9-3 电　势

§1 静电场的保守性

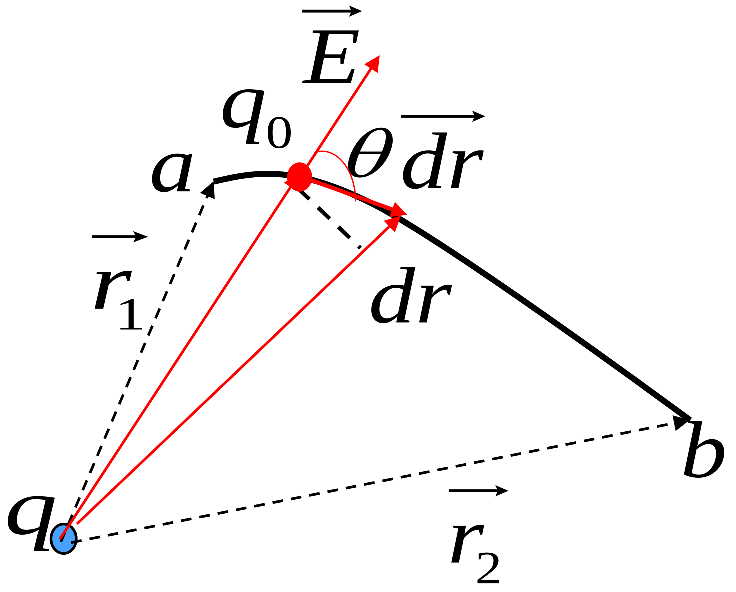
§2 静电场的环路定理

§3 电势的计算

§4 等势面 电势梯度

一.静电力是保守力

$$A_{ab}=\int_{(a)}^{(b)}\vec{f}\cdot d\vec{l}=\int_{(a)}^{(b)}q_0\vec{E}\cdot d\vec{l}=q_0\int_{(a)}^{(b)}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$



$$\frac{A_{ab}}{q_0}=\int_{(a)}^{(b)}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$\int_{(r_a)}^{(r_b)}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{(r_a)}^{(r_b)}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}\cdot d\vec{r}=\int_{(r_a)}^{(r_b)}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr\cos\theta$$

$$\int_{(r_a)}^{(r_b)}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)$$

与被移动的电荷的电量无关

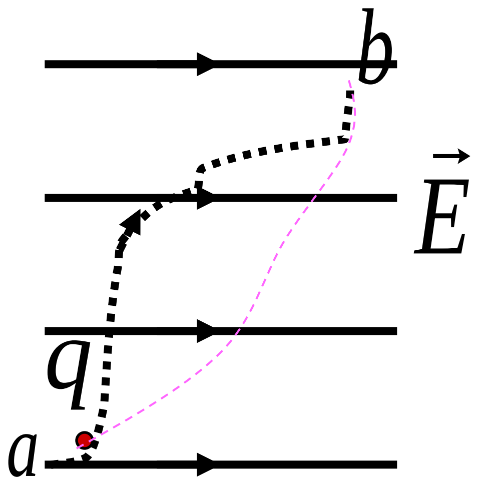
电场强度E的分布决定

二. 静电场力作功等于相应电势能的减量

$$W_{ab}=\int_{(a)}^{(b)}\vec{f}\cdot d\vec{l}=W_a-W_b$$

a点电势能

b点电势能



1、保守力的功

重力的功

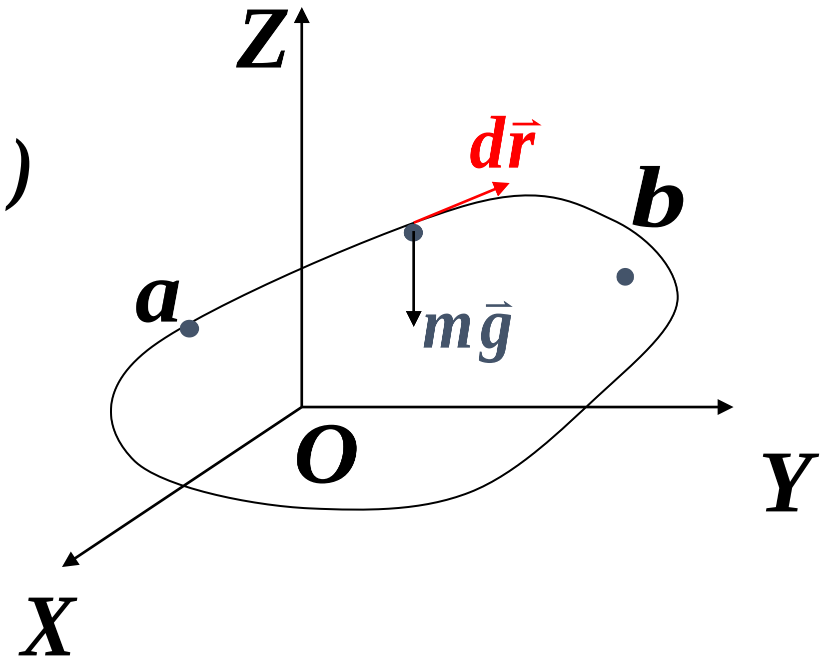
m在重力作用下由a运动到b，取地面为坐标原点.

