模糊计算（Fuzzy Computation ）

中南大学
陈白帆

模糊理论（Fuzzy Theory）

用数学的眼光看世界，可把我们身边的现象划分为

- 确定性现象：如水加温到100°C就沸腾
  靠经典数学去刻画
- 随机现象：如掷筛子，观看那一面向上
  靠概率统计去刻画
- 模糊现象：如“今天天气很热”，“他很年轻”，…
  准确？有多大的水分？靠模糊数学去刻画

现实世界中遇到的对象多是这种模糊的,不确定性的类型

模糊集合正反映了这类"亦此亦彼"的模糊性

模糊数学是研究模糊现象的定量处理方法

模糊理论（Fuzzy Theory）

1965年,L.A. Zadeh(扎德) 发表了文章《模糊集》(Fuzzy Sets, Information and Control, 8, 338-353)

75年之前,发展缓慢

80以后发展迅速

是模糊计算的数学基础

广泛应用在推理、控制、决策等领域

模糊数学分支
- 模糊代数,模糊拓扑,模糊逻辑,模糊分析
- 模糊概率,模糊图论,模糊优化等

涉及学科
- 分类,识别,评判,预测,控制,排序,选择

模糊产品
- 洗衣机,摄象机,照相机,电饭锅,空调,电梯…

集合的特征函数

定义 设 U是全集, 对每一$A \subseteq U$, 函数$\Psi_A:U \to \{0, 1\}$定义为

$$\psi_A(x) = \begin{cases} 0 & x \notin A \\ 1 & x \in A \end{cases}$$

称它是集合A的特征函数

- 例
  - 设$U = \{a, b, c, d\}$, $A = \{b, d\}$
  - $\Psi_A:U \to \{0, 1\}$

    $\Psi_A = \{\langle a,0\rangle, \langle b,1\rangle, \langle c,0\rangle, \langle d,1\rangle\}$

集合运算与特征函数

设A和B是全集U的任意两个子集, 对所有$x\in U$, 下列关系式成立

(a) $\forall x(\Psi_A(x)=0)\Leftrightarrow A=\Phi$

(b) $\forall x(\Psi_A(x)=1)\Leftrightarrow A=U$

(χ) $\forall x(\Psi_A(x)\leq\Psi_B(x))\Leftrightarrow A\subseteq B$

(δ) $\forall x(\Psi_A(x)=\Psi_B(x))\Leftrightarrow A=B$

(e) $\Psi_{\sim A}(x)=1-\Psi_{\mathrm{A}}(x)$

(f) $\Psi_{A\cap B}(x)=\min(\Psi_A(x),\Psi_B(x))$

(g) $\Psi_{A\cup B}(x)=\max(\Psi_A(x),\Psi_B(x))$

(h) $\Psi_{A-B}(x)=\Psi_{A\cap\sim B}(x)=\Psi_A(x)-\Psi_{A\cap B}(x)$

Fuzzy Sets

What are fuzzy sets?

- $A=\{x \mid x$ is a person whose age not more than 30$\}$
- $B=\{x \mid x$ is a young person$\}$

$$\mu_A : U \to \{0,1\}$$

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x \notin A \\ 1 & x \in A \end{cases}$$

$$\mu_B : U \to [0,1]$$

Fuzzy Sets

定义全集U的模糊子集A

$$A = \{(x, \underbrace{\mu_A}_{\substack{\textit{membership functions} \\ \textbf{(隶属函数)}}}(x)) \mid x \in U\},$$

- $\mu_A(x)$
  - x对A的隶属度
  - 取值范围——[0,1]
- 例：设有论域：U={ 1,2,3,4,5 }，用模糊集表示出模糊概念“大数”
- 设A表示“大数”的模糊集，μ_A为其隶属函数 则

有：A={ (1,0), (2,0.1), (3,0.5), (4,0.8), (5,1) }

Fuzzy Sets

模糊集合

- 在不同程度上具有某种特定性质的所有元素的总和

隶属函数： $\mu_F(x)$： $X \rightarrow [0,1]$

- 用于描述模糊集合，在[0，1]闭区间可以连续取值的特征函数。
- 其中：F为模糊集，X为论域，x为X论域中的元素。

$\mu_F(x_i)$称为x_i对F的隶属度

- $\mu_F(x_i)=1$,表示x_i完全属于F
- $\mu_F(x_i)=0$,表示x_i完全不属于F
- $0<\mu_F(x_i)<1$,表示x_i部分属于F

