杂题选讲

陈东武

广州大学附属中学

2022 年 3 月 11 日

给定正整数序列 $a_1, \cdots, a_n$，q 次询问 l, r, x，求 $\prod_{i=l}^{r}(1 - a_i/x)$。

$n, q \leq 6 \cdot 10^5$，$\max a_i < x \leq 10^9$，精度要求绝对误差 $\leq 10^{-6}$。[1]

[1] https://loj.ac/p/3401

考虑泰勒展开 $\exp(-\sum_{i=l}^{r}\sum_{k=1}^{\infty}(a_i/x)^k/k)$，当 $a_i/x<1/2$ 时用前缀和维护多项式计算，当 $a_i/x\geq 1/2$ 时暴力乘 $\log\varepsilon^{-1}$ 次答案就为 0，查询时用 ST 表找到 $[l,r]$ 中 $\geq x/2$ 的 a_i 即可。

时间复杂度 $\mathcal{O}(n\log n+q\log^2\varepsilon^{-1})$。

GF(p) 表示 p 元有限域。

给定正整数 d 和质数 p，用至多 4999 次 GF(p) 上加法、d 次幂和 1（乘法单位元）实现 GF(p) 上乘法。

$2 \le d \le 10$，$d < p \le 10^9 + 9$。[2]

[2] https://codeforces.com/contest/1060/problem/H

考虑到 $xy = ((x+y)^2 - x^2 - y^2)/2$，也就是说在 $d=2$ 的时候实现减法、乘常数就做完了，都可以用倍增实现。

构造 $a_0, a_1, \cdots, a_d$ 满足 $x^2 = \sum_{i=0}^{d} a_i (x+i)^d$。

操作次数 $\mathcal{O}(d \log p)$。

给定正整数 a, b, c, n，$f(k) := ak^2 + bk + c$，求 $\prod_{k=0}^{n-1} f(k)$ 的最大平方因子 $\bmod (10^9 + 7)$。

$a, b, c, n \le 6 \cdot 10^5$，TL $= 6$s。[3]

[3] https://codeforces.com/gym/102896/problem/F

考虑哪些质数 p 有贡献，判掉不大于 $\sqrt[3]{f(n)}$ 的 p 之后每个 $f(k)$ 至多只有 2 个质因子，再判掉完全平方数之后求整除其中至少两个数的质数 p，所以 $p \mid f(x)-f(y)=(x-y)(a(x+y)+b)$，再判掉 $a+b,\cdots,2na+b$ 的质因子即可。

考虑哪些质数 p 有贡献，判掉不大于 $\sqrt[3]{f(n)}$ 的 p 之后每个 $f(k)$ 至多只有 2 个质因子，再判掉完全平方数之后求整除其中至少两个数的质数 p，所以 $p \mid f(x)-f(y)=(x-y)(a(x+y)+b)$，再判掉 $a+b,\cdots,2na+b$ 的质因子即可。

考虑如何计算质因子 p 的指数，当 $p \mid 2a$ 时暴力，这样的质数有 $\omega(2a)$ 个；否则求出 $ak^2+bk+c \equiv 0 \pmod p$ 的根，这样的 k 至多有 $2n/p$ 个。

假设 n,a 同阶，总时间复杂度 $\mathcal{O}(n\omega(n)\log n)$。

给定 n 个点 m 条边的简单无向连通图，求其连通生成子图个数 $\bmod 998244353$。

$n \leq 10^5$，$m - n \leq 9$。[4]

[4] https://uoj.ac/problem/138

引理

生成子图的每个点度数都为偶数的边集 $E' \subset E$ 构成线性空间 $\mathcal{C}$，一组基是生成树上非树边 (u, v) 与路径 $u \rightsquigarrow v$ 的并；生成子图是割的边集 $E' \subset E$ 构成线性空间 $\mathcal{D}$，一组基是生成树上树边的两棵子树之间的边。$\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$ 互为正交补。