$$W=\int_a^b m\vec{g}\cdot d\vec{r}$$

$$=\int_a^b(-mg)\vec{k}\cdot(dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k})$$

$$=\int_{z_a}^{z_b}-mg\,dz$$

$$=\underbrace{mgz_a}_{\text{初态量}}-\underbrace{mgz_b}_{\text{末态量}}$$



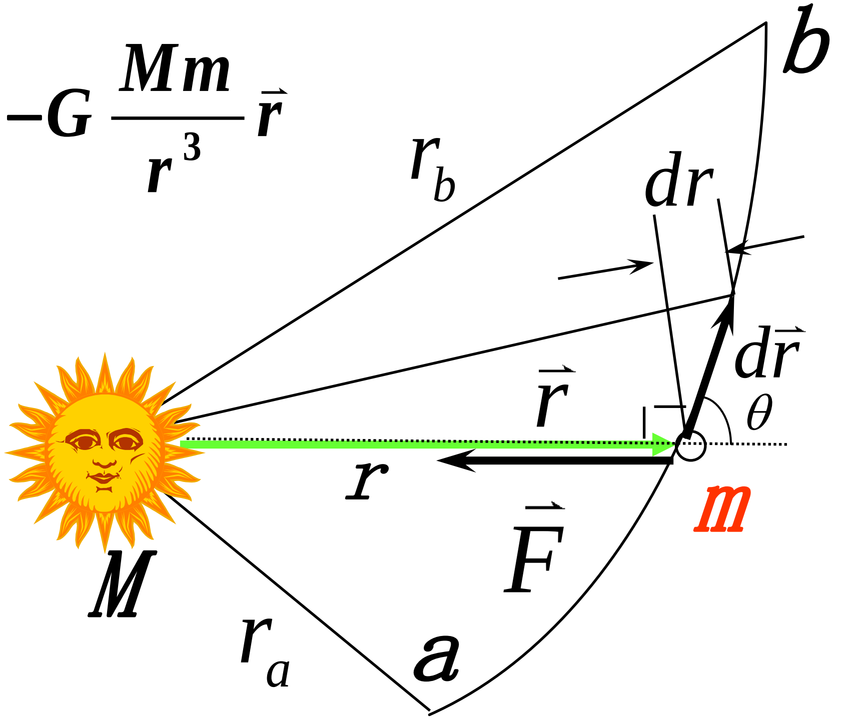
万有引力的功

两个质点之间在引力作用下相对运动时，以M所在处为原点，M指向m的方向为矢径的正方向。m受的引力方向与矢径方向相反。

$$W=-\int_{r_a}^{r_b} G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}\bullet d\vec{r} \qquad \vec{r}\bullet d\vec{r}=r\left|d\vec{r}\right|\cos\theta=rdr$$

$$W=-\int_{r_a}^{r_b} G\frac{Mm}{r^2}dr \qquad \vec{F}=-G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}$$

$$=\underbrace{\left(-G\frac{Mm}{r_a}\right)}_{\text{初态量}}-\underbrace{\left(-G\frac{Mm}{r_b}\right)}_{\text{末态量}}$$

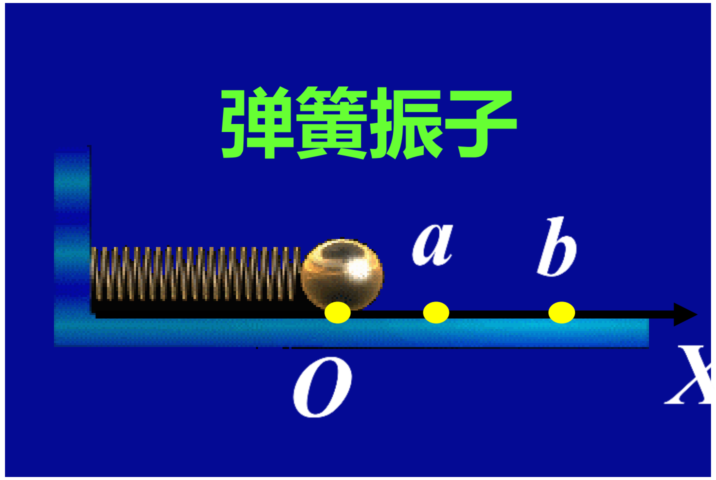


弹力的功

$$\vec{F} = -kx\vec{i}$$

$$W = \int_{x_a}^{x_b} -kx\vec{i} \bullet dx\vec{i} = -\left(\frac{1}{2}kx_b^{\,2} - \frac{1}{2}kx_a^{\,2}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}kx_a^{\,2}}_{\text{初态量}} - \underbrace{\frac{1}{2}kx_b^{\,2}}_{\text{末态量}}$$