模糊集合的表示

X为离散域

$$F=\sum_{i=1}^{n}\mu_F(x)/x \qquad A=0/1+0.1/2+0.5/3+0.8/4+1/5$$

或

$$F=\{\mu_F(u_1),\mu_F(u_2),\Lambda,\mu_F(u_n)\}$$

$$A=\{0,0.1,0.5,0.8,1\}$$

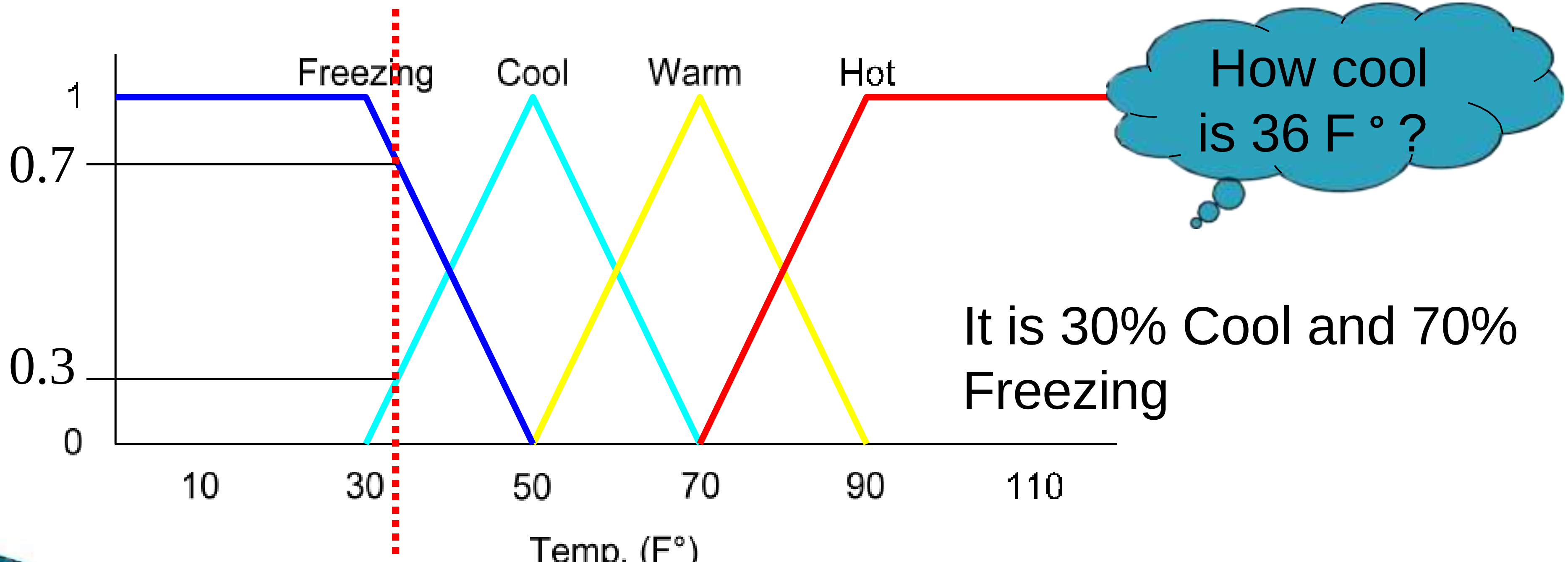
X为连续域

$$F=\int_X \mu_F(x)/x$$

Membership Functions

Temp: {Freezing, Cool, Warm, Hot}

Degree of Truth or "Membership"



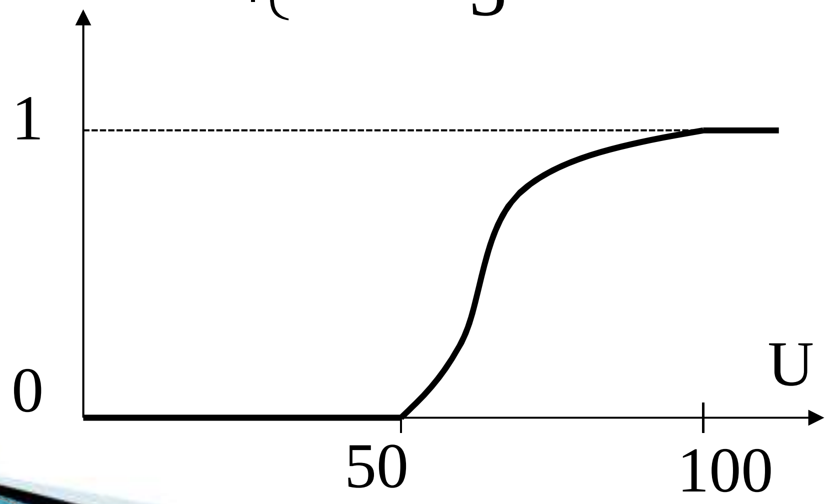
It is 30% Cool and 70% Freezing

论域U是连续的情况

模糊集可用实函数表示

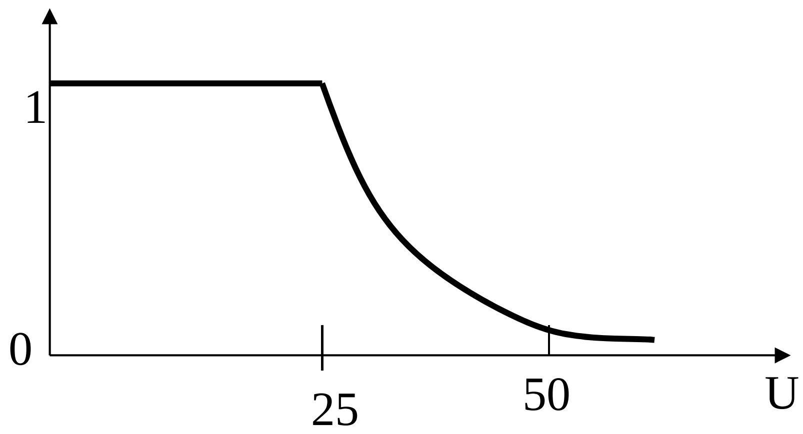
例：考虑年龄集U=[0,100]，A=“年老”，扎德给出的“年老” 集函数刻画

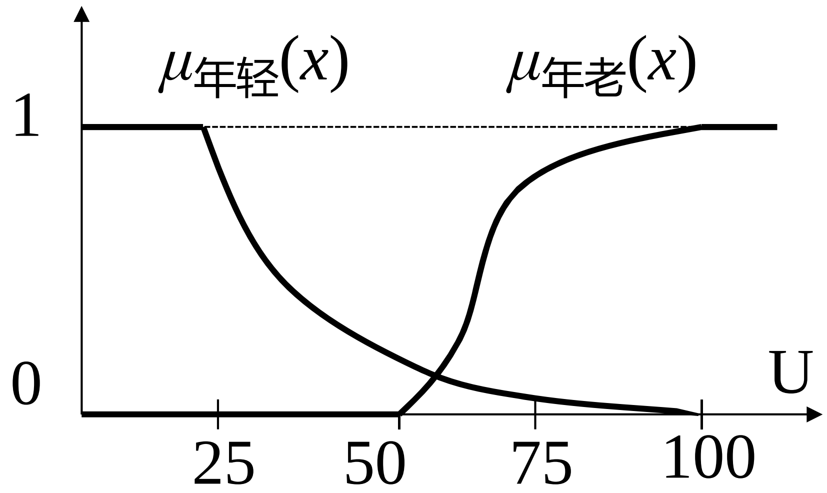
$$\mu_A(x)=\begin{cases}0 & 0\le x\le 50\\ \left(1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-1} & 50\le x\le 100\end{cases}$$



B=“年轻”，扎德给出它的隶属函数：

$$\mu_B(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 25\\ \left(1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^2\right)^{-1} & 25\le x\le 100\end{cases}$$





