电磁波的波动方程

电磁波:

根据麦克斯韦理论，在自由空间内的电场和磁场满足

$$\oint_L \vec{E}_{感} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

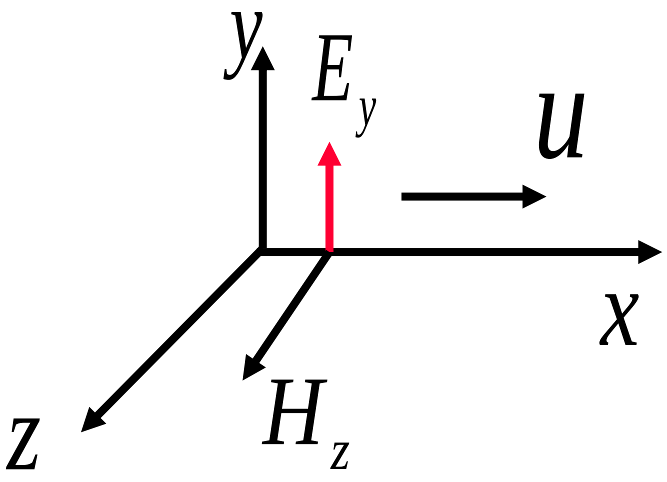
即非均匀变化的电场可以激发变化的磁场，变化的磁场又可以激发变化的电场，

这样电场和磁场可以相互激发并以波的形式由近及远，

以有限的速度在空间传播开去，就形成了电磁波。

对沿 x 方向传播的电磁场(波) 有

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} &= \mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}\\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} &= \mu\varepsilon\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}\end{aligned}}$$



是波动方程的形式

1886年赫兹发现了电磁波 证实了麦的预言

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}$$

平面波的波动方程为

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

ξ：任一波动物理量

平面波沿 x 传播

将电磁方程与波动方程比较可知：

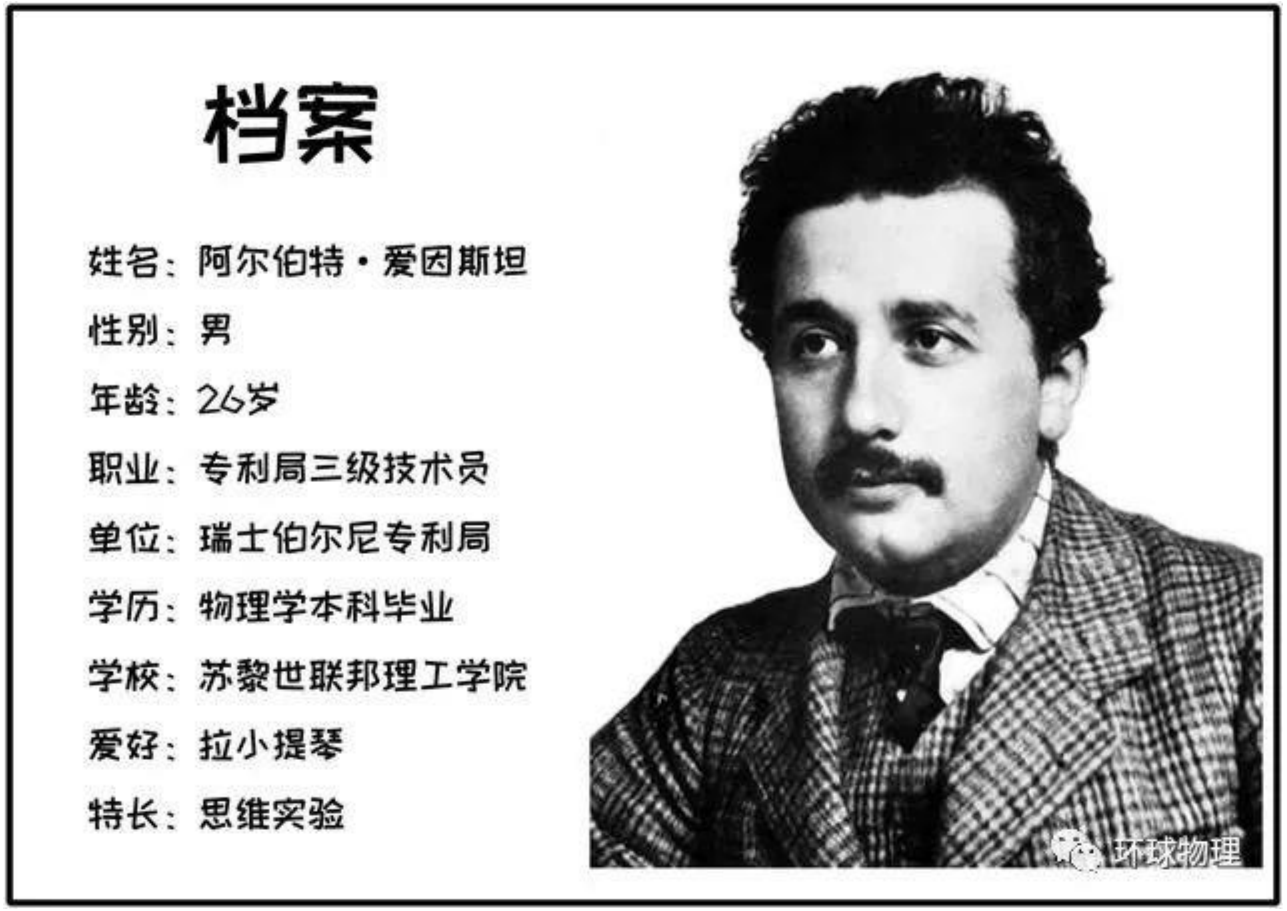
电磁能量以波动的形式传播

波动的物理量是 E 和 H

波速是 $u = \frac{1}{\sqrt{\mu\,\varepsilon}}$

•**真空中的波速** $u=\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=3\times10^8 \mathrm{m}/\mathrm{s}=c$ •**光是电磁波**

