选 择 题

下列关于电场强度的说法中，正确的是：

A. 公式$E=F/q$ 只适用于真空中点电荷产生的电场

B. 由公式$E=F/q$可知，电场中某点的电场强度E与试探电荷q在电场中该点所受电场力成正比。

C. 在公式$F=kQ_1Q_2/r^2$中，kQ_2/r^2是点电荷Q_2产生的电场在点电荷Q_1处的场强大小，而kQ_1/r^2是点电荷Q_1产生的电场在点电荷Q_2处场强的大小

。

D. 由公式$E=kQ/r^2$可知，在离点电荷非常近的地方（r趋于0）电场强度E可达无穷大

第1章 静电场

§1 库仑定律

§2 电场 电场强度

§3 静电场的高斯定理

总结：

库仑定律

$$\vec{f} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

场强定义

$$\vec{E} = \frac{\vec{f}}{q}$$

电场强度

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

场强叠加原理

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$$

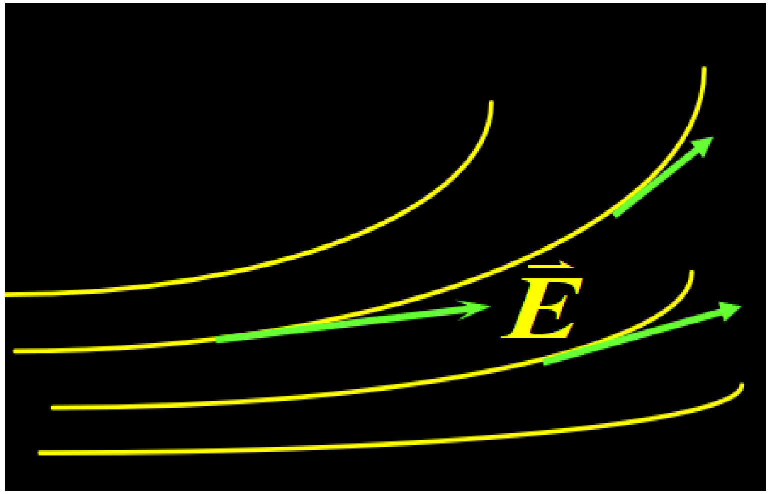
$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\hat{r}_i$$

§3 高斯定理

一.电场线

用一族空间曲线形象描述场强分布

电场线(electric field line)或**电力线**



1.规定

方向： 电场线上每一点的切线方向

大小：
- **定性** 疏密
- **定量** 垂直面积 规定条数

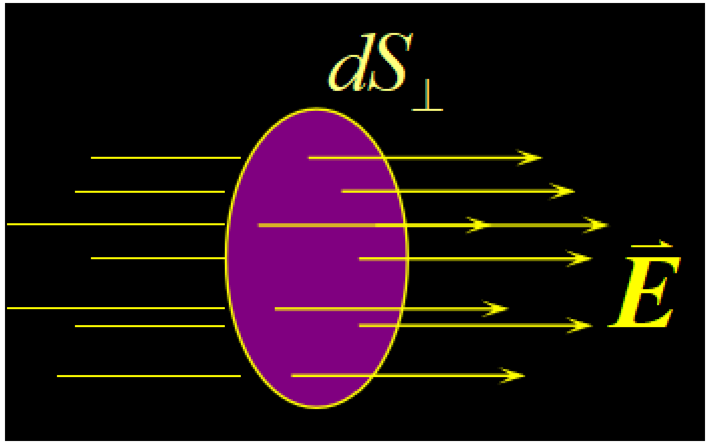
定量规定：

垂直通过单位面积的电场线条数等于该区域的电场强度值

即，

$$E = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}S_{\perp}}$$

$$\mathrm{d}\Phi = E\mathrm{d}S_{\perp}$$



式中的$\mathrm{d}\Phi$ 称为通过该面积的电通量

2. 电场线的性质

1)电场线起始于正电荷(或无穷远处)

