第4章 数组

苏智勇
suzhiyong@njust.edu.cn
https://zhiyongsu.github.io
Visual Computing Group, NJUST

教学内容

4.1 数组的类型定义

4.2 数组的顺序存储

4.3 特殊矩阵的压缩存储

教学目标

明确数组这种数据结构的特点

掌握数组地址计算方法

了解几种特殊矩阵的压缩存储方法

本节所讨论的数组与高级语言中的数组区别:

- 高级语言中的数组是顺序结构;
- 而本章的数组既可以是顺序的，也可以是链式结构，

用户可根据需要选择。

数组的抽象数据类型

ADT Array {

数据对象:

$$j_i = 0, \cdots b_i - 1, \mathrm{i} = 1, 2, \cdots, \mathrm{n}$$

$$D = \{\mathrm{a}_{\mathrm{j\,j_2 \cdots j_n}} \mid \mathrm{a}_{\mathrm{j_1 j_2 \cdots j_n}} \in ElemSet$$

数据关系:

$$R_1 = \{< a_{j_1 \cdots j_i \cdots j_n}, a_{j_1 \cdots j_i + 1 \cdots j_n} > |$$
$$0 \le \mathrm{j_k} \le b_k - 1,\ \ 1 \le \mathrm{k} \le \mathrm{n},\ \text{且}\mathrm{k} \ne \mathrm{i},$$
$$0 \le \mathrm{j_i} \le b_k - 2,$$
$$a_{j_1 \cdots j_i \cdots j_n}, a_{j_1 \cdots j_i + 1 \cdots j_n} \in D, i = 2, \cdots, n\}$$

基本操作:

(1) InitArray (&A,n,bound1, …boundn)

//构造数组A

(2) DestroyArray (&A) // 销毁数组A

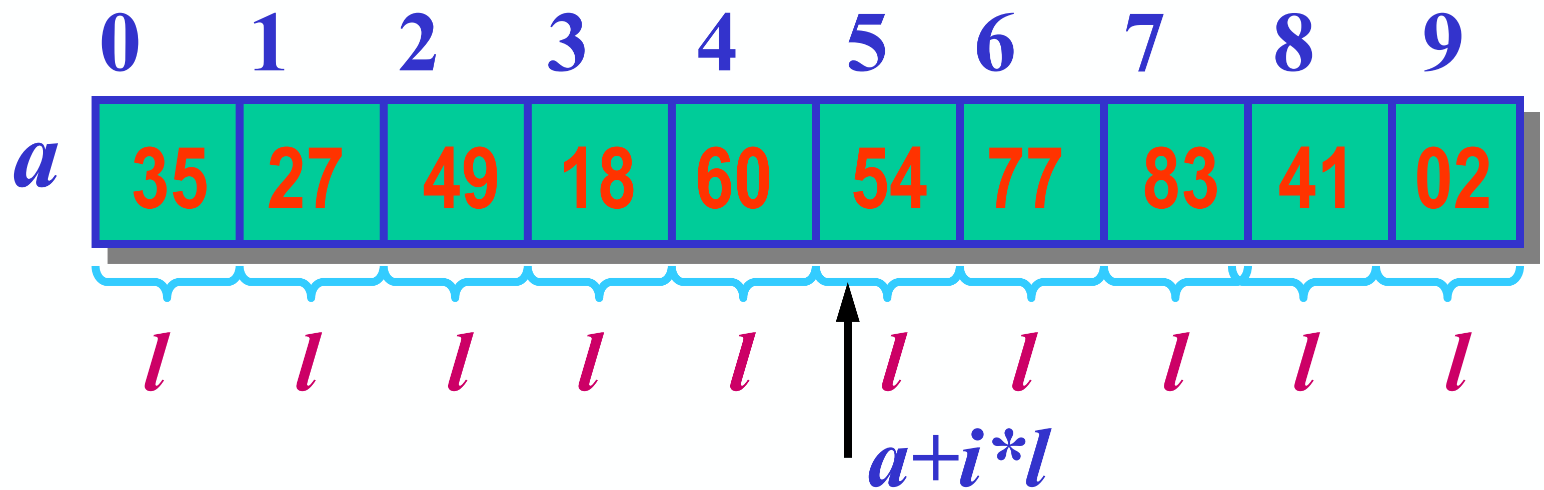
(3) Value(A,&e,index1,…,indexn) //取数组元素值

