代数学方法卷二：草稿
一至五章

版本：2021-05-30

李文威　著

个人主页：https://www.wwli.asia

网络版

编译日期: 2021-05-30

版面: B5 (176×250mm)

本书计划由高等教育出版社出版

李文威
个人主页: www.wwli.asia

目 录

导言

♣♣♣ 待撰写

关于现行版本的说明

现前这份书稿, 是计划中的《代数学方法》卷二的一部分, 预估约占一半的内容. 除了缺少后续章节, 导言和每章开头的阅读提示或者极简略, 或者付之阙如. 习题部分也还相当贫乏. 这是一份不折不扣的半成品. 可以预期的是将有大量的笔误和数学错误. 现有的章节也可能在未来改动.

之所以公布这么一份草稿, 主要是我相信它对读者们是有益的, 读者群体也应当是广泛的, 其次则是抵达下一个进度节点尚需时日, 最后, 我盼望各位的反馈能让成品更快更好地面世.

很显然, 《代数学方法》卷一覆盖本书所需的全部代数知识. 由于卷一和此处使用的都是标准术语, 通行的同类教材也应该能提供这些背景. 建议读者先阅读开头的凡例部分, 确认符号和惯例.

本卷的编写精神大致上和卷一类似, 但由于处理的内容不同, 具体风格也有所改变. 这些差异只能在未来的导言里仔细解释. 如同卷一, 本书并不鼓励初学者循序阅读, 除非对抽象方法已经有充分高的接受度. 具体的阅读须知将见于导言和每章开头, 遗憾的是这些内容只有待全书定型后方能撰写.

编撰过程中广泛参考了各种相关著作, 一部分已在正文引用, 剩余部分计划待全书完成后在导言部分列出, 并非有意遗漏, 敬请谅解.

当前内容大致相当于传统上的同调代数, 这是本真意义的 "线性代数" 的一个真子集. 从现代的观点看, 前五章达到了一个勉强够用的体系, 但即使作为经典同调代数的

基础训练, 仍然是意犹未尽. 剩余内容或要寄望于将来的第六章. 至于群的上同调这类标准应用, 则要留待更后面的章节处理.

关于使用这份文件的许可协议, 请详阅封面页的链接. 本人欢迎一切建议, 批评和指正.

李文威

2021 年 3 月

于北京大学图书馆

凡例

本书的符号惯例和第一卷 [25] 基本相同. 简单摘要如下.

基本规范 本书使用标准的逻辑符号 $\forall$, $\exists$, $\implies$ 等等. 符号 $\exists!$ 代表 "存在唯一的...", 符号 $\iff$ 代表 "当且仅当". 证明的结尾标注 $\square$. 符号 $A := B$ 意谓 "A 被定义为 B". 如果一个数学对象的定义不依赖于种种辅助资料的选取, 则称之为良定义的.

箭头 $\xrightarrow{\sim}$ 代表对象之间的同构, 有时也不加方向地记为 $\simeq$. 符号 $\xrightarrow{1:1}$ 或 $\xleftrightarrow{1:1}$ 代表集合之间的双射, 亦即一一对应. 形如 $F(\cdot)$ 的符号意在凸显映射或函子 F 带有的变量.

符号 $n \gg m$ 代表 n 充分大于 m. 例如 $n \gg 0$ 代表 n 充分大, 而 $n \ll 0$ 代表 $-n$ 充分大.

本书将大量使用交换图表的语言. 最简单的情形是

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[dl, "g"] \\ C & \end{tikzcd} \quad \text{交换} \overset{\text{定义}}{\iff} g \circ f = h,$$

这里的 f, g, h 可以是映射, 同态, 或者一般范畴中的态射. 依此类推以理解更复杂的交换图表.

集合与序结构　本书采用 Zermelo–Fraenkel 公理集合论, 并且承认选择公理.

空集记为 $\varnothing$. 符号 $A \subset B$ 意谓 A 是 B 的子集, 容许相等, 真包含则记为 $A \subsetneq B$; 差集记为 $A \smallsetminus B := \{a \in A : a \notin B\}$, 无交并记为 $A \sqcup B$. 给定映射 $f : A \to B$, 符号 $a \mapsto b$ 意谓 $a \in A$ 被 f 映为 $b \in B$. 集合 A 到自身的恒等映射记为 $\mathrm{id} = \mathrm{id}_A$. 集合 A 的元素个数, 势或曰基数记为 $|A|$, 有时也记为 $\# A$.

基于 [25, 定义 1.2.1], 所谓**偏序集**是一个集合 P 配上一个服从于反身性, 传递性和反称性的二元关系 $\leq$; 如果不要求反称性, 则得到**预序集**. 符号 $x < y$ 意谓 $x \lneq y$. 偏序集 $(P, \leq)$ 常简记为 P.

- ◇ 若 $m \in P$ 满足 $\forall x \in P,\ x \geq m \iff x = m$, 则称 m 为 P 中的极大元; 以 $\leq$ 代 $\geq$ 可定义极小元的概念. 它们一般而言并不唯一.
- ◇ 设 S 是 P 的子集. 若 $b \in P$ 满足 $\forall x \in S,\ x \leq b$, 则称 b 是 S 在 P 中的上界. 同理可以定义 S 的下界.
- ◇ 若 $b \in P$ 是 S 的上界, 而且任何其它上界 b' 皆满足 $b' \geq b$, 则称之为 S 的上确界, 记为 $\sup S$. 上确界若存在则唯一. 同理可定义 S 的下确界 $\inf S$.

偏序集之间的映射 $f : P \to Q$ 若满足 $a \leq b \implies f(a) \leq f(b)$ 则称为保序的; 若 $f : P \to Q$ 为双射, f 和 f^{-1} 皆保序, 则称 f 为偏序集之间的同构, 或称保序双射.

若偏序集 P 的任两个元素皆可比大小, 则称此为全序集. 若非空全序集 P 的所有非空子集皆有极小元, 则称 P 为**良序集**. 有一类特殊的良序集称为**序数**, 而序数之间可比大小. 简略勾勒如下.

- ◇ 对于任意序数 α, 我们有 $\alpha = \{\beta : \text{序数},\ \beta < \alpha\}$;
- ◇ 若序数 κ 作为集合不与任何 $< \kappa$ 的序数等势, 则称之为**基数**;
- ◇ 任意集合 S 的基数 $|S|$ 定义为其等势类中的最小序数, 这里用到一件事实: 任意集合皆可赋予良序 (需要选择公理), 而良序集同构于唯一的序数;
- ◇ 特别地, 对任意序数 α 皆有 $|\alpha| \leq \alpha$.

这是 von Neumann 的观点, 可参阅 [25, §1.2] 或 [9]. 这比基数作为等势类的寻常定义稍加曲折, 但也有其便利.

有限序数可以视同非负整数: 任何 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 都有对应的全序集 $\mathbf{n}$, 作为集合按 $\mathbf{0} := \varnothing$ 和 $\mathbf{n+1} := \{\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{n}\}$ 递归地定义, 序结构的定义是自明的. 最小的无穷序数 ω 即良序集 $\mathbf{0} \leq \mathbf{1} \leq \cdots$, 它也是可数基数 $\aleph_0$.

我们选定一个 **Grothendieck 宇宙** $\mathcal{U}$ 来区分集合的大小: $\mathcal{U}$ 的元素称为 $\mathcal{U}$-集, 与 $\mathcal{U}$-集等势者称为 $\mathcal{U}$-小集, 或简称**小集**. 若基数 μ 作为集合是 $\mathcal{U}$-小集, 则称为**小基数**. 我们假定所有集合 X 都属于某个 $\mathcal{U}$; 详见 [25, 假设 1.5.2] 和相关讨论.

范畴 关于范畴的约定和 [25, §1.5, 定义 2.1.3] 相同: 一个范畴 $\mathcal{C}$ 的所有对象和所有态射都构成集合, 分别记为 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 和 $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$. 任两个对象之间的态射集记为 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot,\cdot)$, 或简记为 $\mathrm{Hom}(\cdot,\cdot)$. 对象 X 的恒等态射记为 id_X. 单态射以箭头 $\hookrightarrow$ 标识, 满态射则以箭头 $\twoheadrightarrow$ 标识; 单态射又称嵌入.

- ◇ 对于任意范畴中的态射 $f: X \to Y$ 和任意对象 T, 由 f 诱导态射的拉回 f^* 与推出 f_* 运算, 它们定义在 Hom 集上:

$$f^*: \mathrm{Hom}(Y,T) \to \mathrm{Hom}(X,T), \qquad f_*: \mathrm{Hom}(T,X) \to \mathrm{Hom}(T,Y)$$
$$\beta \mapsto \beta f \qquad\qquad \alpha \mapsto f\alpha.$$

- ◇ 子范畴按子集的符号记为 $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$; 若 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, 则称 $\mathcal{C}'$ 为全子范畴.

- ◇ 两个范畴 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 的积 $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ 以 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_1) \times \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_2)$ 为对象集, 从对象 (X_1, X_2) 到 (Y_1, Y_2) 的态射定义为 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_1}(X_1,Y_1) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_2}(X_2,Y_2)$ 的元素, 而态射合成是分量各自合成给出的. 由此可见任意一族范畴的积 $\prod_i \mathcal{C}_i$ 如何定义. 按此亦可定义 $\mathcal{C}^n := \mathcal{C} \times \cdots \mathcal{C}$ (共 n 项), 或更一般的 $\mathcal{C}^I$, 其中 I 是集合. 见 [25, 定义 2.3.1].

举例明之, 任何预序集 $(P, \leq)$ 都给出相应的范畴 $\mathcal{P}$, 其对象集为 P 而

$$\forall a, b \in P, \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(a,b) = \begin{cases} \text{独点集 } \{\star\}, & a \leq b \\ \varnothing, & \text{其它情形}. \end{cases}$$

作为特例, $\mathbf{0}$ 是空范畴, 无对象, 无态射; 而 $\mathbf{1}$ 是恰有一个对象 $\mathbf{0}$ 和一个态射 $\mathrm{id}_{\mathbf{0}}$ 的范畴.

满足 $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}) = \{\mathrm{id}_X : X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})\}$ 的范畴称为**离散范畴**, 它们通过 $\mathcal{C} \mapsto \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 和集合一一对应.

术语: 小范畴与大范畴 本书选定 Grothendieck 宇宙 $\mathcal{U}$. 设 $\mathcal{C}$ 为范畴. 若 $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ 是 $\mathcal{U}$-小集, 则称 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{U}$-小范畴; 若仅要求 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ 对所有 $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 都是 $\mathcal{U}$-小集, 则称之为 $\mathcal{U}$-范畴. [1]

例如所有 $\mathcal{U}$-集连同其间的映射构成 $\mathcal{U}$-范畴 Set, 它并非 $\mathcal{U}$-小范畴. 另一方面, 如果不选定 $\mathcal{U}$, 则所有集合构成一个真类, 并非本书意义下的范畴. 类似地, 本书以 Ab 标记所有建立在 $\mathcal{U}$-集上的交换群所成的范畴, 它是 $\mathcal{U}$-范畴.

若无另外说明, 本书论及的**范畴**默认为 $\mathcal{U}$-范畴, 并且将 $\mathcal{U}$-小范畴简称为**小范畴**; 此处 $\mathcal{U}$ 是选定的 Grothendieck 宇宙. 未必是 $\mathcal{U}$-范畴的范畴则另称为**大范畴**.

大范畴在许多构造中难以避免, 特别是和函子范畴或局部化相关的理论. 凡是大范畴可能出现, 而且确实有实质影响之处, 我们将明确标出.

---

[1] 在许多文献中, 范畴的对象集理解为类, 任两个对象之间的 Hom 集则是集合. 因此他或她们的 “类” 相当于本书的集合, “集合” 相当于本书的 $\mathcal{U}$-集, 而她或他们的 “范畴” 基本相当于本书的 $\mathcal{U}$-范畴.

函子和函子范畴 范畴 $\mathcal{C}$ 到其自身的恒等函子记为 $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$. 函子 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 映 $\mathcal{C}$ 的态射 $f:X\to Y$ 为 $\mathcal{D}$ 的态射 $Ff:FX\to FY$. 若 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX,FY)$ 对所有 X 和 Y 都是单射 (或双射), 则称 F 忠实 (或全忠实); 若 $\mathcal{D}$ 的所有对象都同构于某个 FX, 则称 F 本质满.

以偏序集所对应的范畴为例, 保序映射 $P\to Q$ 无非是函子 $\mathcal{P}\to\mathcal{Q}$.

两个函子间的态射 $\varphi:F\to G$ 在一些文献中又称自然变换, 有时也以双箭头 $\varphi:F\Rightarrow G$ 标注; 态射由一族相容的态射 $(\varphi_X:FX\to GX)_{X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$ 构成, 也可以用 [25, §2.2] 介绍的 2-胞腔图表记为

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "G"'{name=D}] & \mathcal{D}. \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\varphi"] \end{tikzcd}$$

往后论及 Ab-范畴 (见 §1.3) 或 $\Bbbk$-线性范畴时 (见 §1.4), 对函子还会加上相应的条件.

给定函子 $\mathcal{B}\xrightarrow{R}\mathcal{C}\overset{F}{\underset{G}{\rightrightarrows}}\mathcal{D}\xrightarrow{L}\mathcal{E}$ 和态射 $\varphi:F\to G$, 我们自然地得到态射 $L\varphi:LF\to LG$ 和 $\varphi R:FR\to GR$. 另一方面, 态射 $\varphi:F\to G$ 和 $\psi:G\to H$ 可以作合成 $\psi\varphi:F\to H$. 这些合成运算可以用 2-胞腔的合成, 亦即图表的拼贴来表述; 行将回顾的三角等式是一个基本例子.

从范畴 $\mathcal{C}$ 到范畴 $\mathcal{D}$ 的所有函子构成函子范畴 $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$, 也记为 $\mathrm{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{D})$. 特别地, 对于 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和对应的全序集 $\mathbf{n}$, 可以定义 $\mathcal{C}^{\mathbf{n}}$, 细说如下.

- ◇ 按定义, $\mathcal{C}^{\mathbf{0}}:=\mathbf{1}$;
- ◇ 存在唯一的函子 $\mathcal{C}\to\mathbf{1}$, 故 $\mathbf{1}^{\mathcal{C}}=\mathbf{1}$;
- ◇ 指定函子 $\mathbf{1}\to\mathcal{C}$ 相当于指定 $\mathcal{C}$ 的对象, 故 $\mathcal{C}^{\mathbf{1}}\simeq\mathcal{C}$;
- ◇ $\mathcal{C}^{\mathbf{2}}$ 以 $\mathcal{C}$ 中的态射为对象, 以态射之间的交换方块为态射.

综上, $\mathbf{0}$ 可谓始范畴, $\mathbf{1}=[\bullet]$ 可谓终范畴, 而 $\mathbf{2}=[\bullet\to\bullet]$ 可以设想为游走的箭头.

范畴 $\mathcal{C}$ 的相反范畴 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 和 $\mathcal{C}$ 有相同的对象集; 任何态射 $f:X\to Y$ 都可以视同 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 中的态射 $Y\to X$, 记为 f^{op} 以资区别; 另一方面, $\mathrm{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{D})^{\mathrm{op}}$ 则自然地等同于 $\mathrm{Fct}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\mathcal{D}^{\mathrm{op}})$. 从 $\mathcal{C}$ 过渡到 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 相当于倒转箭头, 这一机制在范畴论中称为对偶性.

代数结构 群的幺元 (即单位元) 在乘法符号下记作 1, 交换群的幺元为在加法符号下记作 0. 群 G 的相反群 (倒转乘法顺序) 记为 G^{op}. 设 H 是 G 的子群, 则 H 在 G 中的指数记为 $(G:H)$, 它也等于陪集的个数 $|G/H|$ 或 $|H\backslash G|$.

除非另外说明, 环都是含幺元的结合环, 交换环上的代数亦同; 环 R 的乘法幺元记为 1 或 1_R, 所有可逆元对乘法构成群 $R^\times$. 域或整环 R 的特征记为 $\mathrm{char}(R)$. 环 R 的相反环记为 R^{op}, 其乘法顺序和 R 相反.

设 r 为交换环 R 的非零元. 如果加法群同态 $R\xrightarrow{\text{乘以 } r}R$ 有非零的核, 则称 r 为零因子. 交换环中由元素 $x,y,\ldots$ 生成的理想记为 $(x,y,\ldots)$.

交换环 R 上以 $X_1, X_2, \ldots$ 为变元的多项式代数写作 $R[X_1, X_2, \ldots]$ 的形式, 形式幂级数环记为 $R[\![X_1, X_2, \ldots]\!]$. 若 M 是幺半群, 相应的幺半群 R-代数记为 $R[M]$.

按惯例, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ 依序代表整数环, 有理数域, 实数域和复数域. 若 q 是素数的幂, 则 $\mathbb{F}_q$ 代表有 q 个元素的有限域. 设 $F \hookrightarrow E$ 是域的嵌入, 则相应的域扩张或曰扩域记为 $E|F$, 其次数记为 $[E:F]$; 若 $E|F$ 是 Galois 扩张, 记其 Galois 群为 $\mathrm{Gal}(E|F)$.

几种基本代数结构给出的常用范畴标注如下.

幺半群	Mon
群	Grp
交换群	$\mathsf{Ab} = \mathbb{Z}$-Mod
左或右 R-模	R-Mod 或 Mod-R
(R,S)-双模	(R,S)-Mod
$\Bbbk$-代数	$\Bbbk$-Alg

R, S: 任意环,

$\Bbbk$: 交换环,

模范畴 $\Bbbk$-Mod 不分左右.

若 $\Bbbk$ 选定, 而 R 和 S 都是 $\Bbbk$-代数, 则探讨 (R,S)-双模时默认双模结构来自于左 $R \underset{\Bbbk}{\otimes} S^{\mathrm{op}}$-模结构; 换言之, 我们要求 $\Bbbk$ 的左乘和右乘等效.

左或右 R-模之间的同态群记如 $\mathrm{Hom}_R(X,Y)$ 之形. 对于 (R,S)-双模, 采取类似记法 $\mathrm{Hom}_{(R,S)}$.

对于交换环 R 及其乘性子集 U, 相应的局部化记为 $R[U^{-1}]$.

一如集合范畴 Set 的情形, 此处的群, 环, 模等等都默认实现在 $\mathcal{U}$-集上, 其中 $\mathcal{U}$ 是选定的 Grothendieck 宇宙. 因此表列的所有范畴都带有指向 Set 的忘却函子. 本书在谈及拓扑空间范畴 Top, 紧 Hausdorff 空间范畴 CHaus 等实例时也都作如此假设: 所论的空间都是实现在 $\mathcal{U}$-集上的.

伴随性 伴随对 (F,G,φ) 指的是一对函子 $\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}'$ 连同一族典范双射 $\varphi_{X,Y}$: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(FX,Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,GY)$, 亦即函子之间的态射

$$\varphi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(\cdot),\cdot) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot,G(\cdot)) :\ \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C}' \to \mathsf{Set}.$$

伴随对也经常表作 $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{C}' : G$ 的形式, 代表 F 是 G 的左伴随, 或者说 G 是 F 的右伴随. 资料 φ 经常省略, 而伴随对相应地记作 (F,G).

伴随对中的 φ 可以等价地以**单位**态射 $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to GF$ 和**余单位**态射 $\varepsilon : FG \to \mathrm{id}_{\mathcal{C}'}$ 来刻画. 为了使 (F,G,η,ε) 给出伴随对, 充要条件是它们满足所谓的**三角等式**

$$G\varepsilon \circ \eta G = \mathrm{id}_G, \quad \varepsilon F \circ F\eta = \mathrm{id}_F,$$

见 [25, (2.6) + 命题 2.6.5]; 等价的写法则是 2-胞腔合成的等式

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}' \arrow[r, "G"] \arrow[rr, bend right=50, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}'}"'] & \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend left=50, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & \mathcal{C}' \arrow[r, "G"] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}' \arrow[r, bend left=50, "G"] \arrow[r, bend right=50, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \mathrm{id}_G"] & \mathcal{C}
\end{tikzcd},
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend left=50, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}}"] & \mathcal{C}' \arrow[r, "G"] \arrow[rr, bend right=50, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}'}"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & \mathcal{C}'
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, bend right=50, "F"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \mathrm{id}_F"] & \mathcal{C}'
\end{tikzcd}.
$$

详见 [25, 注记 2.6.6].

极限 考虑函子 $\alpha : I \to \mathcal{C}$.

- ◇ 函子 α 的归纳极限若存在则记为 $\varinjlim \alpha$, 或者 $\varinjlim_{i \in \mathrm{Ob}(I)} \alpha(i)$: 它是 $\mathcal{C}$ 的对象, 带有一族态射 $\alpha(i) \to \varinjlim \alpha$, 由泛性质确定.

- ◇ 类似地, α 的投射极限若存在则记为 $\varprojlim \alpha$, 或者 $\varprojlim_{i \in \mathrm{Ob}(I)} \alpha(i)$: 它带有一族态射 $\varprojlim \alpha \to \alpha(i)$, 由泛性质确定.

两种极限是对偶的, $\alpha : I \to \mathcal{C}$ 的 $\varinjlim$ 和 $\alpha^{\mathrm{op}} : I^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 的 $\varprojlim$ 是一回事. 有鉴于此, 有时也将 $\varprojlim$ 涉及的函子写作 $I^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ 的形式.

在许多文献中, $\varinjlim$ 也称为余极限, 记为 colim, 而 $\varprojlim$ 则称为极限, 记为 lim. 若无其它说明, 本书的 "极限" 泛指 $\varinjlim$ 和 $\varprojlim$.

若 I 是小范畴, 则相应的 $\varinjlim$ 或 $\varprojlim$ 称为**小极限**. 按照 [25, §2.8] 的标准术语, 如果范畴 $\mathcal{C}$ 具备所有的小 $\varprojlim$ (或小 $\varinjlim$), 则称 $\mathcal{C}$ **完备** (或**余完备**). 此概念依赖 $\mathcal{U}$ 的选取.

为了确定符号, 以下选定范畴 $\mathcal{C}$ 来回顾极限的几种常用特例. 详细定义见诸 [25, §2.7] 或其它教材. 以下泛性质中出现的 T 指代 $\mathcal{C}$ 中的任意对象, 而 I 是任意集合.

极限名	输入	对象	典范态射	泛性质
等化子	$X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y$	$\ker(f,g)$	$\ker(f,g) \xrightarrow{\iota} X$	$\begin{array}{cc} \mathrm{Hom}(T,\ker(f,g)) & \psi \\ {\scriptstyle 1:1}\downarrow & \downarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} \phi \in \mathrm{Hom}(T,X): \\ f\phi = g\phi \end{array} \right\} & \iota\psi \end{array}$
余等化子	(同上)	$\mathrm{coker}(f,g)$	$Y \xrightarrow{p} \mathrm{coker}(f,g)$	$\begin{array}{cc} \mathrm{Hom}(\mathrm{coker}(f,g),T) & \psi \\ {\scriptstyle 1:1}\downarrow & \downarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} \phi \in \mathrm{Hom}(Y,T): \\ \phi f = \phi g \end{array} \right\} & \phi p \end{array}$
积	$(X_i)_{i\in I}$	$\prod_{i\in I} X_i$	$\prod_{j\in I} X_j \xrightarrow{p_i} X_i$	$\begin{array}{cc} \mathrm{Hom}\left(T, \prod_{i\in I} X_i\right) & \psi \\ {\scriptstyle 1:1}\downarrow & \downarrow \\ \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(T,X_i) & (p_i\psi)_{i\in I} \end{array}$
余积	(同上)	$\coprod_{i\in I} X_i$	$X_i \xrightarrow{\iota_i} \coprod_{j\in I} X_j$	$\begin{array}{cc} \mathrm{Hom}\left(\coprod_{i\in I} X_i, T\right) & \psi \\ {\scriptstyle 1:1}\downarrow & \downarrow \\ \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(X_i,T) & (\psi\iota_i)_{i\in I} \end{array}$

有限积 (或余积) 也写作 $X_1 \times X_2 \times \cdots$ (或 $X_1 \sqcup X_2 \sqcup \cdots$) 之形. 在 $\mathcal{C}$ 为加性范畴的情形, 我们经常将余积 $\coprod_i$ 用模论的直和符号写作 $\bigoplus_i$.

等化子/余等化子和积/余积各自都是对偶的. 这些基于泛性质的刻画也可以如 [25, §2.7] 写成交换图表, 或以 §1.7 将回顾的米田嵌入来诠释. 设 $\coprod_{i\in I} X_i$ 和 $\prod_{j\in J} Y_j$ 存在, 则泛性质给出双射

$$\mathrm{Hom}\left(\coprod_{i\in I} X_i, \prod_{j\in J} Y_j\right) \xrightarrow{1:1} \prod_{\substack{i\in I \\ j\in J}} \mathrm{Hom}(X_i, Y_j), \quad \psi \mapsto (p_j\psi\iota_i)_{i,j}.$$

▷ **终对象** 对应于 $I = \varnothing$ 的积若存在, 则称为 $\mathcal{C}$ 中的终对象, 暂记为 Z. 按惯例 $\prod_{i\in\varnothing} := \{\varnothing\}$, 所以 Z 的泛性质是: $\mathrm{Hom}(T, Z)$ 对所有 $T \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 皆是独点集.

▷ **始对象** 对应于 $I = \varnothing$ 的余积若存在, 则称为 $\mathcal{C}$ 中的始对象, 暂记为 S, 其泛性质是: $\mathrm{Hom}(S, T)$ 对所有 $T \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 皆是独点集.

▷ **零对象和零态射** 若 $\mathcal{C}$ 的对象 0 兼为始对象和终对象, 则称之为零对象; 出入零对象的态射存在且唯一. 对任何 $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, 合成态射 $X \to 0 \to Y$ 给出 $\mathrm{Hom}(X, Y)$ 中的典范元素, 称为零态射.

由于从任何对象 X 到零对象的同构若存在则唯一, 习惯称 X 是零对象或写作 $X = 0$, 而不说 X 同构于零对象.

继续回顾两类重要的极限, 它们相互对偶.

名称	输入	对象	典范态射	泛性质
纤维积	$\left(X_i \xrightarrow{f_i} Z\right)_{i\in I}$	$\prod\limits_{i\in I}(X_i \to Z)$	$\prod\limits_{j\in I}(X_j \to Z) \xrightarrow{p_i} X_i$	$\mathrm{Hom}\left(T, \prod\limits_{i\in I}(X_i \to Z)\right) \xrightarrow[1:1]{\psi\mapsto(p_i\psi)_i} \left\{\begin{array}{l}(\xi_i : T \to X_i)_{i\in I}:\\ \forall i,j\in I,\\ f_i\xi_i = f_j\xi_j\end{array}\right\}$
纤维余积	$\left(Z \xrightarrow{g_i} X_i\right)_{i\in I}$	$\coprod\limits_{i\in I}(Z \to X_i)$	$X_i \xrightarrow{\iota_i} \coprod\limits_{j\in I}(X_j \to Z)$	$\mathrm{Hom}\left(\coprod\limits_{i\in I}(Z \to X_i), T\right) \xrightarrow[1:1]{\psi\mapsto(\psi g_i)_i} \left\{\begin{array}{l}(\xi_i : X_i \to T)_{i\in I}:\\ \forall i,j\in I,\\ \xi_i g_i = \xi_j g_j\end{array}\right\}$

在纤维积的泛性质中取 $\psi = \mathrm{id}$ 可见 $f_ip_i = f_jp_j$ 对所有 i,j 皆成立, 由此得典范态射 $\prod_{i\in I}(X_i \to Z) \to Z$. 同理, 对纤维余积取 $\psi = \mathrm{id}$ 可见 $\iota_i g_i = \iota_j g_j$ 对所有 i,j 皆成立, 由此得典范态射 $Z \to \coprod_{i\in I}(Z \to X_i)$.

有限多个对象的纤维积 $X_1 \underset{Z}{\times} X_2 \underset{Z}{\times} \cdots$ 或纤维余积 $X_1 \underset{Z}{\sqcup} X_2 \underset{Z}{\sqcup} \cdots$ 可以化约到两个对象的情形. 我们将形如

$$\begin{tikzcd} X \underset{Z}{\times} Y \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & Z \end{tikzcd} \quad 和 \quad \begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "\iota_1"] \\ Y \arrow[r, "\iota_2"'] & X \underset{Z}{\sqcup} Y \end{tikzcd}$$

的交换图表分别称为**拉回**或**推出**图表, 并且称 $X \underset{Z}{\times} Y \to Y$ 为 $X \to Z$ 的拉回, 称 $Y \to X \underset{Z}{\sqcup} Y$ 为 $Z \to X$ 的推出; 注意到 X, Y 的角色是对称的. 推而广之, 与上图同构的交换图表也分别称为拉回和推出, 详见 [25, 定义 2.8.5].

本书的记号是在拉回 (或推出) 图表的方块的中心标记 □ (或 ⊞).

第一章 范畴论拾遗

♣♣♣ 待撰写

阅读提示

♣♣♣ 待撰写 Abel 范畴和复形的基本理论仅需要本章的 §§1.1—1.4, 其后的 §§1.5—1.7 对此起辅助作用. 导出范畴理论涉及本章的 §§1.8—1.11. 最后的 §§1.12—1.13 主要在 §2.10 应用于 Grothendieck 范畴的研究, 但这些背景知识本身也是有用而且重要的.

1.1 子商

首先回顾单态射和满态射的概念. 选定范畴 $\mathcal{C}$.

◇ 态射 $f: X \to Y$ 称为**单态射**, 也标作 $f: X \hookrightarrow Y$, 如果左消去律成立:

$$\forall T \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}),\ \forall g, h: T \to X, \quad fg = fh \iff g = h;$$

◇ 态射 $f: X \to Y$ 称为**满态射**, 也标作 $f: X \twoheadrightarrow Y$, 如果右消去律成立:

$$\forall T \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}),\ \forall g, h: Y \to T, \quad gf = hf \iff g = h.$$

不难读出 $f: X \to Y$ 单等价于 $f_*: \mathrm{Hom}(T, X) \to \mathrm{Hom}(T, Y)$ 对所有 T 皆单; $f: X \to Y$ 满等价于 $f^*: \mathrm{Hom}(Y, T) \to \mathrm{Hom}(X, T)$ 对所有 T 皆单. 态射的单性和满性相互对偶: f 单当且仅当 f^{op} 满.

例 1.1.1 若一对态射 $f, g : X \to Y$ 的等化子 $\ker(f,g)$ 存在, 则泛性质说明典范态射 $\iota : \ker(f,g) \to X$ 单. 同理, 若余等化子 $\operatorname{coker}(f,g)$ 存在则典范态射 $p : Y \to \operatorname{coker}(f,g)$ 满. 另一则平凡的观察则是: 若 $\mathcal{C}$ 有零对象, 依惯例记为 0, 则 $0 \to X$ 单而 $X \to 0$ 满.

命题 1.1.2 考虑态射 $X \xrightarrow{a} Y \xrightarrow{b} Z$. 假设 b 单或者 a 满, 那么 $ba : X \to Z$ 为同构当且仅当 a 和 b 都是同构.

证明 一个方向是显然的. 以下假设 ba 为同构而 b 单. 命 $c := a(ba)^{-1} : Z \to Y$, 则 $bc = \mathrm{id}_Z$. 又由 $b(cb) = (bc)b = b$ 和 b 单可知 $cb = \mathrm{id}_Y$ (左消去律), 故 b 是同构, 从而 a 亦然. 在 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 中操作便得到 a 为满态射的情形. $\square$

对于代数学中常用的范畴如 Set, Ab 和 R-Mod 等等, 态射的单性或满性等价于它作为映射的单性或满性. 在这些例子中, 我们还能进一步探讨子集, 子群等等. 这一概念能推及一般的范畴, 但需要多一道工序. 我们用偏序集的语言来表述.

考虑范畴 $\mathcal{C}$ 及其对象 X. 对于一对单态射 $f_i : S_i \hookrightarrow X$, 其中 $i = 1, 2$. 若存在 $g : S_1 \to S_2$ 使得 $f_2 g = f_1$, 则记作 $(S_1, f_1) \subset (S_2, f_2)$, 或简记为 $S_1 \subset S_2$; 留意到 f_2 的单性蕴涵 g 若存在则唯一, 而且是单态射. 此处定义的 $\subset$ 尚不是偏序关系: 若 $S_1 \subset S_2$ 而且 $S_2 \subset S_1$, 则称 S_1 和 S_2 等价; 这也相当于说存在交换图表

$$\begin{tikzcd} S_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[dr, hook, "f_1"'] & S_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, hook, "f_2"] & S_1 \arrow[dl, hook', "f_1"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

从唯一性遂得 $g_2 g_1 = \mathrm{id}_{S_1}$, 同理 $g_1 g_2 = \mathrm{id}_{S_2}$. 换言之, S_1 和 S_2 等价当且仅当存在同构 $g : S_1 \xrightarrow{\sim} S_2$ 使得 $f_2 g = f_1$, 而且此同构唯一. 这当然是代数学中的标准论证.

类似地, 对于一对满态射 $f_i : X \twoheadrightarrow Q_i$, 其中 $i = 1, 2$, 若存在 $g : Q_2 \to Q_1$ 使得 $g f_2 = f_1$, 则 g 唯一而且满, 记作 $Q_1 \twoheadleftarrow Q_2$. 同理, 若 $Q_1 \twoheadleftarrow Q_2$ 且 $Q_2 \twoheadleftarrow Q_1$, 则称 Q_1 和 Q_2 等价; 这也相当于说存在唯一的同构 $g : Q_2 \xrightarrow{\sim} Q_1$ 使得 $g f_2 = f_1$.

二元关系 $\subset$ (或 $\twoheadleftarrow$) 在等价类上定义偏序. 此处借用了集合的包含符号 $\subset$, 虽有混淆之虞, 却和代数学中其它子结构 (子群, 子模, 子空间等) 的记法保持了一致.

定义 1.1.3 取定范畴 $\mathcal{C}$ 及其对象 X. 形如 $S \hookrightarrow X$ 的单态射 (或形如 $X \twoheadrightarrow Q$ 的满态射) 对上述等价关系构成的等价类称为 X 的**子对象** (或**商对象**), 它们构成偏序集 $(\mathrm{Sub}_X, \subset)$ (或 $(\mathrm{Quot}_X, \twoheadleftarrow)$), 其中 $\mathrm{id}_X : X \to X$ 给出唯一的极大元.

子对象和商对象相对偶: 对 $\mathcal{C}$ 定义的 $(\mathrm{Sub}_X, \subset)$ 和对 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 定义的 $(\mathrm{Quot}_X, \twoheadleftarrow)$ 是一回事. 为了论述方便, 本节主要探讨子对象情形. 由于等价关系中的同构 g 是唯一的, 论证时可以放心选取等价类的代表元 $f : S \hookrightarrow X$, 或进一步简记为 S; 回忆到 $f_* : \mathrm{Hom}(\cdot, S) \to \mathrm{Hom}(\cdot, X)$ 是单射.

引理 1.1.4 对 X 的所有子对象 S_1, S_2 皆有

$$S_1 \subset S_2 \iff \forall T \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}),\ \mathrm{Hom}(T, S_1) \subset \mathrm{Hom}(T, S_2),$$

右式的 $\mathrm{Hom}(T,S_1)$ 和 $\mathrm{Hom}(T,S_2)$ 理解为 $\mathrm{Hom}(T,X)$ 的子集.