终止于负电荷　不会在没有电荷处中断

2)两条电场线不会相交

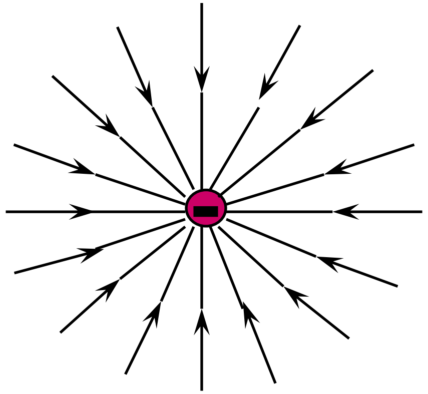
3)电场线不会形成闭合曲线

由静电场的基本性质和场的单值性决定的

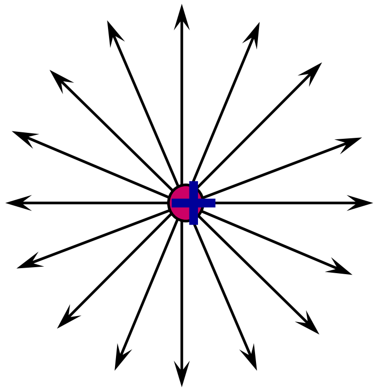
可用静电场的基本性质方程加以证明

各种不同带点体的电场线示意图

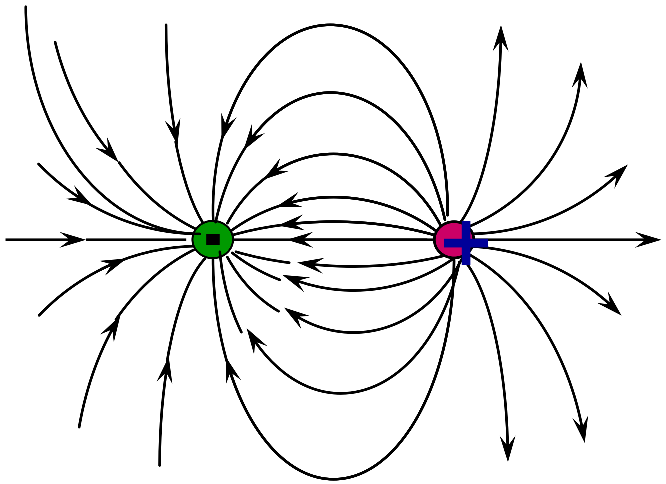
负电荷

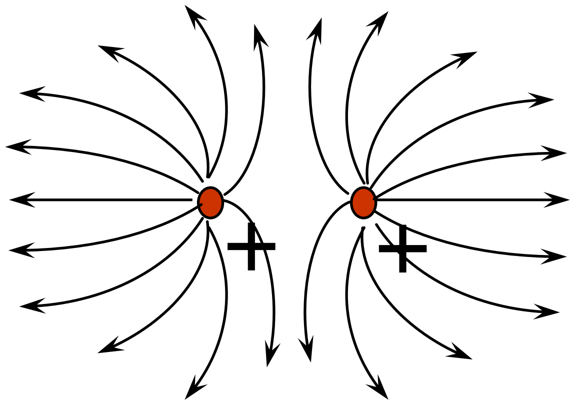


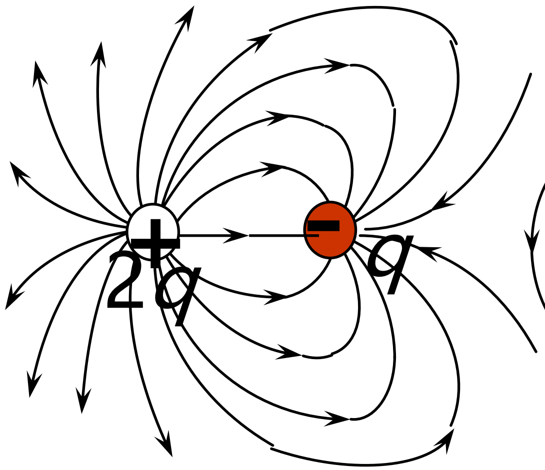
正电荷

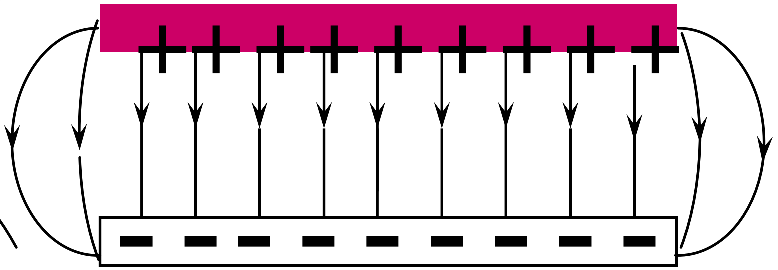


等量异号电荷









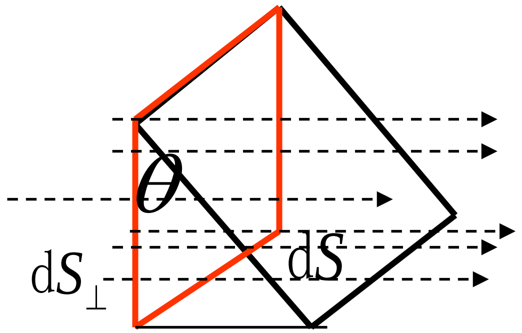
二.电通量

通过任意面积的电场线条数叫通过该面的电通量

由电场线的**定量规定** 有

$$\boxed{\mathrm{d}\Phi = E\mathrm{d}S_{\perp}}$$

匀强电场



将上式推广至一般面元

若面积元不垂直电场强度

由图可知: 通过 $\mathrm{d}S$和 $\mathrm{d}S_{\perp}$电场线条数相同

二.电通量

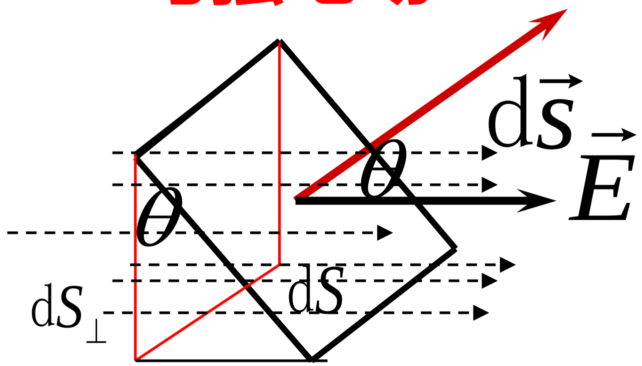
由图可知：通过 $\mathrm{d}S$和 $\mathrm{d}S_{\perp}$电场线条数相同

令 $\mathrm{d}\vec{S}=\mathrm{d}S\ \hat{n}$

$$\mathrm{d}\Phi=E\mathrm{d}S_{\perp}$$

$$=E\mathrm{d}S\cos\theta$$

匀强电场



$$\boxed{\mathrm{d}\Phi=\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}$$

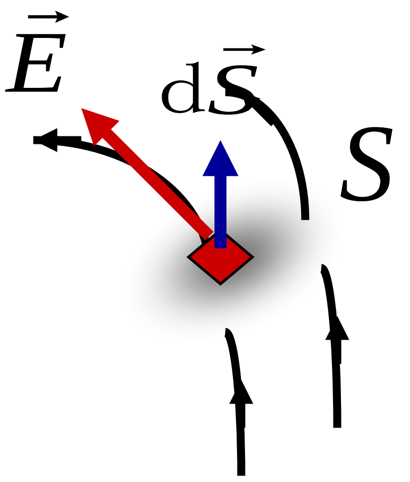
电通量的基本定义式

二.电通量

通过任意面积元的电通量

$$\mathrm{d}\Phi = \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

通过任意曲面的电通量：



把曲面分成许多个面积元

每一面元处视为匀强电场

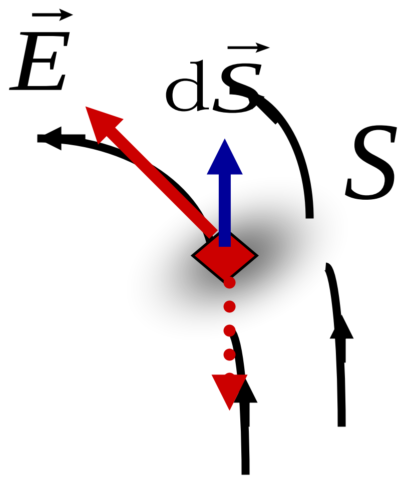
$$\boxed{\Phi = \int_S \mathrm{d}\Phi = \int_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}$$

讨论 1) $\mathrm{d}\Phi = \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$ 有正 有负

正负取决于面元的法线方向的选取

若取如实蓝箭头所示的法线方向 则 $\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} > 0$

若取如虚红箭头所示的法线方向 则 $\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} < 0$



物理上有意义的是求通过闭合面的电通量

2)通过闭合面的电通量

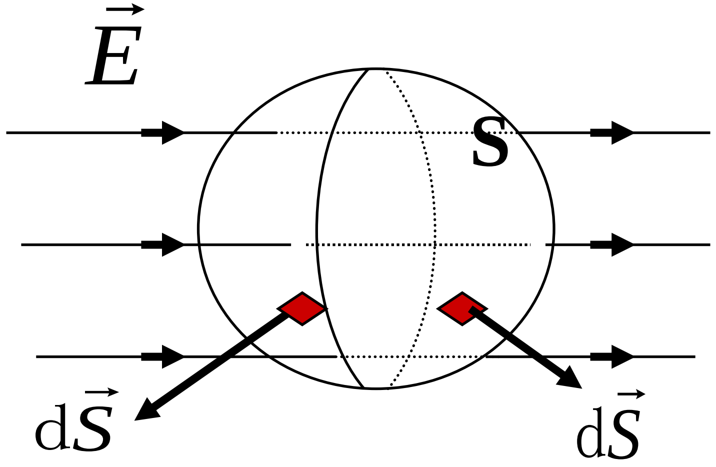
$$\boxed{\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}$$

规定：面元方向 ----由闭合面内指向面外

简称外法线方向

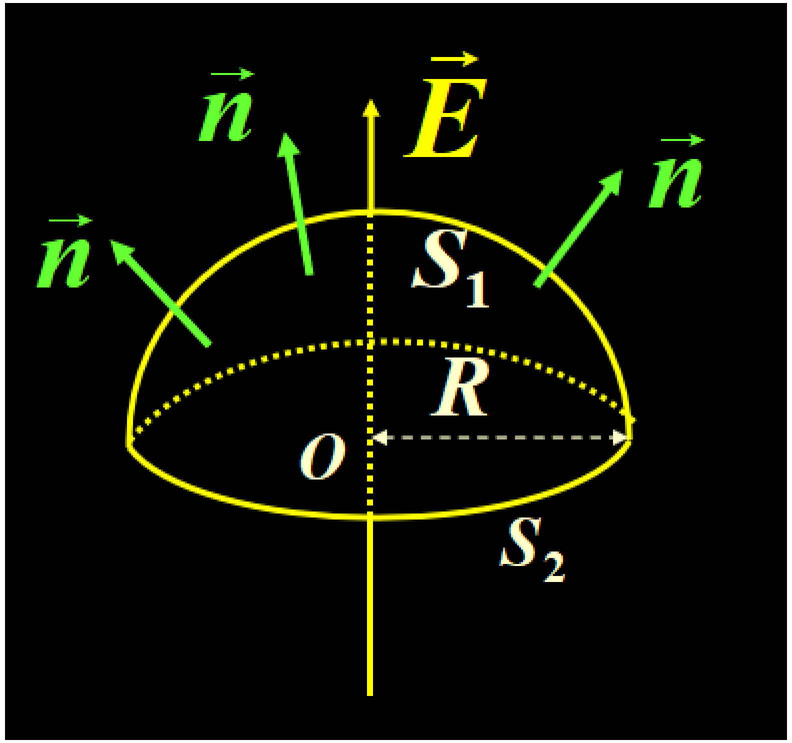
$\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} < 0$ 电场线穿入

