线性代数选讲

陈东武

广州大学附属中学

2021 年 10 月 x 日

什么是矩阵

设 R 是环，$R^{n\times m}$ 的元素 A 是一个由 n 行 m 列元素排列成的矩形阵列。

矩阵的基本运算有加法、数乘、转置。定义乘法之后对于一些矩阵可以求逆。

$R^{n\times m}$ 是环，零元是所有元素都为 0 的矩阵，单位元是仅有对角线上元素为 1，其他元素为 0 的矩阵。

什么是行列式

对于 n 阶方阵 A，定义其行列式为：

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i,\sigma(i)}$$

由行列式函数的多线性和交替性，可以使用高斯消元在 $O(n^3)$ 的时间复杂度内计算。

对 n 阶行列式 M，去掉第 i 行和第 j 列后形成的 $n-1$ 阶行列式称为 M 关于 (i,j) 的余子式，记做 $M_{i,j}$，$C_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j}$ 称为代数余子式。

对一行 (列) 的元素提取系数可以得到拉普拉斯公式：行列式 M 可以写成一行 (列) 的元素与对应的代数余子式的乘积之和，叫做行列式按一行 (列) 的展开。

循环矩阵行列式

$$A_{i,j} = a_{(i-j) \bmod n}$$

$$B_{i,j} = \omega_n^{ij}$$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

则有 $AB = \prod_{i=0}^{n-1} f(\omega_n^i) \cdot B$，则有 $|A| = \prod_{i=0}^{n-1} f(\omega_n^i)$。

当单位根不存在时可以使用 Resultant[1] 在 $O(n^2)$ 的时间复杂度内计算。

[1] https://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%B5%90%E5%BC%8F

数论线代全家桶

设 $A_{i,j} = \gcd(i,j)$，求 $\det(A)$。

数论线代全家桶

考虑设 $Y = A \times X$，则有：

$$
\begin{aligned}
Y_i &= \sum_j X_j \gcd(i,j) \\
&= \sum_j X_j \sum_{d|i,j} \varphi(d) \\
&= \sum_{d|i} \left(\varphi(d) \sum_{d|j} X_j \right)
\end{aligned}
$$

将 A 看做三个矩阵的乘积，就可以得到 $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \varphi(i)$。

什么是积和式

对于 n 阶方阵 A，定义其积和式为：

$$\operatorname{perm}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} A_{i,\sigma(i)}$$

考虑 σ 的组合意义，可以将其理解为图的环覆盖计数或二分图的完美匹配计数。

积和式的计算问题是 #P-Complete 的。

CF468E

积和式求值。$n \le 10^5$，至多有 50 个位置非 1。[2]

[2] https://www.luogu.com.cn/problem/CF468E

CF468E

对所有 $A_{x,y} \neq 1$ 拆成 1 和 $A_{x,y} - 1$ 两条边，不考虑边权为 1 的边，答案即为 k 条边的匹配权值乘积乘上 $(n-k)!$ 之和。

std 做法是一个 $O(k^2 2^{k/3})$ 的阈值法。实际上还有一个剪枝状压 dp 的做法。

设 $f_{i,j,S}$ 表示考虑左侧前 i 个点，匹配了 j 条边，右侧已经用了 S 这些点的方案数，而之后一定不会用到的右侧点就不用记下来。此时最坏情况的复杂度是 $O(k 2^{k/2})$ 的，对点编号 shuffle 一下就跑得飞快。

SZOJ2513

给定 $n \times n$ 的矩阵 M，求 $\bigoplus_{i=1}^{n} M_{i,\sigma(i)}$ 的值域。
$n \le 60$，$M_{i,j} < 2^{12}$。[3]

[3] http://www.szoj.net/problem/2513

SZOJ2513

将 M 的元素看作集合幂级数，所求即为 $\mathrm{perm}(M)$ 的每一项是否有值。

在模 p 意义下给每个元素赋随机系数计算 $\det(M)$ 的每一项是否有值。它是充分条件，不必要的概率大约为 nV/p，时间复杂度 $O(n^3V)$。

什么是伴随矩阵

对于 n 阶方阵 A，定义其伴随矩阵 $\mathsf{adj}(A)$ 为其余子矩阵的转置，即 $(\mathsf{adj}(A))_{i,j} = C_{j,i}$。