证明 方向 $\Longrightarrow$ 是容易的, 至于 $\Longleftarrow$, 取 $T:=S_1$ 并考虑 $\mathrm{id}_{S_1}\in\mathrm{Hom}(S_1,S_1)$ 在 $\mathrm{Hom}(S_1,S_2)$ 中的像, 此即所求的 $g:S_1\to S_2$. □

假定 $\mathcal{C}$ 有零对象, 而 $(X_i)_{i\in I}$ 是一族对象. 对所有 $(i,j)\in I\times I$ 定义 $\delta_{ij}\in\mathrm{Hom}(X_i,X_j)$ 如下: $i=j$ 时 $\delta_{ij}=\mathrm{id}$, 否则 δ_{ij} 定为零态射. 若 $(X_i)_{i\in I}$ 的积和余积存在, 则 $(\delta_{ij})_{i,j}$ 确定典范态射

$$\delta:\coprod_{i\in I}X_i\to\prod_{i\in I}X_i. \tag{1.1.1}$$

对于行将回顾的加性范畴而言, 当 I 有限时 δ 总是同构, 对一般的范畴则未必.

引理 1.1.5 设 $X\to Z$ 为单态射, 则它沿着 $Y\to Z$ 的拉回 $X\underset{Z}{\times}Y\to Y$ (假设存在) 亦单. 类似地, 满态射的推出亦满.

证明 鉴于对偶性, 处理单态射情形即可. 命 $p_2:X\underset{Z}{\times}Y\to Y$ 为纤维积带有的典范态射. 问题归结为对所有对象 T 证明

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(T,X)\underset{\mathrm{Hom}(T,Z)}{\times}\mathrm{Hom}(T,Y) \arrow[d, leftrightarrow, "1:1"', "\text{泛性质}"] & \\
\mathrm{Hom}\left(T,X\underset{Z}{\times}Y\right) \arrow[r, "(p_2)_*"'] & \mathrm{Hom}(T,Y)
\end{tikzcd}$$

是单射, 然而 $X\to Z$ 单蕴涵 $\mathrm{Hom}(T,X)\to\mathrm{Hom}(T,Z)$ 单, 而左上到右下是自明投影.□

引理 1.1.6 设 $(f_i:X_i\to Z)_{i\in I}$ 为一族单态射, 则从 $\prod_{i\in I}(X_i\to Z)$ (假设存在) 到 Z 的典范态射亦单. 类似地, 给定一族满态射 $(g_i:Z\to X_i)_{i\in I}$, 从 Z 到 $\coprod_{i\in I}(Z\to X_i)$ (假设存在) 的典范态射亦满.

证明 类似引理 1.1.5, 问题化为证

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in I}\left(\mathrm{Hom}(T,X_i)\to\mathrm{Hom}(T,Z)\right) \arrow[d, leftrightarrow, "1:1"', "\text{泛性质}"] & \\
\mathrm{Hom}\left(T,\prod_{i\in I}(X_i\to Z)\right) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(T,Z)
\end{tikzcd}$$

的第二行是单射, 然而条件蕴涵 $\mathrm{Hom}(T,X_i)\to\mathrm{Hom}(T,Z)$ 单. □

转回关于子对象和商对象的讨论.

定义 1.1.7 给定任意范畴 $\mathcal{C}$ 及其对象 X,Y. 若 Y 可以实现为 X 的子对象的商对象, 则称 Y 为 X 的**子商**.

如考虑商对象的子对象, 则相当于在 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 中讨论子商. 下述结果表明两者对某一类范畴是殊途同归的, 包括之后将探讨的 Abel 范畴; 见推论 2.1.7.

命题 1.1.8 设范畴 $\mathcal{C}$ 具有有限纤维积和纤维余积, 而且满态射的拉回仍满, 单态射的推出仍单, 则子商可以等价地定义为商对象的子对象.

证明 考虑 $\mathcal{C}$ 中的子商图表 $Y \twoheadleftarrow Z \hookrightarrow X$. 记 $W := X \bigsqcup_Z Y$. 态射 $X \to W$ 是 $Z \to Y$ 的推出, 故根据引理 1.1.5 为满; $Y \to W$ 是 $Z \to X$ 的推出, 故根据条件为单. 这就说明 $Y \hookrightarrow W \twoheadleftarrow X$, 给出 X 在 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 中的子商. 由于条件自对偶, $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 中的子商同样给出 $\mathcal{C}$ 中的子商. □

一旦有了上述的 "子商 = 商子" 性质, 可以推得子商的子商依然是子商.

子商的定义未指定它如何实现为子对象的商对象. 以 $\mathcal{C} = \mathsf{Ab}$ 情形为例, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 的子商, 它既可以是 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 的商对象, 也可以是 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 的子对象 $2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

1.2 像, 余像和严格态射

选定范畴 $\mathcal{C}$. 对于任意态射 $f : X \to Y$, 纤维余积 $Y \bigsqcup_X Y$ 若存在, 则自带一对典范态射 $Y \rightrightarrows Y \bigsqcup_X Y$. 对偶地, 纤维积 $X \underset{Y}{\times} X$ 若存在, 则自带一对典范态射 $X \underset{Y}{\times} X \rightrightarrows X$, 经常称为投影态射.

定义 1.2.1 (像和余像) 设 $f : X \to Y$ 为范畴 $\mathcal{C}$ 中的态射. 假定 $Y \bigsqcup_X Y$ 存在; 若等化子 $\ker\left(Y \rightrightarrows Y \bigsqcup_X Y\right)$ 存在, 则称为 f 的像, 记为 $\mathrm{im}(f)$; 它带有典范单态射 $\mathrm{im}(f) \hookrightarrow Y$.

对偶地, 假定 $X \underset{Y}{\times} X$ 存在, 若余等化子 $\mathrm{coker}\left(X \underset{Y}{\times} X \rightrightarrows X\right)$ 存在, 则称为 f 的余像, 记为 $\mathrm{coim}(f)$; 它带有典范满态射 $X \twoheadrightarrow \mathrm{coim}(f)$.

注记 1.2.2 应用 ker 和 coker 的对偶性, 立见 $\mathrm{im}(f)$ 在 $\mathcal{C}$ 中存在当且仅当 $\mathrm{coim}(f^{\mathrm{op}})$ 在 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 中存在, 而且 $\mathrm{im}(f) = \mathrm{coim}(f^{\mathrm{op}})$.

以下引理非但实用, 也颇能说明像和余像的实质.

引理 1.2.3 设 $f : X \to Y$ 有 $\mathrm{coim}(f)$ (或 $\mathrm{im}(f)$), 则对于任何单态射 $j : Y' \hookrightarrow Y$ (或满态射 $q : X \twoheadrightarrow X'$), 若态射 $g : X \to Y'$ 满足 $jg = f$ (或 $g : X' \to Y$ 满足 $gq = f$), 则存在唯一的 $\bar{g}$ 使下图交换:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] \arrow[dr, "g"] & Y \\ \mathrm{coim}(f) \arrow[r, "\bar{g}"'] & Y' \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd} \quad 或 \quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & Y \\ X' \arrow[r, "\bar{g}"'] \arrow[ur, "g"] & \mathrm{im}(f). \arrow[u] \end{tikzcd}$$

证明 两种版本相互对偶, 讨论 j 的情形即可. 记 p_1, p_2 为纤维积的投影态射 $X \underset{Y}{\times} X \rightrightarrows X$. 因为 $jgp_1 = fp_1 = fp_2 = jgp_2$ 而 j 单, 故 $gp_1 = gp_2$. 于是 $\mathrm{coim}(f)$ 作为余等化子的泛性质唯一地确定 $\bar{g}$ 使得图表交换. □

对 $\mathrm{coim}(f)$ 和 $\mathrm{im}(f)$ 先后应用引理 1.2.3, 不难看出存在态射 $\mathrm{coim}(f) \to \mathrm{im}(f)$ 使下图交换:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads] & Y \\ \mathrm{coim}(f) \arrow[r] & \mathrm{im}(f) \arrow[u, hook] \end{tikzcd} \tag{1.2.1}$$

而且基于单 (或满) 态射的左 (或右) 消去律, 这般态射 $\mathrm{coim}(f) \to \mathrm{im}(f)$ 还是唯一的.

定义 1.2.4 (严格态射) 设 $\mathrm{im}(f)$ 和 $\mathrm{coim}(f)$ 存在. 若 (1.2.1) 中的 $\mathrm{coim}(f) \to \mathrm{im}(f)$ 为同构, 则称 f 为严格态射.

举例明之, 对于 $\mathcal{C} = \mathsf{Set}$, 所有态射皆严格, 像和余像无非是集合论意义下的像.

命题 1.2.5 给定态射 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, 存在唯一的态射 $\alpha : \mathrm{coim}(f) \twoheadrightarrow \mathrm{im}(gf)$ 和 $\beta : \mathrm{coim}(gf) \hookrightarrow \mathrm{im}(g)$ 使下图交换

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, two heads] \arrow[dr] & \mathrm{coim}(f) \arrow[d, "\alpha"] \\ & \mathrm{im}(gf) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Z & \mathrm{im}(g) \arrow[l, hook'] \\ & \mathrm{coim}(gf). \arrow[ul] \arrow[u, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

前提是所论的 coim 和 im 存在.

证明 以 α 的版本为例, 唯一性来自满态射 $X \twoheadrightarrow \mathrm{coim}(f)$ 的右消去律, 存在性则是引理 1.2.3 施于图表

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads] & Y \arrow[r, "g"] & Z \\ \mathrm{coim}(f) \arrow[r] \arrow[urr] & \mathrm{im}(f) \arrow[u, hook] & \mathrm{im}(gf) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

的产物. □

引理 1.2.6 考虑 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f : X \to Y$, 则

$$f \text{ 满} \iff \mathrm{im}(f) \xrightarrow{\sim} Y, \quad f \text{ 单} \iff X \xrightarrow{\sim} \mathrm{coim}(f).$$

证明 基于对偶性, 处理第一个等价即可. 设 f 满, 由于典范态射 $i_1, i_2 : Y \rightrightarrows Y \underset{X}{\sqcup} Y$ 满足 $i_1 f = i_2 f$, 故 $i_1 = i_2$, 从而 $\mathrm{im}(f) := \ker(i_1, i_2) = Y$.

反之设 $\mathrm{im}(f) \xrightarrow{\sim} Y$, 同样由它和 i_1, i_2 的合成相同可知 $i_1 = i_2$. 设若 $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 而 $g_1, g_2 : Y \rightrightarrows Z$ 满足 $g_1 f = g_2 f$, 则泛性质确定 $g : Y \underset{X}{\sqcup} Y \to Z$ 使得 $g_j = g i_j$ (其中 $j = 1, 2$), 故 $g_1 = g_2$; 由此可见 f 满. □

命题 1.2.7 设 f 是严格态射, 则 f 是同构当且仅当 f 既单又满.

证明 设 f 是既单又满的严格态射, 将其分解为 $X \twoheadrightarrow \mathrm{coim}(f) \xrightarrow{\sim} \mathrm{im}(f) \hookrightarrow Y$, 然后应用命题 1.1.2 和引理 1.2.6. □

以上论证涉及形如 $X \twoheadrightarrow C \hookrightarrow Y$ 的图表, 其合成等于 f; 这称为态射 $f: X \to Y$ 的**满–单分解**. 实践中面对的不仅是这些分解本身, 还有其间的态射.

引理 1.2.8 考虑实线部分的交换图表

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e"] \arrow[d, "a"'] & C \arrow[r, "m"] \arrow[d, dashed, "\varphi"] & Y \arrow[d, "b"] \\ X' \arrow[r, "e'"'] & C' \arrow[r, "m'"'] & Y' \end{tikzcd}$$

并且假设 e 和 e' 满 (或 m 和 m' 单).

(i) 若存在虚线所示之 φ, 使得图表左半 (或右半) 交换, 则另一半也交换; 此 φ 若存在则唯一.

(ii) 若 a 满 (或 b 单), 而且 φ 存在, 则 φ 满 (或单).

证明 设 $\varphi: C \to C'$ 使图表左半部交换, 而且 e 和 e' 满. 等式 $\varphi e = e'a$ 和 e 的满性唯一确定 φ. 因为图表外框交换, 此时 $m'\varphi e = m'e'a = bme$ 和 e 的满性进一步给出 $m'\varphi = bm$, 亦即右半部交换. 若进一步要求 a 满, 则由 e 和 e' 的满性可见 $\varphi e = e'a$ 满, 从而 φ 也满.

以上各证出了 (i) 和 (ii) 的一半. 至于 φ 使图表右半交换而 m, m' 单的情形, 论证完全类似, 或者说是对偶的. □

定义 1.2.9 选定 $f: X \to Y$, 将它的全体满–单分解作成范畴 $\mathsf{epi.mono}(f)$, 其中的态射定义为交换图表

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dd, "\varphi"] \arrow[dr, hook, "m"] & \\ X \arrow[ur, two heads, "e"] \arrow[dr, two heads, "e'"'] & & Y. \\ & C' \arrow[ur, hook, "m'"'] & \end{tikzcd}$$

在引理 1.2.8 中取 $a = \mathrm{id}_X$ 和 $b = \mathrm{id}_Y$, 可见上图的 φ 若存在则唯一, 而且它既满且单. 换言之, $\mathsf{epi.mono}(f)$ 来自预序集. 本节仅考虑满–单分解的一种特殊情形.

命题 1.2.10 设范畴 $\mathcal{C}$ 的所有态射都是严格的, 则任意态射 $f: X \to Y$ 都有满–单分解 $X \twoheadrightarrow C \hookrightarrow Y$, 而且此分解精确到范畴 $\mathsf{epi.mono}(f)$ 的同构是唯一的.

证明 取 $C = \mathrm{im}(f)$ 可知分解存在. 关于唯一性, 命题 1.2.7 和之前的讨论表明 $\mathsf{epi.mono}(f)$ 的态射必为同构, 问题化约为给出 $\mathsf{epi.mono}(f)$ 的态射 $\varphi: C \to \mathrm{im}(f)$.

在引理 1.2.3 中取 $X \stackrel{q}{\twoheadrightarrow} C \stackrel{g}{\hookrightarrow} Y$, 可见存在 φ 使图表
$$\begin{tikzcd} & C \arrow[rd, hook] \arrow[dd, "\varphi"] & \\ X \arrow[ru, two heads] \arrow[rd, two heads] & & Y \\ & \mathrm{im}(f) \arrow[ru, hook] & \end{tikzcd}$$
右半交换; 根据引理 1.2.8 可知全图交换. 明所欲证. □

从外框交换推导子图交换的技巧是常见的, 以后还会反复运用.

1.3 加性范畴: 核, 余核

本节将涉及函子保 $\varinjlim$ 或 $\varprojlim$ 的概念, 这是范畴论的基础内容, 可参考 [25, 定义 2.8.8] 或 §1.5 的简要回顾. 我们先回顾 Ab-范畴和加性范畴的定义, 详见 [25, §3.4].

- 我们称范畴 $\mathcal{C}$ 是 Ab-范畴或者预加性范畴, 如果所有 $\mathrm{Hom}(X, Y)$ 都赋有交换群的结构, 群运算写作加法 (换言之, Hom 集都是 $\mathbb{Z}$-模), 使得合成映射 $\mathrm{Hom}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(X, Z)$ 总是 $\mathbb{Z}$-双线性映射; 因此, 在 Ab-范畴中可以讨论态射 $0 \in \mathrm{Hom}(X, Y)$. 对 Ab-范畴可以谈论其 Ab-子范畴, 而全子范畴自动是 Ab-子范畴.
- 设 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ 为 Ab-范畴, 若函子 $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ 在 Hom 集上诱导群同构, 则称 F 为**加性函子**. 谈论 Ab-范畴之间的等价时, 对应的函子及其拟逆总默认为加性函子.

我们需要一则简单而基本的观察. 按惯例, $\mathbb{Z}$-模之间的线性映射意谓模的同态.

命题 1.3.1 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}'$ 是 Ab-范畴.

1. 给定一对伴随函子 $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{C}' : G$, 其中 F, G 皆是加性函子, 则伴随同构 $\varphi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(\cdot), \cdot) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, G(\cdot))$ 是线性的.
2. 对于任意 $\alpha : I \to \mathcal{C}$, 极限的泛性质中的同构
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\varinjlim \alpha, T\right) \simeq \varprojlim_{i \in \mathrm{Ob}(I)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha(i), T), \quad T \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$$
是线性的, 前提是极限存在. 对 $\varprojlim$ 亦同.

证明 对于 (i), 依 [25, 定义 2.6.3] 之后的讨论, φ 由伴随对的单位 η 和余单位 ε 确定:
$$\varphi(f) = Gf \circ \eta_X, \quad \varphi^{-1}(g) = \varepsilon_Y \circ Fg, \quad f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(FX, Y), \ g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY);$$
既然态射合成是双线性的, φ 因而是线性的. 对 (ii) 的论证类似: 所论同构由态射对 $\iota_i : \alpha(i) \to \varinjlim \alpha$ 的合成确定, 因此是线性的. □

在 Ab-范畴中 $X_1 \times X_2$ 存在当且仅当 $X_1 \sqcup X_2$ 存在, 此时有典范同构 $X_1 \sqcup X_2 \xrightarrow{\sim} X_1 \times X_2$, 这一结构称为**双积**, 见 [25, 定义 3.4.8, 定理 3.4.9].

推而广之, n 个对象 $X_1, \ldots, X_n$ 的双积是一个对象 Z 配上态射族 $X_i \underset{\iota_i}{\overset{p_i}{\leftrightarrows}} Z$, $(i = 1, \ldots, n)$ 使得

$$p_i \iota_j = \begin{cases} \mathrm{id}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \qquad \sum_{i=1}^{n} \iota_i p_i = \mathrm{id}_Z. \tag{1.3.1}$$

此时态射族 $\iota_i : X_i \to Z$ 和 $p_i : Z \to X_i$ 各自诱导出同构

$$\coprod_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\sim} Z \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{n} X_i.$$

按惯例, $n = 0$ 对应的双积定为零对象.

若 Ab-范畴 $\mathcal{C}$ 有零对象, 则 [25, 引理 3.4.11] 保证任意 $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 之间的零态射等于先前定义之 $0 \in \mathrm{Hom}(X, Y)$, 而先前之 $\coprod_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{n} X_i$ 正是 (1.1.1) 定义的态射 δ; 请读者按 (1.3.1) 进行简单的验证.

约定 1.3.2 记 n 元双积 Z 为 $X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$; 若 $\mathcal{C}$ 中存在 2 元双积 $X_1 \oplus X_2$, 则可以按典范同构 $X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \simeq (X_1 \oplus X_2) \oplus X_3$ 迭代构造所有 n 元双积 $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$. 另外,

$$X^{\oplus n} := \underbrace{X \oplus \cdots \oplus X}_{n \text{ 项}}.$$

积带有的对角态射 $\delta_X : X \to X^{\oplus n}$ 及余积带有的对偶版本 $\check{\delta}_X : X^{\oplus n} \to X$ 由性质 $p_i \delta_X = \mathrm{id}_X = \check{\delta}_X \iota_i$ 刻画 $(1 \leq i \leq n)$; 它们可以具体地表作 $\delta_X = \sum_{i=1}^{n} \iota_i$ 和 $\check{\delta}_X = \sum_{i=1}^{n} p_i$.

定义 1.3.3 (加性范畴) 满足下述条件的 Ab-范畴 $\mathcal{C}$ 称为加性范畴:

- ◇ 存在零对象 0;
- ◇ 任两个对象 X, Y 都有积 $X \oplus Y$.

如果加性范畴的 Ab-子范畴本身也是加性范畴, 则称之为加性子范畴. 加性范畴中任意有限个对象 $X_1, \ldots, X_n$ 都有双积 $X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$, 又称为这些对象的**直和**, 而 $X_1, \ldots, X_n$ 则称为其直和项.

加性范畴之间的加性函子 $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ 保一切有限积和有限余积, 原因是:

- ◇ F 保双积 (见 [25, 命题 3.4.13]),
- ◇ F 保零对象 (这是因为 $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{FX}$, 而零对象的刻画是 $\mathrm{id} = 0$, 见 [25, 引理 3.4.11]).

设 $\mathcal{C}$ 是 Ab-范畴 (或加性范畴), 则反范畴 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 也自然地成为 Ab-范畴 (或加性范畴), 使得对所有对象 X, Y, 写作 $f \mapsto f^{\mathrm{op}}$ 的映射 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(Y, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 是群同构.

今后以 0 兼表加性范畴中的零对象和零态射, 这不会导致混淆. 任一族态射 $f_i : X_i \to X'_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ 自然地诱导 $f_1 \oplus \cdots \oplus f_n : \bigoplus_i X_i \to \bigoplus_i X'_i$, 它也可以表作 $\sum_{i=1}^n \iota'_i f_i p_i$.

例 1.3.4 范畴 Ab 是加性范畴: 其 Hom 集上的群结构是同态的逐点相加 $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, 零对象是零群, 双积 $X_1 \oplus X_2$ 则按寻常的方法定义. 同理可知 R-Mod 也是加性范畴, 其中 R 是任何环, 而忘却函子 R-Mod $\to$ Ab 是加性函子. 类似地, 考虑 $\mathbb{C}$ 上的 Banach 空间构成的范畴 $\mathsf{Ban}_{\mathbb{C}}$, 态射取为连续线性映射, 这也给出加性范畴: 态射的加法仍是逐点相加, 零对象是零空间; 对于 Banach 空间 $(X_i, \|\cdot\|_i)$ (取 $i = 1, 2$), 双积 $(X_1 \oplus X_2, \|\cdot\|)$ 则可定为向量空间的直和 $X_1 \oplus X_2$ 配上范数 $\|(x_1, x_2)\| := \max\{\|x_1\|_1, \|x_2\|_2\}$, 其中 $x_i \in X_i$.

命题 1.3.5 设 $f, g : X \to Y$ 是加性范畴中 $\mathcal{C}$ 的一对态射, 则 $f + g$ 等于以下交换图表按第一行的合成

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\delta_X"] \arrow[dr] & X \oplus X \arrow[rr, "f \oplus g"] \arrow[d, "\simeq"] & & Y \oplus Y \arrow[r, "\check{\delta}_Y"] & Y \\
& X \times X \arrow[r, "f \times g"] & Y \times Y \arrow[r, "\sim"] & Y \sqcup Y \arrow[u, "\simeq"'] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

其中 $f \times g$ 来自积的函子性, 而 $Y \times Y \xrightarrow{\sim} Y \sqcup Y$ 是 (1.1.1) 定义的 δ 之逆.

证明 图表交换是基于各种定义, 有劳读者自证. 关键在于确定第一行的合成. 以 ι_i^X, ι_i^Y 和 p_i^X, p_i^Y 标记双积带有的自然态射 $(i = 1, 2)$. 易见 $(f \oplus g)\iota_1^X = \iota_1^Y f$ 而 $(f \oplus g)\iota_2^X = \iota_2^Y g$. 依此计算

$$\begin{aligned}
\check{\delta}_Y (f \oplus g) \delta_X &= \check{\delta}_Y (f \oplus g) \left(\iota_1^X p_1^X + \iota_2^X p_2^X \right) \delta_X \\
&= \check{\delta}_Y (f \oplus g) \iota_1^X + \check{\delta}_Y (f \oplus g) \iota_2^X = \check{\delta}_Y \iota_1^Y f + \check{\delta}_Y \iota_2^Y g = f + g.
\end{aligned}$$

明所欲证. □

推论 1.3.6 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}'$ 为加性范畴, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ 为函子.

(i) F 保有限积当且仅当 F 保有限余积.

(ii) 若 F 保有限积 (等价地: 保有限余积), 则 F 是加性函子.

(iii) 若 F 保零对象和双积 $\oplus$, 则 F 是加性函子.

(iv) 若 F 是等价, 则 F 及其拟逆都是加性函子.

(v) 若 $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{C}' : G$ 为伴随对, 则 F, G 皆是加性函子; 亦见命题 1.3.1.

证明 对于 (i), 由于零对象兼为空积和空余积, 考虑任意 $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 的积和余积即可. 这归结为下述观察: 典范同构 $\delta : FX \sqcup FY \xrightarrow{\sim} FX \times FY$ 分解为

$$FX \sqcup FY \to F(X \sqcup Y) \xrightarrow{\sim} F(X \times Y) \to FX \times FY.$$

对于 (ii), 注意到在命题 1.3.5 中, 图表沿 $\searrow\!\longrightarrow\!\nearrow$ 的合成无关 Hom 集的加法结构, 仅涉及范畴中的有限积, 有限余积及其特例零对象, 以及它们带有的典范态射.

对于 (iii), 回忆到所有有限积 (或有限余积) 皆可由零对象和双积 $\oplus$ 来构造.

若 (F, G) 为伴随对, 则 F 保 $\varinjlim$ 而 G 保 $\varprojlim$, 见 [25, 定理 2.8.12]; 另一方面, 等价保所有极限. 因此 (iv) 和 (v) 都是 (ii) 的特例. □

定义 1.3.7 设 $\mathcal{C}$ 为具有零对象的 Ab-范畴, $f : X \to Y$ 为 $\mathcal{C}$ 中的态射.

- 若等化子 $\ker(f, 0)$ 存在, 则称 $\ker(f) := \ker(f, 0)$ 连同 $\ker(f) \hookrightarrow X$ 为 f 的**核**.
- 若余等化子 $\mathrm{coker}(f, 0)$ 存在, 则称 $\mathrm{coker}(f) := \mathrm{coker}(f, 0)$ 连同 $Y \twoheadrightarrow \mathrm{coker}(f)$ 为 f 的**余核**.

特别地, $\ker(f) \to X \to Y$ 和 $X \to Y \to \mathrm{coker}(f)$ 的合成按定义都是 0.

对核以及余核, 可以有几种互补的视角.

- 先考虑 $\ker(f)$. 对任意态射 $g : T \to X$, 既然 $T \xrightarrow{g} X \xrightarrow{0} Y$ 的合成必为 0, 于是 $\ker(f) = \ker(f, 0)$ 作为等化子的泛性质可表述为交换图表:

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[ld, dashed, "\exists! g'"'] \arrow[d, "g"] \arrow[rd, "0"] & \\ \ker(f) \arrow[r] & X \arrow[r, "f"'] & Y. \end{tikzcd}$$

- 考虑 $\mathrm{coker}(f)$. 对任意态射 $h : Y \to T$, 既然 $X \xrightarrow{0} Y \xrightarrow{h} T$ 的合成必为 0. 于是 $\mathrm{coker}(f) = \mathrm{coker}(f, 0)$ 作为余等化子的泛性质可表述为交换图表:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rd, "0"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "h"] & \mathrm{coker}(f). \arrow[ld, dashed, "\exists! h'"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

- 以上两者显然相互对偶: $\mathrm{coker}(f) = \ker(f^{\mathrm{op}})$, $\ker(f) = \mathrm{coker}(f^{\mathrm{op}})$.

由于通过零对象分解的态射正是 0, 泛性质也有基于拉回和推出图表的刻画, 请读者疾速验证:

$$\begin{tikzcd} \ker(f) \simeq & X \underset{Y}{\times} 0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[rd, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "f"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d] \arrow[rd, phantom, "\boxplus"] & Y \arrow[d] & \\ & 0 \arrow[r] & Y & 0 \arrow[r] & Y \underset{X}{\sqcup} 0 & \simeq \mathrm{coker}(f). \end{tikzcd} \tag{1.3.2}$$

注记 1.3.8 一般的等化子 $\ker(f,g)$ 可以化约到上述的核: 考虑态射

$$T \xrightarrow{h} X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y ,$$

条件 $fh = gh$ 等价于 $(f-g)h = 0$, 由此立得 $\ker(f,g) = \ker(f-g,0) =: \ker(f-g)$. 对偶地, $\operatorname{coker}(f,g) = \operatorname{coker}(f-g,0) =: \operatorname{coker}(f-g)$.

今后主要考虑 $\mathcal{C}$ 为加性范畴的情形.

命题 1.3.9 对于加性范畴 $\mathcal{C}$ 中的态射 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, 存在交换图表

$$\begin{tikzcd} \ker(gf) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, hook] & & X \underset{Y}{\times} \ker(g) \arrow[dl, hook] \\ & X & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Z \underset{Y}{\sqcup} \operatorname{coker}(f) \arrow[rr, "\sim"] & & \operatorname{coker}(gf) \\ & Z \arrow[ul, two heads] \arrow[ur, two heads] & \end{tikzcd}$$

其中 $X \underset{Y}{\times} \ker(g) \to X$ (或 $Z \to Z \underset{Y}{\sqcup} \operatorname{coker}(f)$) 是纤维积 (或余积) 自带的典范态射, 前提是所论的 ker, coker 和极限皆存在.

证明 基于 (1.3.2), 分段作纤维积得典范同构 $\ker(gf) \simeq X \underset{Z}{\times} 0 \simeq X \underset{Y}{\times} (Y \underset{Z}{\times} 0) \simeq X \underset{Y}{\times} \ker(f)$. 对偶性给出 $\operatorname{coker}(gf)$ 的情形. □

等化子及余等化子的函子性诱导核及余核的函子性, 以交换图表刻画为

$$\begin{tikzcd} \ker(f) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists!"'] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & Y \arrow[d, "b"] \\ \ker(g) \arrow[r] & X' \arrow[r, "g"'] & Y' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "b"] & \operatorname{coker}(f) \arrow[d, dashed, "\exists!"'] \\ X' \arrow[r, "g"'] & Y' \arrow[r] & \operatorname{coker}(g). \end{tikzcd} \tag{1.3.3}$$

以下结果说明拉回 (或推出) 保核 (或余核).

命题 1.3.10 若加性范畴 $\mathcal{C}$ 中的图表

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & Y \arrow[d, "b"] \\ X' \arrow[r, "g"'] & Y' \end{tikzcd}$$

是拉回 (或推出) 图表, 则 (1.3.3) 的态射 $\ker(f) \to \ker(g)$ (或 $\operatorname{coker}(f) \to \operatorname{coker}(g)$) 为同构, 前提是所论的 ker 和 coker 存在.

证明 对偶性将论证归结为拉回的情形. 对任意对象 T, 由泛性质可以验证

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}(T, \ker(f)) &\simeq \ker\left[\operatorname{Hom}(T,X) \to \operatorname{Hom}(T,Y)\right] \\ &\simeq \ker\left[\operatorname{Hom}(T,Y) \underset{\operatorname{Hom}(T,Y')}{\times} \operatorname{Hom}(T,X') \to \operatorname{Hom}(T,Y)\right] \\ &= \ker\left[\operatorname{Hom}(T,X') \to \operatorname{Hom}(T,Y')\right] \simeq \operatorname{Hom}(T, \ker(g)), \end{aligned}$$

其中每个箭头都是典范的. 米田引理遂蕴涵 $\ker(f) \xrightarrow{\sim} \ker(g)$; 详见定理 1.7.1 的回顾. □

引理 1.3.11 设 $\mathcal{C}$ 为加性范畴, $f : X \to Y$ 为 $\mathcal{C}$ 中的态射, 则:

(i) f 是单态射 (或满态射) 当且仅当 $\ker(f) = 0$ (或 $\mathrm{coker}(f) = 0$);

(ii) f 是零态射等价于 $\ker(f) \xrightarrow{\sim} X$, 也等价于 $Y \xrightarrow{\sim} \mathrm{coker}(f)$.

(iii) 给定 $k : Y \to Z$ (或 $k' : W \to X$), 存在唯一的交换图表如下:

$$\begin{tikzcd} \ker(kf) \arrow[dr] & & \ker(f) \arrow[ll, hook', "\exists!"'] \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd} \quad \text{或} \quad \begin{tikzcd} \mathrm{coker}(fk') \arrow[rr, two heads, "\exists!"] & & \mathrm{coker}(f) \\ & Y \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

前提是所论的核 (或余核) 存在. 若 k 单 (或 k' 满), 则 $\ker(f) \xrightarrow{\sim} \ker(kf)$ (或 $\mathrm{coker}(fk') \xrightarrow{\sim} \mathrm{coker}(f)$).

证明 先考虑 (i). 基于对偶性, 仅需处理单态射情形. 按定义, f 为单态射等价于对任一对态射 $g_1, g_2 : T \to X$ 都有 $f(g_1 - g_2) = 0 \iff g_1 - g_2 = 0$. 这相当于说对任意 $g : T \to X$, 下式成立: $fg = 0$ 当且仅当 g 分解为 $T \to 0 \to X$. 这无非是说零对象符合 $\ker(f)$ 的泛性质.

同理, 对 (ii) 证 $f = 0 \iff \ker(f) \xrightarrow{\sim} X$ 即足. 然而 $\ker(f) = \ker(f, 0)$, 所求的等价容易归结为等化子的定义.

至于 (iii), 同样仅考虑 ker 的情形. 对于任意态射 $h : T \to X$,

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \{g \in \mathrm{Hom}(T, X) : fg = 0\} & \subset & \{g \in \mathrm{Hom}(T, X) : kfg = 0\} \\ \mathrm{Hom}(T, \ker(f)) \arrow[u, "1:1"] & & \mathrm{Hom}(T, \ker(kf)) \arrow[u, "1:1"'] \end{tikzcd}$$

当 k 单时第一行取等号. 应用米田引理以完成证明. □

在加性范畴中, 定义 1.2.1 介绍的像和余像有简单的描述.

命题 1.3.12 设 $f : X \to Y$ 为加性范畴 $\mathcal{C}$ 中的态射, 则有典范同构

$$\begin{aligned} \mathrm{im}(f) &\simeq \ker\left[Y \to \mathrm{coker}(f)\right] \hookrightarrow Y, \\ \mathrm{coim}(f) &\simeq \mathrm{coker}\left[\ker(f) \to X\right] \twoheadleftarrow X; \end{aligned}$$

前提是所论的核, 余核皆存在.

证明 基于对偶性, 以下仅考虑 $\mathrm{im}(f)$. 考虑典范态射 $i_1, i_2 : Y \to Y \bigsqcup_X Y$. 应用米田引

理, 问题化为对所有 $T \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 验证

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}\left(T, \mathrm{im}(f)\right) &= \{h : T \to Y \mid i_1 h = i_2 h\} \\
&= \left\{ h : T \to Y \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall S \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}),\ \forall s_1, s_2 : Y \to S, \\ s_1 f = s_2 f \implies s_1 h = s_2 h \end{array} \right\} \\
&\xlongequal{s := s_1 - s_2} \left\{ h : T \to Y \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall S \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}),\ \forall s : Y \to S, \\ sf = 0 \implies sh = 0 \end{array} \right\} \\
&= \left\{ h : T \to Y \;\middle|\; \begin{array}{l} T \xrightarrow{h} Y \twoheadrightarrow \mathrm{coker}(f) \\ \text{合成为 } 0 \end{array} \right\} \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}\left(T, \ker\left[Y \to \mathrm{coker}(f)\right]\right).
\end{aligned}$$

以上第一个等式缘于 $\mathrm{im}(f) := \ker(i_1, i_2)$. 对于第二个等式, 先将 h 的条件改写为对所有 $s' : Y \bigsqcup_X Y \to S$ 皆有 $s' i_1 h = s' i_2 h$, 再用纤维余积的泛性质

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}\left(Y \bigsqcup_X Y, S\right) &\xrightarrow{1:1} \mathrm{Hom}(Y, S) \underset{\mathrm{Hom}(X,S)}{\times} \mathrm{Hom}(Y, S) \\
s' &\longmapsto (s' i_1, s' i_2) =: (s_1, s_2).
\end{aligned}$$

第四个等式是按余核泛性质化简到 $S = \mathrm{coker}(f)$ 的产物. □

最简单的例子是当 f 为零态射时, 引理 1.3.11 (ii) 蕴涵 $\mathrm{im}(f) = 0 = \mathrm{coim}(f)$.

