Лабораторная работа №6

Задача об эпидемии. Вариант 12

Жижченко Глеб Михайлович

Содержание

List of Figures

1 Цель работы

Рассмотреть задачу об эпидемии, как пример одной из задач построения математических моделей.

2 Задание

На одном острове вспыхнула эпидемия. Известно, что из всех проживающих на острове ($N = 18000$) в момент начала эпидемии ($t = 0$) число заболевших людей (являющихся распространителями инфекции) $I(0) = 118$, А число здоровых людей с иммунитетом к болезни $R(0) = 18$. Таким образом, число людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, в начальный момент времени $S(0) = N - I(0) - R(0)$.

Постройте графики изменения числа особей в каждой из трех групп. Рассмотрите, как будет протекать эпидемия в случае:

1. если $I(0) \le I^*$
2. если $I(0) > I^*$

3 Выполнение лабораторной работы

Рассмотрим простейшую модель эпидемии. Предположим, что некая популяция, состоящая из N особей, (считаем, что популяция изолирована) подразделяется на три группы. Первая группа - это восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи, обозначим их через $S(t)$. Вторая группа – это число инфицированных особей, которые также при этом являются распространителями инфекции, обозначим их $I(t)$. А третья группа, обозначающаяся через $R(t)$ – это здоровые особи с иммунитетом к болезни.

До того, как число заболевших не превышает критического значения I^*, считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда $I(t) > I^*$, тогда инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей.

Таким образом, скорость изменения числа $S(t)$ меняется по следующему закону:

$$\frac{dS}{dt} = \begin{cases} -\alpha S, \text{если } I(t) > I^* \\ 0, \text{если } I(t) \leq I^* \end{cases} \tag{3.1}$$

Поскольку каждая восприимчивая к болезни особь, которая, в конце концов, заболевает, сама становится инфекционной, то скорость изменения числа инфекционных особей представляет разность за единицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится, т.е.:

$$\frac{dI}{dt} = \begin{cases} \alpha S - \beta I, \text{если } I(t) > I^* \\ -\beta I, \text{если } I(t) \leq I^* \end{cases} \tag{3.2}$$

А скорость изменения выздоравливающих особей (при этом приобретающие иммунитет к болезни)

$$\frac{dR}{dt} = \beta I \tag{3.3}$$

Постоянные пропорциональности α, β, - это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно. Для того, чтобы решения соответствующих уравнений определялось однозначно, необходимо задать начальные условия. Считаем, что на начало эпидемии в момент времени $t = 0$ нет особей с иммунитетом к болезни $R(0) = 0$, а число инфицированных и восприимчивых к болезни особей $I(0)$ и $S(0)$ соответственно. Для анализа картины протекания эпидемии необходимо рассмотреть два случая: $I(0) \leq I^*$ и $I(0) > I^*$.

Код для случая $I(0) \leq I^*$ на языке Modelica

```
model lab06
parameter Real alpha = 0.01;
parameter Real beta = 0.02;

parameter Integer N = 18000;
parameter Integer I0 = 118;
parameter Integer R0 = 18;
parameter Integer S0 = N - I0 - R0;

Real I(start=I0);
Real R(start=R0);
Real S(start=S0);
equation
```

```
der(I) = -beta * I;
der(R) = beta * I;
der(S) = 0;
end lab06;
```

Код для случая $I(0) > I^*$ на языке Modelica

```
model lab06_part2
parameter Real alpha = 0.01;
parameter Real beta = 0.02;

parameter Integer N = 18000;
parameter Integer I0 = 118;
parameter Integer R0 = 18;
parameter Integer S0 = N - I0 - R0;

Real I(start=I0);
Real R(start=R0);
Real S(start=S0);
equation
der(I) = alpha * S - beta * I;
der(R) = beta * I;
der(S) = -alpha * S;
end lab06_part2;
```

График для случая $I(0) \leq I^*$ можно видеть на рис. 3.1.