狭义相对论

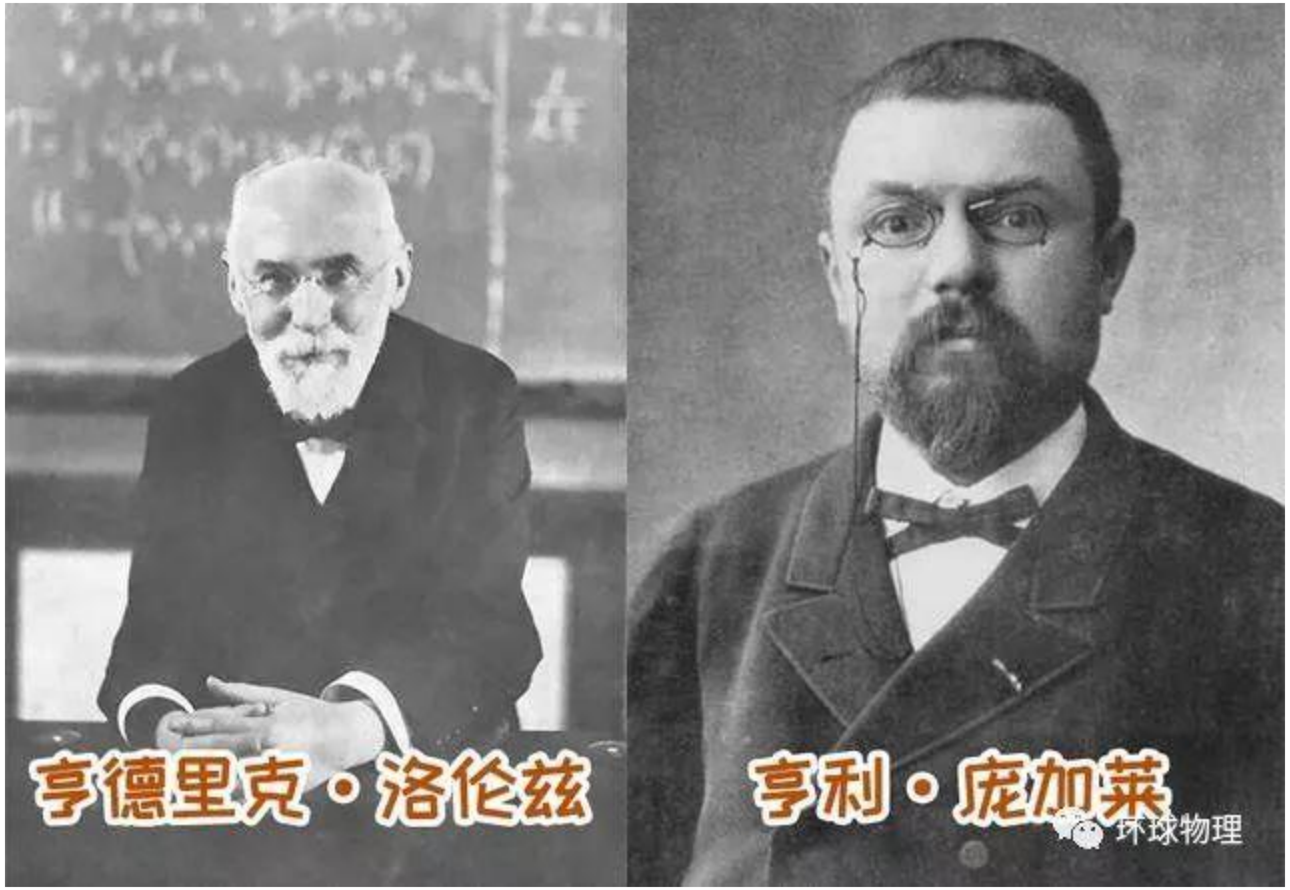


爱因斯坦年仅26岁，他没有老一代科学家的约束，他抛开条条框框直接提出：**光速在任意惯性参考系下是不变的**。也就是光速不变原理。

我不是站在牛顿的肩膀上，而是站在詹姆斯·克拉克·麦克斯韦的肩膀上。

•真空中的波速 $u=\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=3\times10^{8}\,\mathrm{m}/\mathrm{s}=c$ **•光是电磁波**

狭义相对论



当时有两位科学家其实都很接近提出相对论，一个是洛伦兹，一位是庞加莱。他们都以各自不同地方式接近了狭义相对论，但都以失败而告终。

杨振宁在自己的一篇文章《机遇与眼光》当中就谈到了这件事，他说：
洛伦兹有数学，但没有物理学；
庞加莱有哲学，但也没有物理学；

•真空中的波速 $u=\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=3\times10^8 \mathrm{m}/\mathrm{s}=c$

•光是电磁波 折射率为 $n=\dfrac{c}{u}=\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}$

一般介质的 $\mu_r=1$ 所以 $n=\sqrt{\varepsilon_r}$

说明：与物质作用的主要物理量是电矢量

$\vec{E}$ 通常被称为光矢量

•电磁波是横波 $\vec{E}\perp\vec{u}$ $\vec{H}\perp\vec{u}$

•电磁波能量的传播

能流密度矢量 $\boxed{\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}}$

电磁场的能量

一、电磁波的能量

能量密度

电场 $$\boxed{w_e=\frac{1}{2}\varepsilon E^2}$$

磁场 $$\boxed{w_m=\frac{1}{2}\mu H^2}$$

电磁场 $$\boxed{w=w_e+w_m=\frac{1}{2}\left(\varepsilon E^2+\mu H^2\right)}$$

电磁波所携带的能量称为辐射能.

二、电磁场的能流密度(又叫辐射强度)

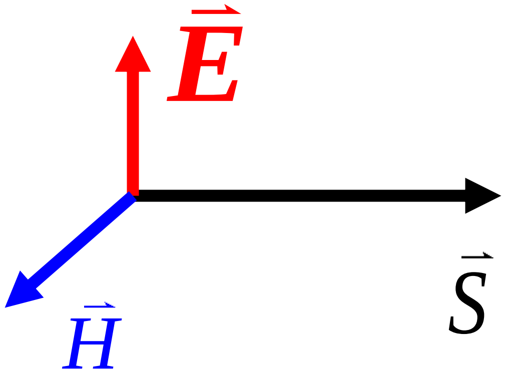
单位时间内通过垂直于传播方向的单位面积的辐射能量(S)

$$\boxed{S = wu = \frac{1}{2}\left(\varepsilon E^2 + \mu H^2\right)u}$$

$$\boxed{u = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}} \qquad \boxed{\sqrt{\varepsilon}E = \sqrt{\mu}H} \Leftarrow B = E/c$$

能流密度矢量 $\boxed{S = EH}$

坡印廷矢量 $\boxed{\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}}$



$\vec{S} = wu$

填空题

$$\sqrt{\varepsilon_0}E_0 = \sqrt{\mu_0}H_0$$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

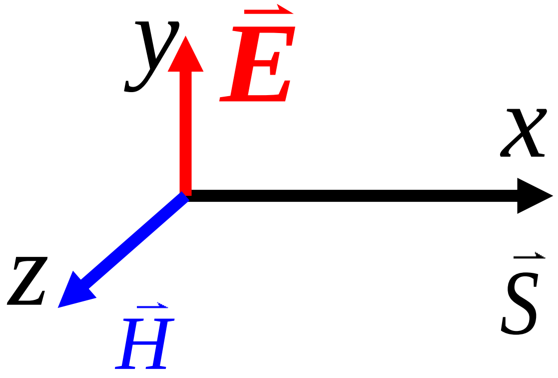
4．真空中，一平面电磁波沿 y 轴正向传播。已知电场强度为 $\vec{E} = E_0 \cos\omega(t - \dfrac{y}{c})\vec{k}$，则磁场强度 $\vec{H}$ = ________。

$$H = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0 \cos(\omega(t - y/c))\hat{i}$$

10.（5 分）真空中，一平面电磁波沿 x 轴正向传播。已知电场强度为 $E_x = 0$，$E_y = E_0 \cos\omega(t - \dfrac{x}{c})$，$E_z = 0$，则磁场强度是：$H_x =$ ________，$H_y =$ ________，$H_z =$ ________，能流平均密度 $\bar{S} =$ ________________。

$$H_z = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0 \cos(\omega(t - x/c))\hat{k}$$

$$\bar{S} = \frac{1}{2}E_0H_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0^{\ 2}$$

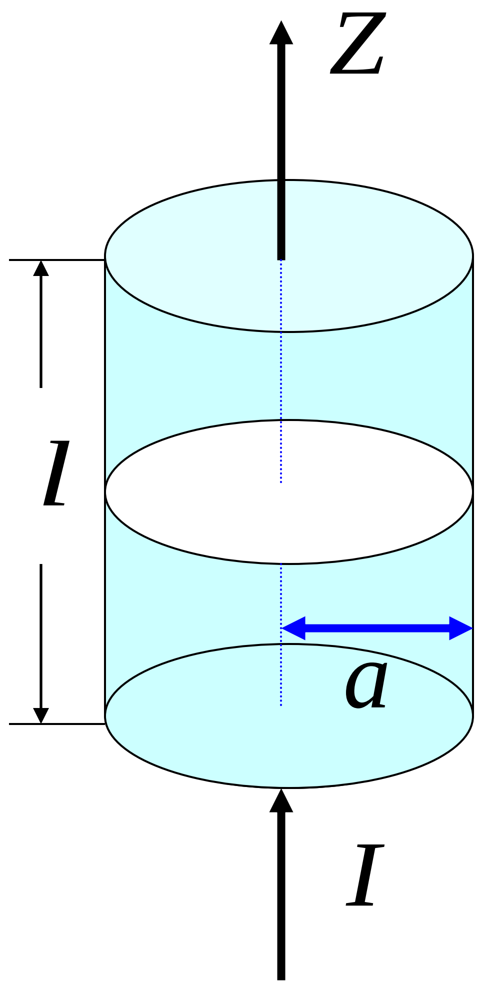


$$\vec{S} = wu$$

例题： 圆柱形导体,长为l, 半径为a, 电阻为R, 通有电流I, 证明:

1) 在导体表面上,坡印廷矢量 S 处处垂直导体表面并指向导体内部.

2) 沿导体表面的坡印廷矢量的面积分等于导体内产生的焦耳热功率I^2R.