§2 静电场的环路定理

一.表述

静电场中场强沿任意闭合环路的线积分恒等于零

$$\boxed{\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0}$$

§2 静电场的环路定理

$$\boxed{\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0}$$

二. 证明

将一点电荷在场中沿任意闭合线走一圈

∵静电场力是保守力

$$\therefore \oint_L \vec{f}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\oint_L q\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$$

$$\Longrightarrow \oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$$

证毕

讨论

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

1）静电场的基本方程之一

静电场是保守场

2） 微分形式 $\nabla \times \vec{E} = 0$

3）表征静电场的性质有两个方程

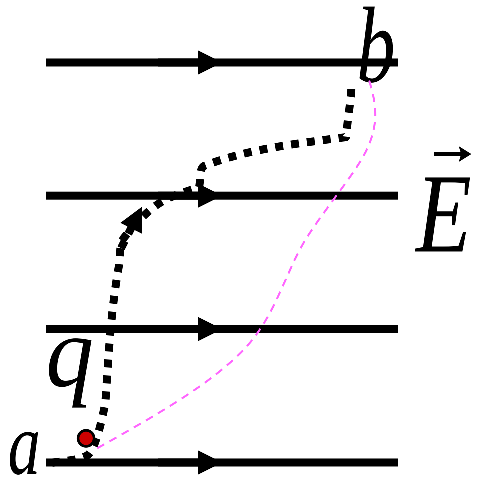
$$\boxed{\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0} \qquad \boxed{\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}}$$

§3 电势的计算

一.电势

如图示

点电荷在场中受力



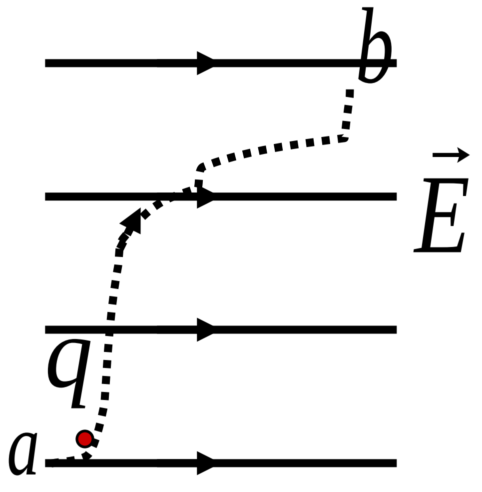
$$\vec{f}=q\vec{E}$$

$$\int_{(a)}^{(b)}\vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=q\int_{(a)}^{(b)}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=W_a-W_b$$

一.电 势

$$\int_{(a)}^{(b)} \vec{f}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = q\int_{(a)}^{(b)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = W_a - W_b$$

$$\int_{(a)}^{(b)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{W_a}{q} - \frac{W_b}{q}$$



$\dfrac{W_a}{q} - \dfrac{W_b}{q}$ 与**试验电荷无关**

反映了电场在a b两点的性质

$$\int_{(a)}^{(b)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = U_a - U_b$$

称 a b两点**电势差**

若选b点的势能为参考零点，则a点的**电势**：

$$\boxed{U_a = \int_{(a)}^{势能零点} \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

物理意义：单位正电荷从该点到无穷远处(电势零)电场力所作的功, 或 a→∞ 场强的线积分。

单位正电荷在该点所具有的电势能

1) 电势零点的选择(参考点)任意 视分析问题方便而定，参考点不同电势不同

电 势

通常：理论计算有限带电体电势时选无限远为参考点，实际应用中或研究电路问题时取大地、仪器外壳等

2)电势的量纲

SI制：单位 V (伏特)

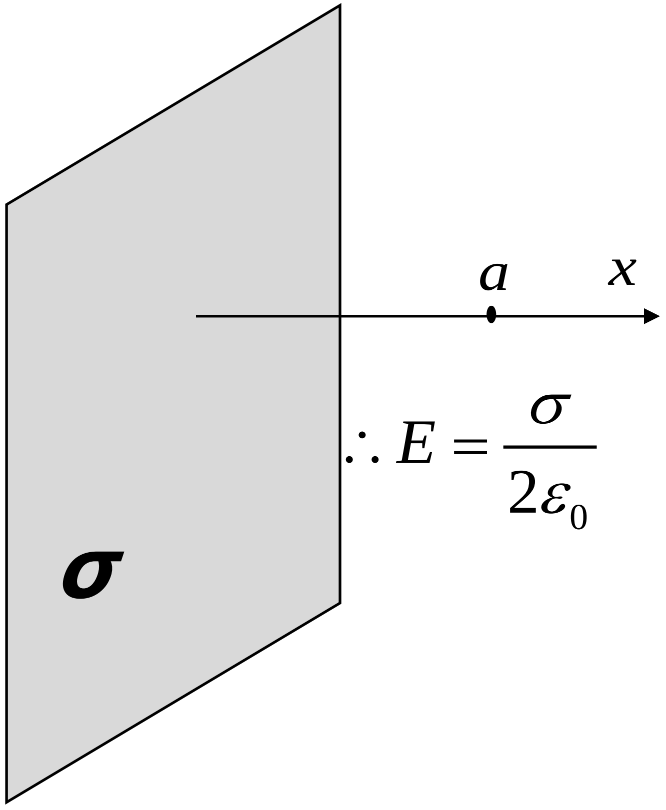
量纲

$$[U]=\frac{[W]}{[q]}=L^2MT^{-3}I^{-1}$$

例如：计算无限大平面的电势

$$U_a = \int_{(a)}^{\text{势能零点}} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$U_a = \int_{(a)}^{\text{势能零点}} E\hat{x}\cdot dx\hat{x} = \int_{(a)}^{\text{势能零点}} Edx = \int_{(a)}^{\text{势能零点}} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}dx$$



