数字图像处理

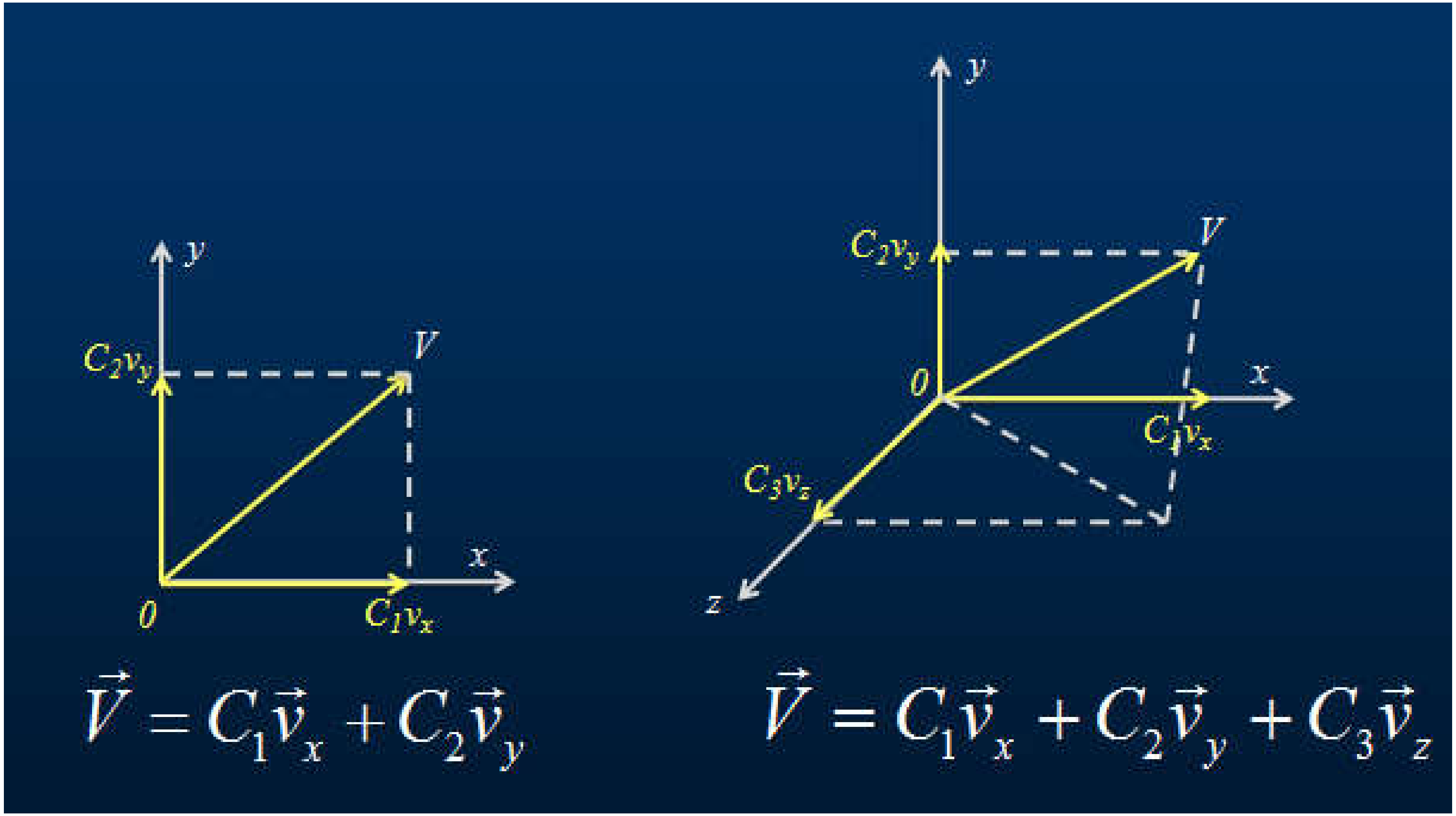
第七章　小波变换和其他图像变换

赵荣昌 (byrons.zhao@gmail.com)

中南大学计算机学院

一、背 景

➢ 正交投影



y
V
C_2v_y
x
0
C_1v_x
$\vec{V} = C_1\vec{v}_x + C_2\vec{v}_y$
y
V
C_2v_y
0
x
C_1v_x
C_3v_z
z
$\vec{V} = C_1\vec{v}_x + C_2\vec{v}_y + C_3\vec{v}_z$

一、背 景

➢ 信号内积与内积空间

内积

$$< u,v > = < u,v >^*$$
$$< u+v,w > = < u,w > + < v,w >$$
$$< \alpha u,v > = \alpha < u,v >$$
$$< v,v > \geq 0 \; and < v,v > = 0 \; only \; v=0$$

内积空间

数域上的抽象向量空间，与内积函数共同将向量空间中的两个向量映射为属于的一个标量。

✓ 假设$u(t)$和$v(t)$是定义在$(t_1，t_2)$区间的函数，其内积为

$$< u(t),v(t) >= \int_{t1}^{t2} u(t)v(t)\,\mathrm{d}\,t$$

✓ 向量z的范数 $||z|| = \sqrt{< z,z >}$

✓ 两个向量间的角度 $\theta = \dfrac{< z1,z2 >}{||z1||||z2||}$

一、背 景

- 信号内积与内积空间

✓ 设有$\boldsymbol{u}$和 $\boldsymbol{v}$ 是$N\times 1$的列向量，具有如下标量内积的实数域$\boldsymbol{R}$上的欧式空间$\boldsymbol{R}^N$

$$< \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} > \ = \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v} = u_0v_0 + u_1v_1 + \ ...u_{N-1}v_{N-1} = \sum_{i=0}^{N-1} u_iv_i$$

✓ 设有$\boldsymbol{u}$和 $\boldsymbol{v}$ 是$N\times 1$的复值列向量，*表示复共轭运算，有内积函数的复数域C上的酉空间$\boldsymbol{C}^N$

$$< \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} > \ = \boldsymbol{u}^{*T}\boldsymbol{v} = \sum_{i=0}^{N-1} u_i^*v_i = < v, u >^*$$

✓ 内积空间$\boldsymbol{C}([a,b])$，其中向量是区间$a \ll x \ll b$上连续函数，内积函数是积分内积

$$< f(x), g(x) > \ = \int_a^b f^*(x)g(x)dx$$

一、背 景

$$< u, v > \ = < u, v >^*$$
$$< u + v, w > \ = \ < u, w > \ + < v, w >$$
$$< \alpha u, v > \ = \ \alpha < u, v >$$
$$< v, v > \ \geq 0 \ and < v, v > \ = 0 \ only \ v = 0$$

- 信号正交

定义在(t_1, t_2)区间的$u(t)$和$v(t)$满足

$$< u(t), v(t) >= \int_{t1}^{t2} u(t)v(t)\,\mathrm{d}t = 0$$ (两函数的内积为0)

则称$u(t)$和$v(t)$ 在区间(t_1, t_2)内**正交**。

- 正交函数集:

若n个函数$u_1(t)$, $u_2(t)$，$\cdots$, $u_n(t)$构成一个函数集，这些函数在区间(t_1, t_2)内满足

$$\int_{t_1}^{t_2} u_i(t)u_j(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ K_i \neq 0, & i = j \end{cases}$$

则称此函数集为在区间(t_1, t_2)的**正交函数集/正交向量集**。

一、背 景

- 向量正交

设有$\boldsymbol{u}$和 $\boldsymbol{v}$ 是$N\times 1$的列向量，具有如下内积的实数域$\boldsymbol{R}$上的欧式空间$\boldsymbol{R}^N$

$$< \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} > \; = \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{v} = u_0 v_0 + u_1 v_1 + \ ...u_{N-1} v_{N-1} = \sum_{i=0}^{N-1} u_i v_i = 0$$

- 正交基

  - 如果 $<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> = 0$, 称$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{v}$是正交的
  - 若果非零向量$\boldsymbol{w}_0, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots$ 是互相两两正交，即$<\boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{w}_j>=0$, $i \neq j$，它们是内积空间的正交基。

$$< \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{w}_j > \; = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, \ i \neq j \\ 1, \ i = j \end{cases}$$

一、背 景

➢ 向量的正交分解

$$z=\alpha_0 w_0+\alpha_1 w_1+\alpha_2 w_2+\ldots$$

它和基向量$\boldsymbol{w_i}$的内积

$$\begin{aligned}<w_i,z>&=<w_i,\alpha_0 w_0+\alpha_1 w_1+\alpha_2 w_2+\ldots>\\&=\alpha_0\underbrace{<w_i,w_0>}_{=0}+\alpha_1\underbrace{<w_i,w_1>}_{=0}+\ldots+\alpha_i\underbrace{<w_i,w_i>}_{=1}+\underbrace{\ldots}_{=0}\end{aligned}$$

即

$$\alpha_i=\frac{<w_i,z>}{<w_i,w_i>}$$

=0 =1

所以系数

$$=\frac{\int_{t_1}^{t_2}w_i(t)z(t)\,\mathrm{d}t}{\int_{t_1}^{t_2}w_i^2(t)\,\mathrm{d}t}=\frac{1}{K_i}\int_{t_1}^{t_2}w_i(t)z(t)\,\mathrm{d}t$$

一、背 景

- 向量的正交分解

向量 $z(t)$ 或者z可分解为无穷多项正交基之和

$$z(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i w_i(t)$$

$$\alpha_i = \frac{1}{K_i} \int_{t_1}^{t_2} z(t) w_i(t) \, \mathrm{d}t = < z, w_i >$$

- 最简单的正交函数集是什么？三角函数！！

一、背景

中南大学 CENTRAL SOUTH UNIVERSITY

➢ Discrete Fourier Transform, DFT

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\mathrm{e}^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

$$f(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)\mathrm{e}^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

离散傅里叶变换

权 值

基函数

一、背 景

- 向量的正交分解

向量 $z(t)$ 或者z可分解为无穷多项正交基之和

$$z(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i w_i(t)$$

$$\alpha_i=\frac{1}{K_i}\int_{t_1}^{t_2} z(t)w_i(t)\,\mathrm{d}t=<z,w_i>$$

- 基函数决定变换的性质和作用，系数是变换域参数
- 三角函数是最好的基函数吗？有没有其他基函数?

一、背 景

- 相关的意义

✓ 如果两个连续函数$f(x)$、$g(x)$,它们的相关定义为

$$f \Diamond g(\Delta x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) g(x+\Delta x) dx = < f(x), g(x+\Delta x) >$$

滑动内积，度量的是两个函数的相似性

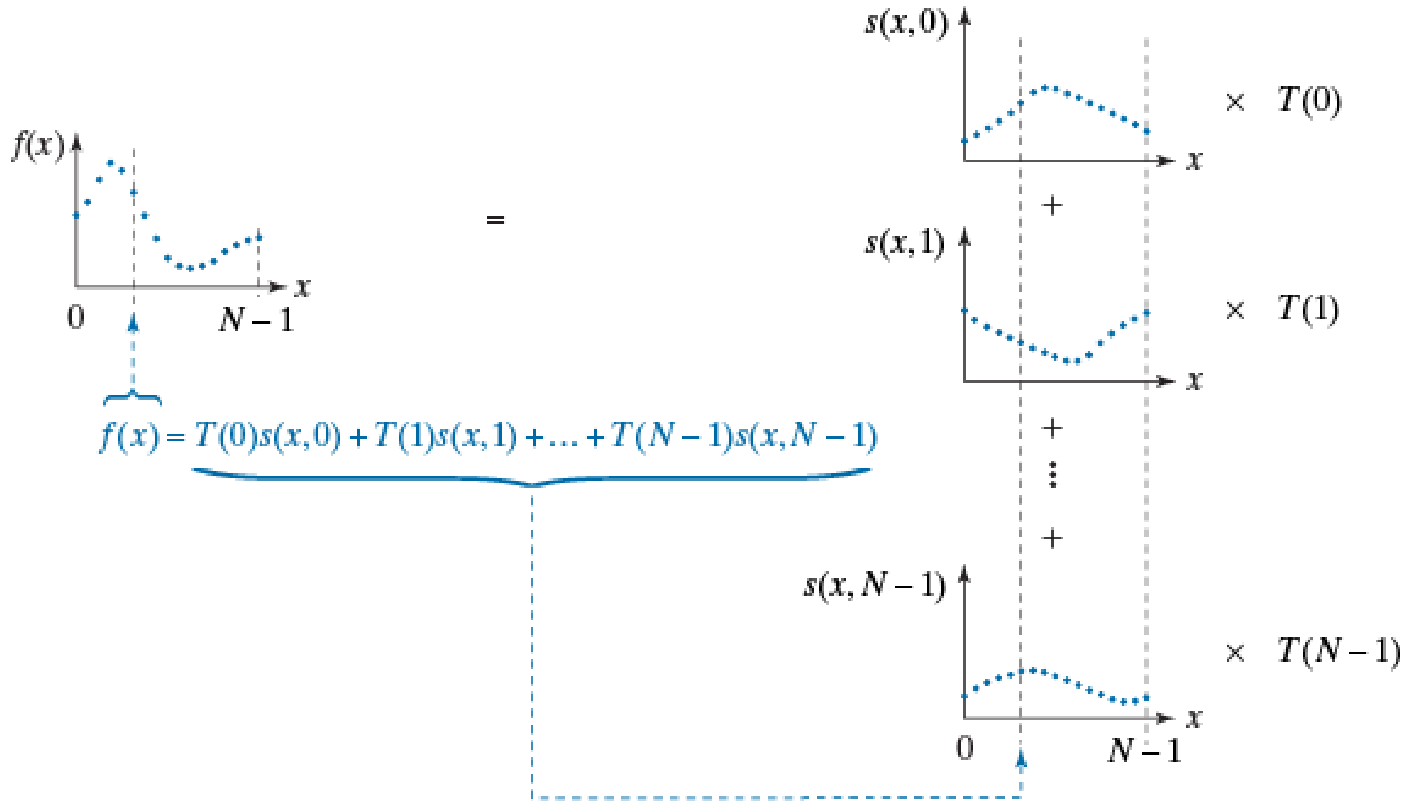
✓ 若$\Delta x=0$，则 $f \Diamond g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) g(x) dx = < f(x), g(x) >$

✓ 信号正交分解 $\alpha_i = \frac{1}{K_i} \int_{t_1}^{t_2} z(t) w_i(t) \mathrm{d} t = < z, w_i >$

✓ 傅里叶变换 $f(x,y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) \mathrm{e}^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$

二、基于矩阵的变换

- 变换



$$T(u) = \langle s(x,u), f(x) \rangle$$

二、基于矩阵的变换

$$T(u)=\sum_{x=0}^{N-1} f(x)r(x,u)$$

$$f(x)=\sum_{u=0}^{N-1} T(u)s(x,u)$$

- 变换

矩阵形式

$$f=\begin{bmatrix} f(0)\\ f(1)\\ \vdots \\ f(N-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_0\\ f_1\\ \vdots \\ f_{N-1}\end{bmatrix} \quad t=\begin{bmatrix} T(0)\\ T(1)\\ \vdots \\ T(N-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t_0\\ t_1\\ \vdots \\ t_{N-1}\end{bmatrix} \quad s_u=\begin{bmatrix} s(0,u)\\ s(1,u)\\ \vdots \\ s(N-1,u)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s_{u,0}\\ s_{u,1}\\ \vdots \\ s_{u,N-1}\end{bmatrix}$$

$$s=\begin{bmatrix} s(0,0) & s(0,1) & \dots & s(0,N-1)\\ s(1,0) & s(1,1) & \dots & s(1,N-1)\\ & & \vdots & \\ s(N-1,0) & s(N-1,1) & \dots & s(N-1,N-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s_0^T\\ s_1^T\\ \vdots \\ s_{N-1}^T\end{bmatrix} \quad T(u)=<s_u,f>,\ u=0,1,\dots,N-1$$

二、基于矩阵的变换

- 变换

定义变换矩阵 $$A=\begin{bmatrix} s_0^T \\ s_1^T \\ \vdots \\ s_{N-1}^T \end{bmatrix}=[s_0, s_1, \ldots, s_{N-1}]^T$$

代入

$$t=\begin{bmatrix} T(0) \\ T(1) \\ \vdots \\ T(N-1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} < s_0, f > \\ < s_1, f > \\ \vdots \\ < s_{N-1}, f > \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s_{0,0}f_0+s_{1,0}f_1+\ldots+s_{N-1,0}f_{N-1} \\ s_{0,1}f_0+s_{1,1}f_1+\ldots+s_{N-1,1}f_{N-1} \\ \vdots \\ s_{0,N-1}f_0+s_{1,N-1}f_1+\ldots+s_{N-1,N-1}f_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} s_{0,0} & s_{1,0} & \cdots & s_{N-1,0} \\ s_{0,1} & s_{1,1} & \cdots & s_{N-1,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{0,N-1} & s_{1,N-1} & & s_{N-1,N-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{t=Af}$$

二、基于矩阵的变换

- 变换

定义变换矩阵

$$A=\begin{bmatrix} s_0^T \\ s_1^T \\ \vdots \\ s_{N-1}^T \end{bmatrix}=[s_0,s_1,\dots,s_{N-1}]^T \qquad AA^T=\begin{bmatrix} s_0^T \\ s_1^T \\ \vdots \\ s_{N-1}^T \end{bmatrix}[s_0,s_1,\dots,s_{N-1}]^T=I$$

$$t=Af \quad \Longrightarrow \quad f=A^T t$$

正交变换：变换矩阵$\boldsymbol{A}$的N个基向量是实的和正交的

$$<s_i,s_j>=s_i^T s_j=\delta_{ij}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$$