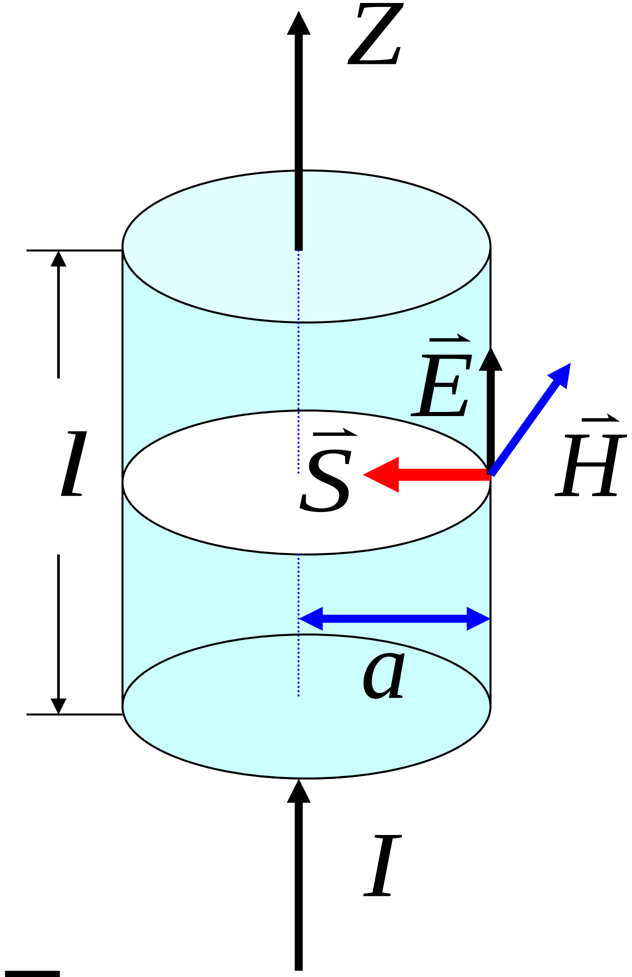
解:

(1) 在圆柱表面上,电场强度E即为电流流动方向(沿Z轴)

磁场强度H与电流I构成右螺旋关系(e_θ方向)

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

由上式可以判定S垂直导体表面,且指向导体内部.



(2) 导体表面处 $\vec{H}=\dfrac{I}{2\pi a}\vec{e}_\theta$ $\boxed{\vec{E}=\dfrac{IR}{l}\vec{k}}$

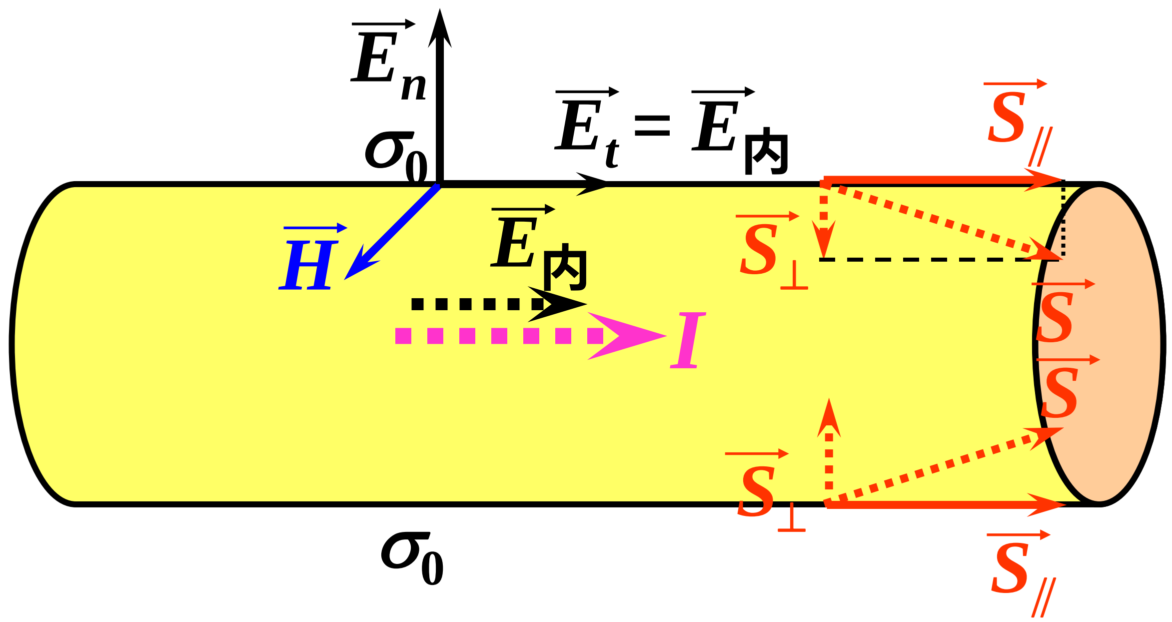
$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=\frac{I^2R}{2\pi al}\left(-\vec{n}\right)$$

S沿表面的负法向，即指向轴心

对于长 *l* 的导体,单位时间内通过表面积A =2πal 输入的电磁能量为

$$\int_A \vec{S}\cdot d\vec{A}=\frac{I^2R}{2\pi al}2\pi al=I^2R$$

在输电线上电磁能量是沿导线由电磁场传输的：



$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \vec{E}_n \times \vec{H} + \vec{E}_t \times \vec{H} = \vec{S}_{//表面} + \vec{S}_{\perp表面}$$

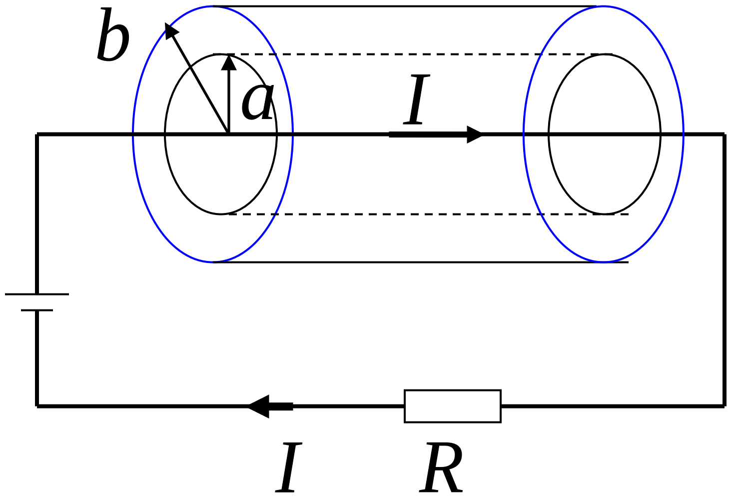
$\vec{S}_{//} = \vec{E}_n \times \vec{H}$ **沿导线由电源传向负载**

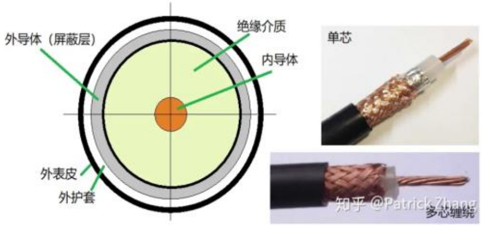
$\vec{S}_{\perp} = \vec{E}_t \times \vec{H}$ **沿导线径向由外向内传播**

以补偿导线上的焦耳热损耗

例：同轴电缆的内导体圆柱半径为a，外筒半径为b，电流由圆柱流出，由外筒流回，电缆导体的电阻可以忽略，证明：单位时间内通过a和b之间绝缘介质的环形截面的电磁能量正好等于电源提供的功率。

导体内无电场，电缆外无电场和磁场，所以，导体中和电缆外皆无能流，能流仅存在于绝缘介质中





绝缘介质中电场分布? → 磁场分布? → 能流？ → 单位时间通过环形截面的能量

同轴电缆是用来传输高频信号的,电流一般在内导体的表面,频率越高,趋肤深度越浅. 高频电路中，电流变化率非常大，不均匀分布.