(4) Assign (A,&e,index1,…,indexn) //给数组元素赋值

}ADT Array

一维数组

$$\mathrm{LOC}(i)=\begin{cases} a, & i=0 \\ \mathrm{LOC}(i-1)+l = a+i*l, & i>0 \end{cases}$$



$$\mathrm{LOC}(i) = \mathrm{LOC}(i-1)+l = a+i*l$$

二维数组

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p)\quad (\mathrm{p}=\mathrm{m}\text{或}\mathrm{n})$$

$$A_{m\times n}=\begin{bmatrix} [a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}] \\ [a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}] \end{bmatrix}$$

$$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})\quad 1\le i\le m$$

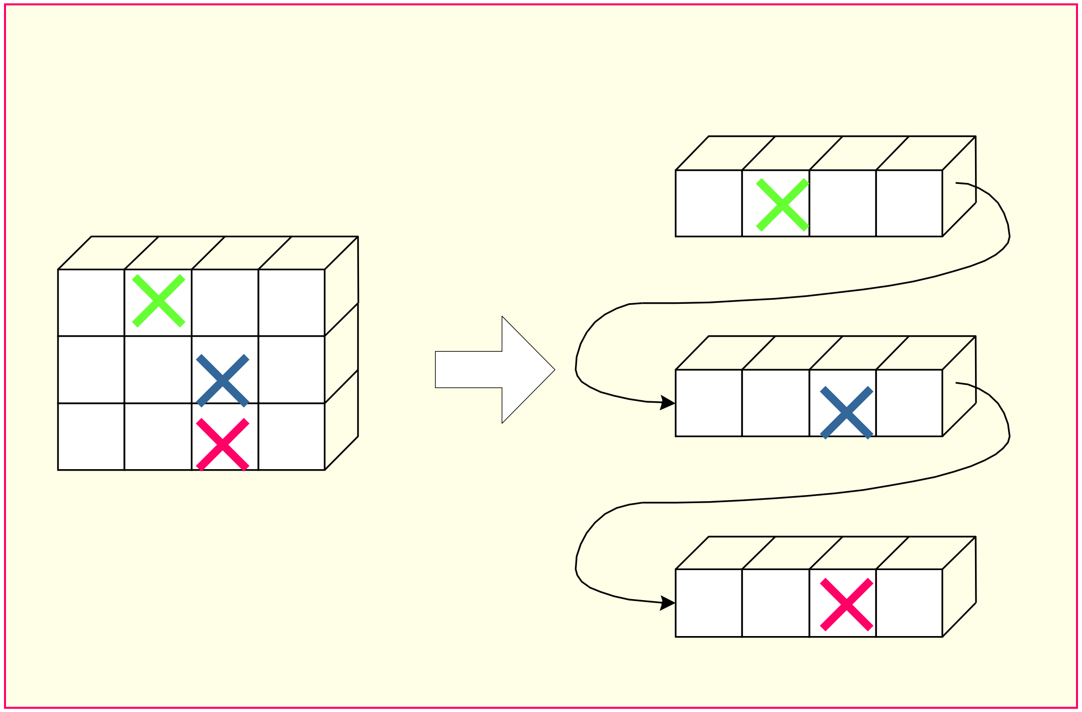
$$\alpha_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj})\quad 1\le \mathrm{j}\le n$$

$$A_{m\times n}=\left[\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}\right]$$

