

§ 3.3 自回归模型拟合

依据已知样本值 x_1, x_2, \dots, x_n 对 $AR(p)$ 模型作出估计, 称为自回归模型拟合。自回归

模型拟合内容包括:

- (1) $AR(p)$ 模型阶数 p 的估计;
- (2) $AR(p)$ 模型中参数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ 与 σ^2 的估计;
- (3) 对模型作拟合检验。

一、 $AR(p)$ 序列阶数 p 的估计

若 $AR(p)$ 模型中阶数 p 未知, 首先要对其进行估计, 估计的方法有偏相关函数估计法、AIC 准则估计与 BIC 准则估计法等等。

1. 偏相关函数估计法

首先由样本值 x_1, \dots, x_n , 计算样本自协方差函数 $\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_k$, 则 $\{x_t\}$ 的自协方差

满足尤尔—沃克方程, 即

$$\begin{cases} \alpha_1 \hat{\gamma}_0 + \alpha_2 \hat{\gamma}_1 + \dots + \alpha_k \hat{\gamma}_{k-1} = \hat{\gamma}_1 \\ \alpha_1 \hat{\gamma}_1 + \alpha_2 \hat{\gamma}_0 + \dots + \alpha_{k-1} \hat{\gamma}_{k-2} = \hat{\gamma}_2 \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_1 \hat{\gamma}_{k-1} + \alpha_2 \hat{\gamma}_{k-2} + \dots + \alpha_k \hat{\gamma}_0 = \hat{\gamma}_k \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots$$

将上述方程组表示为矩阵形式, 即

$$\Gamma_k \alpha(k) = b_k$$

$$\text{其中 } \Gamma_k = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_0 & \hat{\gamma}_1 & \dots & \hat{\gamma}_{k-1} \\ \hat{\gamma}_1 & \hat{\gamma}_0 & \dots & \hat{\gamma}_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \hat{\gamma}_{k-1} & \hat{\gamma}_{k-2} & \dots & \hat{\gamma}_0 \end{pmatrix}, \quad \alpha(k) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}, \quad b_k = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_1 \\ \hat{\gamma}_2 \\ \vdots \\ \hat{\gamma}_k \end{pmatrix}$$

而 Γ_k 是对称可逆阵, 故可求得 $\alpha(k)$ 与 $\sigma^2(k)$ 的尤尔—沃克估计为

$$\hat{\alpha}(k) = \Gamma_k^{-1} \hat{b}_k \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\hat{\sigma}^2(k) = \hat{\gamma}_0 - \hat{\alpha}' \hat{b}_k = \hat{\gamma}_0 - b_k' \Gamma_k^{-1} b_k \quad k = 1, 2, \dots$$

其中 $\hat{\alpha}(k) = \Gamma_k^{-1} \hat{b}_k$, $k = 1, 2, \dots$ 的第 k 分量 $\hat{\alpha}_{kk}$ 即为偏相关函数, 而 $\{x_t\}$ 是 $AR(p)$ 序列,

则其偏相关函数 α_{kk} , $k = 1, 2, \dots$, 在 p 处截尾, 故可利用这一特征性质估计阶数 p , 在

实用中常用这样的估计步骤:

(1) 首先由样本值 x_1, \dots, x_n ，计算样本自协方差函数 $\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_k$ ，再求出自相关函数

$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0}, \quad k = 1, 2, \dots$$

(2) 再迭代求得偏相关函数 α_{kk} ， $k = 1, 2, \dots$ ，其具体步骤为：

$$\hat{\alpha}_{1,1} = \hat{\rho}_1$$

$$\hat{\alpha}_{k+1,k+1} = (\hat{\rho}_{k+1} - \sum_{j=1}^k \hat{\rho}_{k+1-j} \hat{\alpha}_{jk}) (1 - \sum_{j=1}^k \hat{\rho}_j \hat{\alpha}_{jk})^{-1}$$

其中 $\hat{\alpha}_{j,k+1} = \hat{\alpha}_{jk} - \hat{\alpha}_{k+1,k+1} \hat{\alpha}_{k-j+1,k}$ ， $j = 1, 2, \dots, k$