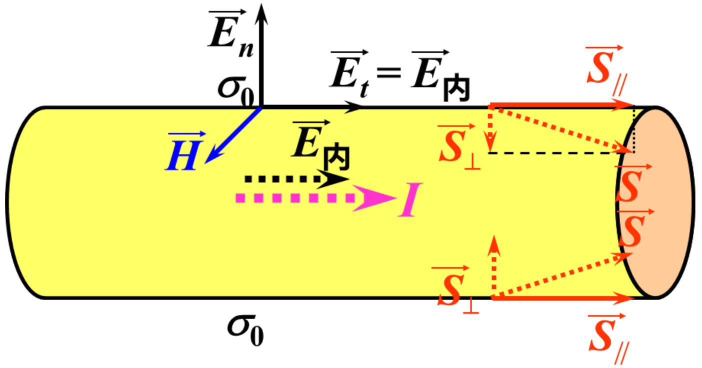
电缆中的电流为I, 电源的端电压为U
绝缘介质中电场分布为：

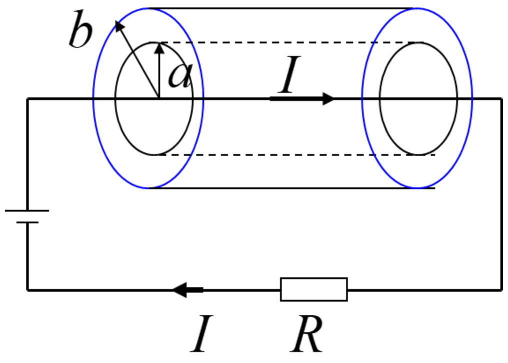
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}$$

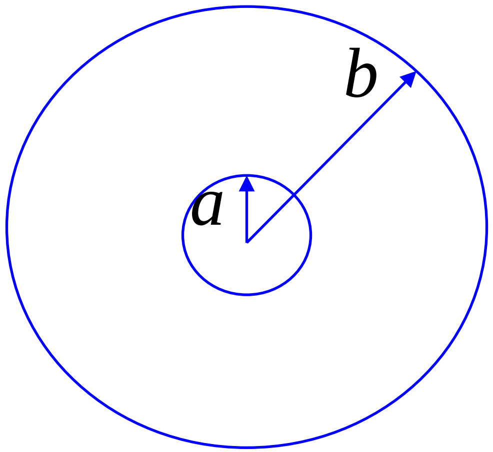
λ为内圆柱的电荷线密度， E的方向沿径向，因此：

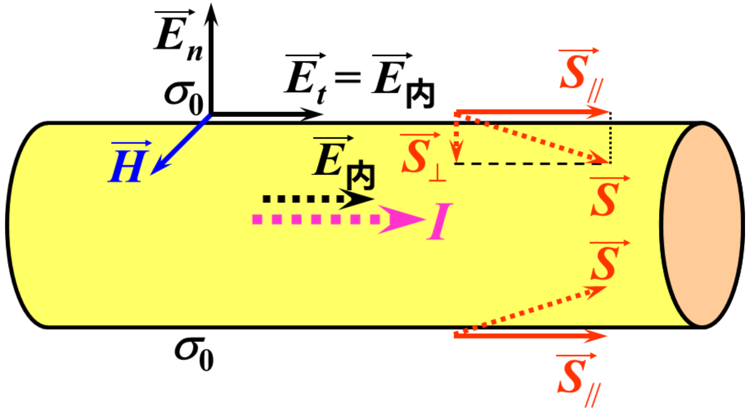
$$U = \int_a^b E dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{b}{a}$$

$$E_n = \frac{U}{\ln(b/a)}\frac{1}{r} \qquad H_t = \frac{I}{2\pi r}$$





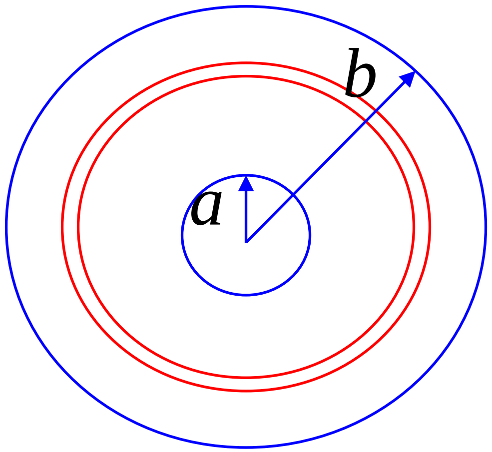




$$E_n = \frac{U}{\ln(b/a)}\frac{1}{r} \qquad H_t = \frac{I}{2\pi r}$$

$$S_{平行} = E_n H_t = \frac{U}{\ln(b/a)}\frac{1}{r}\bullet\frac{I}{2\pi r} = \frac{UI}{2\pi\ln(b/a)}\frac{1}{r^2}$$

单位时间通过绝缘介质中任一环形截面的电磁能：



$$\frac{dW}{dt} = \int_s E_n H_t dS = \int_a^b \frac{UI}{2\pi\ln(b/a)}\frac{1}{r^2}2\pi r dr = UI$$

总 结

麦克斯韦方程组：

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \rho_0 \mathrm{d}V \qquad \oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \qquad \oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \vec{J}_0 \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}S$$

电磁波能量密度：

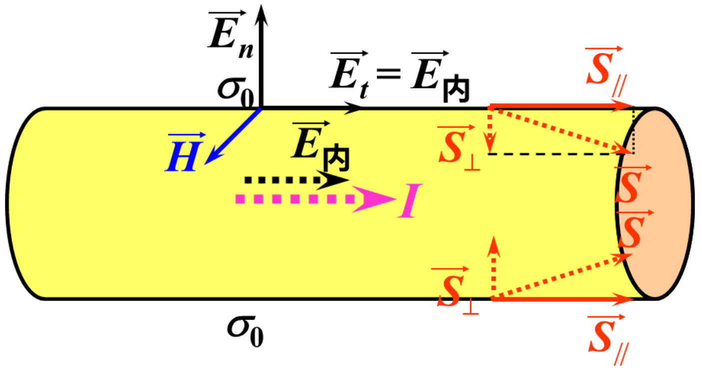
$$\boxed{w = w_e + w_m = \frac{1}{2}\left(\varepsilon E^2 + \mu H^2\right)}$$

能流密度：

$$\boxed{\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}}$$

平均能流密度大小：

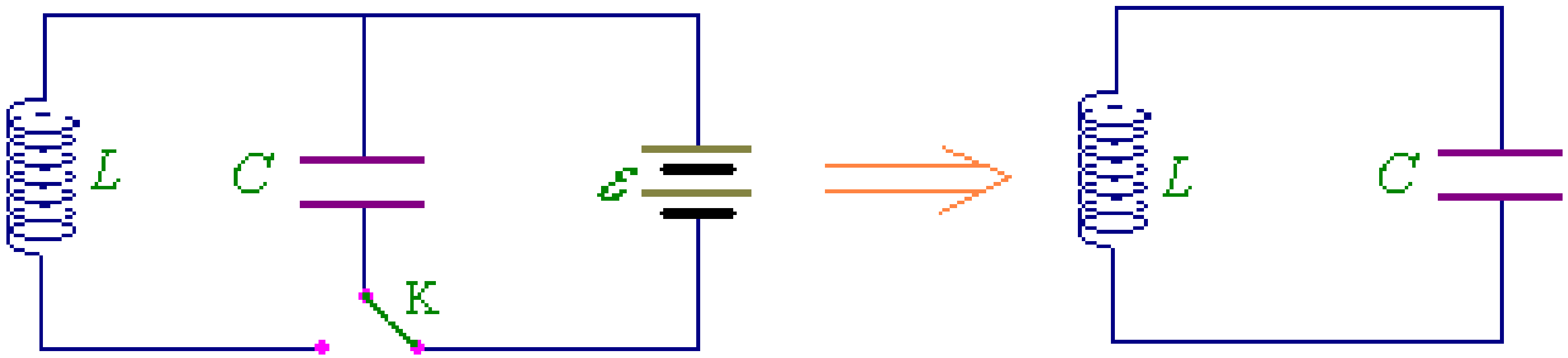
$$\boxed{\bar{S} = \frac{1}{2}E_0 H_0}$$



