



数字图像处理

第五章 图像复原与重建



赵荣昌 (byrons.zhao@gmail.com)

中南大学计算机学院

本章内容

- 一、图像退化/复原背景、过程模型
- 二、噪声模型和复原（空间滤波和频率滤波）
- 三、线性空间不变和图像复原问题求解
- 四、逆滤波、维纳滤波、约束最小二乘方滤波、几何均值滤波
- 五、由投影重建图像

一、图像退化/复原模型

➤ 图像复原 Vs. 图像增强

目的：在某种意义上对图像进行改善，即改善图像的视觉效果，但两者使用的方法和评价标准不同。

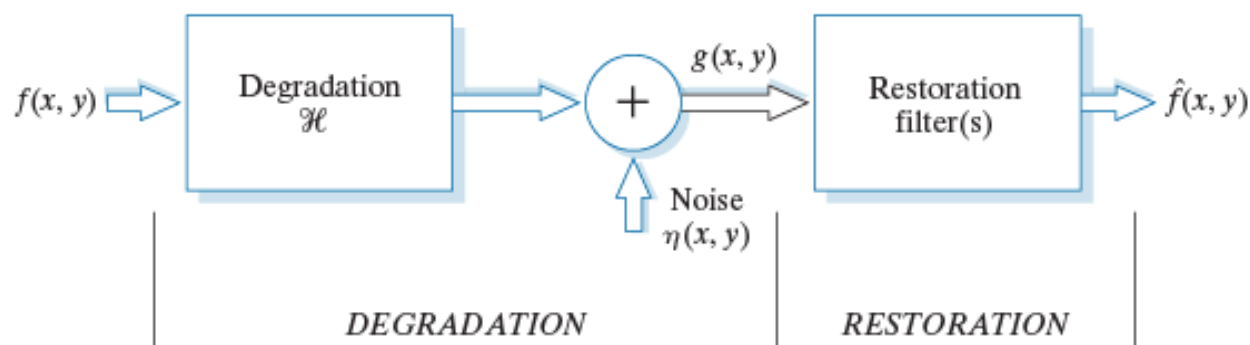
- **图像增强技术**：利用人的视觉系统特性，取得**较好的视觉效果**，无需考虑图像退化的真实物理过程，增强后的图像也不一定要逼近原始图像；
- **图像复原技术**：针对图像退化的原因设法进行补偿，需要对图像的退化过程有一定的**先验知识**，利用图像退化的逆过程去**恢复图像**，使复原后的图像尽可能地接近原图像。

找到退化原因，并建模退化模型

一、图像退化/复原模型

➤ 图像退化/复原过程的模型




- 退化过程：一个退化函数 \mathcal{H} 和一个加性噪声项 η ，对一幅输入图像 $f(x, y)$ 进行处理，产生一幅退化图像 $g(x, y)$ 。
- 图像复原：给定退化图像 $g(x, y)$ 和关于退化函数 \mathcal{H} 以及外加噪声项 $\eta(x, y)$ 的一些知识后，获得关于原始图像的一个估计 $\hat{f}(x, y)$ 。



一、图像退化/复原模型

➤ 图像退化的基本原理

$$\boxed{g(x, y)} = \boxed{(h * f)(x, y)} + \boxed{\eta(x, y)}$$

 退化后图像  退化模型  加性噪声

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(x, y)$$

有效地获得退化系统 h 和噪声 $\eta(x, y)$ 的模型, 是成功进行图像复原的关键。

一、图像退化/复原背景、过程模型

➤ 线性系统

➤ 系统：



➤ 线性系统：对于某特定系统，有

$$x_1(t) \xrightarrow{H} y_1(t)$$

$$x_2(t) \xrightarrow{H} y_2(t)$$

该系统是线性的当且仅当对于任意 α 和 β ，下式成立：

$$\alpha y_1(t) + \beta y_2(t) = H[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)]$$

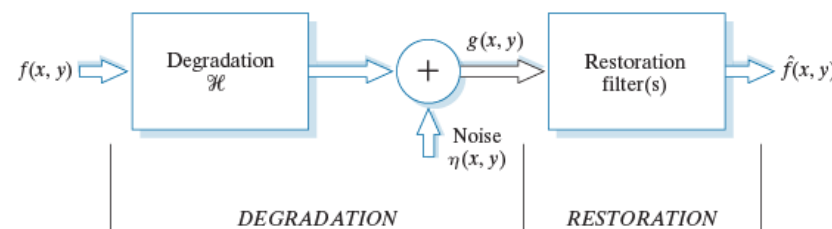
一、图像退化/复原背景、过程模型

➤ 图像退化/复原过程的模型

- 如果系统 \mathcal{H} 是一个线性、位置不变的过程，那么退化图像可由下式给出：

$$g(x, y) = h(x, y) \star f(x, y) + \eta(x, y)$$

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v)$$



- 如果不考虑噪声，假定输入-输出关系为 $g(x, y) = h[f(x, y)]$ ，如果

$g(x + a, y + b) = h[f(x + a, y + b)]$ ，则退化函数是位置不变的(即图像中的所有像素点具有相同的退化函数，与像素点的位置无关)。

- 如果能够去除噪声，然后取 h 退化函数的逆操作，那么就可以根据退化函数 $g(x, y)$ 还原原始图像。

一、图像退化/复原背景、过程模型

➤ 图像复原方法的分类

- 估计方法：缺乏图像先验知识，对退化过程建立模型进行描述，进而寻找一种去除或消弱其影响的成果；
- 拟合方法：对原始图像有足够的先验知识，对原始图像建立一个数学模型，并根据它对退化图像进行拟合，能够获得更好的复原效果。

➤ 优缺点比较

- 第一种方法不需要先验知识，但速度较慢，效果也不如第二种好；
- 第二种方法只要有正确的模型，就可在相对较短的时间内得到较好的效果，缺点是建立准确的模型通常是十分困难的，通常要依靠先验信息。

二、噪声模型

➤ 什么是噪声？

➤ 用户不感兴趣的，对信息具有干扰特性的；在图像获取或传输过程中出现；

➤ 加性噪声和乘性噪声；

➤ 假设图像的像素值为 $f(x, y)$ ，噪声信号为 $\eta(x, y)$ ，如果混合叠加信号为

$$g(x, y) = f(x, y) + \eta(x, y)$$

的形式，则这种噪声称为加性噪声。如果混合叠加噪声信号为：

$$g(x, y) = f(x, y)[1 + \eta(x, y)]$$

的形式，则这种噪声称为乘性噪声。

二、噪声模型

➤ 什么是噪声？

➤ 空间特性

- 图像传输过程中引入的信道噪声、摄像机扫描噪声等与图像信号无关，是加性噪声。常见的加性噪声按照概率密度函数特征，可分为：高斯噪声、瑞丽噪声、伽马噪声、指数分布噪声、均匀分布噪声、脉冲噪声等；
- 光照变化引起的噪声、电视扫描光栅中的相干噪声等，与图像信号有关，往往随着图像信号的变化而变化，是乘性噪声；

