Лабораторная работа №5

Модель гармонических колебаний. Вариант 12

Жижченко Глеб Михайлович

Содержание

List of Figures

1 Цель работы

Рассмотреть модель хищник-жертва, как пример одной из задач построения математических моделей.

2 Задание

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -0.24x(t) + 0.044x(t)y(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = 0.44y(t) - 0.024x(t)y(t) \end{cases}$$

1. Построить график зависимости численности хищников от численности жертв;
2. Построить графики изменения численности хищников и численности жертв;
3. Найти стационарное состояние системы.

При $x_0 = 4, y_0 = 10$.

3 Выполнение лабораторной работы

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - **модель Лотки-Вольтерры**. Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях:

1. Численность популяции хищников x и жертв y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории);
2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает;
3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными;
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается;
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -ax(t) + cx(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} &= by(t) - dx(t)y(t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

В этой модели x – число хищников, y - число жертв. Коэффициент a описывает скорость естественной смертности хищников, b - естественного прироста жертв.

Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству хищников, так и числу самих жертв (xy). Каждый акт взаимодействия способствует увеличению популяции хищников, но уменьшает популяцию жертв (члены cxy и $-dxy$ в правой части уравнения).

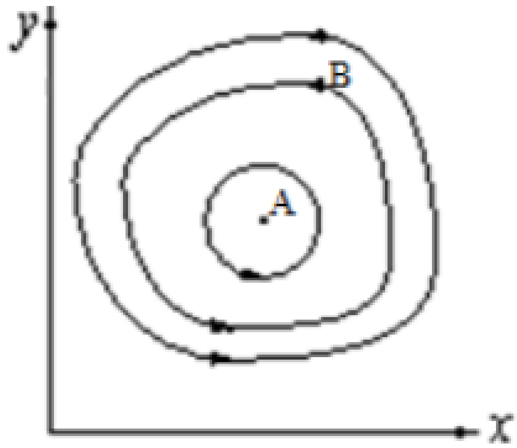

Figure 3.1: Эволюция популяции жертв и хищников в модели Лотки-Вольтерры

Математический анализ этой (жесткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние (A на рис. 3.1), всякое же другое начальное состояние (B) приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени система возвращается в состояние B.

Стационарное состояние системы (3.1) (положение равновесия, не зависящее от времени решение) будет в точке: $x_0 = \frac{b}{d}, y_0 = \frac{a}{c}$. Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей $x(0), y(0)$. Колебания совершаются в противофазе.

При малом изменении модели

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -ax(t) + cx(t)y(t) + \varepsilon f(x,y) \\ \frac{dy}{dt} &= by(t) - dx(t)y(t) + \varepsilon g(x,y), \varepsilon \ll 1 \end{aligned} \tag{3.2}$$

(прибавление к правым частям малые члены, учитывающие, например, конкуренцию хищников за жертв и жертв за пищу), вывод о периодичности (возвращении системы в исходное состояние B), справедливый для жесткой системы Лотки-Вольтерры, теряет силу. Таким образом, мы получаем так называемую мягкую модель «хищник-жертва». В зависимости от вида малых поправок f и g возможны следующие сценарии 1-3 рис. 3.2.

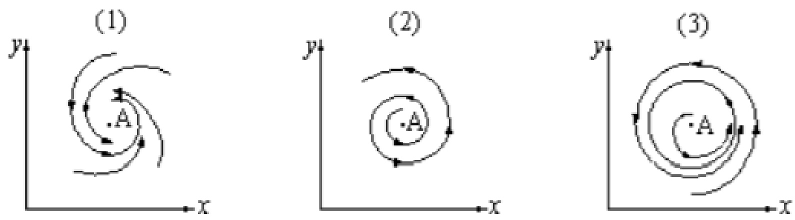

Figure 3.2: Мягкая модель борьбы за существование

В случае 1 равновесное состояние A устойчиво. При любых других начальных условиях через большое время устанавливается именно оно.

В случае 2 система стационарное состояние неустойчиво. Эволюция приводит то к резкому увеличению числа хищников, то к их почти полному вымиранию. Такая система в конце концов попадает в область столь больших или столь малых значений x и y, что модель перестает быть применимой.