$\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} > 0$ 电场线穿出



几何含义：通过闭合曲面的电场线的净条数

课堂练习　求均匀电场中一半球面的电通量。



$$\Phi_{S_1} = \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$= E \cdot S_2$$

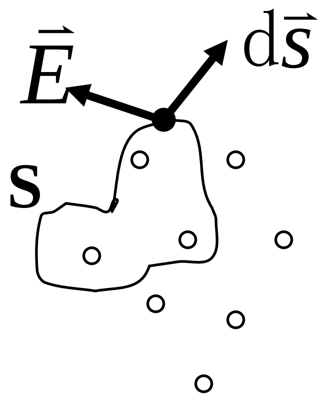
$$\Phi_{S_1} = E\pi R^2$$

三.静电场的高斯定理

1.表述

在真空中的静电场内，**任一闭合面**的**电通量**等于**这闭合面所包围的电量的代数和**除以 ε_0

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\sum_i q_{i内}}{\varepsilon_0}$$



2. 高斯定理关系式的导出

思路： 1）以点电荷场为例

取包围点电荷的高斯面

取不包围点电荷的高斯面

2）推广到一般

推导：

1）场源电荷是电量为Q的点电荷

高斯面包围该点电荷

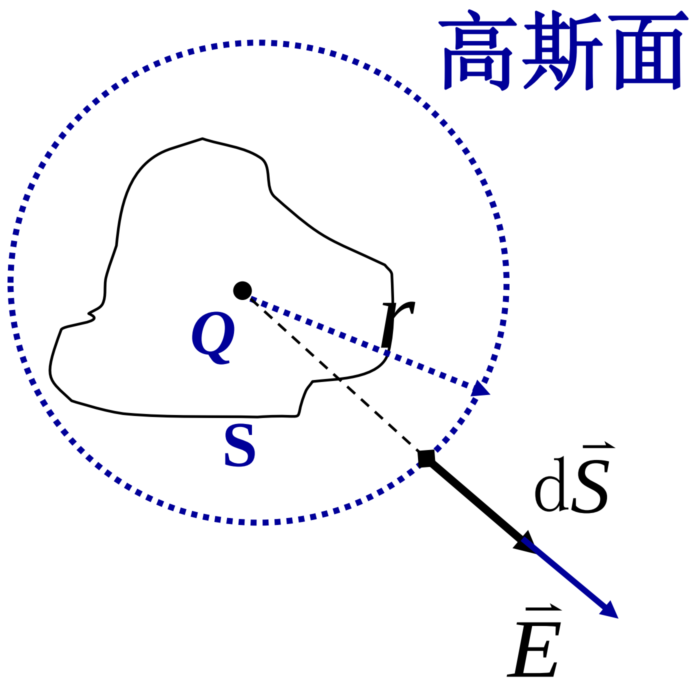
高斯定理关系式的导出

通过该高斯面的电通量?

根据电场线的连续性

等于以点电荷为球心的

任意半径的球面的电通量



计算通过球面的电通量

通过高斯球面任一面元 $\mathrm{d}\vec{S}$

的电通量是 $\mathrm{d}\Phi_e = \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$

$$= E\mathrm{d}S$$

通过高斯球面的电通量

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S E\mathrm{d}S = E\oint_S \mathrm{d}S = E4\pi r^2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

等于高斯面内电量代数和除以ε_0

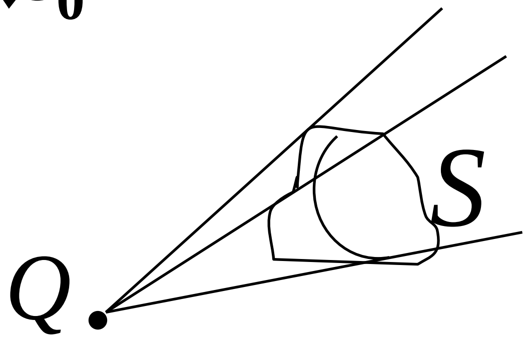
2)场源电荷仍是点电荷 但高斯面不包围电荷

电场线连续　　通量为零

等于高斯面内电量代数和除以ε_0

3)推广

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\sum_i q_{i内}}{\varepsilon_0}}$$



讨论

1)闭合面内、外电荷的贡献

对 $\vec{E}$ 都有贡献

对电通量 $\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$ 的贡献有差别

只有闭合面内的电量对电通量有贡献

2)静电场性质的基本方程　　有源场

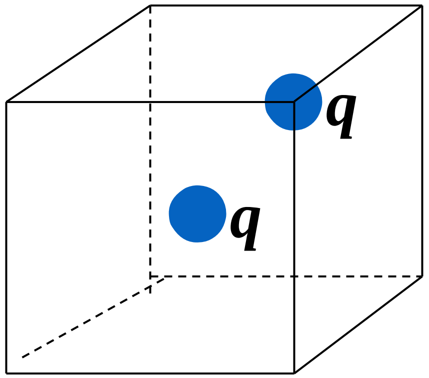
3)源于库仑定律　高于库仑定律

4)微分形式

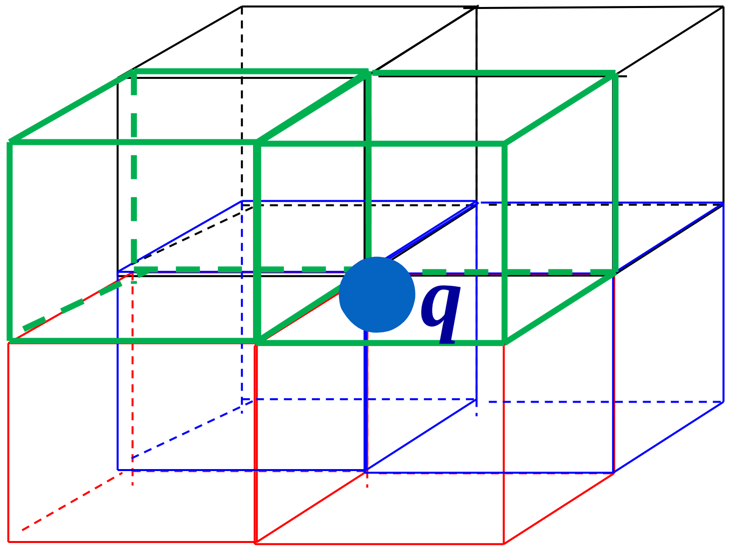
$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