因为第 i 行的元素与第 j 行对应的代数余子式的乘积之和为 $[i=j]\det(A)$，所以 $A\mathsf{adj}(A) = \det(A)I$，得到矩阵 A 可逆当且仅当 $\det(A)$ 可逆，$A^{-1} = \mathsf{adj}(A)/\det(A)$。

跳蚤猜密码

这是一道交互题。

给定正整数 n，交互器有 $A \in \mathbb{F}_p^{n\times n}$，其中 $p = 998244353$。你可以询问 n^2 次 $B \in \mathbb{F}_p^{n\times n}$，交互库告诉你 $\det(A+B)$ 的值，求 A。

$n \le 50$，non-adaptive。[4]

[4] https://uoj.ac/problem/655

跳蚤猜密码

先给 A 加上随机矩阵使得它大概率可逆。

先询问 $\det(A)$，然后对于所有 $(x,y)\neq(1,1)$，询问 $B_{i,j}=[i=x\wedge j=y]$ 得到 (i,j) 的代数余子式，就可以得到 $\mathrm{adj}(A)$ 除 $(1,1)$ 之外的值，又因为 $\det(\mathrm{adj}(A))=\det(A)^{n-1}$，就可以把 $(\mathrm{adj}(A))_{1,1}$ 算出来，然后对 $\mathrm{adj}(A)/\det(A)$ 求逆就可以算出 A。

什么是线性空间

对于域 F，F 上的线性空间 V 是一个集合，其上定义了向量加法 $+: V \times V \to V$ 和标量乘法 $\cdot: F \times V \to V$，满足其对加法构成交换群，标量乘法与标量的域乘法相容，标量乘法单位元和两个分配律。

对于向量集合 B，包含 B 的最小线性空间称为 B 的生成线性空间，记做 $\mathsf{span}(B)$。

对于线性空间 V，可以生成 V 的一组线性无关向量，称为 V 的基。V 的所有基的大小都相等，称为 V 的维数，记做 $\dim V$。

对于两个系数域 F 的向量空间 V, W，若 $f: V \to W$ 保持向量加法和标量乘法，则称其为线性映射。线性映射都可以表示为矩阵形式。若 f 是双射则称 V 与 W 是同构的。

矩阵行向量的生成线性空间的维数称为这个矩阵的秩。

Chiori and Doll Picking

给定 n 个自然数 $a_i < 2^m$，$\forall k \in [0, m]$ 求选出子集使得异或和的二进制表示恰有 k 个 1 的方案数。

$n \le 2 \cdot 10^5$，$m \le 53$。[5]

[5] https://codeforces.com/contest/1336/problem/E2

Chiori and Doll Picking

定义 $\langle i,j\rangle$ 表示向量内积，即为 popcount$(i\&j)$。
$F(S)=\sum_{x\in\mathsf{span}(S)}z^x$ 表示 span(S) 的集合幂级数，
$P(S)=\sum_{x\in\mathsf{span}(S)}z^{\mathsf{popcount}(x)}$ 表示答案，A 为题中所给数构成的线性基，$k=|A|$。

线性空间的一个性质是 $[z^i]\mathsf{FWT}(F(A))=2^k[\forall a\in A,2|\langle i,A\rangle]$，即 i 与 span(A) 正交。

Chiori and Doll Picking

设 A 的正交线性基为 B，则有 $\text{FWT}(A) = 2^k \cdot B$，一种正交线性基的构造方式为：

A	1	0	0	1	1
	0	1	1	1	0
B	0	1	1	0	0
	1	1	0	1	0
	1	0	0	0	1

Chiori and Doll Picking

设 $G_c = \sum z^x[\mathsf{popcount}(x) = c]$，则有

$$P(A) = [z^0]\mathsf{IFWT}(\mathsf{FWT}(F(A)) \cdot \mathsf{FWT}(G_c))$$
$$= 2^{k-m} \sum_{d \geq 0} [z^d] P(B) \sum_{i \geq 0} (-1)^i \binom{d}{i} \binom{m-d}{c-i}$$

