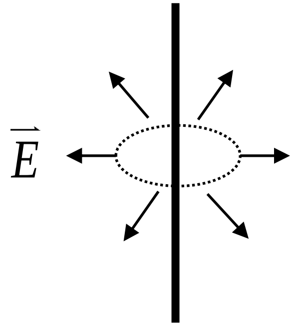
①无限大带电平面

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



②无限长均匀带电细杆

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$



③ 无限长均匀带电圆柱面

$$\vec{E} = \begin{cases} \mathbf{0} & r < R \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r} & r > R \end{cases}$$

$$\boxed{\lambda = 2\pi R\sigma}$$

沿轴线方向单位长度圆柱面上的电量

④无限长均匀带电圆柱体

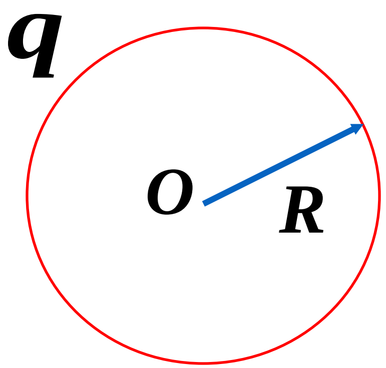
$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\lambda r}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{r} & r < R \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r} & r > R \end{cases}$$

$$\boxed{\lambda = \pi R^2\rho}$$

沿轴线方向单位长度圆柱体上的电量

⑤均匀带电球面

$$\vec{E}=\begin{cases}\mathbf{0} & r<R \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & r>R\end{cases}$$



⑥均匀带电球体

$$\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\hat{r} & r<R \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & r>R\end{cases}$$

典型结果

点电荷 $\vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$

无限长均匀带电线 $\vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}$

均匀带电球面 $\begin{cases} E = 0 & (r < R) \\ \vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & (r > R) \end{cases}$

无限长均匀带电柱面 $\begin{cases} E = 0 & (r < R) \\ \vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r} & (r > R) \end{cases}$

均匀带电球体 $\begin{cases} E = \dfrac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\hat{r} & (r < R) \\ \vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & (r > R) \end{cases}$

无限大均匀带电平面 $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

五.典型带电体的电势分布

1. 点电荷 q 场中的电势分布：

$$U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

2. 均匀带电球面场中电势分布：

$$U_{内}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}=\text{恒量} \qquad U_{外}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\propto\frac{1}{r}$$

3.均匀带电圆环轴线上的电势分布：

$$U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{1/2}}$$

高斯定理解题步骤：

1. 对称性分析，确定 $\vec{E}$ 的大小及方向分布特征

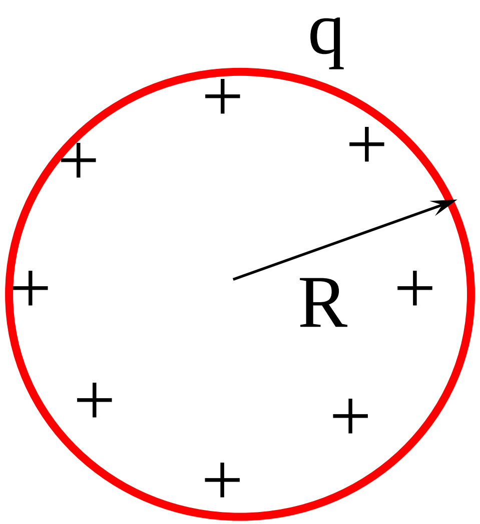
2. 作高斯面，计算电通量及 $\sum q_i$

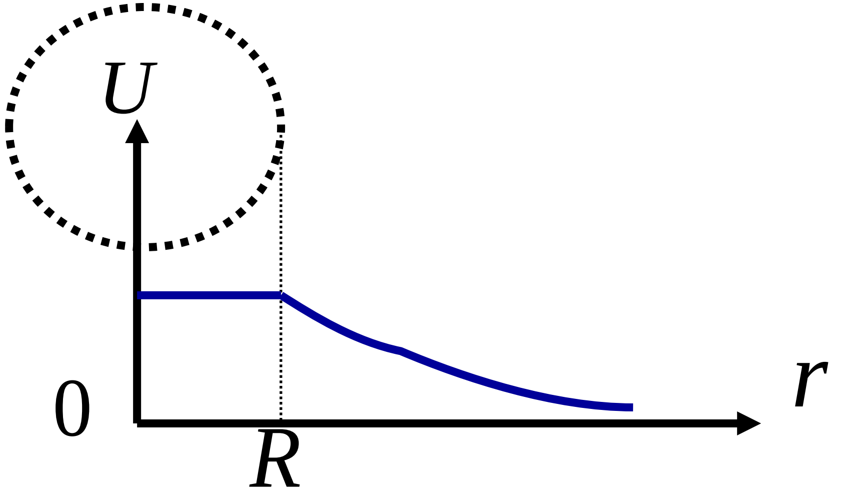
3. 利用高斯定理求解

一种特殊带电体的电势分布

均匀带电球面电场中电势的分布，已知 R，q

$$U=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} & r<R\\[2ex] \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} & r>R\end{cases}$$





