

Opentrains 杂题选讲

陈东武

广州大学附属中学

2021 年 10 月 x 日

① 前言

② ProbSet I

③ ProbSet II

④ ProbSet III

⑤ ProbSet IV

⑥ ProbSet V

1 前言

2 ProbSet I

3 ProbSet II

4 ProbSet III

5 ProbSet IV

6 ProbSet V

要讲什么

如题所示，要讲杂题。

题目应该不会跟 jly 的 APIO 讲课重复，因为都很简单。

章节没啥意义，只是个分块而已（雾

题目顺序大致乱序排列，不过因为题目太简单了所以大家应该都不会掉线。

① 前言

② ProbSet I

③ ProbSet II

④ ProbSet III

⑤ ProbSet IV

⑥ ProbSet V

Vacant Seat

这是一道交互题。

有一张圆桌周围均匀摆放着 N 张椅子，按顺时针编号为 $0, 1, \dots, N-1$ 。一些猫猫坐在这些椅子上，它们要么是白色的，要么是黑色的。一张椅子上面至多坐一只猫猫，没有两张相邻椅子上坐着相同颜色的猫猫。因为某种原因，必有至少一张椅子是空的。

每次询问你选择一张椅子，交互库告诉你这张椅子是空的/坐着白猫/坐着黑猫。你需要在 20 次询问之内询问到一张空椅子。

$3 \leq N \leq 99999$, N 是奇数。¹

¹https://atcoder.jp/contests/apc001/tasks/apc001_c

Vacant Seat

Learn how to use binary search.

Guess Two Strings

出题人有两个长为 N 的 01 串 S, T ，他按如下方式独立生成 Q 个 01 串并告诉你：随机选 S 和 T 之一， K 次反转随机位置的值。求可能的一组无序对 (S, T) 。

$N = Q = 100, K = 15$ 。²

²XIX Open Cup, GP of SPb, Problem J

Guess Two Strings

Learn how to 乱搞.

这 Q 个串大致可以划分成两个集合（由 S 生成或由 T 生成）。随机枚举其中两个串，假装它们属于不同集合，按其他串与这两个串的 Hamming 距离的大小关系分成两个集合，分别对每一位取众数就得到 S, T ，检验一下是否满足要求，如果不满足就重新跑一遍。期望复杂度 $O(NQ)$ 。

Antennas on Tree

假设这是一道交互题：给定一棵 N 个点的树，你可以选择 K 个点 x_0, x_1, \dots, x_{K-1} 布置雷达，然后交互库选择一个点 u 并告诉你 $d(x_0, u), \dots, d(x_{K-1}, u)$ ，你需要求出 u 。

然而这是一道传统题，你只需要求出使得你必定能 AC 的 K 的最小值。

$$2 \leq N \leq 10^5。^3$$

³https://atcoder.jp/contests/apc001/tasks/apc001_e

Antennas on Tree

你必定能 AC 等价于对于每个点 u , K 元组 $(d(x_0, u), \dots, d(x_{K-1}, u))$ 互不相同。

Antennas on Tree

你必定能 AC 等价于对于每个点 u , K 元组 $(d(x_0, u), \dots, d(x_{K-1}, u))$ 互不相同。

等价于对于每个点 u , 删去 u 之后至多有一个连通块没有雷达。

Antennas on Tree

你必定能 AC 等价于对于每个点 u , K 元组 $(d(x_0, u), \dots, d(x_{K-1}, u))$ 互不相同。

等价于对于每个点 u , 删去 u 之后至多有一个连通块没有雷达。

特判掉链的情况, 以一个度数 > 2 的点为根, 等价于对于每个点 u , u 至多有一个儿子的子树没有雷达。设 f_u 表示只考虑 u 的子树时的答案, 直接 dp 即可, 时间复杂度 $O(N)$ 。