模糊集合的运算

模糊集和它的隶属函数一一对应，模糊集的运算也通过隶属函数的运算来刻划

- 空集：模糊集合的空集是指对所有元素x，它的隶属函数为0，记作，即

$$A=\phi \Leftrightarrow \mu_A(x)=0$$

- 等集：两个模糊集A、B，若对所有元素x，它们的隶属函数均相等，则A、B也相等，即

$$A=B \Leftrightarrow \mu_A(x)=\mu_B(x)$$

- 子集：在模糊集A、B中，所谓A是B的子集或A包含于B中，是指对所有的元素x，有$\mu_A(x)\le\mu_B(x)$，记作 $A\subseteq B$，即

$$A\subseteq B \Leftrightarrow \mu_A(x)\le\mu_B(x)$$

模糊集合的运算

并集：$C=A \cup B$

$$\mu_C(x)=\max\,[\mu_A(x), \mu_B(x)]，\ x\in U，\ 即$$

$$C=A\cup B \Leftrightarrow \mu_C(x)=\max\,[\mu_A(x), \mu_B(x)]=\mu_A(x)\vee\mu_B(x)$$

交集：$C=A \cap B$

$$\mu_C(x)=\min\,[\mu_{\mathrm{A}}(x), \mu_B(x)]，\ x\in U，\ 即$$

$$C=A\cap B \Leftrightarrow \mu_C(x)=\min\,[\mu_A(x), \mu_B(x)]=\mu_A(x)\wedge\mu_B(x)$$

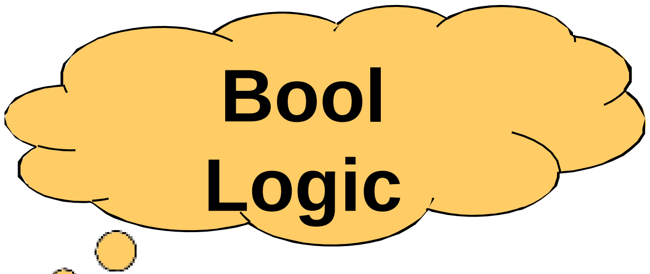
补集：B为A的补集 $\mu_B(x)=1-\mu_A(x)$，$x\in U$，即 $B=\bar{A} \Leftrightarrow \mu_B(x)=1-\mu_A(x)$

Fuzzy logic

Traditional representation of logic

Slow

Fast



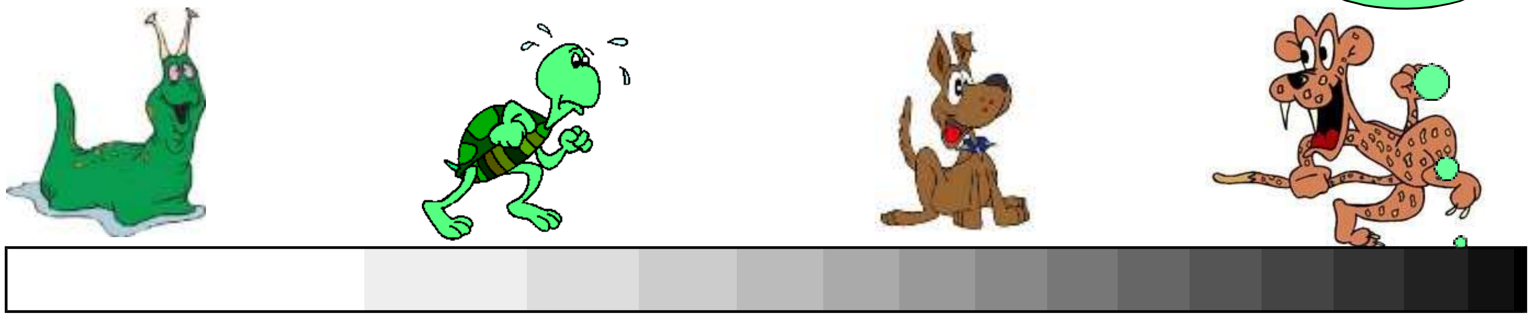
Speed = 0

Speed = 1

```
bool speed;
get the speed
if ( speed == 0) {
//  speed is slow}
else {    //  speed is fast}
```

Fuzzy logic

Multi-valued Logic



Slowest Slow Fast Fastest

```
float speed;
get the speed
if speed is slowest
{……}
else if speed is slow
{……}
else if speed is fast
{……}
else speed is fastest
{……}
```

模糊语言变量

(Fuzzy Linguistic Variables)

