



# 数字图像处理

## 第五章 图像复原与重建

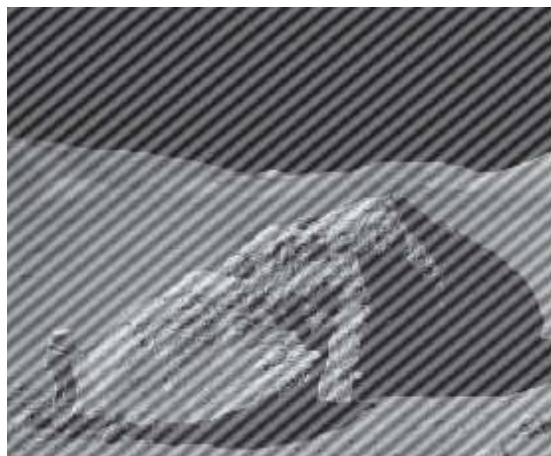


赵荣昌 (byrons.zhao@gmail.com)

中南大学计算机学院

## ➤ 一些重要的噪声概率密度函数——周期噪声

- 在图像获取时电力或机电干扰中产生；
- 周期噪声可以通过频率域滤波显著减少。



正弦噪声污染的图像



傅里叶谱 (共轭冲击)

$$G(u, v) = F(u, v) + N(u, v)$$

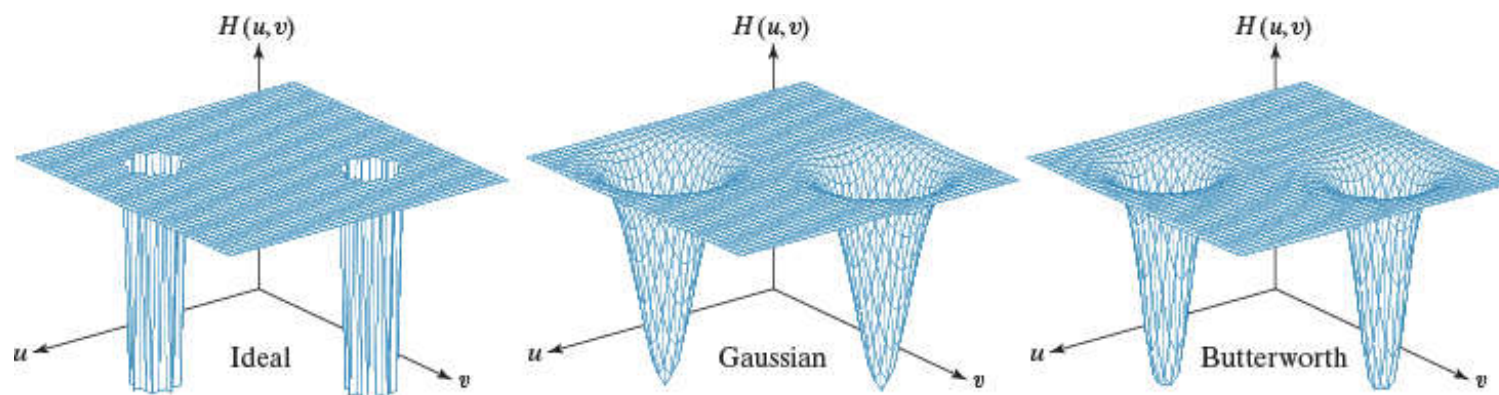
$$G(u, v) - N(u, v)$$

## 四、用频率域滤波消除周期噪声

➤ 针对周期噪声的复原：陷波滤波器 —— 阻止事先定义的频率矩形邻域中的频率

假设：在傅里叶变换中，周期噪声在对应于周期干扰的频率处显示为**集中突发**的能量。

设计：传递函数可用中心被平移到**陷波滤波中心**的**高通滤波器**函数的乘积来产生



## 四、用频率域滤波消除周期噪声

➤ 针对周期噪声的复原：陷波滤波器 —— 阻止事先定义的频率矩形邻域中的频率

传递函数可用中心被平移到陷波滤波中心的高通滤波器函数的乘积来产生

$$H_{NR}(u, v) = \prod_{k=1}^Q H_k(u, v) H_{-k}(u, v)$$

$$D_k(u, v) = \left[ \left( u - \frac{M}{2} - u_k \right)^2 + \left( v - \frac{M}{2} - v_k \right)^2 \right]^{1/2}$$

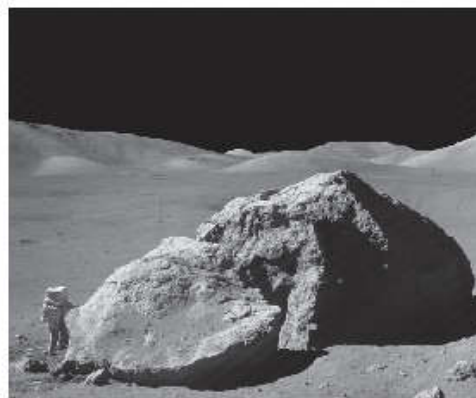
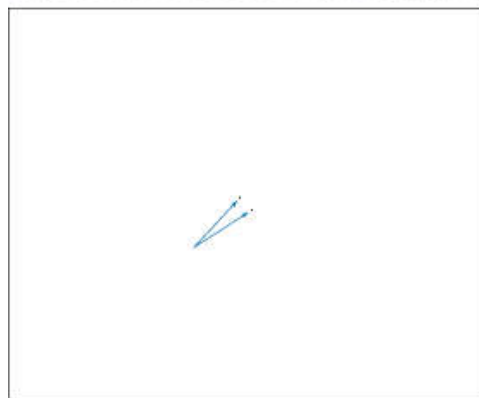
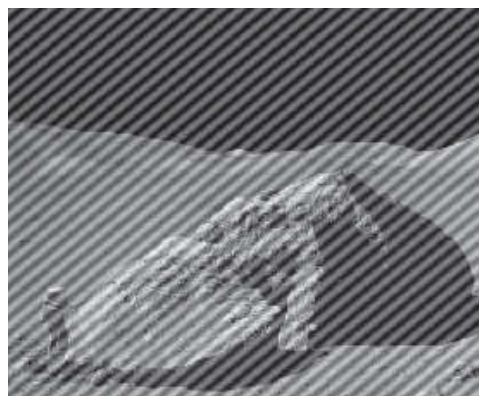
【例】n 阶Butterworth陷波带阻滤波器

$$H_{NR}(u, v) = \prod_{k=1}^3 \left[ \frac{1}{1 + [D_{0k}/D_k(u, v)]^n} \frac{1}{1 + [D_{0k}/D_{-k}(u, v)]^n} \right]$$