引理

生成子图的每个点度数都为偶数的边集 $E' \subset E$ 构成线性空间 $\mathcal{C}$，一组基是生成树上非树边 (u,v) 与路径 $u \rightsquigarrow v$ 的并；生成子图是割的边集 $E' \subset E$ 构成线性空间 $\mathcal{D}$，一组基是生成树上树边的两棵子树之间的边。$\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$ 互为正交补。

建出 dfs 树，给每个非树边分配一位，每条树边用 $m-n+1$ 位二进制数表示，某位是 $1 \iff$ 这条非树边覆盖它，则删掉一组边集后图连通 $\iff$ 边权线性无关，而边权总共有 $3k$ 种，暴力枚举子集，时间复杂度 $\mathcal{O}(n+k\binom{3k}{k})$。

考虑收缩点和边使得点数减小，每条边赋权值 c, d 表示使这条边连通和断开的方案数，然后收缩 $1, 2$ 度点并叠合重边，此时每个点的度数至少为 3 且 $m - n$ 不会增大，所以 $\frac{3}{2}n \le m \le n + k$ 解得 $n \le 2k$，时间复杂度 $\mathcal{O}(n + k^2 2^{2k})$。

考虑收缩点和边使得点数减小，每条边赋权值 c,d 表示使这条边连通和断开的方案数，然后收缩 $1,2$ 度点并叠合重边，此时每个点的度数至少为 3 且 $m-n$ 不会增大，所以 $\frac{3}{2}n \le m \le n+k$ 解得 $n \le 2k$，时间复杂度 $\mathcal{O}(n+k^2 2^{2k})$。

考虑对相邻 3 度点枚举邻边选不选，递归到 $(n-1,m-1)$ 和 $(n-2,m-3)$ 的子问题，此时 $n \le \frac{7}{12}m$，由 $m \le 3k$ 和

$$T(m)=T(m-1)+T(m-3)+\mathcal{O}(2^{\frac{7}{12}m}m^2)$$

解得时间复杂度 $\mathcal{O}(n+k^2 2^{\frac{7}{4}k})$。

设 $\mathcal{A}_n$ 为 n 个点的无标号有根二叉树（区分左右子树）的集合，$\mathrm{leaf}(T)$ 表示 T 的叶子集合，$\mathrm{len}(u,v)$ 表示 u,v 之间简单路径的点数。对 $k\in[0,m]$ 求

$$\sum_{T\in\mathcal{A}_n}\sum_{u,v\in\mathrm{leaf}(T)}\mathrm{len}(u,v)^k$$

模 1234567891 的值，$n\le 10^7$，$m\le 300$。[5]

[5] https://loj.ac/p/6215

先判掉 $u=v$ 的情况，贡献为 $\binom{2n}{n}$，考虑

$$n^k=\sum_{i=0}^{k} i!\left\{ {k \atop i} \right\}\binom{n}{i}$$

表示在路径上放 k 个标记，用变元 y 表示，设 F_0,F_1,F_2 表示包含 u,v 中 0/1/2 个的生成函数，其中 u,v 和 LCA 不算，最后乘上 $x^3(1+y)^3$，则有

先判掉 $u=v$ 的情况，贡献为 $\binom{2n}{n}$，考虑

$$n^k=\sum_{i=0}^{k} i!\left\{{k \atop i}\right\}\binom{n}{i}$$

表示在路径上放 k 个标记，用变元 y 表示，设 F_0,F_1,F_2 表示包含 u,v 中 0/1/2 个的生成函数，其中 u,v 和 LCA 不算，最后乘上 $x^3(1+y)^3$，则有

$$\begin{aligned}F_0&=1+xF_0^2\\F_1&=1+2x(y+1)F_0F_1\\F_2&=F_1^2+2xF_2F_0\end{aligned}$$

令 $t=\sqrt{1-4x}$，解得 $F_2=t^{-3}(1-(t^{-1}-1)y)^{-2}$，直接展开然后代入 $[x^n]t^{-\bullet}$，时间复杂度 $\mathcal{O}(n+m^2)$。