数组的顺序存储

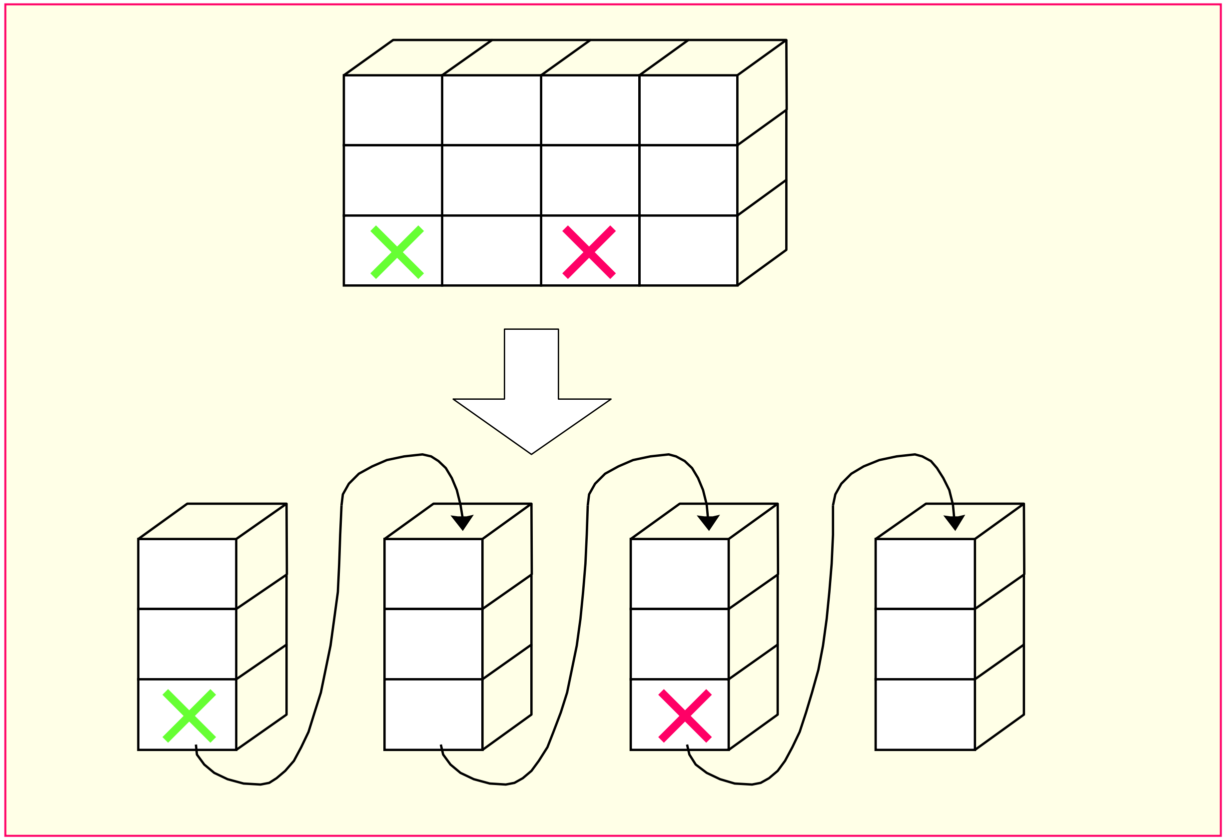
- 以行序为主序

  C, PASCAL



- 以列序为主序

  FORTRAN



二维数组的行序优先表示

a[n][m]

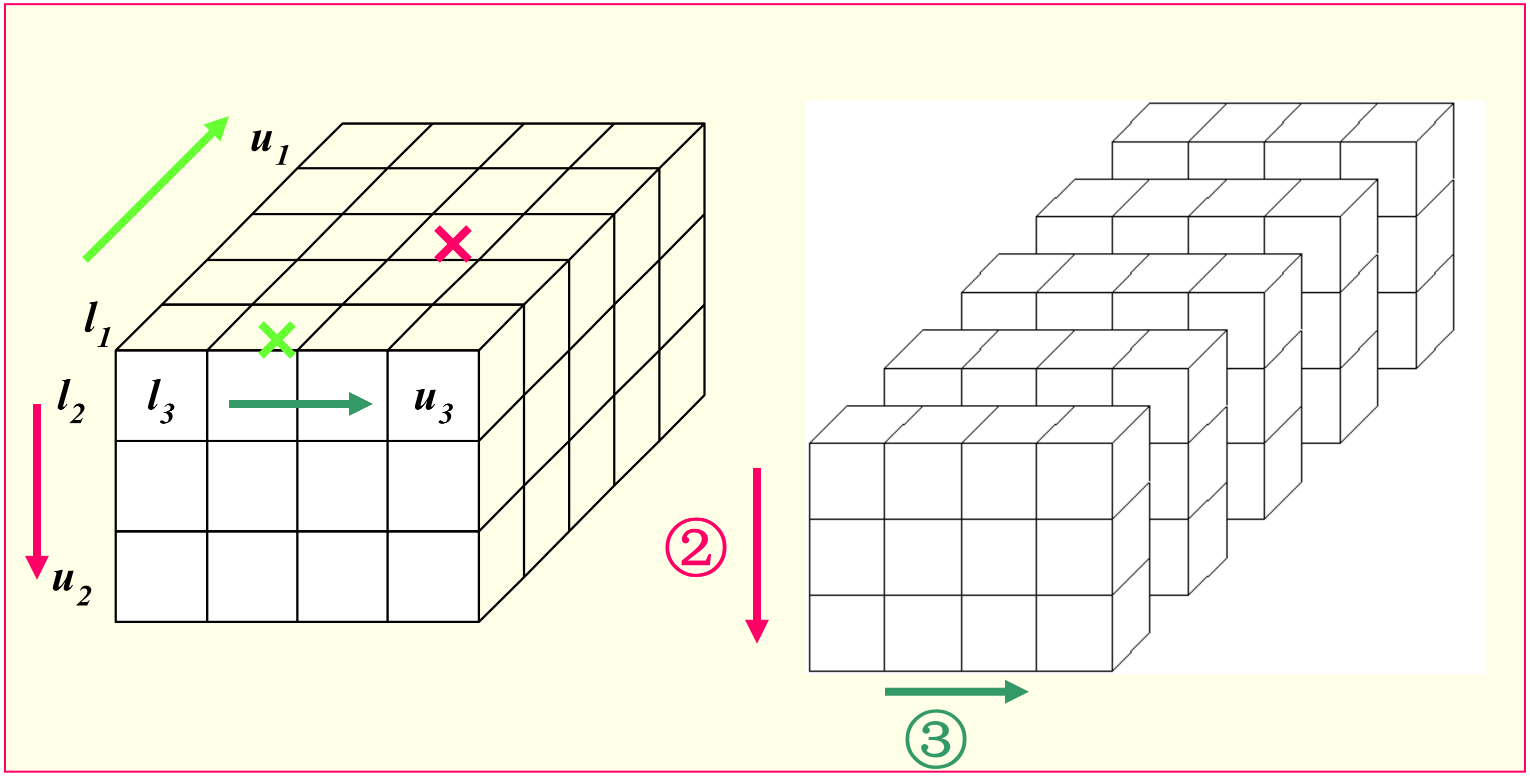
$$a = \begin{pmatrix} a[0][0] & a[0][1] & \cdots & a[0][m-1] \\ a[1][0] & a[1][1] & \cdots & a[1][m-1] \\ a[2][0] & a[2][1] & \cdots & a[2][m-1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a[n-1][0] & a[n-1][1] & \cdots & a[n-1][m-1] \end{pmatrix}$$

