

# 杂题选讲

陈东武

广州大学附属中学

2021 年 11 月 6 日

① ProbSet I

② ProbSet II

## 白鸽

给定  $n$  个点  $m$  条边的无自环的无向图，每个点有坐标  $(x_i, y_i)$ ，求经过 1 的欧拉回路关于原点卷绕数的最大值，需判断无解。

$n, m \leq 2 \cdot 10^4$ ,  $|x_i|, |y_i| \leq 10^9$ 。<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup><https://uoj.ac/problem/389>

## 百鸽笼

给定  $n$  个正整数  $a_i$ , 做  $\sum a_i - 1$  次操作, 每次操作随机选择一个正整数减去 1, 对于每个  $k$  求最后  $a_k > 0$  的概率  
mod 998244353.

$n, a_i \leq 30$ 。<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup><https://uoj.ac/problem/390>

## 树上 GCD

给定  $n$  个点的以 1 为根的树, 设  $d(u, v)$  是  $u, v$  间的距离,  $\text{LCA}(u, v)$  是  $u, v$  的最近公共祖先。

对于两个节点  $u, v$  ( $u < v$ ), 设  $a = \text{LCA}(u, v)$ , 定义  $f(u, v) = \gcd(d(u, a), d(v, a))$ .

$\forall i \in [1, n-1]$  求有多少个无序对  $(u, v)$  满足  $f(u, v) = i$ .

$n \leq 2 \cdot 10^5$ 。<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup><https://uoj.ac/problem/33>

# 鸽子固定器

给定  $n$  个二元组  $(s_i, v_i)$  和正整数  $d_s, d_v$ , 求选择  $m$  个二元组的  $(\sum v)^{d_v} - (\max s - \min s)^{d_s}$  的最大值。

$n \leq 2 \cdot 10^5$ ,  $m \leq 50$ ,  $d_s, d_v \leq 2$ ,  $1 \leq s_i, v_i \leq 10^7$ 。<sup>4</sup>

---

<sup>4</sup><https://uoj.ac/problem/386>

# 新年的小黄鸭

对于长为  $l$  的全 1 串  $x$ , 设  $f(x) = l$ , 对于长为  $l$  的全 0 串, 设  $f(x) = \lceil \log_2 l \rceil + 1$ , 对于 01 串  $x$ , 设  $f(x) = \sum f(\text{每一个极大连续全 0/1 子串})$ .

给定  $n$  个点的有根树, 给每条边赋 01 权值, 要求每个点与其儿子间至多只有一条 0 边, 求  $\sum_{i=2}^n f((1, i))$ , 其中  $(1, i)$  表示 1 到  $i$  的路径上边权构成的 01 串。

$$n \leq 10^5。^5$$

---

<sup>5</sup><https://uoj.ac/problem/462>

① ProbSet I

② ProbSet II



# Podatki drogowe

给定  $n$  个点的树，第  $i$  条边  $(a_i, b_i)$  的边权  $n^{p_i}$ 。

求  $\binom{n}{2}$  个  $d(u, v)$  中第  $k$  小的值。

$n \leq 2.5 \cdot 10^4$ ,  $1 \leq k \leq \binom{n}{2}$ ,  $1 \leq a_i, b_i, p_i \leq n$ 。<sup>6</sup>

---

<sup>6</sup><https://loj.ac/p/3225>

给定一棵树，你可以维护一个集合，支持：

- 当前集合中插入一个节点  $x$ ；
- 撤回上一次插入操作；
- 将当前点集标为第  $i$  个点的子树补信息。

$n \leq 10^5$ ，允许进行  $4.5 \cdot 10^6$  次插入操作。<sup>7</sup>

---

<sup>7</sup><https://www.luogu.com.cn/problem/P7124>

## New Divide

给定  $n$  个自然数  $a_1, \dots, a_n$ , 对每个  $k \in [1, n]$  求

$$\min\{(a_1 \oplus \dots \oplus a_i) + (a_{i+1} \oplus \dots \oplus a_k) : i \in [0, k]\}$$

$$n, a_i < 2^{20}。^8$$

---

<sup>8</sup>Ptz-Summer-2017, Moscow IPT Contest, Problem B.

## Invisible

给定  $n$  个正整数  $a_1, \dots, a_n$  和  $m$  个操作：单点修改或求区间  $[l, r]$  内的任意一个出现奇数次的数（需判断无解）。

$n, a_i \leq 10^5$ ，强制在线。<sup>9</sup>

---

<sup>9</sup>Ptz-Summer-2017, Moscow IPT Contest, Problem I.

## Numb

给定  $n$  个点的有向图，编号为  $0, 1, \dots, n-1$ ， $i$  连向  $2i \bmod n$  和  $(2i+1) \bmod n$ ，求哈密顿回路。

$n \leq 1000$ ， $n$  是偶数。<sup>10</sup>

---

<sup>10</sup>Ptz-Summer-2017, Moscow IPT Contest, Problem G.

*Thanks!*