暴力计算 $P(B)$，时间复杂度 $O(2^{m-k})$。

什么是特征值与特征向量

对于 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$，定义 $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$。

Cayley-Hamilton 定理：$p_A(A) = O$。[6]

满足 $Av = \lambda v$ 的标量 λ 和向量 v 称为一对特征值和特征向量。

特征值都是特征多项式的根。若 $P = [v_1, v_2, \cdots, v_n]$ 是可逆矩阵，设 D 为 λ_i 组成的对角矩阵，则有 $A = PDP^{-1}$，称为矩阵对角化。CF923E[7] 是矩阵对角化优化求幂的模板。

[6] https://www.luogu.com.cn/blog/rqy/cayley-hamilton-ding-li

[7] https://codeforces.com/problemset/problem/923/E

什么是线性递推

对于无限数列 $\{a_0, a_1, \cdots\}$ 和有限非空数列 $\{r_0, r_1, \cdots, r_{m-1}\}$，若 $\forall p \geq m-1$，$\sum_{k=0}^{m-1} a_{p-k} r_k = 0$，且 $r_0 = 1$，则称 r 为 a 的线性递推式，称其阶数为 $m-1$。存在线性递推式的数列称为线性递推数列。

给定有限数列，可以使用 BM 算法在 $O(n^2)$ 的复杂度内求出其最短线性递推式。

设 $G(F) = \sum_{k\geq 0} a_k \cdot [x^k]F$，$S(x) = \sum_{i=0}^{m-1} r_i x^{m-1-i}$，则 $G(a+b) = G(a) + G(b)$，$G(S \cdot x^t) = 0$，所以 $G(x^k) = G(x^k \bmod S(x))$，使用快速幂 $O(m \log m \log k)$ 计算线性递推数列第 k 项。

求矩阵列的最短递推式

以下均假设运算在 $\mathbb{F}_p$ 下进行。

对于 $n \times m$ 的矩阵列 $(M_0, M_1, \cdots)$，随机 n 维列向量 u 和 m 维行向量 v，计算 $(uM_0v, uM_1v, \cdots)$ 的最短线性递推式，它们的最短线性递推式有至少 $1 - \frac{n+m}{p}$ 的概率相同。

求矩阵的最小多项式

对于 n 维随机向量 u, v 求 $(uv, uMv, uM^2v, \cdots)$ 的最短线性递推式。设 M 有 e 个非零位置则时间复杂度为 $O(n(n+e))$。

解稀疏线性方程组

给定 n 阶满秩方阵 A 和长为 n 的行向量 b，需要求出 $A^{-1}b$。

求出 $(b, Ab, A^2b, \cdots)$ 的最短线性递推式 $(r_0, r_1, \cdots, r_{m-1})$，则有：

$$A^{-1}b = -\frac{1}{r_{m-1}} \sum_{i=0}^{m-2} A^i b r_{m-2-i}$$

求稀疏矩阵行列式

给定 n 阶满秩方阵 A，求 $\det(A)$。

随机 n 阶对角矩阵 B，AB 有至少 $1-\frac{2n^2-n}{p}$ 的概率每个特征根的代数重数都为 1，即最小多项式即为特征多项式。

求稀疏矩阵秩

给定 $n \times m$ 阶矩阵 A，求 $\mathsf{rank}(A)$。

随机 $m \times m$ 的对角矩阵 D_1，AD_1A^T 有至少 $1 - \frac{n^2}{p}$ 的概率与 A 的秩相同。随机 $n \times n$ 的对角矩阵 D_2，$D_2AD_1A^TD_2$ 有至少 $1 - \frac{4n^2}{p}$ 的概率满足特征多项式等于最小多项式乘上 x 的次幂，而 $n \times n$ 矩阵的秩即为 n 减去特征值 0 的代数重数。

随机数

给定一个随机数生成器生成的前 2000 个数，q 次询问再生成 n 次得到的随机数。

$q \le 101$，$n \le 10^9$。[8]