模糊语言变量

用人的语言（即词句）而不是用数字（或物理单位）表示变量的值

- 例：对室温的评价

  “合适”-----表示温度恰当

  “稍冷”-----表示温度有点低，微微感到凉

  “较冷”-----表示温度较低，已感到凉

  “很冷”-----表示温度很低，人已难以接受

模糊命题

二值逻辑中，一个命题不是真命题就是假命题，但在实际问题中，要作出这样的判断是比较困难的

- “他很年轻”，涵义明确，是一个命题，但很难判断其真假

模糊命题是清晰命题概念的推广，清晰命题的真假相当于普通集合中元素的特征函数，而模糊命题的真值在[0, 1]闭区间中取值，相当于隶属函数值

模糊命题的一般形式是：

$$A\text{：}\ e \text{ is } F \qquad (\text{或}e\ \text{是}F)$$

- 其中：e是模糊变量，F是模糊集合

模糊逻辑

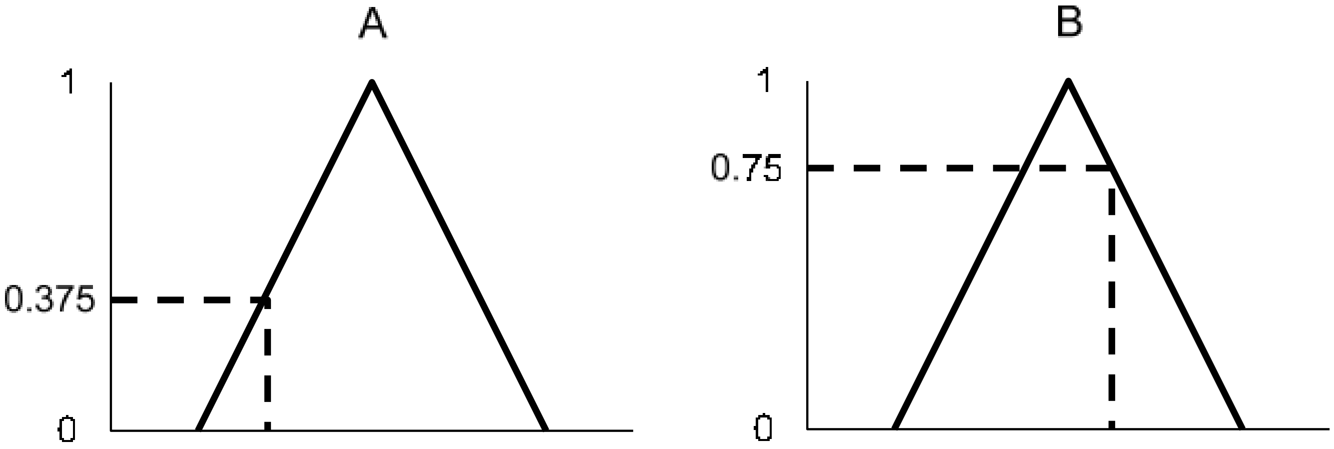
模糊命题的真值在[0，1]闭区间上连续取值，因此称研究模糊命题的逻辑为连续性逻辑，由于主要用它来研究模糊集的隶属函数，也称为模糊逻辑

设x为模糊命题A的真值，y为模糊命题B的真值，在连续逻辑中，逻辑运算规则为：

- 模糊析取：$x \vee y = \max(x, y)$
- 模糊合取：$x \wedge y = \min(x, y)$
- 模糊否定：$\sim x = 1 - x$
- 模糊条件：$x \to y = (1 - x + y)$
- 模糊双条件：$x \leftrightarrow y = (1 - x + y) \wedge (1 - y + x)$

Fuzzy Disjunction

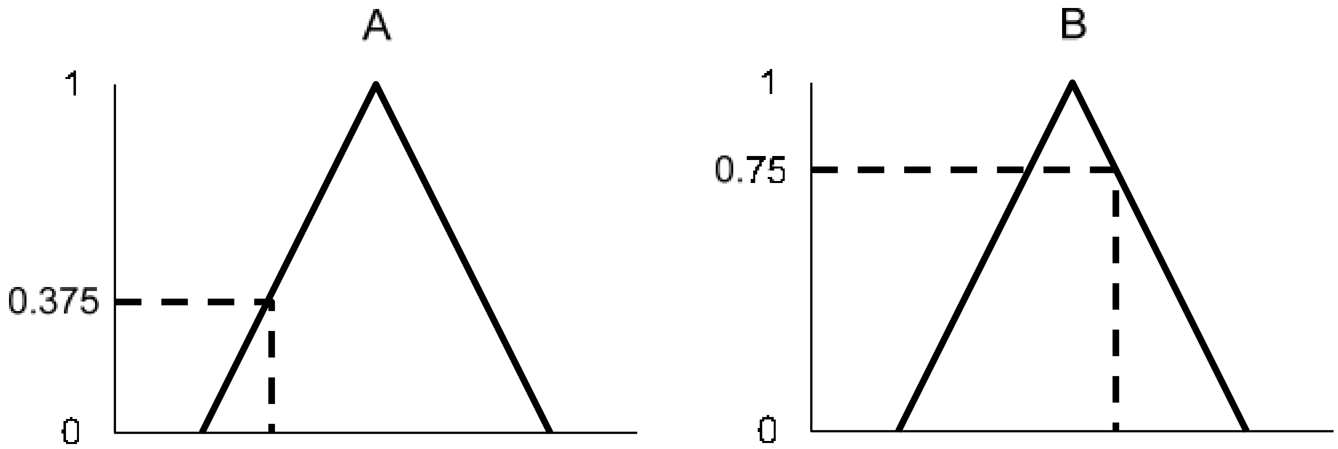
$A \vee B = C$



$(A \vee B = C) \;\Rightarrow\; (C = 0.75)$

Fuzzy Conjunction

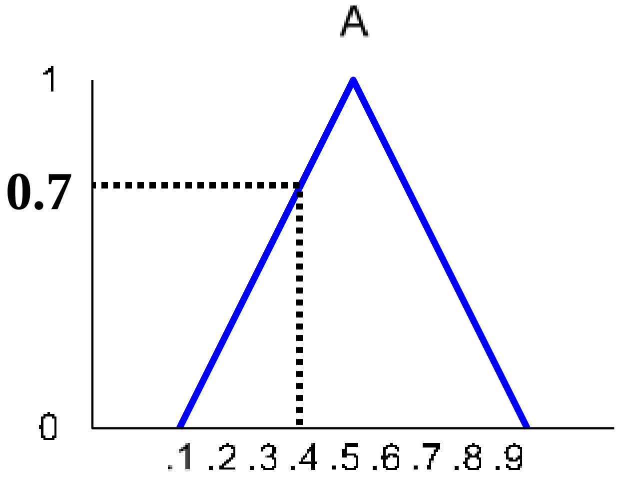
$A \wedge B = C$

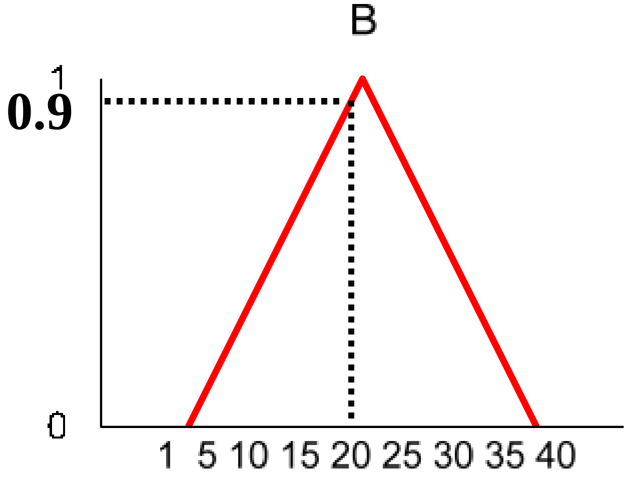


$$(A \wedge B = C) \Rightarrow (C = 0.375)$$

Example: Fuzzy Conjunction

Calculate A∧B given that A is .4 and B is 20





- Determine degrees of membership:
  - A = 0.7
  - B = 0.9
- Apply Fuzzy AND
  - A∧B = min(A, B) = 0.7