二、基于矩阵的变换

➢ 二维图像

$$T(u,v)=\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)r(x,y,u,v)$$

$$f(x,y)=\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}T(u,v)s(x,y,u,v)$$

若正变换核是可分离、对称的，且实的和规范正交的

$$r(x,y,u,v)=r_1(x,u)r_2(y,v)=r_1(x,u)r_1(y,v)$$

$T=AFA^T$　　$\boldsymbol{F}$是包括$f(x,y)$元素的$N\times N$矩阵，$\boldsymbol{T}$是其变换

$F=A^TTA$　　$\boldsymbol{A}$是方阵

二、基于矩阵的变换

- 举个例子

基向量 $s_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \quad s_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

$$A = [s_0 \ s_1]^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$$

规范正交

$$\begin{cases} < s_0, s_1 >= s_0^T s_1 = \frac{1}{2}[1 \ \ 1]\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = 0 \\ < s_1, s_0 >= s_1^T s_0 = \frac{1}{2}[1 \ \ -1]\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = 0 \\ < s_0, s_0 >= s_0^T s_0 = \frac{1}{2}[1 \ \ 1]\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = 1 \\ < s_1, s_1 >= s_1^T s_1 = \frac{1}{2}[1 \ \ -1]\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = 1 \end{cases}$$

$$T = AFA^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix} F \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}^T$$

$$F = A^T TA = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}^T T \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$$

二、基于矩阵的变换

- 如果***F***是矩形阵列

$$T = A_M F A_N^T$$

$$F = A_M^T T A_N$$

$\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{A_M}$ 和$\boldsymbol{A_N}$大小分别为$M\times N$，$M \times M$和$N \times N$

例题7.3 $F = \begin{bmatrix} 5 & 100 & 44 \\ 6 & 103 & 40 \end{bmatrix}$

$$T = A_2 F A_3^T$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 100 & 44 \\ 6 & 103 & 40 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0.366 & -1.366 \\ 1 & -1.366 & 0.366 \end{bmatrix}$$

二、基于矩阵的变换

➢ 如果***A***复规范正交向量

$$<s_i, s_j> = <s_j, s_i>^* = s_i^{*T} s_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$$T = AFA^T$$

$$F = A^{*T} T A^*$$

酉矩阵
酉变换

$$A^{*T} A = AA^{*T} = A^* A^T = A^T A^* = I$$

$$t = Af$$

$$f = A^{*T} t$$

✓ 内积函数的复数域***C***的酉空间***C***^{N}：

$$<u, v> = u^{*T} v = \sum_{i=0}^{N-1} u_i^* v_i = <v, u>^*$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -0.5 - j0.866 & -0.5 + j0.866 \\ 1 & -0.5 + j0.866 & -0.5 - j0.866 \end{bmatrix}$$

*表示复共轭运算，u 和 v 是*N*×1复值列向量

二、基于矩阵的变换

➢ 如果***A***双规范正交基函数

$$<\tilde{s}_i, s_j>=\delta_{ij}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$$

$\tilde{\mathbf{s}}$是对偶展开函数，$\mathbf{s}$是双规范正交的。

$$T=\tilde{A}F\tilde{A}^T$$

$$F=A^T T A$$

$$t=\tilde{A}f$$

$$f=A^T t$$

$$A=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5\\ -1 & -1 & 1 & 1\\ -0.5303 & 0.5303 & -0.1768 & 0.1768\\ -0.1768 & 0.1768 & -0.5303 & 0.5303\end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5\\ -0.25 & -0.25 & 0.25 & 0.25\\ -1.0607 & 1.0607 & 0.3536 & -0.3536\\ 0.3536 & -0.3536 & -1.0607 & 1.0607\end{bmatrix}$$

二、基于矩阵的变换

- 傅里叶级数和离散傅里叶变换

周期为T的连续函数，规范正交基函数

$$s_u(x) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j2\pi ux/T}, \ u = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$f(x) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} \alpha_u [\frac{1}{\sqrt{T}} e^{j2\pi ux/T}] = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{u=-\infty}^{\infty} \alpha_u [e^{j2\pi ux/T}]$$

$$\alpha_u = < s_u(x), f(x) >= \int_{-T/2}^{T/2} [\frac{1}{\sqrt{T}} e^{j2\pi ux/T}]^* f(x) dx$$

二、基于矩阵的变换

- 傅里叶级数和离散傅里叶变换

离散复值基向量是内积空间$\boldsymbol{C}^N$的规范正交基

$$s(x,u)=\frac{1}{\sqrt{N}}e^{j2\pi ux/N},\ \ u=0,1,2,\ldots N-1$$

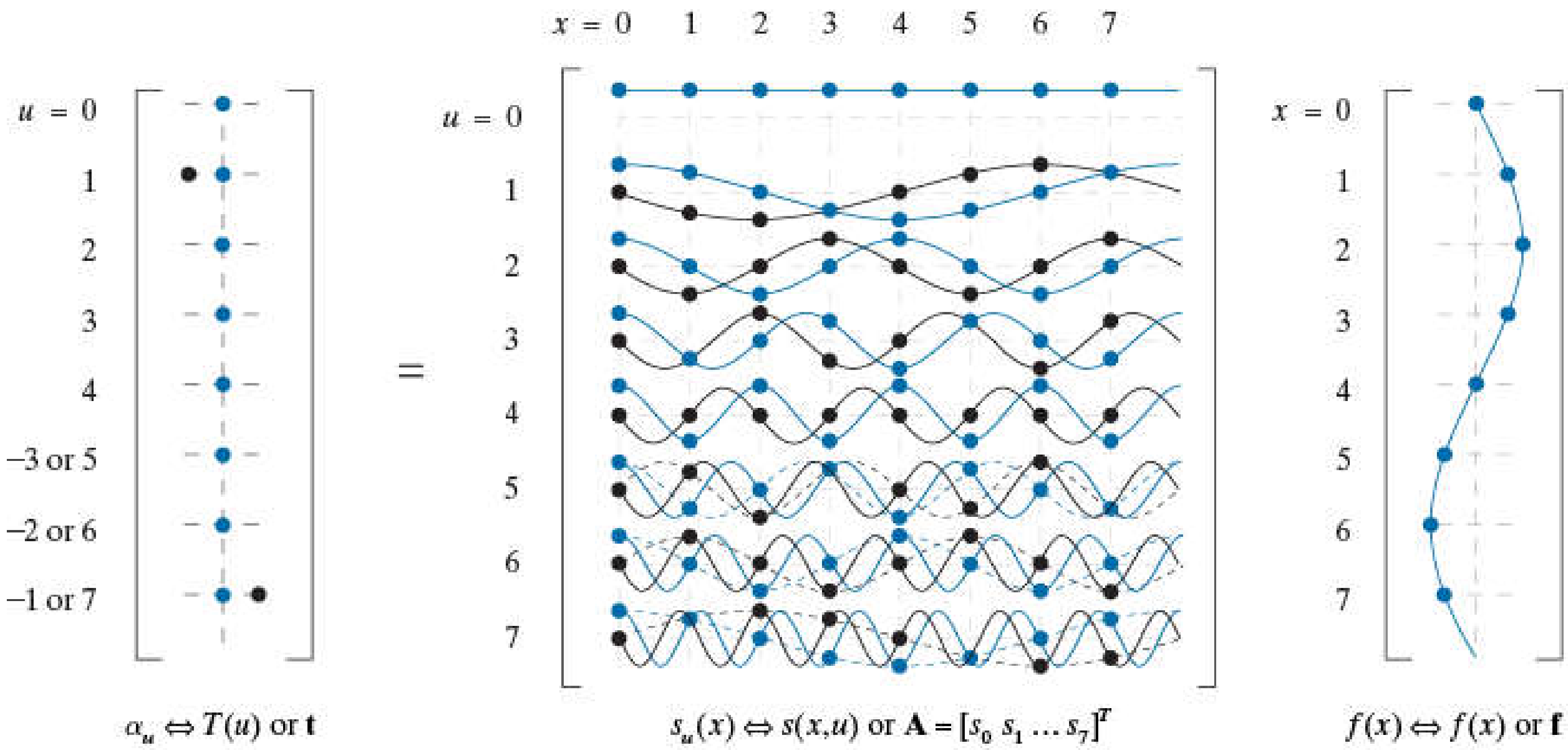
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{u=0}^{N-1}T(u)e^{j2\pi ux/N}$$

$$T(u)=<s(x,u),f(x)>=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{u=0}^{N-1}f(x)e^{-j2\pi ux/N}$$

二、基于矩阵的变换

➢ 傅里叶级数和离散傅里叶变换

$$t = Af$$



三、时间-频率平面的基函数

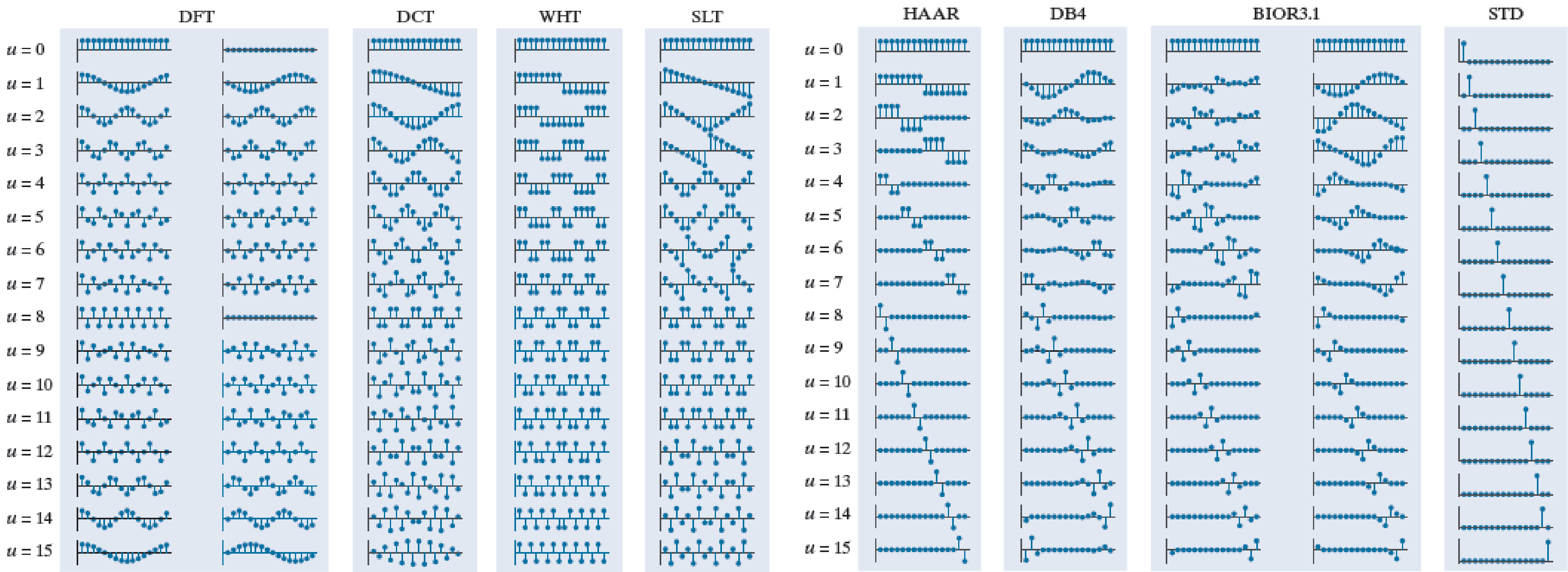
➢ **基函数或基向量的选择**

原则：正交、简单

变换度量的是一个函数与所选基向量的相似程度

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{u=0}^{N-1}T(u)s(x,u)$$

$$T(u)=<s(x,u),f(x)>=s_u\Diamond f(0)$$



三、时间-频率平面的基函数

$t = Af \qquad f = A^T t$

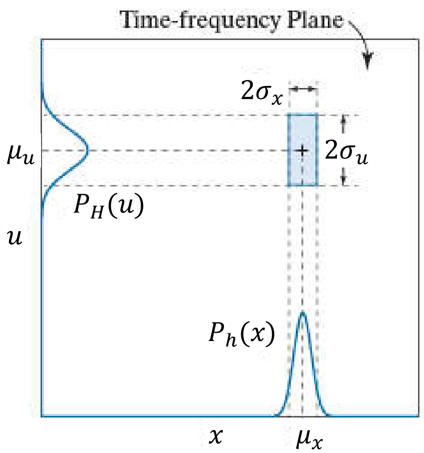
$T = AFA^T$

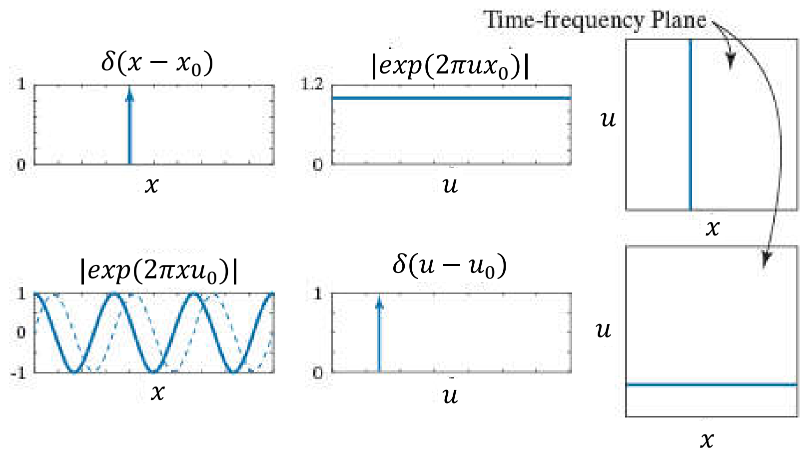
$F = A^T TA$

$$A = \begin{bmatrix} s(0,0,u,v) & s(0,1,u,v) & \dots & s(0,N-1,u,v) \\ s(1,0,u,v) & s(1,1,u,v) & \dots & s(1,N-1,u,v) \\ & \vdots & & \\ s(N-1,0,u,v) & s(N-1,1,u,v) & \dots & s(N-1,N-1,u,v) \end{bmatrix}$$

F是包括 $f(x,y)$元素的$N\times N$矩阵，***T***是其变换结果

A是方阵，度量的是一个函数与所选基向量的相似程度





三、时间-频率平面的基函数

- **基函数或基向量的选择**

  原则：正交、简单

变换度量的是一个函数与所选基向量的相似程度

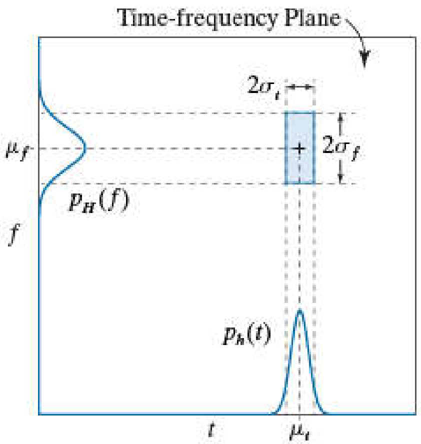
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{u=0}^{N-1}T(u)s(x,u)$$

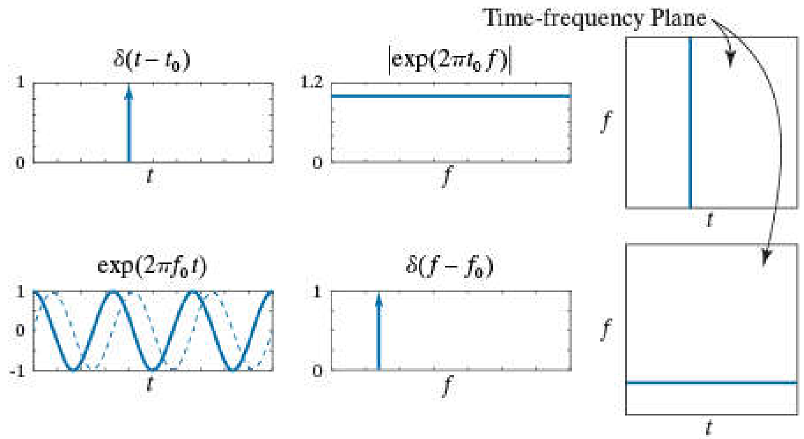
$$T(u)=<s(x,u),f(x)>=s_u\Diamond f(0)$$

$$T(u)=<s(x,u),f(x)>=s_u\Diamond f(0)=\sum_{x=0}^{N-1}s^*(x,u)f(x)$$

$$\boxed{\sigma_x^2\sigma_u^2\geq\frac{1}{16\pi^2}}$$

海森堡测不准原理

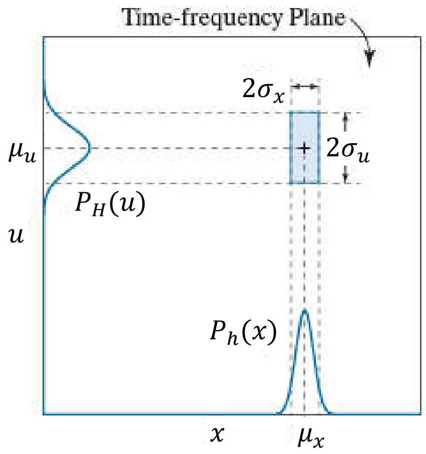


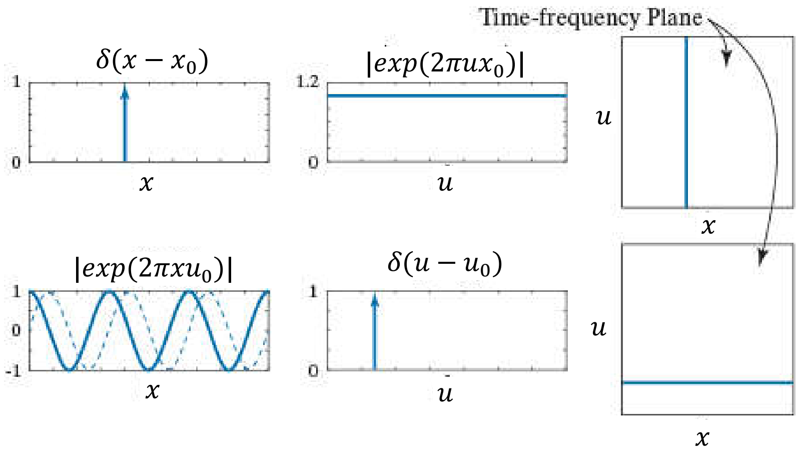


三、时间-频率平面的基函数

➢ 基函数或基向量的选择

原则：正交、简单





$$\sigma_t^2\sigma_f^2 \geq \frac{1}{16\pi^2}$$

海森堡测不准原理

傅里叶变换：$$F(u)=\sum_{x=0}^{M-1} f(x)\mathrm{e}^{-j2\pi ux/M}, \quad u=0,1,2,\cdots,M-1$$

$$f(x)=\frac{1}{M}\sum_{u=0}^{M-1} F(u)\mathrm{e}^{j2\pi ux/M}, \quad x=0,1,2,\cdots,M-1$$