[8] https://uoj.ac/problem/646

随机数

根据 C-H 定理，这个随机数生成器是异或意义下的 192 阶线性递推。

直接 Gauss 消元解出递推式然后用上述方法求值即可。时间复杂度 $O((mw)^3 + qm^2 w \log n)$。

Expected Value

给定 n 个点的简单无向连通平面图，求从 1 号点开始随机游走到达 n 号点期望步数模 p。

$n \leq 2000$，$10^9 < p < 1.01 \cdot 10^9$，$p$ 是质数。[9]

[9] https://codeforces.com/gym/102268/problem/E

Expected Value

稀疏线性方程组模板。

LGV 引理

给定有向无环图 G，对于图上一条路径 P，定义 $\omega(P)$ 是 P 上所有边的边权之积。定义两端点之间的权值 $\omega(u,v)$ 为 u,v 之间所有路径权值之和。

给定起点元组 $S=(S_1,S_2,\cdots,S_n)$ 和终点元组 $T=(T_1,T_2,\cdots,T_n)$，定义路径 n 元组 $P=(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 是 S,T 的 n-路径，当且仅当存在置换 π，使得 P_i 的起点是 S_i，终点是 $T_{\pi(i)}$。定义其权值 $\omega(P)=\prod_{i=1}^n \omega(P_i)$，定义其置换 $\sigma(P)=\pi$，若 $P_1,\cdots,P_n$ 两两不交则称 P 是不交的。

记行列式 $M_{i,j}=\omega(S_i,T_j)$，则 $\det(M)$ 等于所有 S,T 的不交 n-路径的 $\mathrm{sgn}(\sigma(P))\omega(P)$ 之和。

证明：对相交的 n-路径，可以构造 $\mathrm{sgn}(\sigma(P))\omega(P)$ 为相反数的对合映射。

「NOI2021」路径交点

题面懒得写了自己看。[10]

[10] https://loj.ac/p/3533

「NOI2021」路径交点

注意到这个权值的符号即为 $\mathrm{sgn}(\sigma(P))$，所以是 LGV 引理板子。

传播者

给定 n 层的分层图，每层有 k 个点，第 i 层向第 $i+1$ 层连了若干条有向边。设 S, T 是两个点集，S 中所有顶点在第 l 层，T 中所有顶点在第 r 层，且 $l < r$。设 $\text{cut}(S, T)$ 为 S 和 T 的最小点割，即至少要去掉多少个顶点，才能保证不存在一条 s 到 t 的有向路径，其中 $s \in S$，$t \in T$，且 s, t 均未被去掉。

q 次操作改变一条边的存在状态或询问两个点集的最小点割。

$2 \le n \le 2^{13}$，$k \le 24$，$1 \le q \le 2^{13}$。

传播者

转化为最大流，求最大的 k 使得 S, T 的 k 元子集 S', T' 有 k-路径。给每条边一个随机权值，则若 S', T' 有 k-路径则行列式有至少 $1-\frac{n}{p}$ 的概率不为 0。

把点到点的方案数列成矩阵，问题实际上就是求 $k \times k$ 的子矩阵使得其行列式不为 0，相当于计算矩阵的秩。使用线段树维护矩阵区间积，时间复杂度 $O((n+q\log n)k^3)$。

Ascending Matrix

给定正整数 N, M, K, R, C, V，求满足以下条件的 $N \times M$ 的整数矩阵 a 的个数 $\bmod 998244353$。

- $\forall i \in [1, N], j \in [1, M]$，$a_{i,j} \in [1, K]$；
- $\forall i \in [1, N], j \in [1, M-1]$，$a_{i,j} \le a_{i,j+1}$；
- $\forall i \in [1, N-1], j \in [1, M]$，$a_{i,j} \le a_{i+1,j}$；
- $a_{R,C} = V$。

$N, M \le 200$，$K \le 100$，$R \le N$，$C \le M$，$V \le K$。[11]

[11] https://codeforces.com/gym/102978/problem/A

Ascending Matrix

$\forall i \in [1, K-1]$，考虑 i 与 $i+1$ 交界处的轮廓线，它们的充要条件是不交叉。平移一下就变为网格图上的不交 $(K-1)$-路径。