例 1.3.13 承接例 1.3.4 的讨论. 考虑范畴 R-Mod. 模同态 $f : A \to B$ 总有核以及余核, 按经典方式取为 $\ker(f) = f^{-1}(0)$ 以及 $\mathrm{coker}(f) = B/\{f(a) : a \in A\}$. 据定义立见 $\mathrm{im}(f)$ 是 f 在集合论意义下的像, $\mathrm{coim}(f) = A/\ker(f)$, 而 (1.2.1) 中的典范态射 $\mathrm{coim}(f) \to \mathrm{im}(f)$ 无非是模论里的典范同构 $A/\ker(f) \xrightarrow{\sim} \mathrm{im}(f)$. 因此 R-Mod 中所有态射皆严格.

接着考虑例 1.3.4 的加性范畴 $\mathsf{Ban}_{\mathbb{C}}$. 连续线性映射 $f : X \to Y$ 的核是寻常的 $\ker(f) = f^{-1}(0)$, 仍是 Banach 空间; 另一方面, $\mathrm{coker}(f) = Y/\overline{\{f(x) : x \in X\}}$ 带有商范数. 对之 (1.2.1) 的态射化为

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{coim}(f) & = & X/f^{-1}(0) & \longrightarrow & \overline{\{f(x) : x \in X\}} & = & \mathrm{im}(f) \\
& & \Cup & & \Cup & & \\
& & x + f^{-1}(0) & \longmapsto & f(x) & &
\end{array}$$

右边带诱导自 Y 的拓扑, 左边则带 X 的商拓扑. 设 $f : X \to Y$ 为 Banach 空间之间的连续线性单射, f 像稠密而非满, 此时 $\mathrm{coim}(f) = X \to Y = \mathrm{im}(f)$ 非同构, 因而 $\mathsf{Ban}_{\mathbb{C}}$ 中存在非严格的态射.

1.4 推广: 交换环上的线性范畴

加性范畴的 Hom 集具有加法群的结构, 而在许多情景中, Hom 集还进一步带有来自某个交换环 $\Bbbk$ 的纯量乘法. 例如在 $\Bbbk$-Mod 中, 每个 Hom 集自然地都是 $\Bbbk$-模, 而态射的合成是 $\Bbbk$-双线性的.

定义 1.4.1 设 $\Bbbk$ 为交换环. 若范畴 $\mathcal{A}$ 中的 Hom 集都带有 $\Bbbk$-模结构, 使得态射合成 $\mathrm{Hom}(Y,Z)\times\mathrm{Hom}(X,Y)\to\mathrm{Hom}(X,Z)$ 对所有对象 X,Y,Z 都是 $\Bbbk$-双线性映射, 或者换言之有交换图表

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(Y,Z)\times\mathrm{Hom}(X,Y) \arrow[r, "\text{合成}"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(X,Z) \\
\mathrm{Hom}(Y,Z)\underset{\Bbbk}{\otimes}\mathrm{Hom}(X,Y) \arrow[ur, bend right, "\exists!\ \Bbbk\text{-模同态}"'] &
\end{tikzcd}$$

则称 $\mathcal{A}$ 同这些资料成为 $\Bbbk$-Mod-范畴.

设 $F:\mathcal{A}\to\mathcal{A}'$ 为 $\Bbbk$-Mod-范畴之间的函子, 若 $\mathrm{Hom}(X,Y)\to\mathrm{Hom}(FX,FY)$ 对所有 $X,Y\in\mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ 都是 $\Bbbk$-模同态, 则称 F 是 $\Bbbk$-线性函子.

注意到 $\Bbbk$-Mod 对张量积 $\otimes := \underset{\Bbbk}{\otimes}$ 成为幺半范畴, 因此 $\Bbbk$-Mod-范畴这一称呼和 [25, §3.4] 中关于充实范畴的术语一致. 留意到 Ab-范畴即 $\mathbb{Z}$-Mod-范畴; 相反地, 忘却 $\Bbbk$-Mod-范畴上的纯量乘法, 就得到 Ab-范畴.

例 1.4.2 仅有一个对象的 $\Bbbk$-Mod 范畴无非是 $\Bbbk$-代数, 对应由 $\mathcal{A}\mapsto\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(\star)$ 给出, 此处 $\mathrm{Ob}(\mathcal{A})=\{\star\}$.

命题 1.3.1 的论证原封不动地照搬, 给出以下结果.

命题 1.4.3 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}'$ 是 $\Bbbk$-Mod-范畴.

1. 给定一对伴随函子 $F:\mathcal{A}\rightleftarrows\mathcal{A}':G$, 其中 F,G 皆是 $\Bbbk$-线性的, 则伴随同构 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}'}(F(\cdot),\cdot)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\cdot,G(\cdot))$ 是 $\Bbbk$-线性的.
2. 对于任意 $\alpha: I\to\mathcal{A}$, 双射
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\left(\varinjlim\alpha, T\right)\simeq\varprojlim_{i\in\mathrm{Ob}(I)}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\alpha(i),T),\quad T\in\mathrm{Ob}(\mathcal{A})$$
是 $\Bbbk$-线性的, 前提是极限存在. 对 $\varprojlim$ 亦同.

如无另外申明, 今后 $\Bbbk$-Mod-范畴之间的函子和等价都默认为 $\Bbbk$-线性的.

定义 1.4.4 若给定的加性范畴 $\mathcal{A}$ 带有 $\Bbbk$-线性结构, 与原有的 Ab-结构相容, 则称此资料为 $\Bbbk$-线性范畴.

这相当于在 §1.3 的讨论中以 $\Bbbk$-Mod-范畴替代 Ab-范畴. 本章关于加性范畴的结果多数能扩及 $\Bbbk$-线性的情形, 论证并无二致. 唯一的例外关乎推论 1.3.6: 在加性范畴中, Hom 集的加法能由范畴本身的性质来刻画, 但论及 $\Bbbk$-纯量乘法则不然; 相应地, $\Bbbk$-线性范畴之间的函子 (甚至是等价) 难以自动成为 $\Bbbk$-线性的.

以下搜集关于 $\Bbbk$-线性的几则结果. 回顾任意范畴 $\mathcal{A}$ 的**中心** $Z(\mathcal{A}) := \mathrm{End}(\mathrm{id}_{\mathcal{A}})$, 其元素是恒等函子 $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ 到自身的态射, 写作 $(a_X)_{X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{A})}$, 其中 $a_X \in \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(X)$. 中心对态射合成构成交换幺半群; 见 [25, 定义 2.3.8, 命题 2.3.9]. 若 $\mathcal{A}$ 是 Ab-范畴, 则 $Z(\mathcal{A})$ 相对于合成与加法 $(a_X)_X + (b_X)_X := (a_X + b_X)_X$ 成为交换环.

命题 1.4.5 设 $\mathcal{A}$ 为 Ab-范畴, 则有双射

$$\{\mathcal{A}\ \text{上的}\ \Bbbk\text{-Mod-范畴结构}\} \xleftrightarrow{1:1} \mathrm{Hom}_{\text{环}}(\Bbbk, Z(\mathcal{A})).$$

映法如下. 若指定了 $\mathcal{A}$ 上的 $\Bbbk$-Mod-范畴结构, 对每个 $a \in \Bbbk$ 和 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, 定义 $a_X := a \cdot \mathrm{id}_X \in \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(X)$, 则 $a \mapsto (a_X)_{X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{A})} \in Z(\mathcal{A})$ 是环同态. 反之, 给定属于右式的环同态 $a \mapsto (a_X)_{X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{A})}$, 以 $a \cdot f := f \circ a_X = a_Y \circ f$ 定义 $\mathcal{A}$ 上的 $\Bbbk$-Mod-范畴结构, 其中 $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$.

证明 刻画 $(a_X)_{X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{A})} \in Z(\mathcal{A})$ 的条件正是 $f \circ a_X = a_Y \circ f$, 其中 $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ 任取. 若 $\mathcal{A}$ 带有 $\Bbbk$-Mod-范畴结构, 命 $a_X := a \cdot \mathrm{id}_X$, 则双线性蕴涵 $f \circ a_X = f \circ (a \cdot \mathrm{id}_X) = (af) \circ \mathrm{id}_X = (a \cdot \mathrm{id}_Y) \circ f = a_Y \circ f$, 故 $(a_X)_{X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{A})} \in Z(\mathcal{A})$. 其余验证是平凡的. □

作为推论, Ab-范畴 $\mathcal{A}$ 自然地成为 $Z(\mathcal{A})$-Mod-范畴.

1.5 由函子观极限

函子 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 和极限间的种种关系大致可以分成两个方向. 以 $\varinjlim$ 为例, 给定函子 $\alpha : I \to \mathcal{C}$, 试问:

- 设 $\varinjlim \alpha$ 存在, 其像 $F\left(\varinjlim \alpha\right)$ 是否给出 $\varinjlim(F\alpha)$?
- 设 $\varinjlim F\alpha$ 存在, 它能否 "提升" 到 $\mathcal{C}$ 上? 此提升在何种意义下唯一?

此处主要讨论 $\varinjlim$ 的情形; 这些结果对于 $\varprojlim$ 当然也有对应的版本; 鉴于对偶性, 细节不必重复.

我们以锥和范畴 (α/Δ) 的语言来梳理 $\varinjlim$.

约定 1.5.1 相对于给定的函子 $\alpha : I \to \mathcal{C}$, 称 $\mathcal{C}$ 中满足下述条件的资料 $(L, (f_i)_{i\in\mathrm{Ob}(I)})$ 为以 α 为底, 以 L 为顶点的**锥**:

- L 是 $\mathcal{C}$ 的对象,
- 每个 $f_i : \alpha(i) \to L$ 都是 $\mathcal{C}$ 的态射, 具备相容性条件 $f_j \circ \alpha(i \to j) = f_i$, 其中 $[i \to j]$ 取遍 $\mathrm{Mor}(I)$.

按 [25, §2.7] 的语言, 这些锥构成范畴[1] (α/Δ); 具体地说, 当底 α 固定, 从锥 $(L,(f_i)_i)$ 到锥 $(M,(g_i)_i)$ 的态射是交换图表

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[d] & \\ \alpha(i) \arrow[ur, "f_i"] \arrow[r, "g_i"] \arrow[rr, bend right, "\alpha(i\to j)"'] & M & \alpha(j) \arrow[ul, "f_j"'] \arrow[l, "g_j"'] \end{tikzcd} \tag{1.5.1}$$

其中 $i\to j$ 取遍 $\mathrm{Mor}(I)$, 态射合成按明显的方式操作. 按定义, $\varinjlim \alpha$ 连同其自带的典范态射族 $\iota_i : \alpha(i)\to \varinjlim \alpha$ 是 (α/Δ) 的始对象.

函子 F 按自明的方式诱导函子 $(\alpha/\Delta)\to(F\alpha/\Delta)$, 映锥 $(L,(f_i)_i)$ 为 $(FL,(Ff_i)_i)$. 设 $\varinjlim \alpha$ 存在, 倘若 $\varinjlim F\alpha$ 也存在, 则在 $(F\alpha/\Delta)$ 中存在唯一态射

$$\varinjlim F\alpha \to F(\varinjlim \alpha),$$

它是同构当且仅当 $\left(F(\varinjlim\alpha),(F\iota_i)_i\right)$ 给出 $\varinjlim F\alpha$.

倒转箭头, $\varprojlim \alpha$ 可刻画为 (Δ/α) 的终对象. 在所论 $\varprojlim$ 存在的前提下, 在 $(\Delta/F\alpha)$ 中存在唯一态射

$$F\varprojlim \alpha \to \varprojlim F\alpha.$$

定义 1.5.2 给定 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 和函子 $\alpha: I\to\mathcal{C}$, 考虑锥范畴之间的函子 $(\alpha/\Delta)\to(F\alpha/\Delta)$.

- 称 F **保**此 $\varinjlim$, 如果 $(\alpha/\Delta)\to(F\alpha/\Delta)$ 映始对象 (假如存在) 为始对象.
- 称 F **返**此 $\varinjlim$, 如果仅 (α/Δ) 的始对象 (假如存在) 方能被映为 $(F\alpha/\Delta)$ 的始对象.
- 称 F **生**此 $\varinjlim$, 如果
  - $\varinjlim F\alpha$ 存在 $\implies$ $\varinjlim \alpha$ 存在;
  - F 保此 $\varinjlim$, 返此 $\varinjlim$.

对于 $\varprojlim$ 同样有相应的概念, 以 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 和 $\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ 代 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 即可相互过渡.

注意: 这些概念系于所论的 α, 比如 F 完全有可能保有限的 $\varinjlim$ 而不保一般的 $\varinjlim$.

给定 α, 函子生 $\varinjlim$ (或 $\varprojlim$) 相当于说 $\mathcal{D}$ 中定义此极限的锥可以唯一地提升到 $\mathcal{C}$, 并且使后者给出 $\mathcal{C}$ 中相应的极限; 唯一性来自定义中关于返 $\varinjlim$ (或 $\varprojlim$) 的条件. 这一观点将在稍后的例 1.5.6 和命题 1.5.7 中清楚呈现.

命题 1.5.3 全忠实函子返一切 $\varinjlim$ 和 $\varprojlim$.

[1] 此处 Δ 的严格涵义是对角函子 $\mathcal{C}\to\mathcal{C}^I$, 见例 1.6.3, 按拼音命名. 但也无妨按照象形原则将 Δ 想成 "锥", 见图 (1.5.1).

证明 以 $\varinjlim$ 为例. 设 F 全忠实, 则 (α/Δ) 的始对象的泛性质可在取 F 后在 $(F\alpha/\Delta)$ 中验证. $\square$

顺势引入一个方便的概念.

定义 1.5.4 满足以下条件的函子 F 称为是**保守**的: 态射 $f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ 为同构当且仅当 $Ff \in \mathrm{Mor}(\mathcal{D})$ 为同构.

注记 1.5.5 若 F 是保守函子, 则只要 $\varinjlim \alpha$ 存在, 而且 F 保此 $\varinjlim$, 则 F 也必然返此 $\varinjlim$. 缘由如下: 设 $L \in \mathrm{Ob}((\alpha/\Delta))$ 被映为 $(F\alpha/\Delta)$ 的始对象; 考虑 (α/Δ) 中的唯一态射 $\varinjlim \alpha \to L$, 由于 F 保此 $\varinjlim$, 它在 F 之下的像必为同构, 从而保守条件确保 $\varinjlim \alpha \to L$ 也是同构.

在此前提下, 关于 F 生 $\varinjlim$ 的定义中可以去除返 $\varinjlim$ 的条件.

例 1.5.6 以下来验证从群范畴 Grp 到集合范畴 Set 的忘却函子 U 生所有小 $\varprojlim$.

这是 $\varprojlim$ 在 Grp 和 Set 中的具体构造的推论, 见 [25, 例 2.7.5 和 2.8.7]. 详言之, 取小范畴 I 和函子 $\beta : I^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Grp}$. 作为集合,

$$\varprojlim U\beta = \left\{ (x_i)_i \in \prod_{i \in \mathrm{Ob}(I)} U\beta(i) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall [i \to j] \in \mathrm{Mor}(I), \\ \beta(i \to j)(x_j) = x_i \end{array} \right\},$$

投影 $p_i : \varprojlim U\beta \to U\beta(i)$ 映 $(x_j)_j$ 为 x_i. 眼下的任务是:

1. 赋予 $\varprojlim U\beta$ 群结构, 使得每个 p_i 都是群同态, 并说明这样的群结构唯一;

2. 对此群连同投影同态族 $(p_i)_i$ 验证 $\varprojlim \beta$ 的泛性质.

显然 $\varprojlim U\beta$ 是直积 $\prod_i \beta(i)$ 的子群, 记为 $\varprojlim \beta \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Grp})$, 这是使每个 p_i 皆为群同态的唯一群结构. 这就完成了第一点.

接着对锥 $\left(\varprojlim \beta, (p_i)_i\right)$ 验证泛性质. 考虑 Grp 中任意的锥 $(L, (q_i)_i)$, 其中 $q_i : L \to \beta(i)$. 泛性质给出唯一的映射 $\varphi : UL \to \varprojlim U\beta$ 使得 $p_i\varphi = q_i$ 恒成立. 事实上 φ 具体写作 $y \mapsto (q_i(y))_{i \in \mathrm{Ob}(I)}$, 故它升级为群同态 $L \to \varinjlim \beta$. 验证完毕.

基于完全类似的论证, 可以说明从紧 Hausdorff 空间范畴 CHaus 到 Set 的忘却函子也生所有小 $\varprojlim$. 相关验证属于本章习题.

次一则结果涉及形如 $\mathcal{C}^J$ 的函子范畴, 这需要两步准备.

- ◇ 设 J 为集合, J 份 $\mathcal{C}$ 的积 $\mathcal{C}^J$ 定义为: $\mathrm{Ob}\left(\mathcal{C}^J\right) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})^J$, $\mathrm{Mor}\left(\mathcal{C}^J\right) = \mathrm{Mor}(\mathcal{C})^J$. 对每个 $j \in J$ 皆有自明的投影函子 $p_j : \mathcal{C}^J \to \mathcal{C}$.

  给定范畴 I 和函子 $\alpha : I \to \mathcal{C}^J$, 若对每个 j 都存在 $\varinjlim(p_j\alpha)$, 则 $\varinjlim \alpha$ 也存在, 其构造方式是 "逐点" 或曰 "逐对象" 地取极限: $\varinjlim \alpha = \left(\varinjlim(p_j\alpha)\right)_{j \in J}$.

◇ 设 J 为范畴, 对之可考虑函子范畴 $\mathcal{C}^J$. 对每个 $j \in \mathrm{Ob}(J)$ 都有求值函子 $\mathrm{ev}_j : \mathcal{C}^J \to \mathcal{C}$, 映对象 F 为 Fj, 映态射 $\varphi = (\varphi_{j'})_{j' \in \mathrm{Ob}(J)}$ 为 φ_j. 稍后将考虑形如 $\alpha : I \to \mathcal{C}^J$ 的函子及其 $\varinjlim$; 注意到 α 可视同函子 $I \times J \to \mathcal{C}$, 取值写作 $\alpha(i, j)$.

两套符号是兼容的: 若 J 是离散范畴, 视之为集合, 则 $\mathcal{C}^J$ 无非是先前讨论的积. 对于一般的 J, 忘却函子 $\mathcal{F} : \mathcal{C}^J \to \mathcal{C}^{\mathrm{Ob}(J)}$ 映对象 F 为 $(Fj)_{j \in \mathrm{Ob}(J)}$, 映态射 φ 为 $(\varphi_j)_{j \in \mathrm{Ob}(J)}$. 因此 $\mathrm{ev}_j = p_j \mathcal{F}$.

命题 1.5.7 设 J 和 $\mathcal{C}$ 为范畴.

(i) 忘却函子 $\mathcal{F} : \mathcal{C}^J \to \mathcal{C}^{\mathrm{Ob}(J)}$ 生 $\varinjlim$ 和 $\varprojlim$.

(ii) 设 I 为范畴, 而且所有始自 I 的函子在 $\mathcal{C}$ 中皆有 $\varinjlim$ (或 $\varprojlim$), 则所有形如 $I \to \mathcal{C}^J$ 的函子在 $\mathcal{C}^J$ 中也有 $\varinjlim$ (或 $\varprojlim$).

(iii) 承上, 对每个 $j \in \mathrm{Ob}(J)$, 求值函子 $\mathrm{ev}_j : \mathcal{C}^J \to \mathcal{C}$ 保这些 I 给出的 $\varinjlim$ (或 $\varprojlim$); 换言之, $\mathcal{C}^J$ 中的极限也是 “逐点” 或逐对象地定义的.

证明 考虑 $\varinjlim$ 情形即足. 对于 (i), 选定 $\alpha : I \to \mathcal{C}^J$, 假设 $\varinjlim \mathcal{F}\alpha$ 存在, 由锥

$$\Big((X(j))_{j \in \mathrm{Ob}(J)},\ \big(\iota_i = (\iota_{i,j})_{j \in \mathrm{Ob}(J)}\big)_{i \in \mathrm{Ob}(I)} \Big)$$

给出, 其中 $\iota_{i,j} : \alpha(i, j) \to X(j)$. 我们希望将它提升为 $\mathcal{C}^J$ 中的锥, 使之给出 $\varinjlim \alpha$.

首先观察对所有 j 必有 $X(j) = \varinjlim \alpha(\cdot, j)$. 对于所有态射 $j \to j'$, 极限的函子性 (见 [25, 引理 2.7.4]) 遂给出唯一的态射 $X(j \to j') : X(j) \to X(j')$ 使下图交换

$$\begin{tikzcd} \alpha(i,j) \arrow[r] \arrow[d, "\iota_{i,j}"'] & \alpha(i,j') \arrow[d, "\iota_{i,j'}"] \\ X(j) \arrow[r, "X(j \to j')"'] & X(j') \end{tikzcd} \qquad i \in \mathrm{Ob}(I).$$

依此升级 $j \mapsto X(j)$ 为函子 $X : J \to \mathcal{C}$, 升级 $\iota_i : \alpha(i, \cdot) \to X$ 为 $\mathcal{C}^J$ 的态射. 不难验证 $(X, (\iota_i)_i) \in \mathrm{Ob}(\alpha/\Delta)$, 以下验证它是始对象. 由于函子 $\mathcal{F}$ 保守, 返 $\varinjlim$ 的条件不用再验证.

给定 $(L, (f_i)_i) \in \mathrm{Ob}(\alpha/\Delta)$, 由 $\varinjlim \mathcal{F}\alpha$ 的泛性质确定唯一的态射 $\varphi = (\varphi_j)_j : \mathcal{F}X \to \mathcal{F}L$, 使下图三角部分对所有 (i, j) 交换:

$$\begin{tikzcd} & X(j) \arrow[r, "X(j \to j')"] \arrow[d, "\varphi_j"] & X(j') \arrow[d, "\varphi_{j'}"] \\ \alpha(i,j) \arrow[ur, "\iota_{i,j}"] \arrow[r, "f_{i,j}"'] & L(j) \arrow[r, "L(j \to j')"'] & L(j') \end{tikzcd}$$

若能说明方块对所有 $j \to j'$ 皆交换, 则 φ 升级为 $L \to X$. 外框已知交换, 故

$$\varphi_{j'} X(j \to j')\iota_{i,j} = L(j \to j')f_{i,j} = L(j \to j')\varphi_j \iota_{i,j}$$

对所有 i 成立; 始自 $X(j)$ 的态射由它和所有 $\iota_{i,j}$ 的合成确定, 故方块交换.

至于 (ii), 考虑函子 $\alpha : I \to \mathcal{C}^J$. 根据此前讨论, $\mathcal{F}\alpha : I \to \mathcal{C}^{\mathrm{Ob}(J)}$ 有 $\varinjlim$, 它是逐对象地定义的. 由 (i) 可在 $\mathcal{C}$ 中生出 $\varinjlim \alpha$, 而关于 ev_j 保这些 $\varinjlim$ 的断言 (iii) 则是构造的直接结论. □

1.6 滤过归纳极限

数学分析的一则常识是数列的极限可以由任何子数列来计算, 这点在范畴论中体现为共尾的概念.

定义 1.6.1 设 I 为任意范畴, 若 $\mathrm{Ob}(I) \neq \varnothing$, 而且对任何 $i, i' \in \mathrm{Ob}(I)$, 总存在 $n \geq 1$ 和态射

$$i = i_0 \leftarrow i_1 \to i_2 \leftarrow i_3 \to i_4 \leftarrow \cdots \to i_{2n} = i',$$

则称 I 是连通的.

介绍一则辅助概念, 后续几节将反复运用.

定义 1.6.2 (逗号范畴, 见 [25, 定义 2.4.7]) 给定范畴 I, J 和函子 $H : J \to I$. 设 $i \in \mathrm{Ob}(I)$.

- ◇ 按定义, 逗号范畴 (i/H) (或 (H/i)) 的对象是资料 $(j, i \to Hj)$ (或 $(j, Hj \to i)$), 其中 $j \in \mathrm{Ob}(J)$ 而 $i \to Hj$ (或 $Hj \to i$) 是 I 的态射; 资料之间的态射是 J 中使下图交换的态射 $f : j \to j'$:

$$\begin{tikzcd} & i \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ Hj \arrow[rr, "Hf"'] & & Hj' \end{tikzcd} \quad \text{或} \quad \begin{tikzcd} & i & \\ Hj \arrow[ur] \arrow[rr, "Hf"'] & & Hj' \arrow[ul] \end{tikzcd}.$$

  态射合成与恒等态射的定义是自明的.

- ◇ 上述范畴分别带有投影函子 $\Pi_{i/} : (i/H) \to J$ 和 $\Pi_{/i} : (H/i) \to J$, 映对象 $(j, i \to Hj)$ (或 $(j, Hj \to i)$) 为 j, 映态射 f 为 f.

- ◇ 任何 I 中的态射 $i \to i'$ 皆诱导自明的函子 $(i'/H) \to (i/H)$ 和 $(H/i) \to (H/i')$, 使下图交换:

$$\begin{tikzcd} (i'/H) \arrow[rr] \arrow[dr, "\Pi_{i'/}"'] & & (i/H) \arrow[dl, "\Pi_{i/}"] \\ & J & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} (H/i) \arrow[rr] \arrow[dr, "\Pi_{/i}"'] & & (H/i') \arrow[dl, "\Pi_{/i'}"] \\ & J & \end{tikzcd}.$$

例 1.6.3 考虑函子 $\alpha : I \to \mathcal{C}$, 视同 $\mathcal{C}^I$ 的对象, 另外考虑对角函子 $\Delta : I \to \mathcal{C}$, 映任意对象 i 为对应的常值函子. 定义 1.6.2 的 (α/Δ) 无非是约定 1.5.1 介绍的 "锥" 范畴, 而函子 $\Pi_{\alpha/}$ 萃取锥的顶点.

定义 1.6.4 对于函子 $H : J \to I$, 若 (i/H) 对每个 $i \in \mathrm{Ob}(I)$ 皆连通, 则称 H **共尾**; 若 H 是子范畴的嵌入态射, 则称子范畴 J 共尾.

容易验证若 $I \to J$ 和 $J \to K$ 皆共尾, 则合成函子 $I \to K$ 亦然.

以下结果说明极限可以在共尾的范畴中计算. 回忆到 H 诱导 $H^{\mathrm{op}} : J^{\mathrm{op}} \to I^{\mathrm{op}}$.

命题 1.6.5 若 $H : J \to I$ 共尾, 则:

- 当 $\alpha : I \to \mathcal{C}$ 给定, $\varinjlim \alpha$ 存在当且仅当 $\varinjlim \alpha H$ 存在, 此时有典范同构 $\varinjlim \alpha H \simeq \varinjlim \alpha$;
- 对偶地, 当 $\beta : I^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ 给定, $\varprojlim \beta$ 存在当且仅当 $\varprojlim \beta H^{\mathrm{op}}$ 存在, 此时有典范同构 $\varprojlim \beta H^{\mathrm{op}} \simeq \varprojlim \beta$.

证明 仅处理 $\varinjlim$. 依照 §1.5 的语言, 证明函子 $(\alpha/\Delta) \to (\alpha H/\Delta)$ 为等价即可; 它映以 α 为底的锥 $(L, (f_i)_i)$ 为以 αH 为底的锥 $(L, (f_{Hj})_j)$.

首先证明它本质满. 考虑 $L \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 和满足相容性条件 $g_{j'} \circ \alpha H(j \to j') = g_j$ 的一族态射 $g_j : \alpha H(j) \to L$, 其中 $j \in \mathrm{Ob}(J)$. 对任意 $i \in \mathrm{Ob}(I)$, 因为 (i/H) 非空故可取 j 和 $i \to H(j)$. 定义 $f_i := g_j \circ [\alpha(i) \to \alpha H(j)]$. 这和 $i \to H(j)$ 的选取无关: 诚然, 若有 (i/H) 中的态射

$$\begin{tikzcd} & i \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ H(j) & H(j'') \arrow[l, "H(j'' \to j)"] \arrow[r, "H(j'' \to j')"'] & H(j') \end{tikzcd}$$

则按构造易见

$$g_j \circ [\alpha(i) \to \alpha H(j)] = g_{j''} \circ [\alpha(i) \to \alpha H(j'')] = g_{j'} \circ [\alpha(i) \to \alpha H(j')].$$

由于 (i/H) 连通, 这足以说明 f_i 是良定义的. 这也蕴涵 $(f_i)_i$ 满足相容性条件, 因为对于任意 $i \to i'$ 和 $i' \to H(j')$, 总可以假设 f_i 是由资料 $j := j'$ 和 $i \to i' \to H(j)$ 确定的. 综上 $(L, (f_i)_i) \in \mathrm{Ob}((\alpha/\Delta))$ 映至 $(L, (g_j)_j)$.

接着说明它全忠实. 给定 (α/Δ) 的态射 $(L, (f_i)_i) \to (L', (f'_i)_i)$ 相当于给定 $\mathcal{C}$ 的态射 $\theta : L \to L'$, 使得 $\theta f_i = f'_i$ 恒成立, 而这点只须对足够 "深" 的 i 来验证; 对每个 i 取 $j \in \mathrm{Ob}(J)$ 以及 $i \to H(j)$, 则条件可化约为 $\theta f_{H(j)} = f'_{H(j)}$, 亦即 θ 是 $(\alpha H/\Delta)$ 的态射. □

定义 1.6.6 根据 [25, 定义 2.7.6], 具备以下条件的范畴 I 称为是**滤过**的.

- 对所有 $i, j \in \mathrm{Ob}(I)$, 存在 $k \in \mathrm{Ob}(I)$ 和态射 $i \to k \leftarrow j$.

◇ 对 I 中任一对态射 $f, g : i \to j$, 存在态射 $k \in \mathrm{Ob}(I)$ 和态射 $h : j \to k$, 使得 $hf = hg$.

若 I 是滤过范畴, $\alpha : I \to \mathcal{C}$ 是函子, 则对应的 $\varinjlim \alpha$ 也称为是滤过的.

例 1.6.7 一类常见的滤过范畴来自滤过偏序集. 任何偏序集 $(P, \leq)$ 都给出相应的范畴 $\mathcal{P}$, 使得 $x \leq y \iff \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(x, y) \neq \varnothing$. 如果 $\mathcal{P}$ 是滤过范畴, 则称 $(P, \leq)$ 为**滤过偏序集**. 偏序集滤过当且仅当任两个元素 i, j 都有共同上界 k. 全序集显然滤过.

命题 1.6.8 设 I 是滤过范畴, 则子范畴 J 共尾当且仅当对每个 $i \in \mathrm{Ob}(I)$ 皆存在 $j \in \mathrm{Ob}(J)$ 和态射 $i \to j$.

证明 "仅当" 方向显然. 对于 "当" 的方向, 给定 $j \leftarrow i \to j'$, 其中 $j, j' \in \mathrm{Ob}(J)$, 滤过性质确保存在交换图表

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & j \arrow[r] & k & j' \arrow[l] \arrow[dr, equal] & \\ j \arrow[ur, equal] & & i \arrow[ll] \arrow[u] \arrow[rr] & & j' \end{tikzcd}$$

使得 $k \in \mathrm{Ob}(J)$. 这说明 J 共尾. □

例 1.6.9 命 $\mathrm{OFin}_I := \{$子范畴 $J \subset I : \mathrm{Ob}(J)$ 有限$\}$, 它对 $\subset$ 构成滤过偏序集: 对任意 $J, K \in \mathrm{OFin}_I$, 将对象集取并, 再添入两者的态射的所有可能的合成, 便是 J 和 K 的共同上界.

这一构造有何用处? 考虑任意函子 $\alpha : I \to \mathcal{C}$ (或 $\beta : I^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$), 它限制到子范畴 J 上, 给出 $\alpha|_J$ (或 $\beta|_{J^{\mathrm{op}}}$). 如果 $J \subset K$, 则有自然的态射 $\varinjlim \alpha|_J \to \varinjlim \alpha|_K$ (或 $\varprojlim \beta|_{K^{\mathrm{op}}} \to \varprojlim \beta|_{J^{\mathrm{op}}}$), 前提是所论极限存在. 以下结果解释了用有限极限 "滤过地" 逼近任意极限的一种方法.

命题 1.6.10 (以有限极限逼近一般极限) 在以上情境中, 有典范同构

$$\varinjlim_{\substack{J \in \mathrm{OFin}_I \\ \subset}} \varinjlim \alpha|_J \xrightarrow{\sim} \varinjlim \alpha$$

(或 $\varprojlim \beta \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{J \in \underset{\subset}{\mathrm{OFin}_I}} \varprojlim \beta|_{J^{\mathrm{op}}}$), 前提是左式 (或右式) 的二重极限存在.

证明 以 $\varinjlim$ 情形为例, 泛性质给出集合的典范双射

$$\mathrm{Hom}\left(\varinjlim_J \varinjlim \alpha|_J, S\right) \simeq \varprojlim_J \mathrm{Hom}\left(\varinjlim \alpha|_J, S\right) \simeq \varprojlim_J \varprojlim \mathrm{Hom}(\alpha|_J, S),$$

其中 $S \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 任取, 右式是集合的二重 $\varprojlim$. 问题化为对一族集合 $(X_i)_{i \in \mathrm{Ob}(I)}$ 连同

满足相容性的态射族 $(f_{i\to j}: X_j \to X_i)_{[i\to j]\in\mathrm{Mor}(I)}$ 验证双射

$$\begin{aligned}\varprojlim_{i\in\mathrm{Ob}(I)} X_i &\xrightarrow{1:1} \varprojlim_{J\in\mathrm{OFin}_I}\ \varprojlim_{j\in\mathrm{Ob}(J)} X_j\\ (x_i)_i &\longmapsto \big((x_j)_{j\in\mathrm{Ob}(J)}\big)_{J\in\mathrm{OFin}_I}.\end{aligned}$$

对于所有子范畴 J, 集合的 $\varprojlim$ 其具体构造是

$$\varprojlim_{j\in\mathrm{Ob}(J)} X_j = \left\{(x_j)_j \in \prod_{j\in J} X_j : \forall [i\to j]\in\mathrm{Mor}(J),\ f_{i\to j}(x_j)=x_i\right\},$$

双射因而是明显的: $\varprojlim_i X_i$ 的每个坐标 x_i 和每个相容性条件 $f_{i\to j}(x_j)=x_i$ 都能被某个 $J\in\mathrm{OFin}_I$ 捕捉. □

回忆到范畴 Set 具有所有的小 $\varinjlim$ 和 $\varprojlim$. 滤过小 $\varinjlim$ 具有特别好的描述.

命题 1.6.11 设 I 为滤过小范畴, $\alpha: I\to \mathsf{Set}$ 为函子. 在集合 $\bigsqcup_{i\in\mathrm{Ob}(I)}\alpha(i)$ 上定义以下二元关系: 对于 $x\in\alpha(i)$ 和 $y\in\alpha(j)$, 关系 $x\sim y$ 意谓存在 I 中的态射 $i\to k\leftarrow j$, 使得 $\alpha(i\to k)(x)=\alpha(j\to k)(y)$. 那么 $\sim$ 是等价关系, 而且

$$\varinjlim \alpha = \left(\bigsqcup_{i\in\mathrm{Ob}(I)}\alpha(i)\right)\Big/\sim.$$

证明 见诸 [25, 定义 2.7.6] 之下的讨论. □

今后我们上述之 $\varinjlim\alpha$ 的元素表作 $[x_{i_0}]$, 其中 $i_0\in\mathrm{Ob}(I)$ 而 $[x_{i_0}]$ 为含 $x_{i_0}\in\alpha(i_0)$ 的等价类. 另一方面, 对于一般的小范畴 J 和函子 $\beta: J^{\mathrm{op}}\to\mathsf{Set}$, 我们将 $\varprojlim\beta$ 的元素表作 $(y_j)_{j\in\mathrm{Ob}(J)}$ 之形, 其中 $y_j\in\beta(j)$ 满足相容性条件 $\beta(j'\to j)(y_j)=y_{j'}$.