三、时间-频率平面的基函数

变换度量的是一个函数与所选基向量的相似程度

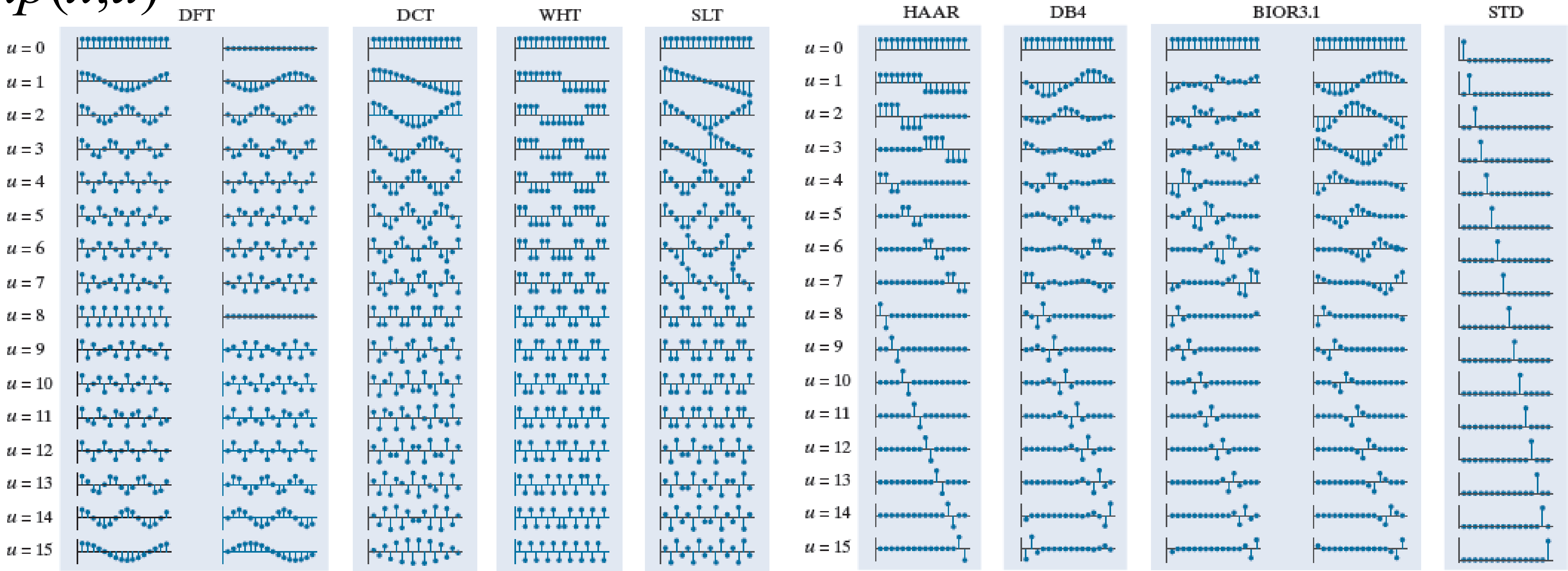
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{u=0}^{N-1}T(u)s(x,u)$$

$$T(u)=<s(x,u),f(x)>=s_u\diamond f(0)$$

➢ 基函数或基向量的选择

原则：正交、简单

$exp(x,u)$



$\delta(x,u)$

三、时间-频率平面的基函数

- 基函数或基向量的选择

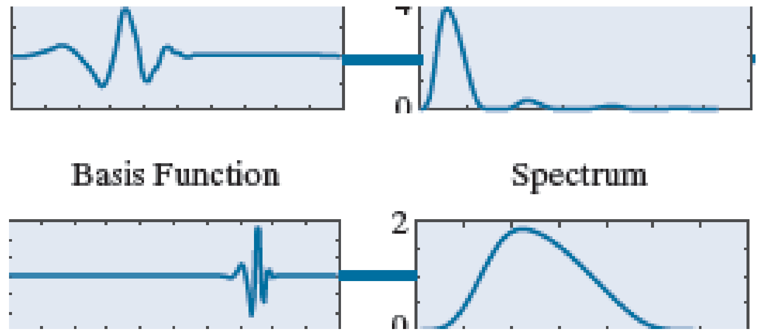
变换度量的是一个函数与所选基向量的相似程度

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{u=0}^{N-1}T(u)s(x,u)$$

$$T(u)=<s(x,u),f(x)>=s_u\Diamond f(0)$$

轮廓区域

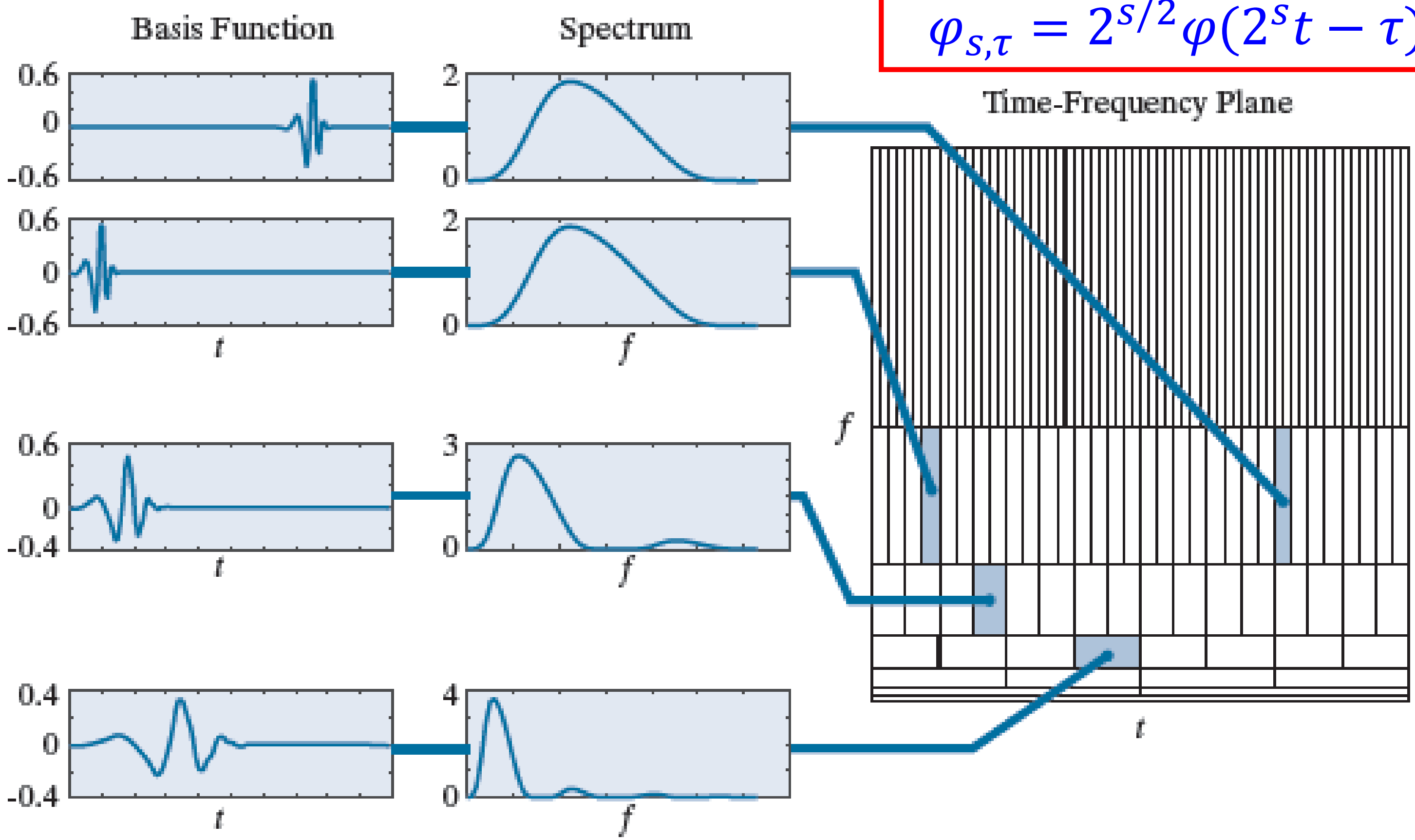
细节区域



三、时间-频率平面的基函数

- 基函数或基向量的选择 每个基函数都有一个唯一的谱和时间位置表征。

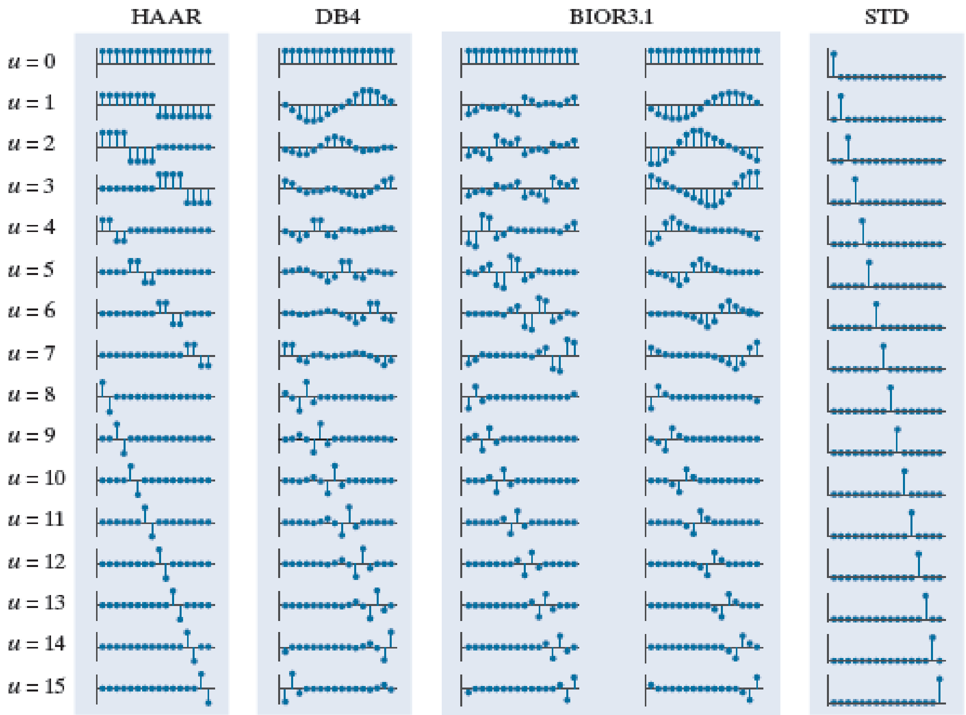
$$\varphi_{s,\tau} = 2^{s/2}\varphi(2^s t - \tau)$$



四、基图像

➢ 基函数或基向量的选择

$N-1\ N-1$



$$A:\quad S_{u,v}=\begin{bmatrix} s(0,0 & \cdots & -1,u,v) \\ s(1,0 & \cdots & -1,u,v) \\ \vdots & & \\ s(N- & \cdots & -1,u,v) \end{bmatrix}$$

若$s(x,y,u,v)$是实值、可分离和对称的 $S_{u,v}=s_u s_v^T$ 基图像

四、基图像

➢ 标准基的基图像

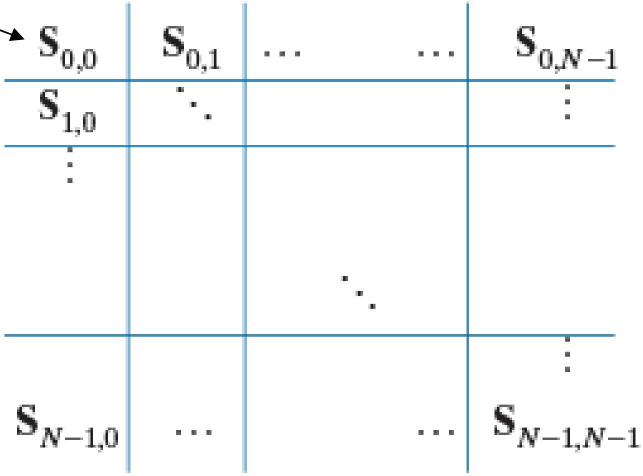
基函数是$N\times1$的列向量，第n个元素是1，其他元素是0

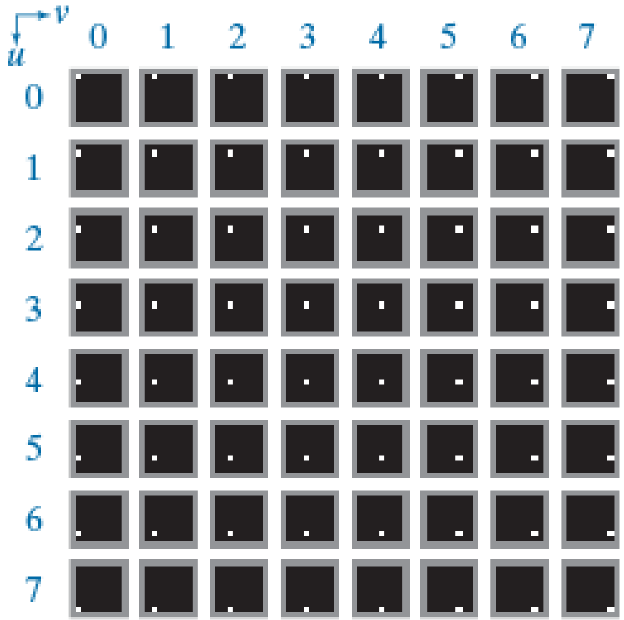
如果是8×8的二维标准基

$$A = I$$

$$T = AFA^T = IFI^T = F$$

$N\times N$的零矩阵，仅仅第u行第v列的元素为1.





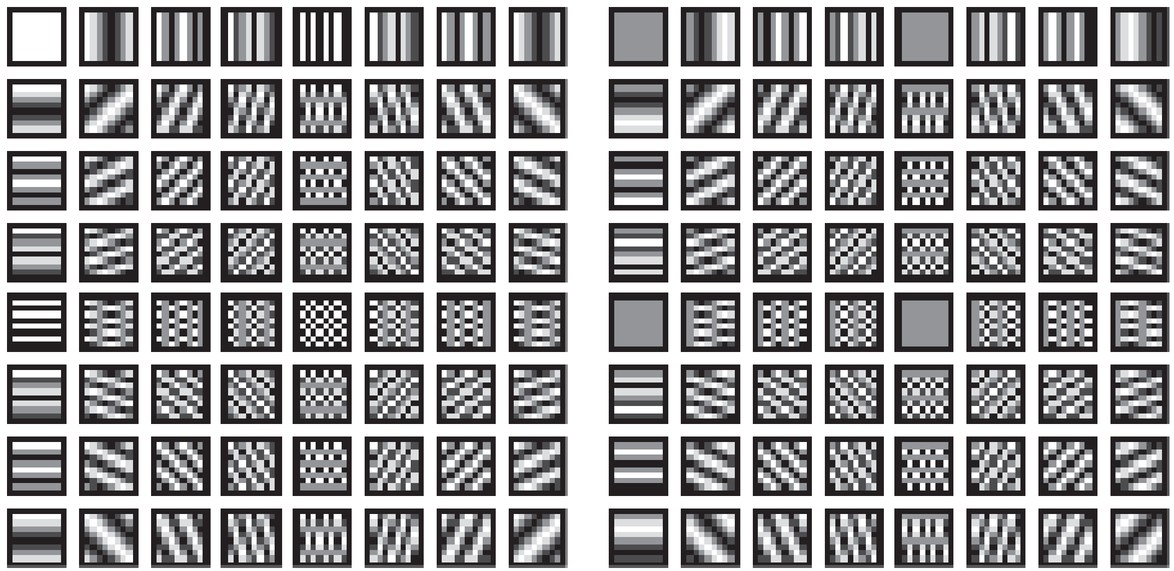
四、基图像

➢ 标准基的基图像

N=8时，离散傅里叶变换

$$\boxed{s_{u,v} = e^{-j2\pi uv/8} = (e^{-j2\pi/8})^{uv} = \omega^{uv}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{8}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & -j & -j\omega & -1 & -\omega & j & j\omega \\ 1 & -j & -1 & j & 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -j\omega & j & \omega & -1 & j\omega & -j & -\omega \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\omega & -j & j\omega & -1 & \omega & j & -j\omega \\ 1 & j & -1 & -j & 1 & j & -1 & -j \\ 1 & j\omega & j & -\omega & -1 & -j\omega & -j & \omega \end{bmatrix}$$