给定正整数集合 S，对 $k \in [1,n]$ 求将 k 个不同的球放入相同盒子，使得每个盒子球的数量 $\in S$ 的方案数 $\bmod 2$。

$n \le 2 \cdot 10^6$。[6]

[6] https://loj.ac/p/6737

特征 2 域上的二项卷积即为子集卷积，而子集卷积逆即为自身，直接牛迭即可。

压位维护占位多项式，时间复杂度 $\mathcal{O}(n\log^2 n/w)$。

给定 n 次多项式 $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ 和质数 p，T 次询问 m 次幂的 k 次项系数模 p 的值。

$T \le 1000$，$n, p \le 50$，$m, k \le 10^{18}$。[7]

[7] https://loj.ac/p/577

考虑 Lucas 定理 $f(x)^p = f(x^p)$ 。

预处理 $f(x)^0, f(x)^1 \cdots, f(x)^{p-1}$，然后递推计算 $[x^k]f(x)^m$。

(m,k) 需要 $(m/p, k/p - [0,n))$，所以维护连续 $2n$ 个 k 的值即可。
时间复杂度 $\mathcal{O}(n^2p^2 + Tn^2 \log_p m)$。

类似的小模数技巧参见 LOJ3398，类似的递推技巧参见 UOJ292。

给定无自环的有向图 G_1, G_2，每条边有小写字母，每条路径按边的顺序给出字符串，求最短的字符串 S 使得其在 G_1, G_2 的出现次数不相同，若长度相等则选字典序最小的。需判断无解。

$n_1, n_2 \leq 500$，$m_1, m_2 \leq 3000$。[8]

[8] https://uoj.ac/problem/552

引理

最短的合法串长度 $\leq n_1 + n_2$。

证明.

将两张图放在一起，设 26 个字符的邻接矩阵为 $M_{\mathtt{a}}, \cdots, M_{\mathtt{z}}$，$\boldsymbol{u_1}^\top$ 是元素全为 1 的行向量，$\boldsymbol{u_2}$ 是前 n_1 个元素为 1，后 n_2 个元素为 -1 的列向量，所求即为 $\boldsymbol{u_1}^\top M_{s_1} \cdots M_{s_\ell} \boldsymbol{u_2} \neq 0$ 的字符串 s。

考虑长度 $\ell \leq N$ 的 $\boldsymbol{u_1}^\top M_{s_1} \cdots M_{s_\ell}$ 生成的线性空间 U_N，不存在长度 $\leq N$ 的合法串 $\iff U_N \subseteq \ker \boldsymbol{u_2}$，又因为 $\{U_N\}_N$ 是一阶线性递推，所以若 $\dim U_{N+1} = \dim U_N$ 则之后都不变。 $\square$

考虑 Hash 维护字符串多重集合，生成 $n|\Sigma|$ 个随机奇数表示每个位置的每个字符的 Hash 值，字符串的 Hash 值是其字符的 Hash 值乘积，字符串集合的 Hash 值是所有字符串 Hash 值之和，直接自然溢出啥事没有，可以直接线性递推。

先求出长度，然后逐位贪心即可，时间复杂度 $\mathcal{O}(nm|\Sigma|)$。

下发长为 n 的 01 串 $\boldsymbol{u}$，输入长为 n 的 01 串 $\boldsymbol{v}$，求 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 不同位置个数。$n = 2^{19}$，代码长度限制 2 KiB，2-approximate。[9]

[9] `https://uoj.ac/problem/530`

随机取 $\boldsymbol{A} \in \{-1,1\}^{d\times n}$，$\mathbb{E}[\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}\|] = d\|\boldsymbol{u}\|$，$\mathrm{Var}[\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}\|] = d\|\boldsymbol{u}\|^2$，所以 $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}\|/d$ 与 $\|\boldsymbol{u}\|$ 相对误差 $\mathcal{O}(d^{-1/2})$。固定随机种子生成 $\boldsymbol{A}$，对 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$ 打表，计算 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}$ 输出 $\|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\|/d$，时间复杂度 $\mathcal{O}(nd/w)$。