$$\therefore E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

将电荷q从a→b电场力的功

$$A_{ab} = W_a - W_b = q_0 \int_a^b \vec{E} \bullet d\vec{l} = q_0 (U_a - U_b)$$

注意

1、电势是相对量，**电势零点的选择是任意的**。

2、两点间的**电势差**与电势零点选择无关。

3、电势零点的选择。

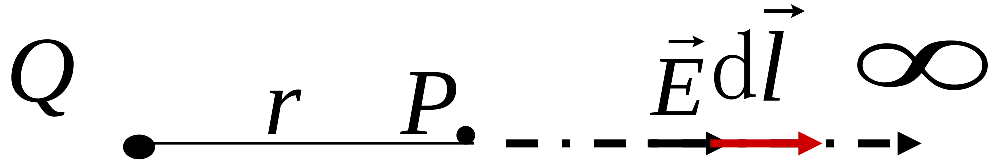
保守力的功=相应**势能的减少**

初态量-末态量

二.电势的计算

1.点电荷场电势公式

$$U_P = \int_{(P)}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



$$= \int_{r}^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{r}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{r}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathrm{d}r$$

$\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}\vec{r}$

$$\boxed{U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

球对称

标量

正负

2. 任意带电体电势

1) 由定义式出发

$$U=\int_{(P)}^{P(0)}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

2) 电势叠加原理

电势 $u=\int_{P}^{\infty}\vec{E}\bullet d\vec{l}=\int_{P}^{\infty}(\vec{E}_1+\vec{E}_2+\cdots+\vec{E}_n)\bullet d\vec{l}$

$$=\int_{P}^{\infty}\vec{E}_1\bullet d\vec{l}+\int_{P}^{\infty}\vec{E}_2\bullet d\vec{l}+\ldots\ldots+\int_{P}^{\infty}\vec{E}_n\bullet d\vec{l}$$

$$=u_1+u_2+\ldots\ldots+u_n=\sum_{i=1}^{n}u_i$$

各点电荷单独存在时在该点电势的**代数和**

电势计算的两种方法：

- 根据已知的场强分布，按定义计算

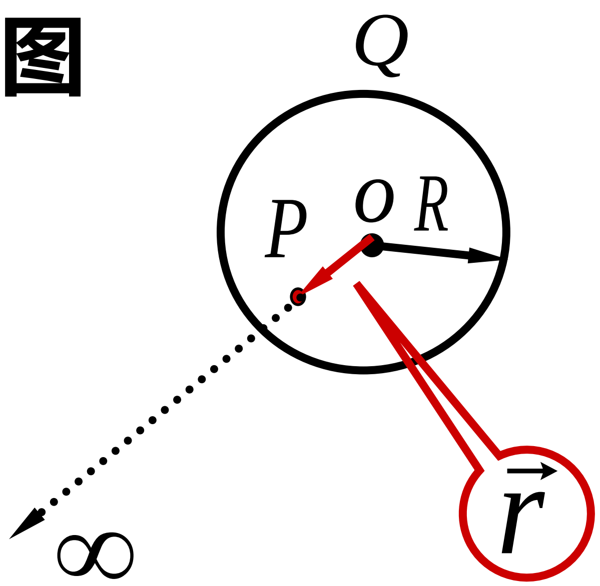
$$U_P = \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

- 由点电荷电势公式，利用电势叠加原理计算

$$U = \sum U_i = \sum \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

$$U = \int dU = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

例1 计算均匀带电球面的电势 如图



解:

均匀带电球面电场的分布为

$$r < R \quad E = 0$$

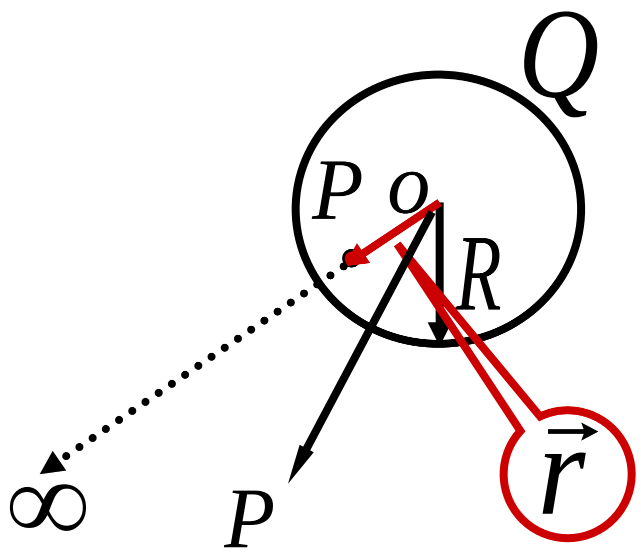
$$r > R \quad \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

若场点在球内 即 $r<R$ 如图

$$U = \int_{(P)}^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{r}^{R} 0 \mathrm{d}l + \int_{R}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$$