Matrix Recurrence

给定 $M_0, B \in \mathbb{Z}_{\text{mod}}^{m \times m}$ 和 $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{N}$, 定义

$$M_i = \left(\prod_{j=c_i}^{i-1} M_j \right) \times B, \text{ 求 } M_n.$$

$$n \leq 10^6, \quad m \leq 5, \quad 2 \leq \text{mod} \leq 10^9, \quad c_i < i, \quad c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n, \\ \text{TL} = 10\text{s}.^4$$

⁴Ptz Winter 2017, Xiaoxu Guo Contest 5, Problem G

Matrix Recurrence

“バカ-trick”（两个栈模拟队列）的模板题。时间复杂度 $O(nm^3)$ 。

Welcome to ICPCCamp 2017

给定 m 支队伍打 n 场区域赛和一场 EC-Final。第 i 场区域赛有 k_i 支队伍打，排名是 $r_{i,1}, \dots, r_{i,k_i}$ 。所有队伍都打了 EC-Final，排名是 $r_{n+1,1}, \dots, r_{n+1,m}$ 。

你任意选取正整数 x, y 和长为 n 的排列 p ，求 $(r_{n+1,1}, \dots, r_{n+1,y}, r_{p_1,1}, \dots, r_{p_n,1}, r_{p_1,2}, \dots, r_{p_n,2}, \dots)$ 的前 $x + y$ 支不同队伍的集合的个数 $\text{mod}(10^9 + 7)$ 。

$$\sum k_i, \sum m \leq 2 \cdot 10^5。^5$$

⁵Ptz Winter 2017, Xiaoxu Guo Contest 5, Problem K

Welcome to ICPCCamp 2017

从大到小枚举 EC-Final 的最高排名的未出线队伍 i ，不妨设其前面的队伍都通过 EC-Final 名额出线，考虑其后面有队伍通过区域赛出线的情况，只需要让队伍 i 拿不到区域赛出线名额即可，需要单点修改前缀和查询，用树状数组维护即可。

① 前言

② ProbSet I

③ ProbSet II

④ ProbSet III

⑤ ProbSet IV

⑥ ProbSet V

Multi-stage Marathon

给定 n 个点的有向图， m 个人从时刻 t_i 开始从点 v_i 随机游走（每个时刻随机选择一条出边走过去，保证每个点都有出边），设 E_t 表示 n 号点在时刻 t 的期望人数模 $10^9 + 7$ ，求 $\bigoplus_{t=1}^T E_t$ 。
 $n \leq 70$, $m \leq 10^4$, $T \leq 2 \cdot 10^6$ 。⁶

⁶Ptz Winter 2017, Xiaoxu Guo Contest 5, Problem F

Multi-stage Marathon

注意到矩阵乘向量的复杂度是 $O(n^2)$ ，而求矩阵乘向量的某一维的复杂度是 $O(n)$ 。

平衡一下，预处理 G^0, G^1, \dots, G^L ，其中 G 是转移矩阵。就可以做到 $O(n^2 \lceil \frac{T}{L} \rceil)$ 转移一段， $O(n)$ 算一项答案。

时间复杂度 $O(n^3 L + nT + n^2(\frac{T}{L} + m))$ ，大概取 $L \approx 100$ 即可。

Coins 2

给定面值为 $1, 2, \dots, n$ 的硬币分别 a_1, a_2, \dots, a_n 个，求能组合出的面值数量。

$n \leq 15$, $a_i \leq 10^9$ 。⁷

⁷Ptz Winter 2017, Xiaoxu Guo Contest 5, Problem D

Coins 2

设 $m = \text{lcm}(1, 2, \dots, n)$, 若 $x \geq nm$ 能够拼成, 则必有一种面值 i 的个数 $\geq \frac{m}{i}$, 得到 $x - m$ 也可以被拼成。