讨 论

1．立方体边长 a，求



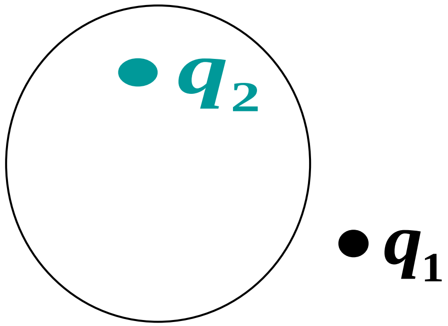
$$q\begin{cases}\text{位于中 心}\\ \text{位于一顶点}\end{cases}\quad\text{过每一面的通量}$$



$$\Phi_e=\frac{q}{6\varepsilon_0}$$

$$\Phi_e=\begin{cases}0\\ \dfrac{q}{24\varepsilon_0}\end{cases}$$

讨 论



2．如图　讨论

移动两电荷对场强及通量的影响

高斯定理的理解 $\Phi_e = \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i$

a. $\vec{E}$是闭合面各面元处的电场强度，是由全部电荷（面内外电荷）共同产生的矢量和，而过曲面的通量由曲面内的电荷决定。

b. 对连续带电体，高斯定理为 $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int dq$

$$\sum q_i > 0 \Rightarrow \Phi_e > 0$$

表明电场线从正电荷发出，穿出闭合曲面，所以正电荷是静电场的源头。

$$\sum q_i < 0 \Rightarrow \Phi_e < 0$$

表明有电场线穿入闭合曲面而终止于负电荷，所以负电荷是静电场的尾。

静电场是<u>有源场</u>

利用高斯定理计算具有对称性的电场

若某个电场可找到这样的高斯面，高斯面上的场强大小处处相等,则：$\Phi_e = \oint_s E\cos\theta dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i$

$$E\cos\theta \oint_S dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S\text{面内}} q_i$$

S面是一个简单易求的曲面面积：

$$E = \frac{\frac{1}{\varepsilon_0}\sum\limits_{S\text{内}} q_i}{\cos\theta \oint_S dS} = \frac{\frac{1}{\varepsilon_0}\sum\limits_{S\text{内}} q_i}{\cos\theta \;\; S}$$

四. 高斯定理在解场方面的应用

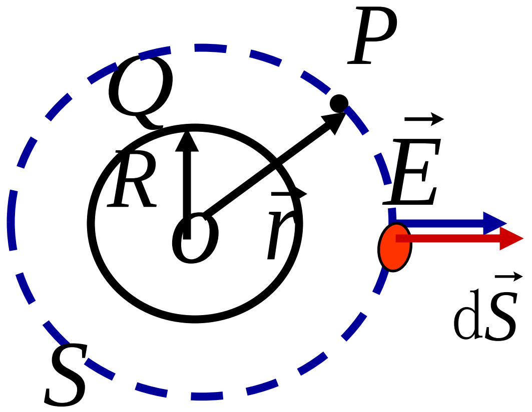
对电量的分布具有某种对称性的情况下

利用高斯定理解 $\vec{E}$ 较为方便

常见的电量分布的对称性：

	球对称	柱对称	面对称
均匀带电的	球体 球面 (点电荷)	无限长 柱体 柱面 带电线	无限大 平板 平面

例1 求电量为Q 半径为R 的均匀带电**球面**的电场强度分布



解:

第1步：根据电荷分布的对称性选取合适的高斯面(闭合面)

取过场点P的以球心 o 为心的球面

第2步：从高斯定理等式的左方入手计算高斯面的电通量

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S E \mathrm{d}S = E\oint_S \mathrm{d}S = E 4\pi r^2$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = E4\pi r^2$$

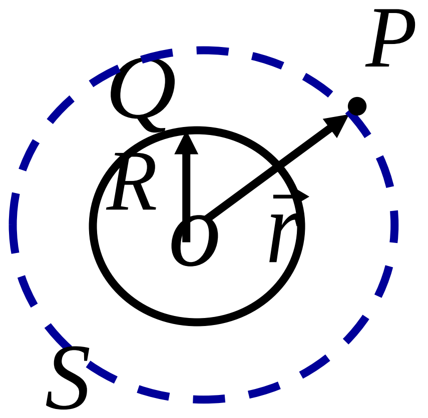
第3步：根据高斯定理列方程　解方程

$$E4\pi r^2 = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0} \longrightarrow E = \frac{\sum_i q_i}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

第4步：求过场点的高斯面内电量代数和

$$r < R \quad \sum_i q_i = 0$$

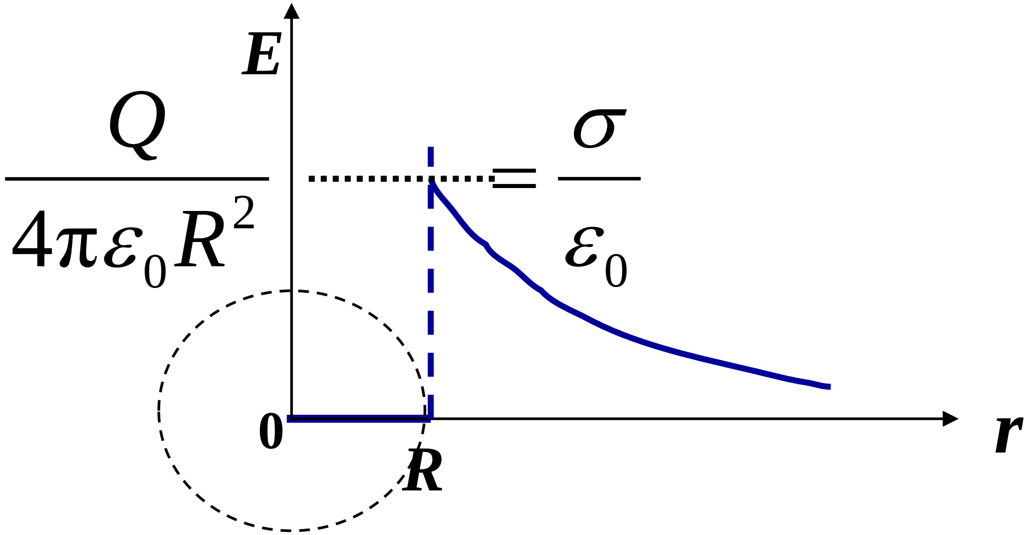
$$r > R \quad \sum_i q_i = Q$$



第5步：得解

$$r < R \quad E = 0$$

$$r > R \quad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



均匀带电球面电场分布

思考：

1）球面内场强为零到球面外突变 物理上合理吗?

实际情况应怎样?

2）小结此例选取的高斯面为解场带来的方便之处?

例2 均匀带电的无限长的直线　　线密度 λ

•对称性的分析　•取合适的高斯面

•计算电通量

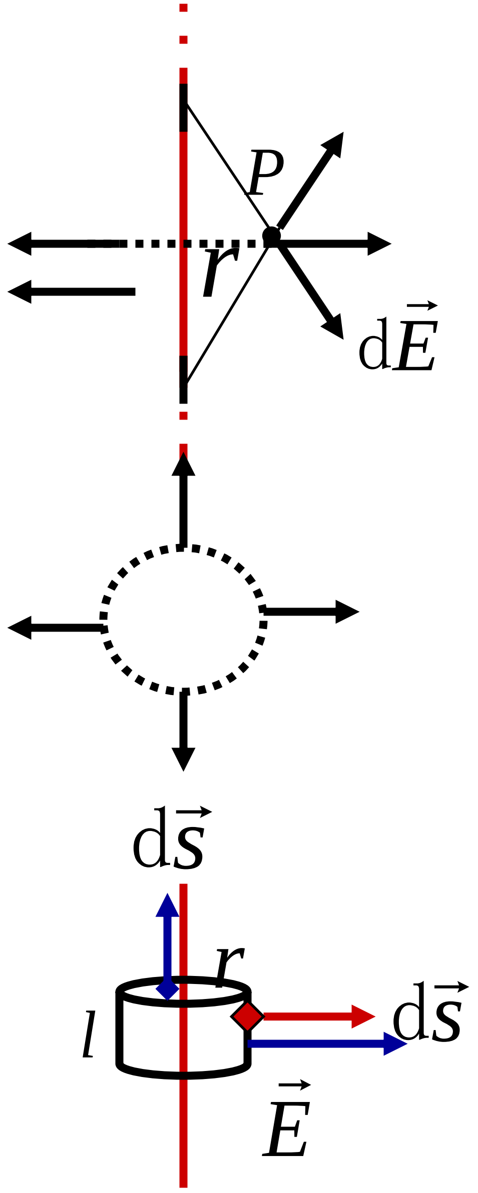
$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_{\text{侧面}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} + \int_{\text{两底面}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = E2\pi rl$$

