Лабораторная работа №2

Задача о погоне. Вариант 12

Жижченко Глеб Михайлович

Содержание

# Цель работы

Рассмотреть задачу преследования браконьеров береговой охраной, как пример одной из задач построения математических моделей.

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через некоторое время туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 5.9 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 1.9 раза больше скорости браконьерской лодки.

# Задание

1. Записать уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).
2. Построить траекторию движения катера и лодки для двух случаев.
3. Найти точку пересечения траектории катера и лодки.

# Выполнение лабораторной работы

Принимаем за - место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения, - место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки.

Введем полярные координаты. Считаем, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров , а полярная ось r проходит через точку нахождения катера береговой охраны.

Чтобы найти расстояние (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время катер и лодка окажутся на одном расстоянии от полюса. За это время лодка пройдет , а катер (или , в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как или (для второго случая ). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. Тогда неизвестное расстояние можно найти из следующего уравнения: - в первом случае, во втором случае.

Отсюда мы найдем два значения и , задачу будем решать для двух случаев.

,при

,при

После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки . Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: - радиальная скорость и - тангенциальная скорость. Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса . Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем . Тангенциальная скорость – это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости на радиус , Найдем тангенциальную скорость для нашей задачи . Вектора образуют прямоугольный треугольник, откуда по теореме Пифагора можно найти тангенциальную скорость . Поскольку, радиальная скорость равна , то тангенциальную скорость находим из уравнения . Следовательно, .

Тогда получаем

Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений

с начальными условиями

Исключая из полученной системы производную по t, можно перейти к следующему уравнению:

Начальные условия остаются прежними. Решив это уравнение, мы получим траекторию движения катера в полярных координатах. Теперь, когда нам известно все, что нам нужно, построим траекторию движения катера и лодки для двух случаев.

import numpy as np  
import matplotlib.pyplot as plt  
from scipy.integrate import odeint  
  
k = 5.9  
n = 1.9  
fi = np.pi / 3  
  
def f(r, theta):  
 return r / np.sqrt(n\*\*2 - 1)  
  
def f2(t):  
 return np.tan(theta0) \* t  
  
def f3(t):  
 return np.tan(fi) \* t  
  
r0 = k / (n + 1)  
theta0 = 0  
theta = np.arange(theta0, np.pi \* 2, 0.01)  
t1 = np.arange(k, r0, -0.01)  
t2 = np.arange(0, 1000, 1)  
  
r = odeint(f, r0, theta)  
  
r\_1 = np.sqrt(t1\*\*2 + f2(t1)\*\*2)  
t\_1 = np.arctan2(f2(t1), t1)  
  
r\_2 = np.sqrt(t2\*\*2 + f3(t2)\*\*2)  
t\_2 = np.arctan2(f3(t2), t2)  
  
plt.polar(t\_1, r\_1, 'g')  
plt.polar(t\_2[:30], r\_2[:30], 'b')  
plt.polar(theta, r, 'g')  
plt.savefig("image/fig1", dpi = 500)  
  
r0 = k / (n - 1)  
theta0 = -np.pi  
theta = np.arange(theta0, np.pi \* 2, 0.01)  
t1 = np.arange(-k, -r0, 0.01)  
  
r = odeint(f, r0, theta)  
  
r\_1 = np.sqrt(t1\*\*2 + f2(t1)\*\*2)  
t\_1 = np.arctan2(f2(t1), t1)  
  
plt.polar(t\_1, r\_1, 'g')  
plt.polar(t\_2, r\_2, 'b')  
plt.polar(theta, r, 'g')  
plt.savefig("image/fig2", dpi = 500)

График для первого случая можно видеть на (рис. 1).