根据对称性, 设 $s = \sum ia_i$, 若 $x \leq s - nm$, 则 $x + m$ 也能拼成。

所以 $\forall x \in [nm, s - (n+1)m]$, x 能拼成当且仅当 $x + m$ 能拼成。

所以只需要算出 $[1, (n+1)m]$ 能否被拼成即可。

时间复杂度 $O(n^2m)$ 。

City United

给定 n 个点的无向图，求连通导出子图个数 mod 2。

$n \leq 50$ ，边的两端点编号之差 ≤ 13 。⁸

⁸Ptz Winter 2017, Xiaoxu Guo Contest 5, Problem C

City United

可以转化为对连通块黑白染色的方案数 mod 4。即对所有点染黑白灰三色，使得黑色点与白色点之间没有连边。直接 dp 即可，时间复杂度 $O(n3^k)$ 。

Even Three is Odd

给定 w_1, w_2, \dots, w_n , 求

$$\sum_{x \in [n]^n} \prod_{i=1}^{n-2} w_{\max(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})} \bmod (10^9 + 7)$$

$$\sum n \leq 2000。^9$$

⁹Ptz Winter 2017, Xiaoxu Guo Contest 5, Problem A

Even Three is Odd

不能把两个数记录进状态里，就考虑只记录最大值，设 $f_{i,j,k}$ 表示考虑 x 的前 $i+j$ 个值， x_i, x_{i+1}, x_{i+2} 的最靠后的最大值是 $x_{i+j} = k$ 的情况下， $\prod_{l=1}^i w_{\max(x_l, x_{l+1}, x_{l+2})}$ 之和。考虑什么情况下 $f_{i,j,k}$ 能转移到 $f_{i+1,j',k'}$ ，枚举一下发现是 $j' = j - 1 \wedge k' = k$ ，或者 $j = 0 \wedge k > k'$ ，或者 $j' = 2 \wedge k \leq k'$ ，使用前/后缀和优化，时间复杂度 $O(n^2)$ 。

Clique Festival

给定 n 个点的无向连通图，其边集是 k 个边权相同的团 C_i ，求所有点对间最短路长度之和。

$$n \leq 10^5, k \leq 18, 1 \leq w \leq 10^7, \sum |C_i| \leq 3 \cdot 10^5. ^{10}$$

¹⁰XIX Open Cup, GP of SPb, Problem C

Clique Festival

考虑两个点 u, v 之间的最短路，因为团比较少所以转化为团之间的最短路。

建有向图 G 表示若 $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ 则连边 $i \rightarrow j$ ，边权为 a_j ，设 u, v 分别属于 C_i, C_j ，则 $\text{dis}(u, v) = \min_{i,j} \{\text{dis}_G(i, j) + a_i\}$ 。

$\text{dis}_G(i, j)$ 显然很容易算。考虑按权值从小到大枚举 (i, j) ，数出对应的 u, v 数量。设 D_i 表示所有处理过的 (i, j) 的 j 的集合。

枚举 u, v 的取值是 $C_j \setminus \bigcup_{C_a \supseteq u, b \in D_a} C_b$ ，这个是可以 $O(k2^k)$ 预处理

$O(k)$ 计算的。

总时间复杂度 $O(k^2 \sum |C_i| + k2^k + nk^2/w)$ 。

① 前言

② ProbSet I

③ ProbSet II

④ ProbSet III

⑤ ProbSet IV

⑥ ProbSet V

Fantasmagorie

定义 01 矩阵是好的当且仅当：

- 边界上的元素都相同；
- 不含 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的连续子矩阵。
- 将同色四连通块缩点之后，每个点的度数 ≤ 2 。

