APR 29TH, 2014

LAS 1-Determinant

线性代数那些事 Things of Linear Algebra
逸夫图书馆, 2014/4/27

1.行列式

什么是行列式?

这个问题一点都不简单!

推荐阅读的博文新理解矩阵5以及我们需要怎样的数学教育，后者在网上比较火，简单的语言道出行列式以及矩阵的“天机”。

> *直到今天看到这个网页，才看见有人一语道破线性代数的真谛（这也是我终于决定写成此文的直接原因）。我终于找到了我那一个学期企图寻找的东西。就好像把 x 变成 $2x$ 一样，我们经常需要把 (x, y) 变成 $(2x+y, x-3y)$ 之类的东西，这就叫做线性变换。于是才想到定义矩阵乘法，用于表示一切线性变换。几何上看，把平面上的每个点 (x, y) 都变到 $(2x+y, x-3y)$ 的位置上去，效果就相当于对这个平面进行了一个“线性的拉扯”。矩阵的乘法，其实就是多个线性变换叠加的效果，它显然满足结合律，但不满足交换律。主对角线全是 1 的矩阵所对应的线性变换其实就是不变的意思，因此它叫做单位矩阵。矩阵 A 乘以矩阵 B 得单位矩阵，就是做完线性变换 A 后再做一次线性变换 B 就又变回去了的意思，难怪我们说矩阵 B 是矩阵 A的逆矩阵。课本上对行列式的定义千奇百怪，又是什么递归，又是什么逆序对，还编写口诀帮助大家记忆。其实，**行列式的真正定义就一句话：每个单位正方形在线性变换之后的面积**。因此，单位矩阵的行列式当然就为 1，某行全为 0 的行列式显然为 0 （因为某一维度会被无视掉，线性变换会把整个平面压扁）， $|A\cdot B|$ 显然等于 $|A|\cdot|B|$ 。行列式为 0 ，对应的矩阵当然不可逆，因为这样的线性变换已经把平面压成一条线了，什么都不能把它变回去了。当然，更高阶的矩阵就对应了更高维的空间。一瞬间，所有东西都解释清楚了。*

我认为，上面的表达不完全正确，比如其核心[行列式的真正定义就一句话：每个单位正方形在线性变换之后的面积]。

但是，它真正让我意识到要好好思考，到底，什么是行列式?

Wiki的解释：行列式其实是一个函数，一个将方阵转换成一个标量的函数！[就是说，行列式本质上就相当于一个函数]

行列式可以看做是有向面积或体积的概念在一般的欧几里得空间中的推广。或者说，在 n 维欧几里得空间中，行列式描述的是一个线性变换对“体积”所造成的影响。

首先要注意的是如果是指矩阵的行列式，那么矩阵中只有方阵才有行列式!

对方阵求行列式得到一个值，这个值就是指这个$n\times n$方阵(因为矩阵都可以看做是一个线性变换，所以就是指一个线性变换)对n维空间中的“体积”所造成的影响。在二维空间中，这个“体积”实际上是平行四边形的面积，在三维空间中，“体积”就是指平行六面体的体积。更高维以此类推。

先看下行列式在二维和三维空间的几何意义(wiki解释得非常详细！)

下面的$S = ad - bc$可以通过求大矩形$(a+b, c+d)$的面积减去其中的小矩形和三角形的面积得到，简单证明如下：
$S = (a+b)(c+d) - \frac{1}{2}ac - bc - \frac{1}{2}bd - \frac{1}{2}ac - bc - \frac{1}{2}bd = ad - bc$

几何意义：二维和三维欧氏空间中的例子 [编辑]

乘积之和，减去蓝线上元素乘积之和。

行列式的一个自然的源起是n-维平行体的体积。行列式的定义和n-维平行体的体积有着本质上的关联[30]。

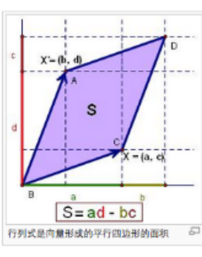
二维向量组的行列式 [编辑]

在一个二维平面上，两个向量$X=(a,c)$和$X'=(b,d)$的行列式是：

$$\det(X, X') = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$ [27]