接着考虑形如 $\alpha: I\times J^{\mathrm{op}}\to\mathsf{Set}$ 的函子, 其中 I,J 是小范畴; 对变元 I 和 J 可以分别取 $\varinjlim$ 和 $\varprojlim$. 对于任意 $(i_0,j_0)\in\mathrm{Ob}(I\times J)$, 自然映射的合成

$$\varprojlim_j \alpha(i_0,j)\to\alpha(i_0,j_0)\to\varinjlim_i\alpha(i,j_0);$$

对 i_0, j_0 皆有函子性. 变动 j_0 给出典范映射 $\varprojlim_j\alpha(i_0,j)\to\varprojlim_j\varinjlim_i\alpha(i,j)$, 继而变动 i_0 以得到典范映射

$$e: \varinjlim_i\varprojlim_j\alpha(i,j)\to\varprojlim_j\varinjlim_i\alpha(i,j). \tag{1.6.1}$$

如采取代表元的记法, 则 e 映 $[(x_{i_0,j})_j]$ 为 $([x_{i_0,j}])_j$.

若 $\mathrm{Mor}(J)$ 是有限集, 则称范畴 J 是有限的. 次一结果将用于 §1.10.

命题 1.6.12 设 I 为滤过小范畴, J 为有限[2]范畴, $\alpha : I \times J^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ 为函子. 此时 (1.6.1) 的映射 e 是双射.

证明 首先说明 e 满. 给定 $(b_j)_{j\in \mathrm{Ob}(J)} \in \varprojlim_j \varinjlim_i \alpha(i,j)$, 将每个 b_j 表为 $[x_{i_j,j}]$. 由于 I 滤过而 J 有限, 能取 i_j 为常值 $i \in \mathrm{Ob}(I)$. 对 J 中的每个态射 $j \to j'$, 我们有

$$[\alpha(i, j \to j')(x_{i,j'})] = [x_{i,j}] .$$

再次应用 I 滤过和 J 有限的性质, 可以取足够 "深" 的 $i \to i_1$ 并以 i_1 代 i, 以确保 $\alpha(i, j \to j')(x_{i,j'}) = x_{i,j}$ 对所有 $[j \to j'] \in \mathrm{Mor}(J)$ 成立. 故 $e\left([(x_{i,j})_j]\right) = (b_j)_j$.

其次说明 e 单. 设 $e(x) = e(y)$. 因为 I 滤过, 可取 $i \in \mathrm{Ob}(I)$ 使得 x 有代表元 $(x_{i,j})_j$ 而 y 有代表元 $(y_{i,j})_j$, 故对所有 $j \in \mathrm{Ob}(J)$ 皆有 $[x_{i,j}] = [y_{i,j}]$. 因为 I 滤过而 J 有限, 按先前方法调整 i 可确保 $x_{i,j} = y_{i,j}$ 对所有 j 皆成立, 故 $x = y$. □

1.7 米田嵌入的稠密性

回顾和米田嵌入相关的理论框架. 对任意范畴 $\mathcal{C}$, 定义函子范畴

$$\mathcal{C}^\wedge := \mathsf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}, \quad \mathcal{C}^\vee := \left(\mathsf{Set}^{\mathrm{op}}\right)^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} = \left(\mathsf{Set}^{\mathcal{C}}\right)^{\mathrm{op}} .$$

两者相对偶: $(\mathcal{C}^\vee)^{\mathrm{op}} = (\mathcal{C}^{\mathrm{op}})^\wedge$. 相对于事先选定的 Grothendieck 宇宙, 除非 $\mathcal{C}$ 是小范畴, 否则 $\mathcal{C}^\wedge$ 和 $\mathcal{C}^\vee$ 一般而言是大范畴.

米田嵌入意指以下函子

$$\begin{aligned} h_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{C}^\wedge \\ S &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, S), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} k_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{C}^\vee \\ S &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S, \cdot). \end{aligned}$$

以下复述 [25, 定理 2.5.1].

定理 1.7.1 (米田信夫) 对任意 $S \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 和 $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^\wedge)$, $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^\vee)$, 典范映射

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(h_{\mathcal{C}}(S), A) &\longrightarrow A(S) \\ \left[\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, S) \xrightarrow{\phi} A(\cdot)\right] &\longmapsto \phi_S(\mathrm{id}_S) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\vee}(B, k_{\mathcal{C}}(S)) \\ &\quad \parallel \\ \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}^{\mathcal{C}}}(k_{\mathcal{C}}(S), B) &\longrightarrow B(S) \\ \left[\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S, \cdot) \xrightarrow{\psi} B(\cdot)\right] &\longmapsto \psi_S(\mathrm{id}_S) \end{aligned}$$

皆是双射. 作为推论, $h_{\mathcal{C}}$ 和 $k_{\mathcal{C}}$ 都是全忠实函子.

定义 1.7.2 在同构意义下来自 $h_{\mathcal{C}}$ (或 $k_{\mathcal{C}}$) 的函子 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ (或 $\mathcal{C} \to \mathsf{Set}$) 称为**可表函子**.

[2] 再次重申, 对象和态射的个数都要求有限.

尽管 $\mathcal{C}^\wedge$ (或 $\mathcal{C}^\vee$) 比 $\mathcal{C}$ 大得多, 但其对象总能典范地写成可表函子的 $\varinjlim$ (或 $\varprojlim$). 在陈述这一稠密性定理之前, 需要若干定义.

对每个 $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^\wedge)$, 以定义 1.6.2 的方式定义范畴 $(h_\mathcal{C}/A)$, 其对象写作资料 $\underline{S} := \left(S, h_\mathcal{C}(S) \xrightarrow{\phi_S} A\right)$. 依约定 1.5.1 的语言, 当 $\underline{S}$ 变动, 态射族 $(\phi_{\underline{S}})_{\underline{S}}$ 给出以 $(h_\mathcal{C}/S) \to \mathcal{C}^\wedge$ 为底, 以 A 为顶点的锥.

对偶地, 对 $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^\vee)$ 则有范畴 $(B/k_\mathcal{C})$, 其对象为资料 $\overline{S} = (S, B \xrightarrow{\psi_{\overline{S}}} k_\mathcal{C}(S))$.

定理 1.7.3 (稠密性) 对于一切 $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^\wedge)$ 和 $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^\vee)$, 上述态射族 $\phi_{\underline{S}}, \psi_{\overline{S}}$ 分别在 $\mathcal{C}^\wedge$ 和 $\mathcal{C}^\vee$ 中给出典范同构

$$\varinjlim_{\underline{S}} h_\mathcal{C}(S) \xrightarrow{\sim} A, \quad B \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{\overline{S}} k_\mathcal{C}(S).$$

证明 只论第一式. 对于任意 $A' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^\wedge)$, 考虑映射

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(A, A') &\longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{相容的态射族 } a'_{\underline{S}} : h_\mathcal{C}(S) \to A', \\ \text{其中 } \underline{S} = (S, \phi_{\underline{S}}) \in \mathrm{Ob}((h_\mathcal{C}/A)) \end{array} \right\} \\ \varphi &\longmapsto \left(a'_{\underline{S}} := \varphi\phi_{\underline{S}}\right)_{\underline{S}}. \end{aligned} \tag{1.7.1}$$

定义反向的映射如下. 给定资料 $(a'_{\underline{S}})_{\underline{S}}$, 对任意 $S \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 和 $a_S \in A(S)$, 按定理 1.7.1 取对应的 $\phi : h_\mathcal{C}(S) \to A$, 由此可确定 $\underline{S} := (S, \phi) \in \mathrm{Ob}((h_\mathcal{C}/A))$. 于是 $a_S \mapsto a'_{\underline{S}}$ 给出映射 $A(S) \to A'(S)$. 兹断言:

- 当 S 变动, 诸映射 $A(S) \to A'(S)$ 给出 $\mathcal{C}^\wedge$ 的态射 $\varphi : A \to A'$.
- 映射 $(a'_{\underline{S}})_{\underline{S}} \mapsto \varphi$ 与 (1.7.1) 的映射互逆.

一如许多关于米田嵌入定理的结果, 细节验证近于同义反复, 在此略过.

于是 (1.7.1) 是双射, 而对于 $A' = A$ 的特例, 它映 id_A 为 $(a'_{\underline{S}} = \phi_{\underline{S}})_{\underline{S}}$. 这就验证了 A 和诸 $\phi_{\underline{S}} : h_\mathcal{C}(S) \to A$ 具备 $\varinjlim$ 的泛性质. □

读者也可以参照 [16, pp.76–77] 的处理方式.

注记 1.7.4 关于 B 的同构也可以在 $\mathsf{Set}^\mathcal{C}$ 中改述为 $\varinjlim_{\overline{S}} \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(S, \cdot) \xrightarrow{\sim} B$, 其中 $\overline{S}$ 取遍资料 $(S, \psi'_{\overline{S}})$, 要求 $S \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 而 $\psi'_{\overline{S}} : \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(S, \cdot) \to B(\cdot)$ 是 $\mathsf{Set}^\mathcal{C}$ 的态射.

1.8 Kan 延拓

本节从函子的延拓问题出发. 考虑范畴 $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ 和函子 K, F 如下图:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[d, "K"'] \arrow[dr, bend left, "F"] & \\ \mathcal{D} \arrow[r, dashed, "\exists ?\ L"'] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

按照范畴论的基本精神, 我们希望找到虚线所示的函子 L 连同同构 $F \simeq LK$. 此问题一般无解; 例如可能存在 $f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ 使得 Kf 为同构, 而 Ff 非同构. 退而求其次, 我们至少可以问: 是否存在一个最佳逼近? 答案由泛性质刻画, 分为左右两种版本.

定义 1.8.1 (D. Kan) 考虑范畴 $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, 函子 $K : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 和 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$.

◇ 函子 F 沿 K 的**左 Kan 延拓**意谓如下资料 $(\mathrm{Lan}_K F, \eta)$, 其中

- $\mathrm{Lan}_K F : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ 是函子,
- $\eta : F \to (\mathrm{Lan}_K F)K$ 是函子之间的态射,

使得下述泛性质成立: 对任何资料 $L : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ 和 $\xi : F \to LK$, 存在唯一的态射 $\chi : \mathrm{Lan}_K F \to L$ 使得 $\xi = (\chi K)\eta$ (态射的纵/横合成), 或以 2-胞腔图解为

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[d, "K"'] \arrow[dr, bend left, "F"] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow \xi"] & \\ \mathcal{D} \arrow[r, "L"'] & \mathcal{E} \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[d, "K"'] \arrow[dr, bend left, "F"] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow \eta"] & \\ \mathcal{D} \arrow[r, "\mathrm{Lan}_K F"'] \arrow[r, bend right=70, "L"'] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\Downarrow \chi"] & \mathcal{E} \end{tikzcd} .$$

◇ 函子 F 沿 K 的**右 Kan 延拓**意谓如下资料 $(\mathrm{Ran}_K F, \varepsilon)$, 其中

- $\mathrm{Ran}_K F : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ 是函子,
- $\varepsilon : (\mathrm{Ran}_K F)K \to F$ 是函子之间的态射,

使得下述泛性质成立: 对任何资料 $R : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ 和 $\delta : RK \to F$, 存在唯一的 $\theta : R \to \mathrm{Ran}_K F$ 使得 $\delta = \varepsilon(\theta K)$, 或用 2-胞腔图解为

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[d, "K"'] \arrow[dr, bend left, "F"] \arrow[dr, phantom, "\Nearrow \delta"] & \\ \mathcal{D} \arrow[r, "R"'] & \mathcal{E} \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[d, "K"'] \arrow[dr, bend left, "F"] \arrow[dr, phantom, "\Nearrow \varepsilon"] & \\ \mathcal{D} \arrow[r, "\mathrm{Ran}_K F"'] \arrow[r, bend right=70, "R"'] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\theta \Uparrow"] & \mathcal{E} \end{tikzcd} .$$

如在定义中将 $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ 换成 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{E}^{\mathrm{op}}$, 则函子的走向不变, 但态射倒转. 因此左 Kan 延拓和右 Kan 延拓是相互对偶的概念.

如引进函子范畴 $\mathcal{E}^{\mathcal{C}}$, $\mathcal{E}^{\mathcal{D}}$, 则左, 右 Kan 延拓的泛性质分别断言双射

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{D}}}(\mathrm{Lan}_K F, L) &\xrightarrow{1:1} \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{C}}}(F, LK) \\ \chi &\longmapsto (\chi K)\eta, \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{D}}}(R, \mathrm{Ran}_K F) &\xrightarrow{1:1} \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{C}}}(RK, F) \\ \theta &\longmapsto \varepsilon(\theta K); \end{aligned} \tag{1.8.1}$$

它们的逆分别是定义 1.8.1 中的 $(L, \xi) \mapsto \chi$ 和 $(R, \delta) \mapsto \theta$.

命题 1.8.2 给定范畴 $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ 和函子 $K : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$. 引进函子范畴间的拉回函子 $K^* : \mathcal{E}^{\mathcal{D}} \to \mathcal{E}^{\mathcal{C}}$.

(i) 精确到 $\mathcal{E}^{\mathcal{D}}$ 中的唯一同构, 左 Kan 延拓 $(\mathrm{Lan}_K F, \eta)$ 若存在则唯一; 右 Kan 延拓亦同.

(ii) 若沿 K 的左 Kan 延拓 (或右 Kan 延拓) 对所有 F 皆存在, 则它们可以升级为 K^* 的左伴随函子 $\mathrm{Lan}_K : \mathcal{E}^{\mathcal{C}} \to \mathcal{E}^{\mathcal{D}}$ (或右伴随函子 $\mathrm{Ran}_K : \mathcal{E}^{\mathcal{C}} \to \mathcal{E}^{\mathcal{D}}$); 由定义 1.8.1 中的 η (或 ε) 构成的态射族正是伴随对中的单位 (或余单位) 态射.

证明 对于 (i), 按照寻常的套路应用定义 1.8.1 所述的泛性质即可.

对于 (ii). 注意到 $RK = K^*(R)$, $LK = K^*(L)$, 所求的伴随关系正是 (1.8.1) 的内容; 同理可得关于单位或余单位态射的断言, 见 [25, 命题 2.6.5]. □

按惯例, 我们经常省略 Kan 延拓中的资料 η 或 ε. 若沿 K 的左 Kan 延拓 (或右 Kan 延拓) 对所有 F 都存在, 由 (iv) 得到的函子 Lan_K (或 Ran_K) 也有相应的唯一性, 这来自于伴随对的唯一性 [25, 命题 2.6.10].

注记 1.8.3 由于 Kan 延拓的定义仅涉及 2-胞腔的合成, 它可以扩及一般的 2-范畴, 而此处相当于 2-范畴 Cat 的特例; 详见 [25, §3.5].

对于任何范畴 $\mathcal{C}$, 记唯一的函子 $\mathcal{C} \to \mathbf{1}$ 为 !; 指定函子 $\mathbf{1} \to \mathcal{C}$ 相当于指定 $\mathcal{C}$ 的对象. 对任何范畴 $\mathcal{E}$ 及其对象 X, 记 $\Delta(X) : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ 为合成 $\mathcal{C} \xrightarrow{!} \mathbf{1} \xrightarrow{\text{常值 } X} \mathcal{E}$; 它是映一切对象为 X, 映一切态射为 id_X 的常值函子.

例 1.8.4 (极限作为 Kan 延拓) 设 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ 为函子. 考虑图表

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[d, "!"'] \arrow[dr, bend left, "F"] & \\ \mathbf{1} & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

那么 $\mathrm{Lan}_! F$ (或 $\mathrm{Ran}_! F$) 存在当且仅当 $\varinjlim F$ (或 $\varprojlim F$) 在 $\mathcal{E}$ 中存在, 而且此时的 Kan 延拓即此极限.

以 $(\mathrm{Lan}_! F, \eta)$ 为例, $\mathrm{Lan}_! F : \mathbf{1} \to \mathcal{E}$ 可视同 $\mathcal{E}$ 的对象, 而 η 是 $\mathcal{E}^{\mathcal{C}}$ 中的态射 $F \to \Delta(\mathrm{Lan}_! F)$. 泛性质相当于说资料 $(\mathrm{Lan}_! F, \eta)$ 给出范畴 (F/Δ) 的始对象; 这正是 §1.5 对 $\varinjlim F$ 的表述.

例 1.8.5 (伴随对作为 Kan 延拓) 考虑一对函子 $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$. 如果 (F, G) 扩充为分别以 $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to GF$ 和 $\varepsilon : FG \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ 为单位和余单位的伴随对, 则 (G, η) 给出 $\mathrm{Lan}_F(\mathrm{id}_{\mathcal{C}})$ 而 (F, ε) 给出 $\mathrm{Ran}_G(\mathrm{id}_{\mathcal{D}})$.

为了解释这点, 我们首先说明拉回函子 $G^* : \mathcal{C}^{\mathcal{C}} \rightleftarrows \mathcal{C}^{\mathcal{D}} : F^*$ 也自然地扩充为伴随对. 观察到 η 诱导 $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}^* = \mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\mathcal{C}}} \to F^* G^* = (GF)^*$, 类似地 ε 诱导 $G^* F^* \to \mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\mathcal{D}}}$; 两者仍记为 η 和 ε. 必须对 $(G^*, F^*, \eta, \varepsilon)$ 验证刻画伴随对的三角等式. 概略地说, 这是对 $(F, G, \eta, \varepsilon)$ 的三角等式在函子范畴中取拉回 $(-)^*$ 的形式产物, 细节谨付读者思索.

此伴随关系给出典范双射 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathcal{D}}}(\underbrace{G^* \mathrm{id}_{\mathcal{C}}}_{=G}, L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathcal{C}}}(\mathrm{id}_{\mathcal{C}}, \underbrace{F^* L}_{=LF})$, 其中的函子 $L : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 任取, 而且取 $L = G$ 时 id_G 被映为 η. 将 $\mathrm{Lan}_F(\mathrm{id}_{\mathcal{C}})$ 的泛性质表述为 (1.8.1) 的双射, 立见 (G, η) 给出 $\mathrm{Lan}_F(\mathrm{id}_{\mathcal{C}})$. 关于 $\mathrm{Ran}_F(\mathrm{id}_{\mathcal{C}})$ 的论证完全类似.

实践表明 Kan 延拓的概念在一些场景下还需要进一步的强化[3], 在之后关于导出函子的研究中尤其如此.

定义 1.8.6 *考虑范畴 $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$, 函子 $K : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 和 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$.*

◇ 设右 Kan 延拓 $(\mathrm{Ran}_K F, \varepsilon)$ 存在. 我们称函子 $M : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ 保 $\mathrm{Ran}_K F$, 如果 2-胞腔的合成

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[d, "K"'] \arrow[dr, bend left, "F"] & & \\ \mathcal{D} \arrow[r, "\mathrm{Ran}_K F"'] \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "\overset{\varepsilon}{\Rightarrow}"] & \mathcal{E} \arrow[r, "M"'] & \mathcal{F} \end{tikzcd} =: \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "MF"] \arrow[dr, "K"'] & \Uparrow M\varepsilon & \mathcal{F} \\ & \mathcal{D} \arrow[ur, "M\,\mathrm{Ran}_K F"'] & \end{tikzcd}$$

给出 MF 沿 K 的右 Kan 延拓.

◇ 设左 Kan 延拓 $(\mathrm{Lan}_K F, \eta)$ 存在. 我们称函子 $M : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ 保 $\mathrm{Lan}_K F$, 如果 2-胞腔的合成

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[d, "K"'] \arrow[dr, bend left, "F"] & & \\ \mathcal{D} \arrow[r, "\mathrm{Lan}_K F"'] \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "\overset{\eta}{\Leftarrow}"] & \mathcal{E} \arrow[r, "M"'] & \mathcal{F} \end{tikzcd} =: \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "MF"] \arrow[dr, "K"'] & \Downarrow M\eta & \mathcal{F} \\ & \mathcal{D} \arrow[ur, "M\,\mathrm{Lan}_K F"'] & \end{tikzcd}$$

给出 MF 沿 K 的左 Kan 延拓.

◇ 如果左 Kan 延拓 $(\mathrm{Lan}_K F, \eta)$ (或右 Kan 延拓 $(\mathrm{Ran}_K F, \varepsilon)$) 被所有从 $\mathcal{E}$ 出发的函子保持, 则称此 Kan 延拓为**绝对的**.

[3]一个常见的强化版本称为逐点 Kan 延拓, 按下不表.

下一步是确立伴随对与绝对 Kan 延拓的关系. 这一结果对导出函子的进阶研究大有裨益, 学习其证明也有益于熟悉 Kan 延拓和 2-胞腔的操作. 请考虑一对伴随函子 $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{C}' : G$, 由单位 $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to GF$ 和余单位态射 $\varepsilon : FG \to \mathrm{id}_{\mathcal{C}'}$ 确定. 另外给定函子

$$K : \mathcal{C} \to \mathcal{D}, \quad K' : \mathcal{C}' \to \mathcal{D}'.$$

以下将系统地以 2-胞腔图表来标记函子, 其间的态射及其合成, 以简化论证. 在 2-胞腔的操作中, 我们将不加说明地交换态射的纵合成与横合成; 这是合规的, 见 [25, 引理 2.2.7].

定理 1.8.7 (G. Maltsiniotis [17]) 设 $K'F$ 有绝对右 Kan 延拓 $\mathrm{L}F$, 而 KG 有绝对左 Kan 延拓 $\mathrm{R}G$, 相关资料如下图:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "K"'] & \mathcal{C}' \arrow[d, "K'"] \\ \mathcal{D} \arrow[r, "\mathrm{L}F"'] \arrow[ur, phantom, "\Nearrow \alpha"] & \mathcal{D}' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{C}' \arrow[r, "G"] \arrow[d, "K'"'] & \mathcal{C} \arrow[d, "K"] \\ \mathcal{D}' \arrow[r, "\mathrm{R}G"'] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow \beta"] & \mathcal{D}. \end{tikzcd}$$

此时存在唯一的 $\underline{\eta} : \mathrm{id}_{\mathcal{D}} \to \mathrm{R}G \circ \mathrm{L}F$ 和 $\underline{\varepsilon} : \mathrm{R}G \circ \mathrm{L}F \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}'}$, 使得关于 2-胞腔合成的下述等式成立:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r] \arrow[rr, bend left=60, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}}"] & \mathcal{C}' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[u, phantom, "\Downarrow \eta"] & \mathcal{C} \arrow[d] \\ & \mathcal{D}' \arrow[r, "\mathrm{R}G"'] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow \beta"] & \mathcal{D} \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C}' \arrow[d] & \\ \mathcal{D} \arrow[r, "\mathrm{L}F"'] \arrow[ur, phantom, "\Nearrow \alpha"] \arrow[rr, bend right=60, "\mathrm{id}_{\mathcal{D}}"'] & \mathcal{D}' \arrow[r, "\mathrm{R}G"'] \arrow[d, phantom, "\Uparrow \underline{\eta}"] & \mathcal{D} \\ & & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}' \arrow[r] \arrow[rr, bend left=60, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}'}"] & \mathcal{C} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[u, phantom, "\Uparrow \varepsilon"] & \mathcal{C}' \arrow[d] \\ & \mathcal{D} \arrow[r, "\mathrm{L}F"'] \arrow[ur, phantom, "\Nearrow \alpha"] & \mathcal{D}' \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \mathcal{C}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C} \arrow[d] & \\ \mathcal{D}' \arrow[r, "\mathrm{R}G"'] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow \beta"] \arrow[rr, bend right=60, "\mathrm{id}_{\mathcal{D}'}"'] & \mathcal{D} \arrow[r, "\mathrm{L}F"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \underline{\varepsilon}"] & \mathcal{D}' \\ & & \end{tikzcd}$$

进一步, 如是之 $\underline{\eta}$ 和 $\underline{\varepsilon}$ 使得 $(\mathrm{L}F, \mathrm{R}G)$ 成为伴随对.

证明 首务是 $\underline{\eta}$ 和 $\underline{\varepsilon}$ 的存在和唯一性. 因为 RG 是绝对左 Kan 延拓, 2-胞腔

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}' \arrow[r, "G"] \arrow[d, "K'"'] & \mathcal{C} \arrow[d, "K"] \arrow[dl, Rightarrow, "\beta"'] & \\
\mathcal{D}' \arrow[r, "\mathrm{R}G"'] & \mathcal{D} \arrow[r, "\mathrm{L}F"'] & \mathcal{D}'
\end{tikzcd}
= (\mathrm{L}F)\beta : \mathrm{L}F \circ \mathrm{R}G \circ K' \to \mathrm{L}F \circ K \circ G
$$

使 L$F \circ$ RG 成为 L$F \circ K \circ G$ 沿 K' 的左 Kan 延拓; 另一方面, 我们又有

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}' \arrow[r, "G"] \arrow[rr, bend left=60, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}'}"] \arrow[rr, phantom, bend left=30, "\Uparrow\varepsilon"] & \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "K"'] & \mathcal{C}' \arrow[d, "K"] \\
& \mathcal{D} \arrow[r, "\mathrm{L}F"'] \arrow[ur, Rightarrow, "\alpha"] & \mathcal{D}'
\end{tikzcd}
= \varepsilon(\alpha G) : \mathrm{id}_{\mathcal{D}'} \circ K' = K' \to \mathrm{L}F \circ K \circ G.
$$

于是左 Kan 延拓的泛性质确定唯一的 $\underline{\varepsilon}$, 使之满足断言中的 2-胞腔合成等式.

关于 $\underline{\eta}$ 的情况是对偶的, 只需要注意到 $(\mathrm{R}G)\alpha : \mathrm{R}G \circ \mathrm{L}F \circ K \to \mathrm{R}G \circ K' \circ F$ 同样使 R$G \circ$ LF 给出右 Kan 延拓, 这是因为 LF 是绝对右 Kan 延拓.

问题归结为对 $\underline{\eta}$ 和 $\underline{\varepsilon}$ 验证单位和余单位的三角等式, 亦即验证 2-胞腔合成的等式:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{D}' \arrow[r] \arrow[rr, bend right=50, "\mathrm{id}"'] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\Downarrow"] & \mathcal{D} \arrow[r] \arrow[rr, bend left=50, "\mathrm{id}"] \arrow[rr, phantom, bend left=25, "\Downarrow"] & \mathcal{D}' \arrow[r] & \mathcal{D}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{D}' \arrow[r, bend left=50, "\mathrm{R}G"] \arrow[r, bend right=50, "\mathrm{R}G"'] \arrow[r, phantom, "\overset{\shortparallel}{\mathrm{id}}\Downarrow"] & \mathcal{D}
\end{tikzcd}
,\quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[r] \arrow[rr, bend left=50, "\mathrm{id}"] \arrow[rr, phantom, bend left=25, "\Downarrow"] & \mathcal{D}' \arrow[r] \arrow[rr, bend right=50, "\mathrm{id}"'] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\Downarrow"] & \mathcal{D} \arrow[r] & \mathcal{D}'
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[r, bend left=50, "\mathrm{L}F"] \arrow[r, bend right=50, "\mathrm{L}F"'] \arrow[r, phantom, "\overset{\shortparallel}{\mathrm{id}}\Downarrow"] & \mathcal{D}'
\end{tikzcd}
,
$$

其中大部分箭头不致歧义, 今后略去不标. 且先验证第一个等式. 基于 (RG, β) 作为左 Kan 延拓的泛性质, 说明两边合成 β 张出的 2-胞腔相等即足. 以第一式为例, 从下式左项起步:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C} \arrow[d] \arrow[dl, Rightarrow] & & \\
\mathcal{D}' \arrow[r] \arrow[rr, bend right=50, "\mathrm{id}"'] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\Downarrow\underline{\varepsilon}"] & \mathcal{D} \arrow[r] \arrow[rr, bend left=50, "\mathrm{id}"] \arrow[rr, phantom, bend left=25, "\Downarrow\underline{\eta}"] & \mathcal{D}' \arrow[r] & \mathcal{D}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}' \arrow[r] \arrow[rr, bend left=50, "\mathrm{id}"] \arrow[rr, phantom, bend left=25, "\varepsilon\Uparrow"] & \mathcal{C} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C}' \arrow[d] & \\
& \mathcal{D} \arrow[r] \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[rr, bend right=50, "\mathrm{id}"'] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\Uparrow\underline{\eta}"] & \mathcal{D}' \arrow[r] & \mathcal{D}
\end{tikzcd}
$$

其中用到了 $\underline{\varepsilon}$ 的刻画. 继续用 $\underline{\eta}$ 的刻画和 η 和 ε 所满足的三角等式, 化右项为

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}' \arrow[r] \arrow[rr, bend right=50, "\mathrm{id}"'] & \mathcal{C} \arrow[r] \arrow[rr, bend left=50, "\mathrm{id}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] \arrow[r, phantom, shift left=4ex, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{C}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C} \arrow[d] \arrow[dl, Rightarrow, "\beta"'] \\
 & {} & \mathcal{D}' \arrow[r] & \mathcal{D}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}' \arrow[r] \arrow[r, bend left=50, "\Downarrow\mathrm{id}"] \arrow[d] & \mathcal{C} \arrow[d] \arrow[dl, Rightarrow, "\beta"'] \\
\mathcal{D}' \arrow[r] & \mathcal{D}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C} \arrow[d] \arrow[dl, Rightarrow, "\beta"'] \\
\mathcal{D}' \arrow[r] \arrow[r, bend right=50, "\Downarrow\mathrm{id}"'] & \mathcal{D}
\end{tikzcd}$$

这就导出第一条三角等式. 第二条的验证方法是对偶的. □

1.9 以极限构造 Kan 延拓

一如 §1.8, 本节仍考虑函子 $K : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 和 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$, 目标是研究 $\mathrm{Lan}_K F$ 和 $\mathrm{Ran}_K F$ 的存在性.

回忆 §1.8 开头的讨论. Kan 延拓的动机是寻求函子 $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ 使得 $F \simeq GK$, 或者至少求其最佳逼近. 如何对 $d \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ 定义 Gd? 唯一线索是当 $d = Kc$ 时, Gd 在同构意义下应该取作 Fc. 这就启发我们用所有 Fc 的 $\varinjlim$ (或 $\varprojlim$) 来逼近 Gd, 极限取遍所有 $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 和态射 $Kc \to d$ (或 $d \to Kc$). 不同方向的极限将具有相互对偶的泛性质. 以下便来阐明这一构造.

给定 $d \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$, 按照定义 1.6.2 的方式定义范畴 (K/d) 和 (d/K), 以及投影函子

$$\Pi_{/d} : (K/d) \to \mathcal{C}, \quad \Pi_{d/} : (d/K) \to \mathcal{C}.$$

今后重点在于合成函子 $F\Pi_{/d} : (K/d) \to \mathcal{E}$ 和 $F\Pi_{d/} : (d/K) \to \mathcal{E}$. 在所论极限存在的前提下, 作几点观察.

◇ 任何 $d \to d'$ 皆诱导典范态射 $\varinjlim F\Pi_{/d} \to \varinjlim F\Pi_{/d'}$; 其刻画是使得图表

$$\begin{tikzcd}
 & \varinjlim F\Pi_{/d} \arrow[d] \\
Fc \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \varinjlim F\Pi_{/d'}
\end{tikzcd} \tag{1.9.1}$$

对每个 $(c, Kc \to d) \in \mathrm{Ob}(K/d)$ 交换, 斜向箭头是 $\varinjlim$ 自带的态射. 这是极限函子性的体现, 参看 [25, 引理 2.7,4] 及其证明.

◇ 考虑 $(c, Kc \xrightarrow{\mathrm{id}} Kc) \in \mathrm{Ob}(K/Kc)$, 得到典范态射 $\eta_c : Fc \to \varinjlim F\Pi_{/Kc}$.

◇ 任何 $c \to c'$ 皆诱导典范态射 $\varinjlim F\Pi_{/Kc} \to \varinjlim F\Pi_{/Kc'}$, 使下图交换:

$$\begin{tikzcd} Fc \arrow[r] \arrow[d, "\eta_c"'] & Fc' \arrow[d, "\eta_{c'}"] \\ \varinjlim F\Pi_{/Kc} \arrow[r] & \varinjlim F\Pi_{/Kc'}. \end{tikzcd}$$

鉴于对偶性, $\varprojlim F\Pi_{d/}$ 当然也具备相应的性质, 如典范态射 $\varepsilon_c : \varprojlim F\Pi_{/Kc} \to Fc$ 等等. 次一定理的陈述将基于这些函子性.

定理 1.9.1 考虑函子 $K : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 和 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$.

(i) 若对于每个 $d \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$, 极限 $\varinjlim(F\Pi_{/d})$ 在 $\mathcal{E}$ 中存在, 则 $(\mathrm{Lan}_K F)(d) := \varinjlim(F\Pi_{/d})$ 连同 (1.9.1) 给出的函子性确定左 Kan 延拓 $\mathrm{Lan}_K F : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, 相应的 $\eta : F \to (\mathrm{Lan}_K F) \circ K$ 来自先前讨论的 $(\eta_c)_{c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$.

(ii) 若对于每个 $d \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$, 极限 $\varprojlim(F\Pi_{d/})$ 在 $\mathcal{E}$ 中存在, 则 $(\mathrm{Ran}_K F)(d) := \varprojlim(F\Pi_{d/})$ 连同 (1.9.1) 的对偶版本确定右 Kan 延拓 $\mathrm{Ran}_K F : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, 相应的 $\varepsilon : (\mathrm{Ran}_K F) \circ K \to F$ 来自先前的讨论的 $(\varepsilon_c)_{c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$.

(iii) 若 $K : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 全忠实, 则 (i) 所构造的 η (或 (ii) 所构造的 ε) 必为同构.

证明 基于对偶性, 以下仅处理 $\mathrm{Lan}_K F$ 的情形. 对于 (i), 我们将逐一验证定义 1.8.1 的泛性质.

给定函子 $L : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ 和 $\xi : F \to LK$. 对每个 $d \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ 和 (K/d) 的对象 $(c, Kc \to d)$, 以及 (K/d) 中由 $f : c \to c'$ 决定的态射 $(c, Kc \to d) \to (c', Kc' \to d)$, 有交换图表

$$\begin{tikzcd} Fc \arrow[r, "\xi_c"] \arrow[d, "Ff"'] & LKc \arrow[r] \arrow[d, "LKf"'] & Ld. \\ Fc' \arrow[r, "\xi_{c'}"'] & LKc' \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

运用 $\varinjlim$ 的泛性质即得 $\chi_d : (\mathrm{Lan}_K F)(d) \to Ld$, 其刻画是使图表

$$\begin{tikzcd} Fc \arrow[r] \arrow[d, "\xi_c"'] & (\mathrm{Lan}_K F)(d) \arrow[d, "\chi_d"] \\ LKc \arrow[r] & Ld \end{tikzcd} \tag{1.9.2}$$

对所有 $(c, Kc \to d) \in \mathrm{Ob}(K/d)$ 皆交换, 第一行的箭头是 $\varinjlim$ 自带的态射.

兹证明 $(\chi_d)_{d \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})}$ 给出 $\chi : \mathrm{Lan}_K F \to L$. 对给定之 $d \to d'$, $(c, Kc \to d)$ 及其像 $(c, Kc \to d')$, 比较 (1.9.1) 与 (1.9.2), 问题归结为证图表

$$\begin{tikzcd} & & Ld \arrow[d, "L(d \to d')"] \\ Fc \arrow[r, "\xi_c"] & LKc \arrow[ur, "L(Kc \to d)"] \arrow[dr, "L(Kc \to d')"'] & Ld' \\ & & \end{tikzcd}$$

交换. 这当然是自明的.

下一步是验证

$$\forall c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}), \quad \xi_c = \chi_{Kc}\eta_c : Fc \to LKc. \tag{1.9.3}$$

既然 η_c 是从 $Fc = F\Pi_{/Kc}(c, Kc \xrightarrow{\mathrm{id}} Kc)$ 到 $(\mathrm{Lan}_K F)(Kc)$ 的典范态射, (1.9.3) 无非 (1.9.2) 的特例.