考虑 $a_{R,C} = V$ 的限制，即为某个点及其右下方恰有 $V-1$ 条路径，引入变元 x，将这种路径赋 x 的权值，求计算出的多项式的 $V-1$ 次项系数。代入 $x = 0, 1, \cdots, K-1$ 然后插值即可，时间复杂度 $O(K^2(N+M)+K^4)$。

Cauchy-Binet 公式

给定 $n \times m$ 的矩阵 A 和 $m \times n$ 的矩阵 B，则

$$\det(AB) = \sum_{|S|=n \wedge |S| \subseteq [m]} \det(A_{n,[S]}) \det(B_{[S],n})$$

拉普拉斯矩阵

对于无向图 $G=(V,E)$，其中 $V=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$，定义其拉普拉斯矩阵为

$$L_{i,j}=\begin{cases}\sum_{(u_i,k)\in E}\omega(u_i,k) & i=j\\ -\omega(u_i,u_j) & i\neq j\land(u_i,u_j)\in E\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

拉普拉斯矩阵所有代数余子式都相等。

对于 G 的生成树 $T=(V,E_T)$，记 $\omega(T)=\prod_{e\in E_T}\omega(e)$。记 $\mathcal{T}$ 是 G 所有生成树的集合，则拉普拉斯矩阵的任何一个代数余子式的值等于 $\sum_{T\in\mathcal{T}}\omega(T)$。

矩阵树定理证明

对于边 $e=(u,v)$，定义 $\zeta(e,u)=v$，$\zeta(e,v)=u$。
定义顶点之间的大小关系 $u_i<u_j \iff i<j$，记 $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_{|E|}\}$，构造关联矩阵 $A_{|V|,|E|}$：

$$A_{i,j}=\begin{cases}\sqrt{\omega(e_j)} & u_i\in e_j\wedge u_i<\zeta(e_j,u_i)\\ -\sqrt{\omega(e_j)} & u_i\in e_j\wedge u_i>\zeta(e_j,u_i)\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

则有 $L=AA^T$，设 B 为 A 删去第一行，则有：

$$\det(L_{1,1})=\sum_{|S|=n-1\wedge S\subseteq E}\det(B_{n-1,[S]})^2$$

矩阵树定理证明

其组合意义是对点 $u_2,\cdots,u_n$ 分别选一条 S 中的边且每条边都被选恰好一次。若 u_i 选择了 e_j 则看做有向边 $(u_i,\zeta(e_j,u_i))$，所以也相当于给 S 中的边定向，使得 $u_2,\cdots,u_n$ 的出度恰好为 1。

对于存在环的方案，构造对合映射：取环上点编号最小值最小的环（容易发现环的点不交，所以这样的环唯一），将这个环上的边反向。

若环长为奇数，则排列奇偶性不变，关联矩阵中系数符号变化了奇数个；若环长为偶数，则排列奇偶性改变，关联矩阵中系数符号变化了偶数个。所以贡献值相反，出现环的权值都被两两抵消，对行列值没有贡献。

于是只用考虑不存在环的情况，此时有向图只能是以 1 为根的内向树，此时定向方案唯一（确定了边集和根），也就是每个点选择的出边都唯一，所以 $\det(B_{[n-1],[S]})^2$ 即为该树的边权积，求和就得到 $\sum_{T\in\mathcal{T}}\omega(T)$。

特征值相关

设拉普拉斯矩阵的特征值是 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_{|V|}$，则有 $\lambda_{|V|} = 0$。

定义 k-生成森林是图的一个生成子图 (V, E)，使得这个子图有 k 个连通分量且无环。

定义 $\mathcal{T}_k$ 表示无向图 G 的 k-生成森林的集合，$Q(T)$ 表示森林 T 的每个连通分量的点数之积，L 的特征多项式为 $P(x)$，则有：

$$F_k = \sum_{T \in \mathcal{T}_k} \omega(T) Q(T) = (-1)^{|V|-k} [x^k] P(x)$$

证明：考虑 $P(x) = \det(xI - L)$，枚举排列行列式时，贡献到 $[x^k]$ 相当于选择相同编号的 k 行 k 列删去，这些就是每个连通分量的根，其他点选择出边连到这些根（类似定理 1 的证明），$(-1)^{|V|-k}$ 表示将负号去掉。