比如说，两个向量$X=(2,1)$和$X'=(3,4)$的行列式是：

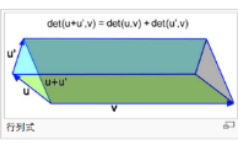
$$\det(X, X') = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 4 - 3\cdot 1 = 5$$



行列式是向量形成的平行四边形的面积

经计算可知，当系数是实数时，行列式表示的是向量X和X'形成的平行四边形的有向面积，并有如下性质：

- 行列式为零当且仅当两个向量共线（线性相关），这时平行四边形退化成一条直线[29]。
- 如果以逆时针方向为正向的话，有向面积的意义是：平行四边形面积为正当且仅当以原点为不动点将X逆时针“转到”X'处时，扫过的地方在平行四边形里，否则的话面积就是负的。如右图中，X和X'所构成的平行四边形的面积就是正的[31]。
- 行列式是一个双线性映射。也就是说，$\det(\lambda X + \mu Y, X') = \lambda\det(X, X') + \mu\det(Y, X')$，并且 $\det(X, \lambda X' + \mu Y') = \lambda\det(X, X') + \mu\det(X, Y')$[29]。



行列式

其几何意义是：以同一个向量v 作为一条边的两个平行四边形的面积之和，等于它们各自另一边的向量u 和u' 加起来后的向量：u + u' 和v 所构成的平行四边形的面积，如左图中所示。

三维向量组的行列式 [编辑]

在三维的有向空间中，三个三维向量的行列式是：

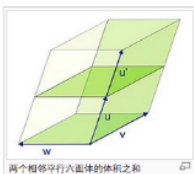
$$\det(X, X', X'') = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = xy'z'' + x'y''z + x''yz' - xy''z' - x'yz'' - x''y'z.$$ [28]

比如说，三个向量 (2, 1, 5)、(6, 0, 8)和 (3, 2, 4)的行列式是：

$$\det(X, X', X'') = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot0\cdot4 + 6\cdot2\cdot5 + 3\cdot1\cdot8 - 2\cdot2\cdot8 - 6\cdot1\cdot4 - 3\cdot0\cdot5 = 28$$

当系数是实数时，行列式表示X、X'和X''三个向量形成的平行六面体的有向体积，也叫做这三个向量的混合积。同样的，可以观察到如下性质[32]：

- 行列式为零当且仅当三个向量共线或者共面（三者线性相关），这时平行六面体退化为平面图形，体积为零[30]。
- 三维空间中有向体积的定义要比二维空间中复杂，一般是根据右手定则来约定。比如右图中（u, v, w）所形成的平行六面体的体积是正的，而（u, w, v）所形成的平行六面体的体积是负的。这个定义和行列式的计算并不矛盾，因为行列式中向量的坐标都是在取好坐标系后才决定的，而坐标系的三个方向一般也是按照右手规则来设定的。如果计算开始时坐标系的定向反过来的话，有向体积的定义也要跟着反过来，这样行列式才能代表有向体积[30][33]。
- 这时行列式是一个“三线性映射”，也就是说，对第一个向量有 $\det(aX + bY, X', X'') = a\det(X, X', X'') + b\det(Y, X', X'')$，对第二、第三个向量也是如此。其几何意义和二维时基本相同，是指当生成两个平行六面体的每组三个向量中如果有两个是重合的，比如分别是：（u, v, w）和（u', v, w），那么它们的体积之和等于将u 和u' 加起来后的向量u + u' 和v, w 所成的平行六面体的体积，如右图所示[30]。



两个相邻平行六面体的体积之和

基底的选择 [编辑]

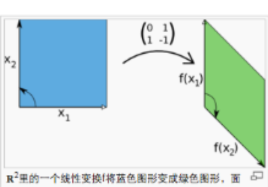
在以上的行列式中，我们不加选择地将向量在所谓的正交基（即直角坐标系）下分解，实际上在不同的基底之下，行列式的值并不相同。这并不是说平行六面体的体积不唯一。恰恰相反，这说明体积的概念依赖于衡量空间的尺度，也就是基底的取法。用基底的变换可以看作线性映射对基底的作用，而不同基底下的行列式代表了基变换对“体积”的影响。可以证明，对于所有同定向的标准正交基，向量组的行列式的值在绝对值意义上是一样的[34]。也就是说，如果我们选择的基底都是“单位长度”，并且两两正交，那么在这样的基之下，平行六面体的体积的绝对值是唯一的[35]。