(3) 最后判断 $\{x_t\}$ 的阶数 p ：即

(i) 由所得数据 x_1, \dots, x_n 迭代得出偏相关函数值 $\hat{\alpha}_{kk}$ $k = 1, 2, \dots$ ；

(ii) 将点 (k, α_{kk}) 描在笛卡尔坐标上；

(iii) 若从某个 k 后，有 α_{kk} 充分接近零。

则此 k 为 $AR(p)$ 序列阶数 p 的所求阶数。

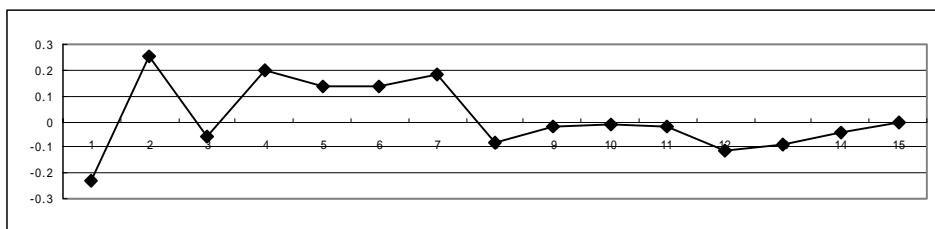
注意：因为 $\hat{\alpha}_{kk}$ 为 α_{kk} 的估计，没有严格的截尾性质，故在实用中，若 $\hat{\alpha}_{kk}$ 从某个 k 后

充分接近零值时，其始点 k 值即为所求阶数 p ，例如：

例：某水文站记录了 59 年的每年的最大径流量数据，算得了样本偏相关函数值，见下表，试对阶数 p 作出估计。

k	1	2	3	4	5	6	7	8
$\hat{\phi}_{kk}$	-0.23	0.25	-0.06	0.20	0.14	0.14	0.18	-0.08
k	9	10	11	12	13	14	15	
$\hat{\phi}_{kk}$	-0.02	-0.01	-0.02	-0.11	-0.09	-0.04	0.00	

可以看出，当 $k > 2$ 时， $|\hat{\phi}_{kk}| < 0.26$ ，



易见，

图中数据点在第二个点以后的所有点都在接近 0 的两条对称平行线之内，故可认为，在第二个点 α_{kk} 以后，偏相关函数值 α_{kk} 近似为 0，本着模型阶数越低越简单越好的原则，可以认为

$\hat{\phi}_{kk}$ 的截断在 $k=2$ 处，也即说明 $AR(p)$ 序列的阶数 p 的估计应为 $\hat{p}=2$ 。

2. AIC 准则估计与 BIC 准则估计法

AIC 准则是 1971 年日本学者赤池 (Akaike) 给出了一种适用面非常广泛的统计模型选择准则，称为最小信息准则 (Akaike Information Criterion)，运用这一准则，可以在模型参数极大似然估计的基础上，估计 $AR(p)$ 序列的阶数 p ，其作法是，首先引入了以下所谓的 AIC 准则函数

$$AIC(k) = \ln \hat{\sigma}^2(k) + \frac{2k}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, P。$$

其中 $\hat{\sigma}^2(k)$ 为取 $p=k$ ($1 \leq k \leq P$) 时 σ^2 的估计，而 $p=0$ 时, $\hat{\sigma}^2 = \hat{\gamma}_0$ ， P 为 p 的预估的上界，一般 P 的取值视实际情况由经验而定。再取 \hat{p} 使其满足下式：

$$AIC(\hat{p}) = \min_{1 \leq k \leq P} AIC(k)$$

则此 \hat{p} 即为所求 p 的 AIC 准则估计。

有时也采用 AIC 准则修改形式，即 BIC 准则函数

$$BIC(k) = \ln \hat{\sigma}^2(k) + \frac{k \ln n}{n} \quad k = 0, 1, 2, \dots, P$$

确定 \hat{p} ，使其满足下式：

$$BIC(\hat{p}) = \min_{1 \leq k \leq P} BIC(k)$$

由此得到的 \hat{p} 为所求 p 的 BIC 准则估计。

因此利用 AIC 准则判断步骤是：

- (1) 首先凭经验选定阶数 p 的上界 P 值，则 $0 \leq p \leq P$ ；
- (2) 再由样本值 x_1, \dots, x_n 迭代求出 σ^2 的最小二乘估计或尤尔—沃克估计

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{(k)}^2 &= \hat{\gamma}_0 - \hat{\alpha}'(k) \hat{b}_k \\ &= \hat{\gamma}_0 - b_k' \Gamma^{-1} b_k \quad k = 0, 1, 2, \dots, P \\ k = 0, \quad \hat{\sigma}^2 &= \hat{\gamma}_0 \end{aligned}$$