给定两个 $H \times W$ 的好矩阵，构造一组每次 flip 一个元素，从第一个矩阵变为第二个矩阵的长度 $\leq 2.5 \cdot 10^5$ 的操作序列，使得两种颜色的四连通块个数保持不变，且自始至终是好矩阵。需判断无解。

$$H \leq 64, W \leq 103. \text{ }^{11}$$

¹¹<https://codeforces.com/gym/103081/problem/M>

Fantasmagorie

条件说明同色四连通块应当是套在一起的。

因为操作可逆，所以考虑将两个矩阵都变为一个标准化的矩阵。

Fantasmagorie

条件说明同色四连通块应当是套在一起的。

因为操作可逆，所以考虑将两个矩阵都变为一个标准化的矩阵。

我们可以把次外的连通块扩展，将最外的连通块挤成宽为 1 的环，然后去掉边界之后就是一个子问题。只需要对最外的连通块 bfs，按照与左上角的距离从大到小 flip 就可以保证自始至终是好矩阵。

由此可得有解当且仅当最终得到的矩阵相同，也即最外层元素及连通块数均相同。操作次数是 $O(HW \min(H, W))$ 的，但常数比较小，极限数据只需 10^5 次左右。

Daisy's Mazes

给定 N 个点 M 条边的有向图，每条边染 C 种颜色，Daisy 带一个栈从 0 号点出发，栈的每个元素是 C 种颜色之一。

设当前在点 u ，栈顶元素是 c ，若 u 有颜色 c 的出边则选择一条颜色 c 的出边并弹栈，否则任意选择一条出边，将该种颜色压入栈。

已知 Daisy 可以走到 $N - 1$ 号点，求初始时的栈大小的最小值。

$N \leq 50$ ， $M \leq 100$ ， $C \leq 20$ ，保证有解。¹²

¹²<https://codeforces.com/gym/103081/problem/J>

Daisy's Mazes

考虑再引入 N 个点 $0 = x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$, x_{i+1} 向 x_i 连所有颜色的边, 则栈大小可以为 m 当且仅当带空栈从 x_m 出发可以走到终点。

因为初始的栈如果有两个连续的相同颜色则一定不优 (要用的时候可以转化为先压入再弹出), 所以可以先从 x_m 走到 0 得到任意的大小为 m 的栈。

然后 $N-1$ 向自己连所有颜色的边, 就可以限制初始和结束时刻都是空栈, 经过的边的颜色即为括号序列。

Daisy's Mazes

考虑再引入 N 个点 $0 = x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$, x_{i+1} 向 x_i 连所有颜色的边, 则栈大小可以为 m 当且仅当带空栈从 x_m 出发可以走到终点。

因为初始的栈如果有两个连续的相同颜色则一定不优 (要用的时候可以转化为先压入再弹出), 所以可以先从 x_m 走到 0 得到任意的大小为 m 的栈。

然后 $N-1$ 向自己连所有颜色的边, 就可以限制初始和结束时刻都是空栈, 经过的边的颜色即为括号序列。

于是就可以按照剥括号的顺序 dp 了, 设 $f(c, r_1, r_2)$ 表示不匹配栈顶的颜色 c 的情况下, 是否有 $r_1 \rightarrow r_2$ 的括号序列。初值为 $f(c, i, i) = 1$, 然后引入一种不出现的颜色 C , 答案即为使得 $f(C, x_i, N-1) = 1$ 的最小的 i 。

因为比较难处理转移顺序所以刷表记搜, 转移即为拼接括号序列和套一层括号。时间复杂度 $O(N^3 C + M^2 C^2)$ 。

Colorful Doors

直线上有 N 对传送门，进入一道传送门时会从与之对应的传送门的相同方向出来。

Snuke 从左边向右一直走，给定 $s_1, s_2, \dots, s_{2N-1}$ ，其中 s_i 表示 Snuke 有没有从第 i 道传送门出来过。

构造放置这 n 对传送门的方案，需判断无解。 $n \leq 10^5$ 。¹³

¹³https://atcoder.jp/contests/apc001/tasks/apc001_g

Colorful Doors

若将直线接成一个环，即认为第 $2N$ 道传送门的右边是第 1 道传送门，则这个环上的路径等价于若干个环，条件即为钦定其中的一个环恰好是某些段。先看只有一个环的情况：