•利用高斯定理解出E

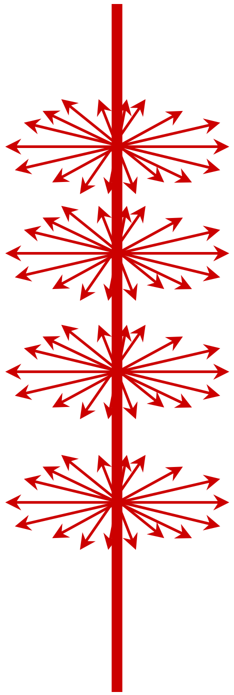
$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\sum_i q_{i\text{内}}}{\varepsilon_0}$$

$$E2\pi rl = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$



无限长带电直线场的分布是:



$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

思考：此例选取的高斯面在解场中的方便之处 与例1比较 总结选取高斯面的规律

例5. 均匀带电圆柱面的电场。沿轴线方向单位长度带电量为λ

解：场具有轴对称　　　高斯面：圆柱面

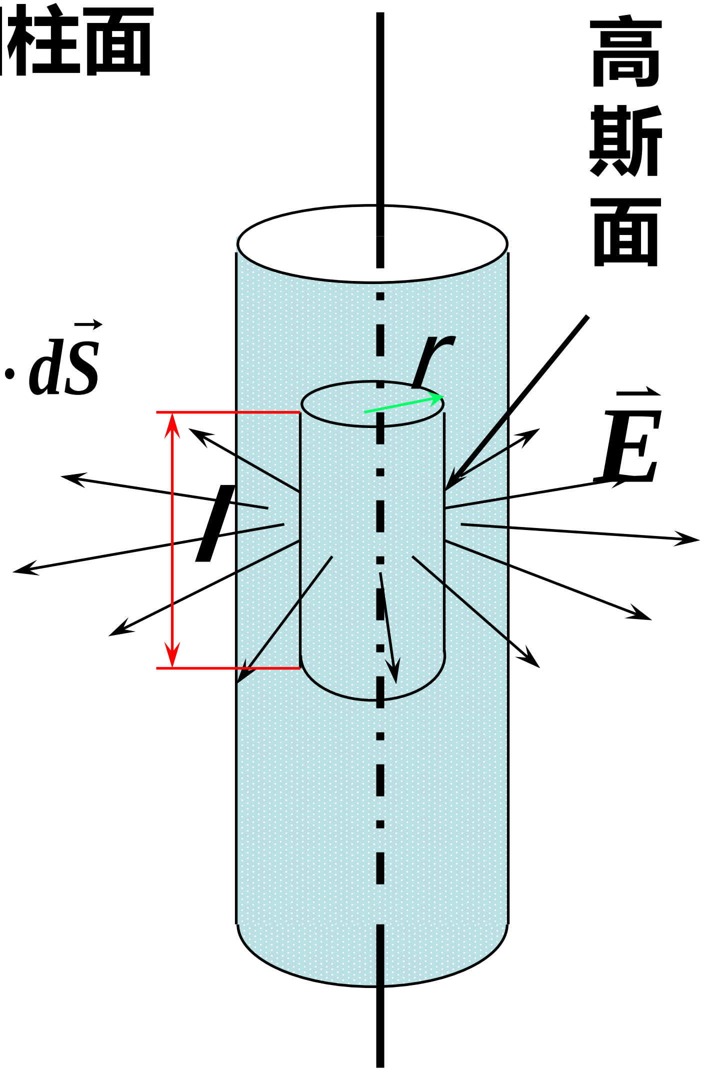
(1) r <R

$$\Phi_e = \oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{上底} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{下底} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{侧面} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= 0 + 0 + 2\pi r l E$$

$$\sum q_i = 0$$

$$E = 0$$



(2) $r > R$

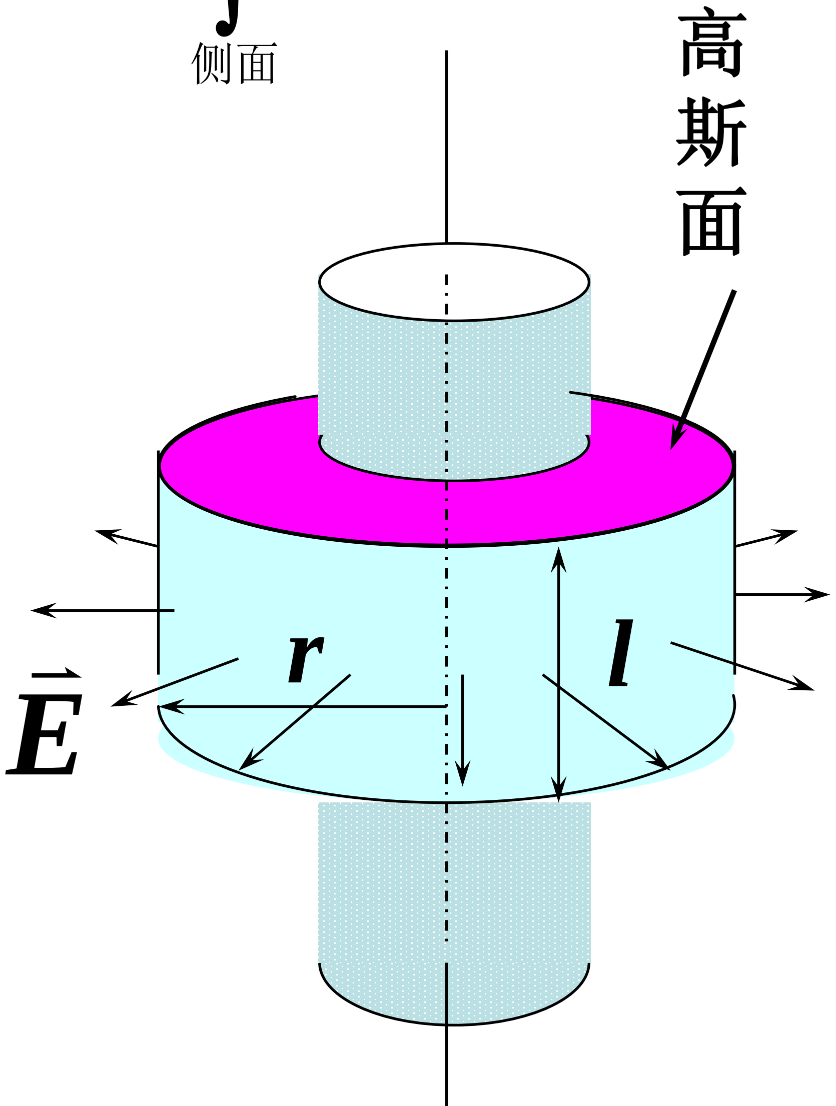
$$\Phi_e = \oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{上底} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{下底} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{侧面} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= 2\pi r l E$$

$$\sum q_i = 2\pi R l \sigma$$

$$E = \frac{R\sigma}{r\varepsilon_0}$$ 令 $\lambda = 2\pi R\sigma$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$