结论：均匀带电球面，球内的电势等于球表面的电势，球外的电势等效于将电荷集中于球心的点电荷的电势。

1. 理解高斯定理

下列说法是否正确？试举例说明

① $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s}=0$，必有 $\vec{E}\Big|_S=0$

答： ×

$$\underbrace{\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=0}$$

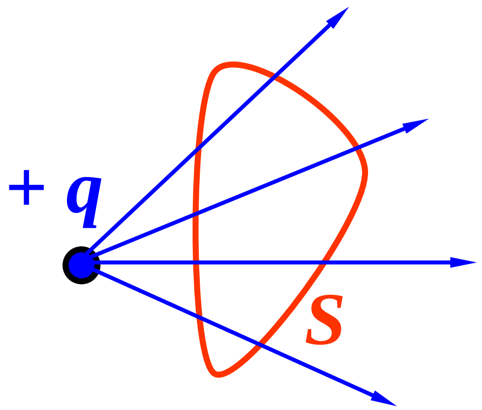
$\vec{E}\Big|_S=0$

面上场强处处为零

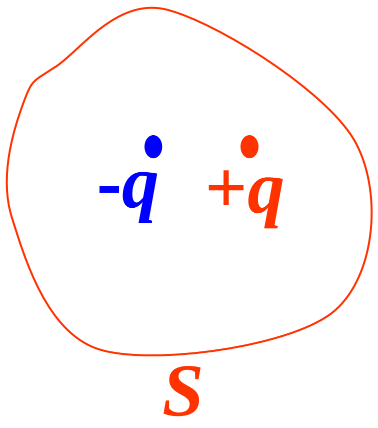
$\sum q_{i内}=0$

面内电量代数和为零

$$\sum q_{i内} = 0 \longrightarrow \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$



电荷在 S 外



电偶极子在 S 内

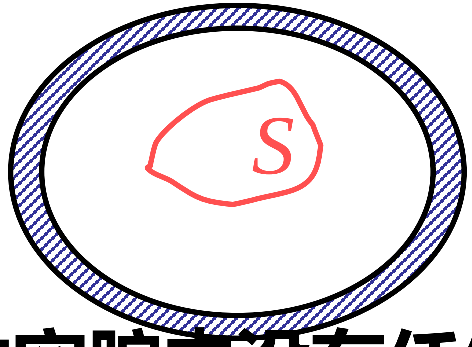
⑵ $\vec{E}\big|_S = 0$，则 S 内必无电荷分布

答： ×

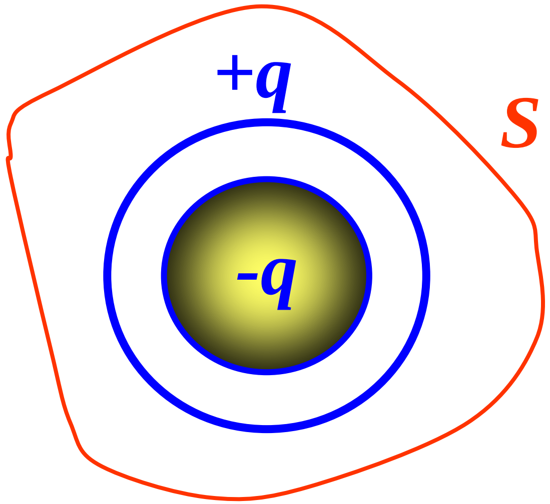
$$\vec{E}\Big|_S = 0 \quad \text{则} \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \Longrightarrow \sum q_i = 0$$

