第14章　麦克斯韦电磁场方程

§1 位移电流　感生磁场

§2 麦克斯韦电磁场方程组

§3 电磁波能量 电磁波辐射

§4 电磁场的物质性　统一性　相对性

回顾前面几章所涉及的电场和磁场：

- 电场

静电场

静止电荷产生

感生电场

由于存在 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$

- 磁场

稳恒磁场

恒定电流产生

是否存在感生磁场

是否由于 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{E}}{\mathrm{d}t}$

13-5　麦克斯韦电磁场理论

麦克斯韦是19世纪英国伟大的物理学家、数学家。

麦克斯韦主要从事电磁理论、分子物理学、统计物理学、光学、力学、弹性理论方面的研究。尤其是他建立的**电磁场理论**，将**电学、磁学、光学统一起来**，是19世纪物理学发展的最光辉的成果，是科学史上**最伟大的综合之一**。

麦克斯韦（James Clerk Maxwell 1831----1879)

麦克斯韦 对电场和磁场的基本规律着手进行了系统的总结：

1、 恒定电、磁场的性质归纳为四个基本方程。

关于静电场和恒定磁场分别具有以下性质：

静电场的性质：

$$\oiint \vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum q_0$$ ——说明静电场是**有源场**

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$$ ——说明静电场是**保守力场**

恒定磁场的性质：

$$\oiint \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$$ ——说明恒定磁场是**无源场**

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum I_0$$ ——说明恒定磁场**是非保守力场**

2、变化的电磁场

对于**变化的磁场**，麦克斯韦提出了“**有旋电场**”假说，根据法拉第电磁感应定律可以得到普遍情况下电场的环路定理

$$\boxed{\oint_L \vec{E}_{涡} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}}$$

另外，当时的理论和实验都表明**电场的高斯定理和磁场的高斯定理在变化的电、磁场中依然成立**

问题的焦点: 磁场的安培环路定理在变化的电、磁场中是否还适用？ 如不适用应如何修正?

恒定磁场中，安培环路定理可以写成。

$$\boxed{\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum_S I_0}$$

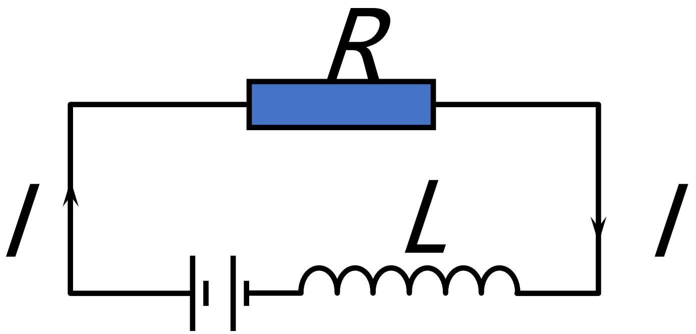
式中 $\sum\limits_S I_0$ 是穿过以 L 回路为边界的任意曲面 S 的传导电流。

问题:

在电流非稳恒状态下（非恒定场的情形时），安培环路定理是否正确？

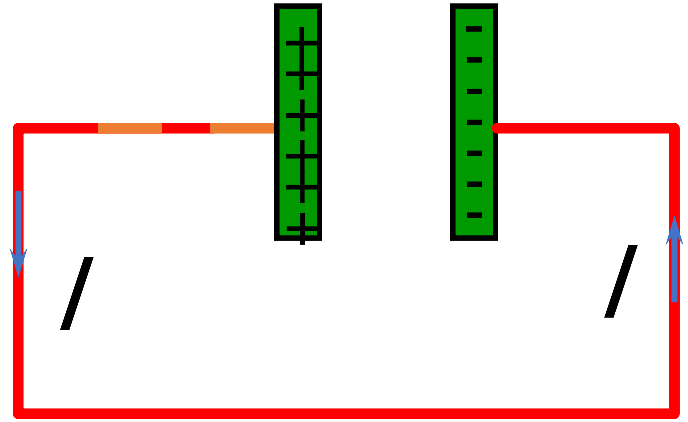
☀电流的连续性问题:

包含电阻、电感线圈的电路,电流是连续的.



包含有电容的电流是否连续?

?