Fuzzy logic in control systems

Fuzzy Logic provides a more efficient and resourceful way to solve Control Systems

Fuzzy Control combines the use of fuzzy linguistic variables with fuzzy logic

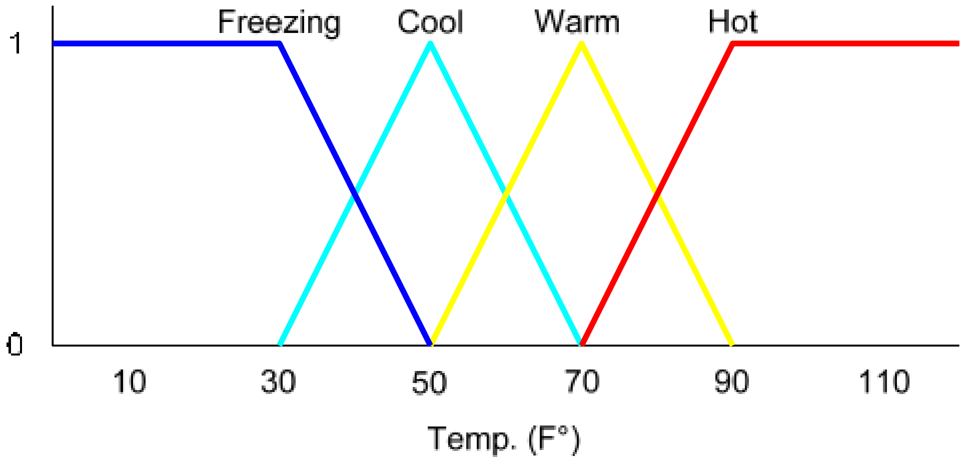
Examples

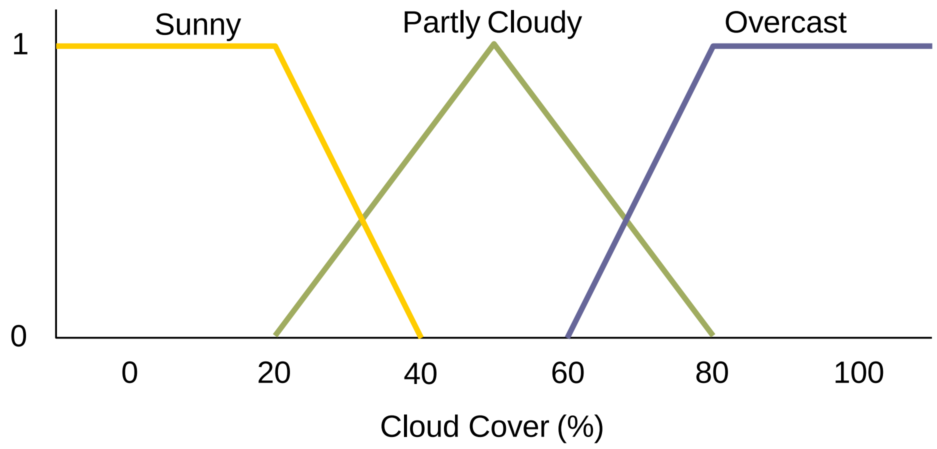
- Speed Control
  - How fast am I going to drive today?
  - It depends on the weather.
  - Disjunction of Conjunctions

Fuzzy logic in control – Speed Control

Inputs

- Temperature: {Freezing, Cool, Warm, Hot}
- Cover: {Sunny, Cloudy, Overcast}

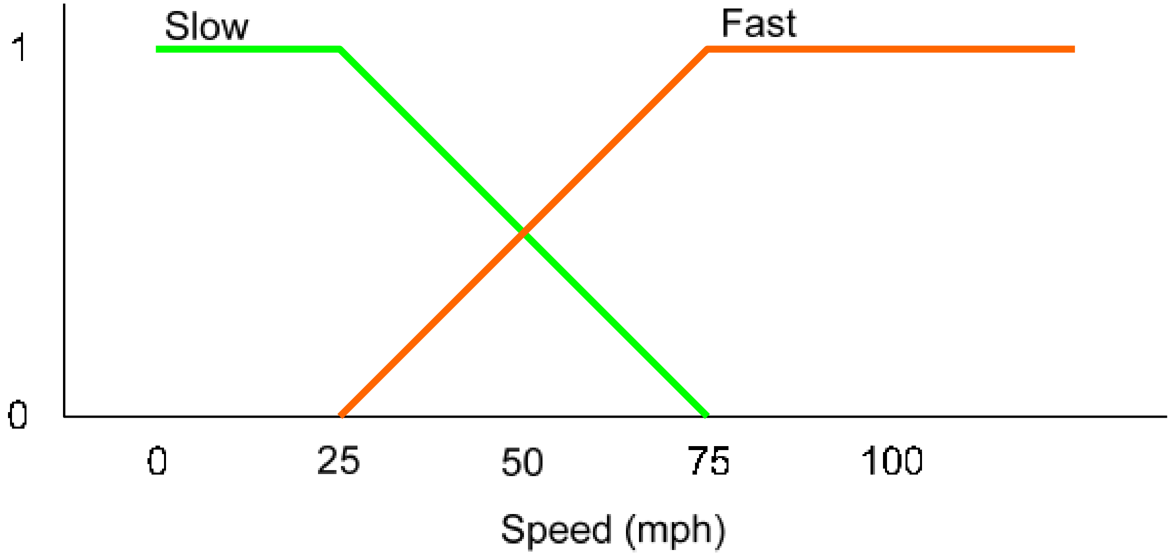




Fuzzy logic in control — Speed Control

Output

- Speed: {Slow, Fast}



Fuzzy logic in control — Speed Control

Rules

- If it's Sunny and Warm, drive Fast

  $$\mathit{Sunny}(\mathit{Cover}) \wedge \mathit{Warm}(\mathit{Temp}) \Rightarrow \mathit{Fast}(\mathit{Speed})$$

- If it's Cloudy and Cool, drive Slow

  $$\mathit{Cloudy}(\mathit{Cover}) \wedge \mathit{Cool}(\mathit{Temp}) \Rightarrow \mathit{Slow}(\mathit{Speed})$$

- Driving Speed is the combination of output of these rules...