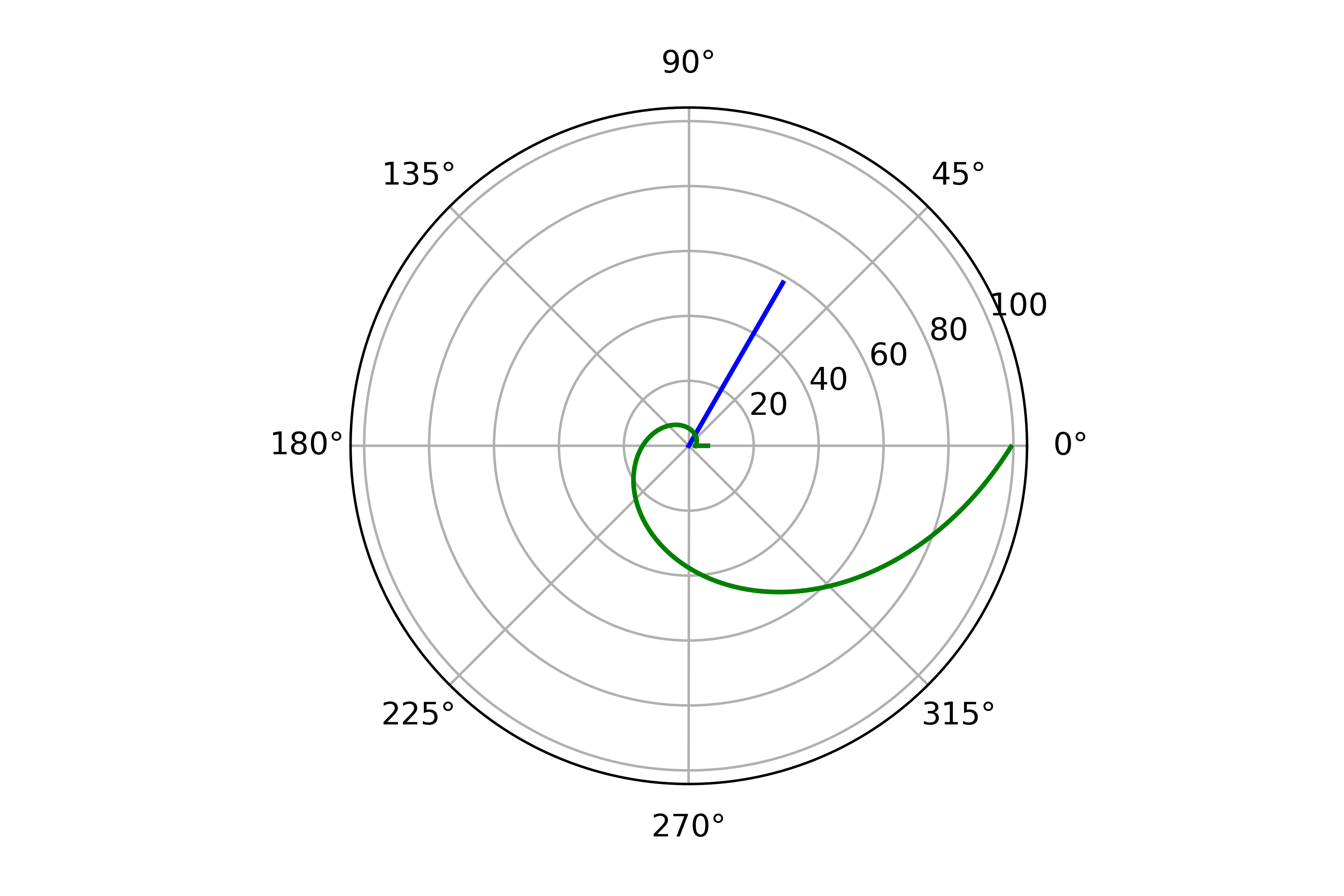


Figure 1: График для первого случая

Точка пересечения красного и зеленого графиков - точка пересечения катера и лодки, исходя из графика, имеет параметры

График для второго случая можно видеть на (рис. 2).