$$\sum q_i = 0$$

$\rho = 0$　　　　$\pm Q$



导体空腔内没有任何带电体

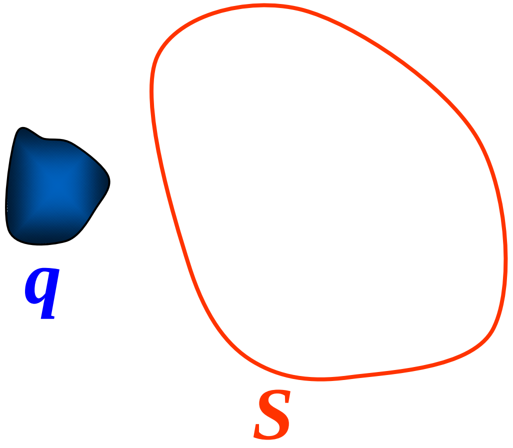


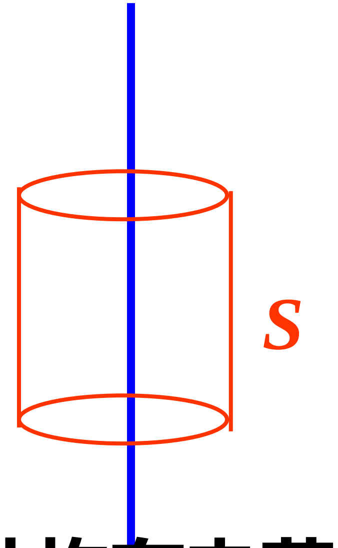
均匀带电球外有一带等量异号电荷的同心球壳

⑶ $\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$ 仅由 S 内包围的电荷决定

答：√ **(这正是高斯定理的结果)**

⑷ $\vec{E}\big|_S$ 仅由 S 内的电荷决定 **答：×**





S 内无电荷S外有电荷 **S 内外均有电荷分布**

(5) 只要 $\vec{E}$ 有对称性，就可用高斯定理求 $\vec{E}$

答：×

有限长均匀
带电直线

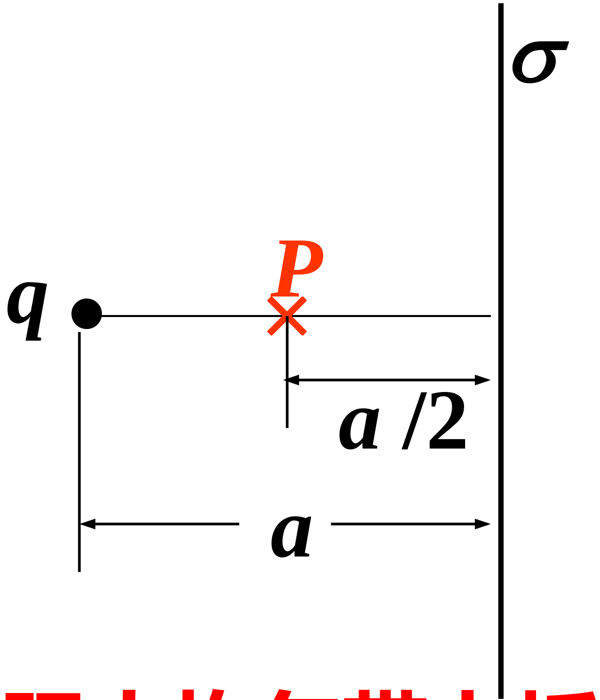
2. 电势零点

有人由电势叠加原理求得P点电势为：

$$U_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(a/2)} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{a}{2}$$

对否？理由如何？

答： ×



无限大均匀带电板

$$U_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(a/2)} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{a}{2}$$

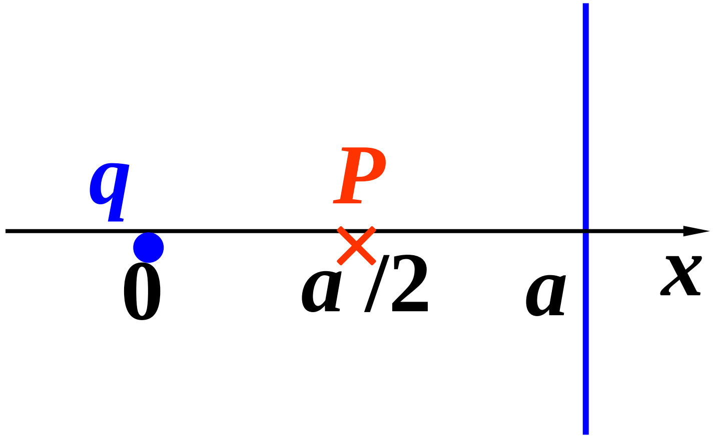
理由如何?

错在两个相叠加的电势的零点不一致

如可选大平板处（$x=a$）电势为零

$$U_P = U_{Pq} + U_{P板}$$

$$= \int_{a/2}^{a} \frac{q\,\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 x^2} + \int_{a/2}^{a} \left(-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\mathrm{d}x$$