Fuzzy logic in control — Speed Control

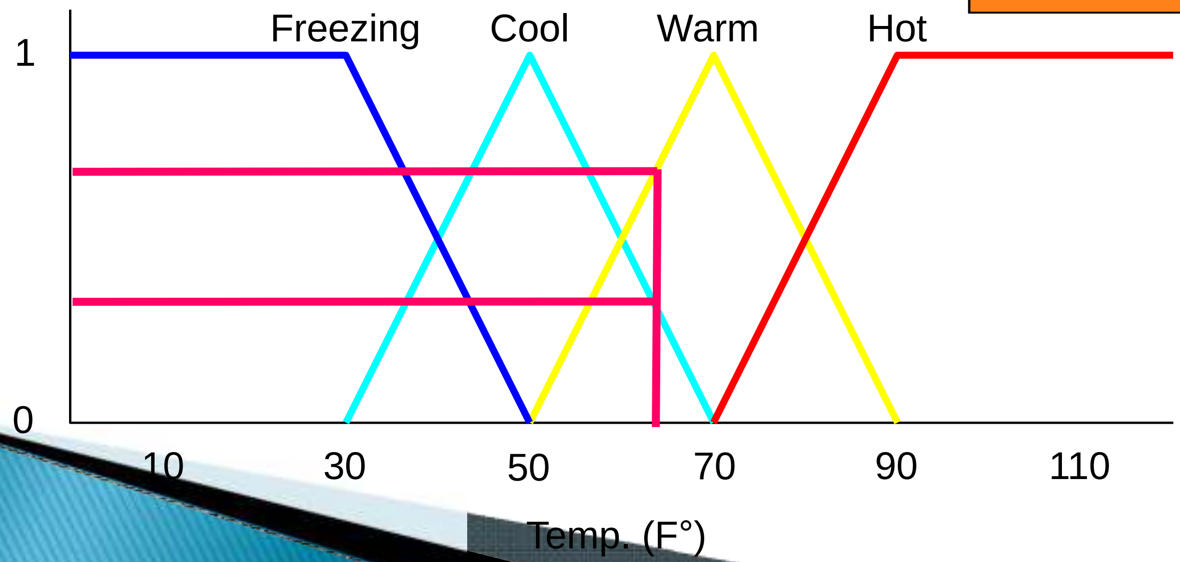
Speed Calculation: How fast will I go if it is

- 65 F °
- 25 % Cloud Cover ?

Step

1. Fuzzification(模糊化)：***Calculate Input Membership Levels***
   a. **temperature**

65 F ° ⇒ Cool = 0.4, Warm= 0.7



Fuzzy logic in control — Speed Control

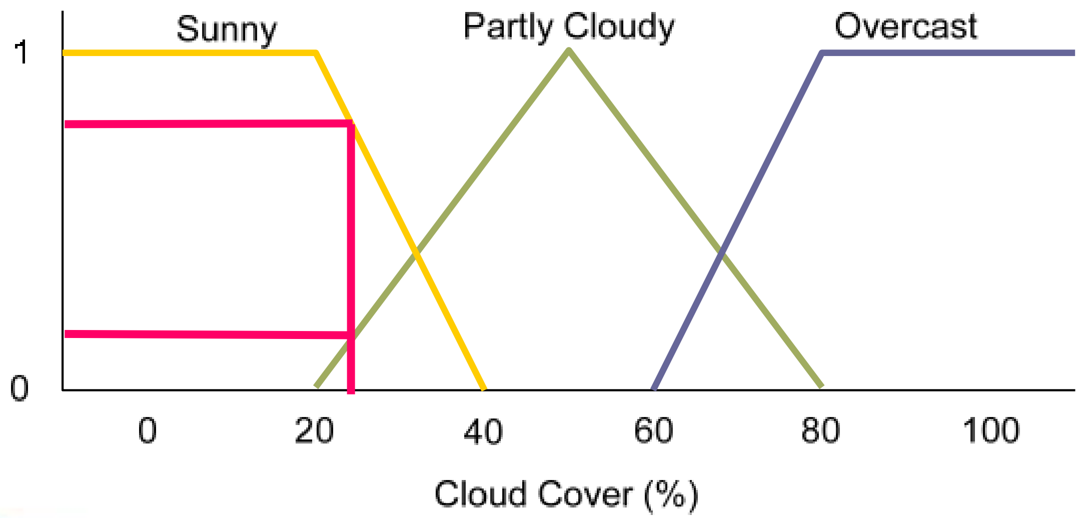
Step

1.Fuzzification(模糊化)：***Calculate Input Membership Levels***

a.**Temperature**

b.**Cover**

25% Cover ⇒Sunny = 0.8, Cloudy = 0.2



Fuzzy logic in control — Speed Control

Step

1. Fuzzification
2. Calculating

a. If it's Sunny and Warm, drive Fast

$$Sunny(Cover) \wedge Warm(Temp) \Rightarrow Fast(Speed)$$

$$0.8 \wedge 0.7 = 0.7$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{Fast = 0.7}$$

b. If it's Cloudy and Cool, drive Slow

$$Cloudy(Cover) \wedge Cool(Temp) \Rightarrow Slow(Speed)$$

$$0.2 \wedge 0.4 = 0.2$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{Slow = 0.2}$$