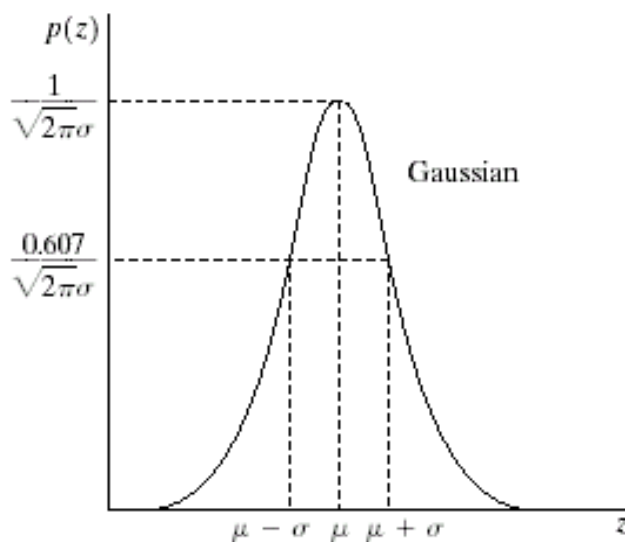
➤ 频率特性

- 傅里叶谱为常量时，白噪声

二、噪声模型

➤ 一些重要的噪声概率密度函数——高斯噪声

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(z-\mu)^2/2\sigma^2}$$

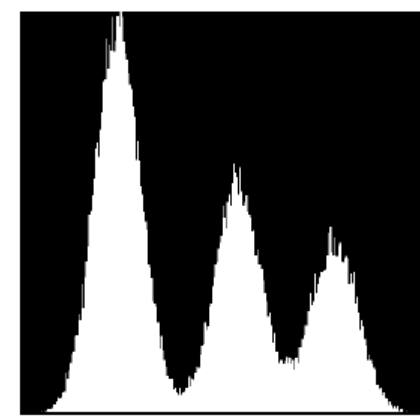
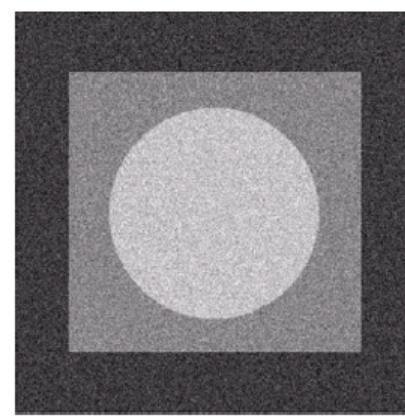
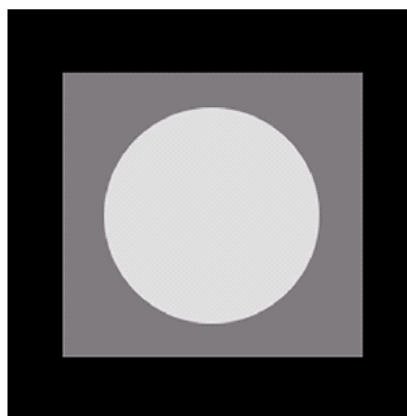
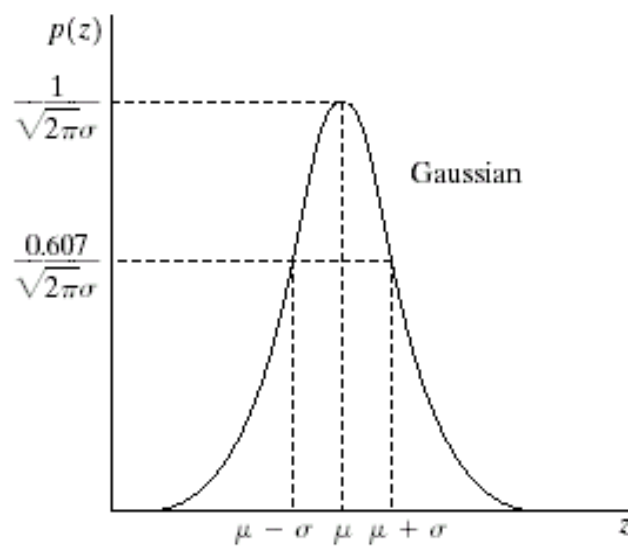


- 当 z 服从上式分布时，其值有70%落在 $[(\mu - \sigma), (\mu + \sigma)]$ 有95%落在 $[(\mu - 2\sigma), (\mu + 2\sigma)]$ 范围内。
- 高斯噪声的产生源于由电子随机热运动引起的电子电路噪声和由低照明度或高温带来的传感器噪声。

二、噪声模型

➤ 一些重要的噪声概率密度函数——高斯噪声

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(z-\mu)^2/2\sigma^2}$$



二、噪声模型

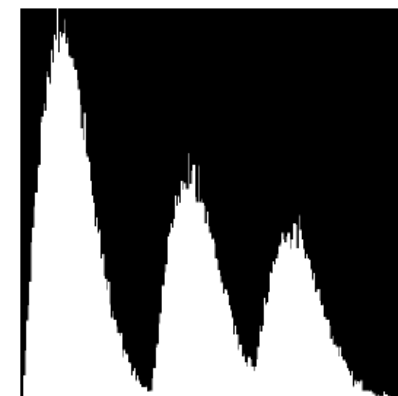
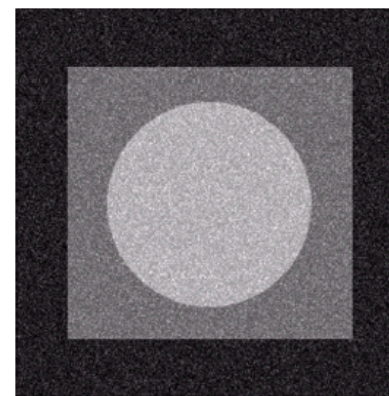
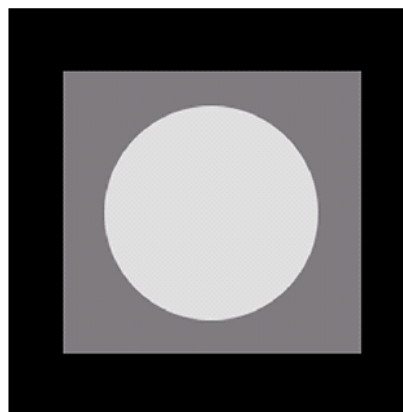
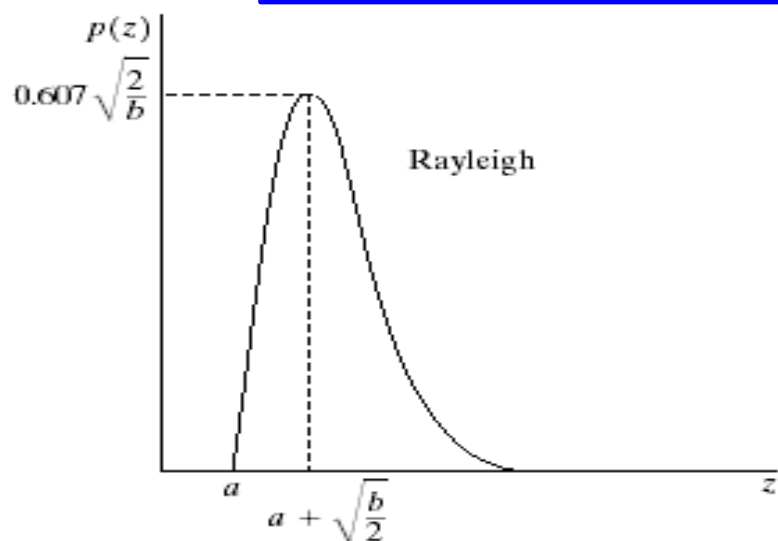
➤ 一些重要的噪声概率密度函数——瑞利噪声

$$p(z) = \begin{cases} \frac{2}{b}(z - a)e^{-(z-a)^2/b} & z \geq a \\ 0 & z < a \end{cases}$$

