# Лабораторная работа №5

Жижченко Глеб Михайлович

2021 Москва

RUDN University, Moscow, Russian Federation

# Цель работы

# Цель работы

Рассмотреть модель хищник-жертва, как пример одной из задач построения математических моделей.

# Задание

# Задание

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -0.24x(t) + 0.044x(t)y(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = 0.44y(t) - 0.024x(t)y(t) \end{cases}$$

1. Построить график зависимости численности хищников от численности жертв;
2. Построить графики изменения численности хищников и численности жертв;
3. Найти стационарное состояние системы.

При $x_0 = 4, y_0 = 10$.

# Выполнение лабораторной работы

# Выполнение лабораторной работы

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - **модель Лотки-Вольтерры**. Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях.

# Выполнение лабораторной работы

1. Численность популяции хищников $x$ и жертв $y$ зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории);
2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает;
3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными;
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается;
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников.

# Выполнение лабораторной работы

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -ax(t) + cx(t)y(t) \\
\frac{dy}{dt} &= by(t) - dx(t)y(t)
\end{aligned} \tag{1}
$$

# Выполнение лабораторной работы

В этой модели $x$ – число хищников, $y$ - число жертв. Коэффициент $a$ описывает скорость естественной смертности хищников, $b$ - естественного прироста жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству хищников, так и числу самих жертв ($xy$). Каждый акт взаимодействия способствует увеличению популяции хищников, но уменьшает популяцию жертв (члены $cxy$ и $-dxy$ в правой части уравнения).

# Выполнение лабораторной работы

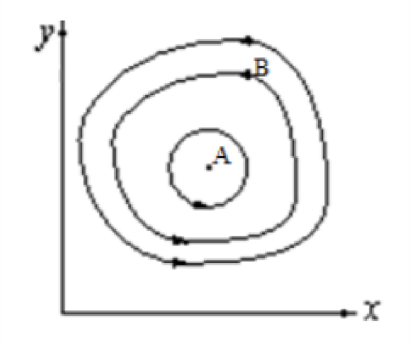


**Figure 1:** Эволюция популяции жертв и хищников в модели Лотки-Вольтерры

# Выполнение лабораторной работы

Математический анализ этой (жесткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние ($A$ на рис. 1), всякое же другое начальное состояние ($B$) приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени система возвращается в состояние $B$.

Стационарное состояние системы (1) (положение равновесия, не зависящее от времени решение) будет в точке: $x_0 = \frac{b}{d}, y_0 = \frac{a}{c}$. Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей $x(0), y(0)$. Колебания совершаются в противофазе.

# Выполнение лабораторной работы

При малом изменении модели

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -ax(t) + cx(t)y(t) + \varepsilon f(x, y) \\
\frac{dy}{dt} &= by(t) - dx(t)y(t) + \varepsilon g(x, y), \varepsilon \ll 1
\end{aligned}
\tag{2}
$$

(прибавление к правым частям малые члены, учитывающие, например, конкуренцию хищников за жертв и жертв за пищу), вывод о периодичности (возвращении системы в исходное состояние $B$), справедливый для жесткой системы Лотки-Вольтерры, теряет силу. Таким образом, мы получаем так называемую мягкую модель «хищник-жертва». В зависимости от вида малых поправок $f$ и $g$ возможны следующие сценарии 1-3 рис. 2.

# Выполнение лабораторной работы

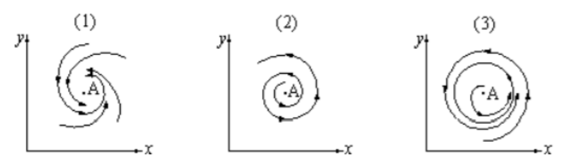


**Figure 2:** Мягкая модель борьбы за существование

# Выполнение лабораторной работы

В случае 1 равновесное состояние $A$ устойчиво. При любых других начальных условиях через большое время устанавливается именно оно.