电流的连续性问题:

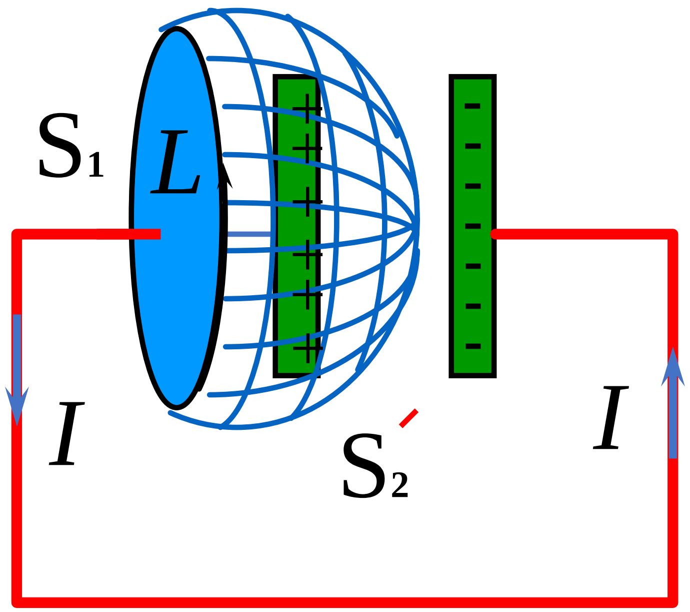
对L所围成的S_1面

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \iint_{S_1} \vec{j}\cdot d\vec{S} = I$$

对L所围成的S_2面

矛盾

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \iint_{S_2} \vec{j}\cdot d\vec{S} = 0$$



显然，H 的环流不再是唯一确定的了。

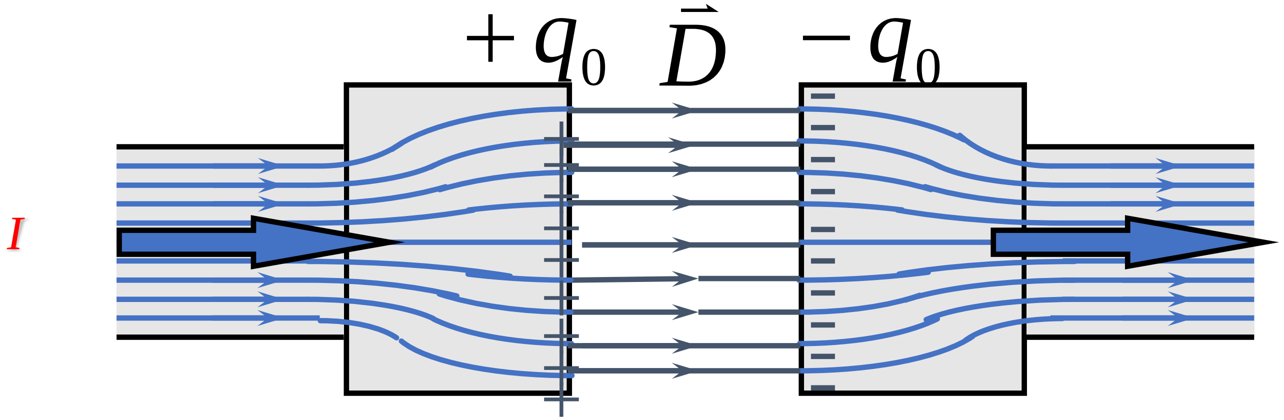
这说明安培环路定律在非恒定场中须加以修正。

实验分析

电容器充放电时传导电流和极板上电荷、极板间电场存在什么样的关系呢?

如充电时 $q\uparrow \longrightarrow \sigma\uparrow \longrightarrow D\uparrow$

$\left.\begin{matrix}\boxed{\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}}\\ \boxed{\vec{D}}\end{matrix}\right\}$ **同向**　　$\left.\begin{matrix}\boxed{\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}}\\ \boxed{I}\end{matrix}\right\}$ **同向**