(3) 将 $\hat{\sigma}_{(k)}^2$ 代入 $A(k) = \text{AIC}(k) = \ln \hat{\sigma}^2(k) + \frac{2k}{n}$ 得 $A(0), A(1), \dots, A(p)$, 若有 $A(\hat{p}) = \min_{0 \leq k \leq P} A(k)$ 则 \hat{p} 为所求 AIC 准则估计。

二、AR(p)模型中参数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ 与 σ^2 的估计

设 x_1, \dots, x_n 来自中心化 AR(p) 模型, (不然, 则用 $x_i - \bar{x}$ 处理为中心化 AR(p) 序列)

$$x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \dots + \alpha_p x_{t-p} + \varepsilon_t, \quad (3.3.1)$$

$$t = p+1, p+2, \dots, n$$

ε_t 为独立时间序列, 且 $E(\varepsilon_t) = 0, E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2, E(\varepsilon_t^4) < +\infty, \varepsilon_t$ 与 $\{x_s, s < t\}$ 相互独

立, 参数 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ 满足平稳条件: $\alpha(u) = 0$ 的根在单位圆外。则由 (3.3.1) 的矩阵形式

$$y = X\alpha + \varepsilon \quad (3.3.2)$$

$$\text{其中 } y = \begin{pmatrix} x_{p+1} \\ x_{p+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_p & x_{p-1} & \dots & x_1 \\ x_{p+1} & x_p & \dots & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-1} & x_{n-2} & \dots & x_{n-p} \end{pmatrix} \quad (3.3.3)$$

为随机矩阵, 则求 α 与 σ^2 的估计常用的有三种方法:

1. 最小二乘估计法

$$\text{令 } S(\alpha) = \sum_{t=p+1}^n \{x_t - \alpha_1 x_{t-1} - \alpha_2 x_{t-2} - \dots - \alpha_p x_{t-p}\}^2 = \sum_{t=p+1}^n \varepsilon_t^2$$

求 $\hat{\alpha}$, 使 $S(\hat{\alpha}) = \min \{S(\alpha)\}$, 则称这样的 $\hat{\alpha}$ 为最小二乘估计, 由最小二乘估计的运算方法

可得 α 与 σ^2 的最小二乘估计为

$$\hat{\alpha} = (X'X)^{-1} X' y \quad (3.3.4)$$

$$\text{而 } \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-p} S(\hat{\alpha}) = \frac{1}{n-p} \sum_{t=p+1}^n \varepsilon_t^2 \quad (3.3.5)$$

2. 尤尔 沃克估计方法

由 x_1, \dots, x_n , 计算样本自协方差函数 $\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_p$, 则 $\{x_t\}$ 的协方差满足尤尔—沃克

方程, 即

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_1 \hat{\gamma}_0 + \hat{\alpha}_2 \hat{\gamma}_1 + \cdots + \hat{\alpha}_p \hat{\gamma}_{p-1} = \hat{\gamma}_1 \\ \hat{\alpha}_1 \hat{\gamma}_1 + \hat{\alpha}_2 \hat{\gamma}_0 + \cdots + \hat{\alpha}_{p-1} \hat{\gamma}_{p-2} = \hat{\gamma}_2 \\ \dots\dots\dots \\ \hat{\alpha}_p \hat{\gamma}_{p-1} + \hat{\alpha}_2 \hat{\gamma}_{p-2} + \cdots + \hat{\alpha}_p \hat{\gamma}_0 = \hat{\gamma}_p \end{cases} \quad (3.3.6)$$

表示为矩阵为

$$\Gamma_p \alpha = b_p \quad (3.3.7)$$

而 Γ_p 是可逆阵, 故得 α 与 σ^2 尤尔-沃克估计为

$$\hat{\alpha} = \Gamma_p^{-1} \hat{b}_p \quad (3.3.8)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\gamma}_0 - \hat{\alpha}' \hat{b}_p = \hat{\gamma}_0 - b_p' \Gamma_p^{-1} b_p$$