В случае 3 в системе с неустойчивым стационарным состоянием A с течением времени устанавливается периодический режим. В отличие от исходной жесткой модели Лотки-Вольтерры, в этой модели установившийся периодический режим не зависит от начального условия. Первоначально незначительное отклонение от стационарного состояния A приводит не к малым колебаниям около A, как в модели Лотки-Вольтерры, а к колебаниям вполне определенной (и не зависящей от малости отклонения) амплитуды. Возможны и другие структурно устойчивые сценарии (например, с несколькими периодическими режимами).

Вывод: *жесткую модель всегда надлежит исследовать на структурную устойчивость полученных при ее изучении результатов по отношению к малым изменениям модели (делающим ее мягкой)*.

В случае модели Лотки-Вольтерры для суждения о том, какой же из сценариев 1-3 (или иных возможных) реализуется в данной системе, совершенно необходима дополнительная информация о системе (о виде малых поправок f и g в нашей формуле). Математическая теория мягких моделей указывает, какую именно информацию для этого нужно иметь. Без этой информации жесткая модель может привести к качественно ошибочным предсказаниям. Доверять выводам, сделанным на основании жесткой модели, можно лишь тогда, когда они подтверждаются исследованием их структурной устойчивости.

Код модели хищник-жертва на языке Modelica

```
model lab05
parameter Real a = 0.24;
parameter Real b = 0.44;
parameter Real c = 0.044;
parameter Real d = 0.024;

Real x(start=4);
Real y(start=10);
equation
der(x) = -a * x + c * x * y;
der(y) = b * y - d * x * y;
end lab05;
```

График зависимости численности хищников от численности жертв можно видеть на рис. 3.3, графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 4, y_0 = 10$ можно видеть на рис. 3.4.

Figure 3.3: График зависимости численности хищников от численности жертв

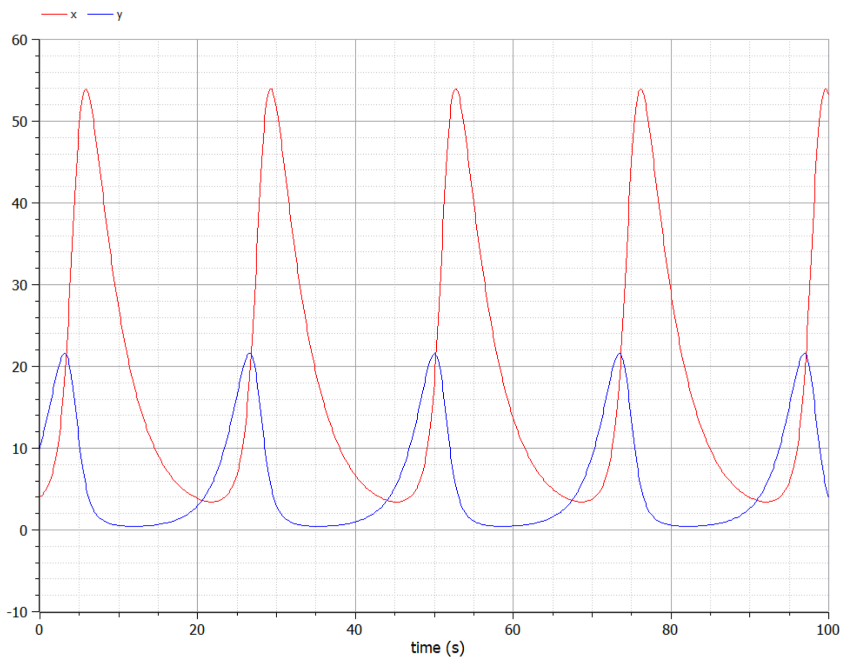

Figure 3.4: Графики изменения численности хищников и численности жертв

Система принимает стационарное состояние при $x_0 = \frac{b}{d} = 18.(3), y_0 = \frac{a}{c} = 5.(45)$

4 Выводы

Рассмотрели модель хищник-жертва. Провели анализ и вывод дифференциальных уравнений.