## 四、用频率域滤波消除周期噪声

➤ 针对周期噪声的复原：陷波滤波器 —— 阻止事先定义的频率矩形邻域中的频率

传递函数可用中心被平移到陷波滤波中心的高通滤波器函数的乘积来产生



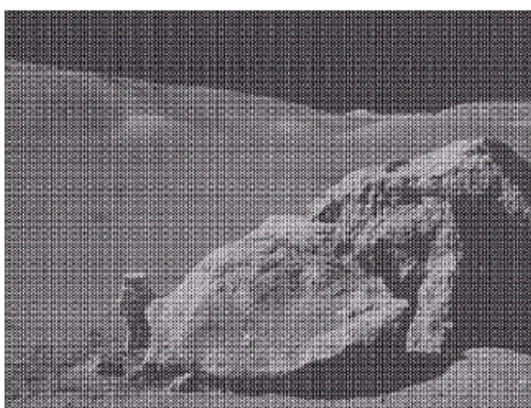
(a) 被正弦噪声污染的图像 (b) 图(a)的频谱

(c) 巴特沃斯陷波滤波器 (d) 滤波效果图

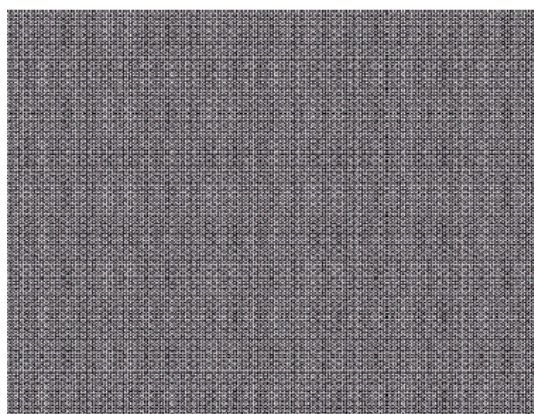
## 四、用频率域滤波消除周期噪声

➤ 针对周期噪声的复原：陷波带通滤波器  $H_{BP}(u, v) = 1 - H_{BR}(u, v)$

作用：提取噪声模式



(a) 被正弦噪声污染的图像



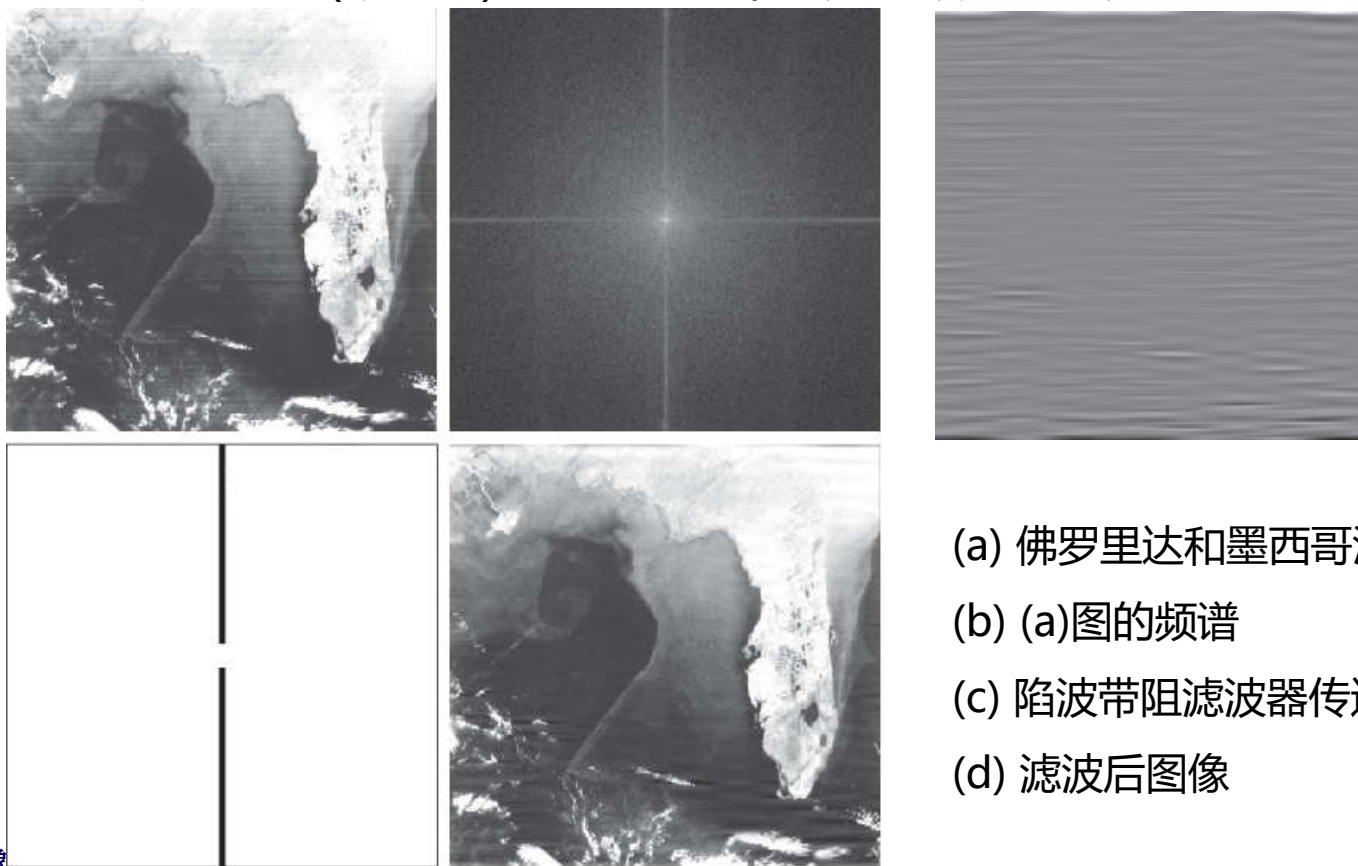
(b) 对应的噪声模式



## 四、用频率域滤波消除周期噪声

### ➤ 针对周期噪声的复原：陷波滤波器

作用：阻止(或通过)事先定义的中心频率领域内的频率



(a) 佛罗里达和墨西哥湾的人造卫星图像.

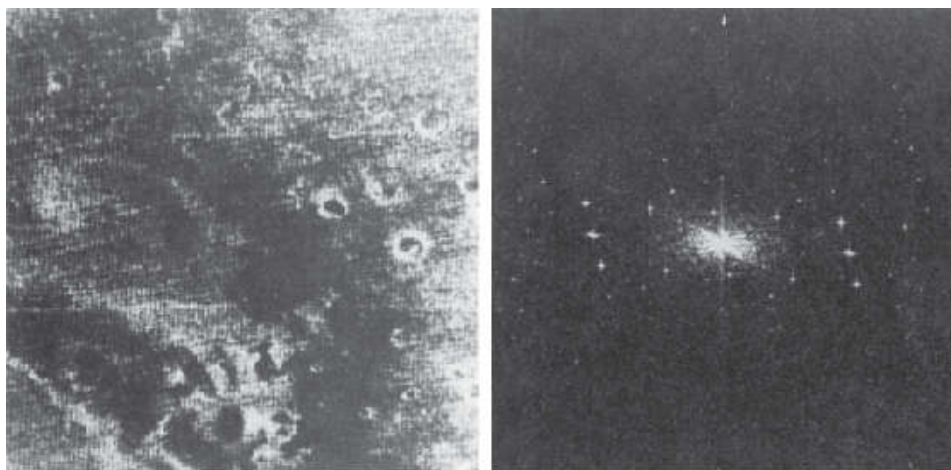
(b) (a)图的频谱

(c) 陷波带阻滤波器传递函数

(d) 滤波后图像

## 四、用频率域滤波消除周期噪声

### ➤ 针对周期噪声的复原：最优陷波滤波器



- 污染图像包含多种干扰成分
- 非单频突发，具有携带干扰模式信息的宽边缘



## 四、用频率域滤波消除周期噪声

### ➤ 针对周期噪声的复原：最优陷波滤波器

第一步：在每个尖峰位置处放置一个陷波带通滤波器，估计屏蔽干扰模式的主频率成分：

$$N(u, v) = H_{NP}(u, v) G(u, v)$$

噪声的傅里叶谱 ← 污染图像的傅里叶谱

$$\eta(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\{H_{NP}(u, v) G(u, v)\}$$

噪声模式 ←

第二步：从被污染图像中减去干扰模式的可加权部分

$$\hat{f}(x, y) = g(x, y) - w(x, y) \eta(x, y)$$

加权函数/调制函数：其目的是使得恢复图像效果最优。怎么定义最优？

## 四、用频率域滤波消除周期噪声

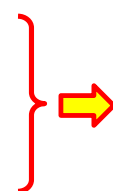
### ➤ 针对周期噪声的复原：最优陷波滤波器

$$\hat{f}(x, y) = g(x, y) - w(x, y)\eta(x, y)$$

加权函数/调制函数  $w(x, y)$  的估计——使复原图像在每一个点的指定领域上的方差最小

考虑点  $(x, y)$  的大小为  $(2a + 1, 2b + 1)$  的邻域。 $\hat{f}(x, y)$  的局部方差估计为：

$$\delta^2(x, y) = \frac{1}{(2a + 1)(2b + 1)} \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b \left[ \hat{f}(x + s, y + t) - \bar{\hat{f}}(x, y) \right]^2$$

$$\bar{\hat{f}}(x, y) = \frac{1}{(2a + 1)(2b + 1)} \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b \hat{f}(x + s, y + t)$$


$$\delta^2(x, y) = \frac{1}{(2a + 1)(2b + 1)} \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b \left\{ [g(x + s, y + t) - w(x + s, y + t)\eta(x + s, y + t)] - [\bar{g}(x, y) - \overline{w(x, y)\eta(x, y)}] \right\}^2$$