3. 极大似然估计

若 $\{\varepsilon_t\}$ 为独立且同正态分布序列, 则 x_t 亦为正态 $AR(p)$ 序列, 故

$$(x_1, \dots, x_n)' \sim N(0, \Gamma_n) \quad \Gamma_n = (\gamma_{ij})$$

$$\gamma_{ij} = E(x_i x_j), \quad 1 \leq j, j \leq n$$

故由 $x = (x_1, \dots, x_n)$ 的联合概率密度, 即似然函数

$$L(\alpha, \sigma^2) = f(x_1, \dots, x_n, \alpha, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Gamma_n|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} x' \Gamma_n^{-1} x}$$

$$\text{故取对数得 } \ln L(\alpha, \sigma^2) = \frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln |\Gamma_n| - \frac{1}{2} x' \Gamma_n^{-1} x$$

再求 α 、 σ^2 使上述式达最大值的 $(\hat{\alpha}, \hat{\sigma}^2)$, 即为 α 、 σ^2 的极大似然估计。但此法较难, 故

在实际中常用前两种方法与近似极大似然估计法求 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ 与 σ^2 的估计, 而在理论中常采用极大似然估计法。

三、拟合模型检验

拟合模型检验的目的就是检验所估计的时间序列模型是否与实际数据相吻合, 是否能较准确的描述真实的时间序列, 从而可以利用估计出的时间序列模型进行对真实的时间序列作出预测或预报。根据统计假设检验的方法, 拟合模型检验需要检验假设:

$$H_0: x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \cdots + \alpha_p x_{t-p} + \varepsilon_t \quad t = p+1, \dots, n$$

其中 $\{\varepsilon_t\}$ 为独立时间序列, 满足条件 $E\varepsilon_t = 0$, $E\varepsilon_t^2 = \sigma^2$, $E\varepsilon_t^4 < +\infty$, 且与 $\{x_s, s < t\}$ 独

立。

实际上，检验 H_0 是否为真，只需检验残差列 $\{\varepsilon_t\}$ 是否独立序列即可，而残差列可由样本值 x_1, \dots, x_n 计算得出，即

$$\varepsilon_k = x_k - \alpha_1 x_{t-1} - \dots - \alpha_p x_{t-p}, \quad k = p+1, p+2, \dots, n$$

然后再求出 $\{\varepsilon_t\}$ 的样本自协方差函数与自相关函数

$$\hat{\gamma}_k(\varepsilon) = \frac{1}{n-p} \sum_{t=1}^{n-p-k} \varepsilon_{t+p} \varepsilon_{t+p+k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$\hat{\rho}_k(\varepsilon) = \hat{\gamma}_k(\varepsilon) / \hat{\gamma}_0(\varepsilon) \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

最后利用判别独立序列的方法，若 $\{\hat{\rho}_k(\varepsilon), k = 0, 1, 2, \dots, n\}$ 中约有 68.3%的点落在纵坐标 $\hat{\rho} = \pm 1/n$ 内，约有 95.4%的点落在纵坐标 $\hat{\rho} = \pm 2/n$ 内，则 $(\varepsilon_{p+1}, \varepsilon_{p+2}, \dots, \varepsilon_n)$ 为独立序列样本值，接受 H_0 ，否则拒绝 H_0 。

具体的检验步骤为：

i) 提出假设 $H_0: x_t = \sum_{i=1}^p \alpha_i x_{t-i} + \varepsilon_t, \quad t = p+1, \dots, n$

ii) 将参数 $\hat{\alpha}_i$ ， $\hat{\sigma}^2$ 的估计与阶数 \hat{p} 的估计代替 H_0 中的 α_i ， σ^2 与 p ，故实际检验

$$H_0: x_t = \sum_{i=1}^{\hat{p}} \hat{\alpha}_i x_{t-i} + \varepsilon_t, \quad t = p+1, \dots, n$$

iii) 由上式计算残差：

$$\hat{\varepsilon}_t = x_t - \sum_{i=1}^{\hat{p}} \hat{\alpha}_i x_{t-i}, \quad t = \hat{p}+1, \hat{p}+2, \dots$$

iv) 由 $\{\hat{\varepsilon}_t\}$ 求自协方差函数

$$\hat{\gamma}_k(\varepsilon) = \frac{1}{n-p} \sum_{t=1}^{n-p-k} \varepsilon_{t+p} \varepsilon_{t+p+k} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\hat{\rho}_k(\varepsilon) = \hat{\gamma}_k / \hat{\gamma}_0(\varepsilon)$$

vi) 判断 $\{\hat{\varepsilon}_t\}$ 是否独立序列，若是，则接受 H_0 ，否则拒绝 H_0 。