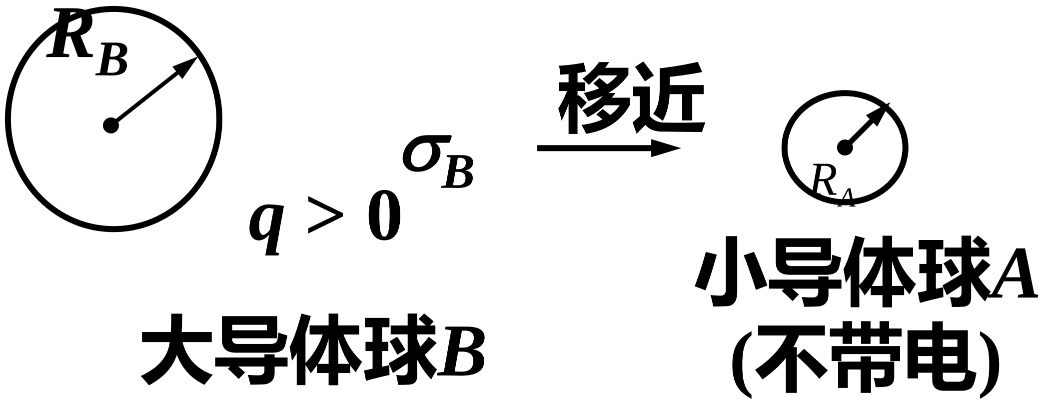
3. 力线性质导体等势

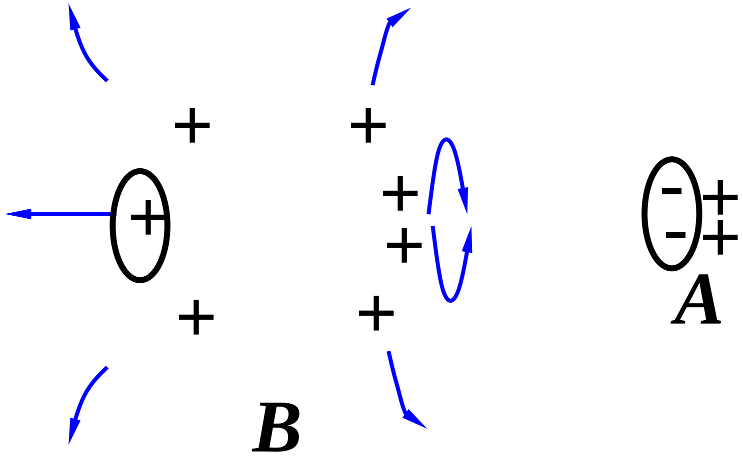
哪个结果对？理由？

(1) $U_B > U_A$

答：√

从 $\vec{E}$ 线可看出

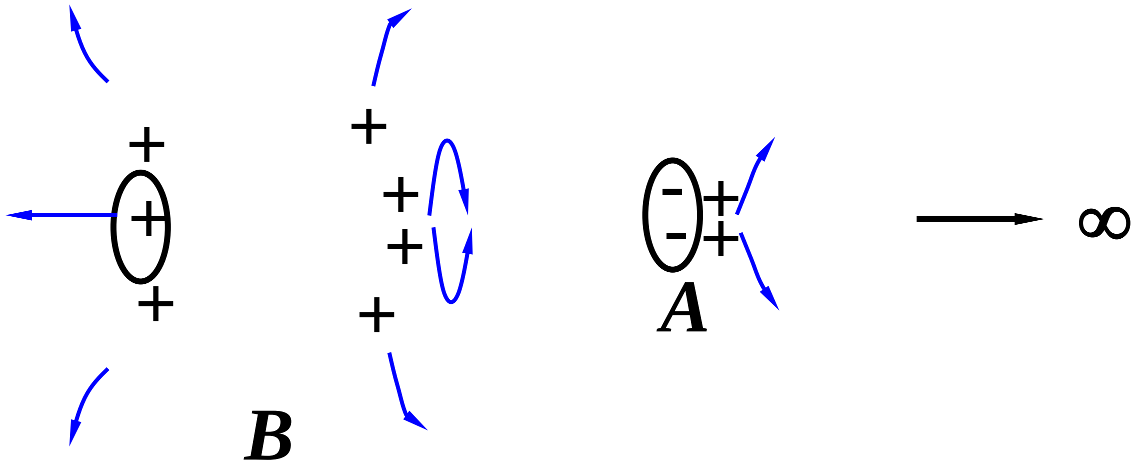




(2) $U_A < 0$

答： ×

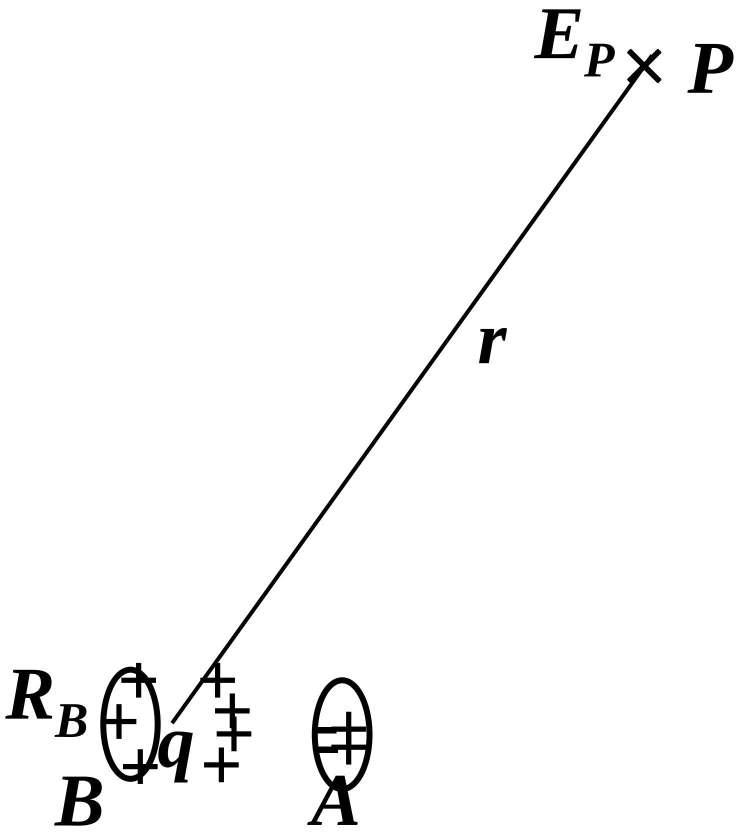
从 $\vec{E}$ 线可看出 $U_A > 0$



(3) $r >> R_B$ 时，$E_P \approx \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