设数组开始存放位置 $\mathrm{LOC}(0, 0) = a$

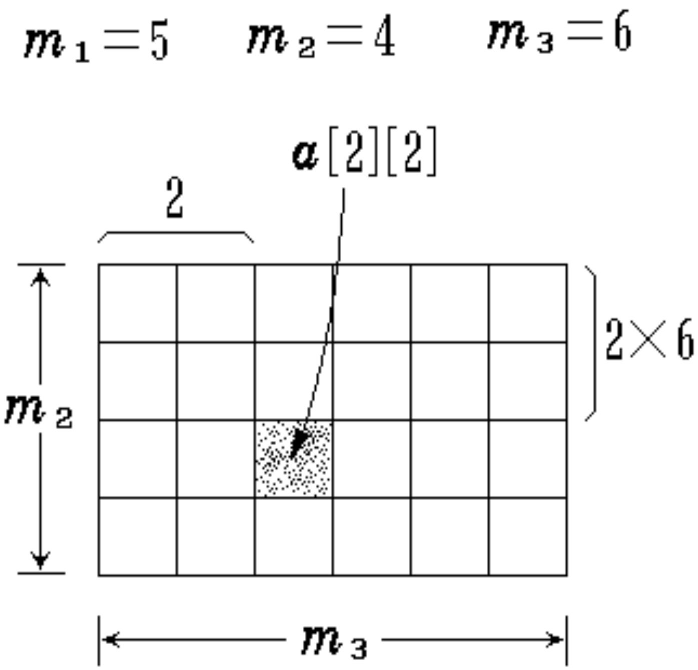
$$\mathrm{LOC}(j, k) = a + j * m + k$$

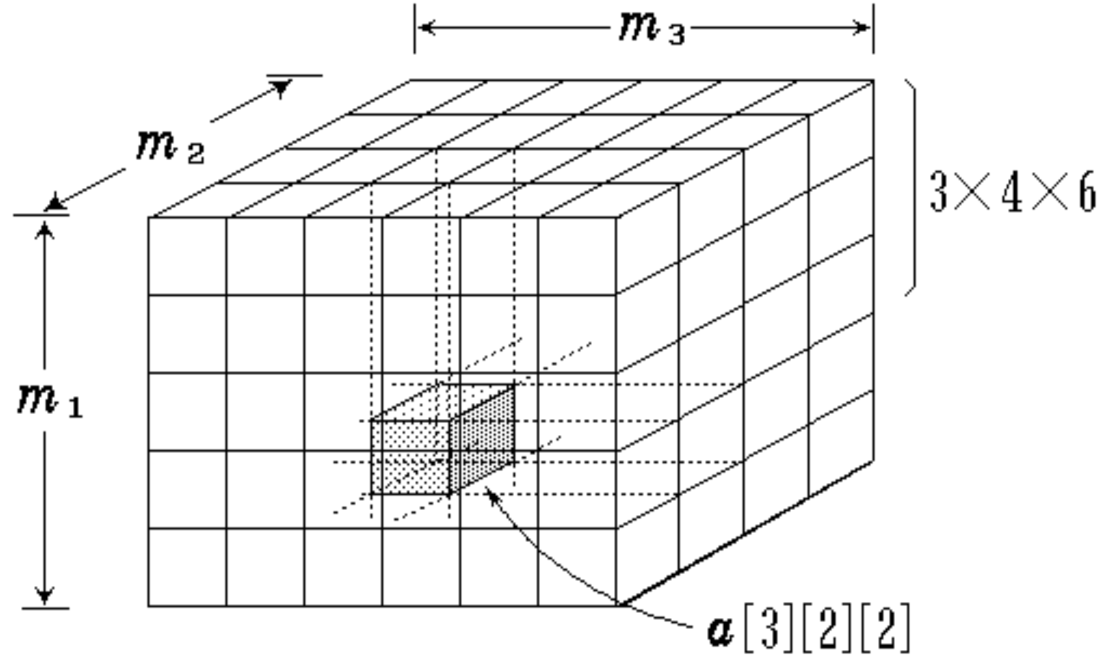
三维数组

按页/行/列存放，页优先的顺序存储



二维数组　　　　　　三维数组





三维数组

☞ **a[m1][m2] [m3]** 各维元素个数为 m_1, m_2, m_3

☞ 下标为 i_1, i_2, i_3的数组元素的存储位置:

$$LOC(i_1, i_2, i_3) = a +$$

$$\underbrace{i_1 * m_2 * m_3}_{\text{前}i_1\text{页总元素个数}} + \underbrace{i_2 * m_3}_{\text{第}i_1\text{页的前}i_2\text{行总元素个数}} + \underbrace{i_3}_{\text{第}i_2\text{行前}i_3\text{列元素个数}}$$

练习

设有一个二维数组$A[m][n]$按行优先顺序存储，假设$A[0][0]$存放位置在$644_{(10)}$，$A[2][2]$存放位置在$676_{(10)}$，每个元素占一个空间，问$A[3][3]_{(10)}$存放在什么位置？脚注$_{(10)}$表示用10进制表示。

设数组元素A[i][j]存放在起始地址为Loc (i, j) 的存储单元中

$\because$ Loc (2, 2) = Loc (0, 0) + 2 * n + 2 = 644 + 2 * n + 2 = 676.
$\therefore$ n = (676 - 2 - 644) / 2 = 15
$\therefore$ Loc (3, 3) = Loc (0, 0) + 3 * 15 + 3 = 644 + 45 + 3 = 692.

练习

设有二维数组A[10, 20]，其每个元素占两个字节，*A*[0][0]存储地址为100，若按行优先顺序存储，则元素A[6, 6]的存储地址为 352 ，按列优先顺序存储，元素A[6, 6]的存储地址为 232 。

$(6*20+6)*2+100=352$

$(6*10+6)*2+100=232$

特殊矩阵的压缩存储

1. 什么是压缩存储?

若多个数据元素的值都相同，则只分配一个元素值的存储空间，且零元素不占存储空间。

2. 什么样的矩阵能够压缩?

一些特殊矩阵，如：对称矩阵，对角矩阵，三角矩阵，稀疏矩阵等。

3. 什么叫稀疏矩阵?