最后说明使 (1.9.3) 成立的 $\chi : \mathrm{Lan}_K F \to L$ 唯一. 选定 d 并考虑 (K/d) 的任意对象 $(c, Kc \to d)$ 及相应的图表

$$\begin{tikzcd}
& Fc \arrow[dl, "\eta_c"'] \arrow[dr] & \\
(\mathrm{Lan}_K F)(Kc) \arrow[rr, "(\mathrm{Lan}_K F)(Kc \to d)"'] \arrow[d, "\chi_{Kc}"'] & & (\mathrm{Lan}_K F)(d) \arrow[d, "\chi_d"] \\
LKc \arrow[rr, "L(Kc \to d)"'] & & Ld
\end{tikzcd}$$

其中 $Fc \to (\mathrm{Lan}_K F)(d)$ 如 (1.9.2); 方块部分因 χ 的自然性交换, 三角交换则缘于 (1.9.1). 已知 $\chi_{Kc}\eta_c = \xi_c$, 故 $Fc \to (\mathrm{Lan}_K F)(d) \xrightarrow{\chi_d} Ld$ 合成为 $L(Kc \to d)\xi_c$. 让 $(c, Kc \to d)$ 变动, 则此族等式唯一地确定了 χ_d.

综上可知 $(\mathrm{Lan}_K F, \eta)$ 确实是左 Kan 延拓.

现在考虑 (iii). 取定 $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. 因为 K 全忠实, 易见 (K/Kc) 有终对象 $(c, Kc \xrightarrow{\mathrm{id}} Kc)$, 而 $\eta_c : Fc \to \varinjlim F\Pi_{/Kc}$ 正来自于此终对象, 故为同构. □

注记 1.9.2 若 $\mathcal{C}$ 是小范畴, 则 (K/d) 和 (d/K) 对每个 $d \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ 也都是小范畴. 因此, 当 $\mathcal{E}$ 余完备 (或完备) 时, 定理 1.9.1 和命题 1.8.2 表明 $K^* : \mathcal{E}^{\mathcal{D}} \to \mathcal{E}^{\mathcal{C}}$ 必有左伴随函子 Lan_K (或右伴随函子 Ran_K).

例 1.9.3 (预层的逆像) 取 $\mathcal{E} := \mathsf{Set}$, 它是完备而且余完备的. 考虑拓扑空间之间的连续映射 $f : X \to Y$. 命 $\mathcal{C} := \mathsf{Open}_Y$ 为以 Y 中开子集为对象, 以开子集的包含映射为态射的范畴; 类似地, $\mathcal{D} := \mathsf{Open}_X$. 现在定义函子 $K : \mathsf{Open}_Y \to \mathsf{Open}_X$, 映开子集 $V \subset Y$ 为 $f^{-1}V$; 它也可以视同函子 $\mathsf{Open}_Y^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Open}_X^{\mathrm{op}}$. 熟悉层论的读者应已看出 $\mathsf{Open}_Y^{\wedge} := \mathsf{Set}^{\mathsf{Open}_Y^{\mathrm{op}}}$ 的对象按定义无非是 Y 上的**预层**, 而 $K^* : \mathsf{Open}_X^{\wedge} \to \mathsf{Open}_Y^{\wedge}$ 是预层范畴之间的的**正像**函子, 映 X 上的预层 $\mathcal{F}$ 为 Y 上的预层 $V \mapsto \mathcal{F}(f^{-1}V)$. 这一情形下, 正像的左伴随即 Lan_K 由定理 1.9.1 给出, 映 Y 上的预层 $\mathcal{G}$ 为

$$U \mapsto \varinjlim_{\substack{V \subset Y:\text{开子集} \\ \text{满足 } U \subset f^{-1}V}} \mathcal{G}(V), \quad U \subset X : \text{开子集}.$$

毫不意外, 这正是层论中对 $\mathcal{G}$ 定义的**逆像**.

1.10 局部化 (Gabriel–Zisman)

Gabriel–Zisman 局部化, 在此简称局部化, 是向范畴中的一族态射添逆的最经济方式, 相关理论渊源于 [6]. 它是由泛性质刻画的.

定义 1.10.1 (P. Gabriel, M. Zisman) 设 $\mathcal{C}$ 为范畴, S 是 $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ 的子集, 它包含所有恒等态射, 并且对态射合成封闭. 所谓 $\mathcal{C}$ 对 S 的**局部化**意指一个范畴 $\mathcal{C}[S^{-1}]$ (容许是大范畴), 连同函子 $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[S^{-1}]$, 称为局部化函子, 它们满足以下条件:

- 对所有 $s \in S$, 其像 $Q(s)$ 是 $\mathcal{C}[S^{-1}]$ 中的同构;
- 对所有范畴 $\mathcal{D}$ 和函子 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, 若 S 中的态射皆被 F 映为同构, 则存在唯一的函子 $F[S^{-1}] : \mathcal{C}[S^{-1}] \to \mathcal{D}$ 使得 $F = F[S^{-1}]Q$.

按惯例, 我们经常省略资料中的 Q. 某些文献如 [10, Definition 7.1.1] 对局部化给出比较松弛的泛性质[4].

以下说明局部化的唯一性, 精确到唯一的同构.

命题 1.10.2 若资料 $(\mathcal{C}[S^{-1}], Q)$ 和 $(\mathcal{C}[S^{-1}]', Q')$ 都是 $\mathcal{C}$ 对 S 的局部化, 则存在唯一一对函子 $\mathcal{C}[S^{-1}] \underset{G'}{\overset{G}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}[S^{-1}]'$ 使得 $GQ = Q'$, $G'Q' = Q$, 而且 $G'G = \mathrm{id}_{\mathcal{C}[S^{-1}]}$, $GG' = \mathrm{id}_{\mathcal{C}[S^{-1}]'}$.

证明 因为 Q' 映 S 为同构, 泛性质给出唯一的 G 使得 $GQ = Q'$; 同理, 存在唯一的 G' 使得 $G'Q' = Q$. 由于 $G'GQ = Q$, 在泛性质中取 $\mathcal{D} = \mathcal{C}[S^{-1}]$ 和 $F = Q$ 可见 $G'G = \mathrm{id}_{\mathcal{C}[S^{-1}]}$; 同理可得 $GG' = \mathrm{id}_{\mathcal{C}[S^{-1}]}$. □

命题 1.10.3 设局部化 $(\mathcal{C}[S^{-1}], Q)$ 存在. 记 S^{op} 为 S 在 $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ 中对应的像, 则存在与 Q 相容的范畴等价 $\mathcal{C}[S^{-1}]^{\mathrm{op}} \leftrightarrows \mathcal{C}^{\mathrm{op}}[(S^{\mathrm{op}})^{-1}]$.

证明 基于局部化的唯一性, 对定义 1.10.1 中的所有范畴及函子取 $(-)^{\mathrm{op}}$ 即是, 因为这并不改变函子的走向. □

问题归结为探讨局部化的存在性及其构造. 对于一般的 $\mathcal{C}$ 和 S, 可以通过形式地向 $\mathcal{C}$ 添逆来构造 $\mathcal{C}[S^{-1}]$, 思路类似于自由群. 更为具体地说, $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}[S^{-1}]) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, 而 $\mathcal{C}[S^{-1}]$ 的态射形式地表现为有限长的 "锯齿"

$$\cdots bt^{-1}as^{-1}\cdots = \left(\begin{tikzcd}[column sep=small] \cdots \arrow[dr] & & & & Y \arrow[dr, "a"] \arrow[dll, phantom] & & W \arrow[dr, "b"] & & \cdots \arrow[dl] \\ & X & & \arrow[ul, phantom] & & Z & & U & \end{tikzcd}\right)$$

$$\cdots bt^{-1}as^{-1}\cdots = \left(\begin{tikzcd}[column sep=small] \cdots \arrow[dr] & & Y \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "a"] & & W \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "b"] & & \cdots \arrow[dl] \\ & X & & Z & & U & \end{tikzcd}\right)$$

[4]依 2-范畴的视角, 更自然的泛性质是: $Q^* : \mathcal{D}^{\mathcal{C}[S^{-1}]} \to \mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ 对所有 $\mathcal{D}$ 皆为全忠实, 而且 $G \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}^{\mathcal{C}})$ 同构于某个 $Q^*(F) = FQ$ 当且仅当 G 映 S 的元素为同构. 定义 1.10.1 中的 Q 自动有此性质, 见命题 1.10.4.

其中 $a, b, \ldots \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ 而 $s, t, \ldots \in S$, 按显然的方式定义合成运算和 Q, 但要对由

$$s^{-1}t^{-1} = (ts)^{-1}, \quad ss^{-1} = \mathrm{id}, \quad s^{-1}s = \mathrm{id}$$

等等所生成的等价关系取商; 请见 [6, Chapter I, 1.1] 的勾勒. 有鉴于此, 局部化可设想为态射的某种 "分式运算".

构造是普适的, 但缺陷同样明显, 主因是等价关系难以操作; 比方说, 难以刻画有哪些 $f, g \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ 会满足 $Qf = Qg$. 所幸实践中遭遇的 S 经常是定义 1.10.5 行将介绍的左 (或右) 乘性系, 此时 $\mathcal{C}[S^{-1}]$ 的描述能够简化, 使得上述锯齿图表可以 "拉直", 以将任何态射表作 as^{-1} (或 $s^{-1}a$) 之形.

在介绍乘性系之前, 且先记录上述构造的一条简单性质.

命题 1.10.4 局部化函子 $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[S^{-1}]$ 必为本质满, 而且对于任意范畴 $\mathcal{D}$ 和函子 $A, B : \mathcal{C}[S^{-1}] \to \mathcal{D}$, 自明的映射

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\mathcal{C}[S^{-1}]}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\mathcal{C}}}(AQ, BQ)$$

是双射. 换言之, $Q^* : \mathcal{D}^{\mathcal{C}[S^{-1}]} \to \mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ 是全忠实函子.

证明 不妨按前述方式具体实现局部化. 将 Q 在对象集上的映射写作 $X \mapsto \underline{X}$; 这是双射, 故 Q 本质满. 由此立见 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\mathcal{C}[S^{-1}]}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\mathcal{C}}}(AQ, BQ)$ 是单射.

至于满性, 设 $\varphi = (\varphi_X)_{X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\mathcal{C}}}(AQ, BQ)$. 对于任意 $\underline{X} = QX$, 定义 $\mathcal{D}$ 中态射 $\tilde{\varphi}_{\underline{X}} : A\underline{X} \to B\underline{X}$ 为 φ_X. 问题化为说明 $\tilde{\varphi} := (\tilde{\varphi}_{\underline{X}})_{\underline{X}} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\mathcal{C}[S^{-1}]}}(A, B)$. 换言之, 须对 $\mathcal{C}[S^{-1}]$ 中的所有态射 $f : \underline{X} \to \underline{Y}$ 验证交换图表

$$\begin{tikzcd}
A\underline{X} \arrow[r, "\tilde{\varphi}_{\underline{X}}"] \arrow[d, "Af"'] & B\underline{X} \arrow[d, "Bf"] \\
A\underline{Y} \arrow[r, "\tilde{\varphi}_{\underline{Y}}"'] & B\underline{Y}.
\end{tikzcd}$$

按照态射的 "锯齿" 构造, f 分解为一连串形如 Qa 或 $(Qs)^{-1}$ 的态射, 其中 $a \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ 而 $s \in S$, 上图的交换性遂归结为 φ 的相应性质. □

定义 1.10.5 满足以下性质的子集 $S \subset \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ 称为 $\mathcal{C}$ 中的**左乘性系**.

(S1) 对所有 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 都有 $\mathrm{id}_X \in S$.

(S2) 对所有 $f, g \in S$, 若合成 gf 存在则 $gf \in S$.

(S3) 给定态射 $X \xrightarrow{s \in S} Z \xleftarrow{f} Y$, 存在 $\mathcal{C}$ 的态射 $X \xleftarrow{f'} W \xrightarrow{s' \in S} Y$ 使 $sf' = fs'$, 图解作

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "s \in S"'] & W \arrow[l, dashed, "f'"'] \arrow[d, dashed, "s' \in S"] \\
Z & Y \arrow[l, "f"]
\end{tikzcd} \quad \text{交换.}$$

(S4) 设 $f, g : X \to Y$ 为 $\mathcal{C}$ 中态射, $s : Y \to W$ 属于 S. 若 $sf = sg$, 则存在 S 中的态射 $t : Z \to X$ 使 $ft = gt$. 图解作

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, dashed, "t \in S"] \arrow[rr, phantom, bend right, "\text{交换}"'] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "s \in S"] & W. \end{tikzcd}$$

图表中的虚线部分都是所断言存在的态射.

如果 S 在 $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ 中的像 S^{op} 为左乘性系, 则称 S 为 $\mathcal{C}$ 中的**右乘性系**; 这相当于将条件 (S3) 和 (S4) 的箭头反转. 称兼为左, 右乘性系的 S 为 $\mathcal{C}$ 中的**乘性系**.

约定 1.10.6 对于给定的左或右乘性系 S, 今后在交换图表中总将属于 S 的箭头画作 $\rightarrowtail$ 之形, 以资区别.

选定 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. 循上述约定, 对左乘性系 (或右乘性系) S 定义范畴 $S_{/X}$ (或 $S_{X/}$) 如下.

$$\mathrm{Ob}\left(S_{/X}\right) := \left\{\text{态射 } X \leftarrowtail Z\right\}, \qquad \mathrm{Mor}(S_{/X}) := \left\{\text{交换图表} \begin{tikzcd} X & Z \arrow[l, tail] \arrow[d] \\ & W \arrow[ul, tail] \end{tikzcd}\right\},$$

$$\mathrm{Ob}\left(S_{X/}\right) := \left\{\text{态射 } X \rightarrowtail Z\right\}, \qquad \mathrm{Mor}(S_{X/}) := \left\{\text{交换图表} \begin{tikzcd} X \arrow[r, tail] \arrow[dr, tail] & Z \arrow[d] \\ & W \end{tikzcd}\right\}.$$

注意到若 S 是左乘性系, 则 $(S^{\mathrm{op}})_{X/} = S^{\mathrm{op}}_{/X}$.

引理 1.10.7 若 S 是左乘性系 (或右乘性系), 则 $S^{\mathrm{op}}_{/X}$ (或 $S_{X/}$) 是滤过范畴.

证明 基于之前观察到的对偶性, 以下只论右乘性系情形. 对于 $S_{X/}$ 的任意对象 $i : X \to Z$ 和 $j : X \to Z'$, 以 (S3) 的相应版本构造交换图表

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "j'"] & W \\ X \arrow[u, tail, "i"] \arrow[r, tail, "j"'] & Z' \arrow[u, tail, "i'"'] \end{tikzcd}$$

则 $k := i'j \in S$ 给出 $S_{X/}$ 的对象, 连同 $S_{X/}$ 的态射 $i \xrightarrow{j'} k \xleftarrow{i'} j$.

设 i, j 如上. 对于 $S_{X/}$ 的任一对态射 $\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[rr, shift right, "g"'] & & Z' \\ & X \arrow[ul, tail, "i"] \arrow[ur, tail, "j"'] & \end{tikzcd}$ (交换图表), 以 (S4) 的相应版本可得 $h : Z' \rightarrowtail W$ 使得 $hf = hg$. 记 $k := hj : X \rightarrowtail W$, 视为 $S_{X/}$ 的对象, 我们在 $S_{X/}$ 中得到交换图表 $i \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} j \xrightarrow{h} k$. 此即滤过范畴的所有条件. □

令 $X,Y\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. 以下将对左乘性系和右乘性系的情形分别定义集合 $M^l_{X,Y}$ 和 $M^r_{X,Y}$. 注意: 它们未必是小集.

- ◇ 设 S 为左乘性系, 我们将 $\mathcal{C}$ 中形如 $X \xleftarrow{s} Z \xrightarrow{a} Y$ 的图表简记为 $(Z;s,a)$. 这些资料构成集合 $M_{X,Y}=M^l_{X,Y}$.
- ◇ 设 S 为右乘性系, 我们将 $\mathcal{C}$ 中形如 $X \xrightarrow{a} Z \xleftarrow{s} Y$ 的图表简记为 $(Z;a,s)$. 这些资料构成集合 $M_{X,Y}=M^r_{X,Y}$.

定义二元关系 $\sim$ 如下 $(Z;s,a)\sim(Z';s',a')$ (或 $(Z;a,s)\sim(Z';a',s')$) 当且仅当存在如下形式的交换图表:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, tail, "s"'] \arrow[dr, "a"] & \\ X & W \arrow[l, tail] \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & Y \\ & Z' \arrow[ul, tail, "s'"] \arrow[ur, "a'"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Z \arrow[d] & \\ X \arrow[ur, "a"] \arrow[r] \arrow[dr, "a'"'] & W & Y \arrow[l, tail] \arrow[ul, tail, "s"'] \arrow[dl, tail, "s'"] \\ & Z' \arrow[u] & \end{tikzcd} \tag{1.10.1}$$

(左乘性系) (右乘性系)

留意到对任何 $f:X\to Y$, 条件 (S1) 蕴涵 $(X;\mathrm{id}_X,f)\in M^l_{X,Y}$ 而 $(X;f,\mathrm{id}_X)\in M^r_{X,Y}$. 两套定义显然对偶.

引理 1.10.8 对于左乘性系 (或右乘性系) S 和任意 X,Y, 以上定义的 $\sim$ 是 $M^l_{X,Y}$ (或 $M^r_{X,Y}$) 上的等价关系. 事实上我们有双射

$$M^l_{X,Y}/\sim \;\xrightarrow{1:1}\; \varinjlim_{\substack{[X\leftarrowtail Z]\\ \in\mathrm{Ob}(S^{\mathrm{op}}_{/X})}} \mathrm{Hom}(Z,Y), \qquad M^r_{X,Y}/\sim \;\xrightarrow{1:1}\; \varinjlim_{\substack{[Y\rightarrowtail Z]\\ \in\mathrm{Ob}(S_{/Y})}} \mathrm{Hom}(X,Z)$$

$$[Z;s,a]\longmapsto \left[Z\xrightarrow{a}Y\right] \qquad [Z;a,s]\longmapsto \left[X\xrightarrow{a}Z\right]$$

其中 $[Z;s,a]$ (或 $[Z;a,s]$) 代表含 $(Z;s,a)$ (或 $(Z;a,s)$) 的等价类.

证明 考虑函子 $\alpha: S^{\mathrm{op}}_{/X}\to\mathsf{Set}$, 映对象 $X\leftarrowtail Z$ 为 $\mathrm{Hom}(Z,Y)$, 则按定义

$$M^l_{X,Y}=\bigsqcup_{X\leftarrowtail Z}\alpha(X\leftarrowtail Z),$$

而因为 $S^{\mathrm{op}}_{/X}$ 滤过 (引理 1.10.7), 不难检验 $M^l_{X,Y}$ 上来自 (1.10.1) 的二元关系 $\sim$ 转译为命题 1.6.11 中的等价关系, 这也顺带证出与 $\varinjlim$ 的双射. 关于 $M^r_{X,Y}$ 的版本论证相同.

注意到 §1.6 在探讨滤过 $\varinjlim$ 时默认 $\varinjlim$ 是小的, 而 $S_{/X}$ 和 $S_{/Y}$ 未必是小范畴. 然而此处欲证的断言不涉及集合的大小, 论证也可以适当改述, 使其不依赖 Grothendieck 宇宙的选取. □

等价类 $[Z;s,a]$ (或 $[Z;a,s]$) 应理解为行将构造的 $\mathcal{C}[S^{-1}]$ 中的态射 as^{-1} (或 $s^{-1}a$).

定义–命题 1.10.9 对于左乘性系 S, 任意 X,Y 和资料 $(U;s,a) \in M^l_{X,Y}$ 和 $(V;t,b) \in M^l_{Y,Z}$, 用 (S3) 将之扩展为以下交换图表

$$\begin{tikzcd}
& & W \arrow[dl, tail, "r"'] \arrow[dr, "c"] & & \\
& U \arrow[dl, tail, "s"'] \arrow[dr, "a"] & & V \arrow[dl, tail, "t"'] \arrow[dr, "b"] & \\
X & & Y & & Z
\end{tikzcd}$$

则 $[V;t,b] \circ [U;s,a] := [W;sr,bc] \in M^l_{X,Z}/\sim$ 只依赖 $[U;s,a]$ 和 $[V;t,b]$. 对右乘性系也有对偶的结果.

证明 首先在等价类中变动 $(U;s,a)$. 鉴于 (1.10.1), 我们先固定 $(V;t,b)$ 并考虑交换图表

$$\begin{tikzcd}
& U \arrow[dl, tail, "s"'] \arrow[dr, "a"] & W \arrow[l, tail, "r"'] \arrow[dr, "c"] & & \\
X & & Y & V \arrow[l, tail, "t"'] \arrow[r, "b"] & Z. \\
& U' \arrow[ul, tail, "s'"] \arrow[uu, "x"] \arrow[ur, "a'"] & W' \arrow[l, tail, "r'"] \arrow[ur, "c'"'] & &
\end{tikzcd}$$

兹断言 $(W;sr,bc) \sim (W';s'r',bc')$. 应用 (S3) 以获取对象 R, Q 和态射 p, q, h, k 使

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, tail, "h"] \arrow[d, "k"'] & R \arrow[r, "q"] \arrow[d, tail, "p"] & W \arrow[d, tail, "r"] \\
W' \arrow[r, tail, "r'"'] & U' \arrow[r, "x"'] & U
\end{tikzcd} \quad \text{交换.}$$

结合前一图表可得 $tc'k = a'r'k = arqh = tcqh$. 依 (S4) 知存在 $w : P \rightarrowtail Q$ 使得 $c'kw = cqhw$. 综上, 不难验证

$$\begin{tikzcd}
& W \arrow[dl, tail, "sr"'] \arrow[dr, "bc"] & \\
X & P \arrow[l, tail, "s'phw"'] \arrow[r, "bc'kw"] \arrow[u, "qhw"] \arrow[d, "kw"'] & Z \\
& W' \arrow[ul, tail, "s'r'"] \arrow[ur, "bc'"'] &
\end{tikzcd} \quad \text{交换, 亦即 } (W;sr,bc) \sim (W';s'r',bc').$$

至于 $(U;s,a)$ 固定而 $(V;t,b)$ 在等价类中变动的情形, 论证相同. □

定义–定理 1.10.10 设 S 为范畴 $\mathcal{C}$ 中的左乘性系.

(i) 可定义范畴 $\mathcal{C}[S^{-1}]^l$ (容许是大范畴) 使得其对象集为 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, 任两个对象 X, Y 之间的 Hom 集为 $M^l_{X,Y}/\sim$, 对象 X 的恒等态射为 $[X; \mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X]$, 态射合成则由定义–定理 1.10.9 的二元运算给出.

(ii) 可定义函子 $Q^l : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[S^{-1}]^l$ 使得它在对象集上是恒等映射, 在态射集上映 $f : X \to Y$ 为 $[X; \mathrm{id}_X, f]$.

上述断言的对偶版本对右乘性系 S 同样成立, 相应的资料记为 $Q^r : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[S^{-1}]^r$.

证明 基于对偶性, 以下仅探讨左乘性系的情形.

对于 (i), 验证 $\mathcal{C}[S^{-1}]^l$ 中态射合成的性质即可. 定义–命题 1.10.9 的运算显然使 $[X; \mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X]$ 满足恒等态射的条件, 故验证结合律即可. 考虑 $(A; s, a) \in M^l_{X,Y}$, $(B; t, b) \in M^l_{Y,Z}$, $(C; u, c) \in M^l_{Z,W}$. 应用 (S3) 三次得到交换图表

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & \bullet \arrow[dl, tail] \arrow[dr] & & & \\
 & & \bullet \arrow[dl, tail] \arrow[dr] & & \bullet \arrow[dl, tail] \arrow[dr] & & \\
 & A \arrow[dl, tail, "s"'] \arrow[dr, "a"] & & B \arrow[dl, tail, "t"'] \arrow[dr, "b"] & & C \arrow[dl, tail, "u"'] \arrow[dr, "c"] & \\
X & & Y & & Z & & W
\end{tikzcd}$$

整幅图表给出 $M^l_{X,W}$ 的元素, 左下部分给出 $[B; t, b] \circ [A; s, a]$ 的代表元, 右下部分则给出 $[C; u, c] \circ [B; t, b]$ 的代表元, 这就足以说明结合律

$$[C; u, c] \circ ([B; t, b] \circ [A; s, a]) = ([C; u, c] \circ [B; t, b]) \circ [A; s, a].$$

对于 (ii), 验证 Q^l 保持态射的结构即可. 显然 $[X; \mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X]$ 满足恒等态射的条件. 现在考虑 $\mathcal{C}$ 中的态射 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$. 图表

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & X \arrow[dl, equal] \arrow[dr, "f"] & & \\
 & X \arrow[dl, equal] \arrow[dr, "f"] & & Y \arrow[dl, equal] \arrow[dr, "g"] & \\
X & & Y & & Z
\end{tikzcd}$$

说明 $Q^l(gf) = Q^l(g)Q^l(f)$. □

定理 1.10.11 (P. Gabriel, M. Zisman) 设 S 为 $\mathcal{C}$ 中的左乘性系 (或右乘性系), 则资料 $(\mathcal{C}[S^{-1}]^l, Q^l)$ (或 $(\mathcal{C}[S^{-1}]^r, Q^r)$) 给出 $\mathcal{C}$ 对 S 的局部化.

证明 基于对偶性, 以下仅对左乘性系的情形验证定义 1.10.1 的条件. 记 $Q = Q^l$. 若 $f : X \to Y$ 属于 S, 则图表

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, tail, "f"'] \arrow[d, dashed, "f"] \arrow[dr, "f"] & \\
Y \arrow[r, equal] & Y \arrow[r, equal] & Y
\end{tikzcd}$$

表明 $[X; f, f] = [Y; \mathrm{id}_Y, \mathrm{id}_Y]$; 从而下图说明 $[X; f, \mathrm{id}_X] = [X; \mathrm{id}_X, f]^{-1}$:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& & X \arrow[dl, equal] \arrow[dr, equal] & & \\
& X \arrow[dl, equal] \arrow[dr, "f"] & & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, equal] & \\
X & & Y & & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& & X \arrow[dl, equal] \arrow[dr, equal] & & \\
& X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, equal] & & X \arrow[dl, equal] \arrow[dr, "f"] & \\
Y & & X & & Y
\end{tikzcd}
$$

综之, Q 确实映 S 的元素为同构.

接着考虑给定的函子 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, 映 S 为同构. 定义 $F[S^{-1}] : \mathcal{C}[S^{-1}]^l \to \mathcal{D}$ 如下: 它映对象 X 为 FX, 映态射 $[U; s, a] \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]^l}(X, Y)$ 为 $(Fa)(Fs)^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y)$. 显然 $F[S^{-1}]$ 映 $\mathcal{C}[S^{-1}]^l$ 中的恒等态射为 $\mathcal{D}$ 中的恒等态射. 对定义–命题 1.10.9 的图表应用函子 F, 再将 $F(S)$ 中的箭头取逆, 立见 $F[S^{-1}]$ 保持态射的合成. 性质 $F[S^{-1}]Q = F$ 是明白的. 由于 $\mathcal{C}[S^{-1}]^l$ 中的态射都形如 $(Qa)(Qs)^{-1}$, $F[S^{-1}]$ 也只能如是定义. □

约定 1.10.12 设若 S 为乘性系, 则命题 1.10.2 表明两种不同的局部化相互等同, 记之为 $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[S^{-1}]$.

推论 1.10.13 设 S 为 $\mathcal{C}$ 中的左乘性系 (或右乘性系), 则 $\mathcal{C}$ 中态射 $f, g : X \to Y$ 满足 $Q^l(f) = Q^l(g)$ (或 $Q^r(f) = Q^r(g)$) 当且仅当存在 $s \in S$ 使得 $fs = gs$ (或 $sf = sg$).

证明 对左乘性系 S 验证 "仅当" 部分即可. 若 $Q^l(f) = Q^l(g)$, 则 $\mathcal{C}[S^{-1}]^l$ 的构造蕴涵存在交换图表

$$
\begin{tikzcd}
& X \arrow[dr, "f"] & \\
X \arrow[ur, equal] \arrow[dr, equal] & U \arrow[l, "s"'] \arrow[u] \arrow[r, "a"] \arrow[d] & Y \\
& X \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}
$$

由此知 $fs = a = gs$. □

注记 1.10.14 在种种基本的范畴论操作中, 我们希望能尽量避免大范畴. 定义–定理 1.10.10 提到了 $\mathcal{C}[S^{-1}]^l$ (或 $\mathcal{C}[S^{-1}]^r$) 可能是大范畴, 道理在于引理 1.10.8 中的 $\varinjlim$ 未必小, 其产物未必落在 Set. 这是一个略为棘手的问题.

然而当 S 满足以下条件时, $\mathcal{C}[S^{-1}]^l$ (或 $\mathcal{C}[S^{-1}]^r$) 确实不 "大": 假定 $S^{\mathrm{op}}_{/X}$ (或 $S_{X/}$) 对所有 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 都有共尾 (定义 1.6.4) 的小子范畴, 则根据命题 1.6.5, 所论的 $\varinjlim$ 可以限制到该子范畴上, 从而给出 Set 的对象. 如果 $\mathcal{C}$ 已是小范畴, 则此条件自动成立.

引理 1.10.15 设 S 为范畴 $\mathcal{C}$ 中的左乘性系 (或右乘性系), 则局部化函子 Q^l (或 Q^r) 保有限 $\varprojlim$ (或有限 $\varinjlim$).

证明 仅论 S 为左乘性系情形. 设 J 为有限范畴, 且函子 $\beta : J^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ 对应的 $\varprojlim$ 存在. 由引理 1.10.8 可知对于任意 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, 我们有典范双射

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]^l}\left(Q^l X, Q^l \varprojlim \beta\right) &\simeq \varinjlim_{X \leftarrow Z} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(Z, \varprojlim \beta\right) \\ &\simeq \varinjlim_{X \leftarrow Z} \varprojlim_{j \in \mathrm{Ob}(J)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(Z, \beta(j)\right).\end{aligned}$$

对末项应用引理 1.10.7 和命题 1.6.12, 进一步将其转化为

$$\varprojlim_{j \in \mathrm{Ob}(J)} \varinjlim_{X \leftarrow Z} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(Z, \beta(j)\right) \simeq \varprojlim_{j \in \mathrm{Ob}(J)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]^l}\left(Q^l X, Q^l \beta(j)\right).$$

严格来说, §1.6 在范畴 Set 中操作, 此处的 Hom 集则未必落在 Set; 但这只是枝微末节, 见引理 1.10.8 证明中的相关讨论. □

定理 1.10.16 设 $\mathcal{C}$ 是 Ab-范畴, 而 S 为其中的左乘性系 (或右乘性系).

(i) 此时 $\mathcal{C}[S^{-1}]^l$ (或 $\mathcal{C}[S^{-1}]^r$) 具有典范的 Ab-范畴结构, 使得 Q^l (或 Q^r) 成为本质满加性函子.

(ii) 如果 $\mathcal{C}$ 是加性范畴而且 S 为乘性系, 则 $\mathcal{C}[S^{-1}]$ 也是加性范畴.

(iii) 将 Ab-范畴扩及 $\Bbbk$-线性范畴 (其中 $\Bbbk$ 是交换环), 上述性质仍成立; 定义 1.10.1 中的泛性质里若取 F 为 $\Bbbk$-线性的, 则相应的函子 $F[S^{-1}]$ 亦然.

证明 对于 (i), 考虑左乘性系情形足矣. 我们须对 $\mathcal{C}[S^{-1}]$ 的态射集定义加法. 设 $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]^l}(X, Y)$. 因为 $S^{\mathrm{op}}_{/X}$ 滤过 (引理 1.10.7), 存在 $\mathcal{C}$ 的态射 $s : U \rightarrowtail X$ 和 $a_1, a_2 : U \to Y$, 使得 $f = [U; s, a_1]$, $g = [U; s, a_2]$. 以此定义

$$f + g := [U; s, a_1 + a_2] \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]}(X, Y).$$

特别地, 零态射可写作 $[U; s, 0]$, 而 $-[U; s, a] = [U; s, -a]$. 尚须证明 $f + g$ 无关代表元的选取, 这点同样可以基于 $S^{\mathrm{op}}_{/X}$ 的滤过性质来处理, 琐碎细节略去. 一旦承认这是良定义的, 则容易验证 Ab-范畴的定义, 并验证 Q 是加性函子.

鉴于加性范畴的定义 1.3.3 和引理 1.10.15, 由 (i) 推得 (ii).

至于 (iii), 若 $\mathcal{C}$ 是 $\Bbbk$-线性的, 则 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]}$ 上的纯量积定为 $t \cdot [U; s, a] = [U; s, ta]$, 其中 $t \in \Bbbk$. 容易验证这满足一切所需条件. □

例 1.10.17 (环的局部化) 给定环 R 相当于给定仅有单个对象 $\star$ 的 Ab-范畴 $\mathcal{C}$, 使得 $R = \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\star)$. 若 R 交换, 则关于 $S \subset R = \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ 的左, 右乘性子集条件无异; 此时 Ab-范畴 $\mathcal{C}[S^{-1}]$ 对应的环正是 R 的局部化 $R[S^{-1}]$, 见 [25, §5.3]. 对于一般的 R, 本节的理论给出了构造非交换局部化的途径; 相关理论也是非交换环论的一支, 详见 [13, §10A].

例 1.10.18 (中心局部化) 记加性范畴 $\mathcal{C}$ 的中心为 $Z(\mathcal{C})$, 它是交换环; 见命题 1.4.5 前的讨论. 对于环 $Z(\mathcal{C})$ 的任意乘性子集 S, 不难验证态射集

$$\{s_X \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X) : s \in S,\ X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})\}$$

是乘性系. 对应的 $\mathcal{C}[S^{-1}]$ 固然可以按之前的分式运算来构造, 捷径则是取

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}[S^{-1}]) := \mathrm{Ob}(\mathcal{C}), \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]}(X,Y) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \underset{Z(\mathcal{C})}{\otimes} Z(\mathcal{C})[S^{-1}],$$

其态射按自明的方式作合成. 相关验证谨留作本章习题.

注记 1.10.19 对于一般的 $\mathcal{C}$ 和 S, 局部化函子 $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[S^{-1}]$ 具有全忠实右伴随的情形是格外有趣且重要的; 带此性质的局部化称为**反射局部化**. 习题部分将有进一步的勾勒.

注记 1.10.20 (积范畴的局部化) 最后, 考虑范畴 $\mathcal{C}_i$ 及其中的左 (或右) 乘性系 S_i, 其中 $i = 1, 2$. 相应的局部化函子记为 $Q_i : \mathcal{C}_i \to \mathcal{C}_i[S_i^{-1}]$. 那么 $S_1 \times S_2$ 显然也是 $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ 的左 (或右) 乘性系. 根据定义–定理 1.10.10 的构造, 容易验证

$$(Q_1, Q_2) : \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1[S_1^{-1}] \times \mathcal{C}_2[S_2^{-1}]$$

是相应的局部化. 这点可以推广到任意多个范畴的积.

1.11 沿局部化作 Kan 延拓

假设 $\mathcal{C}$ 对 $S \subset \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ 的局部化 $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[S^{-1}]$ 存在. 本节探究函子的延拓问题: 给定范畴 $\mathcal{E}$ 和函子 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$, 试问可有以下交换图表?