- 若 N 是偶数，一个构造是 $(1, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 4, \dots, 2N-1, 2N, 2N-1, 2N)$ 。
- 若 N 是奇数则无解，因为考虑加一对传送门，如果加在同一个环上那么这个环会裂开，如果加在两个不同环上那么这两个环会合并，所以环数与 $N-1$ 同奇偶。

Colorful Doors

考虑两边都是 1 的门的个数 s ，因为从传送门一边进入就会从另一边出来，所以两边都是 1 的门之间两两配对，也即 s 必为偶数，而左边为 1 右边为 0 的门与左边为 0 右边为 1 的门配对，剩下的两边都是 0 的门之间可以任意配对。

- 若 s 是 4 的倍数，可以通过对 1 连续段开头和末尾的传送门进行配对使得恰好跳过 0 这些段，就变成 N 是偶数且全 1 的情况。
- 若 s 模 4 余 2，若长度 > 1 的 1 连续段只有一个则相当于 n 是奇数且全 1 的情况，否则可以先将两对门配对，规约到 s 为 4 的倍数的情况。

Construct One Point

给定格点三角形 $\triangle PQR$ ，求其内部的一个格点。
 10^4 组数据，值域 $[0, 10^9]$ 。¹⁴

¹⁴https://atcoder.jp/contests/jag2018summer-day2/tasks/jag2018summer_day2_g

Construct One Point

判断是否有解直接用 Pick 定理即可。

不妨设 PQ 是最长边，若最长边上有整点，找到最接近中点的 S ，若 RS 上有整点就做完了，否则可以分成 $\triangle PSR$ 和 $\triangle QSR$ 递归做。所以不妨设 $P(0,0)$, $Q(x,y)$, $x,y > 0$, $\gcd(x,y) = 1$ 。

Construct One Point

判断是否有解直接用 Pick 定理即可。

不妨设 PQ 是最长边，若最长边上有整点，找到最接近中点的 S ，若 RS 上有整点就做完了，否则可以分成 $\triangle PSR$ 和 $\triangle QSR$ 递归做。所以不妨设 $P(0,0)$, $Q(x,y)$, $x,y > 0$, $\gcd(x,y) = 1$ 。

求出点 (u,v) 满足 $uy - vx = -1$, $0 \leq u < x$, $0 \leq v < y$, 考虑证明 $U(u,v)$ 即为答案。

Construct One Point

判断是否有解直接用 Pick 定理即可。

不妨设 PQ 是最长边，若最长边上有整点，找到最接近中点的 S ，若 RS 上有整点就做完了，否则可以分成 $\triangle PSR$ 和 $\triangle QSR$ 递归做。所以不妨设 $P(0,0)$, $Q(x,y)$, $x, y > 0$, $\gcd(x,y) = 1$ 。

求出点 (u,v) 满足 $uy - vx = -1$, $0 \leq u < x$, $0 \leq v < y$, 考虑证明 $U(u,v)$ 即为答案。

$\gcd(u,v) = \gcd(x-u, y-v) = 1$, 所以 $\triangle PQU$ 面积为 $\frac{1}{2}$ 且边界上只有 3 个顶点是整点，根据 Pick 定理其内部没有整点，设 $U_n(n(u-x)+x, n(v-y)+y)$, 同理可得 $\triangle PQU_n$ 内部没有整点，取 $n \rightarrow \infty$ 得到这个带状区域内部没有整点，射线 PU 方向同理，此时若 $\triangle PQR$ 不包含 U 且包含其他整点，则必有 $\angle P$ 或 $\angle Q$ 为钝角，与 PQ 是最长边矛盾。

Short LIS

给定自然数 N, A, B , 求满足 $p_A = B$ 且 LIS 长度 ≤ 2 的 $0 \sim N-1$ 的排列 p 个数 $\text{mod}(10^9 + 7)$ 。