Fuzzy logic in control — Speed Control

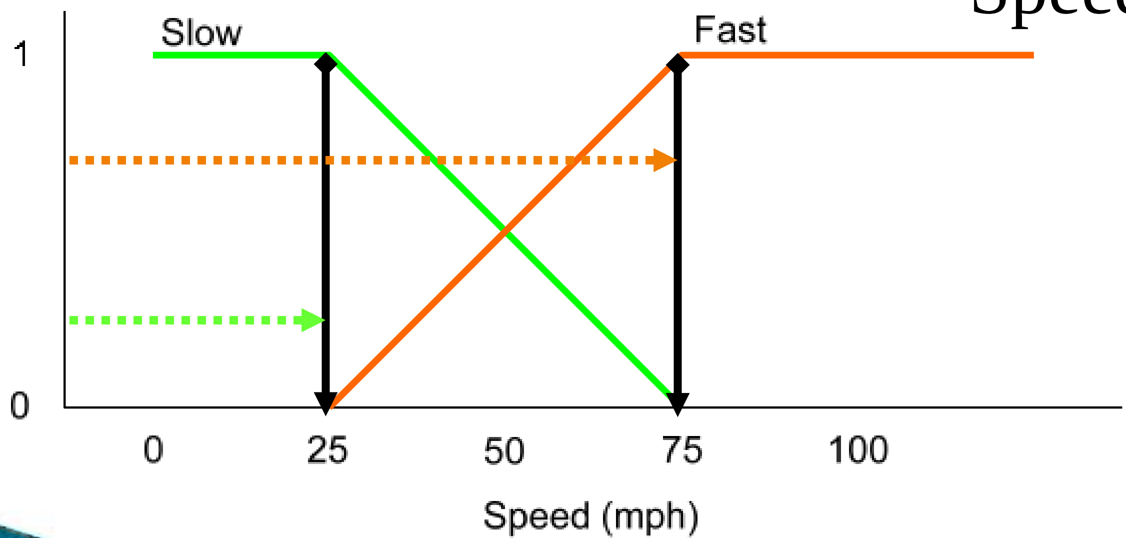
Step

1. Fuzzification
2. Calculating
3. Defuzzification(解模糊、去模糊化、模糊判决)：
   Constructing the Output

Fuzzy logic in control — Speed Control

Defuzzification

- Speed is 20% Slow and 70% Fast
- Find centroids(重心): Location where membership is 100%



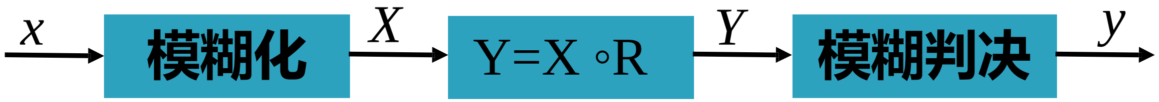
Speed = weighted mean

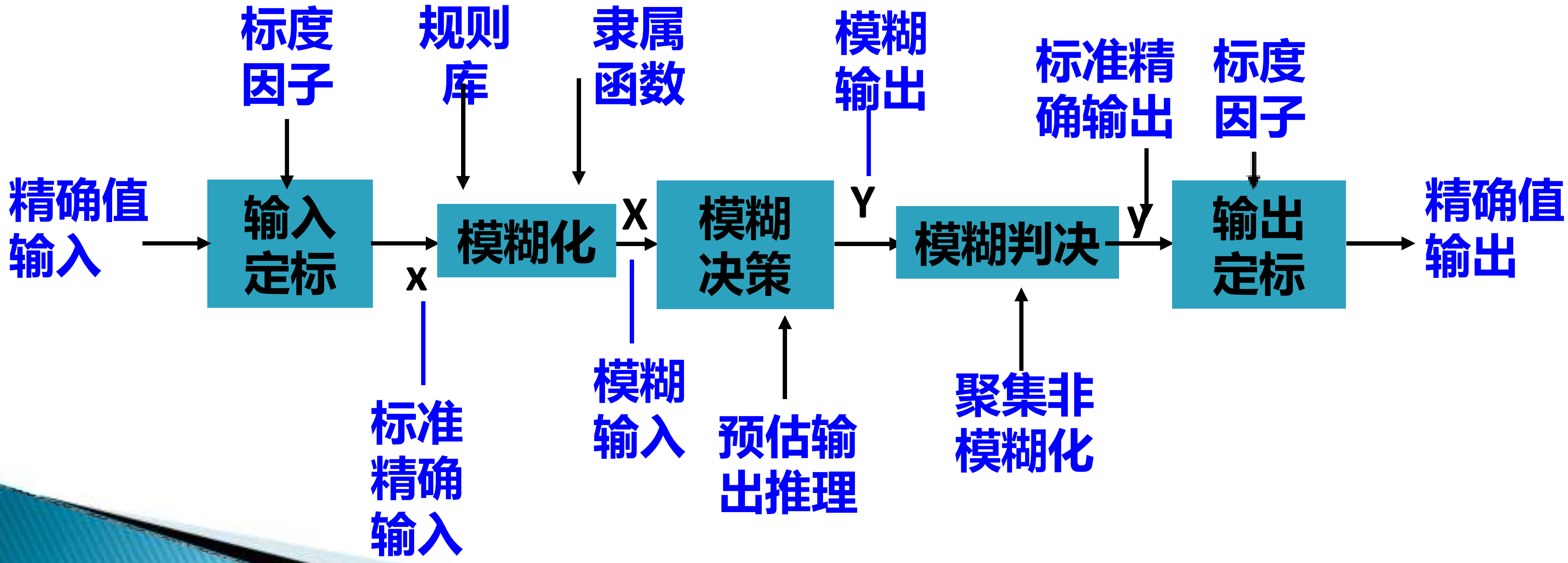
= (0.2*25+0.7*75)/0.9

= 63.9 mph

模糊计算—结构原理

模糊计算的基本原理





模糊计算—建立隶属函数的方法

模糊统计法

- 把论域U划分为若干区间。
- 选择n个具有正确判断力的评判员，请他们分别给出模糊概念应该属于的区段。
- 假设n个评判员给出的区段中覆盖某个区间的次数为m，则当n足够大时，就可把m/n作为该区间中值对 A的隶属度。
- 对每个区间的中值点求出隶属度后，就可绘制出A的隶属度函数曲线。