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[d, "Q"'] \arrow[dr, bend left, "F"] & \\ \mathcal{C}[S^{-1}] \arrow[r, dashed, "\exists ?"'] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

由于 F 未必映 S 中的态射映同构, 虚线所示的函子未必存在. 尽管如此, 依然可以探究延拓问题的最优逼近, 即左 Kan 延拓 $(\mathrm{Lan}_Q F, \eta)$ 和右 Kan 延拓 $(\mathrm{Ran}_Q F, \varepsilon)$. 今后我们将省略资料 η 和 ε. 本节旨在对选定之 $\mathcal{C}$, S 和 F 寻求 $\mathrm{Lan}_Q F$ 和 $\mathrm{Ran}_Q F$ 存在的充分条件; 一旦它们存在, 命题 1.8.2 便确保唯一性. 相关内容将用于导出函子的研究, 见 §4.6.

处理这一问题的思路是精心选取 $\mathcal{C}$ 的子范畴. 我们沿用 §1.10 的惯例, 将属于 S 的态射标作 $\rightarrowtail$.

本节证明皆不涉及关于集合大小的假设, 因此也适用于大范畴.

命题 1.11.1 设 $\mathcal{I}$ 为 $\mathcal{C}$ 的全子范畴, $S \subset \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ 是左乘性系 (或右乘性系).

(i) 命 $T := S \cap \mathrm{Mor}(\mathcal{I})$. 若 T 是 $\mathcal{I}$ 中的左乘性系 (或右乘性系), 则以上资料诱导函子 $\mathcal{I}[T^{-1}]^l \to \mathcal{C}[S^{-1}]^l$ (或 $\mathcal{I}[T^{-1}]^r \to \mathcal{C}[T^{-1}]^r$).

(ii) 假定以下条件: 对 S 中的所有态射 $s : W \to Y$ (或 $s : Y \to W$), 若 $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ 则存在态射 $g : V \to W$ 使得 $sg \in T$ (或 $g : W \to V$ 使得 $gs \in T$). 此时 T 是左乘性系 (或右乘性系), 而 (i) 的函子是全忠实函子.

证明 考虑左乘性系情形即可. 断言 (i) 的函子来自局部化的泛性质; 在态射层次, 它映任何等价类 $[U; s, a]$ (相对于 T) 为 $[U; s, a]$ (相对于 S).

至于 (ii), 首先验证 T 是左乘性系. 定义 1.10.5 的 (S1), (S2) 皆自明. 对于 (S3), 给定 $X \xrightarrow{t} Z \xleftarrow{f} Y$, 在 $\mathcal{C}$ 中可构造图表

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, tail, "t\in T"'] & W \arrow[l, "f'"'] \arrow[d, tail, "s'\in S"] \\ Z & Y; \arrow[l, "f"] \end{tikzcd}$$

再取 $g : V \to W$ 使得 $s'g \in T$, 则 $s'g$ 和 $f'g$ 合乎 (S3) 的规格. 对 (S4) 的论证方式相同.

设 $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$. 对 $\mathcal{C}[S^{-1}]^l$ 中由 $X \leftarrowtail U \to Y$ 代表的态射, 按条件可取 $V \to U$ 使 $V \to U \to X$ 合成属于 T; 故 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{I}[T^{-1}]^l}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]^l}(X, Y)$ 为满. 类似手法说明 $M^l_{X,Y}$ 中的等价 $\sim$ 皆可在 $\mathcal{I}$ 中实现, 表明 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{I}[T^{-1}]^l}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]^l}(X, Y)$ 为单. $\square$

命题 1.11.2 设 $\mathcal{I}$ 为 $\mathcal{C}$ 的全子范畴, $S \subset \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ 是左乘性系 (或右乘性系), $T := S \cap \mathrm{Mor}(\mathcal{I})$. 假设下述“解消条件”成立: 对任意 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, 存在 $s : U \to X$ (或 $s : X \to U$), 其中 $U \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ 而 $s \in S$.

(i) 此时 T 是左乘性系 (或右乘性系), 而 $\mathcal{I}[T^{-1}] \to \mathcal{C}[S^{-1}]$ 是等价.

(ii) 进一步假设函子 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ 映 T 的元素为同构, 则 $\mathrm{Ran}_Q F$ (或 $\mathrm{Lan}_Q F$) 存在, 适当选取可使下图交换:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}[S^{-1}] \arrow[r, "\mathrm{Ran}_Q F \text{ 或 } \mathrm{Lan}_Q F"] & \mathcal{E} \\ \mathcal{I}[T^{-1}] \arrow[u, "\text{等价}"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

其中 $\mathcal{I}[T^{-1}] \to \mathcal{E}$ 由局部化的泛性质确定.

(iii) 对 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, 按 §1.10 的方式定义范畴 $S_{/X}$ 和 $S_{X/}$; 在 (ii) 的前提下, 存在典范同构

$$\begin{aligned}(\mathrm{Ran}_Q F)(QX) &\simeq \varprojlim_{[X \leftarrowtail Y] \in \mathrm{Ob}(S_{/X}^{\mathrm{op}})} F(Y),\\ (\mathrm{Lan}_Q F)(QX) &\simeq \varinjlim_{[X \rightarrowtail Y] \in \mathrm{Ob}(S_{X/})} F(Y).\end{aligned}$$

证明 讨论右乘性系即可. 易见命题 1.11.1 (ii) 的条件成立, 故 T 是右乘性系, 其局部化记为 $Q' : \mathcal{I} \to \mathcal{I}[T^{-1}]$; 另记命题 1.11.1 (ii) 的全忠实函子 $\mathcal{I}[T^{-1}] \to \mathcal{C}[S^{-1}]$ 为 ι_Q. 我们的条件还确保 ι_Q 是本质满的, 从而是等价. 断言 (i) 得证.

现在处理断言 (ii). 记 $\iota : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ 为包含函子. 根据泛性质, 存在 $F' : \mathcal{I}[T^{-1}] \to \mathcal{E}$ 使得下图实线部分交换:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{C} \arrow[d, "Q"'] \arrow[dr, "F"] & \\ \mathcal{I} \arrow[ur, "\iota"] \arrow[dr, "Q'"'] & \mathcal{C}[S^{-1}] \arrow[r, dashed, "L"] & \mathcal{E} \\ & \mathcal{I}[T^{-1}] \arrow[u, "\iota_Q"] \arrow[ur, "F'"'] & \end{tikzcd}$$

任取 ι_Q 的拟逆函子 ι_Q^{-1}. 以下论证 $F' \circ \iota_Q^{-1}$ 给出左 Kan 延拓 $\mathrm{Lan}_Q F$.

对任意 $\underline{X} := QX \in \mathrm{Ob}\left(\mathcal{C}[S^{-1}]\right)$. 按定义 1.6.2 的方式定义范畴 $(Q/\underline{X})$ 连同函子 $\Pi_{/\underline{X}} : (Q/\underline{X}) \to \mathcal{C}$. 鉴于断言 (i) 和定理 1.9.1 (i), 亦即 $\mathrm{Lan}_Q F$ 的极限构造法, 原问题化约为在 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ 的情形说明 $\varinjlim F\Pi_{/\underline{X}}$ 存在, 并且由 FX 给出. 细说如下.

将 $(Q/\underline{X})$ 的对象 $(Y, QY \to \underline{X})$ 用 $\mathcal{C}$ 的图表 $Y \xrightarrow{a} U \overset{s}{\leftarrowtail} X$ 代表, 关于 $\mathcal{I}$ 的条件确保 U 可以取为 $\mathcal{I}$ 的对象. 现在另取一组资料 $Y' \xrightarrow{b} U' \overset{t}{\leftarrowtail} X$, 同样设 $U' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$, 并考虑态射 $c : (Y, QY \to \underline{X}) \to (Y', QY' \to \underline{X})$, 由 $\mathcal{C}$ 的态射 $c : Y \to Y'$ 确定. 回顾 (1.10.1) 可知存在交换图表

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[d] & \\ Y \arrow[ur, "a"] \arrow[r] \arrow[d, "c"'] \arrow[dr, "bc"] & V & X \arrow[ul, tail, "s"'] \arrow[l, tail] \arrow[dl, tail, "t"] \\ Y' \arrow[r, "b"'] & U' \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

其中的 V 根据同样道理可取为 $\mathcal{I}$ 的对象. 表为 $\rightarrowtail$ 的箭头取 F 后皆为同构, 故 $U \to V \leftarrow U'$ 取 F 后亦然, 这就足以说明在描述任一族相容的态射 $f_{Y, QY \to \underline{X}} : FY \to L$ (符号如 §1.5) 时, 总能够

- ⋄ 先限制到形如 $U \xrightarrow{\mathrm{id}} U \overset{s}{\leftarrowtail} X$ 的对象上考察,
- ⋄ 继而由它在 $(X, QX \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X)$ 上的取值 $FX \to L$ 唯一确定之.

换言之, $\varinjlim F\Pi_{/\underline{X}} = \varinjlim_{(Y,QY\to\underline{X})} FY$ 确实取常值 FX.

最后考虑 (iii). 由条件可知对任何 $[X \rightarrowtail Y] \in \mathrm{Ob}(S_{X/})$, 存在态射 $[X \rightarrowtail Y] \to [X \rightarrowtail U]$ 使得 $U \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$. 既然 $S_{X/}$ 滤过 (命题 1.10.7), 这说明形如 $[X \rightarrowtail U]$ 的对象构成 $S_{X/}$ 的共尾子范畴 (定义 1.6.4, 命题 1.6.8), 所以应用命题 1.6.5 可得

$$\varinjlim_{[X\rightarrowtail Y]\in\mathrm{Ob}(S_{X/})} F(Y) \simeq \varinjlim_{\substack{[X\rightarrowtail U]\\ U\in\mathrm{Ob}(\mathcal{I})}} F(U),$$

而 (ii) 的论证表明右式的 $\varinjlim$ 实际取到常值 $\mathrm{Lan}_Q F(QX)$. □

注意到 Kan 延拓自带的态射 $\varepsilon : (\mathrm{Ran}_Q F)Q \to F$ 和 $\eta : F \to (\mathrm{Lan}_Q F)Q$ 可以由命题 1.11.2 (iii) 一眼看穿.

命题 1.11.3 在命题 1.11.2 的条件下, $\mathrm{Ran}_Q F$ (或 $\mathrm{Lan}_Q F$) 是 F 沿 Q 的绝对右 Kan 延拓 (或绝对左 Kan 延拓); 见定义 1.8.6.

证明 命题 1.11.2 设置的第一个条件只关乎 $\mathcal{C}$ 的左乘性系 (或右乘性系) S 和子范畴 $\mathcal{I}$, 无关 F; 第二个条件仅要求 F 映 $T := S \cap \mathrm{Mor}(\mathcal{I})$ 为同构. 特别地, 对于任意函子 $M : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, 关于 F 的条件直接遗传给 $MF : \mathcal{C} \to \mathcal{F}$.

以下仅论 $\mathrm{Lan}_Q F$ 情形. 沿用命题 1.11.2 证明中的符号, $\mathrm{Lan}_Q F$ 具体取作

$$\mathcal{C}[S^{-1}] \xrightarrow{\iota_Q^{-1}} \mathcal{I}[T^{-1}] \xrightarrow{F'} \mathcal{E}$$

之合成, 其中 $\iota_Q : \mathcal{I}[T^{-1}] \to \mathcal{C}[S^{-1}]$ 和 $F' : \mathcal{I}[T^{-1}] \to \mathcal{E}$ 皆来自局部化的泛性质.

于是 $M(\mathrm{Lan}_Q F) = MF'\iota_Q^{-1}$. 基于交换图表

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{I} \arrow[r, hook] \arrow[dr] & \mathcal{C} \arrow[r, "F"] & \mathcal{E} \arrow[r, "M"] & \mathcal{F} \\
& \mathcal{I}[T^{-1}] \arrow[ur, "F'"] \arrow[urr, "MF'"'] & &
\end{tikzcd}$$

可知 MF' 也由局部化的泛性质诱导. 对 $\mathcal{C} \xrightarrow{MF} \mathcal{F}$ 考虑命题 1.11.2 的构造, 可知 $\mathrm{Lan}_Q(MF) = MF'\iota_Q^{-1}$. 换言之, $\mathrm{Lan}_Q F$ 被 M 保持. □

1.12 伴随函子定理

日常生活中, 函子经常以伴随对的形式出现. 考虑范畴 $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ 和一对函子

$$F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$$

使得 (F, G) 构成伴随对; 此时 F 保 $\varinjlim$ 而 G 保 $\varprojlim$, 前提是所论的极限存在. 逆观之, 自然的问题是: 若函子 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 保 $\varinjlim$, 如何确保它有右伴随? 若函子 $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 保

$\varprojlim$, 如何确保它有左伴随? 许多情况下可以明确写出伴随函子, 但某些场合则需要抽象的存在性. 这类结果统称为伴随函子定理. 所需条件粗分为两类: 第一, 为了运用保 $\varinjlim$ (或保 $\varprojlim$) 的条件, 须设 $\mathcal{C}$ (或 $\mathcal{D}$) 余完备 (或完备), 第二, 我们还需要一些和集合大小密切相关的条件.

首务是以适当方式来改述伴随函子的存在性; 基于对偶性, 以下仅陈述左伴随的情形.

对于函子 $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 和 $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, 按照定义 1.6.2 的方式得到范畴 (c/G), 其对象是形如 $(d, c \xrightarrow{f} Gd)$ 的资料.

引理 1.12.1 函子 $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 有左伴随当且仅当对于所有 $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, 范畴 (c/G) 有始对象.

证明 取定 c. 在 (c/G) 中指定态射 $(d_0, c \xrightarrow{\beta_0} Gd_0) \to (d, c \xrightarrow{\beta} Gd)$ 相当于指定 $\alpha : d_0 \to d$ 使得图表

$$\begin{tikzcd} Gd_0 \arrow[rr, "G\alpha"] & & Gd \\ & c \arrow[ul, "\beta_0"] \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

交换. 由此可见 (d_0, β_0) 是 (c/G) 的始对象当且仅当

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(d_0, d) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, Gd) \\ \alpha &\longmapsto \beta := (G\alpha)\beta_0 \end{aligned} \tag{1.12.1}$$

对每个 $d \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ 都是双射. 这是以下论证的基石.

设 G 有左伴随 F 而 $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. 兹断言 Fc 连同伴随对的单位态射 $\eta_c : c \to G(Fc)$ 给出 (c/G) 的始对象. 考虑任意 $(d, c \xrightarrow{\beta} Gd)$. 在 (1.12.1) 中给出的映射 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Fc, d) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, Gd)$ 映 α 为 $(G\alpha)\eta_c$; 然而这正是伴随对在 Hom 集上给出的双射, 故 (Fc, η_c) 确实为始对象.

反之设 (c/G) 对于所有 c 都有始对象, 记为 $(Fc, \eta_c : c \to G(Fc))$. 既然始对象精确到唯一同构是唯一的, 它们构成函子 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, 而 $(\eta_c)_{c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$ 给出 $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to GF$. 对所有 $(c, d) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \times \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ 按 (1.12.1) 定义双射

$$\begin{aligned} \varphi_{c,d} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Fc, d) &\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, Gd) \\ \alpha &\mapsto (G\alpha)\eta_c. \end{aligned}$$

它们对 c, d 显然具有函子性. 因此 (F, G, φ) 确定了以 η 为单位的伴随对. □

定义 1.12.2 设 $\mathcal{E}$ 为范畴. 称 $\mathrm{Ob}(\mathcal{E})$ 的非空小子集 Γ 为**弱始系**, 如果对每个 $e' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E})$ 皆存在 $e \in \Gamma$ 使得 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(e, e')$ 非空. 若 $e \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E})$ 而 $\{e\}$ 是弱始系, 则我们称 e 本身是**弱始对象**.

始对象必然是弱始对象. 同理可定义何谓弱终系和弱终对象.

引理 1.12.3 若 Γ 是范畴 $\mathcal{E}$ 的弱始系, 而且积 $e := \prod_{x\in\Gamma} x$ 存在, 则 e 是弱始对象.

证明 对任何 $e' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E})$, 存在 $y \in \Gamma$ 和 $y \to e'$. 取 $e \xrightarrow{\text{投影}} y \to e'$ 的合成. $\square$

回到伴随函子定理的讨论. 为了应用引理 1.12.1 的判准, 必须研究定义 1.6.2 的投影函子 $\Pi_{c/} : (c/G) \to \mathcal{D}$.

命题 1.12.4 设范畴 $\mathcal{D}$ 完备, 函子 $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 保小 $\varprojlim$. 取定 $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

(i) 函子 $\Pi_{c/}$ 是保守的 (定义 1.5.4), 并且生所有小 $\varprojlim$ (定义 1.5.2).

(ii) 范畴 (c/G) 完备.

(iii) 函子 $\Pi_{c/}$ 映单态射为单态射.

证明 对于 (i), 保守性质为显然. 关键在于对给定的 $\beta : J \to (c/G)$, 映 $j \in \mathrm{Ob}(J)$ 为 $(d_j, c \xrightarrow{f_j} Gd_j)$ 者, 将 $\varprojlim_j d_j$ 连同它自带的投影态射提升为 $(\varprojlim_j d_j, c \xrightarrow{f} G(\varprojlim_j d_j))$, 并说明它给出 $\varprojlim \beta$. 具体取法是令 f 为以下交换图表第一行的合成

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "\exists!"] \arrow[dr, "f_{j'}"'] & \varprojlim_j Gd_j \arrow[d] & G(\varprojlim_j d_j) \arrow[l, "\exists!"', "\sim"] \arrow[dl] \\ & Gd_{j'} & \end{tikzcd} \qquad j' \in \mathrm{Ob}(J).$$

其余验证皆属例行公事, 见 §1.5 的相关例证, 在此略去.

断言 (ii) 来自 $\mathcal{D}$ 的完备性和 (i).

现在考虑 (iii). 第一步是如下观察: 对于任意范畴中的任意态射 $f : a \to b$, 引理 1.2.6 和余像 $\mathrm{coim}(f)$ 的定义蕴涵

$$f \text{ 单} \iff a \xrightarrow{\sim} \mathrm{coim}(f) \iff \begin{tikzcd} a \arrow[r, "\mathrm{id}_a"] \arrow[d, "\mathrm{id}_a"'] & a \arrow[d, "f"] \\ a \arrow[r, "f"'] & b \end{tikzcd} \text{ 是拉回图表.}$$

今考虑 (c/G) 中从 $(d', c \to Gd')$ 到 $(d, c \to Gd)$ 的单态射, 由 $\mathcal{D}$ 中的态射 $\iota : d' \to d$ 确定. 由 (i) 可知

$$(d', c \to Gd') \underset{(d, c\to Gd)}{\times} (d', c \to Gd') = \left(d' \underset{d}{\times} d',\ c \to G\left(d' \underset{d}{\times} d' \right) \right).$$

左式等同于 $(d', c \to Gd')$, 两个投影态射对应 $\mathrm{id}_{d'}$, 从而 $d' \underset{d}{\times} d'$ 也按相同方式等同于 d'. 换言之, ι 单. $\square$

引理 1.12.5 设范畴 $\mathcal{E}$ 完备. 若 $\mathcal{E}$ 有弱始系 Γ, 则 $\mathcal{E}$ 有始对象.

证明 完备性和引理 1.12.3 确保 $\mathcal{E}$ 有弱始对象 e. 其次, 取 $\mathcal{E}$ 的全子范畴 I 使得 $\mathrm{Ob}(I) = \{e\}$; 这是小范畴. 完备性确保包含函子 $I \to \mathcal{E}$ 有 $\varprojlim$, 记为 x, 它带有典范态射 $i : x \to e$. 泛性质读作

$$\begin{aligned} i_* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(t, x) &\xrightarrow{1:1} \{\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(t, e) : \forall \theta, \theta' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(e, e),\ \theta\phi = \theta'\phi\} \\ \psi &\longmapsto i\psi \end{aligned} \tag{1.12.2}$$

其中 t 是 $\mathcal{E}$ 的任意对象. 由此立见 i 是单态射.

下面说明 x 是始对象. 给定 $y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E})$, 任取 $e \to y$, 记 $x \xrightarrow{i} e \to y$ 的合成为 f. 对任意 $g : x \to y$, 考虑等化子 $j : \ker(f, g) \hookrightarrow x$. 存在态射 $k : e \to \ker(f, g)$. 因此有 $ijk : e \to e$. 由 (1.12.2) 可得 $(ijk)i = (\mathrm{id}_e)i = i$. 左边消去单态射 i 给出 $jki = \mathrm{id}_x$; 配合 $fj = gj$ 遂有 $f = g$. 明所欲证. □

以下结果肇自 P. Freyd, 又称广义伴随函子定理.

定理 1.12.6 (P. Freyd 的伴随函子定理) *考虑 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$.*

(i) *设 $\mathcal{D}$ 是完备范畴, 函子 $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 保小 $\varprojlim$. 则 G 有左伴随函子当且仅当如下的解集条件成立: 对任意 $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, 存在一族态射 $(f_i : c \to Gd_i)_{i \in I}$, 其中 I 是小集, 使得对每个态射 $f : c \to Gd$ 皆存在 $i \in I$ 和态射 $\alpha : d_i \to d$ 使 f 分解为 $c \xrightarrow{f_i} Gd_i \xrightarrow{G\alpha} Gd$.*

(ii) *设 $\mathcal{C}$ 是余完备范畴, 函子 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 保小 $\varinjlim$. 则 F 有右伴随函子当且仅当如下的余解集条件成立: 对任意 $d \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$, 存在一族态射 $(g_i : Fc_i \to d)_{i \in I}$, 其中 I 是小集, 使得对每个态射 $g : Fc \to d$ 皆存在 $i \in I$ 和态射 $\beta : c \to c_i$ 使 g 分解为 $Fc \xrightarrow{F\beta} Fc_i \xrightarrow{g_i} d$.*

证明 仅探讨 (i). 任取 $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, 引理 1.12.1 蕴涵 G 有左伴随当且仅当 (c/G) 有始对象. 解集条件无非是说 (c/G) 有弱始系 $\{(d_i, c \to Gd_i) : i \in I\}$, 其中 I 是小集. 始对象既是弱始对象的特例, 故 "仅当" 方向是明显的. 对于另一方向, 引理 1.12.5 将问题进一步化约为证 (c/G) 完备. 然而这无非是命题 1.12.4 (ii) 的内容. □

例 1.12.7 考虑群范畴 Grp 及遗忘函子 $U : \mathsf{Grp} \to \mathsf{Set}$. 已知 Grp 完备, 而 U 保小 $\varprojlim$. 为了以定理 1.12.6 得出 U 的左伴随 $\mathrm{F} : \mathsf{Set} \to \mathsf{Grp}$, 亦即从集合构造相应的自由群, 关键在于对每个小集 c 验证解集条件.

考虑任意 $d \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Grp})$ 和映射 $f : c \to Ud$. 分解 f 为 $c \to Us \xrightarrow{U\iota} Ud$, 其中 s 是 $f(c)$ 在 d 中生成的子群, $\iota : s \to d$ 为包含同态. 以生成集 $f(c)$ 和关系来展示 s, 可见这些资料 $(s, c \to Us)$ 的全体同构类构成一个小集. 如是确立解集条件.

对于其它代数结构如 Ab, R-Mod 等等如法炮制, 同样得到遗忘函子的左伴随, 详见 [16, Chapter V, §6] 后半部的讨论. 同理, 对于任意交换环 $\Bbbk$, 对 $\Bbbk$-代数取其乘法幺

半群给出从 $\Bbbk$-Alg 到 Mon 的遗忘函子 U; 同样技巧可证 U 有左伴随, 映幺半群 M 为 $\Bbbk[M]$, 见 [25, 定义 5.6.1].

伴随函子定理的进路 1.12.6 不但对诸般代数结构一体适用, 在自由群的情形还比经典构造 [25, §4.8] 更简洁.

行将介绍的特殊伴随函子定理 1.12.13 以关于生成元和子对象的条件来取代解集条件. 我们暂且岔题来介绍范畴中的生成元和余生成元; 在 §2.10 还会用到这些概念.

定义 1.12.8 设 $\mathcal{E}$ 为范畴, Σ 为 $\mathrm{Ob}(\mathcal{E})$ 的非空小子集.

- 当以下条件成立时, 称 Σ 是**生成系**: 给定 $\mathcal{E}$ 中任何一对态射 $f, g : x \to y$, 若对所有 $s \in \Sigma$ 和所有态射 $\epsilon : s \to x$ 皆有 $f\epsilon = g\epsilon$, 则 $f = g$. 若 $\{s\}$ 是 $\mathcal{E}$ 的生成系, 则称 s 是 $\mathcal{E}$ 的**生成元**.

- 当以下条件成立时, 称 Σ 是**余生成系**: 给定 $\mathcal{E}$ 中任何一对态射 $f, g : x \to y$, 若对所有 $s \in \Sigma$ 和所有态射 $\delta : y \to s$ 皆有 $\delta f = \delta g$, 则 $f = g$. 如果 $\{s\}$ 是 $\mathcal{E}$ 的余生成系, 则称 s 是 $\mathcal{E}$ 的**余生成元**.

它们的对偶性是明显的. 设 Σ 是 $\mathcal{E}$ 的生成系, 根据余积的泛性质, $\coprod_{s\in\Sigma} s$ 若存在则是 $\mathcal{E}$ 的生成元; 余生成系之于积也有相应的结果.

引理 1.12.9 设 Σ 是 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 的小子集. 若 $\mathcal{C}$ 的对象皆能表为 Σ 的元素的 $\varinjlim$ (或 $\varprojlim$), 则 Σ 是生成系 (或余生成系).

证明 以 $\varinjlim$ 为例, 态射 $\varinjlim \alpha =: x \to y$ 由它和所有 $\alpha(i) \xrightarrow{\iota_i} \varinjlim \alpha$ 的合成唯一确定. □

例 1.12.10 且看生成元和余生成元的若干初步例子.

- 在 Set 中, 独点集 $\{\mathrm{pt}\}$ 是生成元: 考虑一对映射 $f, g : X \to Y$, 指定 $\epsilon : \{\mathrm{pt}\} \to X$ 相当于指定 $x \in X$, 故 $f\epsilon = g\epsilon$ 对所有 ϵ 成立等价于 f 和 g 处处相等. 集合 $\{0, 1\}$ 是余生成元, 因为若存在 $x \in X$ 使得 $f(x) \neq g(x)$, 则可取 $\delta : Y \to \{0, 1\}$ 使得 $\delta(f(x)) \neq \delta(g(x))$.

- 设 CHaus 为紧 Hausdorff 空间和其间的连续映射构成之范畴. 独点集 $\{\mathrm{pt}\}$ 仍是生成元. 余生成元则可由区间 $[0, 1]$ 给出, 这是因为对于任意紧 Hausdorff 空间 Y 和相异点 $a, b \in Y$, Urysohn 引理 [26, 定理 6.3.1 和推论 7.2.6] 给出连续映射 $\delta : Y \to [0, 1]$ 使得 $\delta(a) = 0$ 而 $\delta(b) = 1$.

- 设 R 为环, 在 R-Mod 中 R 是生成元, 因为指定 R-模同态 $R \to M$ 相当于指定 M 的元素. 取余积可知任何非零自由 R-模皆是生成元.

- 考虑小范畴 $\mathcal{E}$ 的米田嵌入 $h_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}^\wedge$. 此时 $h_{\mathcal{E}}(\mathrm{Ob}(\mathcal{E}))$ 是 $\mathcal{E}^\wedge$ 的生成系. 这是米田嵌入的稠密性定理 1.7.3 和引理 1.12.9 的立即结论.

特殊伴随函子定理涉及另一个关于集合论的概念. 请先回忆定义 1.1.3 引入的偏序集 $(\mathrm{Sub}_e, \subset)$ 和 $(\mathrm{Quot}_e, \twoheadleftarrow)$, 其中 e 是某范畴 $\mathcal{E}$ 的对象.

定义 1.12.11 称一个范畴 $\mathcal{E}$ 是**良幂**的 (或**余良幂**的), 如果对于每个 $e \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E})$, 集合 Sub_e (或 Quot_e) 是小集.

良幂性质在本节将与完备性搭配. 对 Sub_e 的每个元素任选代表元 $s \hookrightarrow e$; 因此可以对任何子集 $S \subset \mathrm{Sub}_e$ 谈论其纤维积 $\prod_{s \in S}(s \hookrightarrow e)$ 存在与否, 不依赖代表元的选法. 对偶地, 我们也可以谈论子集 $S \subset \mathrm{Quot}_e$ 的纤维余积 $\coprod_{s \in S}(e \twoheadrightarrow s)$ 存在与否.

- ◇ 若 $\mathcal{E}$ 完备, 则良幂蕴涵对于所有 e, 一切子集 $S \subset \mathrm{Sub}_e$ 都有纤维积.
- ◇ 若 $\mathcal{E}$ 余完备, 则余良幂蕴涵对于所有 e, 一切子集 $S \subset \mathrm{Quot}_e$ 都有纤维余积.

引理 1.12.12 设 $\mathcal{E}$ 为完备良幂范畴. 若存在余生成系 $\Sigma \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{E})$, 则 $\mathcal{E}$ 有始对象.

证明 按照定义 1.12.8 之后的讨论, $e := \prod_{s \in \Sigma} s$ 是 $\mathcal{E}$ 的余生成元 e. 令 x 为 Sub_e 中所有元素的纤维积. [5] 以下验证 x 是 $\mathcal{E}$ 的始对象.

按构造, $x \hookrightarrow e$ 是偏序集 $(\mathrm{Sub}_e, \subset)$ 的下确界; 特别地, $\mathrm{Sub}_x = \{x\}$. 对于任何对象 y 和 $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(x, y)$, 等化子 $\ker(f, g)$ 因而只能是 x 自身, 导致 $f = g$. 为了说明 x 是始对象, 尚须对每个 y 证 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(x, y)$ 非空.

在 $\mathcal{E}$ 中取积 $e^{\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(y,e)}$. 定义态射 $i : y \to e^{\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(y,e)}$, 使得它在 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(y, e)$ 对应的分量上的投影正是 f. 由于 e 是余生成元, 易证 i 单. 构作拉回图表

$$\begin{tikzcd} z \arrow[r] \arrow[d, "j"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & y \arrow[d, hook, "i"] \\ e \arrow[r, "\text{对角态射}"'] & e^{\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(y,e)}. \end{tikzcd}$$

引理 1.1.5 确保 j 亦单, 给出 e 的子对象. 但 x 是 Sub_e 的下确界, 于是存在 $x \hookrightarrow z$. 复取 $x \hookrightarrow z \to y$ 的合成即所求. □

定理 1.12.13 (特殊伴随函子定理) 设 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 为范畴.

(i) 函子 $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 若满足下述条件则有左伴随.

- ◇ $\mathcal{D}$ 完备而且良幂, G 保小 $\varprojlim$;
- ◇ 存在余生成系 $\Sigma \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$.

(ii) 函子 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 若满足下述条件则有右伴随.

- ◇ $\mathcal{C}$ 余完备而且余良幂, F 保小 $\varinjlim$;
- ◇ 存在生成系 $\Sigma \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

[5] 证明仅在此处涉及良幂条件.

证明 根据对偶性, 处理 (i) 即可. 仍旧以引理 1.12.1 将之化约为证 (c/G) 有始对象, 其中 $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, 策略是应用引理 1.12.12.

命题 1.12.4 (ii) 表明 (c/G) 完备. 此外, 循定义 1.12.8 和 (c/G) 的定义易见所有形如 $(d, c \to Gd)$, 其中 $d \in \Sigma$ 的资料构成 (c/G) 的余生成系; 特别地, 由于 Σ 小, 易见这是小集.

设 $e = (d, c \to Gd) \in \mathrm{Ob}(c/G)$. 子对象是单态射的同构等价类, 而根据命题 1.12.4, 投影函子 $\Pi_{c/} : (c/G) \to \mathcal{D}$ 是保单态射的保守函子, 故 $\Pi_{c/}$ 诱导保序嵌入 $\mathrm{Sub}_e \hookrightarrow \mathrm{Sub}_d$. 至此证得 (c/G) 良幂. □

推论 1.12.14 *若完备良幂范畴 $\mathcal{D}$ 具有余生成系 Σ, 则 $\mathcal{D}$ 余完备.*

对偶地, 若余完备余良幂范畴 $\mathcal{C}$ 具有生成系 Σ, 则 $\mathcal{C}$ 完备.

证明 证 $\mathcal{D}$ 的版本即可. 设 I 为小范畴. 鉴于例 1.6.3, 仅需证 (α/Δ) 对所有 $\alpha : I \to \mathcal{C}$ 皆有始对象; 鉴于引理 1.12.1, 这又等价于说对角函子 Δ 有左伴随. 易见 Δ 保小 $\varprojlim$ 和小 $\varinjlim$, 故应用定理 1.12.13 即可. □

例 1.12.15 令 $\iota : \mathsf{CHaus} \to \mathsf{Top}$ 为从紧 Hausdorff 空间范畴到拓扑空间范畴的包含函子. 例 1.12.10 已说明 CHaus 有余生成元 $[0, 1]$. 基于 Tychonoff 定理 [26, 定理 7.7.2], 易证 CHaus 完备, 而 ι 保小 $\varprojlim$ (细节留给读者). 此外, 小集的幂集依然小, 故 CHaus 良幂, 而定理 1.12.13 (i) 给出 ι 的左伴随 $C : \mathsf{Top} \to \mathsf{CHaus}$. 在点集拓扑学中, $C(X)$ 称为空间 X 的 **Stone–Čech 紧化**; 伴随对的单位给出典范态射 $\eta_X : X \to \iota C(X)$. 引理 1.12.12 和定理 1.12.13 中的构造手法和 Stone–Čech 紧化的经典构造是一致的.

伴随函子定理可以给出函子可表的充分条件. 关于可表函子的介绍见诸 [25, 定义 2.5.2] 或定义 1.7.2. 要点是以下观察: 若函子 $G : \mathcal{D} \to \mathsf{Set}$ 有左伴随 F, 则 G 可表. 诚然, 考虑独点集 $\{\mathrm{pt}\}$ 和 $r_G := F(\{\mathrm{pt}\})$, 于是典范双射

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(r_G, d) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(\{\mathrm{pt}\}, Gd) \simeq Gd, \quad d \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}).$$

蕴涵 $G \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(r_G, \cdot)$.

推论 1.12.16 *若完备良幂范畴 $\mathcal{D}$ 有余生成系 Σ, 则函子 $G : \mathcal{D} \to \mathsf{Set}$ 可表当且仅当它保小 $\varprojlim$.*

证明 “仅当” 方向是可表函子的一般性质. 至于 “当” 的方向, 定理 1.12.13 确保 G 有左伴随 $F : \mathsf{Set} \to \mathcal{D}$. □

1.13 紧对象, 可展示范畴

范畴论的紧性是代数, 几何以及代数几何中许多有限性条件的共同提纯. 本节选定范畴 $\mathcal{C}$, 并且假设 $\mathcal{C}$ 具备所有的滤过小 $\varinjlim$. 考虑滤过小范畴 I 和函子 $\alpha : I \to \mathcal{C}$. 对于 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, 典范态射族 $\iota_i : \alpha(i) \to \varinjlim \alpha$ 诱导一族 $(\iota_i)_* : \mathrm{Hom}(X, \alpha(i)) \to \mathrm{Hom}\left(X, \varinjlim \alpha\right)$, 其中 $i \in \mathrm{Ob}(I)$, 继而诱导典范映射

$$\varinjlim_{i \in \mathrm{Ob}(I)} \mathrm{Hom}\left(X, \alpha(i)\right) \to \mathrm{Hom}\left(X, \varinjlim \alpha\right). \tag{1.13.1}$$

定义 1.13.1 设 $(P, \leq)$ 为非空偏序集, κ 为无穷基数. 若任何满足 $|P_0| < \kappa$ 的子集 P_0 在 P 中都有上界, 则称 $(P, \leq)$ 是 κ-滤过的.

若 $\kappa \leq \kappa'$, 则 κ'-滤过蕴涵 κ-滤过. 取 $\kappa := \aleph_0 = \omega$ 则复归例 1.6.7 的滤过偏序集.