四、傅里叶相关的变换

- 离散哈特利变换

离散哈特利变换DHT反变换核

傅里叶变换是复值的，那不是复值的是什么样呢？

$$s(x,u)=\frac{1}{\sqrt{N}}cas\left(\frac{2\pi ux}{N}\right)=\frac{1}{\sqrt{N}}[\cos\left(\frac{2\pi ux}{N}\right)+\sin(\frac{2\pi ux}{N})]$$

二维形式

$$s(x,y,u,v)=\left[\frac{1}{\sqrt{N}}cas\left(\frac{2\pi ux}{N}\right)\right][\frac{1}{\sqrt{N}}cas\left(\frac{2\pi vy}{N}\right)]$$

⇒ 变换矩阵$\boldsymbol{A}_{HY}$， 实的、正交的、对称的

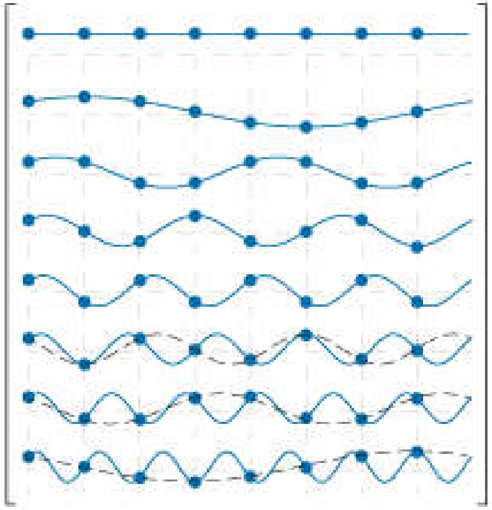
实函数的傅里叶变换是复值的

$$A_{HY}=A_{HY}^{T}=A_{HY}^{-1}$$

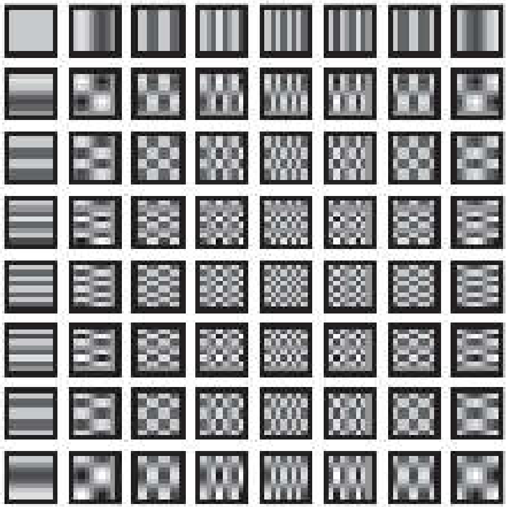
可用于正反变换

四、傅里叶相关的变换

➤ 离散哈特利变换



$$\begin{bmatrix} 0.35 & 0.35 & 0.35 & 0.35 & 0.35 & 0.35 & 0.35 & 0.35 \\ 0.35 & 0.50 & 0.35 & 0 & -0.35 & -0.50 & -0.35 & 0 \\ 0.35 & 0.35 & -0.35 & -0.35 & 0.35 & 0.35 & -0.35 & -0.35 \\ 0.35 & 0 & -0.35 & 0.50 & -0.35 & 0 & 0.35 & -0.50 \\ 0.35 & -0.35 & 0.35 & -0.35 & 0.35 & -0.35 & 0.35 & -0.35 \\ 0.35 & -0.50 & 0.35 & 0 & -0.35 & 0.50 & -0.35 & 0 \\ 0.35 & -0.35 & -0.35 & 0.35 & 0.35 & -0.35 & -0.35 & 0.35 \\ 0.35 & 0 & -0.35 & -0.50 & -0.35 & 0 & 0.35 & 0.50 \end{bmatrix}$$



N=8时离散哈特利变换的变换矩阵和基图像

四、傅里叶相关的变换

➤ 离散哈特利变换

离散哈特利变换DHT反变换核

$$s(x,u)=\frac{1}{\sqrt{N}}cas\left(\frac{2\pi ux}{N}\right)=\frac{1}{\sqrt{N}}[\cos\left(\frac{2\pi ux}{N}\right)+\sin(\frac{2\pi ux}{N})]$$

基于以下等式

$$cas(\theta)=\sqrt{\frac{2}{N}}\cos(\theta-\pi/4)$$

$$s(x,u)=\sqrt{\frac{2}{N}}\cos(\frac{2\pi ux}{N}-\frac{\pi}{4})$$

$$\boxed{\begin{aligned}A_{HY}&=Real\{A_F\}-Imag\{A_F\}\\&=Real\{(1+j)A_F\}\end{aligned}}$$

结论：哈特利变换的基函数是以离散傅里叶变换为母小波平移（$\pi/4$ ）、缩放（ $\sqrt{2}$ ）而来

四、傅里叶相关的变换

➢ 离散哈

一个例子：

其傅里叶

$5\ 0.35+j0.35\ 0.6+j0.25]^T$

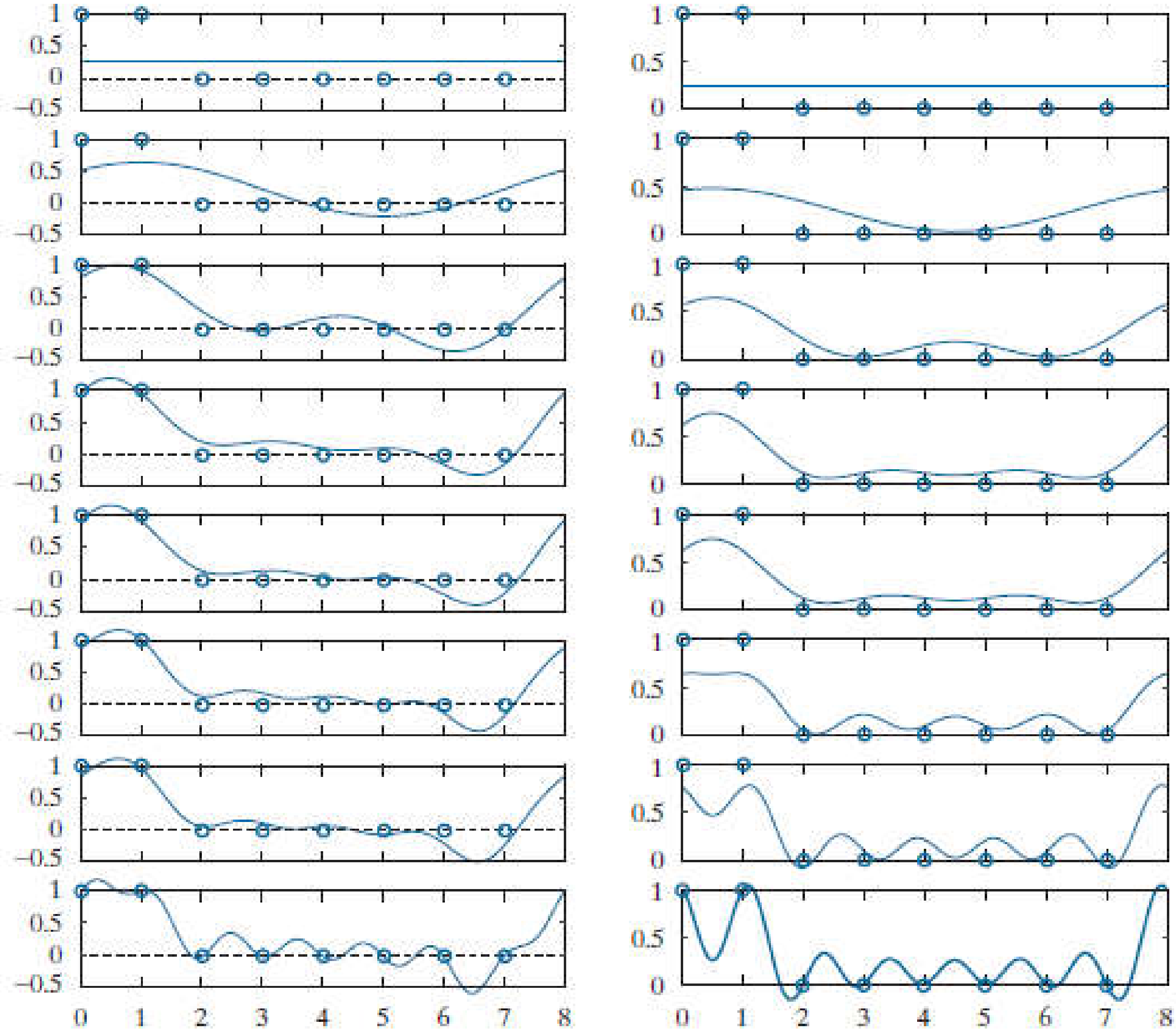
$t_{Fr} = A_{Fr}f$

$t_{Fj} = A_{Fj}f =$

$A_{HY} = (A_{Fr}$ -

$\boldsymbol{f} = A_{HY}^T t_{HY}$

$\boldsymbol{f} = [f(0)f($



$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -j & -j\omega & -1 & -\omega & j & j\omega \\ -1 & j & 1 & -j & -1 & j \\ j & \omega & -1 & j\omega & -j & -\omega \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -j & j\omega & -1 & \omega & j & -j\omega \\ -1 & -j & 1 & j & -1 & -j \\ j & -\omega & -1 & -j\omega & -j & \omega \end{matrix}$$

×8酉变换矩阵

四、傅里叶相关的变换

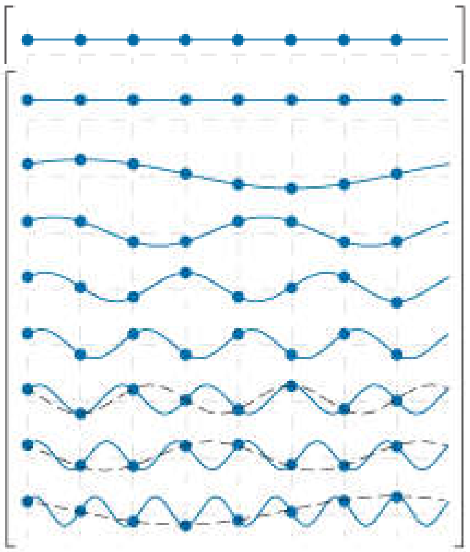
➤ 离散余弦变换（DCT）

DCT

$$s(x,u)=\alpha(u)\cos\left(\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right)$$

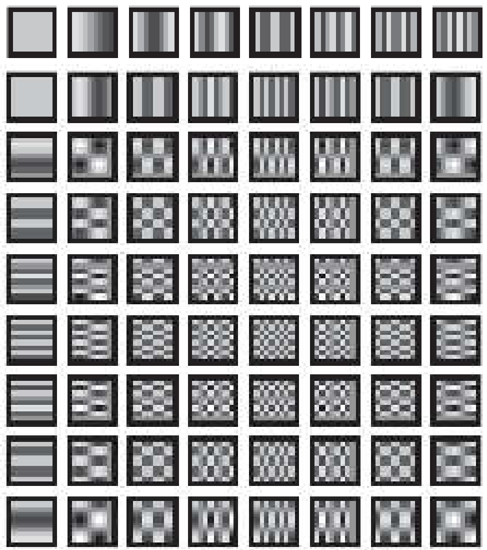
$$\alpha(u)=\begin{cases}\sqrt{1/N}, & u=0\\ \sqrt{2/N}, & u=1,2,\dots,N-1\end{cases}$$

DHT



$$\begin{bmatrix}0.35 & 0.35 & 0.35 & 0.35 & 0.35 & 0.35 & 0.35 & 0.35\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
0.35 & 0.35 & 0.35 & 0.35 & 0.35 & 0.35 & 0.35 & 0.35\\
0.35 & 0.50 & 0.35 & 0 & -0.35 & -0.50 & -0.35 & 0\\
0.35 & 0.35 & -0.35 & -0.35 & 0.35 & 0.35 & -0.35 & -0.35\\
0.35 & 0 & -0.35 & 0.50 & -0.35 & 0 & 0.35 & -0.50\\
0.35 & -0.35 & 0.35 & -0.35 & 0.35 & -0.35 & 0.35 & -0.35\\
0.35 & -0.50 & 0.35 & 0 & -0.35 & 0.50 & -0.35 & 0\\
0.35 & -0.35 & -0.35 & 0.35 & 0.35 & -0.35 & -0.35 & 0.35\\
0.35 & 0 & -0.35 & -0.50 & -0.35 & 0 & 0.35 & 0.50
\end{bmatrix}$$



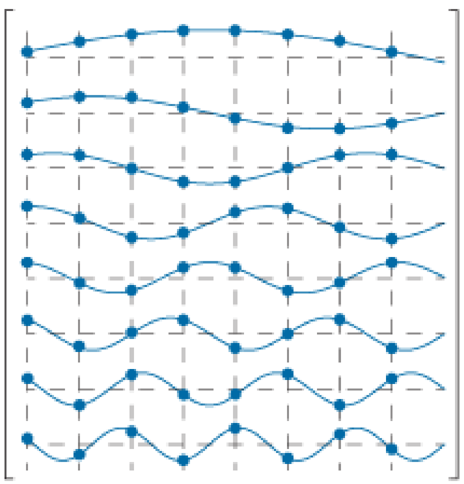
四、傅里叶相关的变换

- 离散正弦变换（DST）

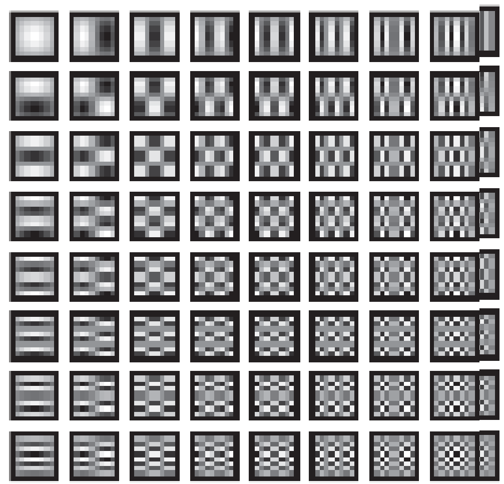
DCT

$$s(x,u)=\sqrt{\frac{2}{N+1}\sin\left(\frac{(x+1)(u+1)\pi}{N+1}\right)}$$

DST



$$\begin{bmatrix}
0.16 & 0.30 & 0.41 & 0.46 & 0.46 & 0.41 & 0.30 & 0.16 \\
0.30 & 0.46 & 0.41 & 0.16 & -0.16 & -0.41 & -0.46 & -0.30 \\
0.41 & 0.41 & 0.00 & -0.41 & -0.41 & 0.00 & 0.41 & 0.41 \\
0.46 & 0.16 & -0.41 & -0.30 & 0.30 & 0.41 & -0.16 & -0.46 \\
0.46 & -0.16 & -0.41 & 0.30 & 0.30 & -0.41 & -0.16 & 0.46 \\
0.41 & -0.41 & 0.00 & 0.41 & -0.41 & -0.00 & 0.41 & -0.41 \\
0.30 & -0.46 & 0.41 & -0.16 & -0.16 & 0.41 & -0.46 & 0.30 \\
0.16 & -0.30 & 0.41 & -0.46 & 0.46 & -0.41 & 0.30 & -0.16
\end{bmatrix}$$