模糊计算—建立隶属函数的方法

对比排序法

- 对有限论域，如果直接为每一个元素确定隶属度是困难的，则可通过对论域中的因素两两比较，确定一个元素相对于另一个元素隶属于该模糊概念的隶属度，然后对每一个元素的所有隶属度进行加权平均得到最后的隶属度。

模糊计算—建立隶属函数的方法

专家评判法

- 根据专家的实际经验给出模糊信息的处理算式或相应权系数值来确定隶属函数的一种方法
- 专家经验越成熟，实践时间和次数越多，则按此专家经验确定的隶属函数将取得更好的效果。

例

- 对于某大型设备需停产检修的"状态诊断"，设论域U中模糊集合A，包含该设备需停产检修的全部事故隐患因子x_i（$i=1$，2，…，10）。若10个事故隐患因子x_i分别代表"设备温度升高"、"有噪声发生"、"运行　速度降低"、"机械传动有振动"等，并把每个因子x_i　作为一个清晰集合A_i，其特征函数为：

$$\psi_{A_i}(x_i)=\begin{cases}1 & \text{有事故隐患因子}x_i\text{出现} \\ 0 & \text{无事故隐患因子}x_i\text{出现}\end{cases}$$

- 则根据专家经验，对每一个事故隐患赋予一个加权系数k_i，确定“该大型设备需停产检修”模糊集合A的隶属函数$\mu_{\mathrm{A}}(x)$为：

$$\mu_A(x)=\frac{k_1\Psi_{A_1}(x_1)+k_2\Psi_{A_2}(x_2)+\Lambda+k_{10}\Psi_{A_{10}}(x_{10})}{k_1+k_2+\Lambda+k_{10}}$$

若某几个因子x_i使A隶属度$\mu_{\mathrm{A}}(x)\geq\upsilon$（$\upsilon$为给定水平）,则诊断为该大型设备必须立即停产检修，否则可继续生产，继续诊断

模糊计算—建立隶属函数的方法

基本概念扩充法

- 从基本模糊概念的隶属函数出发，通过一些运算导出其它相关模糊概念的隶属函数。
- 例：假设已知“大”的隶属函数$\mu_{大}(u)$， 则

$$\mu_{极大}(u)=\mu_{大}^{4}(u) \qquad \mu_{很大}(u)=\mu_{大}^{2}(u)$$

$$\mu_{相当大}(u)=\mu_{大}^{1.5}(u) \qquad \mu_{比较大}(u)=\mu_{大}^{0.75}(u)$$

$$\mu_{有点大}(u)=\mu_{大}^{0.5}(u) \qquad \mu_{稍许有点大}(u)=\mu_{大}^{0.25}(u)$$

模糊计算——模糊判决方法

在推理得到的模糊集合中取一个相对最能代表这个模糊集合的单值的过程就称作解模糊或模糊判决（Defuzzification）

模糊判决可以采用不同的方法

- 重心法
- 最大隶属度方法
- 加权平均法
- 隶属度限幅元素平均法

例“水温适中”

- 假设“水温适中”的模糊集为：

$$\mu_N(x_i) = \{ 0.0/0 + 0.0/10 + 0.33/20 + 0.67/30 + 1.0/40 + 1.0/50 + 0.75/60 + 0.5/70 + 0.25/80 + 0.0/90 + 0.0/100 \}$$

模糊计算—模糊判决方法

重心法

- 取模糊隶属函数曲线与横坐标轴围成面积的重心作为代表点
- 理论上应该计算输出范围内一系列连续点的重心，但实际上是计算输出范围内整个采样点的重心，用足够小的取样间隔来提供所需要的精度

$$u = \frac{\int_x x\mu_N(x)dx}{\int_x \mu_N(x)dx}$$

$$u = \sum x_i \cdot \mu_N(x_i) / \sum \mu_N(x_i)$$

$$=48.2$$

模糊计算—模糊判决方法

最大隶属度法

- 在推理结论的模糊集合中取隶属度最大的那个元素作为输出量即可
- 这种情况下其隶属函数曲线一定是正规凸模糊集合（即其曲线只能是单峰曲线）
- 例: 对于“水温适中”，按最大隶属度原则，有两个元 素40和50具有最大隶属度1.0，那就对所有取最大隶属 度的元素40和50求平均值，执行量应取：

$$u_{\max} = (40 + 50)/2 = 45$$

模糊计算—模糊判决方法

系数加权平均法

$$u = \sum k_i \cdot x_i / \sum k_i$$

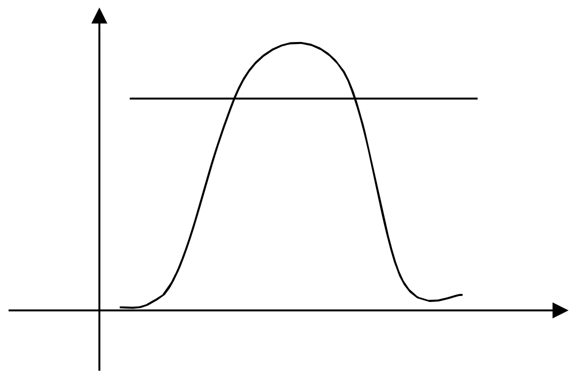
式中，系数的选择要根据实际情况而定，不同的系统就决定系统有不同的响应特性。

模糊计算—模糊判决方法

隶属度限幅元素平均法

- 用所确定的隶属度值α对隶属度函数曲线进行切割，再对切割后等于该隶属度的所有元素进行平均，用这个平均值作为输出执行量
- 例：当取α为最大隶属度值时，表示“完全隶属”关系，这时α＝1.0。在“水温适中”的情况下，40℃和50℃的 隶属度是1.0，求其平均值得到输出代表量：

$$\boldsymbol{u=(40+50)/2=45}$$



模糊计算—Drawbacks to Fuzzy logic

Requires tuning of membership functions

Fuzzy Logic control may not scale well to large or complex problems

Deals with imprecision, and vagueness(含糊), but not uncertainty

模糊计算— Summary

- Fuzzy Logic provides way to calculate with imprecision and vagueness
- Fuzzy Logic can be used to represent some kinds of human expertise
- Fuzzy Membership Sets
- Fuzzy Linguistic Variables
- Fuzzy AND and OR
- Fuzzy Control