定义 1.13.2 若 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 使得 (1.13.1) 对所有滤过小范畴 I 和 $\alpha : I \to \mathcal{C}$ 都是同构, 则称 X 为 $\mathcal{C}$ 的**紧对象**.

给定小基数 κ, 若进一步限制 I 为 κ-滤过偏序小集, 则满足相应条件的 X 称为 **κ-紧对象**.

按定义 1.5.2 的术语, X 是紧对象当且仅当 $\mathrm{Hom}(X, \cdot) : \mathcal{C} \to \mathsf{Set}$ 保滤过小 $\varinjlim$. 若 $\kappa \leq \kappa'$, 则 κ-紧蕴涵 κ'-紧.

注记 1.13.3 紧对象和 κ-紧对象的定义方式乍看相异, 前者涉及所有滤过小范畴, 后者仅容许滤过偏序小集. 然而有一则不尽平凡的事实 [1, Theorem 1.5]: 对所有滤过小范畴 I, 存在滤过偏序小集 $(P, \leq)$ 连同共尾函子 $\mathcal{P} \to I$. 共尾函子不改变 $\varinjlim$. 由此可以推得紧性等价于 $\aleph_0$-紧性.

运用滤过范畴的定义和滤过 $\varinjlim$ 在 Set 中的具体描述 (命题 1.6.11), 可见

- 映射 (1.13.1) 满 $\iff$ 所有 $f : X \to \varinjlim \alpha$ 都有分解 $X \xrightarrow{f_i} \alpha(i) \xrightarrow{\iota_i} X$;
- 映射 (1.13.1) 单 $\iff$ 对所有 $i \in \mathrm{Ob}(I)$ 和满足 $\iota_i f = \iota_i g$ 的 $f, g \in \mathrm{Hom}(X, \alpha(i))$, 存在 I 中的态射 $i \to j$ 使得 f 和 g 在 $\mathrm{Hom}(X, \alpha(j))$ 中的像相等.

例 1.13.4 对于 $\mathcal{C} = \mathsf{Set}$ 情形, X 是紧对象当且仅当 X 它是有限集. "当" 的方向直接来自上述讨论和 $\varinjlim \alpha$ 的具体描述. 至于 "仅当" 方向, 请将 X 表作其有限子集的滤过 $\varinjlim$ 并考虑 id_X.

例 1.13.5 设 R 为环, 则对于 $\mathcal{C} = R\text{-}\mathsf{Mod}$ 情形, X 是紧对象当且仅当 X 具备有限展示, 换言之, 存在 $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 R-模的正合列

$$R^{\oplus b} \to R^{\oplus a} \xrightarrow{p} X \to 0.$$

关于 R-Mod 中的滤过 $\varinjlim$, 可见 [25, 注记 6.2.3] 的说明. “仅当” 方向留作本章习题. 且来勾勒 “当” 的方向. 取 $R^{\oplus a}$ 的标准基的像, 得到 X 的一族生成元 $x_1, \ldots, x_a$. 兹证明 (1.13.1) 单: 设 $f, g \in \mathrm{Hom}(X, \alpha(i))$ 满足 $\iota_i f = \iota_i g$, 则对每个 $x \in \{x_1, \ldots, x_a\}$ 都可以找到 $i \to j_x$ 使得 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $\alpha(j_x)$ 中的像相等, 继而由滤过范畴的性质得到所求的 $i \to j$.

其次证 (1.13.1) 满: 考虑 $f : X \to \varinjlim \alpha$. 对每个 $x \in \{x_1, \ldots, x_a\}$ 都存在 j_x 和 $m_x \in \alpha(j_x)$ 使得 $f(x) = \iota_{j_x}(m_x)$; 同样地, 滤过性质确保 j_x 有无关于 x 的取法, 记为 j. 这就决定了态射 $m : R^{\oplus a} \to \alpha(j)$ 使得 $fp = \iota_j m$. 因为 b 有限, 取适当的 $j \to i$ 还可以确保 m 在 $R^{\oplus b}$ 的像上恒为零, 这就给出所求的 f_i.

对于各类代数结构所确定的紧对象, [1, 1.2 Examples, 3.12 Theorem] 有更完整的讨论. 譬如群范畴 Grp 的紧对象恰好是具备有限展示的群.

借由对 (1.13.1) 中的滤过范畴 I 作进一步限制, 可以得到紧性的种种变奏. 首先聚焦于 [25, 定义 1.4.10] 曾介绍的正则基数, 此处宜作更精细的梳理[6]. 首先设 $\alpha > 0$ 为任意的无穷序数. 考虑极限序数 $\theta > 0$ 和严格递增的序数列 $(a_\beta)_{\substack{\beta:\text{序数}\\ \beta<\theta}}$, 若 $\sup_{\beta<\theta} a_\beta = \alpha$, 则称此列与 α **共尾**. 若 α 是极限序数, 定义

$$\mathrm{cf}(\alpha) := \inf\left\{\theta > 0 : \text{极限序数}, \exists (a_\beta)_{\beta<\theta} \text{ 如上, 与 } \alpha \text{ 共尾}\right\};$$

此 inf 有意义, 并且能被所示的某个 θ 取到; 关于序数的 sup 和 inf 详见 [25, 定理 1.2.10]. 取 $a_\beta := \beta$ 立见 $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \alpha$.

定义 1.13.6 若无穷基数 κ 作为序数满足 $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$, 则称之为**正则基数**.

命题 1.13.7 设 $\alpha > 0$ 为极限序数:

(i) $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) = \mathrm{cf}(\alpha)$;

(ii) 若非空子集 $S \subset \alpha$ 满足 $\sup S = \alpha$, 则作为序数有 $|S| \geq \mathrm{cf}(\alpha)$;

(iii) $\mathrm{cf}(\alpha)$ 是正则基数.

证明 对于 (i), 关键是证 $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha))$. 设 $(a_\beta)_{\beta<\theta}$ 与 α 共尾, $(b(\gamma))_{\gamma<\psi}$ 与 θ 共尾, 则 $\left(a_{b(\gamma)}\right)_{\gamma<\psi}$ 与 α 共尾. 由此可见 $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \mathrm{cf}(\theta)$. 再取 $\theta = \mathrm{cf}(\alpha)$ 便是.

对于 (ii), 任取双射 $f : |S| \to S$. 回忆到 $|S|$ 是序数, 而 $\alpha \notin S$. 运用超穷递归原理, 可得极限序数 θ 和保序嵌入 $i : \theta \hookrightarrow |S|$ (因而 $\theta \leq |S|$), 使得 S 中的序数列 $(f(i(\beta)))_{\beta<\theta}$ 严格递增, 而且 $\sup_{\beta<\theta} f(i(\beta)) = \sup S = \alpha$. 具体地说, 取

$$\begin{aligned} i(0) &:= \inf |S| = 0, \\ i(n+1) &:= \inf\left\{t \in |S| : f(t) > f(i(n))\right\}, \quad n \in \omega := \{0, 1, 2, \ldots\}, \\ i(\omega) &:= \inf\left\{t \in |S| : \forall k < \omega,\ f(t) > f(i(k))\right\}, \end{aligned}$$

[6] 对集合论无感的读者可以跳过以下内容.

依此超穷地类推, 止于 θ. 由此立见 $|S| \geq \theta \geq \mathrm{cf}(\alpha)$.

考虑 (iii). 鉴于 (i), 说明 $\mathrm{cf}(\alpha)$ 是基数即可. 假设 $\beta > 0$ 为极限序数, 则 (ii) 蕴涵 $\beta \geq |\beta| \geq \mathrm{cf}(\beta)$; 代入 $\beta = \mathrm{cf}(\alpha)$ 和 (i) 可知 $\mathrm{cf}(\alpha) = |\mathrm{cf}(\alpha)|$, 亦即 $\mathrm{cf}(\alpha)$ 为基数. □

命题 1.13.8 (见 [9, Theorem 5.10]) 设 λ 为无穷基数, 则作为序数有 $\mathrm{cf}(2^\lambda) > \lambda$.

证明 这是集合论中的标准结果. 给定极限序数 $0 < \alpha \leq \lambda$ 和一列序数 $(a_\beta)_{\beta<\alpha}$, 满足 $a_\beta < 2^\lambda$. 记 $\kappa_\beta := |a_\beta| < 2^\lambda$. 按序数的 sup 和基数运算的定义,

$$\left|\sup_{\beta<\alpha} a_\beta\right| = \left|\bigcup_{\beta<\alpha} a_\beta\right| \leq \sum_{\beta<\alpha} \kappa_\beta.$$

根据基数运算的性质, 特别是 König 引理 (参考 [25, 习题 1.6], 或 [9, Theorem 5.10]),

$$\begin{aligned}\sum_{\beta<\alpha} \kappa_\beta < \prod_{\beta<\alpha} 2^\lambda &= (2^\lambda)^{|\alpha|} \\ &= 2^{\lambda\cdot|\alpha|} \leq 2^{\lambda\cdot\lambda} = 2^\lambda;\end{aligned}$$

最后一步用到了 [25, 定理 1.4.8]. 这就表明不可能有 $\lambda \geq \mathrm{cf}(2^\lambda)$. □

引理 1.13.9 设 T 为小集, 则存在正则小基数 μ 使得 $\mu > |T|$.

证明 回忆到 Grothendieck 宇宙 $\mathcal{U}$ 已经选定. 问题仅关乎 $|T|$, 不妨设 $T \in \mathcal{U}$ 无穷. 于是其幂集 $P(T) \in \mathcal{U}$. 记 $\lambda := |T|$. 命题 1.13.8 断言 $\mathrm{cf}(2^\lambda) > \lambda$. 由于 $\mathrm{cf}(2^\lambda)$ 既是正则基数 (命题 1.13.7 (iii)), 又能嵌为 $2^\lambda = |P(T)|$ 的子集, 故 $\mu := \mathrm{cf}(2^\lambda)$ 即所求. □

现在切回范畴论的主线. 以下概念源于 [7], 教科书则是 [1, Chapters 1, 2].

定义 1.13.10 (P. Gabriel, F. Ulmer) 设范畴 $\mathcal{C}$ 如前所述, 而 κ 是正则小基数.

1. 满足以下条件的 $\mathcal{C}$ 称为 **κ-可达范畴**:
   - ◇ $\mathcal{C}$ 具有所有 κ-滤过小 $\varinjlim$ (定义 1.13.1);
   - ◇ 存在由 κ-紧对象 (定义 1.13.2) 构成的小子集 $S \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, 使得每个 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 皆可表成 S 的元素的 κ-滤过小 $\varinjlim$.
2. 若 κ-可达范畴之间的函子保 κ-滤过小 $\varinjlim$, 则称之为 κ-可达函子.
3. 余完备的 κ-可达范畴称为 **κ-可展示范畴**[7].

对某个正则小基数 κ 是 κ-可达 (或 κ-可展示) 的范畴称为可达 (或可展示) 范畴. 类似地, 如果函子对某个正则小基数 κ 是 κ-可达的, 则称为可达函子.

[7] 一度被 Gabriel 称为代数范畴, 文献 [1, 7] 称之为局部可展示范畴, 此处从 [15, A.1.1] 改名.

可以验证例 1.13.4 和 1.13.5 讨论的范畴 Set 和 R-Mod 都是可展示的, 事实上它们是 $\aleph_0$-可展示的; 亦见本章习题.

对于以下重要结果, 此处仅能给予部分的证明.

定理 1.13.11 (P. Gabriel, F. Ulmer) 设 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 为 κ-可展示范畴之间的函子, 则 F 有右伴随当且仅当它保小 $\varinjlim$, 有左伴随当且仅当它保小 $\varprojlim$ 和 κ-滤过小 $\varinjlim$.

证明 关于右伴随的 "仅当" 方向是明白的, 另一方向则导自特殊伴随函子定理 1.12.13 和以下事实. 第一, 引理 1.12.9 蕴涵定义 1.13.10 中的 S 是 $\mathcal{C}$ 的生成系; 其次, 可展示范畴总是余良幂的, 见 [1, 1.58 Theorem].

关于左伴随的断言导自 Freyd 的伴随函子定理 1.12.6, 详见 [1, 1.66 Theorem]. □

习题

1. 证明任何范畴上的加性范畴结构若存在则唯一. 提示 应用命题 1.3.5.
2. 对照例 1.5.6 的情形, 考虑从紧 Hausdorff 空间范畴 CHaus 到集合范畴 Set 的遗忘函子 U, 证明 U 生所有小 $\varprojlim$. 说明它不生所有小 $\varinjlim$.
3. 令 $\mathcal{I}$ 为所有有限集相对于满射所成的范畴. 证明 $\mathcal{I}^{\mathrm{op}}$ 不是 §1.6 所谓的滤过范畴.
4. 在 §1.7 的讨论中, 取定交换环 $\Bbbk$, 要求 $\mathcal{C}$ 是 $\Bbbk$-Mod-范畴, 在 $\mathcal{C}^\wedge$ 和 $\mathcal{C}^\vee$ 的定义中以 $\Bbbk$-Mod 代 Set, 并且要求函子都是 $\Bbbk$-线性的. 试为定理 1.7.1 和 1.7.3 给出对应的 $\Bbbk$-线性版本.
5. 在 Kan 延拓的定义 1.8.1 中, 证明任何态射 $F \to F'$ 都诱导典范态射 $\mathrm{Lan}_K F \to \mathrm{Lan}_L F'$ 和 $\mathrm{Ran}_K F \to \mathrm{Ran}_L F'$, 前提是这些 Kan 延拓存在. 试刻画这些诱导态射.
6. 证明若函子 $M : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ 有左伴随 (或右伴随), 则 M 保 $\mathrm{Ran}_K F$ (或 $\mathrm{Lan}_K F$).

   提示 基于对偶性, 且设 M 有右伴随 N, 以 $\eta' : \mathrm{id} \to NM$ 和 $\varepsilon' : MN \to \mathrm{id}$ 为单位和余单位. 对于任意函子 $L : \mathcal{D} \to \mathcal{F}$, 我们有典范双射

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}^{\mathcal{D}}}\left(M(\mathrm{Lan}_K F), L\right) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{D}}}\left(\mathrm{Lan}_K F, NL\right) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{C}}}\left(F, NLK\right) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{\mathcal{C}}}\left(MF, LK\right). \end{aligned}$$

   运用 η' 和 ε' 的一般性质, 验证上述双射在 $L = M(\mathrm{Lan}_K F)$ 时映 id 为 $M\eta$, 其中 η 是 $\mathrm{Lan}_K F$ 自带的态射.

   对于一般的 L, 以熟知的技巧 (参照米田引理的证明) 验证上述双射将任意 $\varphi : M(\mathrm{Lan}_K F) \to L$ 映为合成

$$(\varphi K)(M\eta) : MF \xrightarrow{M\eta} M(\mathrm{Lan}_K F)K \xrightarrow{\varphi K} LK.$$

7. 考虑函子图表

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{D} \arrow[dr, "E"] & \\ \mathcal{C} \arrow[ur, "F"] & & \mathcal{D}' \arrow[ll, "G"] \end{tikzcd}$$

其中 EF 是 G 的左伴随, 相应地有余单位态射 $\varepsilon: EFG \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}'}$. 证明若对于任意范畴 $\mathcal{X}$, 函子 $F^*: \mathcal{X}^{\mathcal{D}} \to \mathcal{X}^{\mathcal{C}}$ 皆是全忠实的, 则 E 也能实现为 FG 的左伴随, 相应的余单位仍为 ε.

提示 以下论证取自 [6, 1.3.1 Lemma]. 取伴随对 (EF, G) 的单位态射 $\eta: \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to GEF$. 取 $\mathcal{X} = \mathcal{D}$, 得 $\eta': \mathrm{id}_{\mathcal{D}} \to FGE$ 使得 $\eta' F = F\eta$. 对 η' 和 ε 检验伴随对 (E, FG) 的三角等式即可. 首先 $(FG\varepsilon)(\eta' FG) = (FG\varepsilon)(F\eta G) = \mathrm{id}_{FG}$. 另一方面, 取 $\mathcal{X} = \mathcal{D}'$ 可见 $(\varepsilon E)(E\eta') = \mathrm{id}_E$ 等价于 $(\varepsilon EF)(E\eta' F) = \mathrm{id}_{EF}$; 然而 $(\varepsilon EF)(E\eta' F) = (\varepsilon EF)(EF\eta) = \mathrm{id}_{EF}$.

8. 考虑伴随对 $F: \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}: G$, 并且记

$$S := \left\{ s \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) : Fs \text{ 可逆} \right\};$$

这使 F 唯一地分解为 $\mathcal{C} \xrightarrow{Q} \mathcal{C}[S^{-1}] \xrightarrow{H} \mathcal{D}$. 证明以下陈述相互等价.

(i) 函子 G 全忠实.

(ii) 余单位 $\varepsilon: FG \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ 为同构;

(iii) H 是范畴之间的等价, QG 为其拟逆;

(iv) 对任意范畴 $\mathcal{X}$, 函子 $F^*: \mathcal{X}^{\mathcal{D}} \to \mathcal{X}^{\mathcal{C}}$ 皆是全忠实的.

也请陈述此一结果的对偶版本.

提示 以下论证取自 [6, 1.3 Proposition]. 首先 (i) $\iff$ (ii) 较为容易, 可见 [25, 第二章, 习题 8] 的提示.

对于 (ii) $\implies$ (iii), 问题在于证 $QGH \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{C}[S^{-1}]}$; 命题 1.10.4 将之化为证 $QGHQ \simeq Q$. 考虑伴随对的单位 $\eta: \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to GF$. 由 $(\varepsilon F)(F\eta) = \mathrm{id}_F$ 知 $F\eta$ 为同构, 故 $Q\eta: Q \xrightarrow{\sim} QGF = QGHQ$.

对于 (iii) $\implies$ (iv), 注意到 H 是等价蕴涵 H^* 全忠实, 对 Q^* 则可用命题 1.10.4.

对于 (iv) $\implies$ (ii), 在前一道习题中代入 $E = \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$, 可见 FG 是 $\mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ 的左伴随, 相应的余单位态射是 ε; 因为 $\mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ 的左伴随精确到同构是唯一的, 故 ε 为同构.

9. 取定范畴 $\mathcal{C}$ 对左乘性系 S 的局部化 $Q^l: \mathcal{C} \to \mathcal{C}[S^{-1}]^l$. 证明 $\mathcal{C}[S^{-1}]^l$ 的交换图表

$$\begin{tikzcd} Q^l X \arrow[r, "Q^l(f)"] \arrow[d] & Q^l X' \arrow[d] \\ Q^l Y \arrow[r, "Q^l(g)"'] & Q^l Y' \end{tikzcd} \quad \text{皆来自于 } \mathcal{C} \text{ 的交换图表} \quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & X' \\ U \arrow[u, "s"] \arrow[r] \arrow[d] & U' \arrow[u, "s'"'] \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Y' \end{tikzcd}$$

其中 $f, g \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ 给定, $s, s' \in S$. 对右乘性系表述相应的版本.

10. 验证例 1.10.18 中关于中心局部化的细节. 证明该处定义的 $\mathcal{C}[S^{-1}]$ 和定理 1.10.16 给出的局部化作为 $Z(\mathcal{C})[S^{-1}]$-线性范畴相互等价.

11. 补全命题 1.12.4 (i) 证明的细节.

12. 以伴随函子定理 1.12.6 构造任两个群 G, H 的自由积 $G \star H$; 相关概念请见 [25, 定义 4.8.9].

13. 设 $\mathrm{F}(X)$ 是集合 X 上的自由群. 证明典范映射 $\iota: X \to U(\mathrm{F}(X))$ 是单射, 其中 U 是从群范畴到集合范畴的遗忘函子. 提示 设 $x \neq y$ 是 X 的元素. 存在群 H 连同集合的映射 $f: X \to U(H)$ 使得 $f(x) \neq f(y)$.

14. (P. Freyd) 设范畴 $\mathcal{D}$ 完备, 函子 $G : \mathcal{D} \to \mathsf{Set}$ 保小 $\varprojlim$, 并且满足如下的解集条件: 存在小子集 $\Gamma \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ 使得对每个 $d \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ 和 $p \in Gd$, 存在 $x \in \Gamma$, $q \in Gx$ 和态射 $f : x \to d$ 使得 $(Gf)(q) = p$. 证明 G 可表.

提示 将 $(\{\mathrm{pt}\}/G)$ 的对象表作资料 (d, p), 其中 $d \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ 而 $p \in Gd$. 条件相当于说 $\Gamma^\natural := \{(x, q) : x \in \Gamma,\ q \in Gx\}$ 是 $(\{\mathrm{pt}\}/G)$ 的弱始系. 说明 $(\{\mathrm{pt}\}/G)$ 有始对象 (r_G, u_G). 参照 (1.12.1) 的论证, 说明对所有 d 都有双射

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(r_G, d) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(\{\mathrm{pt}\}, Gd) &\xrightarrow{\sim} Gd \\ \alpha \longmapsto\qquad\qquad\qquad &(G\alpha)(u_G). \end{aligned}$$

15. 补全例 1.13.5 的 "仅当" 部分. 提示 任何 R-模都能写成有限展示 R-模的滤过 $\varinjlim$ (未必是其子模), 简单起见写作 $X = \varinjlim \alpha$. 考虑 id_X 在 (1.13.1) 下的原像, 可得 $f_i \in \mathrm{Hom}(X, \alpha(i))$ 使得 $\iota_i f_i = \mathrm{id}_X$. 这给出分解 $\alpha(i) \simeq X \oplus N$. 由于 N 同构于 $\alpha(i)$ 的商, 它是有限生成 R-模. 问题归结为有限展示 R-模对有限生成子模的商仍具备有限展示.

16. 阐明 §1.13 介绍的共尾序数列和定义 1.6.4 的共尾子范畴之间的联系.

17. 紧对象的用处之一是函子的自动延拓. 考虑全子范畴 $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ 和函子 $F' : \mathcal{C}' \to \mathcal{D}$. 假定

- $\mathcal{C}'$ 的对象皆在 $\mathcal{C}$ 中紧;
- $\mathcal{C}$ 的对象皆能写成 $\mathcal{C}'$ 的对象的滤过小 $\varinjlim$;
- $\mathcal{D}$ 具备所有的滤过小 $\varinjlim$.

证明此时 F' 有唯一的延拓 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, 使得 F 保滤过小 $\varinjlim$.

提示 将 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 写成 $\varinjlim_i X'_i$, 其中 i 取遍某个滤过小范畴的对象, 而 $X'_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$. 唯一可能的策略是命 $F(X) := \varinjlim_i F'(X'_i)$. 执行以下工序.

- 考虑 $\mathcal{C}$ 的态射 $f : X \to Y$ 和如上表达式 $X = \varinjlim_i X'_i$, $Y = \varinjlim_j Y'_j$. 根据紧性, 每个 $X'_i \to X \xrightarrow{f} Y$ 都通过某个 $Y'_j \to Y$ 分解. 由此得到态射 $F'(X'_i) \to F'(Y'_j)$, 继而得到 $F(X) \to F(Y)$.
- 说明此态射无关 j 的选取, 而当 i 变动, 它们确定态射 $F(f) : F(X) \to F(Y)$. 说明 $F(gf) = F(g)F(f)$. 以此说明 F 是良定义的函子 (可取特例 $f = \mathrm{id}_X$).
- 接着验证 F 保滤过小 $\varinjlim$. 设 $X = \varinjlim_j X_j$, 其中 $X_j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$; 任取 $X = \varinjlim_i X'_i$. 根据紧性, 每个 $X'_i \to X$ 都透过某个 $X_j \to X$ 分解. 熟悉的论证给出 $F'(X'_i) \to \varinjlim_j F(X_j)$, 继而给出 $F(X) = \varinjlim_i F'(X'_i) \to \varinjlim_j F(X_j)$. 验证它和典范态射互逆.

18. 设范畴 $\mathcal{C}$ 可达.

(i) 选定定义 1.13.10 的小子集 $S \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, 记它生成的全子范畴记为 $\mathcal{S}$. 证明米田嵌入限制为全忠实函子 $\mathcal{C} \to \mathsf{Set}^{\mathcal{S}^{\mathrm{op}}}$.

(ii) 证明 $\mathcal{C}$ 良幂 (定义 1.12.11). 提示 对 $\mathsf{Set}^{\mathcal{S}^{\mathrm{op}}}$ 的任意对象 F 和 $X \in S$, 集合 FX 及其幂集皆是小集, 由此论证 Sub_F 是小集.

第二章 Abel 范畴

♣♣♣ 待撰写

阅读提示

♣♣♣ 待撰写 对于复形及其上同调的基础理论, 必需的是 §§2.1—2.8 的内容; §2.9 的内容也属于常识, 并且和一些导出范畴的定义相关, §§2.10—2.11 则属于补充内容.

2.1 Abel 范畴的定义

在 §1.3 已经介绍了何谓 Ab-范畴及其特例加性范畴. 本章探究的 Abel 范畴是一类具有特殊性质的加性范畴.

定义 2.1.1 (Abel 范畴) *设 $\mathcal{A}$ 是加性范畴. 若 $\mathcal{A}$ 的所有态射都有核以及余核, 而且所有态射皆严格 (定义 1.2.4), 则称 $\mathcal{A}$ 为 Abel 范畴.*

如果 $\mathcal{A}$ 本身还是 $\Bbbk$-线性范畴 (定义 1.4.1), 则称之为 $\Bbbk$-线性 Abel 范畴.

注记 2.1.2 Abel 范畴具有所有的有限 $\varprojlim$ 和有限 $\varinjlim$, 这是因为有限积和有限余积存在 (都是双积), 而等化子和余等化子也都存在 (注记 1.3.8), 借此足以构造一切有限 $\varprojlim$ 和有限 $\varinjlim$; 详见 [25, 定理 2.8.3].

根据例 1.3.13, 对任何环 R, 范畴 $R\text{-}\mathsf{Mod}$ 都是 Abel 范畴, 以 R^{op} 代 R 可知右模范畴 $\mathsf{Mod}\text{-}R$ 亦然; 取特例 $R = \mathbb{Z}$ 可见 Ab 是 Abel 范畴. 同一例中考虑的 $\mathsf{Ban}_{\mathbb{C}}$ 则非 Abel 范畴, 因为 $\mathsf{Ban}_{\mathbb{C}}$ 有非严格的态射.

命题 2.1.3 若加性范畴 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, 则 $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ 亦然.

证明 核与余核相对偶, 而注记 1.2.2 表明 $\mathcal{A}$ 中的 $\mathrm{coim}(f) \to \mathrm{im}(f)$ 无非是 $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ 中的 $\mathrm{coim}(f^{\mathrm{op}}) \to \mathrm{im}(f^{\mathrm{op}})$. □

从已有的 Abel 范畴构造新的 Abel 范畴的一种抽象方式是取函子范畴. 首先注意到若 $\mathcal{A}$ 是 Ab-范畴, 则对任意[1]范畴 I, 函子范畴 $\mathcal{A}^I$ 也自然地是 Ab-范畴, 方式是对函子 $F, G : I \to \mathcal{A}$ 在 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^I}(F, G)$ 中 "逐对象" 地定义加法为 $(\varphi_i)_i + (\psi_i)_i := (\varphi_i + \psi_i)_i$.

命题 2.1.4 设 $\mathcal{A}$ 为 Abel 范畴. 对于任意范畴 I, 函子范畴 $\mathcal{A}^I$ 也是 Abel 范畴.

证明 按照命题 1.5.7 逐对象地构造 $\mathcal{A}^I$ 的有限积/余积, 核/余核. 态射的像/余像; 典范态射 $\mathrm{coim} \to \mathrm{im}$ 因而也有逐对象的构造. 由此对 $\mathcal{A}^I$ 将 Abel 范畴的所有条件化到 $\mathcal{A}$ 上来验证. □

Abel 范畴中的态射 $f : X \to Y$ 皆有唯一的满–单分解 (命题 1.2.10), 具体取作 $X \twoheadrightarrow (\mathrm{coim}(f) \simeq \mathrm{im}(f)) \hookrightarrow Y$. 于是引理 1.3.11 (iii) 即刻给出

$$\ker(f) = \ker[X \to \mathrm{im}(f)], \quad \mathrm{coker}(f) = \mathrm{coker}[\mathrm{im}(f) \to Y].$$

注记 2.1.5 对于 Abel 范畴中的态射 $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$, 纤维积的构造 (参看注记 2.1.2) 表明 $X \underset{Z}{\times} Y$ 无非是 $X \oplus Y \overset{(f,0)}{\underset{(0,g)}{\rightrightarrows}} Z$ 的等化子, 亦即 $\ker[X \oplus Y \xrightarrow{(f,-g)} Z]$. 当然地, 纤维积带有的态射 $X \leftarrow X \underset{Z}{\times} Y \to Y$ 来自投影 $X \xleftarrow{p_1} X \oplus Y \xrightarrow{p_2} Y$.

对于 $X' \xleftarrow{f'} Z' \xrightarrow{g'} Y'$, 纤维余积的构造则将 $X' \underset{Z'}{\sqcup} Y'$ 实现为 $\mathrm{coker}[Z' \xrightarrow{(-f',g')} X' \oplus Y']$, 而态射 $X' \to X' \underset{Z'}{\sqcup} Y' \leftarrow Y'$ 来自 $X' \xrightarrow{\iota_1} X' \oplus Y' \xleftarrow{\iota_2} Y'$. 这些性质在模的情形理应是熟知的.

下一条结果尔后将反复运用.

命题 2.1.6 若 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中的图表

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & Y \arrow[d, "b"] \\ X' \arrow[r, "g"'] & Y' \end{tikzcd}$$

是拉回 (或推出) 图表, 而且 g 满 (或 f 单), 则图表同时也是推出 (或拉回), 而且 f 满 (或 g 单).

证明 处理拉回图表的情形即足. 兹断言

[1] 若不希望 $\mathcal{A}^I$ 成为大范畴, 则应当设 I 是小的. 此处无实质影响.

◇ $X \xrightarrow{(a,f)} X' \oplus Y$ 给出 $\ker\left[X' \oplus Y \xrightarrow{(g,-b)} Y'\right]$;

◇ $(g,-b): X' \oplus Y \to Y'$ 满.

关于 ker 的断言是缘于注记 2.1.5 对 $X \simeq X' \underset{Y'}{\times} Y$ 作为核的描述; 又因为 $g = (g,-b)\iota_1$, 故 g 满蕴涵 $(g,-b)$ 满.

综上可见 $Y' = \mathrm{im}((g,-b)) = \mathrm{coker}[X \xrightarrow{(a,f)} X' \oplus Y]$. 对此调换视角, 代入注记 2.1.5 关于纤维余积作为余核的描述, 立见

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "-a"'] & Y \arrow[d, "-b"] \\ X' \arrow[r, "g"'] & Y' \end{tikzcd}$$

是推出图表; 左右两列分别合成自同构 $-\mathrm{id}_X$ 和 $-\mathrm{id}_Y$ 后复归原图, 仍是推出. 应用推出情形下已知的 $\mathrm{coker}(f) \xrightarrow{\sim} \mathrm{coker}(g)$ (命题 1.3.10), 即得 f 满 (引理 1.3.11). □

推论 2.1.7 Abel 范畴中的子商可以等价地定义为子对象的商对象, 或商对象的子对象.

证明 命题 2.1.6 说明命题 1.1.8 可施于任何 Abel 范畴. □

对于任意环 R 上的左模范畴 R-Mod, 以上结果当然是熟知的; 右模范畴亦然.

2.2 初识复形

本节的起点是 Abel 范畴中满足 $gf = 0$ 的态射 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$. 取 $\ker(g) \hookrightarrow Y \twoheadrightarrow \mathrm{coker}(f)$ 的合成 $\ker(g) \to \mathrm{coker}(f)$; 我们关心的是它的满–单分解. 对之可以有两种视角, 互为对偶.

引理 2.2.1 设 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中的态射 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ 满足 $gf = 0$.

(i) 存在唯一的态射 φ, ψ 使以下图表交换:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \\ \mathrm{coim}(f) \arrow[r, "\varphi"'] & \ker(g) \arrow[u] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Z & Y \arrow[l, "g"'] \arrow[d] \\ \mathrm{im}(g) \arrow[u] & \mathrm{coker}(f) \arrow[l, "\psi"] \end{tikzcd} \tag{2.2.1}$$

而且 φ 为单, ψ 为满.

(ii) 态射 $\ker(g) \to \mathrm{coker}(f)$ 有下图所示的两种满–单分解, 由唯一的同构 $\mathrm{coker}(\varphi) \simeq$

$\ker(\psi)$ 相联系:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \ker(\psi) \arrow[dr, hook, "\text{典范}"] \arrow[dd, "\simeq"] & \\ \ker(g) \arrow[ur, two heads] \arrow[dr, two heads, "\text{典范}"'] & & \mathrm{coker}(f). \\ & \mathrm{coker}(\varphi) \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

证明 首先考虑 (i). 左右图表相互对偶 (注记 1.2.2 和命题 2.1.3): 右图相当于在 $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ 中考虑 $Z \xrightarrow{g^{\mathrm{op}}} Y \xrightarrow{f^{\mathrm{op}}} X$, 故对 (2.2.1) 考虑 φ 的情形即可.

条件 $gf = 0$ 相当于说 f 透过 $\ker(g) \hookrightarrow Y$ 分解. 将此代入关于余像的引理 1.2.3 即得 φ. 其次, 基于 $X \to \mathrm{coim}(f)$ 的满性, f 的分解 $X \twoheadrightarrow \mathrm{coim}(f) \xrightarrow{\overline{f}} Y$ 是唯一的, 其中的 $\overline{f}$ 既可取为 $\mathrm{coim}(f) \xrightarrow{\varphi} \ker(g) \hookrightarrow Y$ 的合成, 亦可取为 $\mathrm{coim}(f) \xrightarrow{\sim} \mathrm{im}(f) \hookrightarrow Y$ 的合成, 后者单蕴涵 φ 单.

为了推导 (ii), 兹断言存在唯一的单态射 $\mathrm{coker}(\varphi) \hookrightarrow \mathrm{coker}(f)$ (或满态射 $\ker(g) \twoheadrightarrow \ker(\psi)$) 使下图交换:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads] & Y \arrow[r, two heads] & \mathrm{coker}(f) \\ \mathrm{coim}(f) \arrow[r, hook, "\varphi"'] & \ker(g) \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads, "\text{典范}"'] & \mathrm{coker}(\varphi) \arrow[u, hook] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Z & Y \arrow[l, "g"'] \arrow[d, two heads] & \ker(g) \arrow[l, hook'] \arrow[d, two heads] \\ \mathrm{im}(g) \arrow[u, hook] & \mathrm{coker}(f) \arrow[l, two heads, "\psi"] & \ker(\psi) \arrow[l, hook', "\text{典范}"] \end{tikzcd}$$

承认这点, 便可读出 (ii) 的图表中的两路满–单分解, 即其外框部分, 其中路同构则由命题 1.2.10 唯一地给出.

问题归结为构造上图. 因为两者对偶, 讨论左图即可. 引理 1.3.11 (iii) 说明 $\mathrm{coker}(\varphi)$ 也等同于合成 $X \to \ker(g)$ 的余核, 故所求态射来自余核的函子性, 由 (1.3.3) 刻画. 单性何来? 命题 1.3.9 将合成态射的余核表为原余核的推出, 具体地说即是

$$\begin{tikzcd} \ker(g) \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, phantom, "\boxplus"] & Y \arrow[d, two heads] \\ \mathrm{coker}\left[X \to \ker(g)\right] \arrow[r] & \mathrm{coker}(f) \end{tikzcd} \qquad \text{(推出图表)}$$

其中所有态射都是典范的. 于是命题 2.1.6 蕴涵第二行为单. □

在引理 2.2.1 的场景中, 记

$$\begin{aligned} \mathrm{H}\left[X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z\right] &:= \mathrm{coker}\left[\mathrm{im}(f) \xrightarrow{\varphi} \ker(g)\right] \\ &\simeq \ker\left[\mathrm{coker}(f) \xrightarrow{\psi} \mathrm{im}(g)\right]; \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

它也可以刻画为 $\ker(g) \to \mathrm{coker}(f)$ 的满–单分解的中项. 不出所料, (2.2.2) 具有函子性.