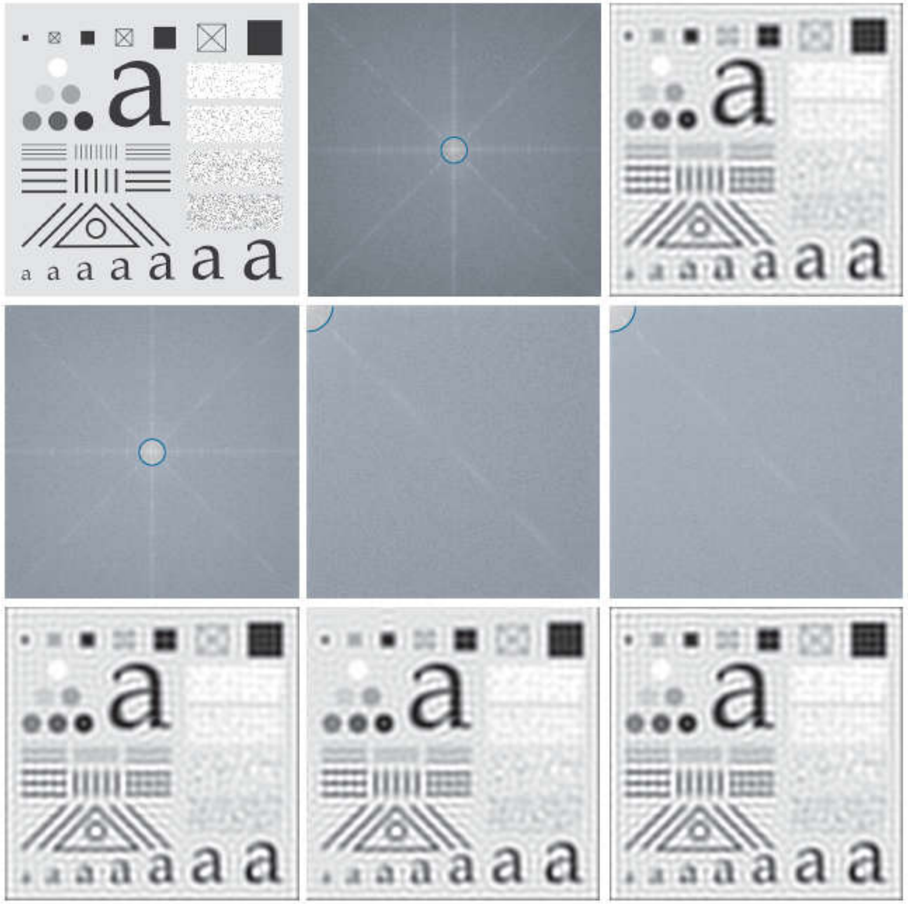


四、傅里叶相关的变换

➤ 离散正弦变换（DST）

DFT

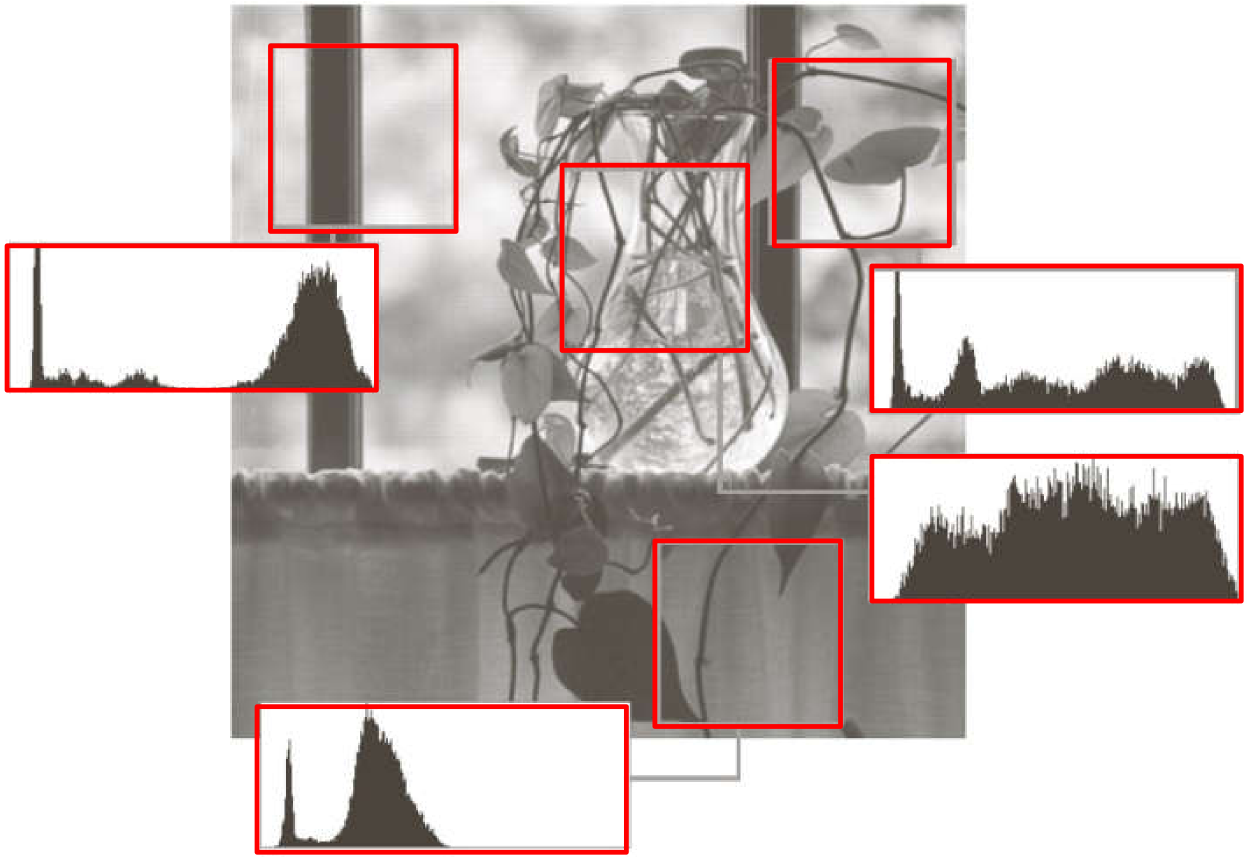
理想低通滤波



DHT DCT DST

五、图像多分辨率分析

- 图像由相似纹理和灰度级连成的区域组成，形成物体的表示
- 物体较小时，较高的分辨率
- 物体较大时，较低的分辨率
- 若较大和较小同时存在呢？
- 图像金字塔
- 子带编码
- 哈尔变换



五、图像多分辨率分析

➢ 图像金字塔

以金字塔形状排列的、分辨率逐步降低的图像集合

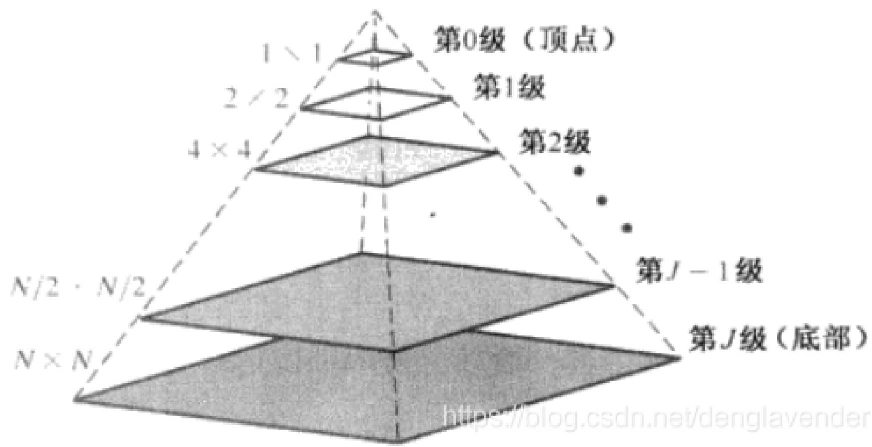
底部：$N\times N$

顶点：1×1

第i级：$2^i\times 2^i$

低分辨率

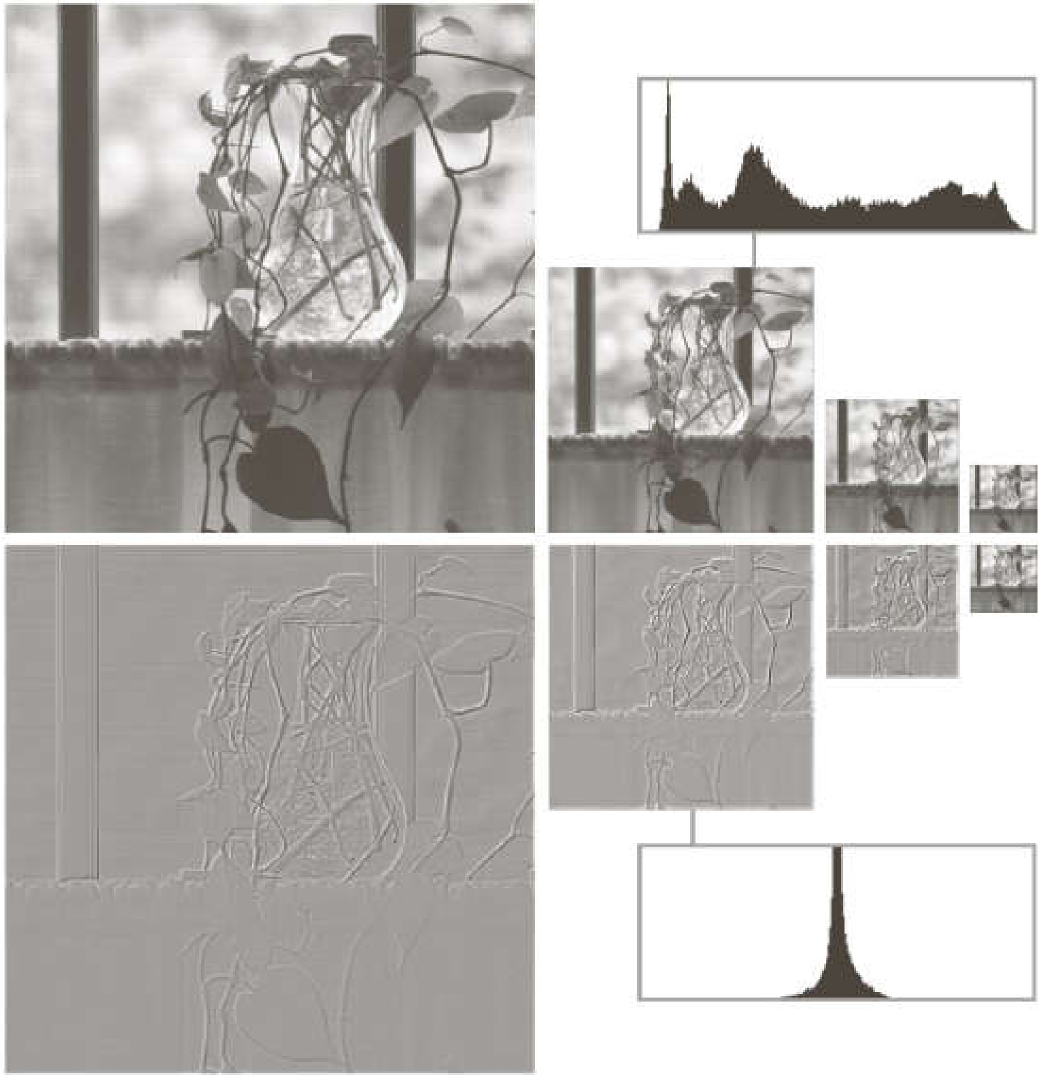
高分辨率



五、图像多分辨率分析

➤ 图像金字塔

以金字塔形状排列的、分



近似金字塔

预测残差金字塔

（拉普拉斯金字塔）

底部：$N \times N$

顶点：1×1

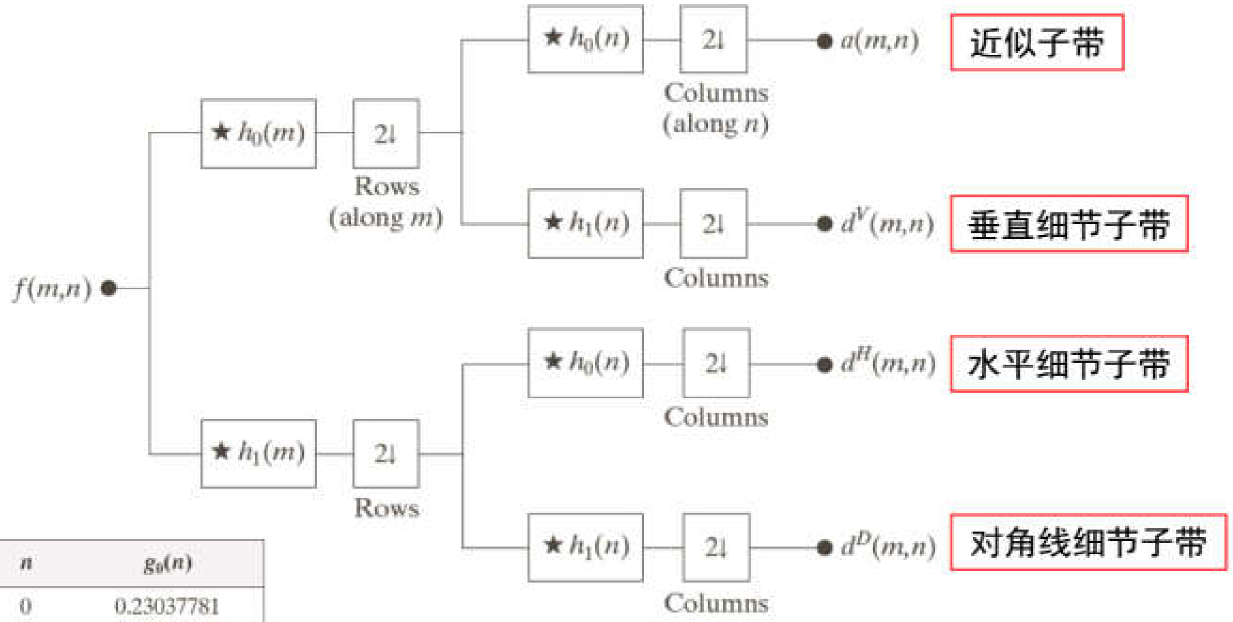
第i级：$2^i \times 2^i$

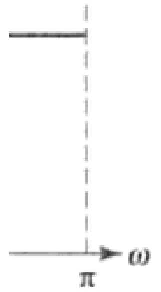
五、图像多分辨率分析

➢ 子带编码

一幅图像

- a b
-
-
-



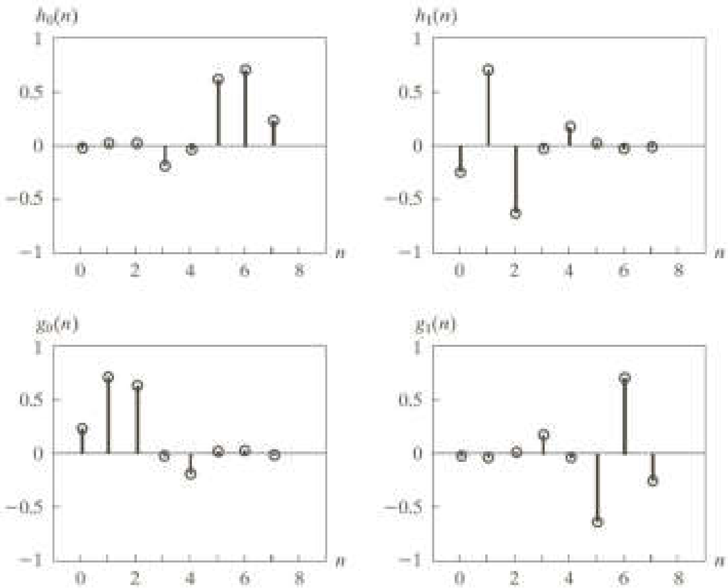


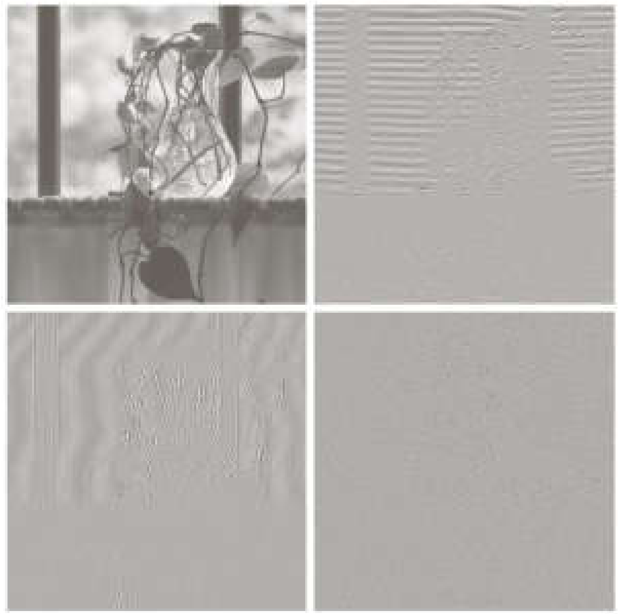
n	$g_0(n)$
0	0.23037781
1	0.71484657
2	0.63088076
3	−0.02798376
4	−0.18703481
5	0.03084138
6	0.03288301
7	−0.01059740

$g_0(n)$的Daubechies 8抽头归一化正交滤波器系数

五、图像多分辨率分析

- 子带编码





4个8抽头Daubechies归一化
正交滤波器的冲击响应

子带分离结果，4个子带分别是：
(a) 近似子带 (b) 水平细节子带
(c) 垂直细节自带 (d) 对角线细节子带

五、图像多分辨率分析

➢ 哈尔（Haar）变换

- 一种最古老最简单的正交基函数

$$\boxed{u = 2^p + q}$$

p是u中包含的2的最大次幂，q是余数

$$h_u(x) = \begin{cases} 1 & u = 0\text{和}0 \le x < 1 \\ 2^{p/2} & u > 0\text{和}q/2^p \le x \le (q+0.5)/2^p \\ -2^{p/2} & u < 0\text{和}\ (q+0.5)/2^p \le x \le (q+1)2^p \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

定义在$x \in [0,1)$上，变量u是一个整数，对于u>0时，可以唯一的分解成$u = 2^p + q$;

- 哈尔 变换的矩阵形式

$$T = HFH^T$$

$\boldsymbol{H}$: N×N哈尔变换矩阵；$\boldsymbol{F}$: $N \times N$图像矩阵，$\boldsymbol{T}$: $N \times N$ 变换结果

五、图像多分辨率分析

➢ 哈尔（Haar）变换

- 一种最古老最简单的正交基函数

$$\boxed{u = 2^p + q}$$

p是u中包含的2的最大次幂，q是余数

$$h_u(x) = \begin{cases} 1 & u = 0\text{和}0 \le x < 1 \\ 2^{p/2} & u > 0\text{和}q/2^p \le x \le (q+0.5)/2^p \\ -2^{p/2} & u < 0\text{和}\ (q+0.5)/2^p \le x \le (q+1)2^p \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

定义在$x \in [0,1)$上，变量u是一个整数，对于u>0时，可以唯一的分解成$u = 2^p + q$;

- 哈尔 变换的矩阵形式

$$T = HFH^T$$

H: ***N***×***N***哈尔变换矩阵；***F***: ***N*** × ***N***图像矩阵，***T***: ***N*** × ***N*** 变换结果