给定正整数 n，交互器有正整数 d，询问至多 $3 \cdot 10^4$ 次自然数 $a < n$，交互器告诉你 $\mathrm{modPow}(a, d, n)$ 的计算代价，求 d 的值。

计算 $x \times y \bmod n$ 的代价为 $(\lfloor \log_2 x \rfloor + 2)(\lfloor \log_2 y \rfloor + 2)$。

```python
def modPow(a, d, n):
    r = 1
    for i in range(60):
        if (d & (1 << i)) != 0:
            r = r * a % n
        a = a * a % n
```

$n = pq$，p, q 是 $(2^{29}, 2^{30})$ 的随机质数，$m = (p-1)(q-1)$，d 是 $\{k \in \mathbb{N}_+ \mid k < m \wedge k \perp m\}$ 的随机整数。[10]

[10] https://codeforces.com/gym/101630/problem/H

先把第 6 行的部分去掉，随机询问 $3 \cdot 10^4$ 个 a，从低到高确定 d 的二进制位，显然 d 的第 0 位为 1，考虑求第 1 位，设 p_i 为 $a_i \times a_i^2$ 的代价，q_i 为总计算时间，计算 p, q 的取样**协方差**

$$\mathrm{Cov}(p, q) = \mathbb{E}[pq] - \mathbb{E}[p]\mathbb{E}[q]$$

- 若 d 的第 1 位为 1，则 q_i 最与第 1 位相关的项是 p_i，所以 $\mathrm{Cov}(p, q) \approx \mathrm{Cov}(p, p)$；
- 若 d 的第 1 位为 0，则 q_i 有 $1/2$ 的概率最与第 1 位相关的项是 t_i，其中 t_i 为 $a_i \times a_i^4$ 的代价，所以 $\mathrm{Cov}(p, q) \approx \mathrm{Cov}(p, t)$。

比较一下哪个离得更近，去掉当前位贡献然后同理做更高位。

给定下述两个算法，输入 $\{0,1\}^n$ 输出 $\{0,1\}$：

- 根据 m 个子集的异或和查表；
- $a_0, \cdots, a_{n-1}$ 作为输入，$a_n, \cdots, a_{L-1}$ 为 0，执行 q 个 $a_u := \neg(a_v \wedge a_s) \oplus a_d \oplus a_e$，输出 a_0。

输入后者，求拟合比例最大的前者。

$n \leq 64$，$m \leq 4$，$L \leq 256$，$q \leq 1024$，保证存在错误比例小于 1% 的答案，且 m 更小时不存在。[11]

[11] https://uoj.ac/problem/72

求出这 m 个子集之后对算法 2 随机输入取 0 与 1 中较多的即可。

设这 m 个子集为 $\boldsymbol{u_1}, \cdots, \boldsymbol{u_m}$，则 $\forall i \in [m], \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u_i} = 0 \iff \forall \boldsymbol{w}$ 算法 1 中 $\boldsymbol{w}$ 与 $\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}$ 的输出相同，所以考虑求其正交补空间，不断随机 $\boldsymbol{v}$ 进行检验直到正交空间秩为 $n - m$，每次检验随机 64 个 $\boldsymbol{w}$ 计算 $\boldsymbol{w}$ 与 $\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}$ 的输出是否相同，合法情况判对概率 $0.98^{64} \approx 27.45\%$，不合法情况判成合法概率 $(\frac{15^2+1^2}{16^2})^{64} \approx 0.343\%$。

使用压位方法可以一次求出 w 个输入的结果。

给定 n 个点的树和长为 k 的正整数序列 $a_1, \cdots, a_k$，以 1 为根，点 i 有权值 v_i，$A_{i,j} := v_{\mathrm{lca}(a_i,a_j)}$，求 $\det A$ 模 998244353 的值。

$n, k \le 5 \cdot 10^5$，$a_i \le n$，$0 \le v_i < 998244353$。[12]