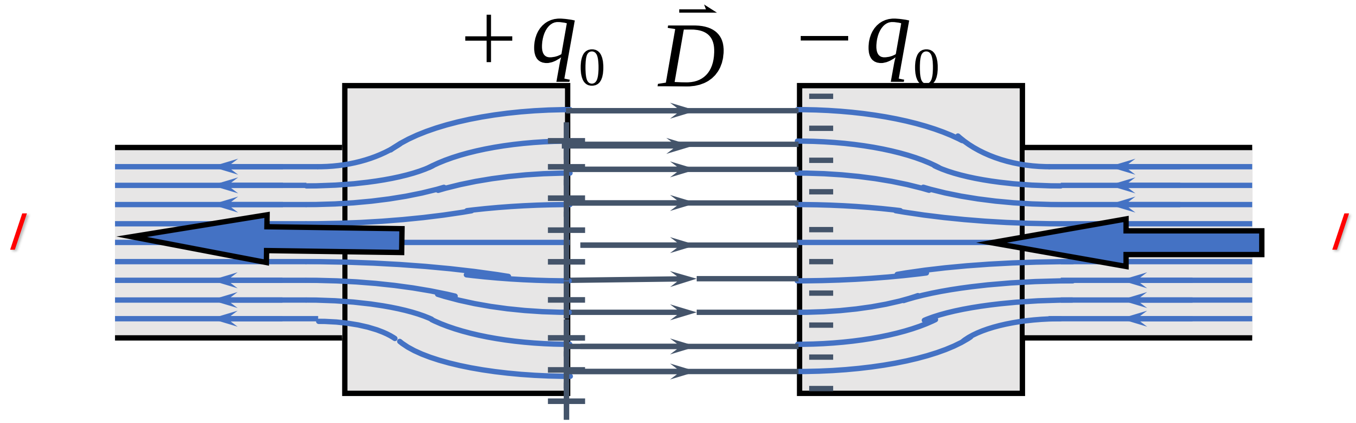


实验分析

如放电时 $q\downarrow \longrightarrow \sigma\downarrow \longrightarrow D\downarrow$

$\left.\begin{array}{c}\boxed{\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}}\\ \boxed{\vec{D}}\end{array}\right\}$ **反向**

$\left.\begin{array}{c}\boxed{\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}}\\ \boxed{\boldsymbol{I}}\end{array}\right\}$ **同向**