13-8　电磁波的辐射

一、电磁振荡

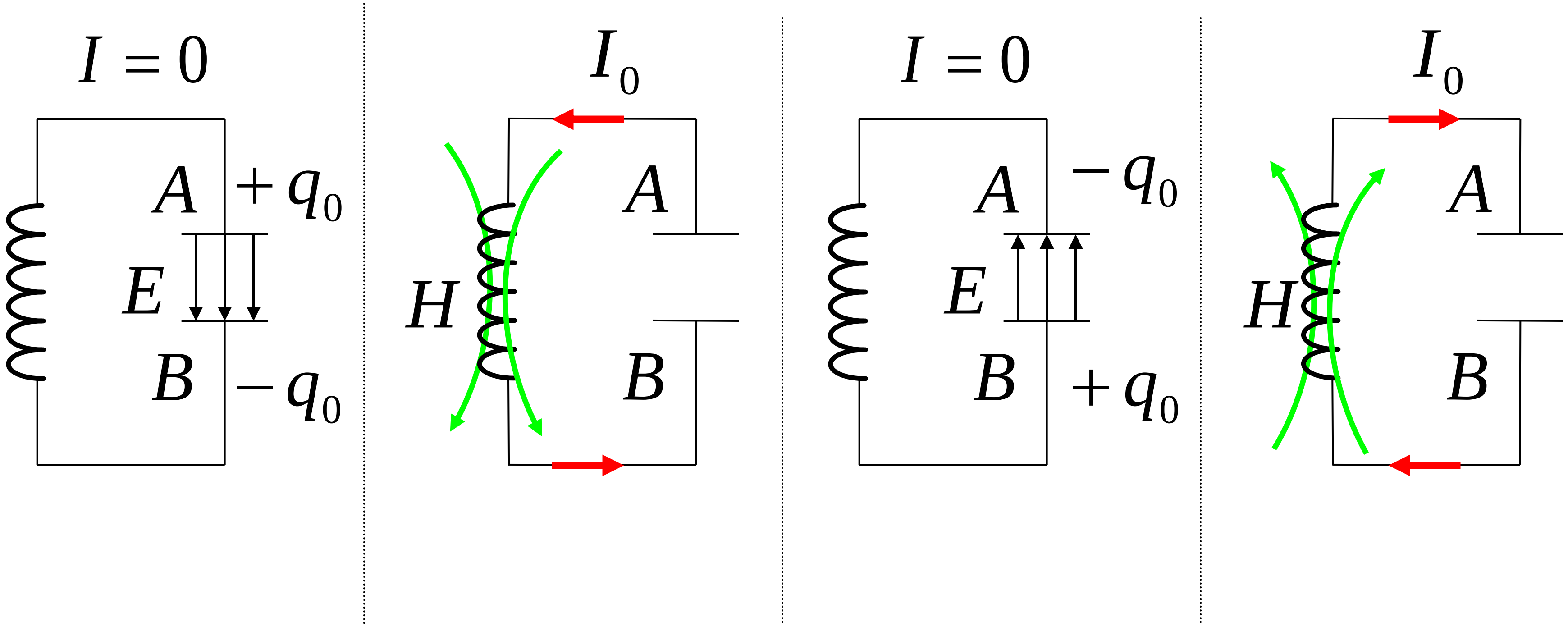
一个不计电阻的LC电路，就可以实现电磁振荡，故也称LC振荡电路。



一、电磁振荡

赫兹1888年用振荡电路证实了电磁波的存在.

理想的LC电路的电磁振荡如下图:



如何获得变化的电场呢?

LC回路中电荷和电流的变化规律

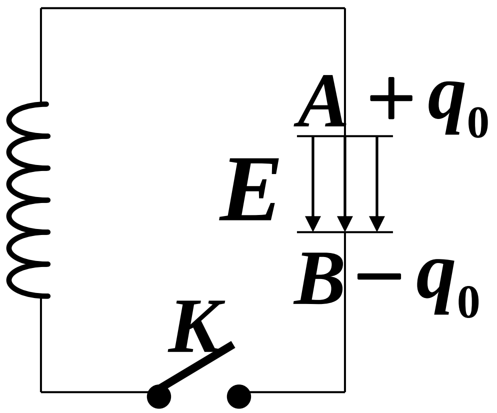
电容器两极板间电势差 $u = \dfrac{q}{C}$

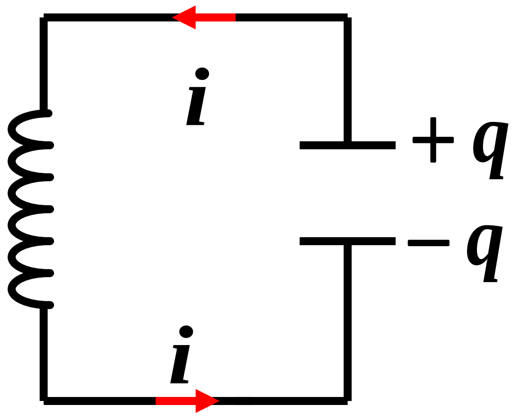
自感线圈内电动势 $\varepsilon_L = -L\dfrac{di}{dt}$

$$-L\frac{di}{dt} = \frac{q}{C} \quad \xrightarrow{i = \frac{dq}{dt}} \quad \frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{1}{LC}q$$

$$= -\omega^2 q$$

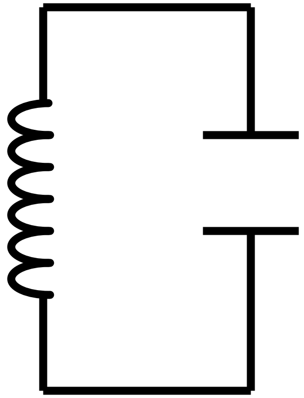
LC回路





任一时刻

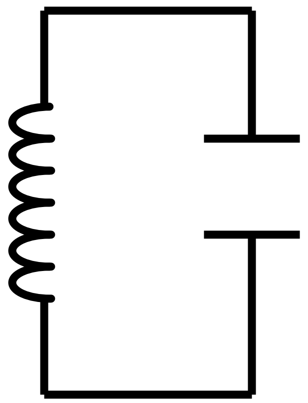
$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\omega^2 q \qquad (\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x)$$



电荷和电流作简谐振动，周期性变化

$$q = q_0 \cos(\omega t + \varphi) \qquad i = -q_0\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

振荡角频率 $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ **振荡频率** $f = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$