[12] https://loj.ac/p/3626

a_i 中有重复元素则答案为 0，且答案与 a 的顺序无关。

考虑 x 的子树，若 x 在 a 中出现则直接用当前行消元，否则矩阵形如若干个主子式是子问题，其他位置都相同。

a_i 中有重复元素则答案为 0，且答案与 a 的顺序无关。

考虑 x 的子树，若 x 在 a 中出现则直接用当前行消元，否则矩阵形如若干个主子式是子问题，其他位置都相同。

矩阵 A 全体加 z 的行列式是关于 z 的一次函数 $a+bz$，其中 $a=\det A$，b 是所有代数余子式之和。

设矩阵 B 对应 $c+dz$，则将 A,B 作为主子式合并得到的答案为 $ac+(ad+bc)z$。直接 dp 即可，时间复杂度 $\mathcal{O}(n)$。

给定 n 个 d 维向量 $\boldsymbol{v_i}$ 和实数 e_i，求 $\boldsymbol{x}$ 使得 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v_i}|=e_i$。

$n,d\le 500$，保证有解。[13]

[13] https://www.luogu.com.cn/problem/P8141

两个方程平方后相减得到线性方程组，所求即为球面与线性空间的交，用高斯消元求投影之后应用勾股定理即可。

给定正整数 n 和自然数 c，设 n 阶方阵 $A_{i,j} := [i = j] + [i \nmid j]c$，求 $\det A$ 模 998244353 的值。

$n \leq 10^9$，$c < 998244353$。[14]

[14] https://atcoder.jp/contests/xmascon20/tasks/xmascon20_d

将对角线按 $1=c+(1-c)$ 展开，枚举哪些行选了对角线上的 $1-c$，则答案为

$$\sum_{S\subset[n]}(1-c)^{n-|S|}\det B_S$$

其中 B_S 表示把 A 的对角线替换为 c 之后行集合 S 的主子式，若 S 不是整除偏序上的链，则两个极大元的行都全为 c，即 $\det B_S=0$，否则 B_S 是下三角矩阵，即 $\det B_S=c^{|S|}$。

将对角线按 $1 = c + (1 - c)$ 展开，枚举哪些行选了对角线上的 $1 - c$，则答案为

$$\sum_{S \subset [n]} (1 - c)^{n - |S|} \det B_S$$

其中 B_S 表示把 A 的对角线替换为 c 之后行集合 S 的主子式，若 S 不是整除偏序上的链，则两个极大元的行都全为 c，即 $\det B_S = 0$，否则 B_S 是下三角矩阵，即 $\det B_S = c^{|S|}$。

令 $r := c/(1 - c)$，所求即为 $[n]$ 在整除偏序上的链 S 的 $r^{|S|}$ 之和，设为 $f(n)$，则有递推式 $f(n) = 1 + r \sum_{i=2}^{n} f(\lfloor n/i \rfloor)$，使用整除分块计算，时间复杂度 $\mathcal{O}(n^{3/4})$。

$\mathfrak{S}_n$ 表示 n 元对称群，$\mathrm{sgn}(\sigma)$ 表示 σ 为偶排列时为 1，否则为 -1。

给定 n 个 k 阶方阵 $A_1, \cdots, A_n$，求

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{\sigma(i)}$$

模 998244353 的值。$n \leq 32$，$k \leq 8$。[15]

[15] https://atcoder.jp/contests/xmascon21/tasks/xmascon21_d

引理 (Amitsur-Levitzki theorem)

当 $n \geq 2k$ 时答案为 O。

当 $n < 2k$ 时状压 dp，时间复杂度 $\mathcal{O}(k^4 4^k)$。

- 给定 n 个 GF(3) 上的 m 维向量，求选择 m 个线性无关的向量的方案数 $\bmod 3$。
- 给定 n 个 GF(2) 上的 m 维向量，第 i 个向量有颜色 $c_i \in [1, m]$，求在每种颜色选出一个向量使得线性无关的方案数 $\bmod 2$。

$n, m \le 500$。[16]