$$U=\int_r^R o\,dl+\int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$



场点在球面外 即 $r>R$

$$U=\int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

1)电势分布

$$U=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\quad r<R$$

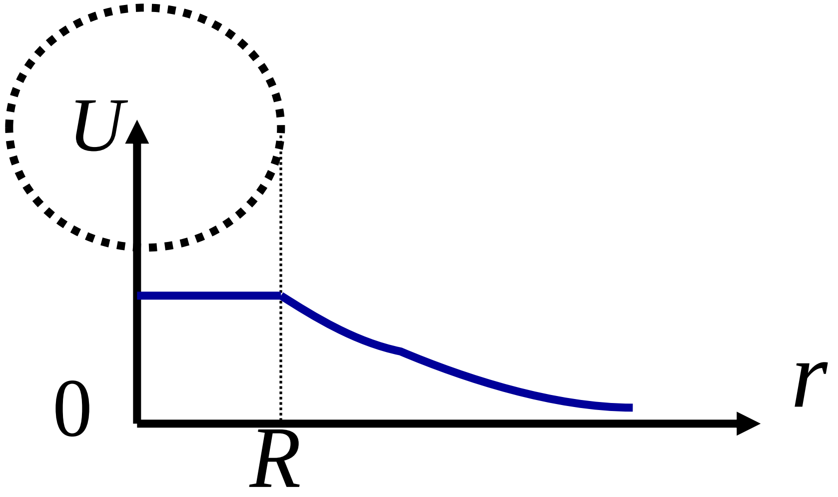
$$U=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\quad r>R$$

等势体

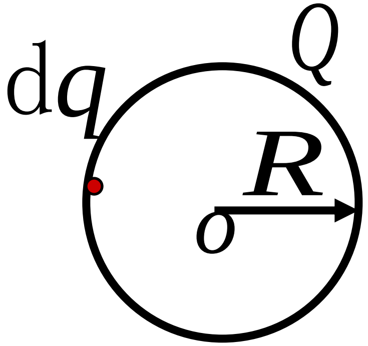
与电量集中在球心的

点电荷的电势分布相同

2)图示



例2 计算电量为 Q 的带电球面球心的电势



解：

在球面上任取一电荷元 $\mathrm{d}q$

则电荷元在球心的电势为 $dU = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R}$

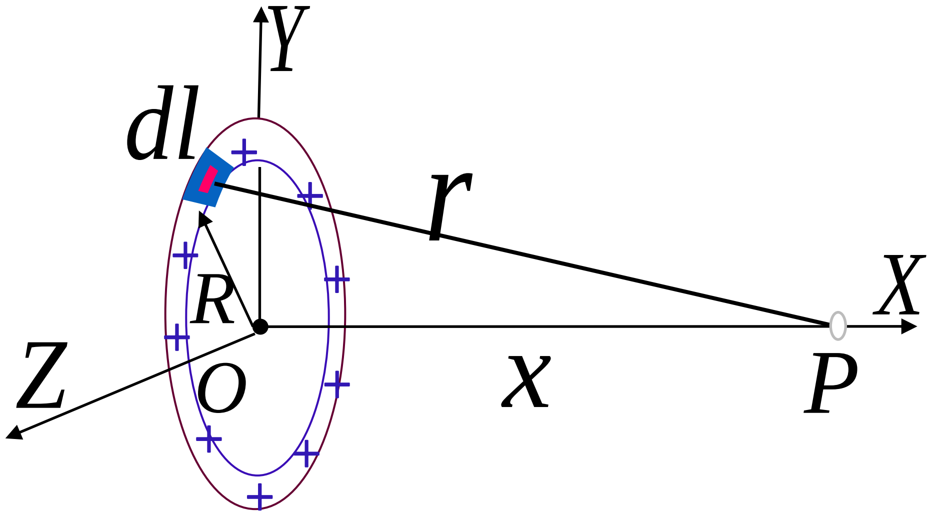
由电势叠加原理

球面上电荷在球心的总电势

$$U = \int_{(Q)} dU = \int_{(Q)} \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

例3：求均匀**带电圆环**轴线上的电势分布。

已知：R、q



解:方法一 **微元法，叠加法**

$$dU = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$U_P = \int dU = \int_0^{2\pi R} \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{2\pi R\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + x^2}}$$

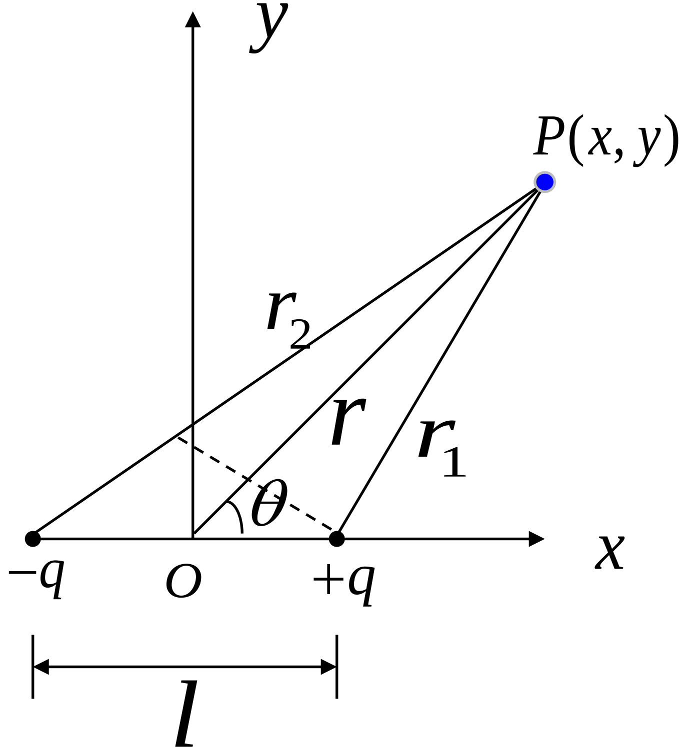
方法二 **定义法**

由电场强度的分布

$$E = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$U = \int_{x_p}^{\infty} Edx = \int_{x_p}^{\infty} \frac{qxdx}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}$$