LC 回路能否有效地发射电磁波 ？

LC 回路有两个缺点：

(1) 振荡频率太低

LC 电路的辐射功率 $S \propto \omega^4$

(2) 电磁场仅局限于电容器和自感线圈内

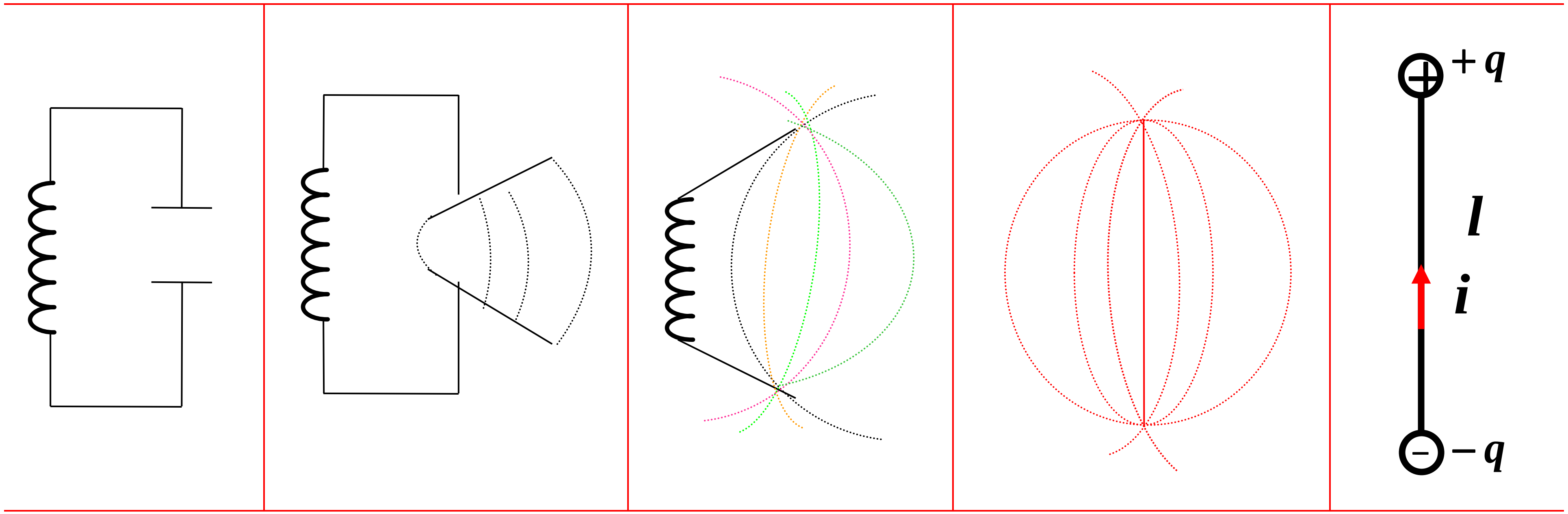
解决途径：

(1) 提高回路振荡频率 $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

(2) 实现回路的开放

$$C=\frac{\varepsilon_0 S}{d} \qquad L=\mu_0 n^2 V$$

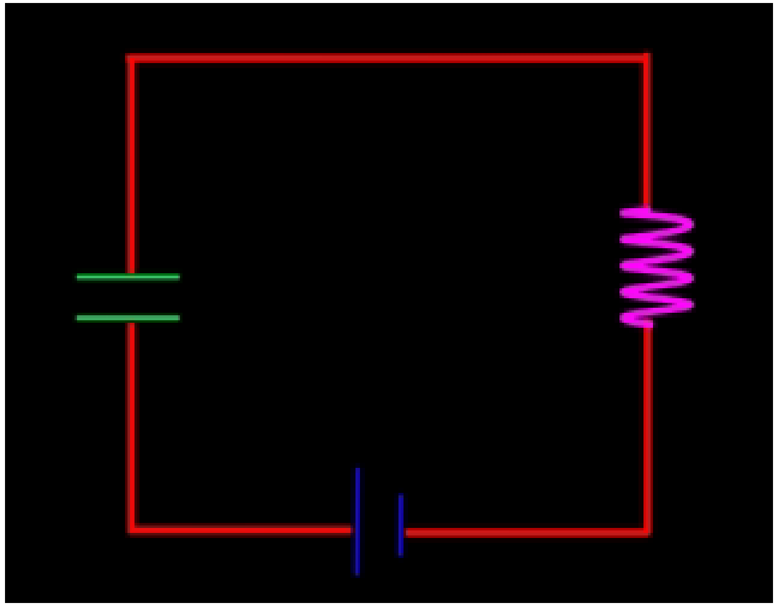
即增加电容器极板间距d，缩小极板面积S，减少线圈数n，就可达到上述目的，具体方式如图所示。



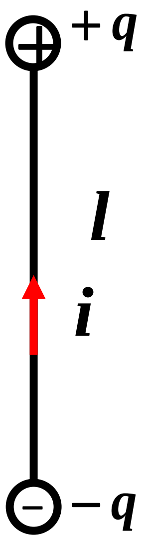
从LC振荡电路到振荡电偶极子

可见，开放的LC 电路就是大家熟悉的天线！当有电荷（或电流）在天线中振荡时，就激发出变化的电磁场在空中传播。

天线的物理模型是振荡偶极子。

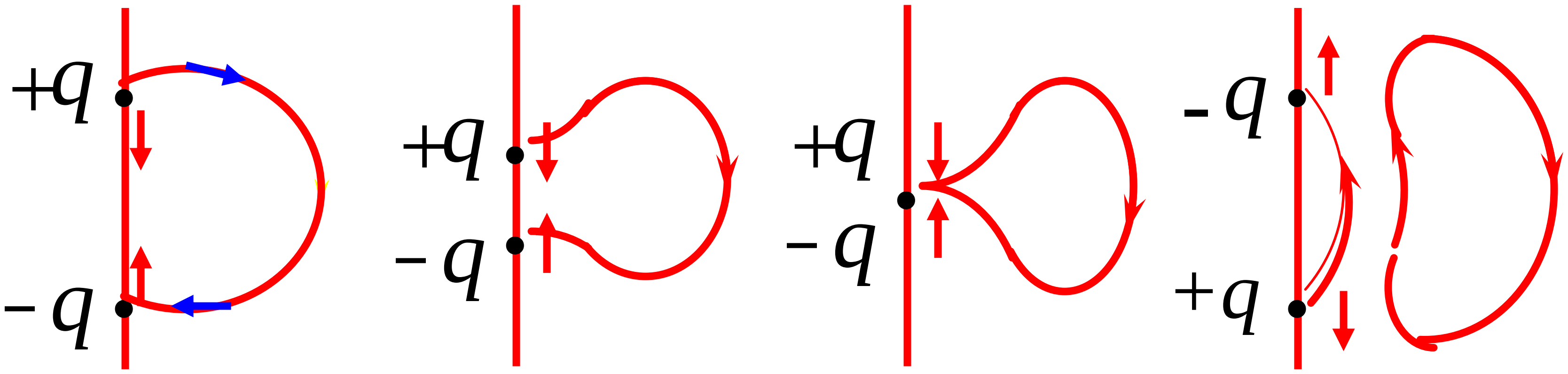


二、偶极子发射的电磁波



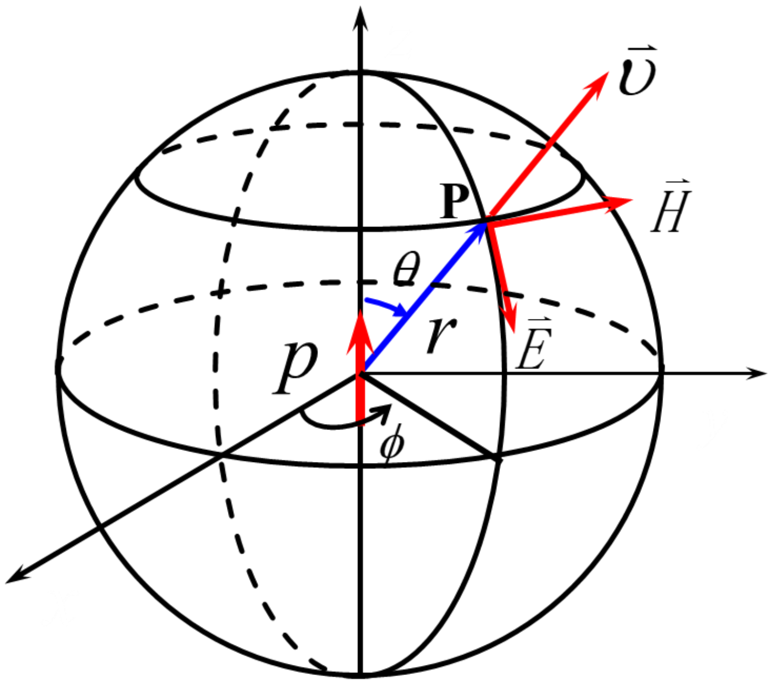
振荡电偶极子:

电矩作周期性变化的电偶极子.



电偶极子的辐射过程

电偶极子的辐射场



各向同性介质中，可由波动方程解得振荡偶极子辐射的电磁波

球面电磁波方程

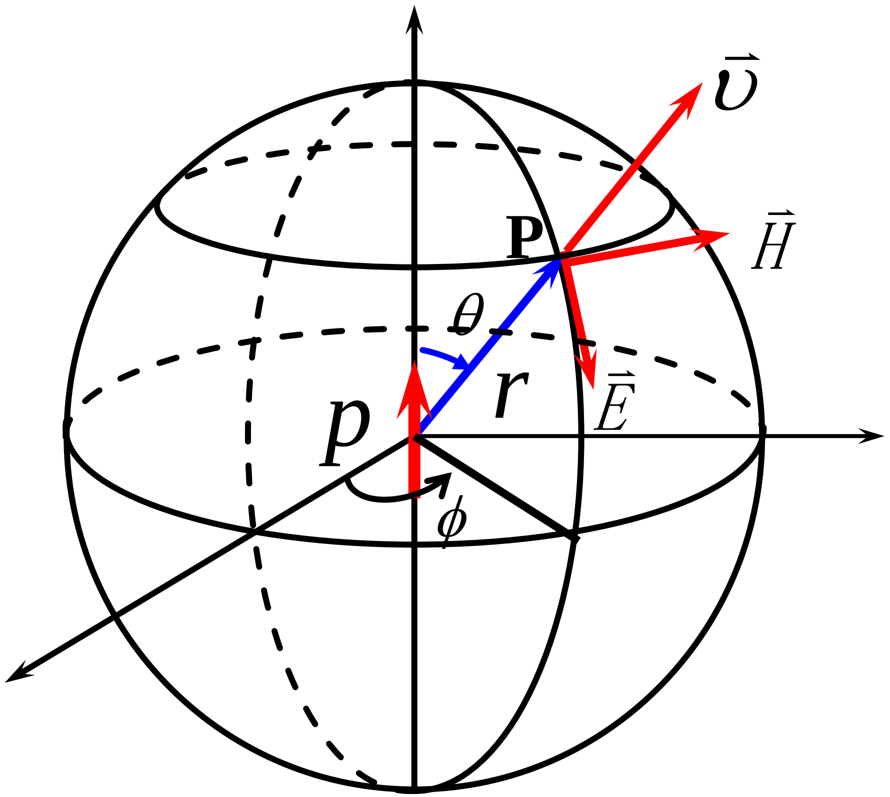
$$E(r,t)=\frac{\omega^2 p_0 \sin\theta}{4\pi\varepsilon v^2 r}\cos\omega\left(t-\frac{r}{v}\right)$$