另一个解释(在wiki的矩阵条目中的解释)，**一个方阵的行列式等于0当且仅当该方阵不可逆。系数是实数的时候，二维（三维）方阵A的行列式的绝对值表示单位面积（体积）的图形经过A对应的线性变换后得到的图形的面积（体积），而它的正负则代表了对应的线性变换是否改变空间的定向：行列式为正说明它保持空间定向，行列式为负则说明它逆转空间定向。**

行列式 [编辑]

主条目：行列式

方块矩阵A的行列式是一个将其映射到标量的函数，记作det(A)或，反映了矩阵自身的一定特性。一个方阵的行列式等于0当且仅当该方阵不可逆。系数是实数的时候，二维（三维）方阵A的行列式的绝对值表示单位面积（体积）的图形经过A对应的线性变换后得到的图形的面积（体积），而它的正负则代表了对应的线性变换是否改变空间的定向：行列式为正说明它保持空间定向，行列式为负则说明它逆转空间定向。



$\mathbb{R}^2$里的一个线性变换f将蓝色图形变成绿色图形，面积不变，而顺时针排布的向量x1和x2的变成了逆时针排布。对应的矩阵行列式是-1。

2×2矩阵的行列式是

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

3×3矩阵的行列式由6项组成。更高维矩阵的行列式则可以使用莱布尼兹公式写出[16]，或使用拉普拉斯展开由低一维的矩阵行列式递推得出[17]。

两个矩阵相乘，乘积的行列式等于它们的行列式的乘积：$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\cdot\det(\mathbf{B})$[18]。将矩阵的一行（列）乘以某个系数加到另一行（列）上不改变矩阵的行列式，将矩阵的两行（列）互换则使得其行列式变号[19]。用这两种操作可以将矩阵变成一个上三角矩阵或下三角矩阵，而后两种矩阵的行列式就是主对角线上元素的乘积，因此能方便地计算。运用行列式可以计算线性方程组的解（见克莱姆法则）[20]。

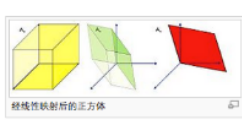
下面看下用行列式怎么理解线性变换，**线性变换就是把一个向量线性地变为另一个向量，行列式表示的是线性变换前后平行六面体的体积的变化系数**。

[下面这句话是我用来理解正交矩阵的：**n维行列式的本质是n维空间内的“体积”线性变换前后的变化系数，如果为正就是保持空间的定向，如果为负就是空间的反向。此外，正交矩阵的行列式肯定是1或者-1，如果行列式为1表示这个正交矩阵是旋转变换，如果为-1表示这个正交矩阵是反射变换。**]

线性变换 [编辑]

设E是一个一般的n维的有向欧几里得空间。一个线性变换把一个向量线性地变为另一个向量。比如说，在三维空间中，向量(x, y, z)被映射到向量(x', y', z')：

$$x' = a_1x + b_1y + c_1z$$
$$y' = a_2x + b_2y + c_2z$$
$$z' = a_3x + b_3y + c_3z$$


经线性映射后的正方体

其中a、b、c是系数。如右图，正方体（可以看作原来的一组基形成的）经线性变换后可以变成一个普通的平行六面体，或变成一个平行四边形（没有体积）。这两种情况表示了两种不同的线性变换，行列式可以将其很好地分辨出来（为零或不为零）。

更详细地说，行列式表示的是线性变换前后平行六面体的体积的变化系数。如果设左边的正方体体积是一，那么中间的平行六面体的（有向）体积就是线性变换的行列式的值，右边的平行四边形体积为零，因为线性变换的行列式为零。这里我们混淆了线性变换的行列式和向量组的行列式，但两者是一样的，因为我们在对一组基作变换[36]。

面积或体积的定义是恒正的，而行列式是有正有负的，因此需要引入有向面积和有向体积的概念。如果行列式表示的是线性变换对体积的影响，那么行列式的正负就表示了空间的定向。