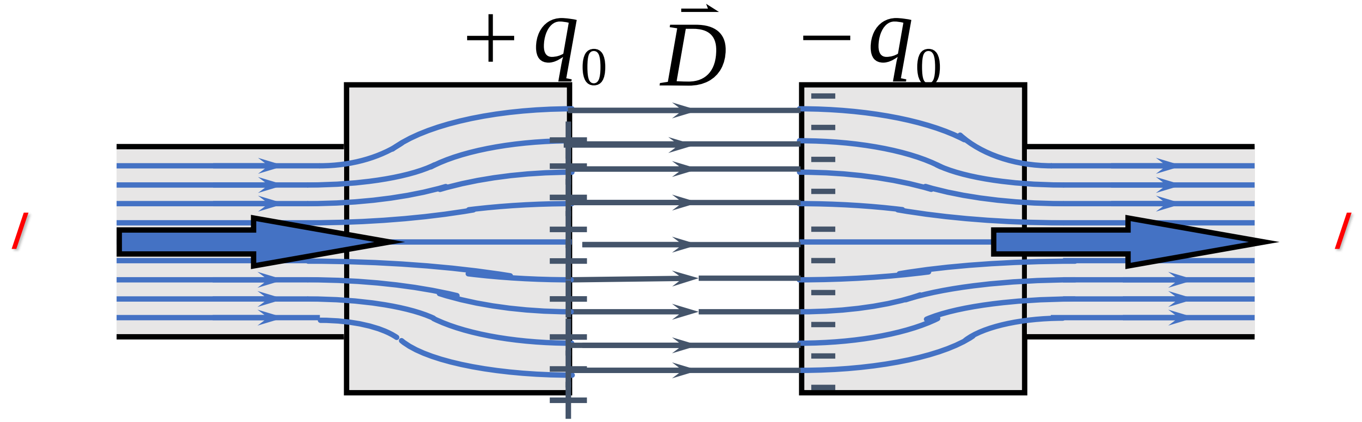


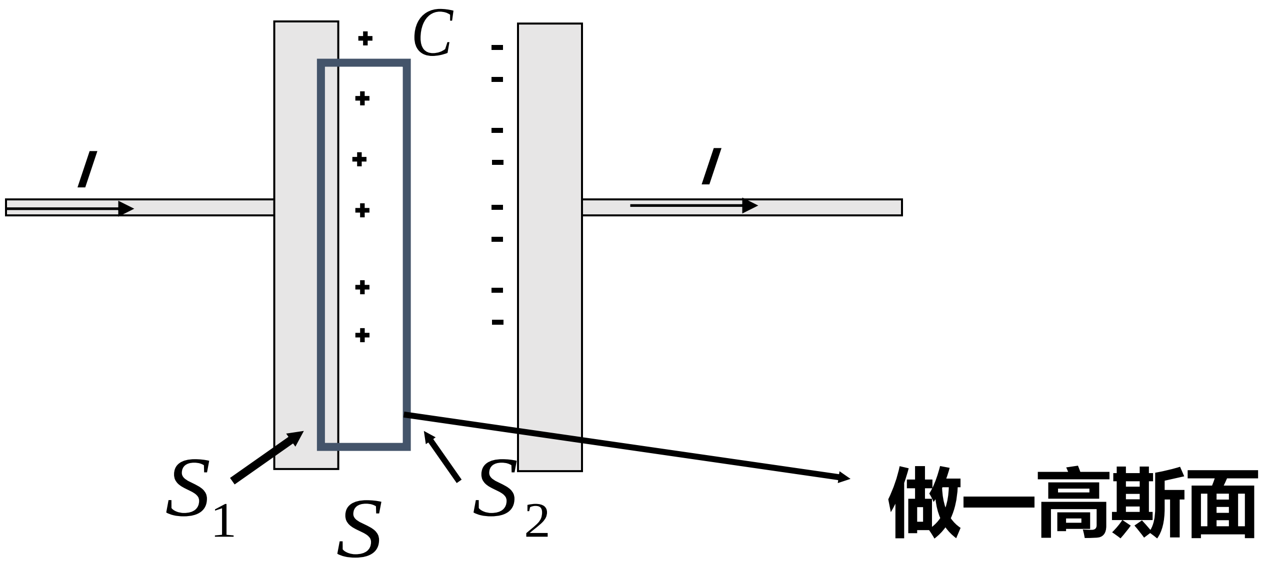
结论：

充电时，极板间变化电场 $\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 的方向和传导电流同向。

放电时，极板间变化电场 $\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 的方向仍和传导电流同向。

通过演示现象观察可知：回路中的传导电流和极板间的电位移对时间的变化率有密切的关系！





由高斯定理:

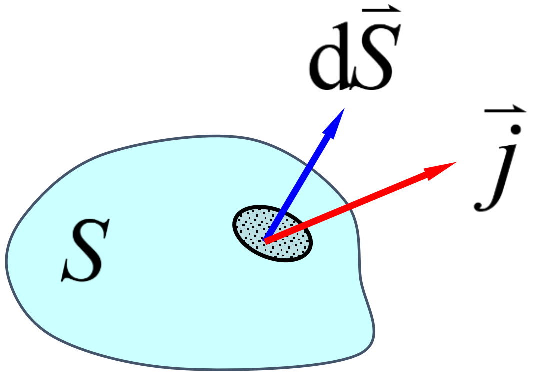
$$q = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

两边微分

$$\frac{dq}{dt} = \oint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

电流连续性方程

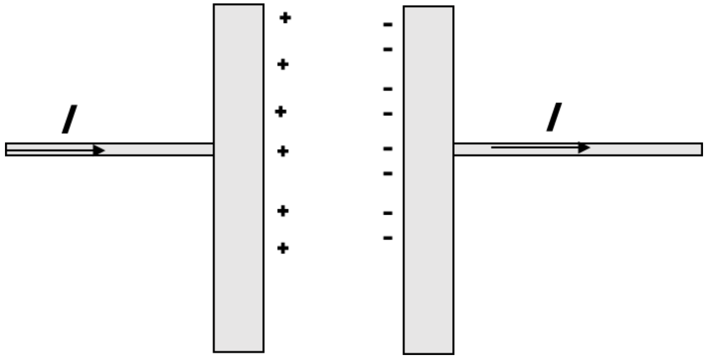
$$I=\frac{dq}{dt} \qquad \oint_S \vec{j}\bullet d\vec{S}=-\frac{dq_{内}}{dt}$$



$$\frac{dq}{dt}=\oint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\frac{dq}{dt}=-\oint_S \vec{j}\bullet d\vec{S}$$

$$\oint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}=-\oint_S \vec{j}\bullet d\vec{S}$$



$$\oint_S \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}+\vec{j}\right)\cdot d\vec{S}=0$$

恒 定 电 流 $\oint_S \vec{j}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0$

全电流密度为： $J_{全}=\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}+\vec{j}$

全电流密度为： $$\boxed{J_{全} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}}$$

位移电流密度为： $$\vec{j}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

传导电流密度为： $$\vec{j}$$

通过对传导电流和极板间电位移矢量之间关系的推导。可以得出一个重要的结论：

非恒定的情况下，$\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 的地位与电流密度 j 相当。

麦克斯韦假设： 变化的电场像传导电流一样能产生磁场，从产生磁场的角度看，变化的电场可以等效为一种电流.