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

$$H(r,t)=\frac{\omega^2 p_0 \sin\theta}{4\pi v r}\cos\omega\left(t-\frac{r}{v}\right)$$

对于振荡电偶极子辐射波，可导出平均辐射强度:

$$\bar{S} = \frac{\mu p_0 \omega^4 \sin^2\theta}{2(4\pi)^2 r^2 v}$$

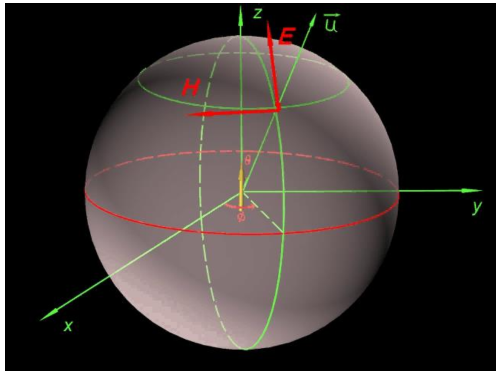


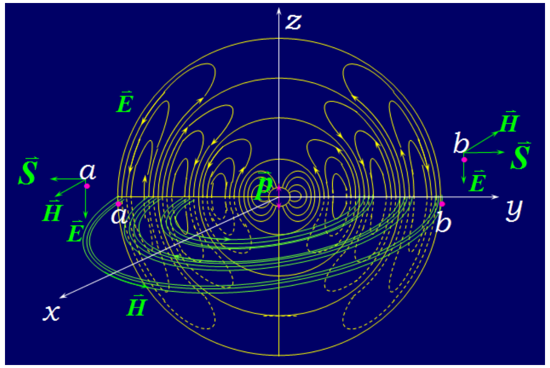
特点:

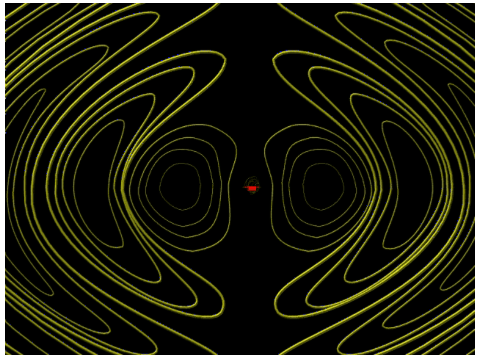
1) 辐射具有方向性

2) $\bar{S}$与ω^4成正比

偶极子周围的电磁场







三、赫兹实验

赫兹----德国物理学家

用实验证实了电磁波的存在。

赫兹还通过实验确认了电磁波是横波，具有与光类似的特性，如反射、折射、衍射等，并且实验了两列电磁波的干涉，同时证实了在直线传播时，电磁波的传播速度与光速相同，从而全面验证了麦克斯韦的电磁理论的正确性。并且进一步完善了麦克斯韦方程组，使它更加优美、对称，得出了麦克斯韦方程组的现代形式。