## 四、用频率域滤波消除周期噪声

### ➤ 针对周期噪声的复原：最优陷波滤波器

$$\hat{f}(x, y) = g(x, y) - w(x, y)\eta(x, y)$$

加权函数/调制函数  $w(x, y)$  的估计——使复原图像在每一个点的指定领域上的方差最小

$$\delta^2(x, y) = \frac{1}{(2a+1)(2b+1)} \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b \left\{ [g(x+s, y+t) - w(x+s, y+t)\eta(x+s, y+t)] - [\bar{g}(x, y) - \overline{w(x, y)\eta(x, y)}] \right\}^2$$

假设：  $w(x+s, y+t) = w(x, y)$  常数，用邻域中心的值代替

$$\text{有： } \delta^2(x, y) = \frac{1}{(2a+1)(2b+1)} \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b \{ [g(x+s, y+t) - w(x, y)\eta(x+s, y+t)] - [\bar{g}(x, y) - w(x, y)\bar{\eta}(x, y)] \}^2$$

最小化局部方差等价于求解下式：

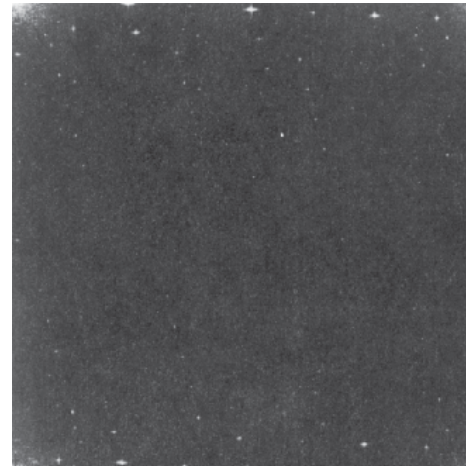
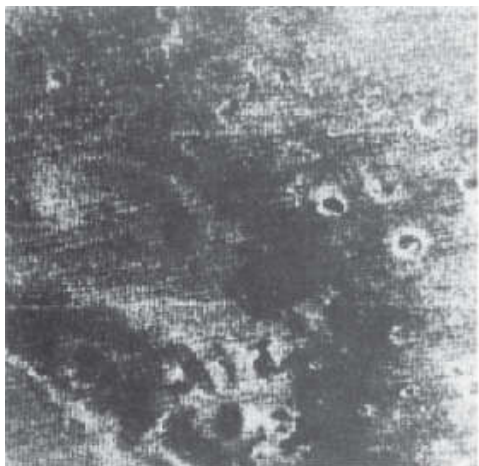
$$\frac{\partial \delta^2(x, y)}{\partial w(x, y)} = 0$$

最终解：

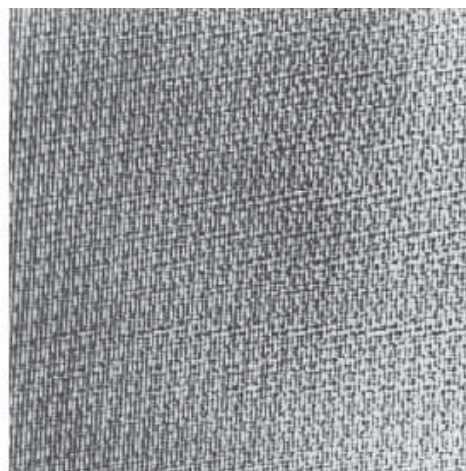
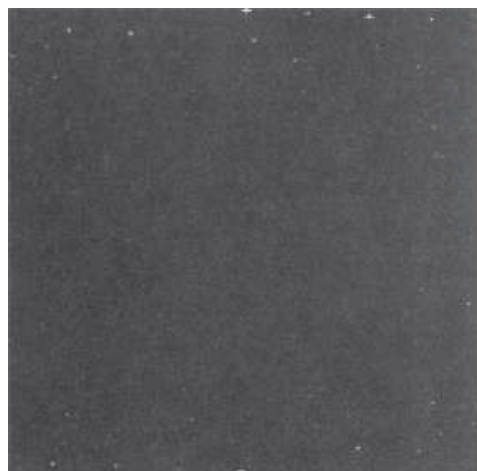
$$w(x, y) = \frac{\overline{g(x, y)\eta(x, y)} - \bar{g}(x, y)\bar{\eta}(x, y)}{\overline{\eta^2(x, y)} - \bar{\eta}(x, y)^2}$$

## 四、用频率域滤波消除周期噪声

【例】

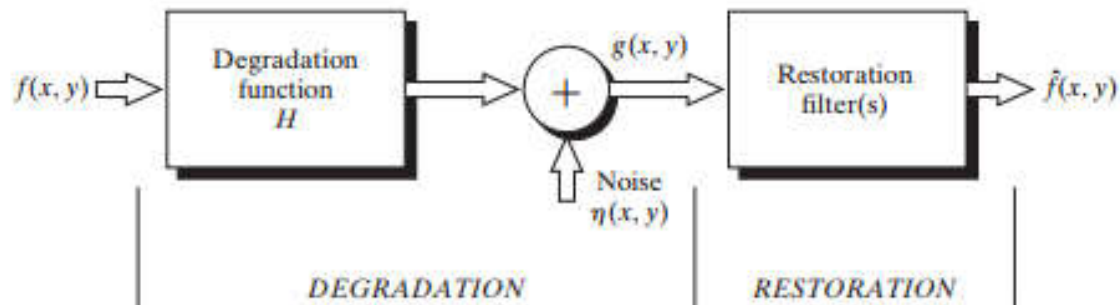


(a)火星地形图 (b) 傅里叶谱 (c)未中心化谱



(d)恢复后图 (e)噪声谱 (f)噪声空间模式

## 五、线性、位置不变的退化



$$g(x, y) = H[f(x, y)] + \eta(x, y)$$

↓退化后图像    ↓退化模型    ↓噪声

(1) 假设  $\eta(x, y) = 0$

(2) 假设  $H$  是线性算子

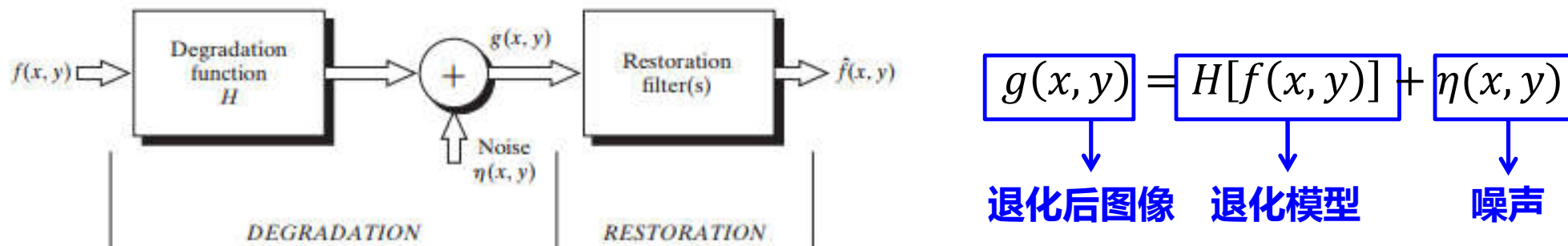
如果  $H$  具有加性性质, 即  $H[af_1(x, y) + bf_2(x, y)] = aH[f_1(x, y)] + bH[f_2(x, y)]$

且  $H$  具有均匀性, 即  $H[af_1(x, y)] = aH[f_1(x, y)]$

(3) 假设  $H$  算子是位置不变

对于任意  $f(x, y)$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ , 如果  $H[f(x - \alpha, y - \beta)] = g(x - \alpha, y - \beta)$  成立

## 五、线性、位置不变的退化



(1) 不存在噪声时, 即  $\eta(x, y) = 0$ , 线性、位置不变的退化模型的表达式为:

$$g(x, y) = h(x, y) \star f(x, y)$$

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$$

(2) 存在噪声时, 即  $\eta(x, y) \neq 0$ , 线性、位置不变的退化模型的表达式为:

$$g(x, y) = h(x, y) \star f(x, y) + \eta(x, y)$$

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v)$$



## 六、估计退化函数

如何找到退化函数 $H$ ?