[16] `https://loj.ac/p/3409`

考虑 Cauchy-Binet 公式：

$$\det(AB) = \sum_{|S|=n, S\subset[m]} \det(A_{n,S}) \det(B_{S,n})$$

第一问：由 $[x \neq 0] = x^2$ 取 $B = A^{\mathsf{T}}$。

第二问：由 $[x \neq 0] = x$ 取 $B_{i,j} = [c_j = i]$。

时间复杂度 $\mathcal{O}(n^2(n+m))$。

给定正整数 p, q, s 和 GF(2) 上的 $p \times s$ 矩阵 C，m 次修改一行并求有多少对 $p \times q$ 矩阵 A 和 $q \times s$ 矩阵 B 使得 $AB = C$，对 $10^9 + 7$ 取模。

$p, q, s, m \leq 1000$，强制在线。[17]

[17] `https://uoj.ac/problem/453`

设 A 的列向量为 $\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_q}$，由矩阵分块知 C 的第 i 列 $\boldsymbol{c_i}$ 是其线性组合，系数即为 B 的对应列 $\boldsymbol{b_i}$。对 A 和 C 同时做初等行变换等式仍然成立，所以答案仅与 $x = \operatorname{rank}(C)$ 相关。

设 $f_{n,m,r}$ 表示秩为 r 的 $n \times m$ 的矩阵个数，固定 n 时可以 $\mathcal{O}(m^2)$ dp。考虑固定 x 求 $\operatorname{rank}(AB) = x$ 的方案数，最后除掉 $f_{p,s,x}$ 即可。枚举 $r = \operatorname{rank}(A)$，则 A 的方案数为 $f_{p,q,r}$，考虑原方程 $\boldsymbol{c_i} = b_{i,1} \cdot \boldsymbol{a_1} + \cdots + b_{i,q} \cdot \boldsymbol{a_q}$，对 A 消元后主元的方案数为 $f_{r,s,x}$，自由元的方案数为 $2^{s(q-r)}$，所以答案为：

$$\sum_{r \geq x} f_{p,q,r} f_{r,s,x} 2^{s(q-r)} / f_{p,s,x}$$

预处理之后用带删除线性基维护 x 即可。

给定 n 个点的有根树和正整数 k,p，非叶节点恰有 2 个儿子，设 L 表示叶节点集合，A,B 分别表示到根距离偶数/奇数的非叶节点集合，设 $u\in L$ 有权值 $c(u),d(u)$，首先 Alice 和 Bob 分别选择 A,B 的重儿子，设根所在重链底端叶子为 u，则 Alice 的得分为 $c(u)$，Bob 的得分为 $d(u)$。

对于一组选择重儿子的策略，若 Alice 策略不变时 Bob 无法通过改变策略获得更高分 and vice versa，则称为**纳什均衡点**。对所有选择 $c(u),d(u)\in[1,k]$ 的方案，求纳什均衡点个数之和 $\bmod p$。对于每棵子树求出答案。

$3\leq n\leq 5000$，$k\leq 10^9$，$n<p\leq 10^6$。[18]

[18] https://loj.ac/p/3393

考虑列出 dp 式，设 $f_{u,i,j}$ 表示 u 的子树达到纳什均衡，其中 Alice 的最优策略达到了 i，Bob 的最优策略达到了 j 的方案数，$x_{u,i}, y_{u,i}$ 分别表示 u 的子树中 Alice 和 Bob 的最大值 $\leq i$ 的方案数。不妨设 $u \in A$，左右儿子分别为 l, r，则有

$$f_{u,i,j} = f_{l,i,j}x_{r,i} + f_{r,i,j}x_{l,i}$$
$$x_{u,i} = 2x_{l,i}x_{r,i}$$
$$y_{u,i} = 2^{|A_r|+|B_r|}k^{2|L_r|}y_{l,i} + 2^{|A_l|+|B_l|}k^{2|L_l|}y_{r,i}$$

令 $x'_{u,i} := x_{u,i}/2^{|A_u|}k^{|L_u|}i$，$y'_{u,i} := y_{u,i}/2^{|B_u|}k^{|L_u|}i$，则有

$$
\begin{aligned}
x'_{u,i} &= x'_{l,i}x'_{r,i} \\
y'_{u,i} &= 2^{|A_r|}k^{|L_r|}y'_{l,i} + 2^{|A_l|}k^{|L_l|}y'_{r,i} \\
f_{u,i,j} &= 2^{|A_r|}k^{|L_r|}x'_{r,i}f_{l,i,j} + 2^{|A_l|}k^{|L_l|}x'_{l,i}f_{r,i,j}
\end{aligned}
$$