有向图情况

对于有向图 $G=(V,E)$，定义其内向拉普拉斯矩阵为：

$$L_{i,j}=\begin{cases}\sum_{(u_i,k)\in E}\omega(u_i,k) & i=j\\ -\omega(u_i,u_j) & i\neq j\wedge(u_i,u_j)\in E\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

好像跟刚才的柿子没有区别啊（雾

有向图情况

我们可以使用两个不同的关联矩阵 A, B 承担不同的功能。

$$A_{i,j} = \begin{cases} \sqrt{\omega(e_j)} & u_i \text{ is } e_j\text{'s head} \\ -\sqrt{\omega(e_j)} & u_i \text{ is } e_j\text{'s tail} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$B_{i,j} = \begin{cases} \sqrt{\omega(e_j)} & u_i \text{ is } e_j\text{'s head} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

与无向图情况中不同的是，关联矩阵 B 限制了只有边的起点能选择这条边，剩下的讨论均与无向图相同。

BEST 定理

对于有向欧拉图 G，其不同的欧拉回路数量为：

$$T(x)\prod_{u\in V}(\mathrm{deg}(u)-1)!$$

其中 $T(x)$ 表示以 x 为根的不同外向树的数量。

证明即考虑 HierHolzer 算法，从 x 出发，考虑离开每个点时走的边，其构成一棵以 x 为根的内向树，再证明这是双射即可。

生成树计数

定义一个树的权值，为其所有边权值和。给定 n 个点的带权无向完全图，求其所有生成树权值的 k 次方之和模 998244353 的值。$n, k \leq 30$。[12]

[12] https://www.luogu.com.cn/problem/P5296

生成树计数

考虑 $(\sum w_i)^k = k![x^k]\prod e^{w_i x}$，直接套用矩阵树定理即可，运算时只用保留到 k 次。时间复杂度 $O(n^3k^2)$。

C4

题面懒得写了自己看。[13]

[13] https://atcoder.jp/contests/agc051/tasks/agc051_d

C4

无向图欧拉回路计数是 NPC 问题，但这题的图较为简单，确定了 $S-T$ 的边中从 S 指向 T 的有多少条，就可以确定其他三条边的定向方案，然后直接套用 BEST 定理就得到 $O(a+b+c+d)$ 的做法。

1. 基础应用
2. 线性递推
3. LGV 引理
4. 矩阵树定理
5. 图的积相关问题

什么是图的积

对于两张图 $G_1(V_1, E_1)$，$G_2(V_2, E_2)$，定义其张量积 $G(V, E) = G_1 \times G_2$，其中：

$$
\begin{aligned}
V &= \{(u, v) : u \in V_1 \wedge v \in V_2\} \\
E &= \{((u_1, v_1), (u_2, v_2)) : (u_1, u_2) \in E_1 \wedge (v_1, v_2) \in E_2\}
\end{aligned}
$$

定义其笛卡尔积 $G(V, E) = G_1 \square G_2$，其中：

$$
\begin{aligned}
V &= \{(u, v) : u \in V_1 \wedge v \in V_2\} \\
E &= \{((u_1, v), (u_2, v)) : (u_1, u_2) \in E_1 \wedge v \in V_2\} \\
&\quad \cup \{((u, v_1), (u, v_2)) : u \in V_1 \wedge (v_1, v_2) \in E_2\}
\end{aligned}
$$

什么是 Kronecker 积

给定两个矩阵 A, B，其中 A 是 $n \times m$ 的矩阵，则定义 A 和 B 的 Kronecker 积为：

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B & \cdots & a_{1,m}B \\ a_{2,1}B & a_{2,2}B & \cdots & a_{2,m}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}B & a_{n,2}B & \cdots & a_{n,m}B \end{bmatrix}$$