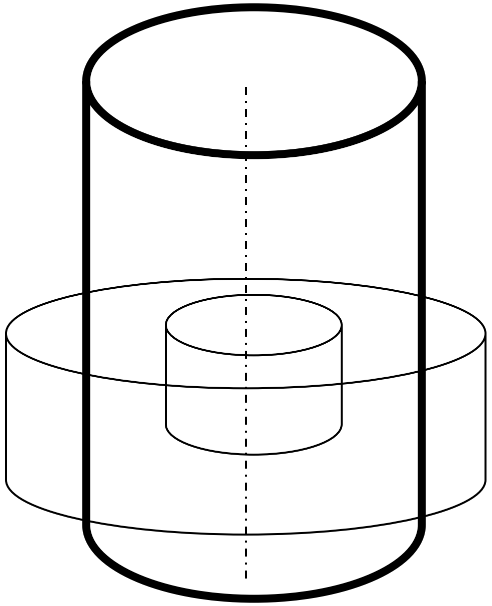


课堂练习：

求均匀带电圆柱体的场强分布，已知R，λ

$$r < R \qquad E2\pi rl = \frac{\lambda}{\varepsilon_0 \pi R^2}\pi r^2 l$$

$$r > R \qquad E2\pi rl = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$



$$E = \begin{cases} \dfrac{\lambda r}{2\pi\varepsilon_0 R^2} & r < R \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} & r > R \end{cases}$$

例3. 均匀带电**球体**的电场。已知q, R

解： 1） r<R

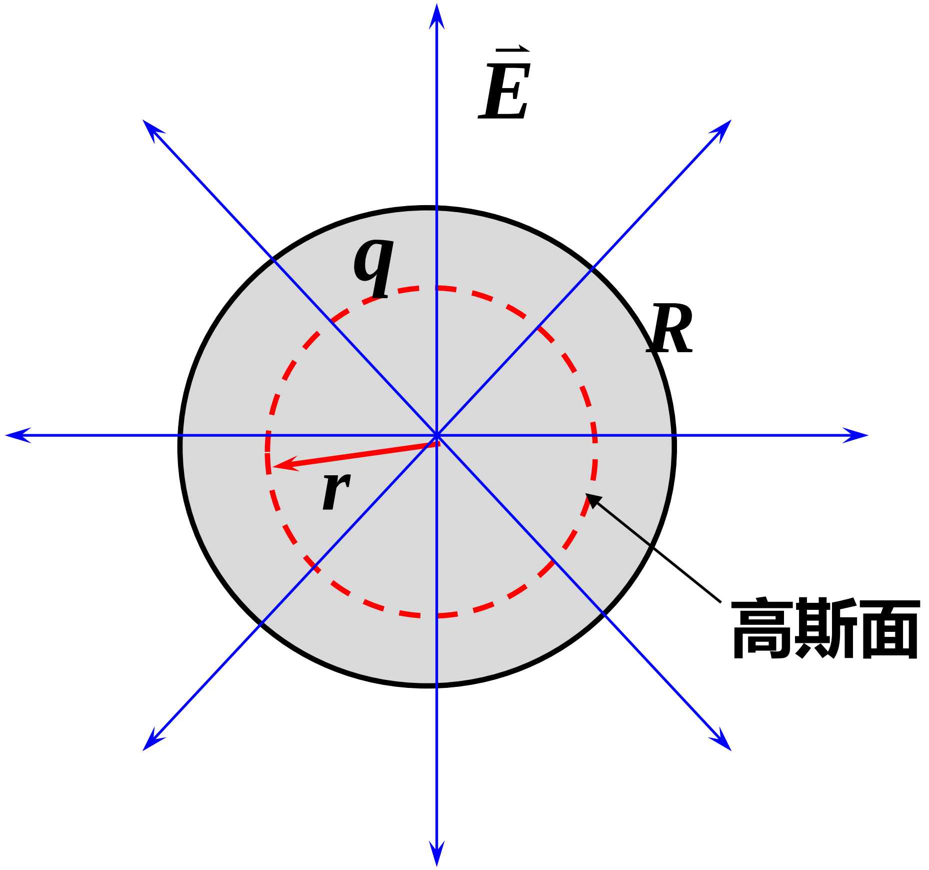
$$\Phi_e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E4\pi r^2$$

$$\sum q_i = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$E4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{qr^3}{R^3}$$

场强：

$$\boxed{E = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}}$$



2） $r>R$

电通量

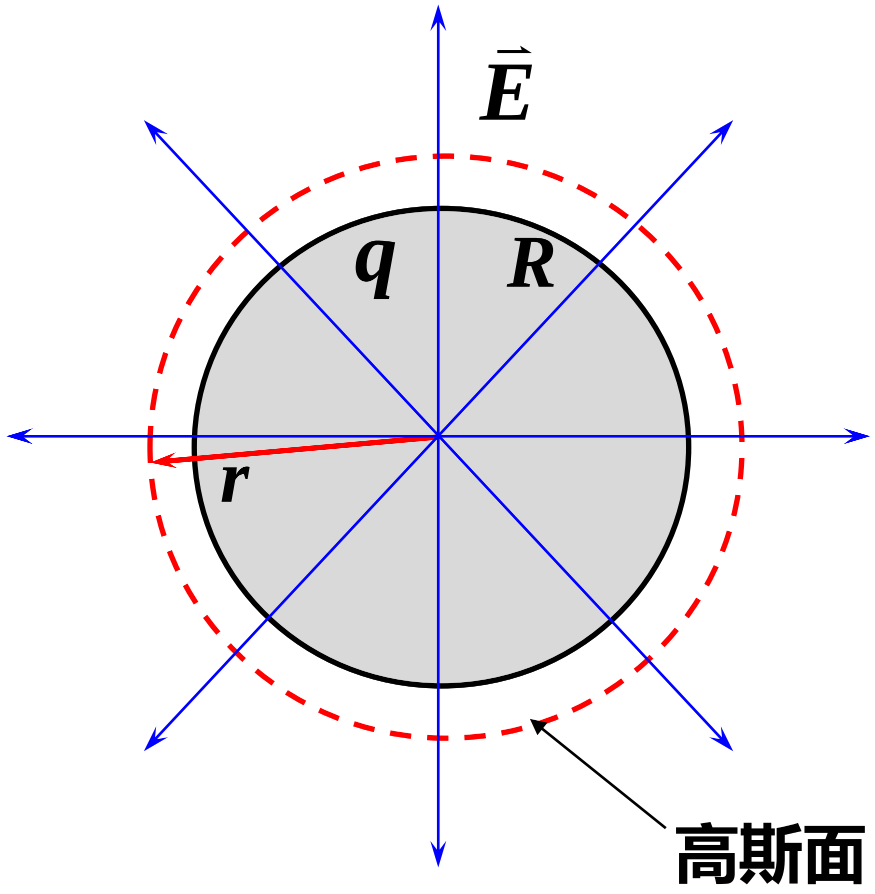
$$\Phi_e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E\,4\pi r^2$$