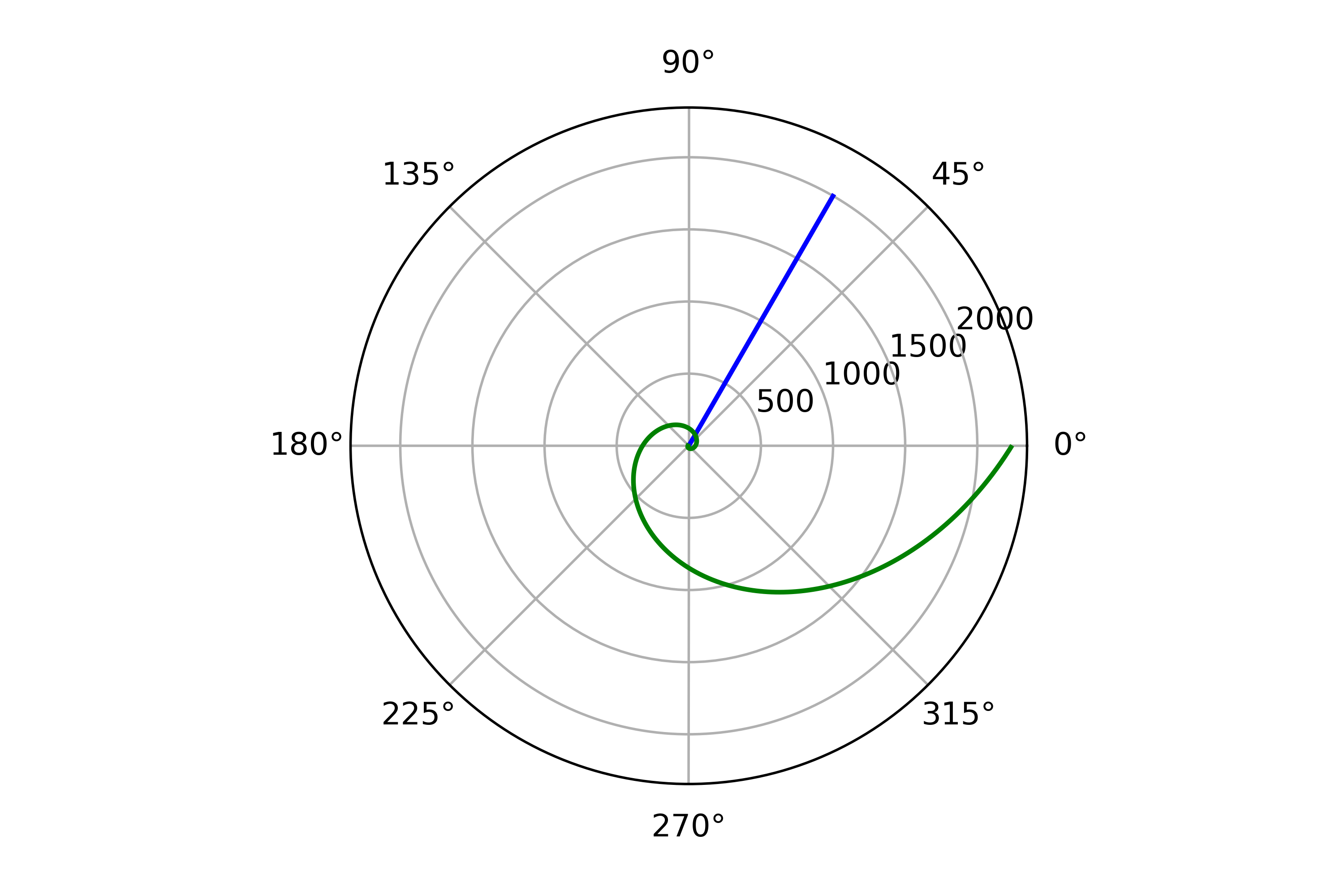


Figure 2: График для второго случая

Точка пересечения красного и зеленого графиков - точка пересечения катера и лодки, исходя из графика, имеет параметры

# Выводы

Рассмотрели задачу о погоне. Провели анализ и вывод дифференциальных уравнений. Смоделировали ситуацию.