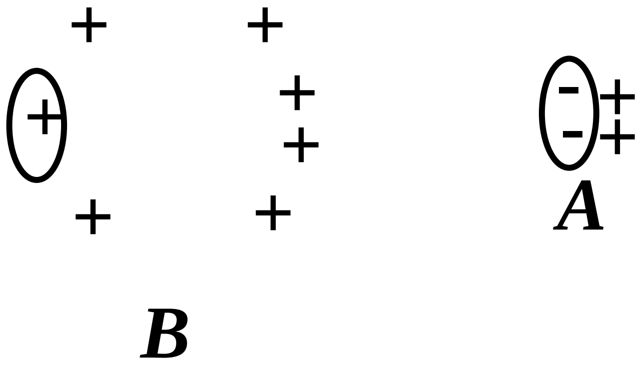
答：√

因为此时A、B的大小都可忽略



思考：

再精确一些应如何？

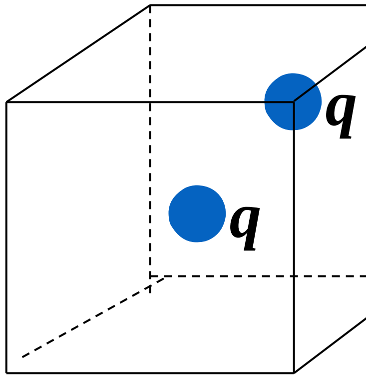


E_p可视为点电荷与偶极子的电场的叠加

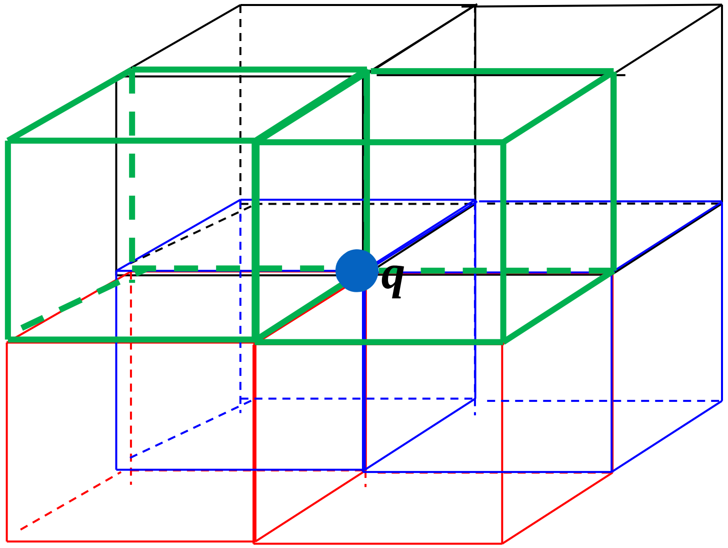
讨 论

1．立方体边长 a，求

$q\begin{cases}\text{位于中 心} \\ \text{位于一顶点}\end{cases}$ 过每一面的通量

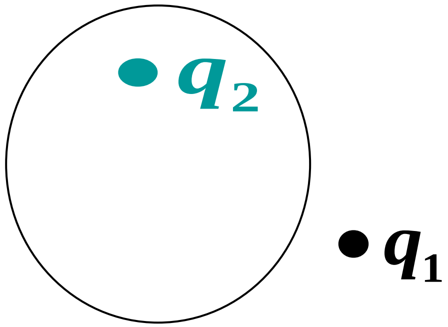


$$\Phi_e = \frac{q}{6\varepsilon_0}$$



$$\Phi_e = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{q}{24\varepsilon_0} \end{cases}$$

讨 论



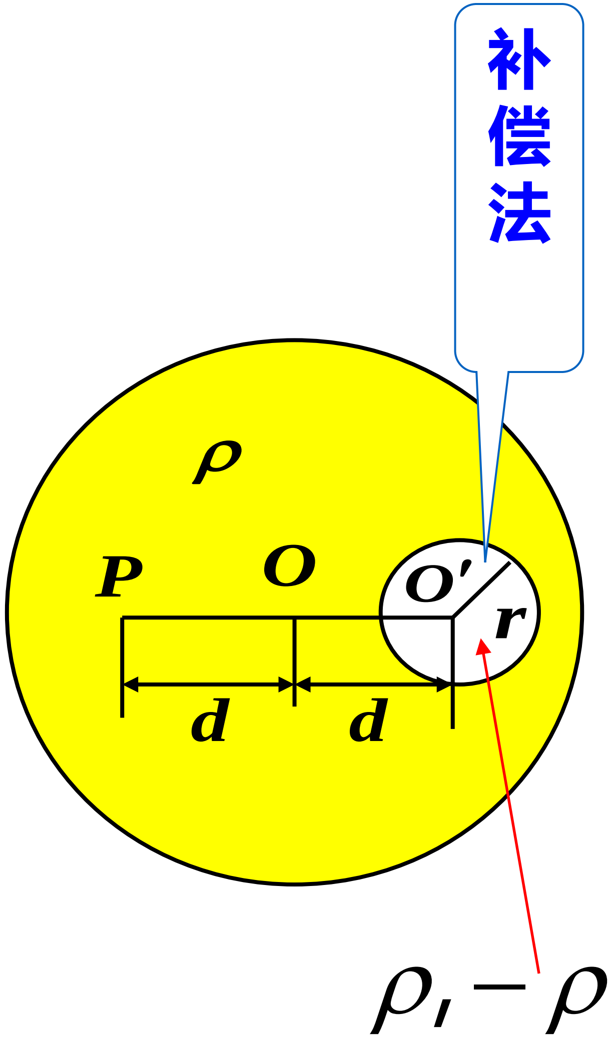
2．如图　讨论

移动两电荷对场强及通量的影响

练习： 均匀带电球体 ρ、R，挖去一小球， ρ 不变.