归纳可知 $f_{u,i,j} = x'_{u,i}y'_{u,i}$，而 $x'_{u,i}, y'_{u,i}$ 是关于 i 的多项式，计算点值然后 Lagrange 插值。对于 $0 \sim n$ 处的点值，Lagrange 基本多项式 $\ell_j(x)$ 是整值多项式，所以预处理出 $\ell_j(k)$ 然后对每个子树代入点值即可，时间复杂度 $\mathcal{O}(n^2)$。

给定正整数 n, k 和长为 m 的 01 串 S，求有多少长度为 n 且以 S 为前缀的 01 串不存在长为 k 的子串使得 0 和 1 个数相同，对 998244353 取模。

$0 \le m < k \le n \le 114$ 且 k 是偶数。[19]

[19] https://loj.ac/p/3630

设 s_i 表示前 i 个字符中 1 的个数，由 $s_{i+k}-s_i$ 的连续变化性质知合法的充要条件是 $s_{i+k}-s_i-k/2$ 同号，先求 $s_{i+k}-s_i<k/2$ 的方案数然后取反即可。

将 $(i \bmod k, s_i-\lfloor i/k\rfloor k/2)$ 画到折线上，所求即为 $(m, s_m), (0, s_k-k/2), \cdots, (0, s_{\lfloor n/k\rfloor k}-\lfloor n/k\rfloor k/2)$ 到 $(k, s_k), (k, s_{2k}-k/2), \cdots, (n \bmod k, s_n-\lfloor n/k\rfloor k/2)$ 的不交路径组数量。暴力枚举 $s_k, \cdots, s_{\lfloor n/k\rfloor k}$，使用 LGV 引理计算。

但是这样会出问题，因为我们是用平面图上错位即相交的性质排除掉错位的配对，但是起点或终点不对齐的话就会多算不合法的情况。考虑左侧下方第二个点，它的纵坐标必定比 $s_n - \lfloor n/k \rfloor k/2$ 高，所以直接把固定的 $(0,0)$ 到 (m, s_m) 的路径和 $(n \bmod k, s_n - \lfloor n/k \rfloor k/2)$ 右下方的点删掉即可。但这时就不能组合数了，枚举 s_n，对 $\mathcal{O}(n)$ 个起点 dp 预处理方案数即可，时间复杂度 $\mathcal{O}(n^4 + (k/2)^{n/k}(n/k)^3)$，对 k 较小的情况使用状压 dp。

定义无标号有根树的字典序为「将儿子子树按字典序降序排序作为字符串比较」，给定 n 个点的森林，两人轮流操作，每次选择一棵树变小，可以证明必定有限步结束，求先手胜还是后手胜。

$n \le 201912$。[20]

[20] https://atcoder.jp/contests/xmascon19/tasks/xmascon19_k

SG 定理可推广到无限序数的情况：将序数 γ 表为 **Cantor 标准型**[21]

$$\gamma = k_1\omega^{\alpha_1} + \cdots + k_n\omega^{\alpha_n}$$

其中 $\gamma \geq \alpha_1 > \cdots > \alpha_n$，$k_1, \cdots, k_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，游戏和的 SG 值即为对应 k_i 相异或。

[21] https://www.wwli.asia/downloads/books/Al-jabr-1.pdf

SG 定理可推广到无限序数的情况：将序数 γ 表为 **Cantor 标准型**[21]

$$\gamma = k_1\omega^{\alpha_1} + \cdots + k_n\omega^{\alpha_n}$$

其中 $\gamma \geq \alpha_1 > \cdots > \alpha_n$，$k_1, \cdots, k_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，游戏和的 SG 值即为对应 k_i 相异或。