五、图像多分辨率分析

➢ 哈尔（Haar）变换

- 一种最古老最简单的正交基函数

$$
h_u(x) = \begin{cases} 1 & u = 0 \text{和} 0 \le x < 1 \\ 2^{p/2} & u > 0 \text{和} q/2^p \le x \le (q+0.5)/2^p \\ -2^{p/2} & u < 0 \text{和} (q+0.5)/2^p \le x \le (q+1)2^p \\ 0 & \text{其他} \end{cases}
$$

$$
s(x,u) = \frac{1}{\sqrt{N}} h_u(x/N)
$$

- 哈尔 矩阵

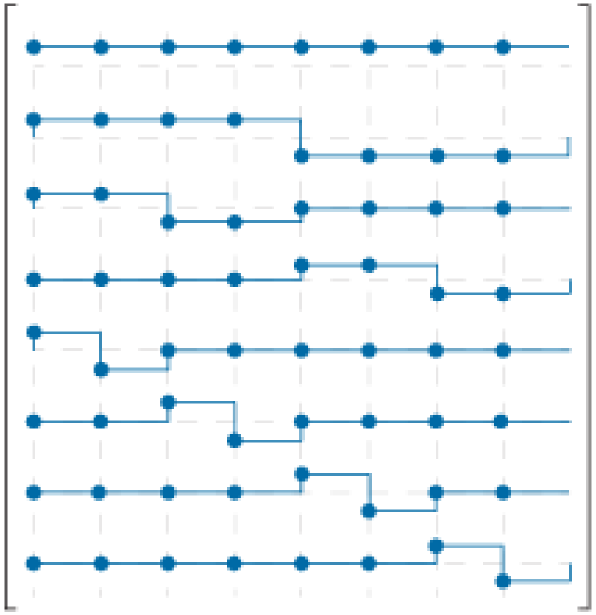
$$
H_N = \begin{bmatrix} h_0(0/N) & h_0(1/N) & \dots & h_0(N-1/N) \\ h_1(0/N) & h_1(1/N) & \dots & h_1(N-1/N) \\ & & \ddots & \\ h_{N-1}(0/N) & h_{N-1}(1/N) & \dots & h_{N-1}(N-1/N) \end{bmatrix}
\qquad
A_N = \frac{1}{\sqrt{N}} H_N
$$

$$
H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}
\qquad
H_4 = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}
$$

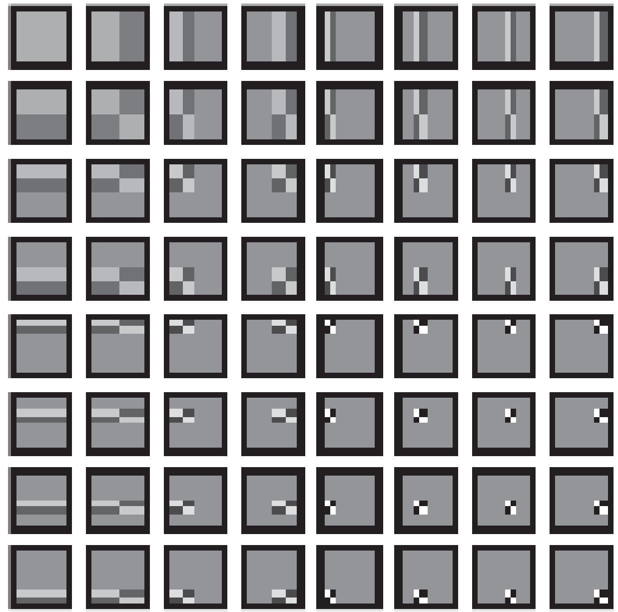
五、图像多分辨率分析

➢ 哈尔（Haar）变换

- 一种最古老最简单的正交基函数



$$
\begin{bmatrix}
0.35 & 0.35 & 0.35 & 0.35 & 0.35 & 0.35 & 0.35 & 0.35 \\
0.35 & 0.35 & 0.35 & 0.35 & -0.35 & -0.35 & -0.35 & -0.35 \\
0.50 & 0.50 & -0.50 & -0.50 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.50 & 0.50 & -0.50 & -0.50 \\
0.71 & -0.71 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.71 & -0.71 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.71 & -0.71 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.71 & -0.71
\end{bmatrix}
$$

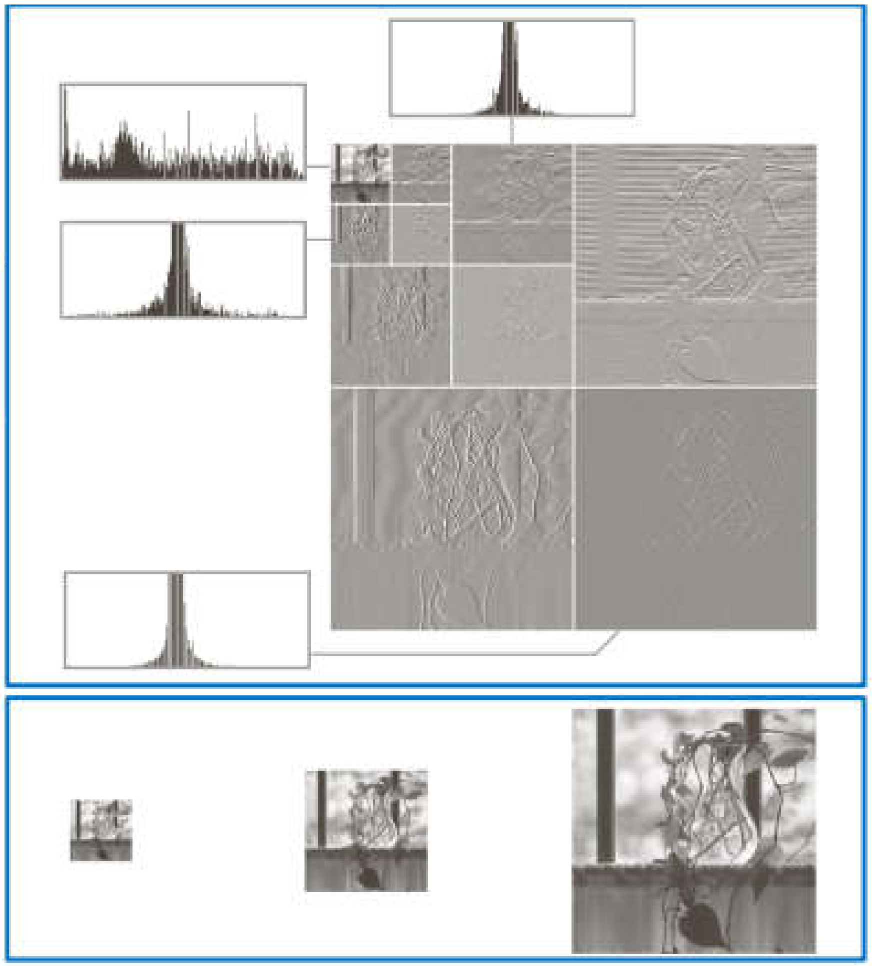


$$H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad H_4 = \frac{1}{\sqrt{4}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

五、图像多分辨率分析

➢ 哈尔（Haar）变换

$$H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$



五、图像多分辨率分析

➢ 多分辨率分析

- 回到前面，定义函数 $\varphi(x)$，以它为基本函数，通过整数平移、实数二值尺度、平方可积得到生成一个函数集

$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\varphi(2^j x - k) \quad \text{——— 尺度函数}$$

把基本函数称为尺度函数

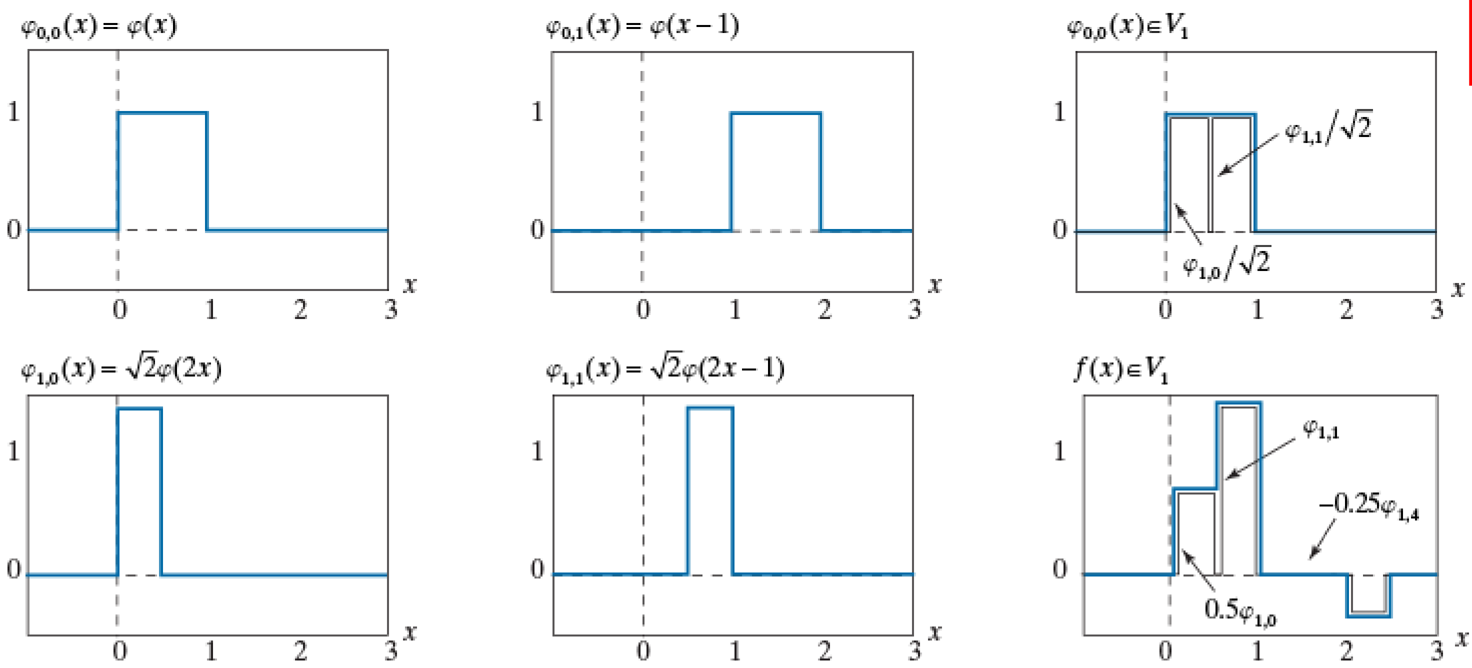
- 例子：哈尔尺度函数

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

五、图像多分辨率分析

➢ 多分辨率分析

- 回到前面，定义函数 $\varphi(x)$，以它为基本函数，通过整数平移、实数二值尺度、平方可积得到生成一个函数集 $\boxed{\varphi_{j,k} = 2^{j/2}\varphi(2^j x - k)}$



固定j，张成的函数空间

$\{\varphi_{0,k} | k \in Z\}$ V_0

$\{\varphi_{1,k} | k \in Z\}$ V_1

增大j，增加函数空间的可表示的函数的数量，允许包含变化细节更多的函数

五、图像多分辨率分析

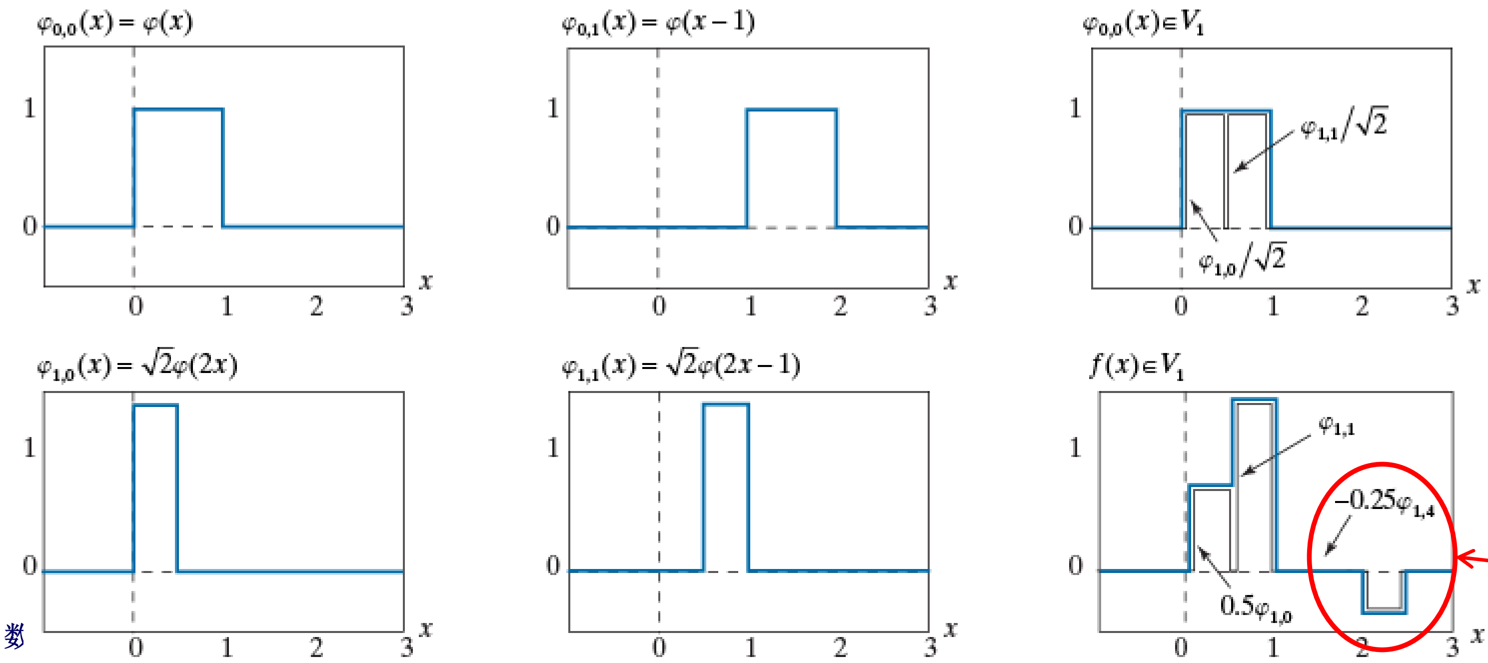
- 多分辨率分析

$$\boxed{\varphi_{j,k}=2^{j/2}\varphi(2^j x-k)}$$ ➡ 若$\varphi(x)\in V_j$, 则$\varphi(2x)\in V_{j+1}$

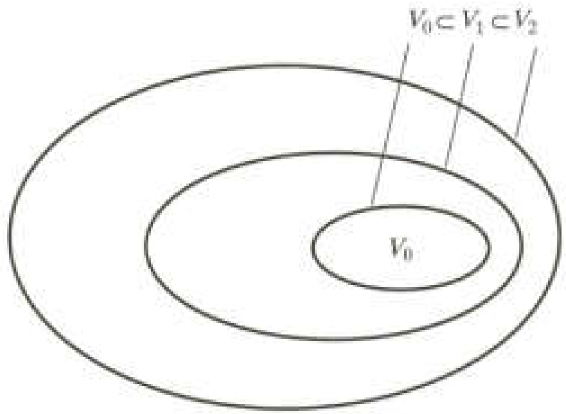
- 例子

$$\varphi(2^0 x)=\sum_{k\in Z} h_\varphi \sqrt{2}\varphi(2^1 x-k)$$ ➡ 低尺度函数可以用高尺度函数线性组合表示