方法: (1) 观察法 (2) 试验法 (3) 数学建模法

收集图像自身的信息来估计退化函数。

【例】对于模糊图像，选择一小部分图像  $g_s(x, y)$ ，假设选择的是强信号区，噪声影响可忽略不计，则可构建一个不退化的图像  $\hat{f}_s(x, y)$

由于假定噪声可忽略，则有

$$H_s(u, v) = \frac{G_s(u, v)}{\hat{F}(u, v)}$$

根据  $H_s(u, v)$  推出  $H(u, v)$

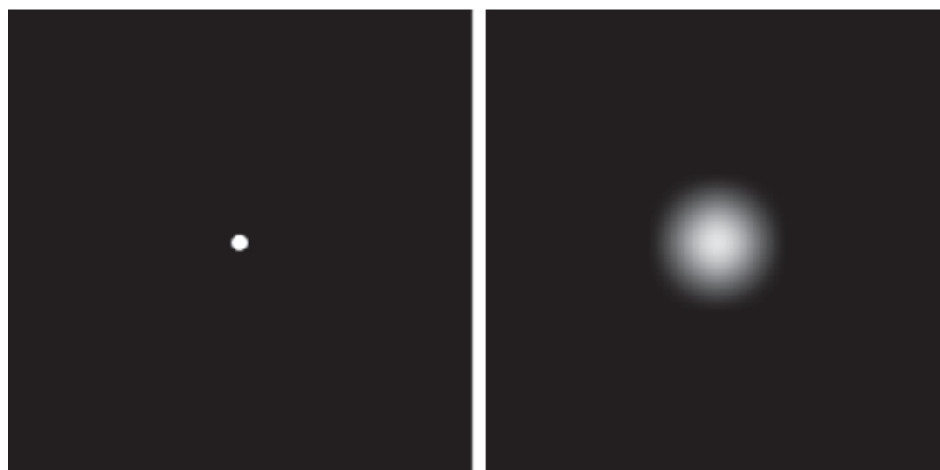
## 六、估计退化函数

方法: (1) 观察法 (2) 试验法 (3) 数学建模法

使用与获取退化图像的设备相似的装置,得到准确的退化估计。

【例】线性空间不变系统完全由其冲激响应来描述, 因此, 采用一个强度为  $A$  的冲激函数 (小亮点), 可得到的退化冲激响应, 由于冲激的傅里叶变换是一个常量, 有

$$H(u, v) = \frac{G_s(u, v)}{A}$$



冲激特性的退化估计

(a) 一个亮脉冲

(b) 图像化的(退化的)冲激

## 六、估计退化函数

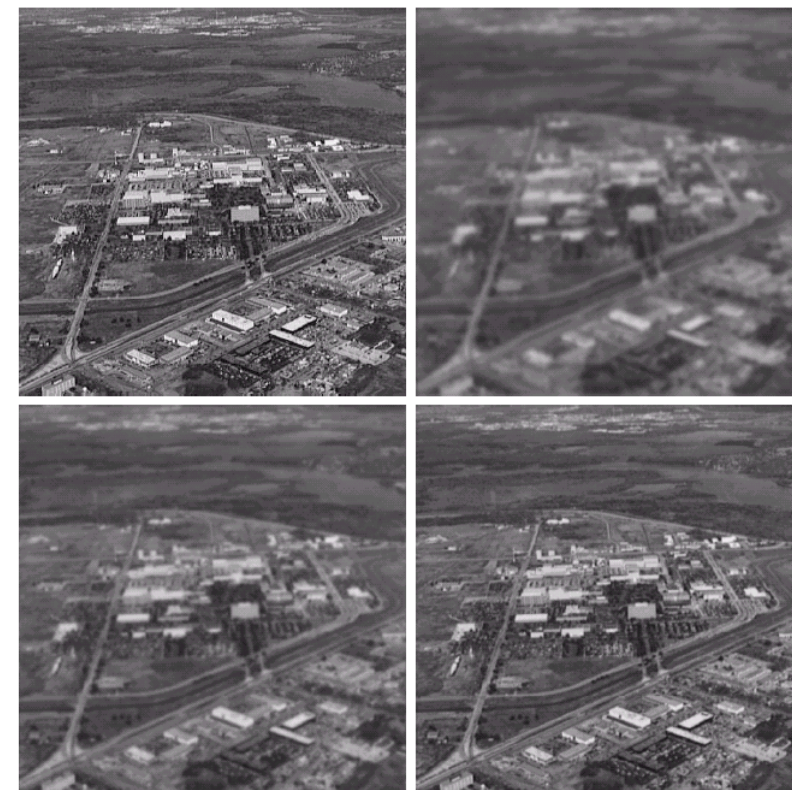
方法: (1) 观察法 (2) 试验法 (3) 数学建模法

考虑引起退化的环境因素, 建立退化模型

【例】基于大气湍流物理特性的退化模型的一般形式为

$$H(u, v) = e^{-k(u^2 + v^2)^{5/6}}$$

其中  $k$  为与湍流性质有关的常数



(a) 可忽略的湍流 (b) 剧烈湍流,  $k=0.0025$

(c) 中等湍流,  $k=0.001$  (d) 轻微湍流,  $k=0.00025$

## 六、估计退化函数

方法: (1) 观察法 (2) 试验法 (3) 数学建模法

从基本原理推导数学模型，如匀速直线运动造成的模糊就可以运用数学推导出其退化函数



## 六、估计退化函数

方法: (1) 观察法 (2) 试验法 (3) 数学建模法

$$g(x, y) = \int_0^T f[x - x_0(t), y - y_0(t)] dt$$

从基本原理推导数学模型, 如匀速直线运动造成的模糊就可以运用数学推导出其退化函数

$$\begin{aligned} G(u, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^T f[x - x_0(t), y - y_0(t)] dt \right\} e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \\ &= \int_0^T \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f[x - x_0(t), y - y_0(t)] e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \right\} dt \\ &= \int_0^T F(u, v) e^{-j2\pi(ux_0(t)+vy_0(t))} dt \\ &= F(u, v) \int_0^T e^{-j2\pi(ux_0(t)+vy_0(t))} dt = F(u, v) H(u, v) \end{aligned}$$

## 六、估计退化函数

方法: (1) 观察法 (2) 试验法 (3) 数学建模法

$$g(x, y) = \int_0^T f[x - x_0(t), y - y_0(t)] dt$$

从基本原理推导数学模型，如匀速直线运动造成的模糊就可以运用数学推导出其退化函数

$$G(u, v) = F(u, v)H(u, v)$$

$$H(u, v) = \int_0^T e^{-j2\pi(ux_0(t)+vy_0(t))} dt$$

如果  $x_0(t) = at/T$ ,  $y_0(t) = 0$ , 则

$$H(u, v) = \int_0^T e^{-j2\pi(uat/T)} dt = \frac{T}{\pi ua} \sin(\pi ua) e^{-j\pi ua}$$

如果  $x_0(t) = at/T$ ,  $y_0(t) = bt/T$ , 则

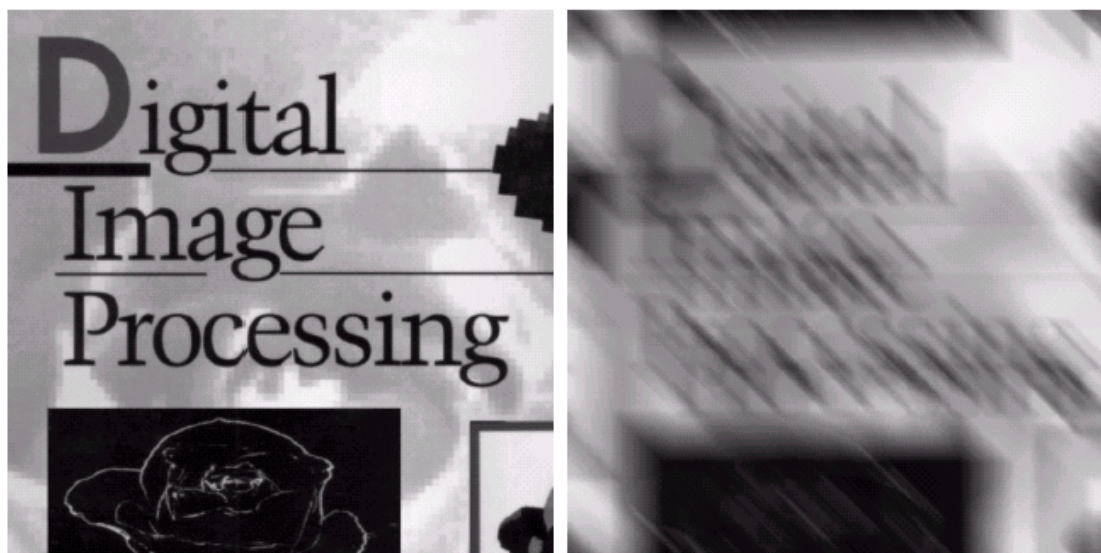
$$H(u, v) = \frac{T}{\pi(ua + vb)} \sin(\pi(ua + vb)) e^{-j\pi(ua + vb)}$$



