Лабораторная работа №2

Задача о погоне. Вариант 12

Жижченко Глеб Михайлович

Содержание

List of Figures

1 Цель работы

Рассмотреть задачу преследования браконьеров береговой охраной, как пример одной из задач построения математических моделей.

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через некоторое время туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 5.9 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 1.9 раза больше скорости браконьерской лодки.

2 Задание

1. Записать уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).
2. Построить траекторию движения катера и лодки для двух случаев.
3. Найти точку пересечения траектории катера и лодки.

3 Выполнение лабораторной работы

Принимаем за $t_0 = 0, X_0 = 0$ - место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения, $X_0 = k$ - место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки.

Введем полярные координаты. Считаем, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров $x_0 = 0 (\theta = x_0 = 0)$, а полярная ось r проходит через точку нахождения катера береговой охраны.

Чтобы найти расстояние x (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстоянии x от полюса. За это время лодка пройдет x, а катер $x - k$ (или $x + k$, в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как $\frac{x}{v}$ или $\frac{x+k}{v}$ (для второго случая $\frac{x-k}{v}$). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. Тогда неизвестное расстояние можно найти из следующего уравнения: $\frac{x}{v} = \frac{x+k}{v}$ - в первом случае, $\frac{x}{v} = \frac{x-k}{v}$ во втором случае.

Отсюда мы найдем два значения x_1 и x_2, задачу будем решать для двух случаев.

$x_1 = \frac{k}{n+1}$,при $\theta = 0$

$x_2 = \frac{k}{n-1}$,при $\theta = -\pi$

После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки v. Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: v_r - радиальная скорость и v_t- тангенциальная скорость. Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса $v_r = \frac{dr}{dt}$. Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем $v = \frac{dr}{dt}$. Тангенциальная скорость – это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости $\frac{d\theta}{dt}$ на радиус r, $vr = r\frac{d\theta}{dt}$ Найдем тангенциальную скорость для нашей задачи $v_t = r\frac{d\theta}{dt}$. Вектора образуют прямоугольный треугольник, откуда по теореме Пифагора можно найти тангенциальную скорость $v_t = \sqrt{n^2 v_r^2 - v^2}$. Поскольку, радиальная скорость равна v, то тангенциальную скорость находим из уравнения $v_t = \sqrt{n^2 v^2 - v^2}$. Следовательно, $v_\tau = v\sqrt{n^2 - 1}$.

Тогда получаем $r\frac{d\theta}{dt} = v\sqrt{n^2 - 1}$

Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = v \, r\frac{d\theta}{dt} = v\sqrt{n^2 - 1} \end{cases}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 \, r_0 = \frac{k}{n+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_0 = -\pi \, r_0 = \frac{k}{n-1} \end{cases}$$

Исключая из полученной системы производную по t, можно перейти к следующему уравнению: $\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{n^2-1}}$

Начальные условия остаются прежними. Решив это уравнение, мы получим траекторию движения катера в полярных координатах. Теперь, когда нам известно все, что нам нужно, построим траекторию движения катера и лодки для двух случаев.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```python
from scipy.integrate import odeint

k = 5.9
n = 1.9
fi = np.pi / 3

def f(r, theta):
    return r / np.sqrt(n**2 - 1)

def f2(t):
    return np.tan(theta0) * t

def f3(t):
    return np.tan(fi) * t

r0 = k / (n + 1)
theta0 = 0
theta = np.arange(theta0, np.pi * 2, 0.01)
t1 = np.arange(k, r0, -0.01)
t2 = np.arange(0, 1000, 1)

r = odeint(f, r0, theta)

r_1 = np.sqrt(t1**2 + f2(t1)**2)
t_1 = np.arctan2(f2(t1), t1)

r_2 = np.sqrt(t2**2 + f3(t2)**2)
t_2 = np.arctan2(f3(t2), t2)
```

```
plt.polar(t_1, r_1, 'g')
plt.polar(t_2[:30], r_2[:30], 'b')
plt.polar(theta, r, 'g')
plt.savefig("image/fig1", dpi = 500)

r0 = k / (n - 1)
theta0 = -np.pi
theta = np.arange(theta0, np.pi * 2, 0.01)
t1 = np.arange(-k, -r0, 0.01)

r = odeint(f, r0, theta)

r_1 = np.sqrt(t1**2 + f2(t1)**2)
t_1 = np.arctan2(f2(t1), t1)

plt.polar(t_1, r_1, 'g')
plt.polar(t_2, r_2, 'b')
plt.polar(theta, r, 'g')
plt.savefig("image/fig2", dpi = 500)
```

График для первого случая можно видеть на (рис. 3.1).

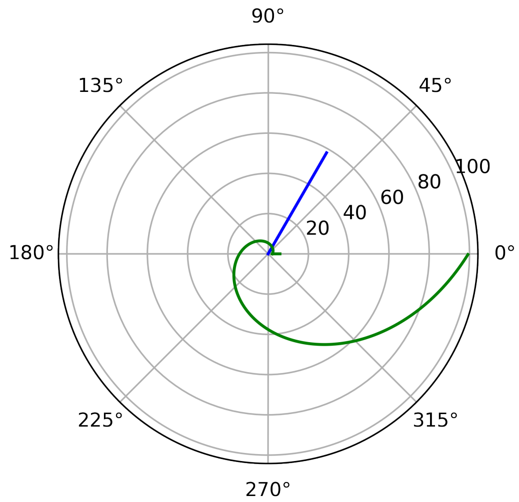

Figure 3.1: График для первого случая

Точка пересечения красного и зеленого графиков - точка пересечения катера и лодки, исходя из графика, имеет параметры

$$\left\{\theta = 325\ r = 27\right.$$

График для второго случая можно видеть на (рис. 3.2).

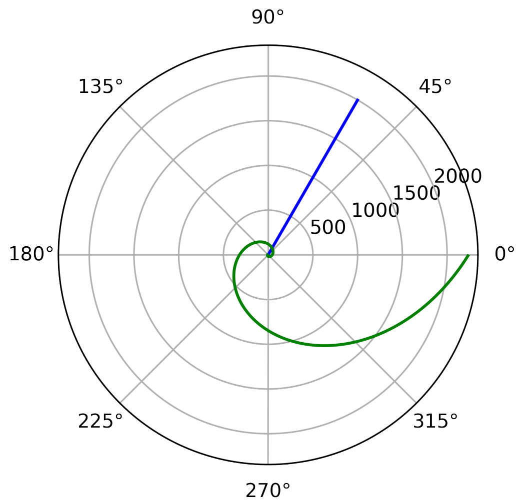

Figure 3.2: График для второго случая

Точка пересечения красного и зеленого графиков - точка пересечения катера и лодки, исходя из графика, имеет параметры

$$\begin{cases}\theta = 325\ r = 27\end{cases}$$

4 Выводы

Рассмотрели задачу о погоне. Провели анализ и вывод дифференциальных уравнений. Смоделировали ситуацию.