其中 $a > 0$, b 为正整数

$$\bar{z} = a + \sqrt{\pi b/4}$$

$$\sigma^2 = \frac{b(4-\pi)}{4}$$



二、噪声模型

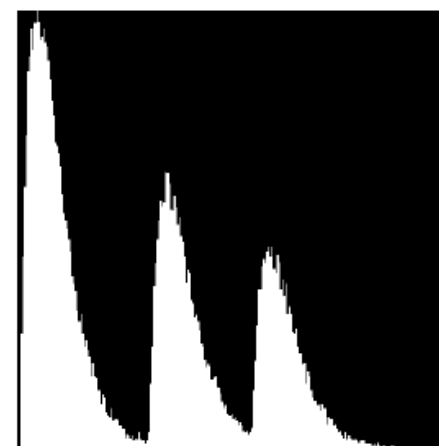
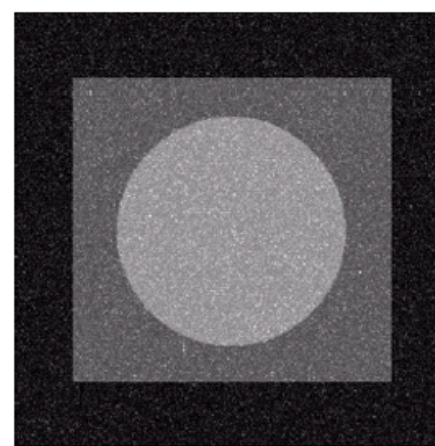
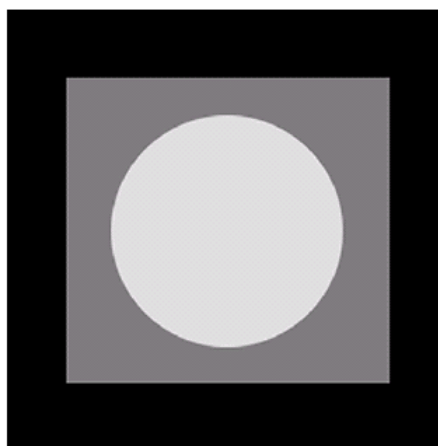
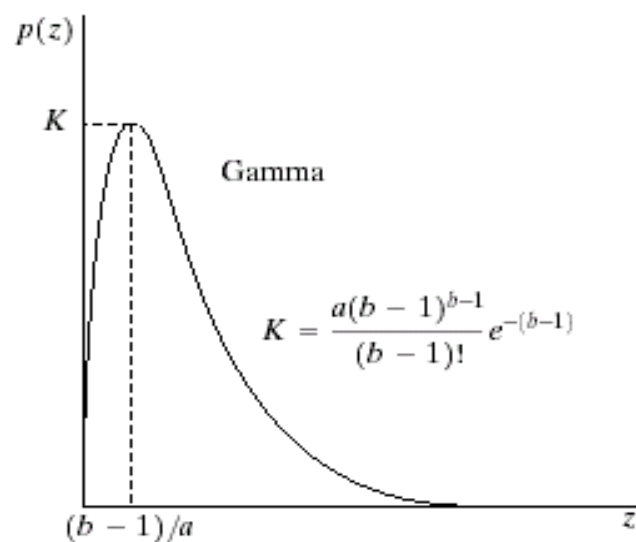
➤ 一些重要的噪声概率密度函数——爱尔兰（伽马）噪声

$$p(z) = \begin{cases} \frac{a^b z^{b-1}}{(b-1)!} e^{-az} & z \geq a \\ 0 & z < a \end{cases}$$

其中 $a > 0$

$$\bar{z} = \frac{b}{a}$$

$$\sigma^2 = \frac{b}{a^2}$$



二、噪声模型

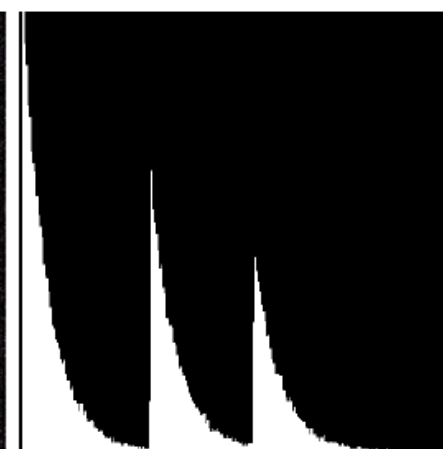
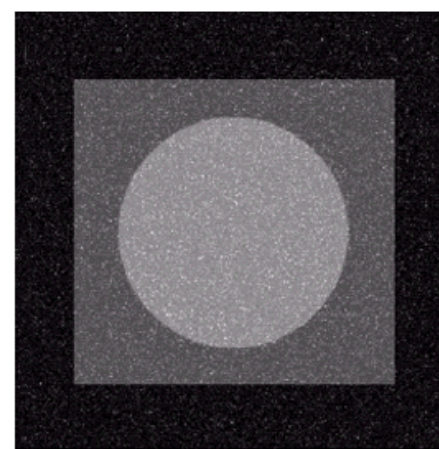
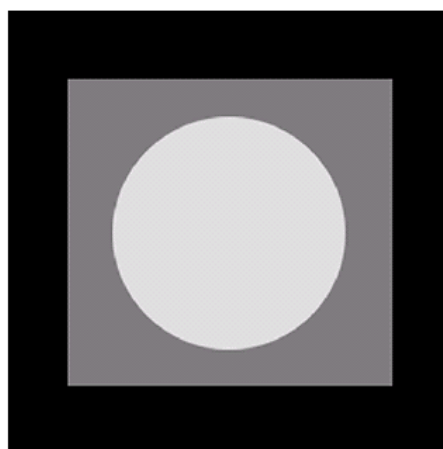
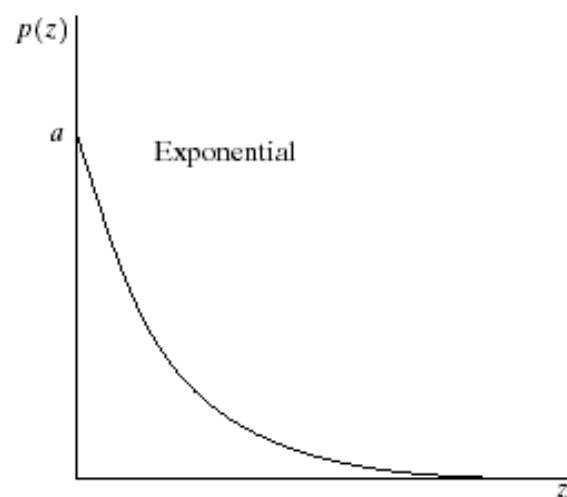
➤ 一些重要的噪声概率密度函数——指数噪声

$$p(z) = \begin{cases} ae^{-az} & z \geq a \\ 0 & z < a \end{cases}$$

其中 $a > 0$

$$\bar{z} = \frac{1}{a}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{a^2}$$



