数学选讲

陈东武

广州大学附属中学

2021 年 12 月 x 日

1. ProbSet I
2. ProbSet II

Problem I

给定正整数 n，构造 2^n 个 $< 2^{2n}$ 的自然数 a_i，使得对于所有 $i < j$，有 $a_i \oplus a_j$ 两两不同。

$n \le 12$。[1]

[1] http://www.szoj.net/problem/2657

什么是有限域？

可以证明有限域的阶数是质数幂次，且在确定大小后唯一。

$\mathrm{GF}(p^n)$ 可以表示为系数模 p，整体模 n 次不可约多项式 F 的意义下定义四则运算，由不超过 $n-1$ 次的多项式构成的代数结构。

Problem I

令 $a_i = i \cdot 2^n + f(i)$，其中 $f(i)$ 是 $\mathsf{GF}(2^n)$ 意义下的立方。

Problem II

求长度为 n 的满足 $a_1 = 2$，$\max\{\sqrt[i]{a_i}\} < \min\{\sqrt[i]{a_i + 1}\}$ 的正整数序列 $\{a_1, \cdots, a_n\}$ 的个数 $\bmod(10^9 + 7)$。

$n \le 10^{12}$。

Problem II

设 $x=\max\{\sqrt[i]{a_i}\}$，则 $a_i=\lfloor x^i\rfloor$，所求即为 x 的个数。

设 $f(n)=3^n-2^n$，答案即为 $f*\mu$ 的前缀和，杜教筛即可。

Problem III

给定 n 个正整数 a_i，先手后手轮流随机选数，当选出来的数的 gcd 为 1 时最后一个操作的人失败，求先手获胜的概率 $\bmod(10^9+7)$。

$n \leq 10^5$，$a_i \leq 10^7$。

Problem III

设 p_i 表示 i 次操作之后未结束的概率，答案为 $\sum_{i=1}^{n}(-1)^i p_i$。

$g_{i,d}$ 表示选 i 个数且 gcd 为 d 的概率，则 $p_i=\sum_{d\geq 2} g_{i,d}$。

$f_{i,d}$ 表示选 i 个数且都为 d 的倍数的概率，则
$f_{i,d}=\binom{cnt_d}{i}/\binom{n}{i}=\sum_{d|t} g_{i,t}$，所以 $g_{i,d}=\sum_{d|t}\mu(t/d)f_{i,t}$。

所以答案为 $\sum_{i\geq 1}(-1)^{i-1}\sum_{t\geq 2}\mu(t)f_{i,t}$。时间复杂度
$O(n\sigma_0(V)+V\log\log V)$。

Problem IV

给定标号为 $1, 2, \cdots, n$ 的牌，初始有序。

进行 m 次操作，每次操作在 n 张牌中随机一张抽出然后放到开头。

求最后牌堆有序的概率 $\bmod 998244353$。

$n, m \leq 10^6$。

Problem V

对于 $\{a\} \in [m]^n$ 和 $k \in \mathbb{N}_+$，定义 $F_k(a)$ 为 $\{a\}$ 中之前至少有 k 个位置比它小的位置个数。对每个 $k \in [n]$ 求 $\sum_a F_k(a)$ 模 998244353 的值。

$n \leq 10^5$，$m \leq 10^9$。

Problem VI

给定长为 n 的环，求选 m 个关键点的方案数 $\bmod 998244353$，使得不存在连续的超过 k 个关键点。只考虑循环同构。

$k \le m \le n \le 10^6$。

Problem VII

给定 n 个正整数 r_i，构造 n 个点 P_i 使得 $|OP_i| = r_i$，且这 n 个点的凸包面积最大。

$3 \le n \le 8$，$r_i \le 10^4$。[2]

[2] http://www.szoj.net/problem/2539

Problem VIII

给定质数 p，T 次询问自然数 a,b,c,d 求

$$\min\{ax+by \mid x,y\in\mathbb{N}_+ \wedge p|(c^x-d^y)\}$$

$T\le 10^4$，$a,b,c,d\le 10^9$，$3\le p\le 1004535809$。[3]

[3] http://www.szoj.net/problem/2540

Problem IV

给定自然数序列 $\{a\}_{i=0}^{n}$，求

$$\bigoplus_{m=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \binom{m}{j}\binom{n-m}{i-j} \bmod 998244353\right)$$

$n \leq 10^6$，$a_i < 998244353$。[4]

[4] http://www.szoj.net/problem/2541

Cubic Lattice

若 $|\mathbf{r_1}| = |\mathbf{r_2}| = |\mathbf{r_3}| = r$ 且 $\mathbf{r_1} \cdot \mathbf{r_2} = \mathbf{r_2} \cdot \mathbf{r_3} = \mathbf{r_3} \cdot \mathbf{r_1} = 0$，则称 $L = \{u \cdot \mathbf{r_1} + v \cdot \mathbf{r_2} + w \cdot \mathbf{r_3} : u, v, w \in \mathbb{Z}\}$ 为立方格。

给定向量集合 A，求使得 $A \subset L$ 的 r^2 的最大值。

$n \leq 10^4$，$||\mathbf{v}|| \leq 10^{16}$。[5]

[5] http://codeforces.com/contest/1375/problem/I

什么是欧式整环？

设 R 是整环，称其为欧式整环 (ED) 是指存在映射 $\varphi: R \to \mathbb{N}$，使得：

- $\varphi(x) = 0 \iff x = 0$;
- 对于所有 $a, b \in R$，$b \neq 0$，存在 $q, r \in R$，使得 $a = bq + r$，且 $\varphi(r) < \varphi(b)$。

什么是四元数？

定义四元数 $\boldsymbol{p} = s + \mathbf{v}$，其中 $\mathbf{v} = a\mathsf{i} + b\mathsf{j} + c\mathsf{k} = (a, b, c)$，若定义 $\mathsf{i}^2 = \mathsf{j}^2 = \mathsf{k}^2 = \mathsf{ijk} = -1$，则

$(x + \mathbf{v})(y + \boldsymbol{w}) = xy + y\mathbf{v} + x\boldsymbol{w} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \boldsymbol{w}$。

定义范数 $||\boldsymbol{p}|| = s^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$，则 $||\boldsymbol{pq}|| = ||\boldsymbol{p}||||\boldsymbol{q}||$。

定义 $\boldsymbol{p} = s + \mathbf{v}$ 的共轭 $\hat{\mathbf{p}} = s - \mathbf{v}$，则当 $||\mathbf{p}|| = 1$ 时 $\boldsymbol{p}^{-1} = \hat{\mathbf{p}}$。

可以证明三维向量空间的旋转形如 $\mathbf{p}' = \boldsymbol{qpq}^{-1}$。

Thanks!