## 六、估计退化函数

方法: (1) 观察法 (2) 试验法 (3) 数学建模法

从基本原理推导数学模型, 如如匀速直线运动造成的模糊就可以运用数学推导出其退化函数



(a)原始图像

(b)令 $a=b=0.1$ 和 $T=1$ 模糊的结果

## 七、逆滤波

如果知道了退化函数 $H$ ，如何复原原图？

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v)$$

➤ 基本思想：

用退化函数除退化图像的傅里叶谱，变换来计算原始图像的傅里叶变化的估计 $\hat{F}(u, v)$ ：

$$\hat{F}(u, v) = \frac{G(u, v)}{H(u, v)} = \frac{1}{H(u, v)} G(u, v)$$

随机函数，未知，未考虑

$$\hat{F}(u, v) = F(u, v) + \frac{N(u, v)}{H(u, v)}$$

当退化为零或很小时，  
 $N(u, v)/H(u, v)$ 会变得很大

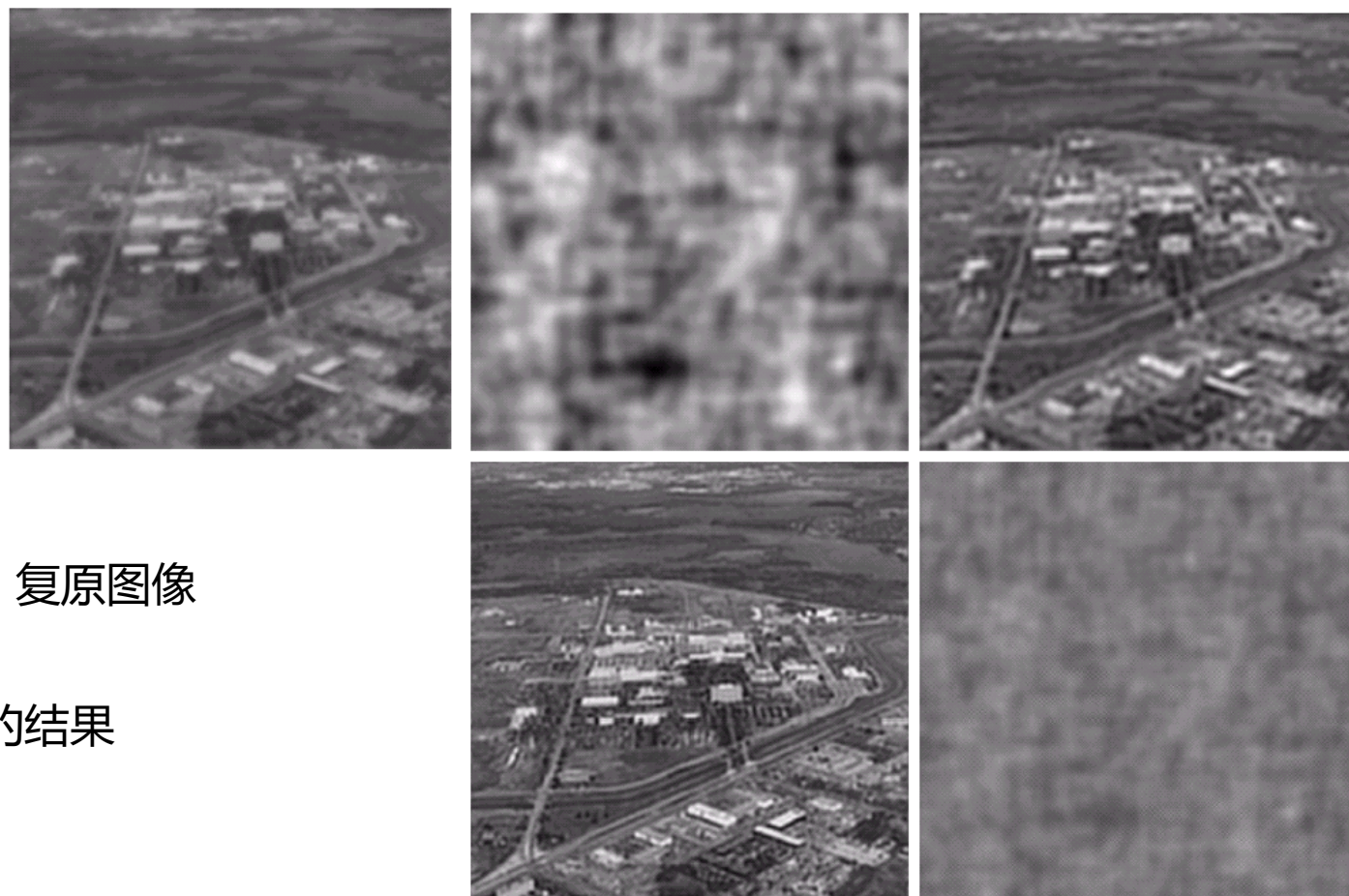
一种解决退化为零或很小值问题的途径是限制滤波器的频率信息使其接近原点。

## 七、逆滤波

【例】

退化函数：

$$H(u, v) = e^{-k[(u-M/2)^2 + (v-N/2)^2]^{5/6}}$$



对图像(a)进行逆滤波，复原图像

(b) 用全滤波的结果

(c) 半径为40时截止H的结果

(d) 半径为70时的结果

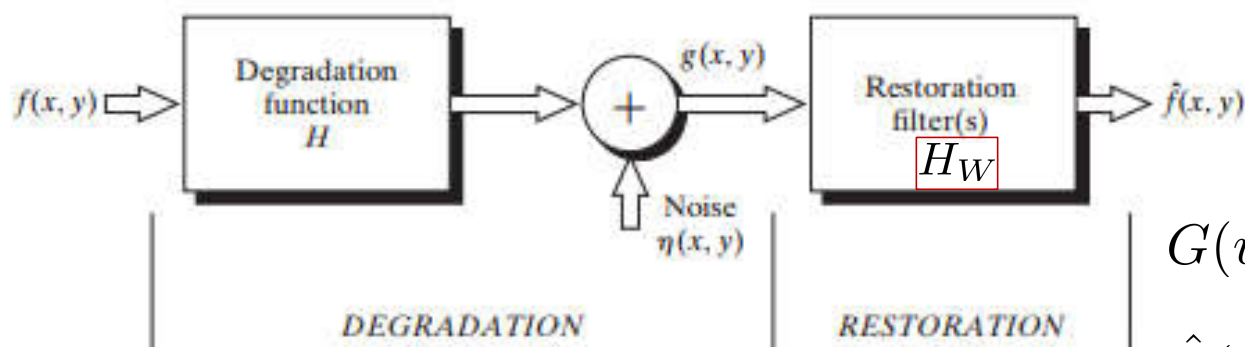
(e) 半径为85时的结果

## 八、逆滤波的改进=>维纳滤波/最小均方差滤波

- 逆滤波：没有清楚说明如何处理噪声
- 维纳滤波：一种综合退化函数和噪声统计特征进行复原的方法。
- 基本思路：

假设图像和噪声都是随机变量，找为污染图像  $f$  的一个估计  $\hat{f}$ ，使它们之间的均方误差最小：

$$e^2 = E\{(f - \hat{f})^2\}$$



$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v)$$

$$\hat{F}(u, v) = G(u, v)H_W(u, v)$$

## 八、逆滤波的改进=>维纳滤波/最小均方差滤波

➤ 基本思想：最小化  $e^2 = E\{(f - \hat{f})^2\}$

$$E\{\|F - \hat{F}\|^2\} = E\{(\hat{F} - F)(\hat{F}^* - F^*)\}$$

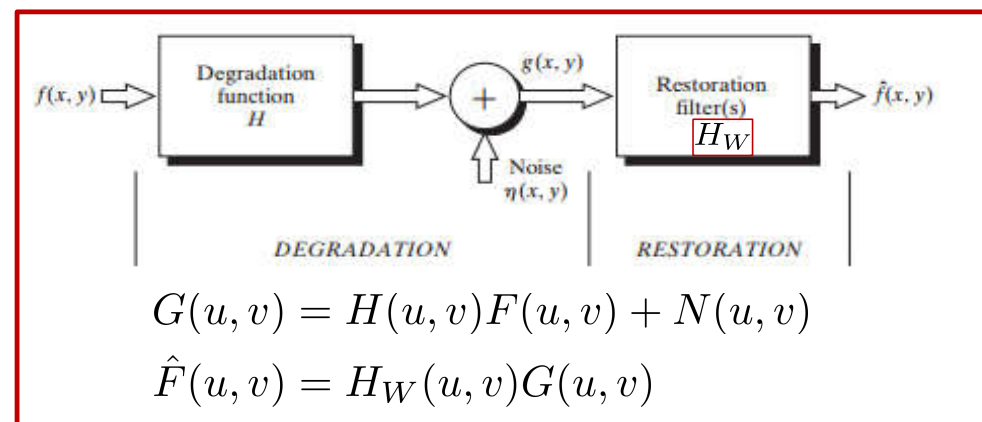
$$= E\{(F - H_W \cdot G)(F^* - H_W^* \cdot G^*)\}$$

$$= E\{F \cdot F^* - H_W \cdot (H \cdot F + N) \cdot F^* - F \cdot H_W^* \cdot (H^* \cdot F^* + N^*) + H_W \cdot G \cdot H_W^* \cdot G^*\}$$

$$= E\{S_f - H_W \cdot H \cdot S_f - H_W^* \cdot H^* \cdot S_f + \|H_W\|^2 \cdot \|G\|^2\}$$

$$= E\{S_f - H_W \cdot H \cdot S_f - H_W^* \cdot H^* \cdot S_f + \|H_W\|^2 \cdot (\|H\|^2 \cdot S_f + S_n)\}$$

框中函数对滤波器  $H_W$  的一阶导数为零时，误差期望最小