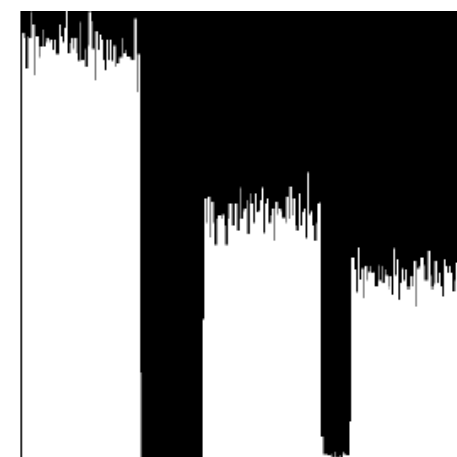
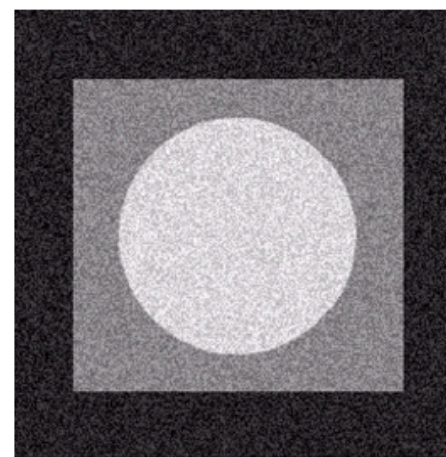
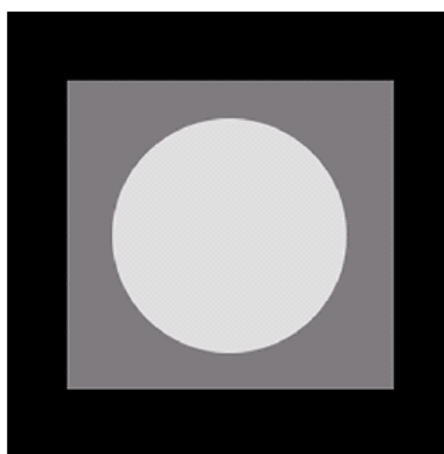
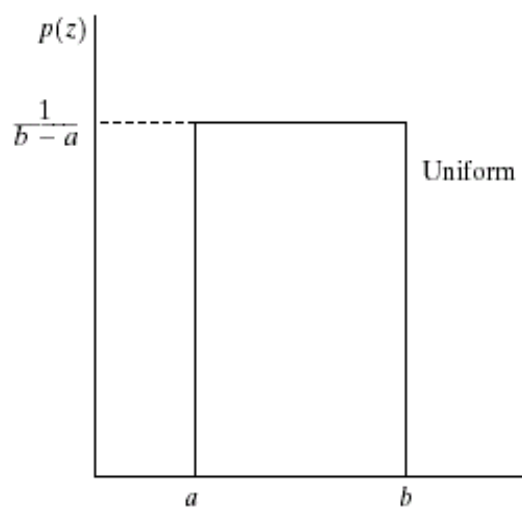
二、噪声模型

➤ 一些重要的噪声概率密度函数——均匀噪声

$$p(z) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq z \leq b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\bar{z} = \frac{a+b}{2}$$

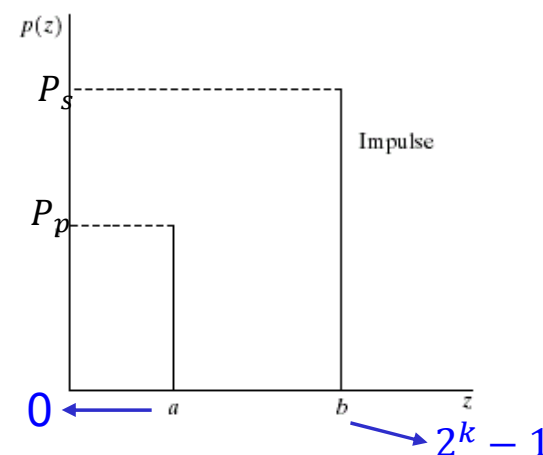
$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$



二、噪声模型

➤ 一些重要的噪声概率密度函数——脉冲（椒盐）噪声

$$p(z) = \begin{cases} P_s & z = 2^k - 1 \\ P_p & z = 0 \\ 1 - (P_s + P_p) & \text{otherwise} \end{cases}$$

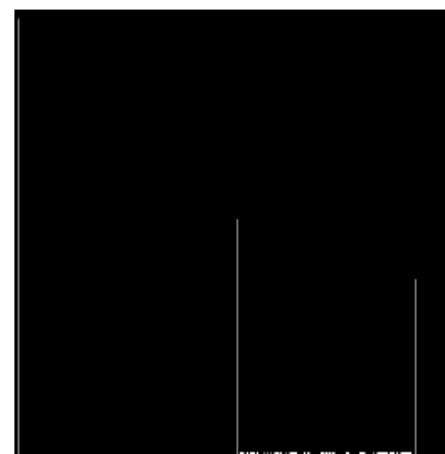
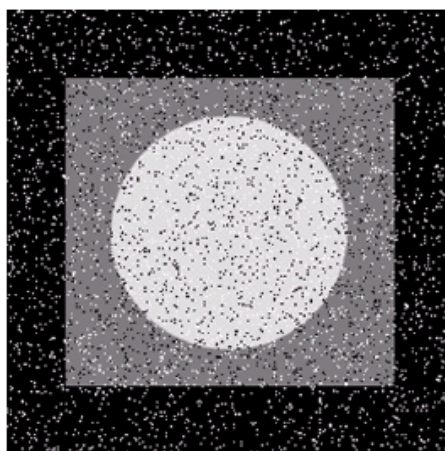
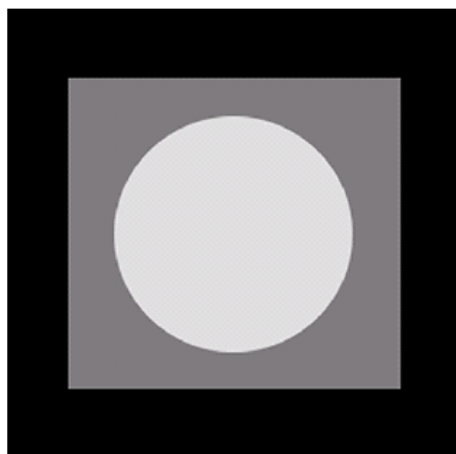
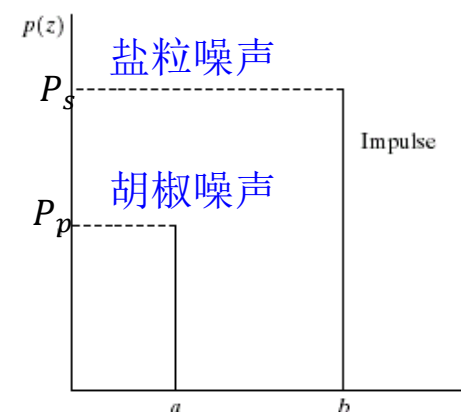