(1)求O′ 点的电场强度；

(2)设P, O, O' 在同一直径上, 求P 点的电场强度.



解：对完整球体，由高斯定理可知

$$r < R \text{ 时，} E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

(1) $\overrightarrow{E_{O'}} = \overrightarrow{E_{大}} - \overrightarrow{E_{小}}$ $\quad E_{大} = \dfrac{\rho d}{3\varepsilon_0}$ $\quad E_{小} = 0$

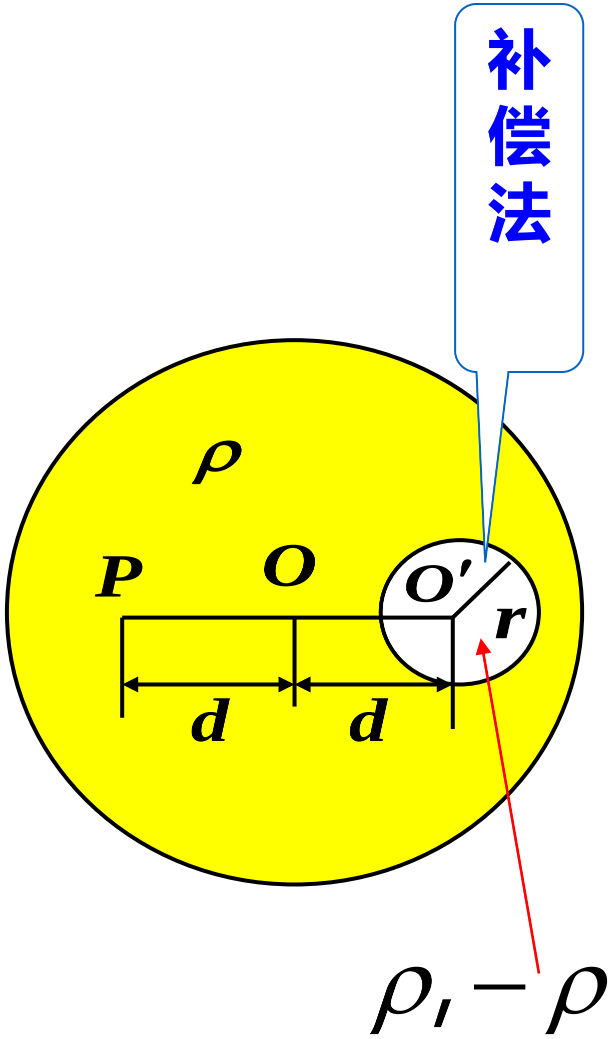
$$E_{O'} = \frac{\rho d}{3\varepsilon_0}$$

方向：沿OO' 向外

(2) **P处** $E_{小}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\dfrac{-\rho r^3}{12\varepsilon_0 d^2}$

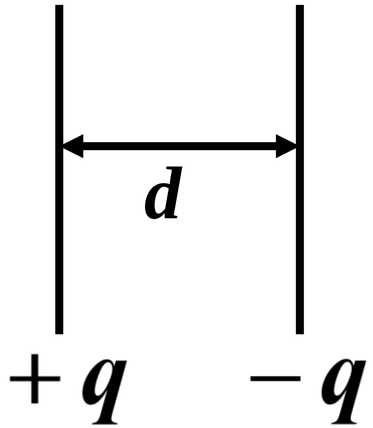
$$E_P=\vec{E}_{大}+\vec{E}_{小}=\frac{\rho d}{3\varepsilon_0}-\frac{\rho r^3}{12\varepsilon_0 d^2}$$

方向：沿OP 向外



讨 论：带电体在外电场中所受的力

$$\vec{F} = q\vec{E}$$



如图两板间若距离d 很小，板面积为S，两板间相互作用力为

$$f = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2} \quad \text{或} \quad f = \frac{q^2}{\varepsilon_0 s} \quad \text{或} \quad f = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 s} \quad \text{吗?}$$

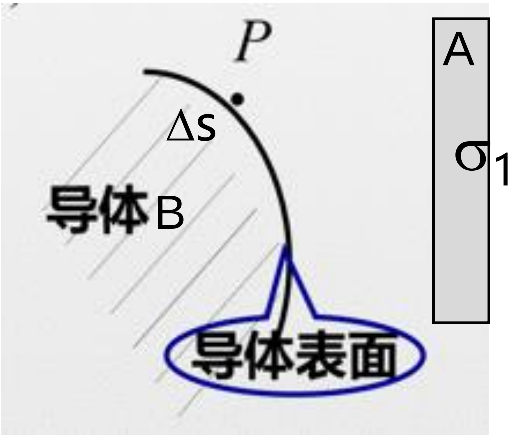
答：由于+q 和-q 相对于d 来说，不能看成点电荷，所以根据库仑定律求两板的相互作用力错误