矩阵中非零元素的个数较少（一般小于5%）

数组下标(i,j)　确定　存储地址

1. 对称矩阵

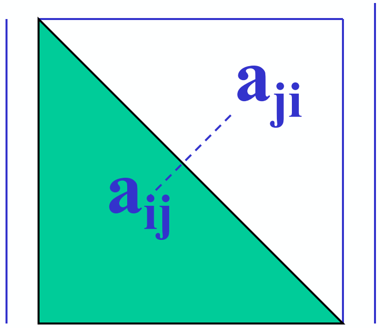
[特点] 在n×n的矩阵a中，满足如下性质：

$$a_{ij}=a_{ji}\quad(1 \le i, j \le n)$$

[存储方法] 只存储下(或者上)三角(包括主对角线)的数据元素。共占用n(n+1)/2个元素空间。

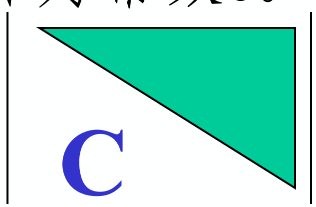
sa	a_{11}	a_{21}	a_{22}	a_{31}		$a_{ij}(a_{ji})$		a_{nn}
k	1	2	3	4				n(n+1)/2

$$k=\begin{cases} i(i-1)/2+j & \text{当 } i \ge j \\ j(j-1)/2+i & \text{当 } i < j \end{cases}$$

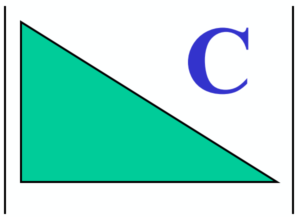


2. 三角矩阵

[特点] 对角线以下(或者以上)的数据元素(不包括对角线)全部为常数c。



上三角矩阵



下三角矩阵

[存储方法] 重复元素c共享一个元素存储空间，共占用 n(n+1)/2+1个元素空间: sa[1.. n(n+1)/2+1]

上三角矩阵

$$k=\begin{cases}(i-1)\times(2n-i+2)/2+j-i+1 & i\le j\\ n(n+1)/2+1 & i>j\end{cases}$$

下三角矩阵

$$k=\begin{cases}i\times(i-1)/2+j & i\ge j\\ n(n+1)/2+1 & i<j\end{cases}$$

稀疏矩阵

[特点] 大多数元素为零。

[常用存储方法] 只记录每一非零元素(i,j,a_{ij})

节省空间，但丧失随机存取功能

- 顺序存储：三元组表

$$A=\begin{bmatrix}0&0&3&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&0\\9&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&7&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&6&0\\0&0&0&2&0&3&0&0\\0&0&5&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

三列二维数组表示

（1）非零元素所在的行号i;

（2）非零元素所在的列号j;

（3）非零元素的值V。

即每一个非零元素可以用下列三元组表示:

（i，j，V）

- 例如，上述稀疏矩阵A中的8个非零元素可以用以下8个二元组表示（以行为主的顺序排列）：

（1，3，3）（1，8，1）（3，1，9）（4，5，7）

（5，7，6）（6，4，2）（6，6，3）(7，3，5）

- 为了表示的唯一性，除了每一个非零元素用一个三元组表示外，在所有表示非零元素的三元组之前再添加一个三元组：（I，J，t）
- 其中I表示稀疏矩阵的总行数，J表示稀疏矩阵的总列数，t表示稀疏矩阵中非零元素的个数。

- 上述稀疏矩阵A可以用以下9个三元组表示:

（7，8，8）（3，1，9）（5，7，6）

（6，6，3）（1，3，3）（4，5，7）

（6，4，2）（7，3，5）（1，8，1）

- 其中第一个三元组表示了稀疏矩阵的总体信息（总行数，总列数、非零元素个数），
- 其后的8个三元组依次（以行为主排列）表示稀疏矩阵中每一个非零元素的信息（所在的行号、列号以及非零元素值）。

为了使各三元组的结构更紧凑，通常将这些三元组组织成**三列二维表格的形式**，一般又表示成三列二维数组的形式，并简称为三列二维数组。

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 8 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 1 \\ 3 & 1 & 9 \\ 4 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 6 \\ 6 & 4 & 2 \\ 6 & 6 & 3 \\ 7 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

- 为了便于在三列二维数组B中访问稀疏矩阵A中的各元素，通常还附设两个长度与稀疏矩阵A的行数相同的向量POS与NUM，
- POS（k）表示稀疏矩阵A中第k行的第一个非零元素（如果有的话）在三列二维数组B中的行号，
- NUM（k）表示稀疏矩阵A中第k行中非零元素的个数，
- 这两个向量之间存在以下关系：

  $POS(1) = 2$

  $POS(k) = POS(k-1) + NUM(k-1)$，$2 \le k \le m$

练习

$$A=\begin{bmatrix} 9 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(1) 请用三列二维数组表示；
(2) 写出其POS和NUM向量；

小结

明确数组数据结构的特点

掌握数组地址计算方法

了解几种特殊矩阵的压缩存储方法。