例4：求电偶极子电场中任一点P的电势



由叠加原理

$$U_P = U_1 + U_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} = \frac{q(r_2 - r_1)}{4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2}$$

$\because r >> l \qquad r_2 - r_1 \approx l\cos\theta \qquad r_1 r_2 \approx r^2$

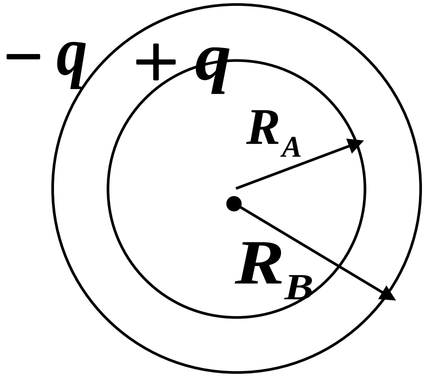
$$\therefore U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{l\cos\theta}{r^2}$$

其中 $r^2 = x^2 + y^2$

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{px}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

练习： 1.求等量异号的同心带电球面的电势差, 已知+q 、 -q、 R_A 、 R_B



解: 由高斯定理

$$E = \begin{cases} 0 & r < R_A \quad r > R_B \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & R_A < r < R_B \end{cases}$$

由电势差定义

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R_A}^{R_B} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B}\right)$$

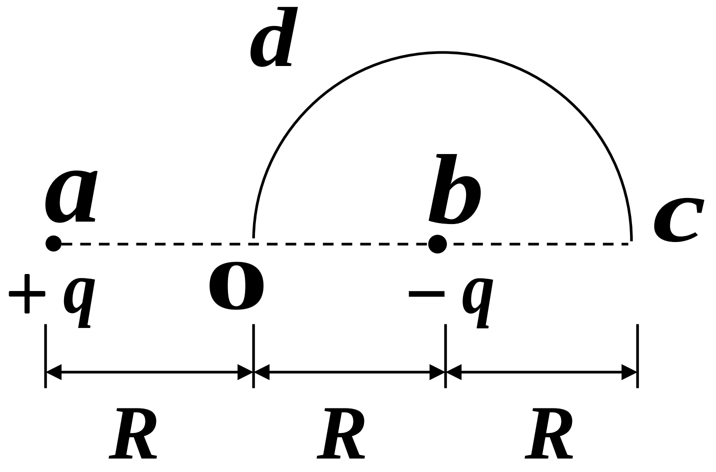
请用叠加原理试试

练习2. 如图已知 $+q$ 、$-q$、R

①求单位正电荷沿 odc 移至 c，电场力所作的功

$$W_{oc}=U_o-U_c=0-\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 3R}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R}\right)$$

$$=\frac{q}{6\pi\varepsilon_0 R}$$

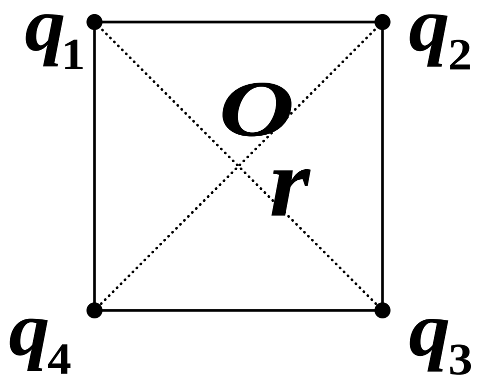


② 将单位负电荷由 $\infty \longrightarrow$ O电场力所作的功

$$W_{\infty O}=U_\infty-U_o=0$$

已知正方形顶点有四个等量的点电荷

$4.0\times10^{-9}C$ **r=5cm**



①求 U_o

$$U_0 = 4\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} = 28.8\times10^2 V$$

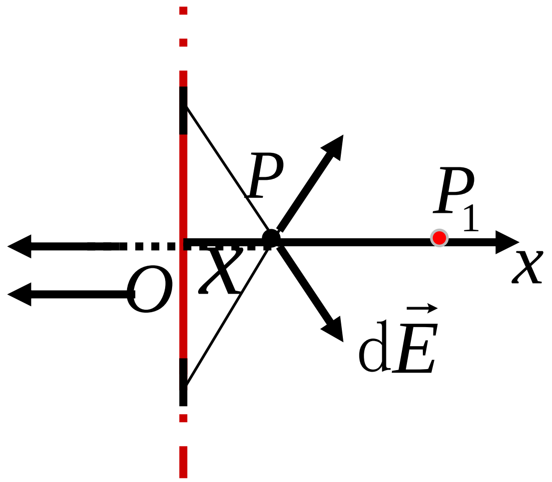
②将 $q_0 = 1.0\times10^{-9}c$ **从** $\infty \longrightarrow 0$ **电场力所作的功**

$$W_{\infty 0} = q_0(U_\infty - U_0) = q_0(0 - 28.8\times10^2) = -28.8\times10^{-7} J$$