- 如果 $b > a$ 则灰度级 b 在图像中将显示为一个亮点，灰度级 a 在图像中将显示为一个暗点；
- 如果 P_s 或 P_p 为零，则称为单极脉冲；
- 如果均不为零，尤其是它们近似相等时，则脉冲声值将类似于在图像上随机分布的胡椒和盐粉微粒。所以双极脉冲又称椒盐脉冲/散粒脉冲/尖峰噪声。

二、噪声模型

➤ 一些重要的噪声概率密度函数——脉冲（椒盐）噪声

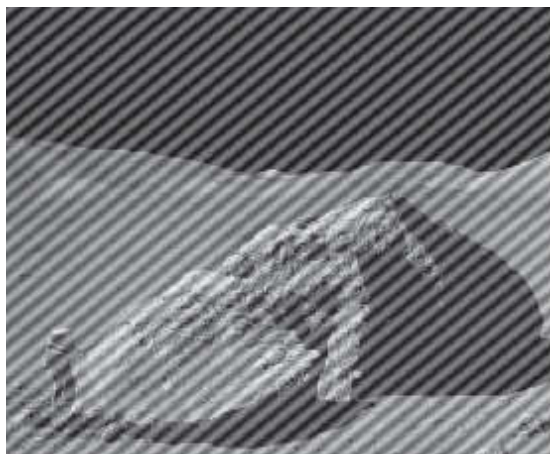
$$p(z) = \begin{cases} P_s & z = a \\ P_p & z = b \\ 1 - (P_s + P_p) & \text{otherwise} \end{cases}$$



二、噪声模型

➤ 一些重要的噪声概率密度函数——周期噪声

- 在图像获取时电力或机电干扰中产生;
- 周期噪声可以通过频率域滤波显著减少。



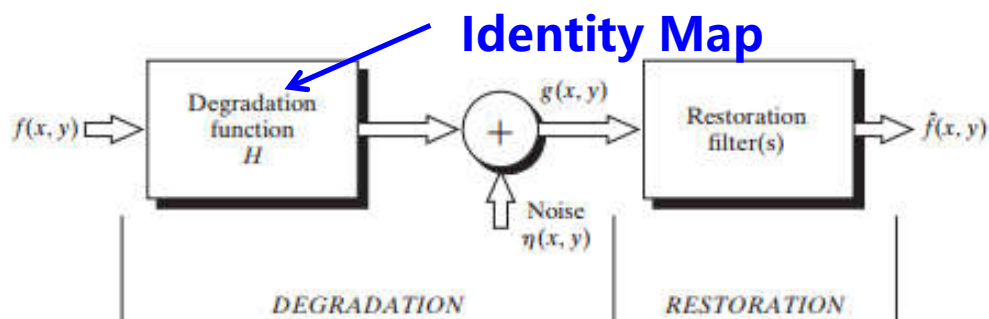
正弦噪声污染的图像



傅里叶谱 (共轭冲击)

三、只存在噪声的复原——空间滤波

➤ 只存在噪声的系统



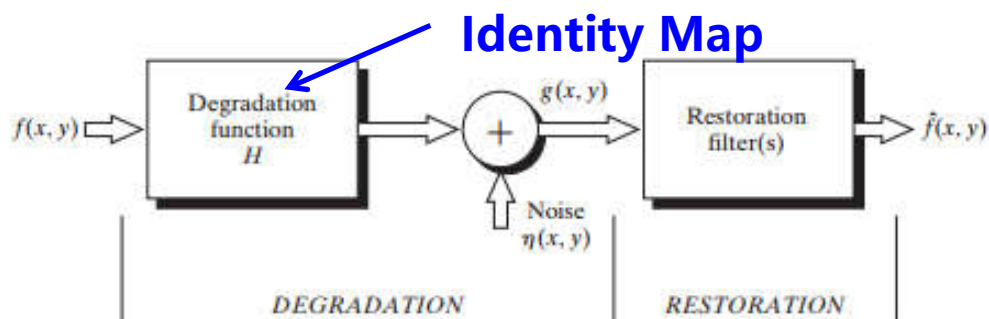
$$g(x, y) = f(x, y) + \eta(x, y)$$

$$G(u, v) = F(u, v) + N(u, v)$$

- 考虑加性噪声
- 对于周期噪声 $G(u, v) - N(u, v)$
- 空间滤波方法来滤除噪声 图像复原=图像增强

三、只存在噪声的复原——空间滤波

➤ 针对加性噪声的空间滤波



$$g(x, y) = f(x, y) + \eta(x, y)$$

$$G(u, v) = F(u, v) + N(u, v)$$

- **均值滤波器**：算术均值滤波器、几何均值滤波器、谐波均值滤波器、逆谐波均值滤波器
- **统计排序滤波器**：中值滤波器、最大值和最小值滤波器、中点滤波器、修正的阿尔法均值滤波器
- **自适应滤波器**：自适应局部降低噪声滤波器、自适应中值滤波器

三、只存在噪声的复原——空间滤波

➤ 针对加性噪声的空间滤波：均值滤波

□ 算术均值滤波器

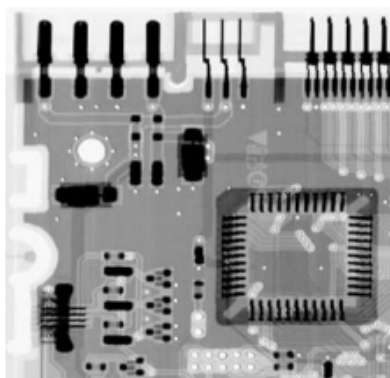
$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{mn} \sum_{(r, c) \in S_{xy}} g(r, c)$$

平滑局部变化，降低噪声，同时模糊了图像

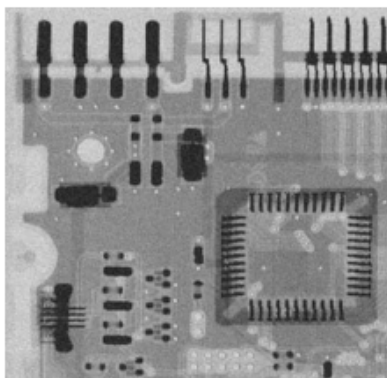
□ 几何均值滤波器

$$\hat{f}(x, y) = \left[\prod_{(r, c) \in S_{xy}} g(r, c) \right]^{\frac{1}{mn}}$$