$$\cdots V_0\subset V_1\cdots$$



多分辨率分析MRA



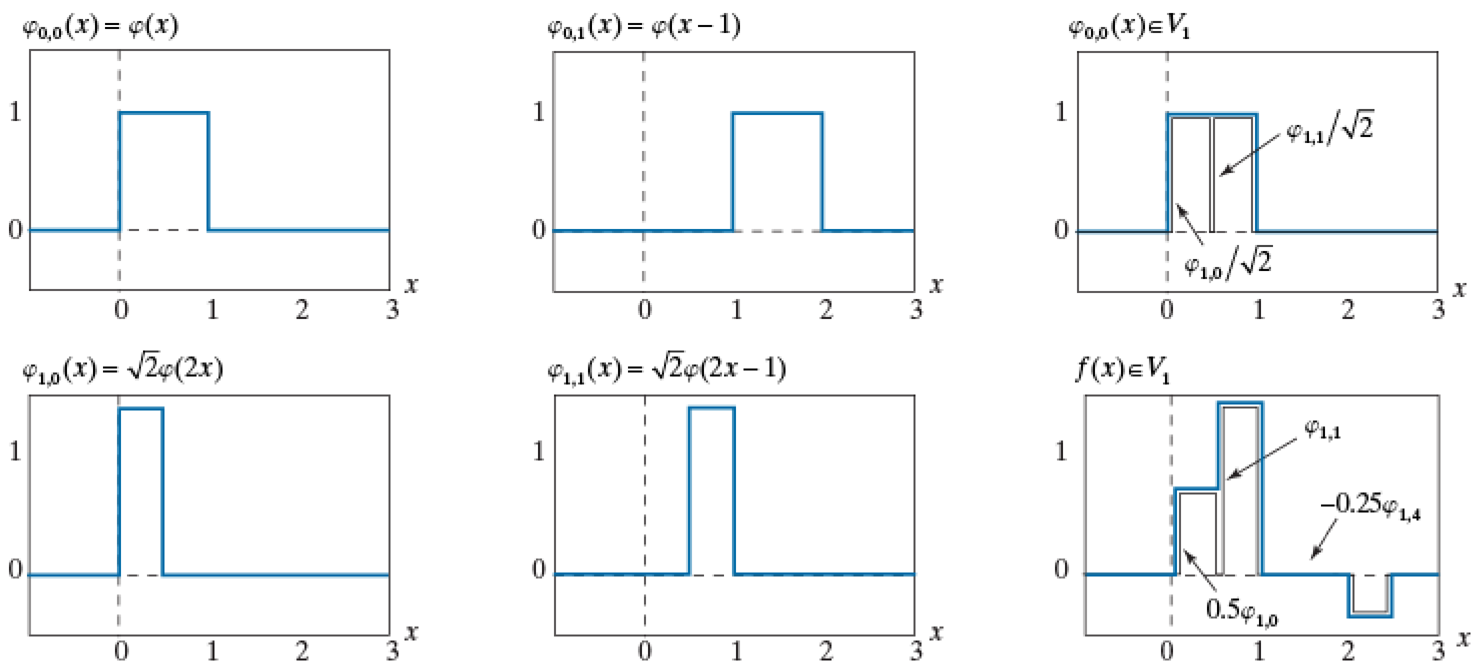
属于V_1但不属于V_0

五、图像多分辨率分析

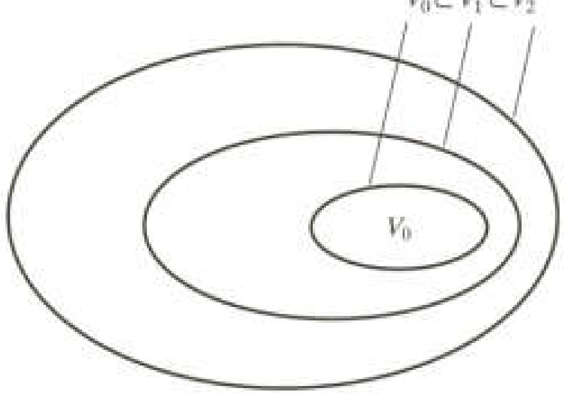
➢ 多分辨率分析

● 回到前面，定义函数 $\varphi(x)$，以它为基本函数，通过整数平移、实数二值尺度、平方可积得到生成一个函数集

$$\boxed{\varphi_{j,k} = 2^{j/2}\varphi(2^{j}x - k)}$$



多分辨率分析MRA



六、小波变换

➢ 小波函数

$$\boxed{\varphi_{j,k} = 2^{j/2}\varphi(2^j x - k)}$$ —— 尺度函数

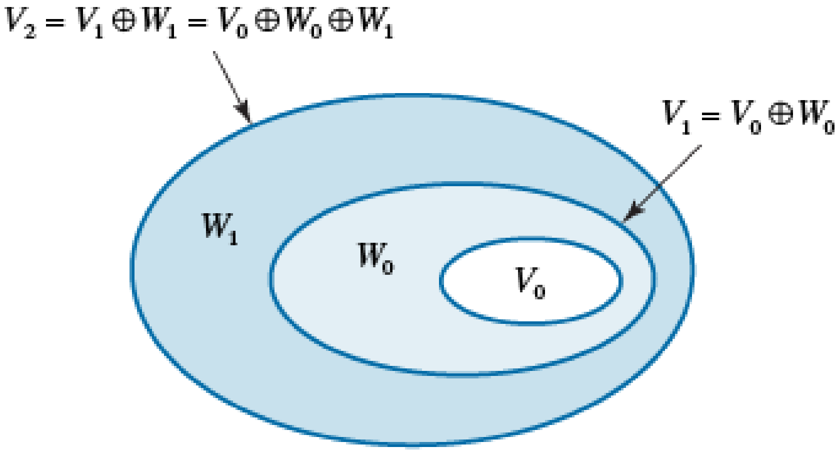
- 定义函数集

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$$

对于任意的j，所有关于k的函数张成一个子空间 $V_j = span\{\varphi_{j,k}(x)\}$

增加j就是增加了$\boldsymbol{V_j}$的大小

令W_j表示由函数 $\{\Psi_{j,k} | k \in Z\}$ 张成的函数空间，则有 $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$



$\boldsymbol{V_{j+1}}$中，$\boldsymbol{V_j}$的正交补集$\boldsymbol{W_j}$，且正交

$$<\varphi_{j,k}(x), \psi_{j,l}(x)> = 0, \ \ k \neq l$$

六、小波变换

➢ 小波函数

- 小波空间 $\psi_{j,k}(x)=2^{j/2}\psi(2^{j}x-k)$

$$W_{j,k} = span\{\Psi_{j,k}|k \in Z\}$$

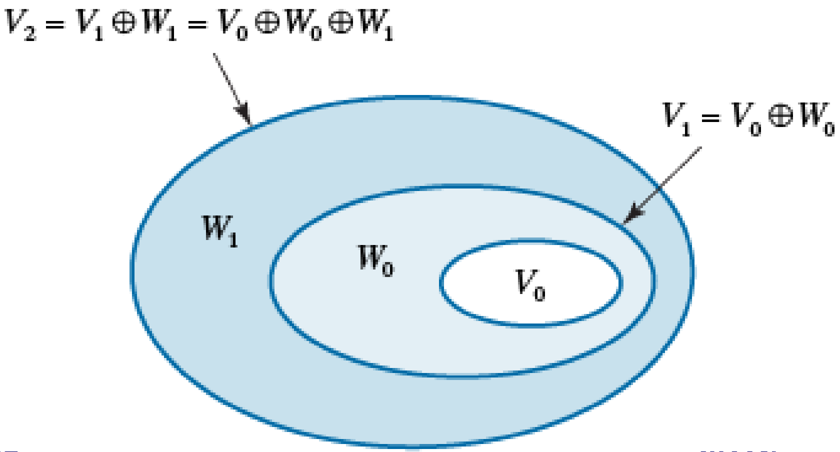
- 尺度空间

$$\varphi_{j,k} = 2^{j/2}\varphi(2^{j}x-k)$$

$$V_j = span\{\varphi_{j,k}(x)\}$$

小波空间$\mathbf{W_j}$位于尺度空间$\mathbf{V_{j+1}}$内部，所以小波函数可以表示为平移且分辨率加倍后的尺度函数的加权和。

$$\psi(x)=\sum_{k} h_{\psi}(k)\sqrt{2}\varphi(2x-k)$$



$$\psi_{j,k}(x)\in W_j \subset V_{j+1}$$

V_{j+1}中，V_j的正交补集W_j，且正交

$$<\varphi_{j,k}(x),\psi_{j,l}(x)>=0,\ \ k\neq l$$

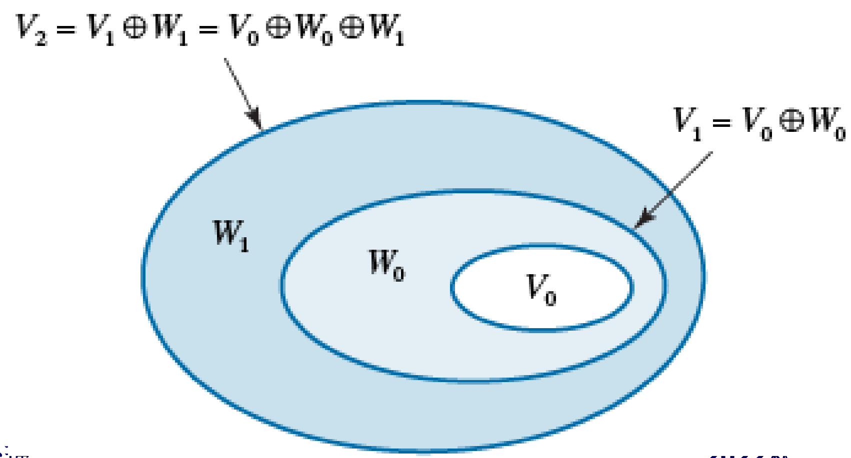
六、小波变换

➢ 小波函数

小波空间$\mathbf{W}_j$位于尺度空间$\mathbf{V}_{j+1}$内部，所以小波函数可以表示为平移且分辨率加倍后的尺度函数的加权和。

$$\psi(x)=\sum_k h_\psi(k)\sqrt{2}\varphi(2x-k) \qquad h_\psi(k)=(-1)^k h_\varphi(1-k)$$

小波函数系数



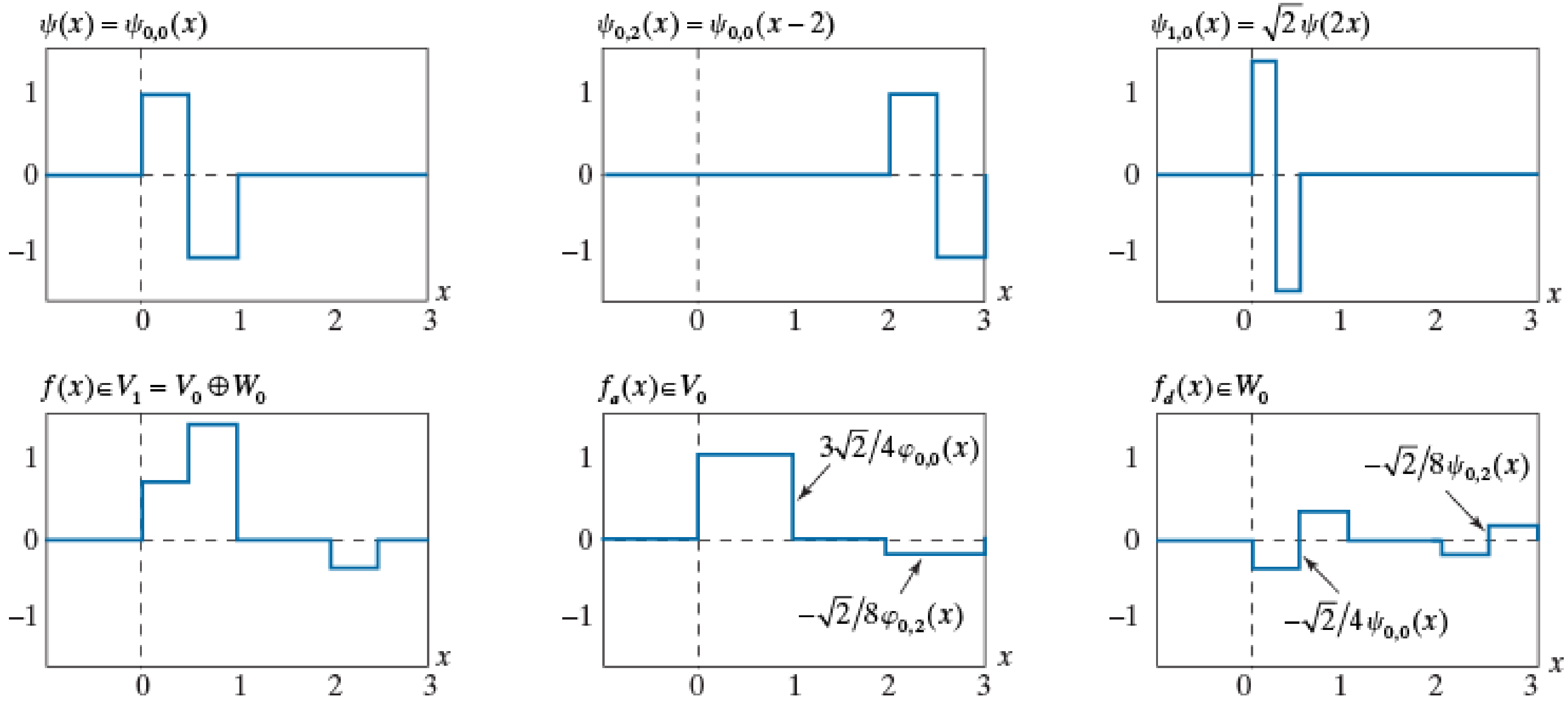
$$\psi_{j,k}(x) \in W_j \subset V_{j+1}$$

V_{j+1}中，V_j的正交补集W_j，且正交

$$<\varphi_{j,k}(x), \psi_{j,l}(x)>=0, \quad k \neq l$$

六、小波变换

➢ 哈尔小波



$\psi(x) = \psi_{0,0}(x)$
$\psi_{0,2}(x) = \psi_{0,0}(x-2)$
$\psi_{1,0}(x) = \sqrt{2}\psi(2x)$
$f(x) \in V_1 = V_0 \oplus W_0$
$f_a(x) \in V_0$
$f_d(x) \in W_0$
$3\sqrt{2}/4\varphi_{0,0}(x)$
$-\sqrt{2}/8\varphi_{0,2}(x)$
$-\sqrt{2}/8\psi_{0,2}(x)$
$-\sqrt{2}/4\psi_{0,0}(x)$

六、小波变换

➢ 小波级数展开

将函数$f(x)$展开为小波函数和尺度函数的小波级数

$$f(x)=\sum_k c_{j_0}(k)\varphi_{j_0,k}(x)+\sum_{j=j0}^{\infty}\sum_k d_j(k)\psi_{j,k}(x)$$

近似系数　　　　细节系数

$$c_{j_0}(k)=<f(x),\varphi_{j_0,k}(x)>$$

$$d_j(k)=<f(x),\psi_{j,k}(x)>$$

六、小波变换

➢ 小波级数展开

将函数$f(x)$展开为小波函数和尺度函数的小波级数

$$y=\begin{cases}x^2, 0\le x\le 1\\ 0, \quad 其他\end{cases}$$

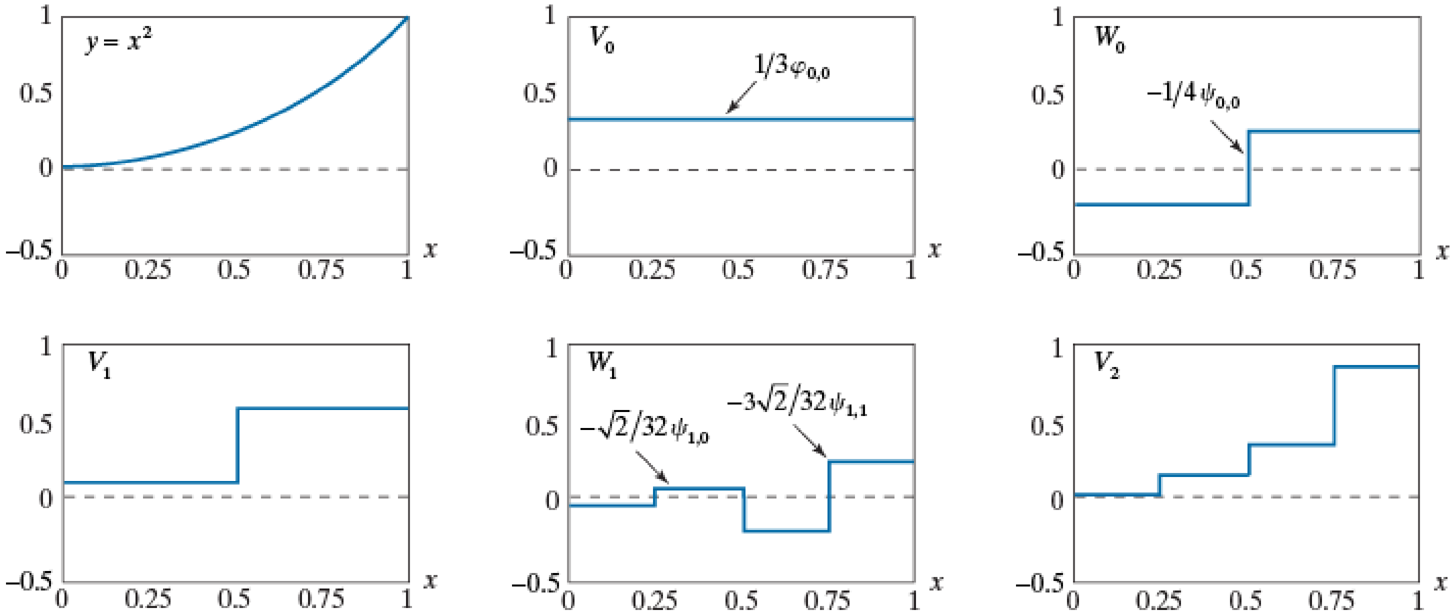
$$c_0(0)=\int_0^1 x^2\varphi_{0,0}(x)dx$$

$$=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$$

$$d_0(0)=\int_0^1 x^2\psi_{0,0}(x)dx$$

$$=\int_0^{0.5} x^2dx-\int_{0.5}^1 x^2dx=-\frac{1}{4}$$

… …



六、小波变换

➢ 一维离散小波变换

如果待展开的函数是离散的，得到的系数就称为离散小波变换（DWT）

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{N}}\left[T_{\varphi}(0,0)\varphi(x)+\sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{2^j-1}T_{\psi}(j,k)\psi_{j,k}(x)\right]$$

$$T_{\varphi}(0,0)=<f(x),\varphi_{0,0}(x)>=<f(x),\varphi(x)>=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{x=0}^{N-1}f(x)\varphi^{*}(x)$$

$$T_{\psi}(j,k)=<f(x),\psi_{j,k}(x)>=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{x=0}^{N-1}f(x)\psi_{j,k}{}^{*}(x)$$