其有一个重要的性质：$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$。

图的张量积对应到邻接矩阵上即为 Kronecker 积。

什么是 Kronecker 和

对于 $n \times n$ 矩阵 A 和 $m \times m$ 矩阵 B，定义 A 和 B 的 Kronecker 和为：

$$A \oplus B = A \otimes I_m + I_n \otimes B$$

图的笛卡尔积对应到邻接矩阵或拉普拉斯矩阵上即为 Kronecker 和。

特征值相关

对于 A_1 的特征值 λ_i 和特征向量 x_i，以及 A_2 的特征值 μ_j 和特征向量 y_j，则有：

$$\begin{aligned}(A_1 \otimes A_2)(x_i \otimes y_j) &= (A_1 x_i) \otimes (A_2 y_j) \\ &= (\lambda_i x_i) \otimes (\mu_j y_j) \\ &= (\lambda_i \mu_j) x_i \otimes y_j\end{aligned}$$

所以 $A_1 \otimes A_2$ 的特征值即为 $\lambda_i \mu_j$，对应的特征向量为 $x_i \otimes y_j$。

特征值相关

对于 A_1 的特征值 λ_i 和特征向量 x_i，以及 A_2 的特征值 μ_j 和特征向量 y_j，则有：

$$\begin{aligned}(A_1 \oplus A_2)(x_i \otimes y_j) &= (A_1 \otimes I_m + I_n \otimes A_2)(x_i \otimes y_j) \\ &= (A_1 x_i) \otimes (I_m y_j) + (I_n x_i) \otimes (A_2 y_j) \\ &= (\lambda_i + \mu_j) x_i \otimes y_j\end{aligned}$$

所以 $A_1 \oplus A_2$ 的特征值即为 $\lambda_i + \mu_j$，对应的特征向量为 $x_i \otimes y_j$。

poly 线代全家桶

给定 k 个无向图 $G_1, G_2, \cdots, G_k$，求 $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_k$ 中长度为 L 的起点和终点相等的不同路径数模 998244353 的值。

$\sum n_i \leq 500$，$L \leq 10^{18}$。

poly 线代全家桶

设邻接矩阵为 A，题目所求即为 $\mathrm{tr}(A^L)$，即为特征值 L 次求和。

$$Ans = \prod \sum_i \lambda_i^L$$

考虑对于一张图的邻接矩阵计算特征值 L 次和，设 $g(x) = \prod_i (1 - \lambda_i x)$ 是特征多项式系数翻转之后得到的结果，则有：

$$\sum_i \lambda_i^L = [x^L] \sum_i \frac{1}{1 - \lambda_i x} = -[x^{L-1}] \frac{g'(x)}{g(x)}$$

此即为 n 阶线性递推。时间复杂度 $O(\sum (n_i^3 + n_i \log n_i \log L))$。

一道模板题

给定两个无向图 G_1, G_2，求 $G = G_1 \square G_2$ 的生成树个数。

$n_1 + n_2 \leq 500$。[14]

[14] http://www.szoj.net/problem/2651

一道模板题

答案即为:

$$\frac{1}{n_1 n_2}\prod_{i=1}^{n_1}\prod_{j=1}^{n_2-[i=n_1]}(\lambda_i+\mu_j)$$

计算出特征多项式之后使用结式即可在 $O(n_1 n_2)$ 的复杂度下得到答案。

Knowledge-Oriented Problem

给定 n 个点的无向图 G，将其复制 k 次得到 $G_1, G_2, \cdots, G_n$，对于每个 $i \in [1, n-1]$ 和顶点 u，将 G_i 中的顶点 u 与 G_{i+1} 中的顶点 u 连边。求这个图的生成树个数 $\mathrm{mod}(10^9+7)$。

$n \le 500$，$k \le 10^{18}$。[15]

[15] XXOpenCup,GPofZhejiang,ProblemK

Knowledge-Oriented Problem

设 $L(G)$ 的特征多项式为 $P(x)$，则可以在 $O(n\log n\log k)$ 的时间复杂度内计算链的拉普拉斯矩阵的特征多项式模 $P(x)$，进而使用与上题相同的方法。

Thanks!