③求该过程中电势能的改变

$$W_{\infty 0} = W_\infty - W_0 = -28.8\times10^{-7} < 0$$ **电势能**$\uparrow$

练习：无限长均匀带电直线的电势分布



$$E_p = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\hat{x}$$

$$U_p - U_{p_1} = \int_x^{x_1} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\hat{x}\bullet dx\hat{x} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_x^{x_1}\frac{1}{x}dx = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(x_1/x)$$

$$\ln 1 = 0$$

可以选x=1米处p_1为零电势参考点，求得P的电势

$$U_p = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln x$$

§4 等势面 电势梯度

一.等势面

由电势相等的点组成的面叫等势面

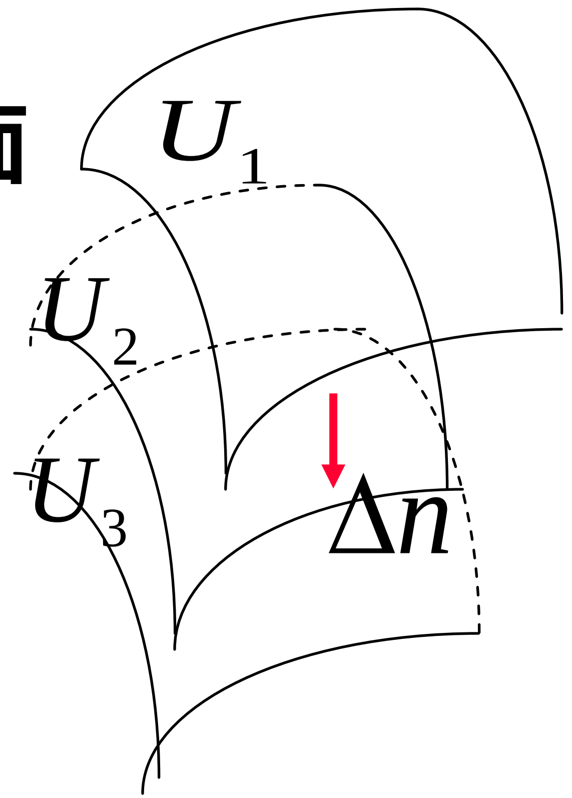
满足方程 $U\left(x,y,z\right)=C$

当常量C取等间隔数值时

可以得到一系列的等势面

即要求： $\Delta U_{12}=\Delta U_{23}$

$\Delta U\approx E\Delta n$



等势面的疏密反映了场的强弱

二.电场线与等势面的关系

1. 电场线处处垂直等势面

在等势面上任取两点 *a*、b，则

$$\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = U_a - U_b \xrightarrow{\text{等势}} = 0$$

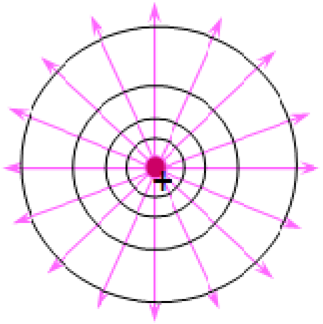
$\because$ ***a*、b 任取**

$\therefore$ **处处有** $\vec{E} \perp \mathrm{d}\vec{l}$

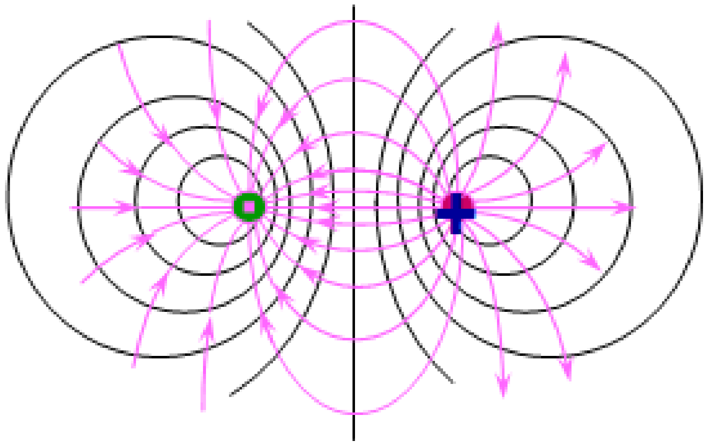
2. 电场线指向电势降的方向

二.电场线与等势面的关系

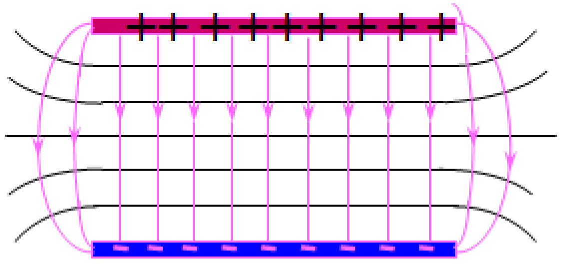
点电荷的电场线与等势面



电偶极子的电场线与等势面



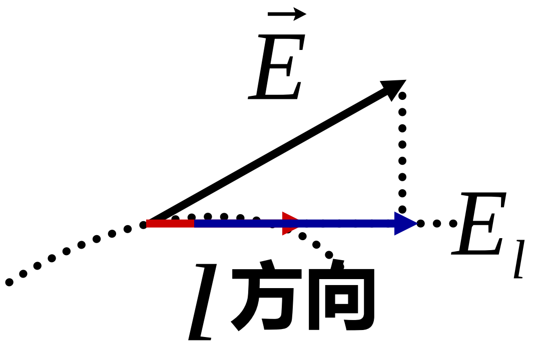
平行板电容器的电场线与等势面



三.电场强度与电势梯度

∵静电场是保守场

∴对单位电荷 有 $E_l = -\dfrac{\partial U}{\partial l}$



$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$$
$$E_Y = -\frac{\partial U}{\partial y}$$
$$E_Z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