假设噪声与图像不相关

## 八、逆滤波的改进=>维纳滤波/最小均方差滤波

### 维纳滤波器

$$H_W(u, v) = \frac{1}{H(u, v)} \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + S_\eta(u, v)/S_f(u, v)}$$

噪声的功率谱

未退化图像的功率谱

要求:  
未退化图像和噪声的  
功率必须是已知的.

1. 噪声为0, 退化为逆滤波
2. 噪声为白噪声, 噪声功率谱为常数, 噪声功率谱与原图像功率谱可用一个常数K估计。





## 八、逆滤波的改进=>维纳滤波/最小均方差滤波

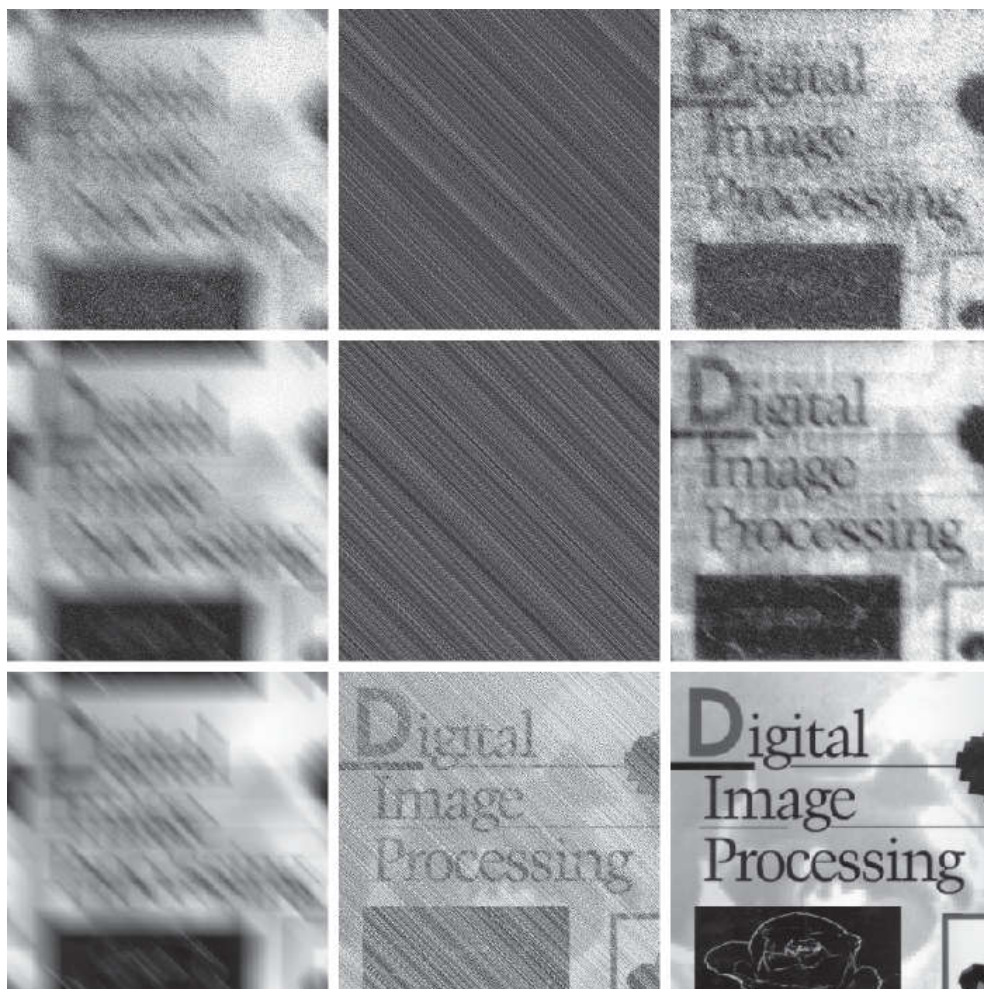


(a) 全滤波的逆滤波结果 (b) 半径受限的逆滤波结果 (c) 维纳滤波的结果 (交互选择 $K$ )

维纳滤波的结果非常接近原始图像,比逆滤波要好



## 八、逆滤波的改进=>维纳滤波/最小均方差滤波



- (a) 由运动模糊及均值为0方差为650的加性高斯噪声污染的图像
- (b) 逆滤波的结果
- (c) 维纳滤波的结果
- (d)-(f) 噪声幅度的方差比(a)小一个数量级
- (g)-(i) 噪声方差比(a)小5个数量级



## 八、逆滤波的改进=>维纳滤波/最小均方差滤波

- 以噪声和未退化图像的功率谱为基础的度量

信噪比(频率域)

$$SNR = \frac{\sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} |F(u, v)|^2}{\sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} |N(u, v)|^2}$$

均方误差

$$MSE = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \left[ f(x, y) - \hat{f}(x, y) \right]^2$$

空间域信噪比

$$SNR = \frac{\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \hat{f}(x, y)^2}{\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \left[ f(x, y) - \hat{f}(x, y) \right]^2}$$

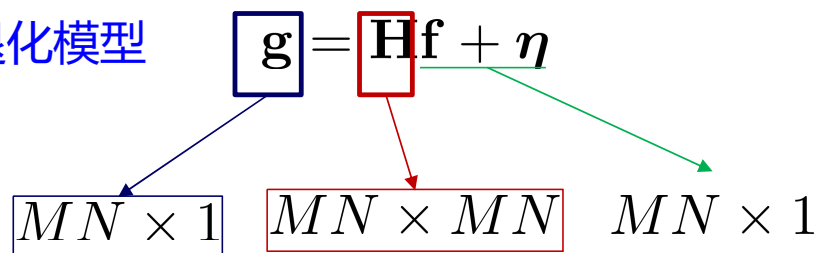
## 八、维纳滤波=>约束最小二乘方滤波

- 维纳滤波：要求未退化的图像和噪声的功率谱已知，通常用常数估计，但并不总是合适。
- 约束最小二乘方滤波：仅要求噪声方差和均值已知
- 基本思想：

退化模型

$$\boxed{\mathbf{g}} = \boxed{\mathbf{H}} \mathbf{f} + \boldsymbol{\eta}$$

$MN \times 1$        $MN \times MN$        $MN \times 1$



高维矩阵运算复杂，且退化函数对噪声敏感，使问题进一步复杂化。为此，找到一个带约束条件的最小准则函数，定义如下：

$$C = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [\nabla^2 f(x, y)]^2$$

约束为：  $\|\mathbf{g} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}}\|^2 = \|\boldsymbol{\eta}\|^2$