定义

$$\begin{cases} I_d = \dfrac{d\Phi_e}{dt} = \int_S \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{J}_d \cdot d\vec{S} \\ J_d = \dfrac{\partial D}{\partial t} \end{cases}$$

(位移电流密度)

通过电场中某截面的位移电流强度 I_d 等于通过该截面的电位移通量对时间的变化率。

电场中某点位移电流密度矢量 $\vec{J}_d$ 等于该点电位移矢量对时间的变化率。

全电流和全电流定律

在一般情况下,传导电流和位移电流可能同时通过某一截面,因此,麦克斯韦引入全电流.

全电流

通过某一截面的全电流是通过这一截面的传导电流和位移电流的代数和.

在任一时刻,电路中的全电流总是连续的.而且, 在非稳恒的电路中,安培环路定律仍然成立.

全电流定律

$$\boxed{\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum I + I_d = \int_s \vec{j}\cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}}$$

利用斯托克斯定理，有

$$\int_s (\nabla\times\vec{H})\cdot d\vec{S} = \int_s (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t})\cdot d\vec{S}$$

因S是任意的，则：

$$\boxed{\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}} = \vec{\boldsymbol{j}} + \frac{\partial \vec{\boldsymbol{D}}}{\partial t}}$$

位移电流的实质

从安培环路定理的普遍形式

$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum I + I_d = \int_s \vec{j}\cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

稳恒电流　　变化的电场

可知，麦克斯韦位移电流假说的实质在于，

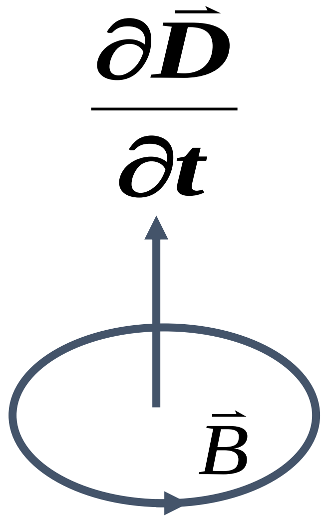
它指出不仅传导电流可以在空间激发磁场，

位移电流同样可以在空间激发磁场。

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I + I_d = \int_s \vec{j} \cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

在真空中安培环路定理表示成更为简洁的形式

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$



右手螺旋关系

位移电流假说的核心：

变化的电场可以激发磁场。

麦克斯韦的**有旋电场假说**和**位移电流假说**为建立**统一的电磁场理论奠定了理论基础**

位移电流与传导电流的比较:

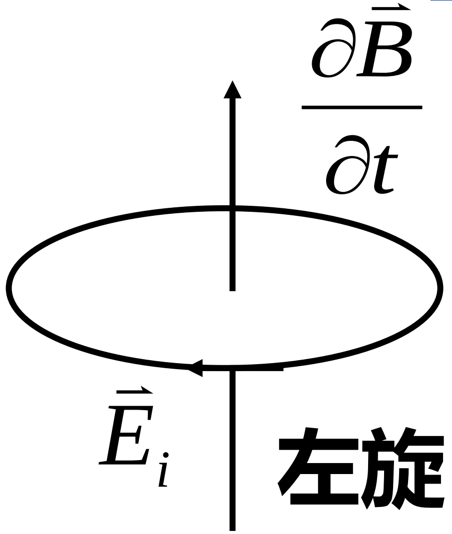
传导电流	位移电流
自由电荷的定向移动	电场的变化
通过导体产生焦耳热	真空中无热效应
只能存在于导体中	可以存在于真空、导体、电介质中

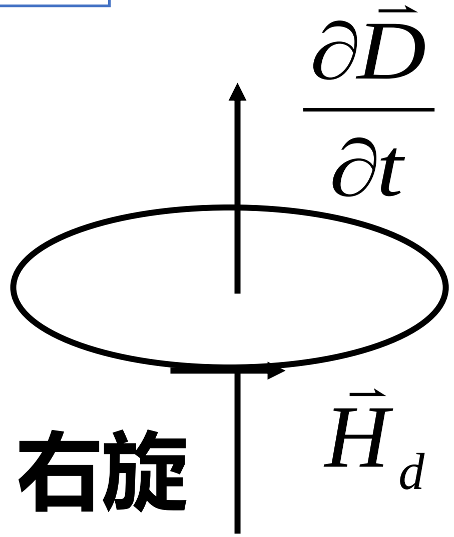
传导电流和位移电流位移方向相同，
在激发磁场上是等效.