行列式与空间定向 [编辑]

正的行列式保持空间的定向　负的行列式颠倒空间的定向

以上二维和三维行列式的例子中，行列式被解释为向量形成的图形的面积或体积。面积或体积的定义是恒正的，而行列式是有正有负的，因此需要引入有向面积和有向体积的概念。负的面积或体积在物理学中可能难以理解，但在数学中，它们和有向角的概念类似，都是对空间镜面对称特性的一种刻画。如果行列式表示的是线性变换对体积的影响，那么行列式的正负就表示了空间的定向[37]。

如上图中，左边的黄色骰子（可以看成有单位的有向体积的物体）在经过了线性变换后变成中间绿色的平行六边形，这时行列式为正，两者是同定向的，可以通过旋转和拉伸从一个变成另一个。而骰子和右边的红色平行六边形之间也是通过线性变换得到的，但是无论怎样旋转和拉伸，都无法使一个变成另一个，一定要通过镜面反射才行。这时两者之间的线性变换的行列式是负的。可以看出，线性变换可以分为两类，一类对应着正的行列式，保持空间的定向不变，另一类对应负的行列式，颠倒空间的定向[37][38][39]。

由二维及三维的例子，可以看到一般的行列式应该具有怎样的性质。在n维欧几里得空间中，作为“平行多面体”的“体积”的概念的推广，行列式继承了“体积”函数的性质。首先，行列式需要是线性的，这可以由面积的性质类比得到。这里的线性是对于每一个向量来说的，因为当一个向量变为原来的a倍时，“平行多面体”的“体积”也变为原来的a倍。其次，当一个向量在其它向量组成的“超平面”上时，n维“平行多面体”的“体积”是零（可以想像三维空间的例子）[在向量组中就是指它们线性相关了]。也就是说，当向量线性相关时，行列式为零。

矩阵的行列式 [编辑]

设$M_n(K)$为所有定义在系数域K上的$n\times n$矩阵的集合。将$n\times n$矩阵M（M的元素为$m_{i,j}$）的n列写成$m_1, \dots, m_n$，m_j可以看作是$\mathbb{R}^n$的正则基上的向量。矩阵M的行列式定义为向量组$m_1, \dots, m_n$的行列式。这里的向量都在$\mathbb{R}^n$的正则基上展开，因此矩阵的行列式不依赖于基的选择。

定义：

矩阵M的行列式

$$\det(M) = \det(m_1, \dots, m_n) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^{n} m_{\sigma(i),i}$$ [43]

这样定义的矩阵M的行列式与向量组的行列式有同样的性质。单位矩阵的行列式为1，若矩阵的某几行线性相关，则它的行列式为零。

由莱布尼兹公式，可以证明矩阵行列式的一个重要性质：

定理：

一个矩阵的行列式等于它的转置矩阵的行列式：$\det M = \det({}^tM)$。[44]

也就是说矩阵的行列式既可以看作n个行向量的行列式，也可以看作n个列向量的行列式。因此也可以通过行向量组来定义矩阵行列式，并且得到的定义是等价的。

证明[44]：

矩阵A的转置矩阵的行列式是：

$$\det({}^tA) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

令$j = \sigma(i)$，由于每个排列都是双射，所以上式变成：

$$\det({}^tA) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{j=1}^{n} a_{\sigma^{-1}(j),j}$$

令$\tau = \sigma^{-1}$，当σ取遍所有置换时，τ也取遍所有排列。另一方面，$1 = \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}\sigma) = \operatorname{sgn}(\tau\sigma) = \operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\sigma)$，因此有$\operatorname{sgn}\sigma = \operatorname{sgn}\tau$，所以

$$\det({}^tA) = \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{j=1}^{n} a_{\tau(j),j} = \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}(\tau)\prod_{j=1}^{n} a_{\tau(j),j} = \det A$$

行列式的展开，代数余子式，拉普拉斯公式用于计算矩阵的行列式值

行列式的展开 [编辑]

余因式 [编辑]