由于$E=\sigma/\varepsilon$ 是+q和-q 在两板间产生的合电场，用这个电场强度去求两板的相互作用力是错误的。

一个板上的电荷对另一个板上的电荷的作用力应该是前者在后者所在处产生的电场，对后者的作用力。

计 算 题:

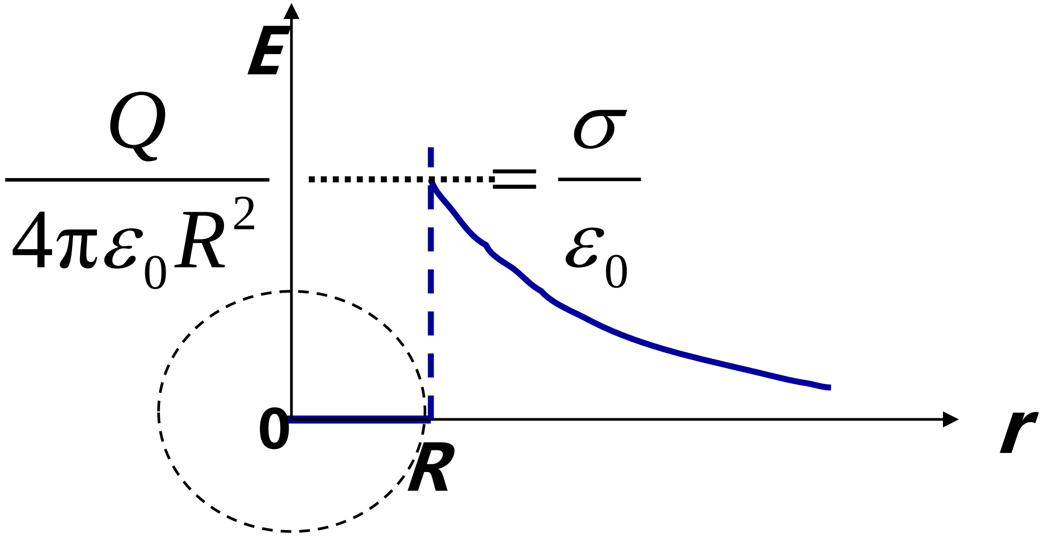
在电荷密度为σ_1　的均匀带电无限大平板A旁边放一带电导体B,今测得导体B表面靠近P处的电荷密度为 σ_2　，则导体B表面靠近P点处的电荷元　$\sigma_2\Delta s$　所受的**电场力**为：________________.