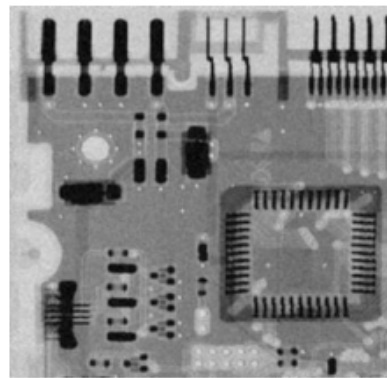
降噪与算术均值滤波器相当，但细节丢失更少



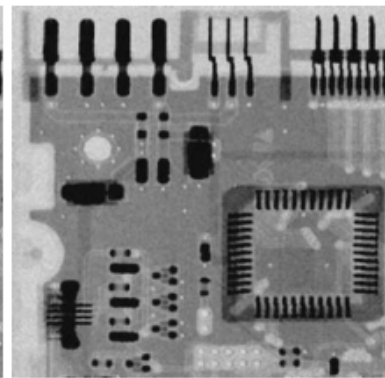
电路板X射线图像



高斯噪声污染的图像



3×3算术均值滤波



3×3的几何均值滤波

算术均值滤波与几何均值滤波更适合处理高斯噪声和均匀随机噪声。

三、只存在噪声的复原——空间滤波

➤ 针对加性噪声的空间滤波：均值滤波

□ 谐波均值滤波器

$$\hat{f}(x, y) = \frac{mn}{\sum_{(r,c) \in S_{xy}} \frac{1}{g(r, c)}}$$

适于处理盐粒噪声和类似于高斯噪声的其他噪声，不适合处理胡椒噪声

□ 反谐波均值滤波器

$$\hat{f}(x, y) = \frac{\sum_{(r,c) \in S_{xy}} g(r, c)^{Q+1}}{\sum_{(r,c) \in S_{xy}} g(r, c)^Q}$$

$Q = 0$ 时，为算术均值滤波器；

$Q = -1$ 时，为谐波均值滤波器；

Q 为正，适于处理胡椒噪声；

Q 为负，适于处理盐粒噪声。

三、只存在噪声的复原——空间滤波

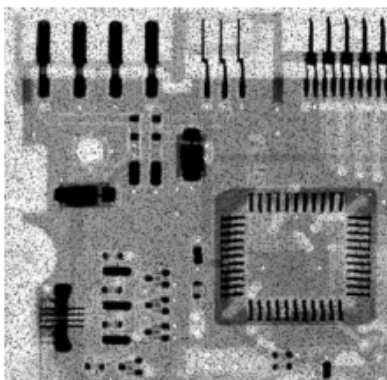
➤ 针对加性噪声的空间滤波：均值滤波

□ 谐波均值滤波器

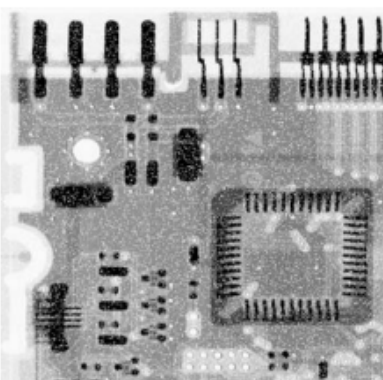
$$\hat{f}(x, y) = \frac{mn}{\sum_{(r,c) \in S_{xy}} \frac{1}{g(r, c)}}$$

□ 逆谐波均值滤波器

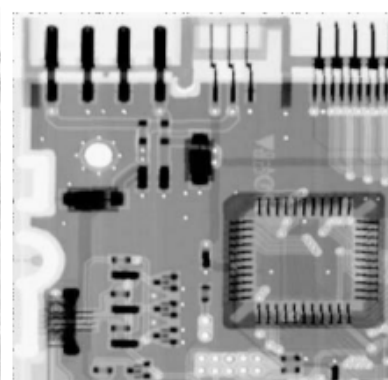
$$\hat{f}(x, y) = \frac{\sum_{(r,c) \in S_{xy}} g(r, c)^{Q+1}}{\sum_{(r,c) \in S_{xy}} g(r, c)^Q}$$



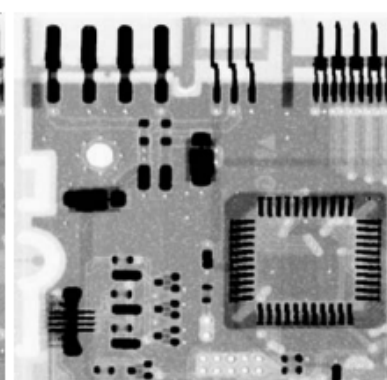
胡椒噪声 (0.1)



盐粒噪声 (0.1)



3×3、1.5的逆谐波滤波



3×3、-1.5的逆谐波滤波

逆谐波噪声更适合于处理脉冲噪声，但必须知道噪声时暗噪声还是亮噪声，以便于为Q选择正确的符号！

三、只存在噪声的复原——空间滤波

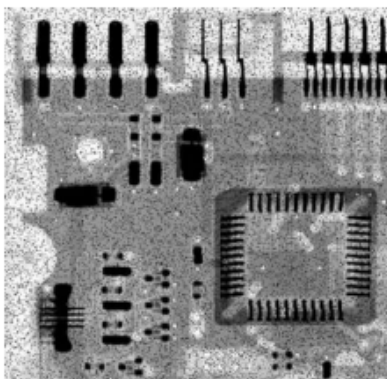
➤ 针对加性噪声的空间滤波：均值滤波

□ 谐波均值滤波器

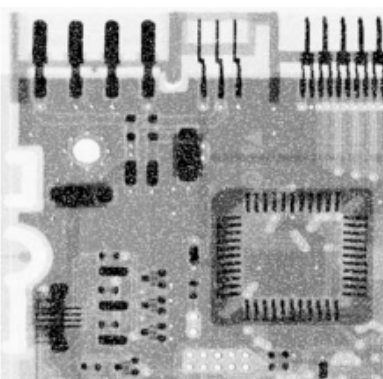
$$\hat{f}(x, y) = \frac{mn}{\sum_{(r,c) \in S_{xy}} \frac{1}{g(r, c)}}$$

□ 逆谐波均值滤波器

$$\hat{f}(x, y) = \frac{\sum_{(r,c) \in S_{xy}} g(r, c)^{Q+1}}{\sum_{(r,c) \in S_{xy}} g(r, c)^Q}$$



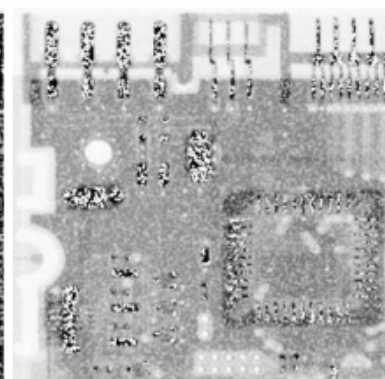
胡椒噪声 (0.1)