## 八、维纳滤波=>约束最小二乘方滤波

➤ 基本思想:

最小化准则:

$$C = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [\nabla^2 f(x, y)]^2 = \|P\hat{F}\|^2$$

约束为:  $\|g - H\hat{f}\|^2 = \|\eta\|^2$

【解】采用拉格朗日乘数法, 有

$$L(\hat{F}, \lambda) = \|P\hat{F}\|^2 + \lambda[\|G - H\hat{F}\|^2 - \|N\|^2]$$

维纳滤波

最小化上式等价于计算  $\frac{\partial L(\hat{F}, \lambda)}{\partial \hat{F}} = 0$   $\hat{F}(u, v) = \left[ \frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + S_\eta(u, v)/S_f(u, v)} \right] G(u, v)$

所以有:

$$\hat{F}(u, v) = \left[ \frac{H^*(u, v)}{\|H(u, v)\|^2 + \gamma \|P(u, v)\|^2} \right] G(u, v)$$

其中  $\gamma = 1/\lambda$

如何选取  $\gamma$

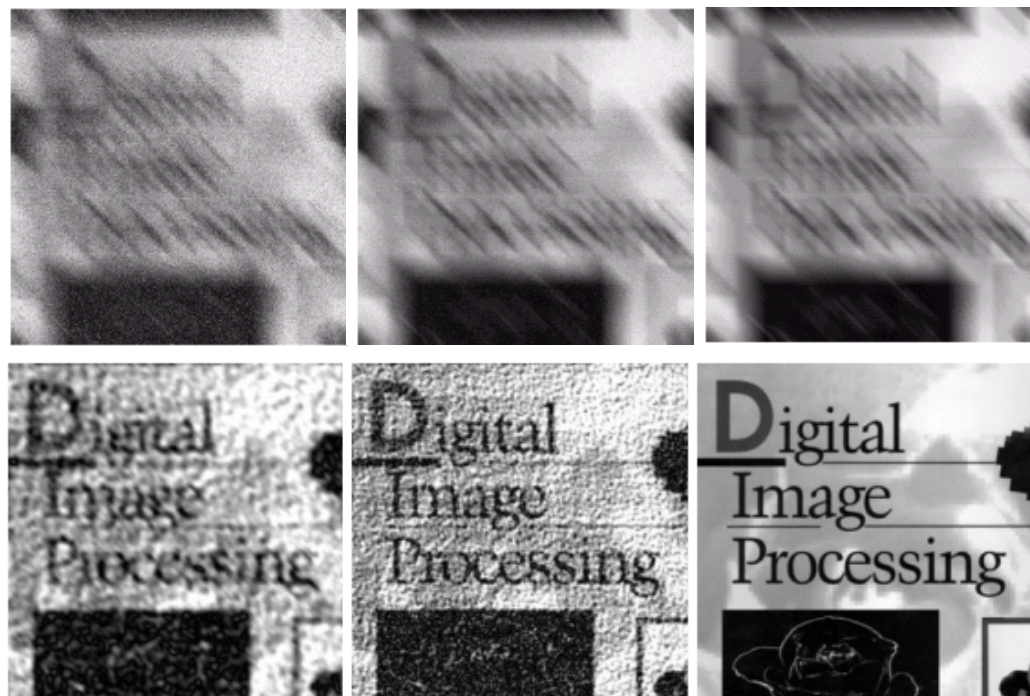


## 八、维纳滤波=>约束最小二乘方滤波

如何选取  $\gamma$

$$\hat{F}(u, v) = \left[ \frac{H^*(u, v)}{\|H(u, v)\|^2 + \gamma \|P(u, v)\|^2} \right] G(u, v)$$

方式一：交互式调整直至达到可接受的结果



采用交互方式选取参数对第一行图像进行约束最小二乘方滤波的结果



## 八、维纳滤波=>约束最小二乘方滤波

如何选取  $\gamma$

$$\hat{F}(u, v) = \left[ \frac{H^*(u, v)}{\|H(u, v)\|^2 + \gamma \|P(u, v)\|^2} \right] G(u, v)$$

方式二：迭代估计

定义残差向量  $\mathbf{r} = \mathbf{g} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}}$   $R(u, v) = G(u, v) - H(u, v)\hat{F}(u, v)$

残差向量是一个关于  $\gamma$  的函数。可证明  $\phi(\gamma) = \mathbf{r}^T \mathbf{r} = \|\mathbf{r}\|^2$  是  $\gamma$  的单调递增函数。  
调整  $\gamma$  , 使  $\|\mathbf{r}\|^2 = \|\boldsymbol{\eta}\|^2 \pm a$  , 其中  $a$  是一个精确度因子。

迭代步骤:

1. 指定  $\gamma$  的初始值;
2. 计算  $\|\mathbf{r}\|^2$  (对  $R(u, v)$  进行傅里叶反变换可得);
3. 若满足  $\|\mathbf{r}\|^2 = \|\boldsymbol{\eta}\|^2 \pm a$ , 则停止; 若  $\|\mathbf{r}\|^2 < \|\boldsymbol{\eta}\|^2 - a$  , 则增大  $\gamma$  ;  
若  $\|\mathbf{r}\|^2 > \|\boldsymbol{\eta}\|^2 + a$  , 则减小  $\gamma$  。使用  $\gamma$  的新值, 返回步骤2.

## 八、维纳滤波=>约束最小二乘方滤波

如何选取  $\gamma$

$$\hat{F}(u, v) = \left[ \frac{H^*(u, v)}{\|H(u, v)\|^2 + \gamma \|P(u, v)\|^2} \right] G(u, v)$$

方式二：迭代估计

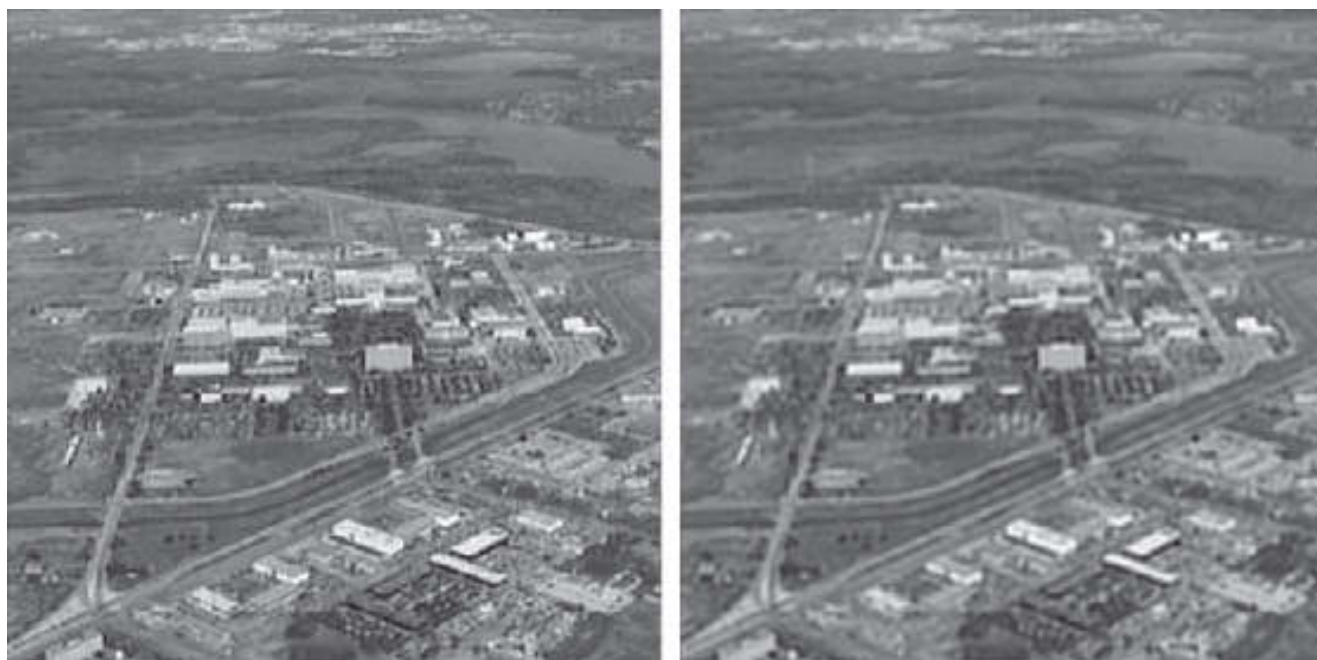
估计噪声的方差和均值，计算  $\|\eta\|^2$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\eta}^2 &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [\eta(x, y) - m_{\eta}]^2 \\ m_{\eta} &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \eta(x, y) \end{aligned} \right\} \|\eta\|^2 = MN[\sigma_{\eta}^2 + m_{\eta}^2]$$

