Лабораторная работа №2

Жижченко Глеб Михайлович

2021 Москва

RUDN University, Moscow, Russian Federation

Цель работы

Цель работы

Рассмотреть задачу преследования браконьеров береговой охраной, как пример одной из задач построения математических моделей.

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через некоторое время туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 5.9 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 1.9 раза больше скорости браконьерской лодки.

Задание

Задание

1. Записать уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).
2. Построить траекторию движения катера и лодки для двух случаев.
3. Найти точку пересечения траектории катера и лодки.

Выполнение лабораторной работы

Выполнение лабораторной работы

Принимаем за $t_0 = 0, X_0 = 0$ - место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения, $X_0 = k$ - место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки.

Выполнение лабораторной работы

Введем полярные координаты. Считаем, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров $x_0 = 0 (\theta = x_0 = 0)$, а полярная ось r проходит через точку нахождения катера береговой охраны.

Выполнение лабораторной работы

Чтобы найти расстояние x (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение.

Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстоянии x от полюса. За это время лодка пройдет x, а катер $x - k$ (или $x + k$, в зависимости от начального положения катера относительно полюса).

Выполнение лабораторной работы

Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как $\frac{x}{v}$ или $\frac{x+k}{v}$ (для второго случая $\frac{x-k}{v}$). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы.

Тогда неизвестное расстояние можно найти из следующего уравнения: $\frac{x}{v} = \frac{x+k}{v}$ - в первом случае, $\frac{x}{v} = \frac{x-k}{v}$ во втором случае.

Выполнение лабораторной работы

Отсюда мы найдем два значения x_1 и x_2, задачу будем решать для двух случаев.

$x_1 = \frac{k}{n+1}$,при $\theta = 0$

$x_2 = \frac{k}{n-1}$,при $\theta = -\pi$

Выполнение лабораторной работы

После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки v.

Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: v_r - радиальная скорость и v_t - тангенциальная скорость.

Выполнение лабораторной работы

Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса $v_r = \frac{dr}{dt}$.

Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем $v = \frac{dr}{dt}$.

Выполнение лабораторной работы

Тангенциальная скорость – это линейная скорость вращения катера относительно полюса.

Она равна произведению угловой скорости $\frac{d\theta}{dt}$ на радиус r, $vr = r\frac{d\theta}{dt}$

Выполнение лабораторной работы

Найдем тангенциальную скорость для нашей задачи
$\upsilon_t = r\frac{d\theta}{dt}$.

Вектора образуют прямоугольный треугольник, откуда по теореме Пифагора можно найти тангенциальную скорость
$\upsilon_t = \sqrt{n^2 \upsilon_r^2 - \upsilon^2}$.

Выполнение лабораторной работы

Поскольку, радиальная скорость равна υ, то тангенциальную скорость находим из уравнения $\upsilon_t = \sqrt{n^2\upsilon^2 - \upsilon^2}$. Следовательно, $\upsilon_\tau = \upsilon\sqrt{n^2 - 1}$.

Выполнение лабораторной работы

Тогда получаем $r\frac{d\theta}{dt} = v\sqrt{n^2 - 1}$

Выполнение лабораторной работы

Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений

$$\left\{ \frac{dr}{dt} = \upsilon \, r \frac{d\theta}{dt} = \upsilon\sqrt{n^2 - 1} \right.$$

с начальными условиями

$$\left\{ \theta_0 = 0 \, r_0 = \frac{k}{n+1} \right.$$

$$\left\{ \theta_0 = -\pi \, r_0 = \frac{k}{n-1} \right.$$

Выполнение лабораторной работы

Исключая из полученной системы производную по t, можно перейти к следующему уравнению: $\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{n^2-1}}$

Начальные условия остаются прежними. Решив это уравнение, мы получим траекторию движения катера в полярных координатах. Теперь, когда нам известно все, что нам нужно, построим траекторию движения катера и лодки для двух случаев.

Результаты выполнение работы

Результаты выполнение работы

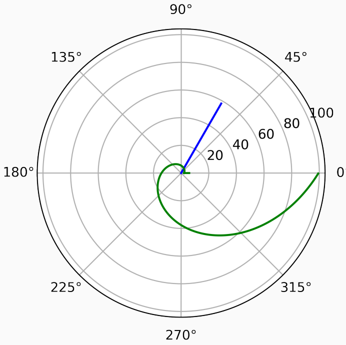

Figure 1: График для первого случая

Результаты выполнение работы

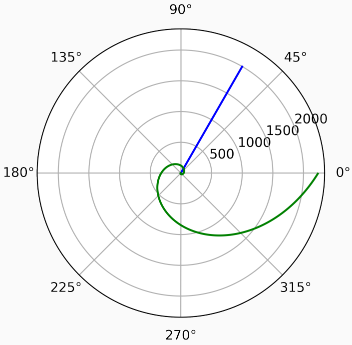

Figure 2: График для второго случая