盐粒噪声 (0.1)



3×3、-1.5的逆谐波滤波



3×3、1.5的逆谐波滤波

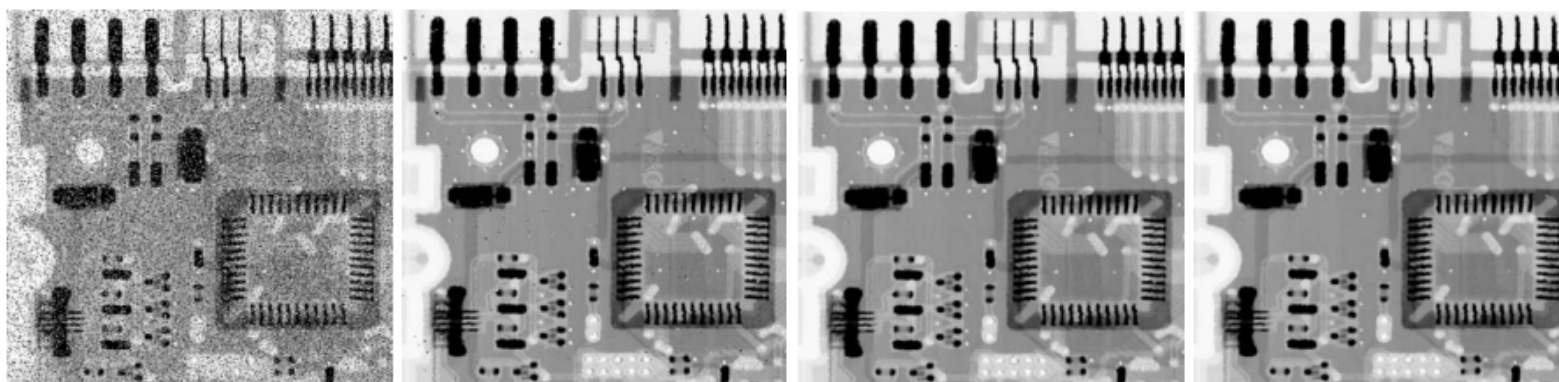
三、只存在噪声的复原——空间滤波

➤ 针对加性噪声的空间滤波：统计排序滤波器

□ 中值滤波器：单极/双极脉冲噪声

$$\hat{f}(x, y) = \underset{(r, c) \in S_{xy}}{\text{median}} \{g(r, c)\}$$

副作用：会模糊图像



胡椒噪声 (0.1)

3×3中值滤波一次

3×3中值滤波两次

3×3中值滤波三次

盐粒噪声 (0.1)

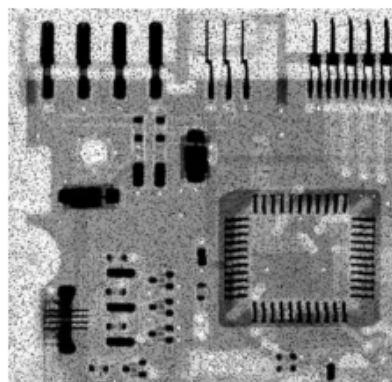
三、只存在噪声的复原——空间滤波

➤ 针对加性噪声的空间滤波：统计排序滤波器

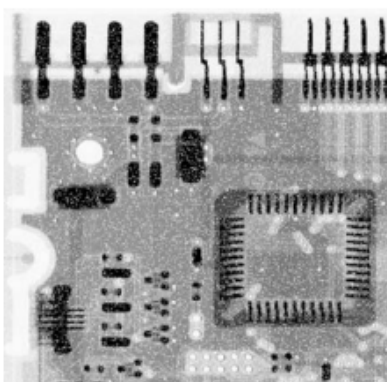
□ 最大值和最小值滤波器

$$\hat{f}(x, y) = \max_{(r, c) \in S_{xy}} \{g(r, c)\}$$

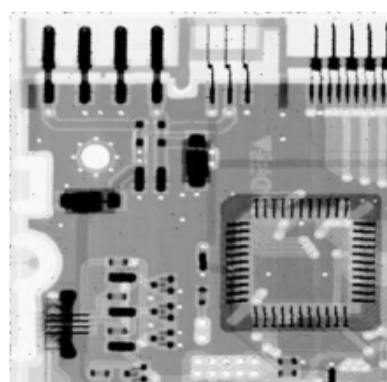
$$\hat{f}(x, y) = \min_{(r, c) \in S_{xy}} \{g(r, c)\}$$



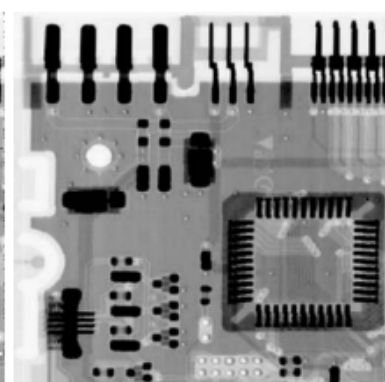
胡椒噪声 (0.1)



盐粒噪声 (0.1)



3×3最大值滤波一次



3×3最小值滤波一次

三、只存在噪声的复原——空间滤波

➤ 针对加性噪声的空间滤波：统计排序滤波器

□ 中点滤波器

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{2} [\max_{(r,c) \in S_{xy}} \{g(r, c)\} + \min_{(r,c) \in S_{xy}} \{g(r, c)\}]$$

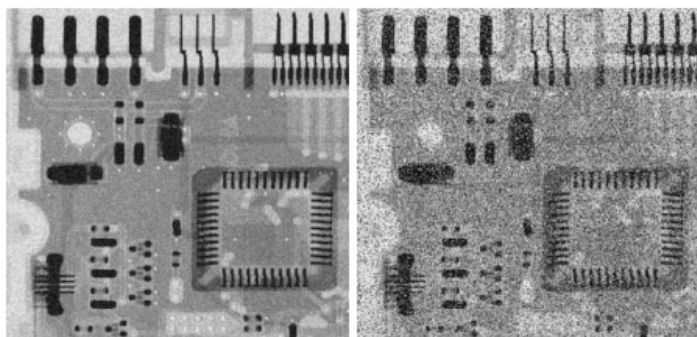
□ 修正的阿尔法均值滤波器

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{mn - d} \sum_{(r,c) \in S_{xy}} g_R(r, c)$$