计算题：均匀带电球面上电场强度的求解

$$r < R \quad E = 0$$

$$r > R \quad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



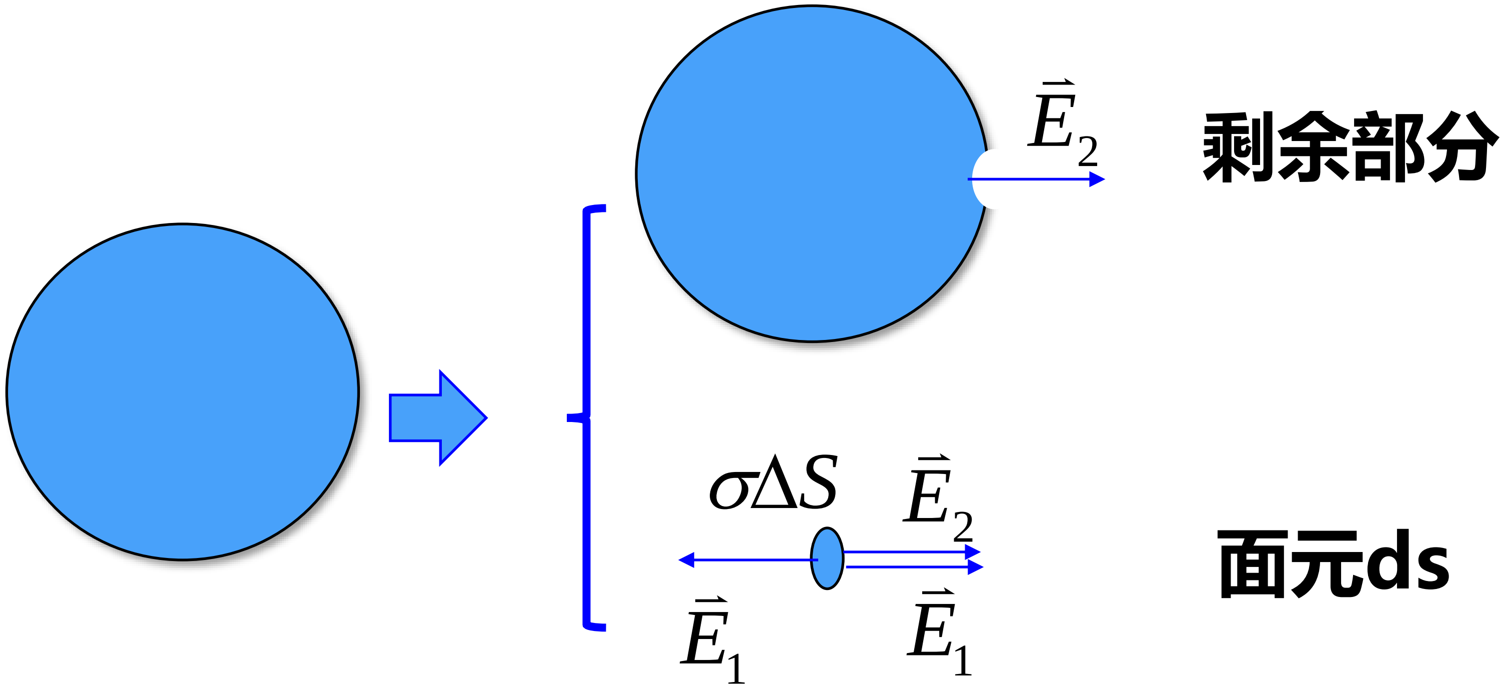
均匀带电球面电场分布

思考：

1）球面内场强为零到球面外突变 物理上合理吗？

实际情况应怎样？

计算题：均匀带电球面上电场强度的求解



均匀带电球面电场分布

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & r < R \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & r > R \end{cases}$$

内部无限趋于该处：$E_1 - E_2 = 0$

外部无限趋于该处：$E_1 + E_2 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$

解得球面上电荷元感受到的电场：

$$E_1 = E_2 = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^2}$$

估 算 题：

帕塞尔教授在他的《电磁学》中写道：“如果从地球上移去一滴水中所有的电子，则地球的电势将会升高几百万伏。”请用数字计算证实他的话。

一滴水按1g计算

$$U=\frac{Q}{C}=\frac{1/18\times N_A\times1.6\times10^{-19}}{4\pi\varepsilon_0\times \mathrm{R_e}}$$

$$U=\frac{Q}{C}=\frac{1/18\times6.023\times10^{23}\times1.6\times10^{-19}}{\frac{1}{9\times10^{9}}\times6.4\times10^{6}}=10^{6}\,\mathrm{V}$$

讨论题：电场能量密度不可能是负值，用（1）公式求电场能量，不可能是负值，但两个符号相反的电荷的互能公式（2），怎么会是负的?

$$W_e = \int_V \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 dV \qquad (1) \qquad\qquad W_q = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 R} \qquad (2)$$

答：在+q 和-q 组成的电荷系的电场内，各点的合电场为

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$

电场能量为

$$W = \int_V \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 dV = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_V (\vec{E}_+ + \vec{E}_-)\cdot(\vec{E}_+ + \vec{E}_-)dV$$

讨论题：电场能量密度不可能是负值，用（1）公式求电场能量，不可能是负值，但两个符号相反的电荷的互能公式（2），怎么会是负的?

$$W_e = \int_V \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 dV \qquad (1)$$

$$W_q = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 R} \qquad (2)$$

电场能量为

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int (\underbrace{E_+^2}_{\text{自能}} dV + \underbrace{E_-^2}_{\text{自能}}) dV + \varepsilon_0 \int \underbrace{\vec{E}_+ \bullet \vec{E}_-}_{\text{互能}} dV$$

$$(\vec{E}_+ - \vec{E}_-)^2 \geq 0, \quad E_+^2 + E_-^2 \geq \vec{E}_+ \bullet \vec{E}_-$$

电场总能量为正

讨论题：

$$W_q = q_0 \int_R^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

说明（点）电荷q_0在电场中

某点P 具有的电势能等于将 q_0从 P 移到电势零点电场力作的功，故电势能可正、可负、可为零；

而 $$W_e = \int_V \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 dV$$ 却表明电场能为正值，为何？

前一式给出的是**电荷间的相互作用能**，不管每个点电荷的电量有多大，都视为一个整体，一次从无穷远处移到它们的给定位置，**并未考虑点电荷所具有的自能**。

$$W_e = \int_V \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 dV$$

给出的是总静电能，即包括了相互作用的电势能和自能。因为电荷的自能永远是正值，且总大于它们之间相互作用的电势能，所以不管相互作用能是正是负，总能量永远是正的，且不可能为零。

自能：把带电体上各部分电荷从无限分散状态集中起来，外力克服电场力所作的功等于该带电体的自能。

讨论题：一平行板电容器被一电源充电后，即将电源断开，然后将一厚度为两板间距一半的金属板放在两极板之间。试问下述各量如何变化？（1）电容；（2）极板上的电荷；（3）极板间的电势差；（4）极板间的场强；（5）电场的能量。

填 空 题

如图所示，一半径为 R 的均匀带电球面，带电量为 q ，沿矢径方向放置有一均匀带电细线，电荷线密度为 λ ，长度为l，细线近端离球心距离为 a 。设球和细线上的电荷分布不受相互作用影响，细线在该电场中的电势能为 ____________。（设无穷远处为电势零点）