又称“余子式”、“余因子”。参见主条目余因式。

对一个n阶的行列式M，去掉M的第i行第j列后形成的n-1阶的行列式叫做M关于元素m_{ij}的余因式。记作M_{ij}[62]。

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,j-1} & m_{1,j+1} & \dots & m_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{i-1,1} & \dots & m_{i-1,j-1} & m_{i-1,j+1} & \dots & m_{i-1,n} \\ m_{i+1,1} & \dots & m_{i+1,j-1} & m_{i+1,j+1} & \dots & m_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,j-1} & m_{n,j+1} & \dots & m_{n,n} \end{vmatrix}$$

代数余子式 [编辑]

M关于元素m_{ij}的代数余子式记作C_{ij}。$C_{ij} = (-1)^{(i+j)}\cdot M_{ij}$[62]。

行列式关于行和列的展开 [编辑]

一个n阶的行列式M可以写成一行（或一列）的元素与对应的代数余子式的乘积之和，叫作行列式按一行（或一列）的展开。

$$\det M = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j}C_{i,j}$$
$$\det M = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}C_{i,j}$$

这个公式又称拉普拉斯公式，把n维矩阵的行列式计算变为了n个n-1维的行列式的计算[62][63]。另一方面，拉普拉斯公式可以作为行列式的一种归纳定义：在定义了二维行列式后，n维矩阵的行列式可以借助拉普拉斯公式用n-1维的行列式来定义。这样定义的行列式与前面的定义是等价的[30]。

行列式的性质：

若两个矩阵相似，那么它们的行列式相同。这是因为两个相似的矩阵之间只相差一个基底变换，而行列式描述的是矩阵对应的线性映射对体积的影响，而不是体积，所以基底变换并不会影响行列式的值。

行列式是所有特征值（按代数重数计）的乘积。这可由矩阵必和其若尔当标准型相似推导出。特殊地，三角矩阵的行列式等于其对角线上所有元素的乘积

行列式的性质 [编辑]

行列式的一些基本性质，可以由它的多线性以及交替性推出。

- 在行列式中，一行（列）元素全为0，则此行列式的值为0[51]。

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

- 在行列式中，某一行（列）有公因子k，则可以提出k[51]。

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = kD_1$$

- 在行列式中，某一行（列）的每个元素是两数之和，则此行列式可拆分为两个相加的行列式[51]。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \dots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 行列式中的两行（列）互换，改变行列式正负符号[51]。

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

- 在行列式中，有两行（列）对应成比例或相同，则此行列式的值为0[51]。

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 \\ 8 & 8 & \dots & 8 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

- 将一行（列）的k倍加进另一行（列）里，行列式的值不变[51]。

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \dots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

注意：一行（列）的k倍加上另一行（列），行列式的值改变。

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ ka_{j1}+a_{i1} & ka_{j2}+a_{i2} & \dots & ka_{jn}+a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

- 将行列式的行列互换，行列式的值不变，其中行列互换相当于转置[51][52]。这个性质可以简单地记作 $D = |a_{ij}| = |a_{ji}| = D^{\mathrm{T}}$