结论：仅用噪声均值和方差，便能复原图像

## 八、维纳滤波=>约束最小二乘方滤波

$$\hat{F}(u, v) = \left[ \frac{H^*(u, v)}{\|H(u, v)\|^2 + \gamma \|P(u, v)\|^2} \right] G(u, v)$$



## 几何均值滤波

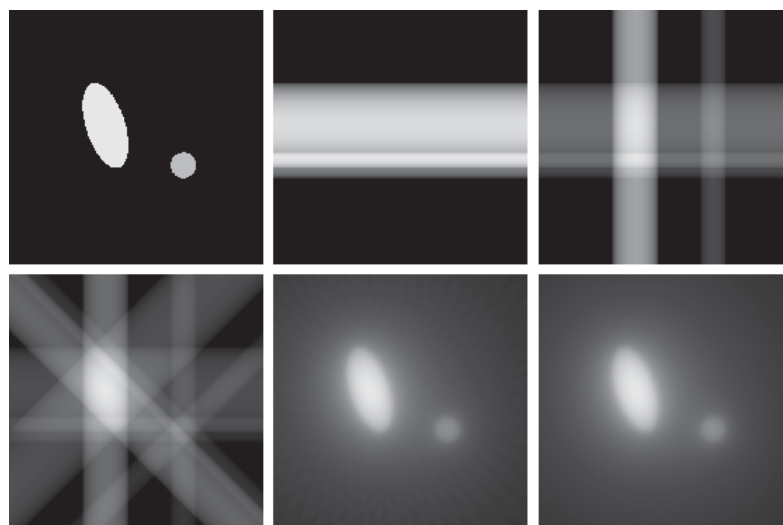
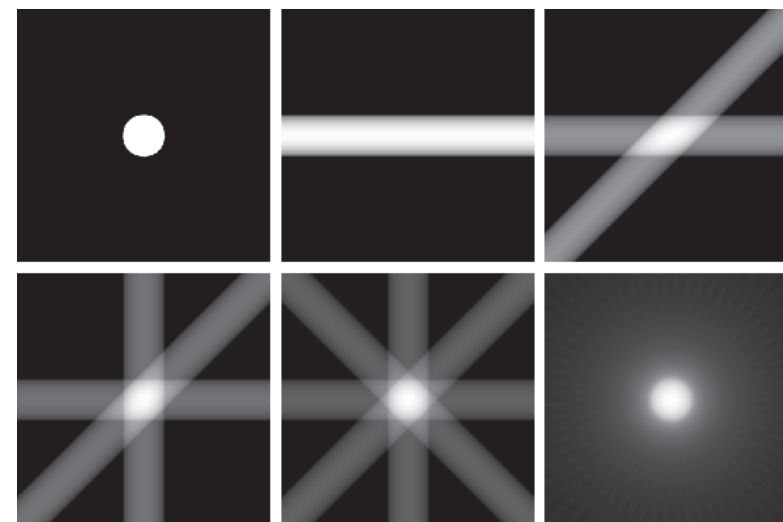
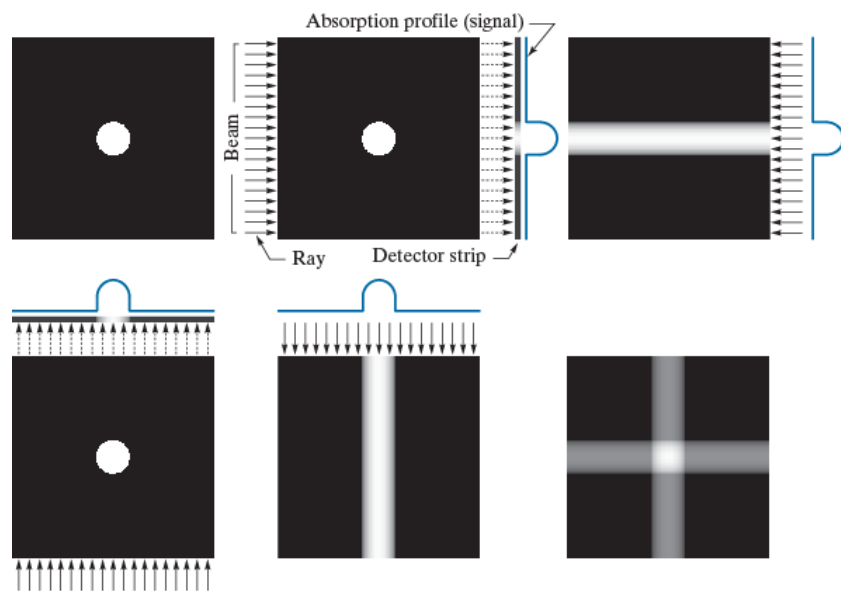
$$\hat{F}(u, v) = \left[ \frac{H^*(u, v)}{\|H(u, v)\|^2} \right]^\alpha \left[ \frac{H^*(u, v)}{\|H(u, v)\|^2 + \beta S_\eta(u, v)/S_f(u, v)} \right]^{1-\alpha} G(u, v)$$

$\alpha, \beta$  为正的实常数

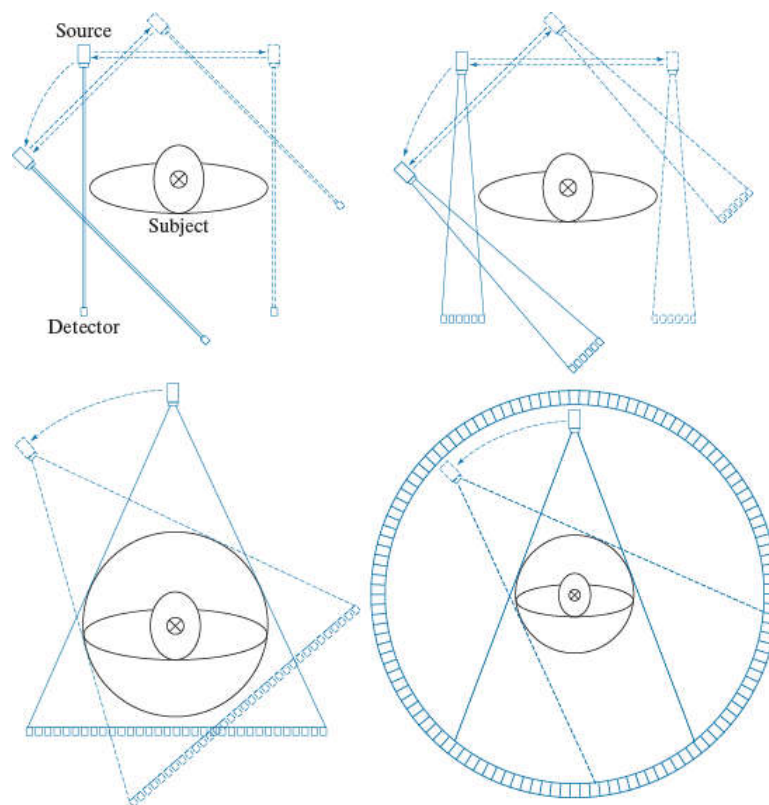
$\alpha = 1$  滤波器退化为逆滤波器

$\alpha = 0$  滤波器退化为参数维纳滤波器

# 投影重建



# 投影重建





**Thanks! 😊**

**Any Question?**