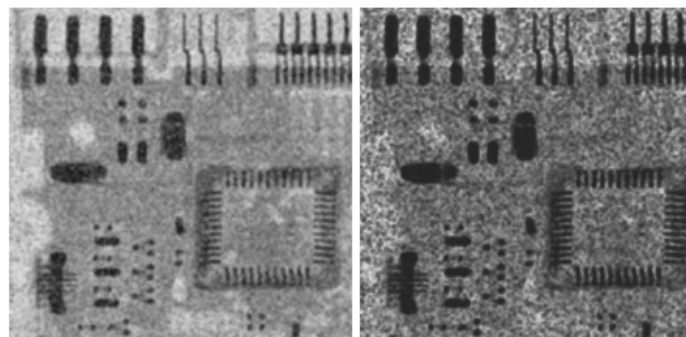
- $g_R(r, c)$: 邻域 S_{xy} 内去掉最低灰度值的 $d/2$ 和最高灰度值的 $d/2$ 后留下的 $mn - d$ 个像素。
- $d = 0$: 退化为算术均值滤波器;
- $d = mn - 1$: 中值滤波器

三、只存在噪声的复原——空间滤波

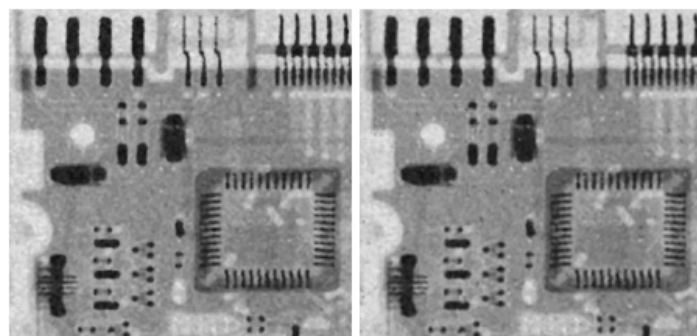
➤ 针对加性噪声的空间滤波：统计排序滤波器



(a)均匀噪声 (b)均匀噪声+椒盐噪声



(c)5×5算术均值滤波 (d)5×5几何均值滤波



(e)5×5中值滤波 (f)5×5且d=5的修正
阿尔法均值滤波

三、只存在噪声的复原——空间滤波

➤ 针对加性噪声的空间滤波：自适应滤波器

利用由 $m \times n$ 矩形窗口 S_{xy} 定义的区域内图像的统计特征进行处理，优于均值滤波器和统计排序滤波器。

- 随机变量最简单的统计度量是均值和方差，这些参数是自适应滤波器的基础。
- 均值给出了计算均值的区域中灰度平均值的度量；
- 方差给出了这个区域的平均对比度的度量。

$$\hat{f}(x, y) = g(x, y) - \frac{\sigma_{\eta}^2}{\sigma_{S_{xy}}^2} [g(x, y) - \bar{z}_{S_{xy}}]$$

噪声

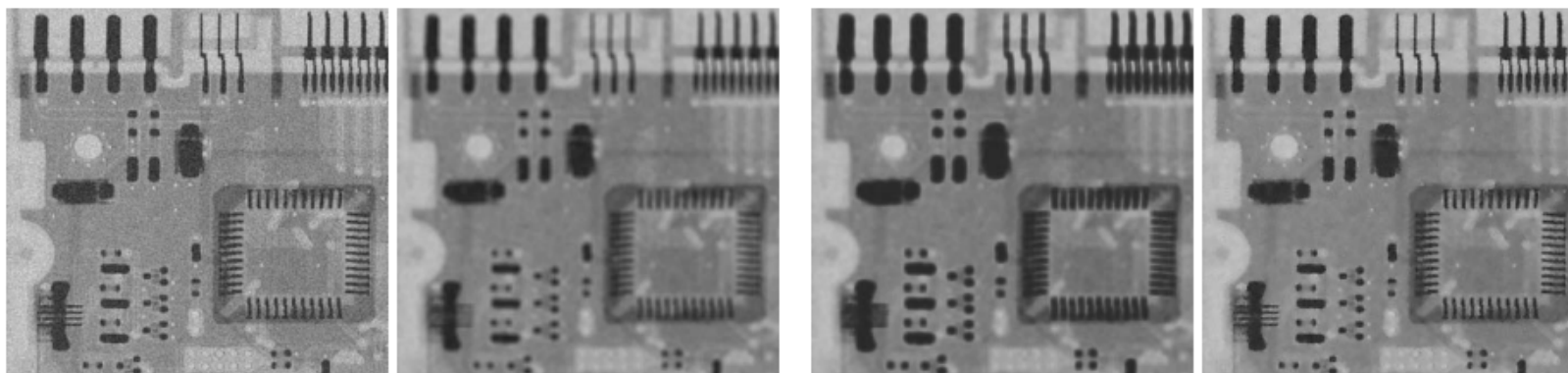
局部方差

局部均值

三、只存在噪声的复原——空间滤波

➤ 针对加性噪声的空间滤波：自适应滤波器

□ 自适应局部降低噪声滤波器



高斯噪声
(0, 1000)

算术均值滤波结果

几何均值滤波结果

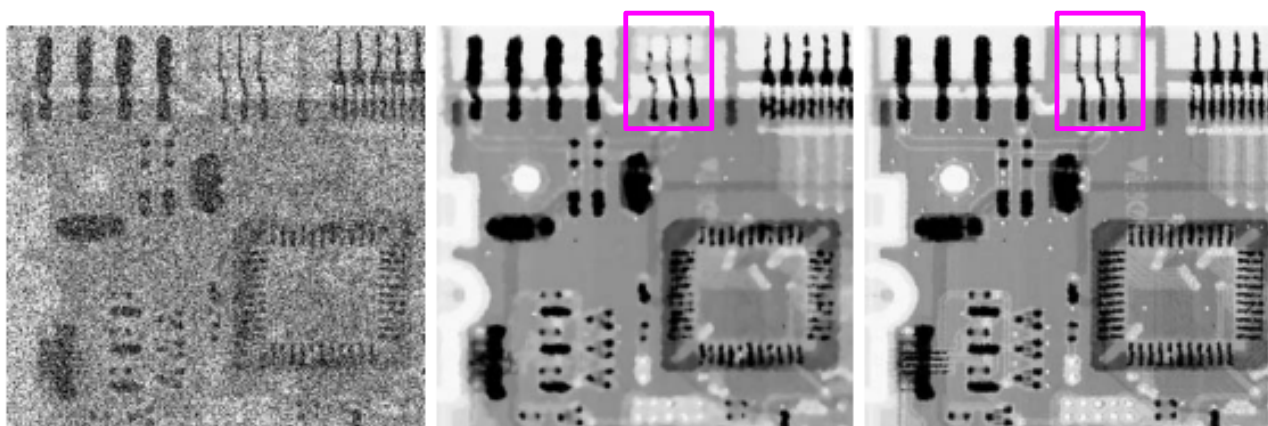
自适应降噪滤波结果

窗口大小均为7x7

三、只存在噪声的复原——空间滤波

➤ 针对加性噪声的空间滤波：自适应滤波器

▣ 自适应中值滤波器



(a) 被概率 $P_s=P_p=0.25$ 的椒盐噪声污染了的图像

(b) 7×7 中值滤波器的滤波效果(消除噪声的同时导致图像细节明显损失)

(c) $S_{\max}=7$ 的自适应中值滤波器的效果 (消除噪声的同时保持图像的细节)

Thanks! 😊

Any Question?