电量 $\sum q_i = q$

高斯定理

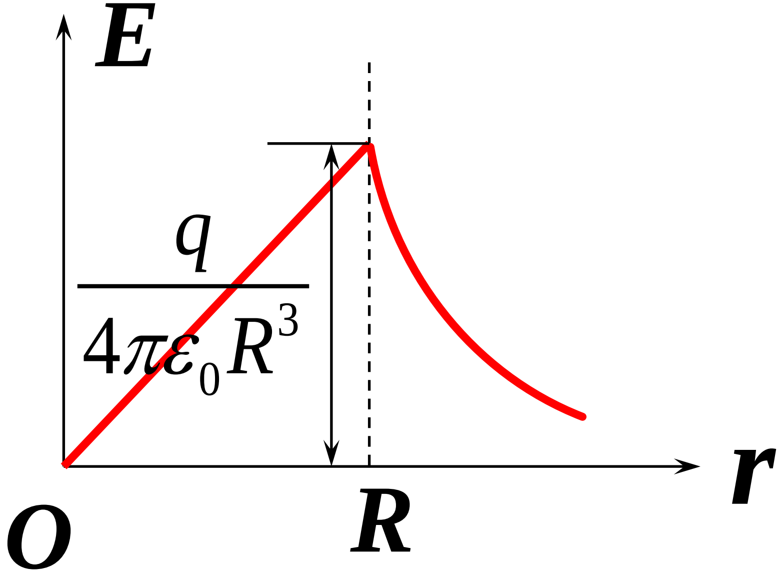
$$E\,4\pi r^2 = q/\varepsilon_0$$

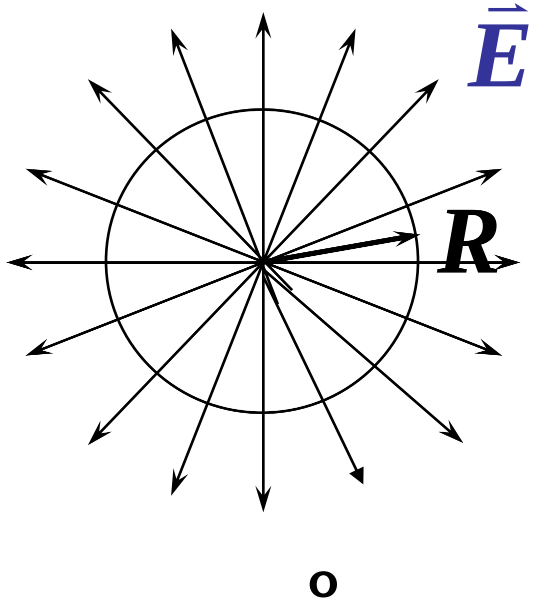
场强 $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$



均匀带电球体电场强度分布曲线

$$\begin{cases} E = \dfrac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\hat{r} & (r < R) \\ \vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & (r > R) \end{cases}$$

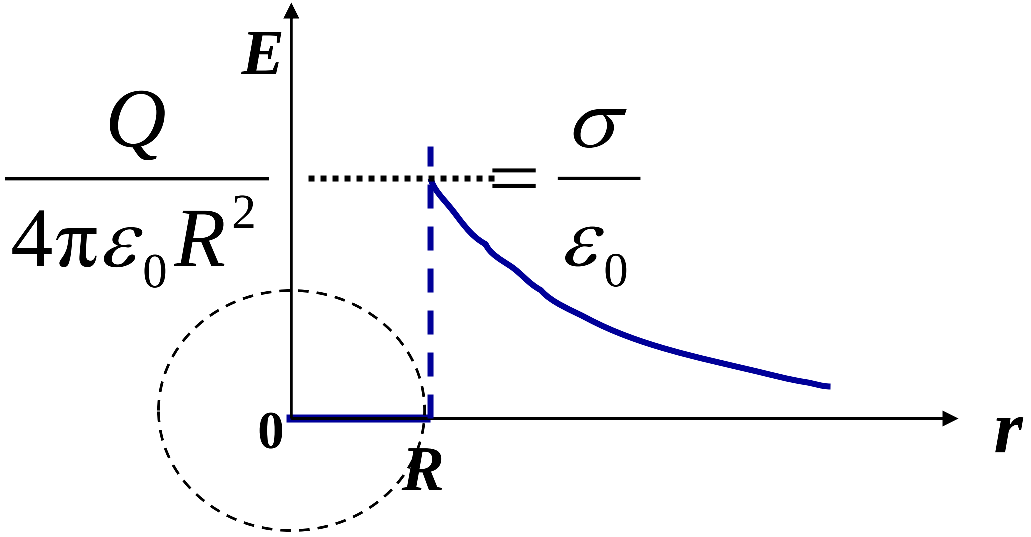




第5步：得解

$$r < R \quad E = 0$$

$$r > R \quad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



均匀带电球面电场分布

思考：

1）球面内场强为零到球面外突变 物理上合理吗?

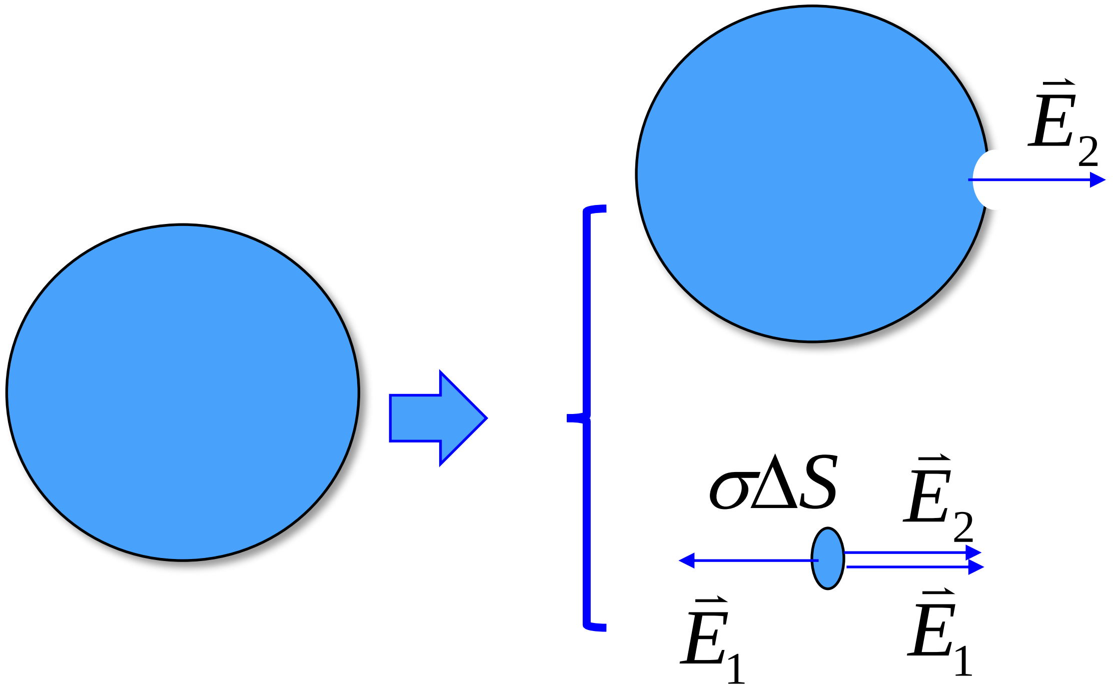
实际情况应怎样?

2）小结此例选取的高斯面为解场带来的方便之处?

计算题：均匀带电球面上电场强度的求解

均匀带电球面电场分布

$$\vec{E}=\begin{cases}0 & r<R\\[2ex] \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & r>R\end{cases}$$



剩余部分

面元ds

内部无限趋于该处： $E_1-E_2=0$

外部无限趋于该处： $E_1+E_2=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$

解得球面上电荷元感受到的电场：

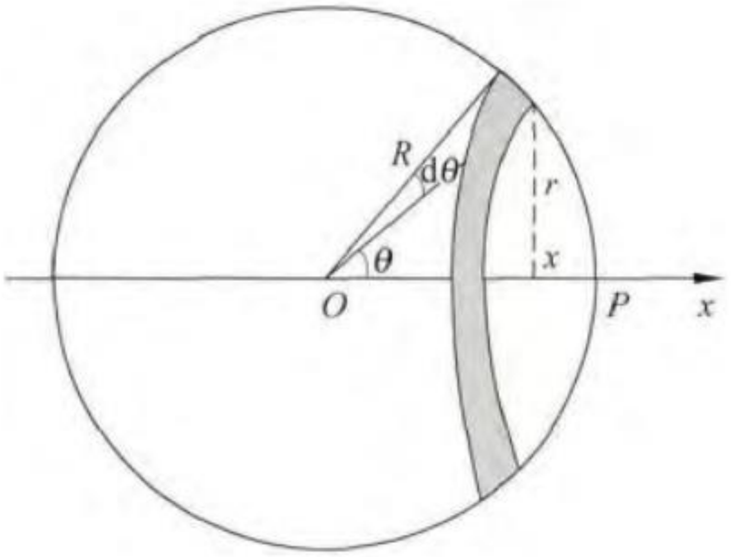
$$E_1=E_2=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^2}$$