https://vd3.bdstatic.com/mda-kcnexu814njyjuzi/v1-cae/hd/mda-kcnexu814njyjuzi.mp4

赫兹（1857-1894）

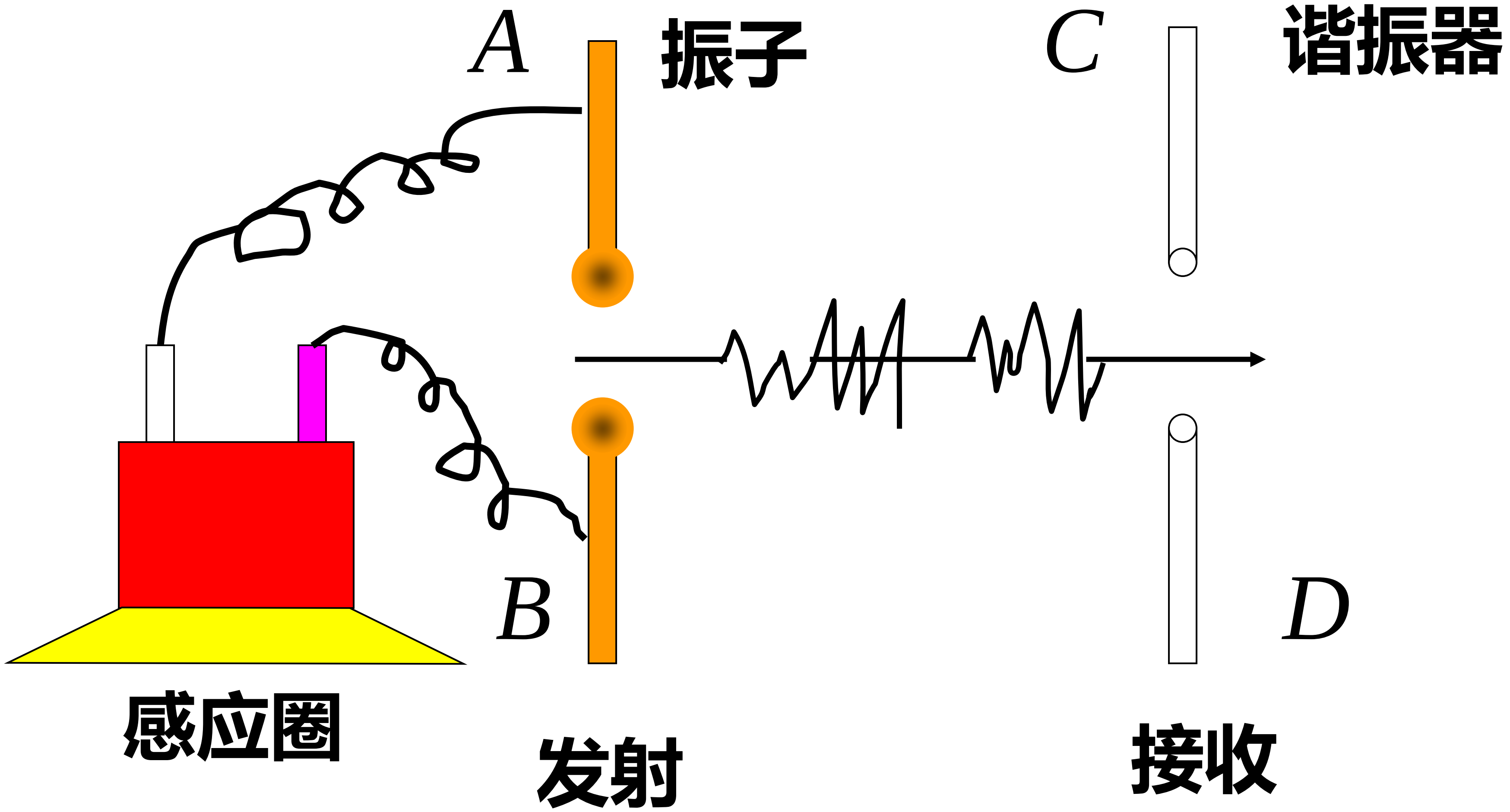
赫兹是国际单位制中频率的单位，它是每秒钟的周期性变动重复次数的计量

——捕捉电磁波的天才

- 赫兹又做了一系列实验。他研究了紫外光对火花放电的影响，发现了光电效应，即在光的照射下物体会释放出电子的现象。这一发现，后来成了爱因斯坦建立光量子理论的基础。

- 1888年，成了近代科学史上的一座里程碑。赫兹的发现具有划时代的意义，它不仅证实了麦克斯韦发现的真理，更重要的是开创了无线电电子技术的新纪元。

赫兹用下面的实验证实了电偶极子产生的电磁波

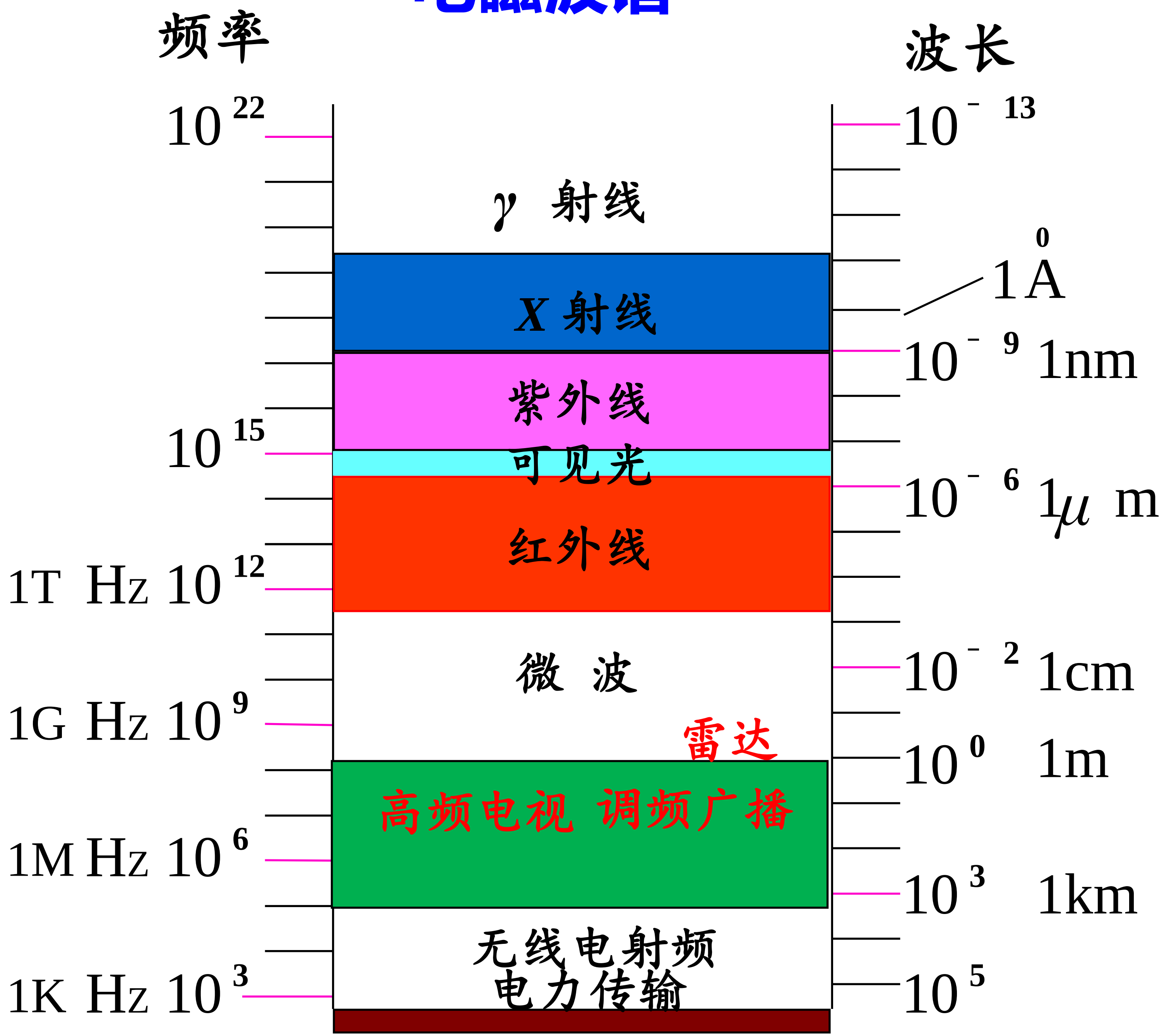


四、电磁波谱

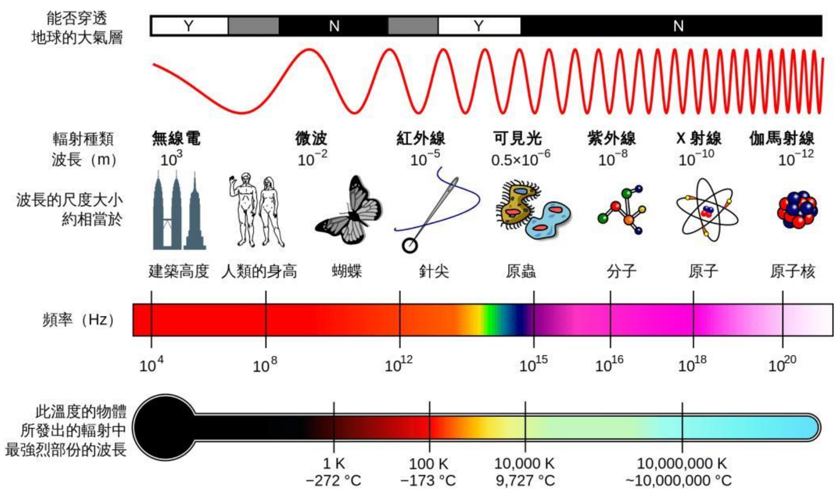
目前人类通过各种方式已产生或观测到的电磁波的最低频率为 $f=10^{-2}Hz$ ，其波长为地球半径的 $5\text{x}10^3$ 倍.

而电磁波的最高频率为 $f=10^{25}Hz$ ，它来自于宇宙的 r 射线。

电磁波谱



频率
波长
10^{22}
10^{-13}
γ 射线
1Å
X 射线
10^{-9} 1nm
紫外线
10^{15}
可见光
10^{-6} 1μ m
红外线
1T Hz 10^{12}
微 波
10^{-2} 1cm
1G Hz 10^{9}
雷达
10^{0} 1m
高频电视 调频广播
1M Hz 10^{6}
10^{3} 1km
无线电射频
电力传输
1K Hz 10^{3}
10^{5}



能否穿透地球的大氣層
Y
N
Y
N
輻射種類
波長（m）
無線電 10^{3}
微波 10^{-2}
紅外線 10^{-5}
可見光 0.5×10^{-6}
紫外線 10^{-8}
X 射線 10^{-10}
伽馬射線 10^{-12}
波長的尺度大小約相當於
建築高度
人類的身高
蝴蝶
針尖
原蟲
分子
原子
原子核
頻率（Hz）
10^{4}
10^{8}
10^{12}
10^{15}
10^{16}
10^{18}
10^{20}
此溫度的物體所發出的輻射中最強烈部份的波長
1 K −272 °C
100 K −173 °C
10,000 K 9,727 °C
10,000,000 K ~10,000,000 °C

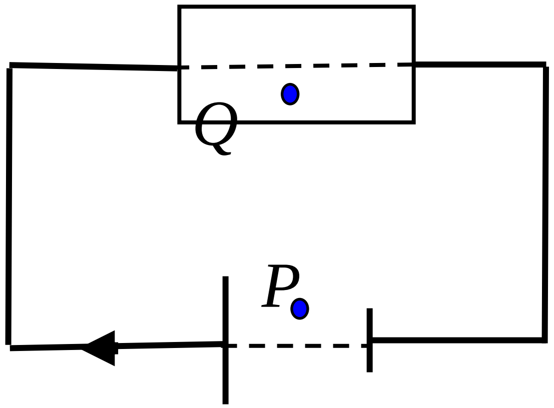
电磁波的应用

从1888年赫兹用实验证明了电磁波的存在至今，一百多年的时间里电磁理论不断深化，其应用领域不断扩大。

- 1895年,俄国科学家波波夫发明了第一个无线电报系统。
- 1914年,语音通信成为可能。
- 1920年,商业无线电广播开始使用,
- 20世纪30年代发明了雷达,
- 40年代雷达和通讯得到飞速发展，自50年代第一颗人造卫星上天，卫星通讯事业得到迅猛发展。如今电磁波已在通讯、遥感、空间控测、军事应用、科学研究等诸多方面得到广泛的应用。

填空题

在如图所示的通有顺时针方向直流电流I的电路中，电源内部位于纸平面上的P点波印廷矢量S_p的方向是________。电阻R内部位于纸平面上的Q点波印廷矢量S_Q的方向是________。



计 算 题

在广播电台的**平均**辐射功率为10kW， 假定辐射的能流均匀分布在以电台为中心的半球面上。（1）求距离电台为r=10km处电磁波的**平均**能流密度；
2. 设上述距离处的电磁波在小范围内可以看称平面波，求该处电场强度和磁场强度的振幅。

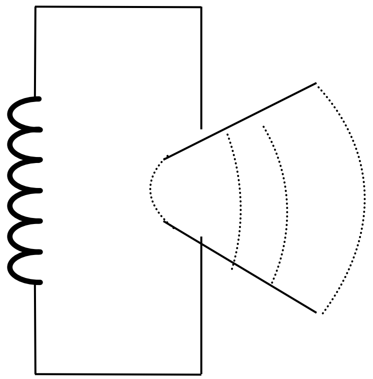
总　结

LC 回路能否有效地发射电磁波

解决途径：

(1) 提高回路振荡频率 $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

(2) 实现回路的开放



$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \qquad L = \mu_0 n^2 V$$

即增加电容器极板间距d，缩小极板面积S，减少线圈数n