在直角坐标系中

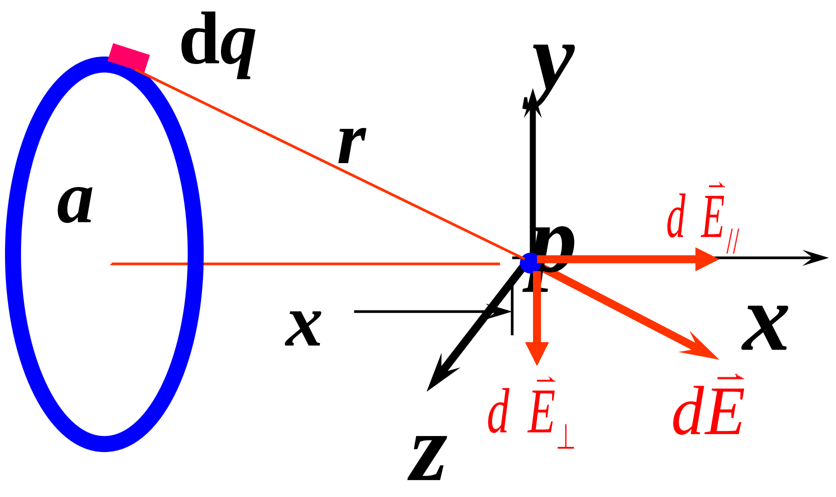
梯度算符

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla U}$$

物理意义：**电势梯度**是一个**矢量**，它的**大小**为电势沿等势面法线方向的变化率，它的**方向**沿等势面法线方向且指向电势增大的方向。

例1：利用场强与电势梯度的关系， 计算均匀带电细圆环轴线上一点的场强。



解：

$$U=U(x)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

$$\therefore E_x=-\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)$$

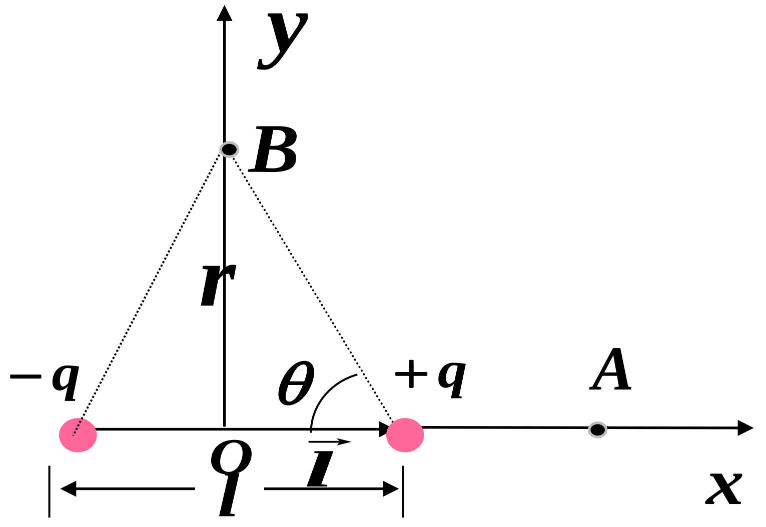
$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

$$E_y=E_z=0$$

$$\vec{E}=E_x\vec{i}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{(R^2+x^2)^{3/2}}\vec{i}$$

例2：计算电偶极子电场中任一点的场强

解： $$U=U(x,y)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{px}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$



$$E_x=-\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{px}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)$$

$$E_y=-\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{px}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)$$

A点(y=0) $$\vec{E}=\frac{p}{2\pi\varepsilon_0 x^3}\vec{i}$$

B点(x=0) $$\vec{E}=-\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 y^3}\vec{i}$$

小 结

一.静电场环路定理：

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

静电场强沿任意闭合路径的线积分为零. 反映了**静电场是保守力场，是有势场.**

二.电势、电势能、电势差

电势能： $$W_a = q_0 \int_a^{零势点} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

电 势： $$U_a = \int_a^{零势点} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

电势差： $$U_{ab} = U_a - U_b = \int_a^b \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

三. 电势的计算（两种基本方法）

1.场强积分法（由定义求）

〈1〉确定 $\vec{E}$ 分布

〈2〉选零势点和便于计算的积分路径

选取零势点的原则：使场中电势分布有确定值

〈3〉由电势定义

$$U_a = \int_a^{\text{零势点}} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_a^{\text{零势点}} E\cos\theta\, dl$$

路径上各点的总场强，若路径上各段的表达式不同，应分段积分

2. 叠加法

〈1〉将带电体划分为电荷元 dq

〈2〉选零势点，写出 dq 在场点的电势 dU

〈3〉由叠加原理：$U=\sum dU$ 或 $U=\int dU$

四.电场强度与电势的关系

$$\vec{E}=-\mathrm{grad}U$$

给出又一种求 $\vec{E}$ 的方法：

$$\vec{E}=-(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k})$$

五.典型带电体的电势分布

1. 点电荷 q 场中的电势分布：$U=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

2. 均匀带电球面场中电势分布：

$$U_{内}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}=恒量 \qquad U_{外}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\propto\frac{1}{r}$$

3.均匀带电圆环轴线上的电势分布：

$$U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{1/2}}$$