计算题：均匀带电球面上电场强度的求解

采用电场强度的叠加原理，把球面分成许多的均匀带电圆环组成，求均匀带电圆环的轴线上一点的电场强度的叠加

圆环的面积：

$$dS = 2\pi R\sin\theta R\,d\theta = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$$



圆环的带电量：

$$dq = \sigma ds$$

带电圆环的轴线上一点的场强：

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\,dq}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$x = R - R\cos\theta$$

$$r = R\sin\theta$$

$$E_P = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^2}$$

例4. 均匀带电无限大平面的电场，已知σ

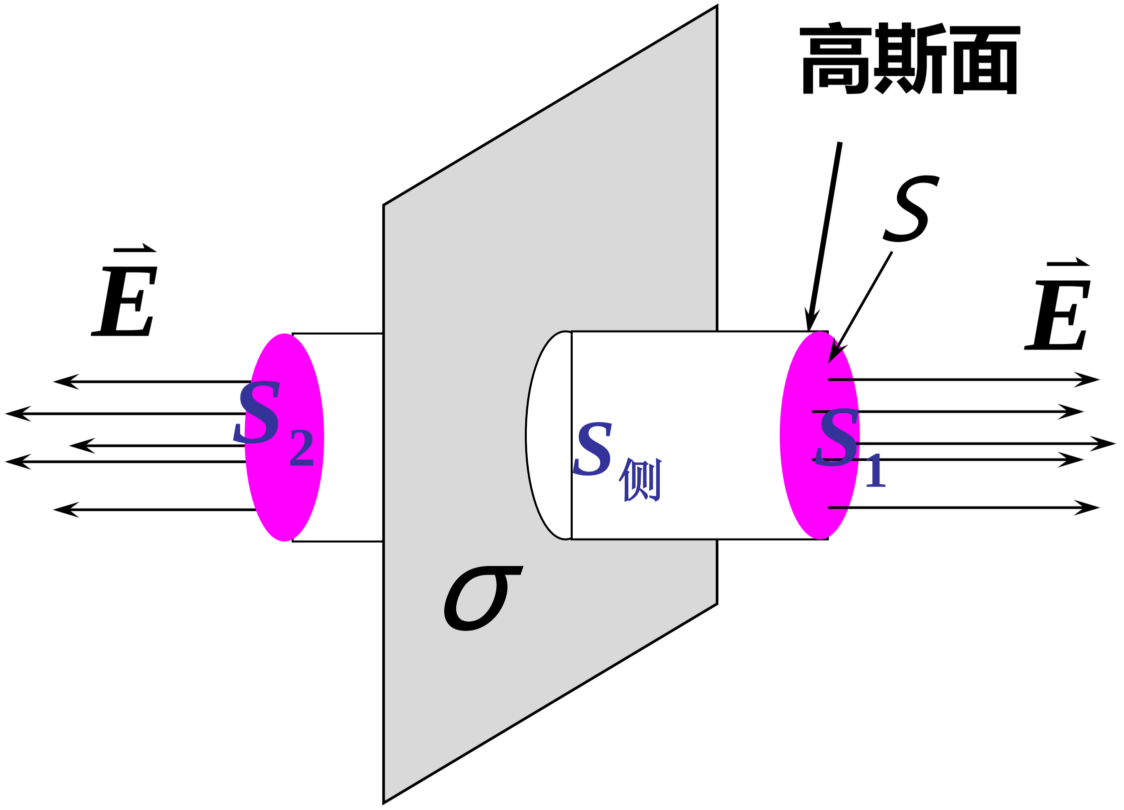
解：$\vec{E}$ 具有面对称高斯面：柱面

$$\Phi_e = \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{S_{侧}} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= ES_1 + ES_2 + 0 = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma S$$

$$2ES = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma S$$

$$\boxed{\therefore E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$



典型结果

点电荷 $\vec{E}=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$

无限长均匀带电线 $\vec{E}=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}$

均匀带电球面
$$\begin{cases} E=0 & (r<R) \\ \vec{E}=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & (r>R) \end{cases}$$

无限长均匀带电柱面
$$\begin{cases} E=0 & (r<R) \\ \vec{E}=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r} & (r>R) \end{cases}$$

均匀带电球体
$$\begin{cases} E=\dfrac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\hat{r} & (r<R) \\ \vec{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & (r>R) \end{cases}$$

无限大均匀带电平面 $E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

2.高斯定理的证明　　库仑定律 + 叠加原理

思路：先证明点电荷的场

然后推广至一般电荷分布的场

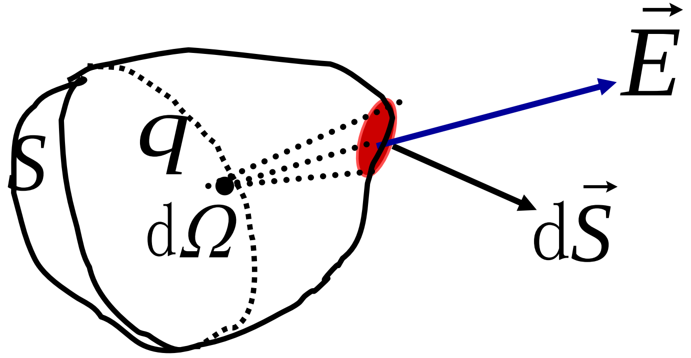
1) 源电荷是点电荷

在该场中取一包围点电荷的闭合面(如图示)

在闭合面S上任取面元　$\mathrm{d}\vec{S}$

该面元对点电荷所张的立体角　$\mathrm{d}\Omega$

点电荷在面元处的场强为　$\vec{E}$



$$\mathrm{d}\Phi = \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \frac{q\,\mathrm{d}s\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{d}\Omega$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \oint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{d}\Omega$$

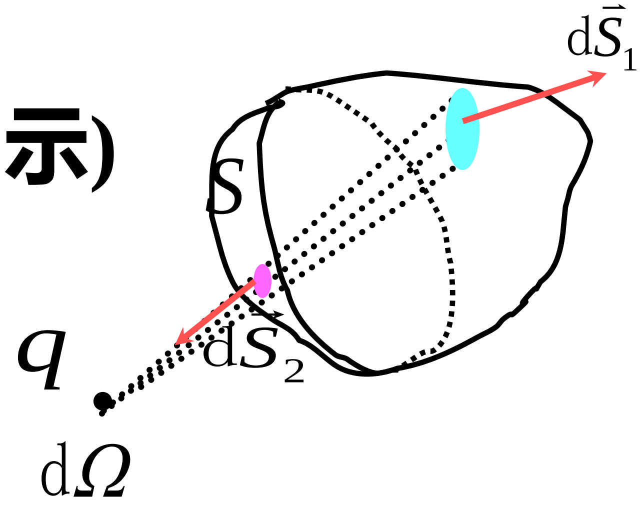
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \mathrm{d}\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

在所设的情况下得证

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{\sum_i q_{内i}}{\varepsilon_0}}$$

2)源电荷仍是点电荷

取一闭合面不包围点电荷(如图示)



在闭合面上任取面元 $\mathrm{d}\vec{S}_1$

该面元对点电荷张的立体角

为 $\mathrm{d}\Omega$ **也对应面元** $\mathrm{d}\vec{S}_2$

两面元处对应的点电荷的电场强度分别为 $\vec{E}_1$，$\vec{E}_2$

$$\mathrm{d}\Phi = \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S}_1 + \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S}_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}\hat{r}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S}_1 + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}\hat{r}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S}_2$$

$$= \frac{q\mathrm{d}S_1\cos\theta_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} + \frac{-q\mathrm{d}S_2\cos\theta_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{d}\Omega - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{d}\Omega = 0$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

此种情况下仍得证

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}}$$

3) 源和面均 任意

根据叠加原理可得

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S \sum_i \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}$$