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 行列式的乘法定理：方块矩阵的乘积的行列式等于行列式的乘积。$\det(AB) = \det(A)\det(B)$。特别的，若将矩阵中的每一行每一列上的数都乘以一个常数r，那么所得到的行列式不是原来的r倍，而是r^n倍。$\det(rA) = \det(rI_n\cdot A) = \det(rI_n)\cdot\det(A) = r^n\det(A)$[53]。
- 以上的乘法公式还可以进一步推广为所谓柯西－比内公式，从而使得只要两个矩阵的乘积是方块矩阵，就有类似于以上的结果：假设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵，而 B 是一个 $n\times m$ 矩阵。如果 S 是$\{1, \cdots, n\}$ 中具有 m 个元素的子集$\{S_1, \cdots, S_m\}$，我们记 A_S 为 A 中列指标位于 S 中的 $m\times m$ 子矩阵。类似地，记 B_S 为 B 中行指标位于 S 中的 $m\times m$ 子矩阵。那么
$$\det(AB) = \sum_S \det(A_S)\det(B_S)$$
这里求遍$\{1, \cdots, n\}$ 中 m 个元素的所有可能子集 S（共有 C(n,m) 个）。
如果 $m = n$，即 A 与 B 是同样大小的方块矩阵，则只有一个容许集合 S，柯西－比内公式退化为通常行列式的乘法公式。如过 $m = 1$ 则有 n 容许集合 S，这个公式退化为点积。如果 $m > n$，没有容许集合 S，约定行列式 det(AB) 是零[54]。
- 若A是可逆矩阵，$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$[55]。
- 由行列式的乘法定理以及$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$可以知道，行列式定义了一个从一般线性群$(GL_n(\mathbb{F}), \times)$到$(\mathbb{F}^*, \times)$上的群同态[56]。
- 若将方块矩阵中的元素取共轭，得到的是矩阵的共轭矩阵。共轭矩阵的行列式值等于矩阵行列式值的共轭：$\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$[57]
- 若两个矩阵相似，那么它们的行列式相同。这是因为两个相似的矩阵之间只相差一个基底变换，而行列式描述的是矩阵对应的线性映射对体积的影响，而不是体积，所以基底变换并不会影响行列式的值。用数学语言来说，就是：
如果两个矩阵A与B相似，那么存在可逆矩阵P使得
$\mathbf{A} = \mathbf{PBP}^{-1}$，所以
$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{PBP}^{-1}) = \det(\mathbf{P})\cdot\det(\mathbf{B})\cdot\det(\mathbf{P}^{-1}) = \det(\mathbf{B})\cdot\det(\mathbf{P})\cdot\det(\mathbf{P})^{-1} = \det(\mathbf{B})$[48]
- 行列式是所有特征值（按代数重数计）的乘积。这可由矩阵必和其若尔当标准型相似推导出[58]。特殊地，三角矩阵的行列式等于其对角线上所有元素的乘积[58]。
- 由于三角矩阵的行列式计算简便，当矩阵的系数为域时，可以通过高斯消去法将矩阵变换成三角矩阵，或者将矩阵分解成三角矩阵的乘积之后再利用行列式的乘法定理进行计算。可以证明，所有的矩阵A都可以分解成一个上三角矩阵U、一个下三角矩阵L以及一个置换矩阵P的乘积：$A = P\cdot L\cdot U$。这时，矩阵A的行列式可以写成：
$\det(A) = \det(P)\cdot\det(L)\cdot\det(U)$[59]
- 分块矩阵的行列式并不能简单地表示成每个分块的行列式的乘积组合。对于分块的三角矩阵，仍然有类似的结论：
$\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D)$，矩阵的行列式等于对角元素的行列式之乘积。
对于一般情况，若对角元素中有一个是可逆矩阵，比如说A可逆，那么矩阵的行列式可以写做
$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$。[60]
- 矩阵的行列式和矩阵的迹数有一定的关联，当矩阵的系数为域时，在定义了矩阵的指数函数后，有如下的恒等式：
$\det(\exp(A)) = \exp(\operatorname{tr}(A))$[61]

行列式与线性方程组，矩阵以及多项式还有多重积分之间的关系

当线性方程组对应的行列式不为零时，由克莱姆法则，可以直接以行列式的形式写出方程组的解。但用克莱姆法则求解计算量巨大，因此并没有实际应用价值，一般用于理论上的推导。

多项式$p(x) = det(xI - A)$称为方块矩阵A的特征值多项式。这是一个由行列式定义的多项式，它的解是矩阵所有的特征值。

行列式与多重积分的关系 on wiki主要就是雅可比行列式 on wiki了。[TODO：下面内容我暂时还不太理解，读者若明白请留言告知，谢谢]