六、小波变换

- 二维离散小波变换

在二维情况下，需要1个二维尺度函数$\varphi(x,y)$和3个二维小波$\psi^H(x,y),\psi^V(x,y),\psi^D(x,y)$,并且满足可分离的尺度函数

$$\varphi(x,y)=\varphi(x)\varphi(y)$$

可分离的方向敏感小波

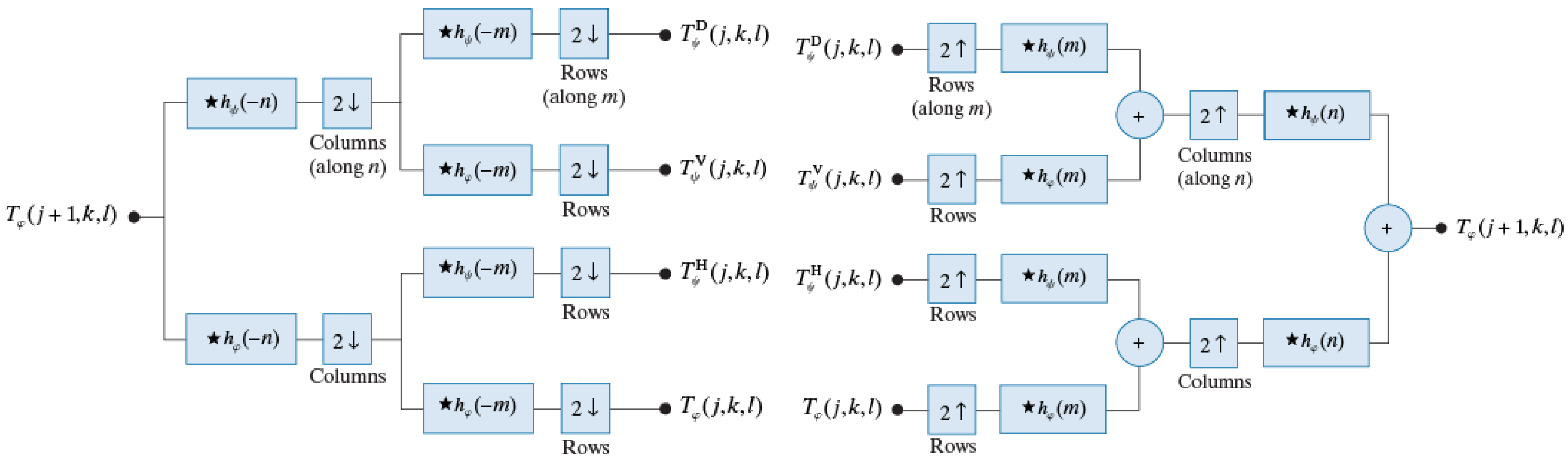
$$\psi^H(x,y)=\psi(x)\varphi(y)$$ 水平方向

$$\psi^V(x,y)=\varphi(x)\psi(y)$$ 垂直方向

$$\psi^D(x,y)=\psi(x)\psi(y)$$ 对角线方向

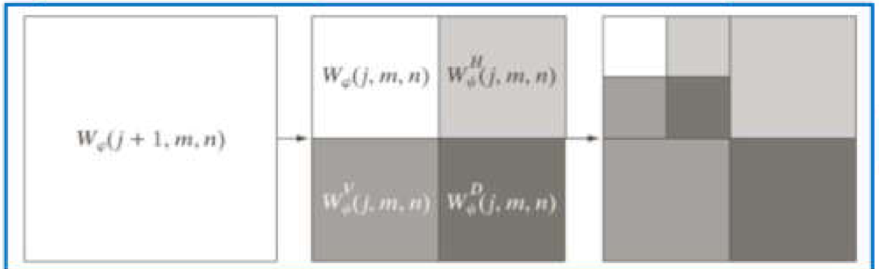
六、小波变换

➢ 二维离散小波变换



分析滤波器组

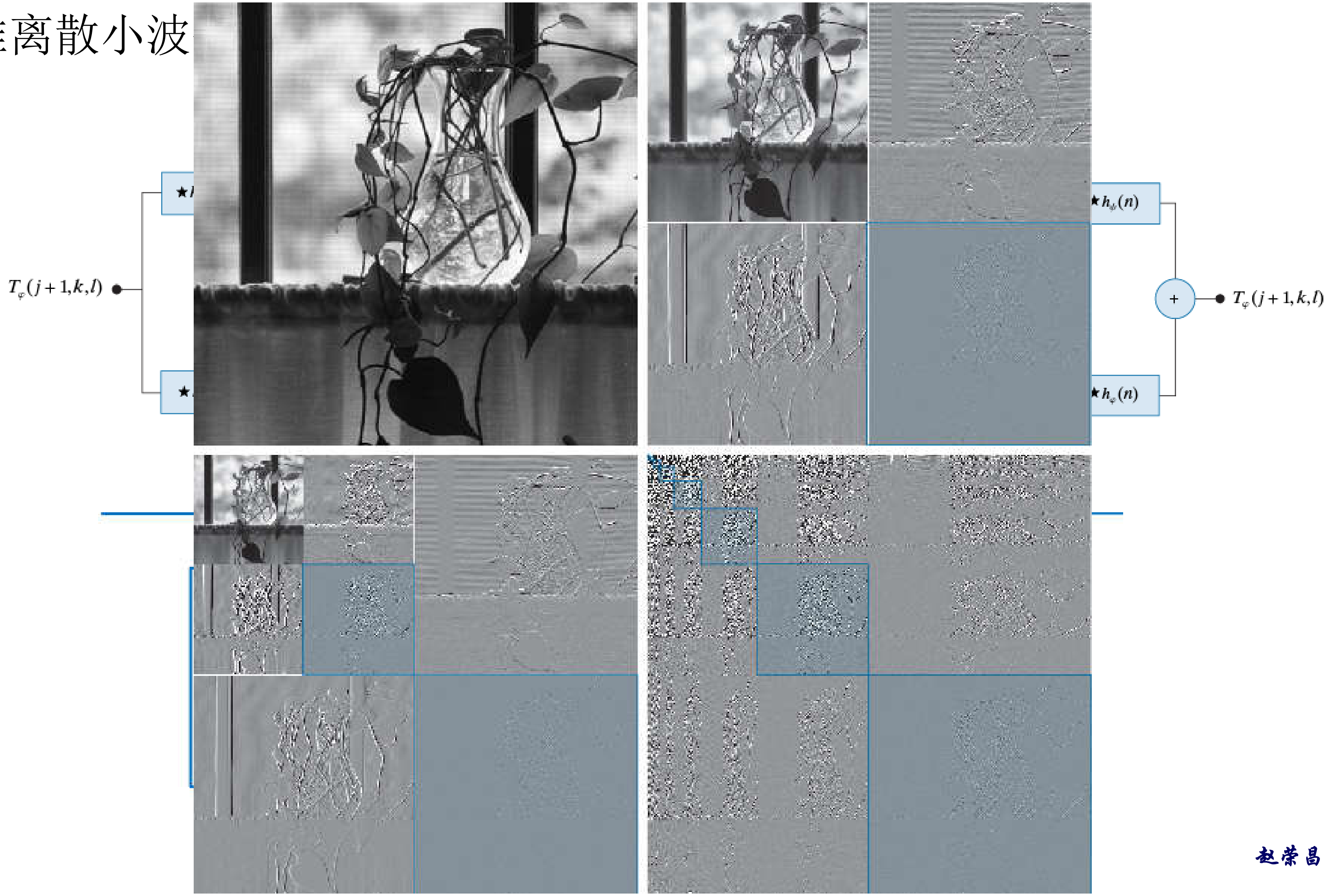
综合滤波器组



分解结果

六、小波变换

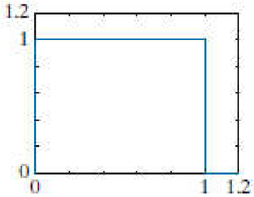
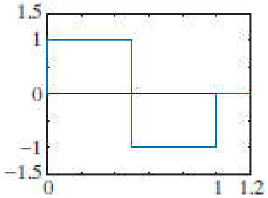
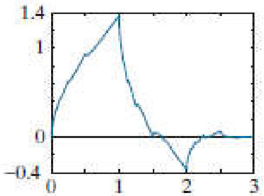
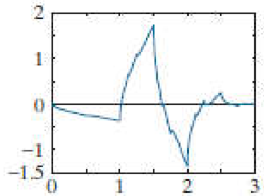
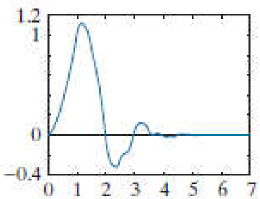
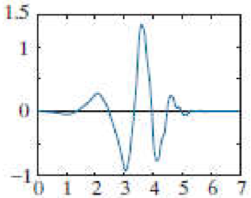
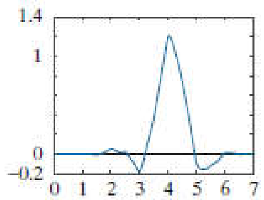
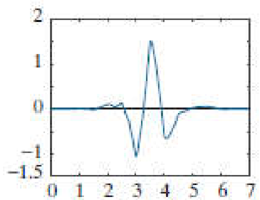
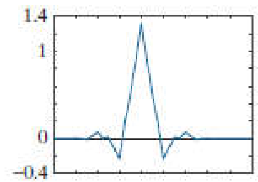
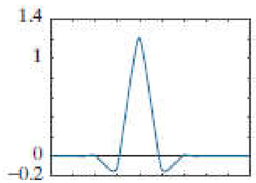
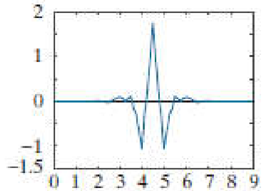
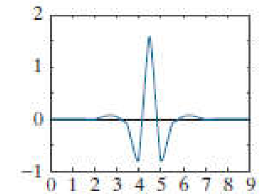
➢ 二维离散小波



六、小波变换

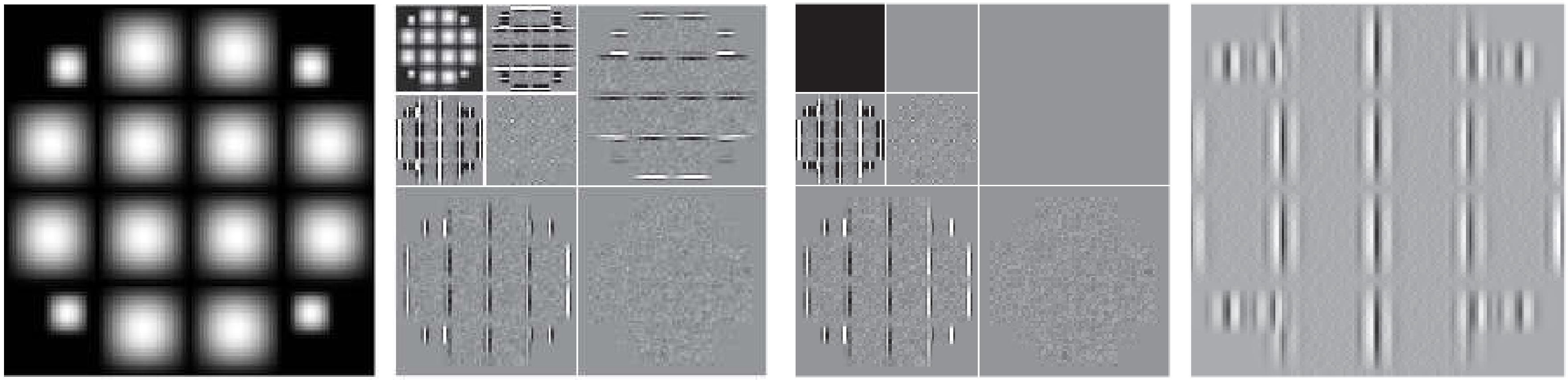
➢ 二维离散小波变换

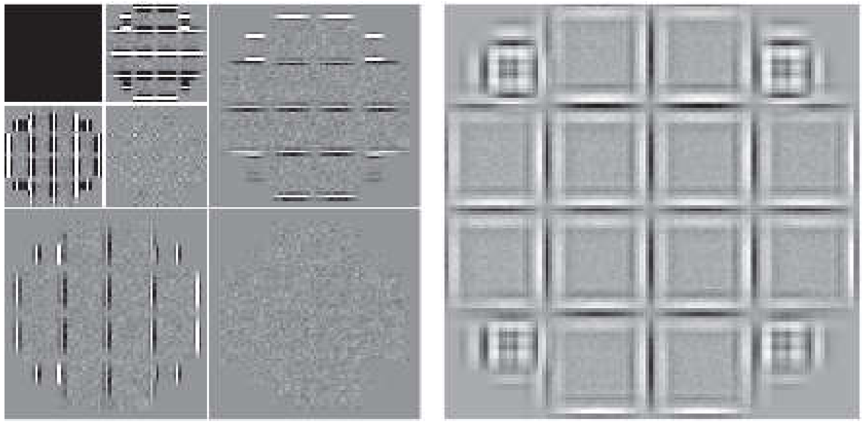
TABLE 6.1
Some representative wavelets.

Wavelet Name or Family	Scaling Function	Wavelet Function	Filter Coefficients
Haar The oldest and simplest wavelets. Orthogonal and discontinuous.			$g_0(n)=\{1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2}\}$
Daubechies family Orthogonal with the most vanishing moments for a given support. Denoted db$N$, where N is the number of vanishing moments; db2 and db4 shown; db1 is the Haar of the previous row.			$g_0(n)=\{0.482963,\ 0.836516, 0.224144,\ -0.129410\}$
			$g_0(n)=\{0.230372,\ 0.714847, 0.630881,\ -0.027984,\ -0.187035,\ 0.030841, 0.032883,\ -0.010597\}$
Symlet family Orthogonal with the least asymmetry and most vanishing moments for a given support (sym4 or 4th order shown).			$g_0(n)=\{0.032231,\ -0.012604,\ -0.099220,\ 0.297858, 0.803739,\ 0.497619,\ -0.029636,\ -0.075766\}$
Cohen-Daubechies-Feauveau 9/7 Biorthogonal B-spline used in the irreversable JPEG2000 compression standard (see Chapter 8).			$h_0(n)=\{0.026749,\ -0.016864,\ -0.078223,\ 0.266864, 0.602949,\ 0.266864,\ -0.078223,\ -0.016864, 0.026749\}$
			$h_1(n)=\{-0.091271,\ -0.057544, 0.591272,\ -1.115087, 0.591272,\ 0.057544,\ -0.091271, 0\}$

六、小波变换

➢ 二维离散小波变换





针对边缘检测的修正DWT

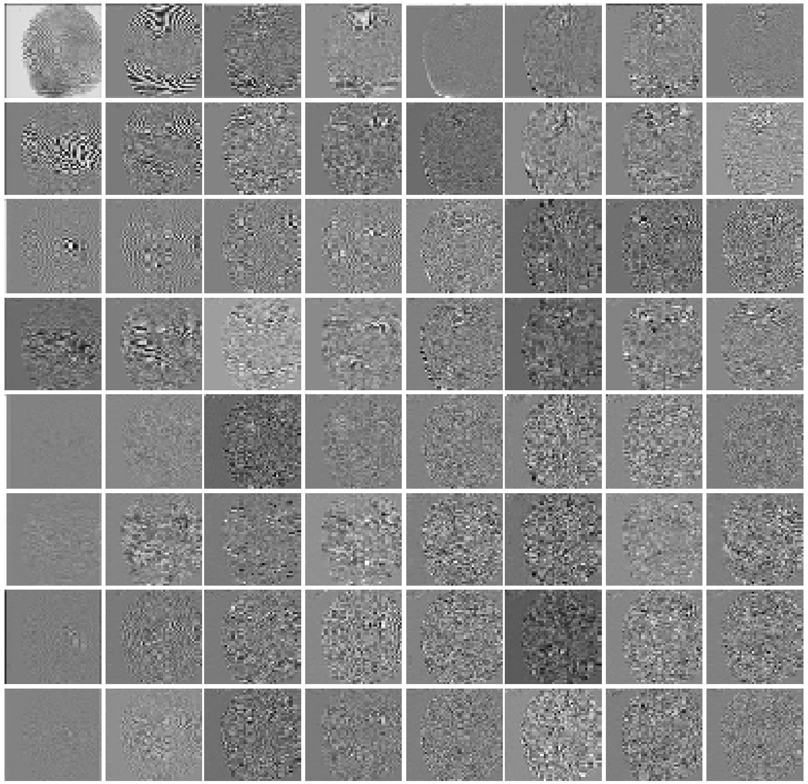
（a）原图 （b）相对4阶对称小波的2尺度DWT

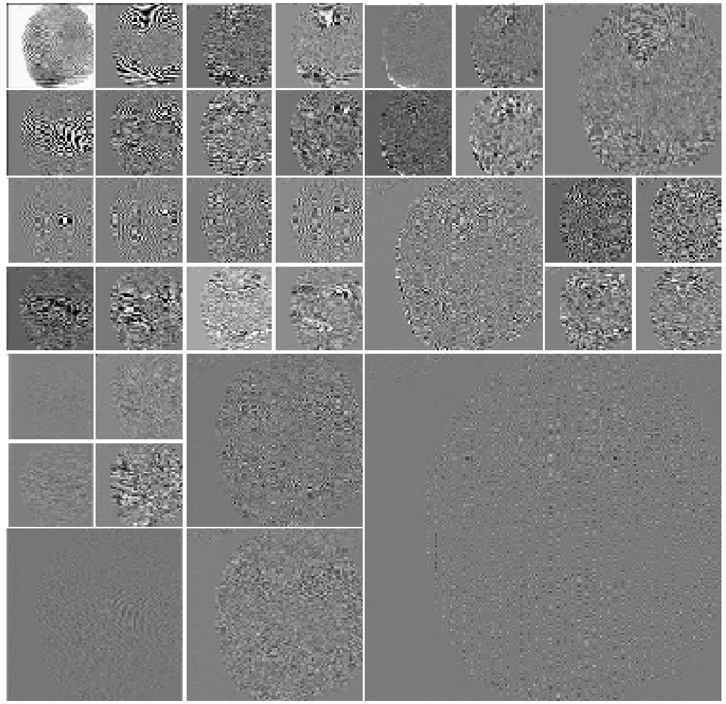
（c）近似系数设为0 （d）重建

（e）近似系数和水平系数设置为0 （f）重建

六、小波变换

➢ 应用





Thanks! ☺

Any Question?