# Выполнение лабораторной работы

В случае 2 система стационарное состояние неустойчиво. Эволюция приводит то к резкому увеличению числа хищников, то к их почти полному вымиранию. Такая система в конце концов попадает в область столь больших или столь малых значений $x$ и $y$, что модель перестает быть применимой.

# Выполнение лабораторной работы

В случае 3 в системе с неустойчивым стационарным состоянием $A$ с течением времени устанавливается периодический режим. В отличие от исходной жесткой модели Лотки-Вольтерры, в этой модели установившийся периодический режим не зависит от начального условия. Первоначально незначительное отклонение от стационарного состояния $A$ приводит не к малым колебаниям около $A$, как в модели Лотки-Вольтерры, а к колебаниям вполне определенной (и не зависящей от малости отклонения) амплитуды. Возможны и другие структурно устойчивые сценарии (например, с несколькими периодическими режимами).

# Выполнение лабораторной работы

Вывод: *жесткую модель всегда надлежит исследовать на структурную устойчивость полученных при ее изучении результатов по отношению к малым изменениям модели (делающим ее мягкой)*.

# Выполнение лабораторной работы

В случае модели Лотки-Вольтерры для суждения о том, какой же из сценариев 1-3 (или иных возможных) реализуется в данной системе, совершенно необходима дополнительная информация о системе (о виде малых поправок $f$ и $g$ в нашей формуле). Математическая теория мягких моделей указывает, какую именно информацию для этого нужно иметь. Без этой информации жесткая модель может привести к качественно ошибочным предсказаниям. Доверять выводам, сделанным на основании жесткой модели, можно лишь тогда, когда они подтверждаются исследованием их структурной устойчивости.

# Результаты выполнение работы

# Результаты выполнение работы

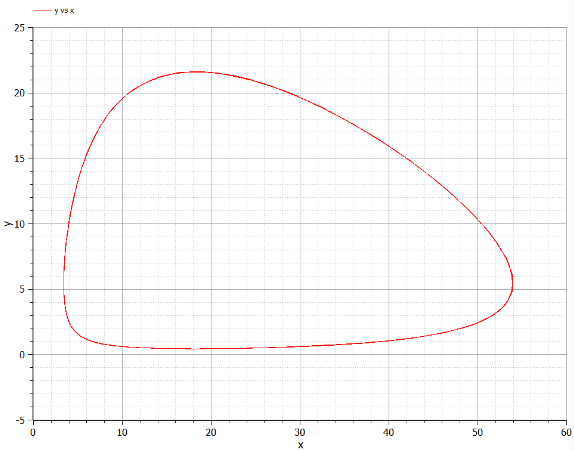


**Figure 3:** График зависимости численности хищников от численности жертв

# Результаты выполнение работы

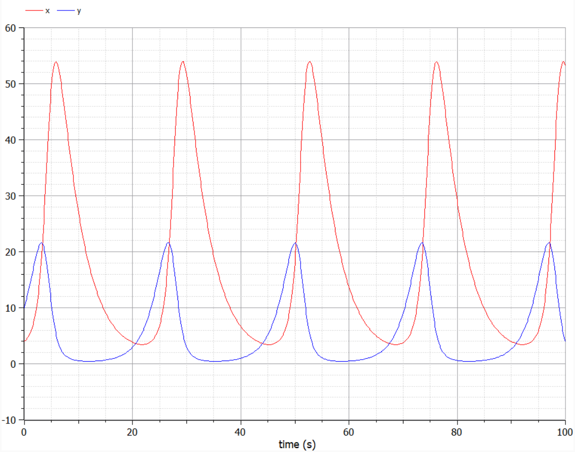


**Figure 4:** Графики изменения численности хищников и численности жертв

## Результаты выполнение работы

Система принимает стационарное состояние при $x_0 = \frac{b}{d} = 18.(3), y_0 = \frac{a}{c} = 5.(45)$.

# Выводы

# Выводы

Рассмотрели модель хищник-жертва. Провели анализ и вывод дифференциальных уравнений.