$$\oint_l \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{H}_d \cdot d\vec{l} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

(H_d为I_d产生的涡旋磁场)



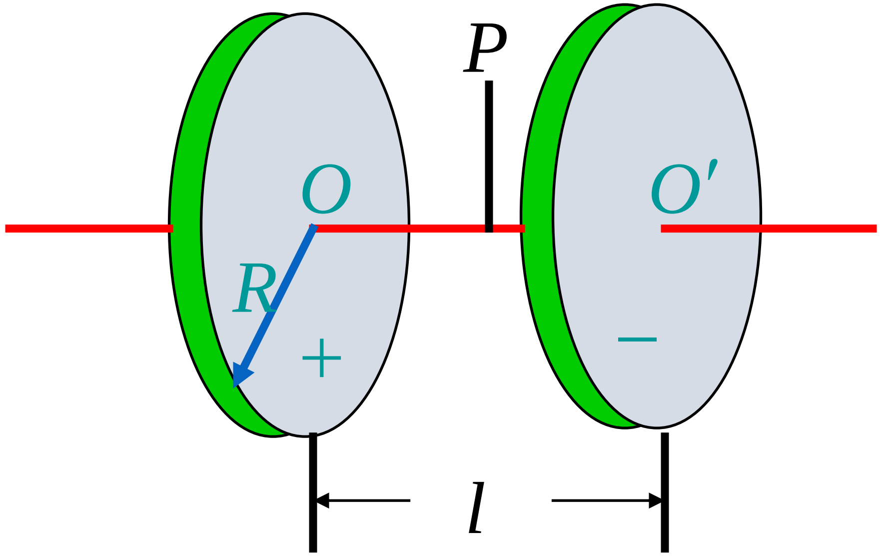


对称美

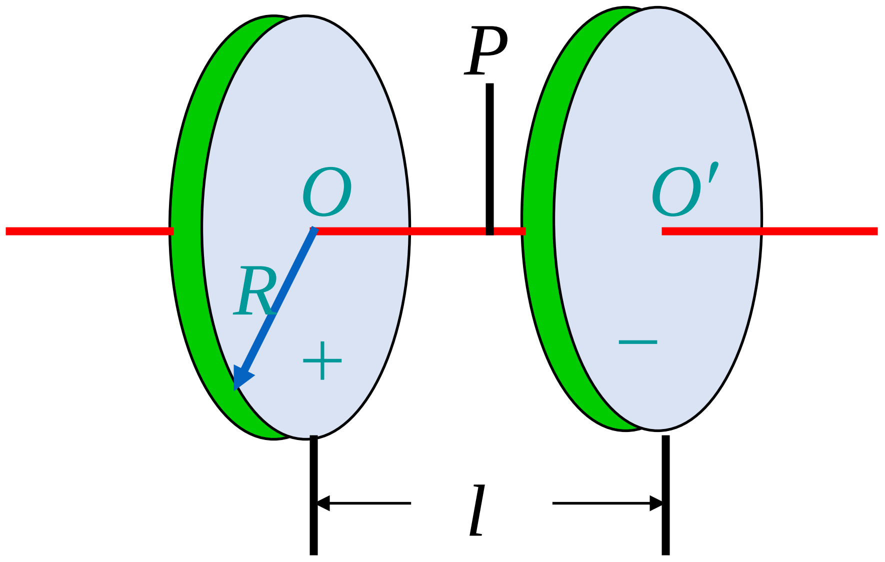
例:半径为R,相距l(l<<R)的圆形空气平板电容器,两端加上交变电压$U=U_0\sin\omega t$,求电容器极板间的:

(1)位移电流;　　(2)位移电流密度J_d的大小;

(3)位移电流激发的磁场分布B(r),r为场点P到圆板的中心距离.