对于原问题，$\mathrm{SG}(T) = \omega^{\mathrm{SG}(T_1)} + \cdots + \omega^{\mathrm{SG}(T_n)}$，使用 Hash 判断树同构即可。时间复杂度 $\mathcal{O}(n)$。

[21] https://www.wwli.asia/downloads/books/Al-jabr-1.pdf

设 $f(n)$ 表示满足 $0 \le x_i < n$ 且 $n \perp (\sum x_i^2)$ 的整数六元组 $(x_1, \cdots, x_6)$ 数量，$F(n) := \sum_{k=1}^{n} f(k)/k^2\varphi(k)$。

求 $F(10^{12}) \bmod (10^9+7)$。[22]

[22] https://projecteuler.net/problem=715

由中国剩余定理知 $f(n)$ 是积性函数，而 $f(p^e)=p^{6(e-1)}f(p)$，所求即为 $f(p)$，会打表的同学自行快进。

由中国剩余定理知 $f(n)$ 是积性函数，而 $f(p^e) = p^{6(e-1)}f(p)$，所求即为 $f(p)$，会打表的同学自行快进。

条件即为 $p \nmid \sum x_i^2$，先特判 $p = 2$，由单位根反演知

$$f(p) = p^6 - \frac{1}{p}\sum_{a=0}^{p-1} g(a;p)^6$$

其中 $g(a;p) := \sum_{x=0}^{p-1} \omega_p^{ax^2}$ 表示**高斯和**。

由中国剩余定理知 $f(n)$ 是积性函数，而 $f(p^e) = p^{6(e-1)} f(p)$，所求即为 $f(p)$，会打表的同学自行快进。

条件即为 $p \nmid \sum x_i^2$，先特判 $p = 2$，由单位根反演知

$$f(p) = p^6 - \frac{1}{p} \sum_{a=0}^{p-1} g(a;p)^6$$

其中 $g(a;p) := \sum_{x=0}^{p-1} \omega_p^{ax^2}$ 表示**高斯和**。

定义 (*Legendre symbol*)

对于质数 p，定义**勒让德符号** $(a \mid p) \equiv a^{(p-1)/2} \pmod p$，由费马小定理知 $(a \mid p) = 0, \pm 1$，由原根存在定理知 $p \nmid a$ 时 $(a \mid p) = 1 \iff a$ 是模 p 的二次剩余。

由勒让德符号的积性知 $p \nmid a$ 时 $g(a;p) = (a \mid p) \cdot g(1;p)$。

引理

$$g(1;p)^2 = (-1 \mid p) \cdot p$$

证明.

考虑 $x^2 + y^2 \equiv t \pmod p$ 的解数。

- 若 $t = 0$，方程为 $x = y = 0$ 或 $(x/y)^2 = -1$，解数为 $p - (-1 \mid p) + (-1 \mid p) \cdot p$；
- 若 $t \neq 0$，方程 $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) \equiv -t \pmod p$ 的解数为 $p - 1$，所以 $\sum_{y=0}^{p-1}(y^2 - t \mid p) = -1$，原方程的解数为 $\sum_{y=0}^{p-1}(1 + (t - y^2 \mid p)) = p - (-1 \mid p)$。

□

引理

$$g(1;p)^2 = (-1 \mid p) \cdot p$$

证明.

考虑 $x^2 + y^2 \equiv t \pmod p$ 的解数。

- 若 $t = 0$，方程为 $x = y = 0$ 或 $(x/y)^2 = -1$，解数为 $p - (-1 \mid p) + (-1 \mid p) \cdot p$；
- 若 $t \neq 0$，方程 $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) \equiv -t \pmod p$ 的解数为 $p - 1$，所以 $\sum_{y=0}^{p-1}(y^2 - t \mid p) = -1$，原方程的解数为 $\sum_{y=0}^{p-1}(1 + (t - y^2 \mid p)) = p - (-1 \mid p)$。

□

综上可知 $f(p^e)/p^{3e-1}(p-1) = p^{3(e-1)}(p^3 - (-1 \mid p))$，使用 min25 筛计算。