$0 \leq A, B < N \leq 10^6$ 。¹⁵

¹⁵https://atcoder.jp/contests/jag2018summer-day2/tasks/jag2018summer_day2_k

① 前言

② ProbSet I

③ ProbSet II

④ ProbSet III

⑤ ProbSet IV

⑥ ProbSet V

Simple APSP Problem

给定 $W \times H$ 的网格图去掉 N 个点，求两两最短路之和
mod $(10^9 + 7)$ 。

$W, H \leq 10^6, N \leq 30$ 。¹⁶

¹⁶https://atcoder.jp/contests/apc001/tasks/apc001_i

Simple APSP Problem

对于两个相邻的空行，计算出跨越这两行的路径数之后就可以将这两行缩起来。列同理。

此时网格图规模缩小为 $(2N + 1) \times (2N + 1)$ ，直接暴力即可，时间复杂度 $O(W + H + N^4)$ 。

Generalized Insertion Sort

给定 N 个点的以 0 为根的树和排列 a_0, a_1, \dots, a_{N-1} , 点编号为 $0, 1, \dots, N-1$ 。初始时点 i 有点权 a_i , 每次操作选择点 u , 将根到 u 的路径上的点权向根循环移位。构造 2.5×10^4 次操作使得点 i 的点权为 i 。

$N \leq 2000$ 。¹⁷

Tips: 如果是一条以 0 为端点的链, 怎么 N 次操作解决呢?

¹⁷https://atcoder.jp/contests/apc001/tasks/apc001_h

Generalized Insertion Sort

就是插入排序啦 qwq

定义一个点是 leafish 的当且仅当它是叶子，或者它只有一个儿子且该儿子是 leafish 的。所有 leafish 的点形如一堆链，若能 $O(n)$ 次操作解决完 leafish 的点并将它们删去，则总操作次数是 $O(n \log n)$ 的。

若一个值 v 的目的地是 leafish 点，则将其染为红色，否则染为白色。若当前根是红色那么把它插入到对应的链上，否则插入到当前最深的没碰过的值并染成黑色。

当前根是黑色说明刚才放好了一个红色值，所以一轮的操作次数是 $n + \# \text{ of leafish vertices}$ ，总操作次数是 $n(\log n + 1)$ 。

Forever and Always

假设这是一道传统题： n 个人给 m 位候选人投票，第 i 个人有一个长为 k_i 的偏好序列，初始时每个人都会投给他们最喜欢的候选人。

之后每一轮，每个人都会投给在他偏好序列中，上一轮得票最多的候选人，如果有相同得票的则投给他最喜欢的。

如果这一轮和上一轮的投票结果完全相同，投票过程就结束了。求投票过程进行了多少轮？

然而这是一道提答题：你需要构造一组 $n \leq 10^5$, $m, \sum k_i \leq 2 \cdot 10^5$ 的输入，使得答案大于 100。¹⁸

¹⁸XVIII Open Cup, GP of Gorn, Problem F

Do I Wanna Know?

给定正整数 n, a, b , 设有 n 个点的随机竞赛图, 两个点 i, j ($i < j$) 之间连边有独立的 a/b 概率为 $i \rightarrow j$ 。

设 $f(k)$ 表示存在 k 个点连向其他所有 $n - k$ 个点的概率, 求 $f(1), \dots, f(n - 1) \bmod 998244353$ 。

$n \leq 6 \cdot 10^5, a < b \leq 100$ 。¹⁹

¹⁹XVIII Open Cup, GP of Gomel, Problem D

Do I Wanna Know?