解 (1)由于l<<R,故平板间可作匀强电场处理,



$$E = \frac{U}{l}$$

根据位移电流的定义

$$I_d = \frac{d\Phi_e}{dt} = \frac{d(DS)}{dt} = \varepsilon_0 \frac{dE}{dt}\pi R^2 = \frac{\varepsilon_0 \pi R^2}{l} U_0 \omega \cos \omega t$$

另解 $$I_d = \frac{dQ}{dt} = \frac{d(CU)}{dt} = C\frac{dU}{dt}$$

平性板电容器的电容 $C=\dfrac{\varepsilon_0\pi R^2}{l}$

代入上式,可得同样结果.

(2)由位移电流密度的定义

$$J_d=\frac{\partial D}{\partial t}=\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}=\frac{\varepsilon_0}{l}\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\varepsilon_0 U_0}{l}\omega\cos\omega t$$

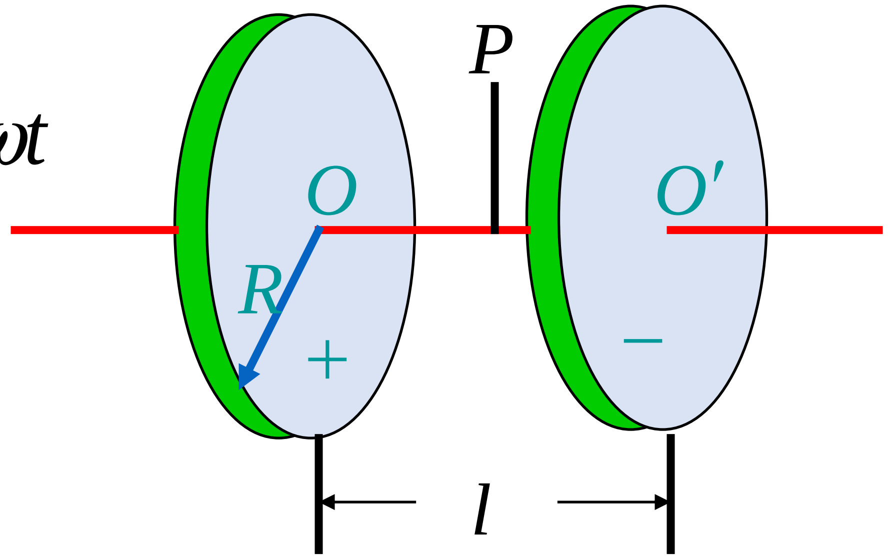
或者 $J_d=I_d/\pi R^2$

(3)因为电容器内ΣI=0,且磁场分布应具有轴对称性,由全电流定律得

$r < R$

$$\oint_{L_1} \vec{H}_1 \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}_d \cdot d\vec{S} = J_d \pi r^2$$

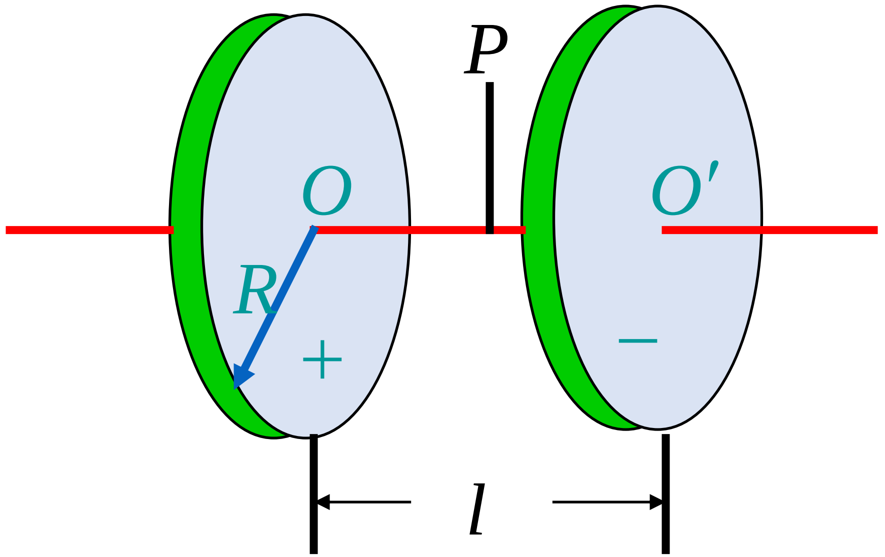
$$H_1 2\pi r = \frac{\varepsilon_0 U_0}{l} \pi r^2 \omega \cos\omega t$$



$$H_1 = \left(\frac{\varepsilon_0 U_0}{2l} \omega \cos\omega t \right) r$$

$$B_1 = \mu_0 H_1 = \left(\frac{\varepsilon_0 \mu_0 U_0}{2l} \omega \cos\omega t \right) r = \left(\frac{U_0 \omega}{2lc^2} \cos\omega t \right) r$$