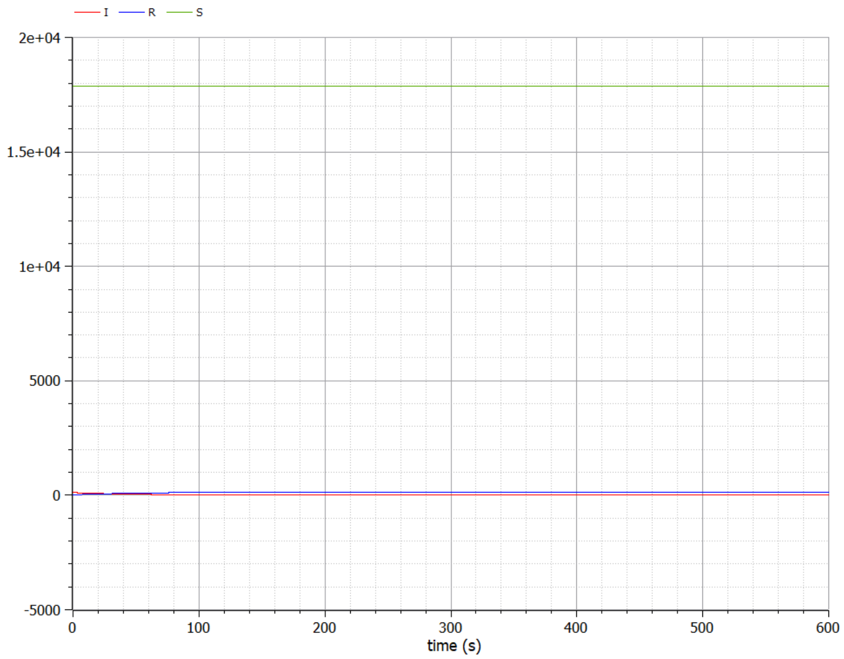

Figure 3.1: График для случая $I(0) \leq I^*$

График для случая $I(0) > I^*$ можно видеть на рис. 3.2.

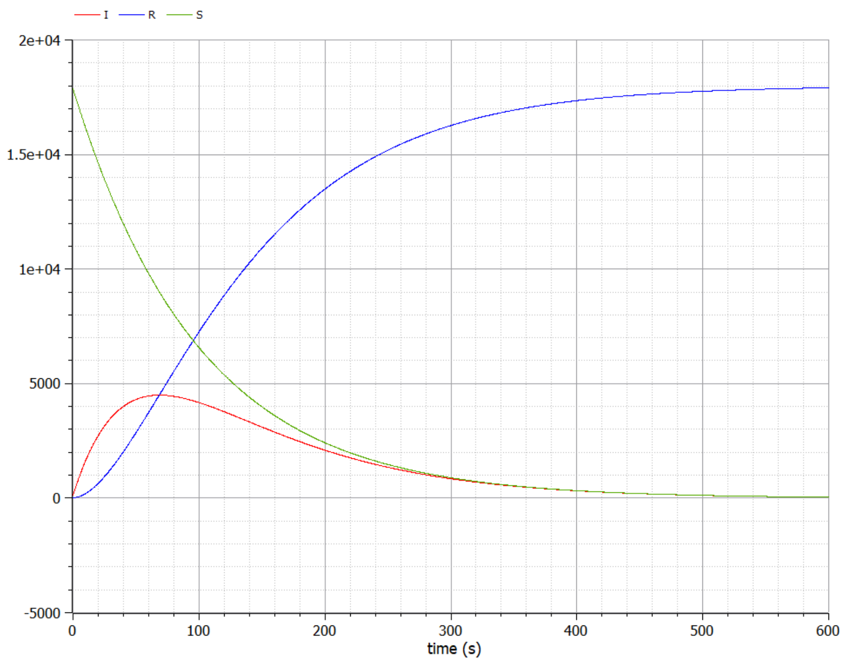

Figure 3.2: Графики для случая $I(0) > I^*$

Коэффициенты $\alpha = 0.01, \beta = 0.02$.

4 Выводы

Рассмотрели задачу об эпидемии. Провели анализ и вывод дифференциальных уравнений.