把式子写出来，发现它就是高斯二项式系数²⁰。
当然也有 $O(n \log n)$ 的 FFT 做法 qwq。

²⁰https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_binomial_coefficient

Chalk Outline

给定自然数 n, k , 构造 n 个点的简单多边形 (值域 $[-10^9, 10^9] \cap \mathbb{Z}$), 满足恰好在内部的对角线有 k 条。需判断无解。

$$4 \leq n \leq 100, 0 \leq k \leq \frac{n(n-3)}{2}。^{21}$$

²¹XVIII Open Cup, GP of Gomel, Problem C

Chalk Outline

猜想 $k < n - 3$ 时无解，有人知道怎么证吗 /kel

$k = n - 3$ 时即为 $n - 1$ 个点的凸包连向一个点，随便试一个 (i, i^2) 和 $(10^9, -10^9)$ ，然后胡乱调整即可。

① 前言

② ProbSet I

③ ProbSet II

④ ProbSet III

⑤ ProbSet IV

⑥ ProbSet V

I've Got Friends

给定某个无向图 G 的线图²² $L(G)$, 构造一个可能的 G 。需判断无解。

$n, m \leq 10^5$ 。²³

提示 (Whitney 同构定理): 对于简单连通图 G_1, G_2 , 若它们均不是 K_3 或 $K_{1,3}$, 则 $G_1 \cong G_2 \iff L(G_1) \cong L(G_2)$ 。

²²<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%B7%9A%E5%9C%96>

²³XVIII Open Cup, GP of Gornyi, Problem I

I've Got Friends

考虑增量构造，首先将重边缩起来，然后 bfs 遍历 $L(G)$ 的每个连通块，维护当前的原图 G ，设当前要加入一条新边 $v \in E(G)$ 。若 $|V(G)| \leq 4$ 则暴力搜索，否则若与 v 相邻的边的最小点覆盖 ≤ 2 且不出现重边就可以加入，否则必定无解，因为没有 G 之外的方案了。

Five Points

给定平面上 n 个点，每个点随机连出一条射线，求其两两不交的概率。

$$2 \leq n \leq 5。^{24}$$

²⁴XIX Open Cup, GP of Gomel

Five Points

设两两连射线的倾角是 $\alpha_1, \dots, \alpha_{n(n-1)}$, 每个点连出射线的倾角是 $\theta_1, \dots, \theta_n$, 答案只与这些值之间的大小关系有关, 所以考虑分段法。

从 $\alpha_1, \dots, \alpha_{n(n-1)}$ 切开将其分为 $n(n-1)$ 段, 枚举 θ_i 所在段, 若 θ_i, θ_j 在不同段则可以直接判断出是否相交。然后对于每一段, 若其范围内有 k 条射线, 则它们不交等价于 θ 的大小顺序固定, 乘上 $1/k!$ 的概率即可。

时间复杂度 $O(n^{2n})$ 。

Graph and Machine

给定 k 个点 m 条边的无向简单连通图 (V, E) , 每个点 u 有点权 $c_u \in \{0, 1\}$ 。

给定 N 个点的 DAG, 点 s 没有入边, 称为源点, 点 t_0, t_1 没有出边, 称为汇点, 汇点之外的点 u 有标记 $l_u \in E$, 且有两条出边分别连向 $o_{u,0}$ 和 $o_{u,1}$ 。

判断是否 $\forall (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \{0, 1\}^m$, 在 DAG 上从 s 出发, 每次从 u 走到 $o_{u,x_{l_u}}$, 最终走到 t_1 当且仅当

$$\forall u \in V, \quad \bigoplus_{e_i \text{ start with } u} x_{e_i} = c_u$$

$N, k, m \leq 3 \cdot 10^5$, $N \geq 3$, 对于所有从源点到汇点的路径, 经过的点的标记不同。²⁵

²⁵XIX Open Cup, GP of SPb, Problem B

Graph and Machine

实际上并不会讲这题，因为我还没看懂题解²⁶ /dk
有人看懂了可以浇浇我吗 /kel

²⁶<https://codeforces.com/blog/entry/62010?#comment-460369>

Thanks!