$r > R$



$$\oint_{L_2} \vec{H}_2 \cdot d\vec{l} = I_d = J_d \pi R^2$$

$$H_2 = \frac{I_d}{2\pi r} = \left(\frac{\varepsilon_0 R^2 U_0}{2l} \omega \cos \omega t \right) \frac{1}{r}$$

$$B_2 = \mu_0 H_2 = \left(\frac{\varepsilon_0 \mu_0 R^2 U_0}{2l} \omega \cos \omega t \right) \frac{1}{r} = \left(\frac{R^2 U_0 \omega}{2lc^2} \cos \omega t \right) \frac{1}{r}$$

选择题

8、一平行板空气电容器的两极板都是半径为 R 的圆导体片，充电时，板间电场强度的变化率为 $\frac{dE}{dt}$，略去边缘效应，则两板间的位移电流为 【　　】

（A）$\frac{dE}{dt}$　　（B）$\varepsilon_0 \frac{dE}{dt}$　　（C）$\pi R^2 \frac{dE}{dt}$　　（D）$\varepsilon_0 \pi R^2 \frac{dE}{dt}$

填空题

6.两板间距为 d 的一空气平行板电容器，两极板是面积为 S 的圆形金属板，接在交流电源上，板上电荷随时间变化，$q=q_m\sin\omega t$，其中 $\boldsymbol{q_m}$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 是常数，则两极板间的位移电流为________________。

小 结

位移电流为： $$I_d = \frac{d\Phi_e}{dt} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = \int_S \vec{J}_d \cdot d\vec{S}$$

位移电流密度为： $$J_d = \frac{\partial D}{\partial t}$$

全电流定律为： $$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum I + I_d = \int_s \vec{j}\cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

麦克斯韦的有旋电场假说和位移电流假说，为建立统一的电磁场理论奠定了理论基础

$$\oint_l \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{H}_d \cdot d\vec{l} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

§2 麦克斯韦电磁场方程组

一. 积分形式

通量

$$\vec{E}=\vec{E}_{静电}+\vec{E}_{感生}$$

$$\vec{D}=\vec{D}_{静电}+\vec{D}_{感生}$$

$$\oint_S \vec{D}_{静电}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\int_V \rho_0 \mathrm{dV}$$

$$\oint_S \vec{D}_{感生}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0$$

$$\vec{B}=\vec{B}_{稳恒}+\vec{B}_{位移}$$

$$\vec{H}=\vec{H}_{传导}+\vec{H}_{位移}$$

$$\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0$$

通量

环流

$$\begin{cases} \oint_S \vec{D}_{静电} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho_0 dV \\ \oint_S \vec{D}_{感生} \cdot d\vec{S} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \oint_L \vec{E}_{静电} \cdot d\vec{l} = 0 \\ \oint_L \vec{E}_{感生} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \end{cases}$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}_0 \cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot dS$$

重新整合写成电场和磁场各两个方程

积分形式

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho_0 dV$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}_0\cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot dS$$

微分形式

$$\nabla\bullet\vec{D} = \rho$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\bullet\vec{B} = 0$$

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

三. 麦克斯韦的贡献

1. 完善了宏观的电磁场理论

四个微分方程

三个介质方程（$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad \vec{J}_0 = \sigma \vec{E}$）

一个洛伦兹力 $\vec{f} = q\vec{E} + q\vec{\upsilon} \times \vec{B}$

在确定的边界条件下联合解上述方程

原则上可解决电磁场的一般问题

2. 爱因斯坦相对论的重要实验基础

3. 预言电磁波的存在

由微分方程出发 在各向同性介质中

且在 $J_0 = 0$ $\rho_0 = 0$ 情况下

$$\Downarrow$$

$\vec{E}$ $\vec{H}$

满足的微分方程
形式是波动方程

电磁波的波动方程

电磁波:

根据麦克斯韦理论，在自由空间内的电场和磁场满足

$$\oint_L \vec{E}_{感} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

即非均匀变化的电场可以激发变化的磁场，变化的磁场又可以激发变化的电场，

这样电场和磁场可以相互激发并以波的形式由近及远，以有限的速度在空间传播开去，就形成了电磁波。