> *行列式体现了线性变换对于空间体积的作用，对于非线性的函数，其对体积的影响更为复杂，但对于足够“良好”的函数，在一个微小的范围内，比如说在空间中一点的附近，可以将函数的效果近似地用线性的变换来代替。由此，对于某些函数，也可以将它在某一点附近的作用效果用它在这一点上的偏导数构成的矩阵（称为雅可比矩阵）来表示。这类行列式被称为“雅可比行列式”，即是雅可比矩阵的行列式，只对连续可微的函数有定义。 在计算“体积”的多重积分中，雅可比行列式应用于换元积分的时候。积分的思想是将空间割成许多个微小的体积元，称为积分元素，再将每个体积元上的函数值乘以体积元的体积后相加。将一个积分元素换为另一个积分元素时，实际上作了一次对空间中体积的度量方式的改变：分划体积元的方式不同了。譬如在二维空间中，将直角坐标积分换为极坐标积分时，面积元素由方块区域变成扇形区域。因此，要测量这种体积度量方式的改变，可以将这种变换看成一个非线性的变换函数（实际上是一个微分同胚）： $\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 。而它在每一点的影响可以通过雅可比行列式来体现。*

行列式与线性方程组 [编辑]

主条目：线性方程组

行列式的一个主要应用是解线性方程组。当线性方程组的方程个数与未知数个数相等时，方程组不一定总是有唯一解。对一个有n个方程和n个未知数的线性方程组，我们研究未知数系数所对应的行列式。这个线性方程组有唯一解当且仅当它对应的行列式不为零。这也是行列式概念出现的根源[74]。

当线性方程组对应的行列式不为零时，由克莱姆法则，可以直接以行列式的形式写出方程组的解。但用克莱姆法则求解计算量巨大，因此并没有实际应用价值，一般用于理论上的推导[75]。

行列式与矩阵 [编辑]

主条目：矩阵

矩阵的概念出现得比行列式晚，直到十九世纪中期才被引入，然而两者在本质上仍然有密切关系。通过矩阵，线性方程组可以表示为

$$\mathbf{A}x = b$$

其中$\mathbf{A}$是由方程组中未知数的系数构成的方块矩阵，$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathbf{T}}$是未知数，而$b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathbf{T}}$。

在矩阵理论中，行列式也有各种用途。多项式$p(x) = \det(xI - A)$称为方块矩阵A的特征值多项式。这是一个由行列式定义的多项式，它的解是矩阵所有的特征值。换句话说，x是矩阵A的特征值当且仅当$xI - A$不是可逆矩阵。特征值多项式在矩阵理论中有重要的应用[76]。

行列式与多项式 [编辑]

早在高斯的时代，行列式就和多项式的研究联系在一起。行列式的一个应用是在所谓的“结式”上。结式是两个多项式p和q的西尔维斯特矩阵的行列式。两个多项式的结式等于0当且仅当它们有高于或等于一次的公因子多项式。结式还可以判断多项式是否有重根：如果多项式p和它的微分多项式p'的结式不为零，那么这个多项式没有重根，否则有重根[77]。

行列式在多项式逼近理论中也有出现。给定一组插值点，判别插值多项式的存在性需要看所谓的范德蒙矩阵，而由于范德蒙矩阵的行列式不为零，因此根据克莱姆法则，插值多项式唯一存在（次数小于插值点个数）[78]。

行列式与多重积分 [编辑]

主条目：雅可比矩阵

行列式体现了线性变换对于空间体积的作用，对于非线性的函数，其对体积的影响更为复杂，但对于足够“良好”的函数，在一个微小的范围内，比如说在空间中一点的附近，可以将函数的效果近似地用线性的变换来代替。由此，对于某些函数，也可以将它在某一点附近的作用效果用它在这一点上的偏导数构成的矩阵（称为雅可比矩阵）来表示。这类行列式被称为“雅可比行列式”，即是雅可比矩阵的行列式，只对连续可微的函数有定义[81]。

在计算“体积”的多重积分中，雅可比行列式应用于换元积分的时候。积分的思想是将空间割成许多个微小的体积元，称为积分元素，再将每个体积元上的函数值乘以体积元的体积后相加。将一个积分元素换为另一个积分元素时，实际上作了一次对空间中体积的度量方式的改变：分划体积元的方式不同了。譬如在二维空间中，将直角坐标积分换为极坐标积分时，面积元素由方块区域变成扇形区域。因此，要测量这种体积度量方式的改变，可以将这种变换看成一个非线性的变换函数（实际上是一个微分同胚）：$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$。而它在每一点的影响可以通过雅可比行列式来体现[82]。

Posted by hujiawei • Apr 29th, 2014 • math

« Linear Algebra Summary　　LAS 2-Matrix »