命题 2.2.2 给定 Abel 范畴中的交换图表

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"] & Z \arrow[d, "c"] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[r, "g'"'] & Z' \end{tikzcd} \qquad g'f' = 0, \quad gf = 0,$$

存在唯一的态射 $\Phi : \mathrm{H}[X \to Y \to Z] \to \mathrm{H}[X' \to Y' \to Z']$ 使下图交换:

$$\begin{tikzcd} \ker(g) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\text{由 }(b,c)\text{ 诱导}"'] & \mathrm{H}[X \to Y \to Z] \arrow[r, hook] \arrow[d, "\Phi"] & \operatorname{coker}(f) \arrow[d, "\text{由 }(a,b)\text{ 诱导}"] \\ \ker(g') \arrow[r, two heads] & \mathrm{H}[X' \to Y' \to Z'] \arrow[r, hook] & \operatorname{coker}(f') \end{tikzcd}$$

两侧垂直箭头来自核以及余核的函子性, 水平箭头如引理 2.2.1.

证明 根据引理 1.2.8 的熟悉套路, Φ 若存在则是唯一的, 而且验证 Φ 使右侧方块交换即足. 构造如下. 因为 $\mathrm{im}(g) = \ker[Z \to \operatorname{coker}(g)]$, $\mathrm{im}(g') = \ker[Z' \to \operatorname{coker}(g')]$, 核的函子性给出唯一的 $\mathrm{im}(g) \to \mathrm{im}(g')$ 使下图的右半部交换:

$$\begin{tikzcd} \operatorname{coker}(f) \arrow[r, two heads, "\psi"] \arrow[d] & \mathrm{im}(g) \arrow[r, hook] \arrow[d] & Z \arrow[d, "c"] \\ \operatorname{coker}(f') \arrow[r, two heads, "\psi'"'] & \mathrm{im}(g') \arrow[r, hook] & Z'; \end{tikzcd}$$

引理 1.2.8 的套路说明左半部也交换. 由此诱导的 $\ker(\psi) \to \ker(\psi')$ 即所求. □

命题 2.2.3 给定满足 $gf = 0$ 和 $g'f' = 0$ 的态射, 存在典范同构

$$\mathrm{H}\left[X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z\right] \oplus \mathrm{H}\left[X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z'\right] \simeq \mathrm{H}\left[X \oplus X' \xrightarrow{f \oplus f'} Y \oplus Y' \xrightarrow{g \oplus g'} Z \oplus Z'\right].$$

证明 取双积带有的态射 ι, p 等等, 如 (1.3.1). 按照命题 2.2.2 的函子性, 它们也诱导相应的

$$\mathrm{H}[X \to Y \to Z] \underset{p}{\overset{\iota}{\rightleftarrows}} \mathrm{H}[X \oplus X' \to Y \oplus Y' \to Z \oplus Z'] \underset{p}{\overset{\iota}{\leftrightarrows}} \mathrm{H}[X' \to Y' \to Z'].$$

基于命题 2.2.2 对诱导态射 Φ 的刻画, 我们还知道 $(a, b, c) \mapsto \Phi$ 与合成兼容, 保持加法, 映 0 为 0, 映 id 为 id. 综之, 在 $\mathrm{H}[\cdots]$ 层面诱导出的态射也满足双积所需的等式 (1.3.1). □

注意: 以上陈述对于一般 Abel 范畴中的无穷余积或无穷积未必成立.

定义 2.2.4 (复形) 设 $\mathcal{A}$ 是加性范畴. 考虑 $\mathcal{A}$ 中的一列态射

$$\cdots \to X^n \xrightarrow{d^n} X^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} X^{n+2} \to \cdots,$$

它可以仅含有限项, 也可以沿单边或双边无穷延伸, 或者成环状. 若 $d^{n+1}d^n = 0$ 对所有 n 成立, 则称 $(X^n, d^n)_n$ 为**复形**, 常记为 $(X^\bullet, d^\bullet)$, $X^\bullet$ 或 X. 习惯称 X^n 为复形 X 的第 n 次项.

本章主要着眼于 Abel 范畴的情形, 这时可以探讨复形的上同调和正合性.

定义 2.2.5 (上同调和正合列) 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴.

◇ 对于复形 X, 按 (2.2.2) 定义它在非端点项 X^n 处的**上同调**为

$$\mathrm{H}^n(X) = \mathrm{H}^n(X^\bullet, d^\bullet) := \mathrm{H}\left[X^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} X^n \xrightarrow{d^n} X^{n+1}\right].$$

◇ 若 $\mathrm{H}^n(X) = 0$, 则称复形 X 在 X^n 处正合; 这等价于 $\mathrm{im}(d^{n-1}) = \ker(d^n)$. 处处正合的复形称为**正合列**; 正合的复形也称为**零调**的.

上同调的性质是本书主题之一, 将在 §3.6 继续探讨.

注记 2.2.6 (链复形的同调) 如在定义 2.2.4 中改取递降的标号, 用下标记作

$$\cdots \to X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \to \cdots, \quad d_{n-1}d_n = 0,$$

则前述定义可以全盘照搬. 基于拓扑学的渊源, 经常称递增版本 $(X^\bullet, d^\bullet)$ 为上链复形, 称递降者 $(X_\bullet, d_\bullet)$ 为链复形. 对于 Abel 范畴中的链复形 X, 定义它在 X_n 处的**同调**为 $\mathcal{A}$ 的对象

$$\mathrm{H}_n(X) = \mathrm{H}_n(X_\bullet, d_\bullet) := \mathrm{H}\left[X_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} X_n \xrightarrow{d_n} X_n\right].$$

在代数学中, 上链复形和链复形仅只是记法的差异, 其间的过渡直截了当: 取

$$X^n := X_{-n}, \quad d^n := d_{-n}$$

即是. 本书主要考虑上链复形.

这点也可以从相反范畴的角度理解. 加性范畴 $\mathcal{A}$ 中的上链复形 $(X^\bullet, d^\bullet)$ 给出 $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ 中的链复形 $X_n := X^n$, $d_n := (d^n)^{\mathrm{op}}$ (箭头反转). 对所有 n 皆有典范同构 $\mathrm{H}^n(X^\bullet) \simeq \mathrm{H}_n(X_\bullet)$, 特别地, $X^\bullet$ 正合当且仅当 $X_\bullet$ 正合. 为了说明这点, 仅须注意到 $\mathrm{H}[X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z]$ 可以刻画为 $\ker(g) \to \mathrm{coker}(f)$ 的满–单分解的中项, 如在 $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ 中考量, 这也正是 $\ker(f^{\mathrm{op}}) \to \mathrm{coker}(g^{\mathrm{op}})$ 的满–单分解的中项.

复形的正合性可以分段考察. 往后将不加说明地运用以下几种典型.

▷ **单态射** 复形 $0 \to X' \xrightarrow{f} X$ 正合等价于 $\ker(f) = 0$, 亦即 f 单 (引理 1.3.11); 这也等价于 $X' \xrightarrow{\sim} \mathrm{coim}(f)$ (引理 1.2.6).

▷ **满态射** 对偶地, 复形 $X \xrightarrow{g} X'' \to 0$ 正合等价于 g 满, 也等价于 $\mathrm{im}(g) \xrightarrow{\sim} X''$.

▷ **核** 考虑复形 $0 \to X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X''$. 按 (2.2.1) 将 f 透过 $X' \twoheadrightarrow \mathrm{im}(f) \hookrightarrow \ker(g)$ 分解. 兹断言 $0 \to X' \to X \to X''$ 正合当且仅当其合成 $X' \to \ker(g)$ 是同构; 这也相当于说精确到同构, 上述正合列总是 $0 \to \ker(g) \to X \xrightarrow{g} X''$ 的形式, 由态射的核给出.

论证不难. 考虑 (2.2.1). 复形在 X 处正合等价于 $\mathrm{im}(f) \xrightarrow{\sim} \ker(g)$, 在 X' 处正合等价于 $X' \xrightarrow{\sim} \mathrm{im}(f)$; 再施命题 1.1.2 于 $X' \twoheadrightarrow \mathrm{im}(f) \hookrightarrow \ker(g)$ 便是.

▷ **余核** 对偶地, 复形 $X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X'' \to 0$ 按 (2.2.1) 诱导态射 $\mathrm{coker}(f) \to X''$. 此复形正合当且仅当 $\mathrm{coker}(f) \xrightarrow{\sim} X''$. 所以精确到同构, 这型正合列来自余核.

▷ **短正合列** 形如 $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ 正合列称之为**短正合列**. 以上两条一并给出两种等价而相互对偶的正合性刻画:

- ◇ $X' \to X$ 单, 而 $X'' = \mathrm{coker}[X' \hookrightarrow X]$;
- ◇ $X \to X''$ 满, 而 $X' = \ker[X \to X'']$.

作为应用, 每个态射 $f : X \to Y$ 都给出短正合列

$$0 \to \ker(f) \to X \to \mathrm{im}(f) \to 0, \quad 0 \to \mathrm{im}(f) \to Y \to \mathrm{coker}(f) \to 0,$$

它们拼接为正合列 $0 \to \ker(f) \to X \xrightarrow{f} Y \to \mathrm{coker}(f) \to 0$.

另外, 若 f 能置入形如

$$L' \xrightarrow{\lambda} L \to X \xrightarrow{f} Y \to R \xrightarrow{\rho} R''$$

的正合列, 其中 λ, ρ 皆为同构, 则正合性将导致 $L \to X$ 和 $Y \to R$ 皆为 0, 从而有 $\ker(f) = 0$ 和 $\mathrm{im}(f) = Y$, 亦即 f 为同构. 这是判定同构的常用技巧.

在 §1.3 回顾的双积给出一类格外简单的短正合列, 命题 2.5.3 将予以刻画.

命题 2.2.7 令 X_1, X_2 为 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的对象, 则 $0 \to X_1 \xrightarrow{\iota_1} X_1 \oplus X_2 \xrightarrow{p_2} X_2 \to 0$ 是短正合列.

证明 取短正合列 $0 \to X_1 \xrightarrow{\mathrm{id}} X_1 \to 0 \to 0$ 和 $0 \to 0 \to X_2 \xrightarrow{\mathrm{id}} X_2 \to 0$, 命题 2.2.3 说明其直和仍然正合. □

2.3 若干图表引理

本节的论证取法 [10, Chapter 8, 12]. 我们从正合性的一个判准入手, 不妨视其为图追踪 [25, §6.8] 在一般 Abel 范畴中的代替品. 以下选定 Abel 范畴 $\mathcal{A}$.

引理 2.3.1 设 $X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X''$ 为复形, 则此复形正合当且仅当对于任何满足 $gh = 0$ 的态射 $S \xrightarrow{h} X$, 存在态射 $S' \to X'$ 和满态射 $S' \twoheadrightarrow S$ 使得下图交换

$$\begin{tikzcd} S' \arrow[r, two heads] \arrow[d] & S \arrow[d, "h"] \\ X' \arrow[r, "f"'] & X. \end{tikzcd}$$

证明 考虑 "仅当" 的方向. 首先, f 和 h 皆通过 $\ker(g)$ 分解, 依此取 $S' := S \underset{\ker(g)}{\times} X'$, 而 $S' \to S$ 和 $S' \to X'$ 取为纤维积的自然态射. 正合性蕴涵 $X' \twoheadrightarrow \ker(g)$, 故命题 2.1.6 蕴涵 $S' \to S$ 亦满.

考虑 "当" 的方向. 对 $S := \ker(g)$ 自带的态射 $h : S \hookrightarrow X$, 按条件得到下图的实线部分

$$\begin{tikzcd} S' \arrow[r, two heads] \arrow[d] & S \arrow[d, "h"] \\ X' \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "\alpha"] & X \end{tikzcd}$$

而虚线部分的 α 来自 $gf = 0$ 对 f 所给出的分解. 兹断言上图交换. 外框部分和右下三角已知交换. 于是左上三角的两路态射左合成 h 后相等; 既然 h 单, 这表明左上三角也交换, 断言得证. 最后, 上图表明 α 右合成 $S' \to X'$ 为满, 故 α 满; 综上, f 有满–单分解 $X' \twoheadrightarrow \ker(g) \hookrightarrow X$, 导致 $\mathrm{im}(f) = \ker(g)$. 正合性得证. □

关于图追踪在一般 Abel 范畴中的其它替代方案, 可见 [22, Tag 05PL].

言归正传, 接着讨论实用中不可或缺的蛇形引理. 考虑图表

$$\begin{tikzcd} & \ker' \arrow[r] \arrow[d] & \ker \arrow[r] \arrow[d] & \ker'' \arrow[d] \arrow[dddll, dashed, rounded corners, "\delta"] & \\ & X' \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed] & X \arrow[r, "g"] \arrow[d, dashed] & X'' \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Y' \arrow[r, "u"] \arrow[d] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d] & Y'' \arrow[d] & \\ & \mathrm{coker}' \arrow[r] & \mathrm{coker} \arrow[r] & \mathrm{coker}'' & \end{tikzcd} \tag{2.3.1}$$

其中

◇ $X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X'' \to 0$ 和 $0 \to Y' \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Y''$ 为给定的正合列,

◇ $\ker' := \ker[X' \to Y'] \hookrightarrow X'$, 而 $\ker$ 和 $\ker''$ 以此类推,

◇ $Y' \twoheadrightarrow \mathrm{coker}' := \mathrm{coker}[X' \to Y']$, 而 coker 和 coker″ 依此类推,

◇ $\ker' \to \ker$ 和 $\mathrm{coker}' \to \mathrm{coker}$ 等态射来自核及余核的函子性 (1.3.3).

因此 (2.3.1) 是每列和中间两行皆正合的交换图表. 以下说明如何构造虚线标出的**连接态射** $\delta : \ker'' \to \mathrm{coker}'$.

第一步是从 (2.3.1) 构造行正合的交换图表

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker(g) \arrow[r, hook, "s"] \arrow[d, equal] & X \underset{X''}{\times} \ker'' \arrow[r, two heads] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \ker'' \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \ker(g) \arrow[r, hook] \arrow[d, dashed] & X \arrow[r, "g"'] \arrow[d] & X'' \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y' \arrow[r, "u"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\boxplus"] & Y \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \mathrm{coker}(u) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
& \mathrm{coker}' \arrow[r, hook] & \mathrm{coker}' \underset{Y'}{\sqcup} Y \arrow[r, two heads, "t"'] & \mathrm{coker}(u) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{2.3.2}$$

其中

◇ □ 和 ⊞ 代表相应的方块是拉回和推出, 一并回忆到拉回保核而推出保余核, 这就解释了图中的左上和右下方块;

◇ 命题 2.1.6 可施于 (2.3.2) 的 □ 和 ⊞ 部分, 这就解释了 $X \underset{X''}{\times} \ker'' \to \ker''$ 满而 $\mathrm{coker}' \to \mathrm{coker}' \underset{Y'}{\sqcup} Y$ 单;

◇ 箭头 $\ker(g) \dashrightarrow Y'$ 无非自然态射 $\ker(g) \to \ker(v)$, 来自核的函子性 (1.3.3);

◇ 同理, 余核的函子性给出虚线箭头 $X'' \simeq \mathrm{coker}(f) \to \mathrm{coker}(u)$.

观察到 (2.3.2) 中 $\ker(g) \dashrightarrow Y' \to \mathrm{coker}'$ 合成为 0, 这是因为它右合成 $X' \twoheadrightarrow \mathrm{im}(f) \xrightarrow{\sim} \ker(g)$ 之后为 0; 同理, $\ker'' \to X'' \dashrightarrow \mathrm{coker}(u)$ 合成为 0, 因为它左合成 $\mathrm{coker}(u) \xrightarrow{\sim} \mathrm{im}(v) \hookrightarrow Y''$ 之后为 0.

记 (2.3.2) 中路的合成态射为 $\delta_0 : X \underset{X''}{\times} \ker'' \to \mathrm{coker}' \underset{Y'}{\sqcup} Y$. 上述观察即刻给出

$$\delta_0 s = 0, \quad t\delta_0 = 0.$$

于是 δ_0 具唯一分解

$$X \underset{X''}{\times} \ker'' \twoheadrightarrow \mathrm{coker}(s) \xrightarrow{\exists !} \ker(t) \hookrightarrow \mathrm{coker}' \underset{Y'}{\sqcup} Y.$$

已知右上和左下角态射分别是满的和单的, 故 $\mathrm{coker}(s) \xrightarrow{\sim} \ker''$ 而 $\mathrm{coker}' \xrightarrow{\sim} \ker(t)$. 综之即得所求的典范态射 $\delta : \ker'' \to \mathrm{coker}'$.

注记 2.3.2 连接态射的典范性有更明确的表述如下. 考虑交换图表

$$\begin{tikzcd}
 & & X' \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & X \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & X'' \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[dd] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y' \arrow[rr] \arrow[dd] & & Y \arrow[rr] \arrow[dd] & & Y'' \arrow[dd] & & \\
 & & \underline{X'} \arrow[rr] \arrow[dl] & & \underline{X} \arrow[rr] \arrow[dl] & & \underline{X''} \arrow[r] \arrow[dl] & 0 \\
0 \arrow[r] & \underline{Y'} \arrow[rr] & & \underline{Y} \arrow[rr] & & \underline{Y''} & &
\end{tikzcd}$$

使得每行皆正合. 相应地有 ker', $\underline{\mathrm{ker}'}$ 等等; 那么连接态射 δ, $\underline{\delta}$ 可置入交换图表

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{ker}'' \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\text{自然态射}"'] & \mathrm{coker}' \arrow[d, "\text{自然态射}"] \\
\underline{\mathrm{ker}''} \arrow[r, "\underline{\delta}"'] & \underline{\mathrm{coker}'}.
\end{tikzcd}$$

按定义, 为此只需说明 δ_0 和 $\underline{\delta_0}$ 也能放入相应的交换方块. 一切归结遂为核, 余核, 积, 余积的函子性. 细节谨留给读者.

稍后的证明将用到如下两点观察.

- 连接态射的构造自对偶: 若将 (2.3.1) 放在 $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ 中考量, 则所有箭头反转, ker' 和 coker' 等等的角色对调, 所得 $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ 中图表仍和 (2.3.1) 相似, 只是旋转半圈; 相应的连接态射放回 $\mathcal{A}$ 中考量, 仍从 ker'' 打向 coker', 它和先前构造的 δ 吻合.
- 态射 $\mathrm{ker} \to \mathrm{ker}''$ 可分解为 $\mathrm{ker} \to X \underset{X''}{\times} \mathrm{ker}'' \to \mathrm{ker}''$. 于是细观 (2.3.2) 可见态射

$$\mathrm{ker} \to \mathrm{ker}'' \xrightarrow{\delta} \mathrm{coker}' \hookrightarrow \mathrm{coker}' \underset{Y'}{\sqcup} Y, \qquad \mathrm{ker} \to X \underset{X''}{\times} \mathrm{ker}'' \xrightarrow{\delta_0} \mathrm{coker}' \underset{Y'}{\sqcup} Y$$

的合成相等, 但右式也和 $\mathrm{ker} \to X \to Y \to \mathrm{coker}' \underset{Y'}{\sqcup} Y$ 有相等的合成, 即 0. 由此归结出

$$\mathrm{ker} \to \mathrm{ker}'' \xrightarrow{\delta} \mathrm{coker}' \quad \text{合成为 } 0. \tag{2.3.3}$$

定理 2.3.3 (蛇形引理) 考虑 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中的图表 (2.3.1), 则 $\mathrm{ker}' \to \mathrm{ker} \to \mathrm{ker}'' \xrightarrow{\delta} \mathrm{coker}' \to \mathrm{coker} \to \mathrm{coker}''$ 是正合列. 如果图表中 $f : X' \to X$ 单 (或 $v : Y \to Y''$ 满), 则 $\mathrm{ker}' \to \mathrm{ker}$ (或 $\mathrm{coker} \to \mathrm{coker}''$) 亦然.

证明 最后一部分的断言是简单的: 若 f 单, 则 $\mathrm{ker}' \hookrightarrow X' \xrightarrow{f} X$ 之合成亦单, 故 (2.3.1) 交换蕴涵 $\mathrm{ker}' \to \mathrm{ker}$ 单. 倒转箭头可得 v 满的情形.

主要问题是第一部分断言的正合列. 基于先前观察到的对偶性, 只需证明 $\mathrm{ker}' \to \mathrm{ker} \to \mathrm{ker}'' \to \mathrm{coker}'$ 正合.

首先说明 $\ker' \to \ker \to \ker''$ 是复形. 这是因为 $\ker' \to \ker \to \ker''$ 是 $X' \to X \to X''$ 诱导的, 而后者合成为 0. 接着应用引理 2.3.1 来证明正合性: 假设态射 $\psi : S \to \ker$ 使得 $S \xrightarrow{\psi} \ker \to \ker''$ 合成为 0, 我们寻求交换图表

$$\begin{tikzcd} S' \arrow[r, two heads, "h"] \arrow[d] & S \arrow[d, "\psi"] \arrow[dr, "0"] & \\ \ker' \arrow[r] \arrow[d, hook] & \ker \arrow[r] \arrow[d, hook] & \ker'' \arrow[d, hook] \\ X' \arrow[r, "f"'] & X \arrow[r, "g"'] & X'' \end{tikzcd} \tag{2.3.4}$$

其中的 $\ker' \leftarrow S' \xrightarrow{h} S$ 有待构造. 为此, 首先对 $S \xrightarrow{\psi} \ker \to X$ 应用引理 2.3.1 以获取交换图表

$$\begin{tikzcd} S' \arrow[r, two heads, "h"] \arrow[d] & S \arrow[d] \arrow[dr, "0"] & \\ X' \arrow[r, "f"'] & X \arrow[r, "g"'] & X''. \end{tikzcd}$$

于是 $S' \to X' \to Y' \xrightarrow{u} Y$ 和 $S' \xrightarrow{\psi h} \ker \to X \to Y$ 一样合成为 0, 而 u 单, 故 $S' \to X' \to Y'$ 合成为 0. 这使 $S' \to X'$ 透过 $\ker'$ 分解, 给出 (2.3.4) 的所有箭头.

现在观察 (2.3.4) 的左半部: 其外框和下半方块交换; 熟悉的引理 1.2.8 遂说明上半方块也交换. 综之, $\ker' \to \ker \to \ker''$ 正合.

以下处理 $\ker \to \ker'' \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker}'$. 首先 (2.3.3) 说明这是复形. 正合性仍有赖于引理 2.3.1: 假设态射 $\psi : S \to \ker''$ 满足 $\delta\psi = 0$, 我们寻求形如

$$\begin{tikzcd} S_0 \arrow[r, two heads] \arrow[d] & S \arrow[d, "\psi"] \\ \ker \arrow[r] & \ker'' \end{tikzcd} \tag{2.3.5}$$

之交换图表. 关于 δ 的构造中已经说明 $X \underset{X''}{\times} \ker'' \to \ker'' \to 0$ 正合, 故存在交换图表

$$\begin{tikzcd} S_1 \arrow[r, two heads] \arrow[d] & S \arrow[d, "\psi"'] \arrow[dr] & \\ X \underset{X''}{\times} \ker'' \arrow[r] & \ker'' \arrow[r] & 0. \end{tikzcd} \tag{2.3.6}$$

考虑 $S_1 \to X \underset{X''}{\times} \ker'' \to X \to Y \xrightarrow{v} Y''$. 比较上图和 (2.3.1), (2.3.2) 可知此合成为 0, 故 $S_1 \to X \underset{X''}{\times} \ker'' \to X \to Y$ 可分解为 $S_1 \xrightarrow{\xi} Y' \xrightarrow{u} Y$. 以下论证 $S_1 \xrightarrow{\xi} Y' \to \operatorname{coker}'$

合成为 0. 出发点是交换图表

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "\psi"] & \ker'' \arrow[r, "\delta"] & \mathrm{coker}' \arrow[d] \\
S_1 \arrow[u, two heads] \arrow[r] & X \underset{X''}{\times} \ker'' \arrow[u] \arrow[r, "\delta_0"] \arrow[d] & \mathrm{coker}' \underset{Y'}{\sqcup} Y \\
 & X \arrow[r] & Y \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

上图第一行合成为 $\delta\psi = 0$, 故第二行亦然, 从而 $S_1 \xrightarrow{\xi} Y' \xrightarrow{u} Y \to \mathrm{coker}' \underset{Y'}{\sqcup} Y$ 合成为 0. 因为 $Y' \to Y \to \mathrm{coker}' \underset{Y'}{\sqcup} Y$ 和 $Y' \to \mathrm{coker}' \to \mathrm{coker}' \underset{Y'}{\sqcup} Y$ 有相同的合成, 而在 δ 的构造中已说明 $\mathrm{coker}' \to \mathrm{coker}' \underset{Y'}{\sqcup} Y$ 为单, 故 $S_1 \xrightarrow{\xi} Y' \to \mathrm{coker}'$ 合成为 0.

下一步是对正合列 $X' \to Y' \to \mathrm{coker}'$ 应用引理 2.3.1, 得到交换图表

$$\begin{tikzcd}
S_0 \arrow[r, two heads] \arrow[d, "k"'] & S_1 \arrow[d, "\xi"] \arrow[dr, "0"] & \\
X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & \mathrm{coker}'.
\end{tikzcd}$$

记 λ 为 $S_0 \twoheadrightarrow S_1 \to X \underset{X''}{\times} \ker'' \to X$ 的合成. 分别记态射 $X' \to Y'$ 和 $X \to Y$ 为 a 和 b. 综上可得交换图表

$$\begin{tikzcd}
S_0 \arrow[r, two heads] \arrow[d, "k"'] \arrow[rrd, "\lambda"] & S_1 \arrow[r] \arrow[d, "\xi"'] & X \underset{X''}{\times} \ker'' \arrow[d] \\
X' \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"'] & Y' \arrow[d, "u"'] & X \arrow[dl, "b"] \\
X \arrow[r, "b"] & Y &
\end{tikzcd}$$

其中两个方块的交换性已知, 右侧梯形交换则缘于之前对 ξ 的讨论.

由此立见 $b\lambda = bfk$, 故 $\lambda - fk : S_0 \to X$ 透过 $\ker = \ker(b) \hookrightarrow X$ 分解. 最后请端详图表

$$\begin{tikzcd}
S_0 \arrow[r, two heads] \arrow[d] \arrow[dd, bend right=60, "\lambda - fk"'] & S_1 \arrow[r, two heads] & S \arrow[d, "\psi"] \\
\ker \arrow[rr] \arrow[d] & & \ker'' \arrow[d] \\
X \arrow[rr, "g"] & & X''.
\end{tikzcd}$$

若能说明上部方块交换即可完成 (2.3.5) 设定的目标. 下部方块已知交换, 熟知的论证遂将问题归结为外框的交换性. 注意到 $g(\lambda - fk) = g\lambda$, 于是外框的交换性归结为已知

的交换图表 (见 (2.3.6)):

$$\begin{tikzcd} S_0 \arrow[r, two heads] \arrow[rdd, bend right, "\lambda"'] & S_1 \arrow[r, two heads] \arrow[d] & S \arrow[d, "\psi"] \\ & X \underset{X''}{\times} \ker'' \arrow[r] \arrow[d] & \ker'' \arrow[d] \\ & X \arrow[r, "g"] & X''. \end{tikzcd}$$

这就验证了全部所需的条件. □

连接同态 δ 和定理 2.3.3 在模范畴 R-Mod 的情形大大地简化, 见 [25, 命题 6.8.6].

命题 2.3.4 (五项引理) 考虑 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中行正合的交换图表:

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"'] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"'] & X_3 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f_3"] & X_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"] & X_5 \arrow[d, "f_5"] \\ Y_1 \arrow[r] & Y_2 \arrow[r] & Y_3 \arrow[r] & Y_4 \arrow[r] & Y_5 \end{tikzcd}$$

(i) 若 f_1 满而 f_2, f_4 单, 则 f_3 为单 (仅涉及前四列);

(ii) 若 f_5 单而 f_2, f_4 满, 则 f_3 为满 (仅涉及后四列);

(iii) 若 f_1 满, f_5 单而 f_2, f_4 皆为同构, 则 f_3 为同构.

证明 显然 (i) 和 (ii) 对偶, 而 (iii) 是 (i)—(ii) 和命题 1.2.7 的推论, 以下仅证 (i).

设态射 $h : S \to X_3$ 满足 $f_3 h = 0$, 目标是证明 $h = 0$. 合成 $S \xrightarrow{h} X_3 \to X_4 \xrightarrow{f_4} Y_4$ 为 0, 故合成 $S \xrightarrow{h} X_3 \to X_4$ 也为 0. 引理 2.3.1 施于正合列 $X_2 \to X_3 \to X_4$ 遂给出交换图表

$$\begin{tikzcd} S' \arrow[r, two heads] \arrow[d] & S \arrow[d, "h"] \\ X_2 \arrow[r] & X_3. \end{tikzcd}$$

今将构造交换图表

$$\begin{tikzcd} S''' \arrow[r, two heads] \arrow[dd] & S'' \arrow[r, two heads] \arrow[dd] & S' \arrow[d] \\ & & X_2 \arrow[d, "f_2"] \\ X_1 \arrow[r, "f_1"'] & Y_1 \arrow[r] & Y_2. \end{tikzcd}$$

方式如下: 既然 $S' \to X_2 \xrightarrow{f_2} Y_2 \to Y_3$ 因 $f_3 h = 0$ 合成为 0, 对 $S' \to Y_2$ 和正合列 $Y_1 \to Y_2 \to Y_3$ 应用引理 2.3.1, 便给出右半部; 应用引理 2.3.1 于 $S'' \to Y_1$ 和正合列 $X_1 \xrightarrow{f_1} Y_1 \to 0$, 便给出左半部.

取合成态射 $S''' \to S'$ 并考量下图

$$\begin{tikzcd}
S''' \arrow[r, two heads] \arrow[d] & S' \arrow[r, two heads] \arrow[d] & S \arrow[d, "h"] & \\
X_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"'] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & X_3 \arrow[r] & X_4 \\
Y_1 \arrow[r] & Y_2 & &
\end{tikzcd}$$

兹断言图表交换. 唯一问题显然是左上方块: 将其中的 ↴ 和 ↳ 同合成 f_2, 则因为方块 $\begin{array}{ccc} X_1 & \longrightarrow & X_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y_1 & \longrightarrow & Y_2 \end{array}$ 和 $\begin{array}{ccc} S''' & \longrightarrow & S' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y_1 & \longrightarrow & Y_2 \end{array}$ 皆交换, 而 f_2 单, 可知左上方块也交换.

由此知 $S''' \twoheadrightarrow S' \twoheadrightarrow S \xrightarrow{h} X_3$ 合成为 0, 从而 $h = 0$. 明所欲证. $\square$

本节介绍的只是众多图表引理中最常用的两则. 基于双复形的语言, G. Bergman 发现了包罗万象的蝾螈引理, 它可以统摄蛇形引理和同调代数中一些经典的图表引理, 请雅好此道的读者移步 [2].

2.4 格论一瞥

本节旨在简介称为格的一类偏序结构. 这有助于理清 Abel 范畴的结构.

以下将考虑种种偏序集 $(P, \leq)$, 其对应的范畴记为 $\mathcal{P}$.

对于偏序集 $(P, \leq)$ 的任何一族子集 S, 对之有上界, 下界, 上确界 $\sup S$ 和下确界 $\inf S$ 的概念. 子集 $S \subset P$ 有上确界 (或下确界) 当且仅当 S 中所有对象在范畴 $\mathcal{P}$ 中的余积 (或积) 存在, 此时该上确界 (或下确界) 即是此余积 (或积).

定义 2.4.1 如果偏序集 $(P, \leq)$ 中的任两个元素 a, b 都有上确界 $a \vee b$ 和下确界 $a \wedge b$, 则称 $(P, \leq)$ 为**格**. 若进一步要求 $(P, \leq)$ 本身有上界和下界, 则它们皆唯一, 分别记为 1 和 0, 此时称 P 为**有界格**.

若 a, b 是偏序集 $(P, \leq)$ 的元素, $a \leq b$, 则 $[a, b] := \{x \in P : a \leq x \leq b\}$ 对 $\leq$ 也构成偏序集, 称为 a, b 确定的**区间**.

若 P 为格, 则 P 中的区间皆对 $\vee$ 和 $\wedge$ 封闭, 并且皆是有界格. 若 P 是有界格则 $P = [0, 1]$, 而且 $x \wedge 0 = 0$, $x \vee 0 = x = x \wedge 1$, $x \vee 1 = 1$ 对所有 $x \in P$ 皆成立.

按范畴的观点, $a \wedge b$, $a \vee b$, 1, 0 分别对应到两个对象的积, 余积和范畴中的终对象 (即空积), 始对象 (即空余积), 请读者自行验证.

为了示范 $\wedge$ 和 $\vee$ 的操作, 我们来证明以下事实: 若 $a^\flat, a, b \in P$ 满足 $a^\flat \leq a$, 则

$$a^\flat \vee (a \wedge b) \leq (a^\flat \vee b) \wedge a. \tag{2.4.1}$$

根据上确界定义, 问题首先化为证 $a^\flat \leq (a^\flat \vee b) \wedge a$ 和 $(a \wedge b) \leq (a^\flat \vee b) \wedge a$. 根据下确界定义, 这又分别化为证

$$a^\flat \leq a^\flat \vee b, \quad a^\flat \leq a, \quad a \wedge b \leq a^\flat \vee b, \quad a \wedge b \leq a.$$

以上第三式归结为 $a \wedge b \leq b \leq a^\flat \vee b$, 其余自明.

定义 2.4.2 设 P 为格.

- 当以下性质成立时, 称 P 为**模格**: 若 $a^\flat, a, b \in P$ 满足 $a^\flat \leq a$, 则

$$a^\flat \vee (a \wedge b) = (a^\flat \vee b) \wedge a.$$

- 设 P 为有界格. 若 $x, c \in P$ 满足 $x \vee c = 1$, $x \wedge c = 0$, 则称 c 是 x 在 P 中的**补**.

且来考察格的基本例子.

- 正整数集 $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 对于整除关系构成格 ($x \mid y \iff x \leq y$): $x \vee y = \mathrm{lcm}(x, y)$ 而 $x \wedge y = \gcd(x, y)$. 请读者验证这是模格, 有下界 1 而无上界.
- 取 R 为环, M 为左 R-模, 其子模构成的集合 Sub_M 对 $\subset$ 构成有界模格: $x \vee y = x + y$ 而 $x \wedge y = x \cap y$; 上界为 M 而下界为 $\{0\}$. 这是 "模格" 一词的渊源.
- Hilbert 空间 H 的所有闭子空间对 $\subset$ 构成有界格: $x \vee y := \overline{x + y}$ 而 $x \wedge y = x \cap y$. 可以证明当 H 无穷维时这不是模格.

注记 2.4.3 格的定义也含藏对偶性. 对集合 P 上给定的偏序 $\leq$, 可考虑其相反偏序 $\leq^{\mathrm{op}}$: $x \leq^{\mathrm{op}} y \iff x \geq y$; 这相当于用 $\mathcal{P}^{\mathrm{op}}$ 代替 $\mathcal{P}$. 若 $(P, \leq)$ 是格 (或有界格), 则 $(P, \leq^{\mathrm{op}})$ 亦然. 而且 $(P, \leq)$ 中的 $\wedge, \vee, 0, 1$ 分别对应 $(P, \leq^{\mathrm{op}})$ 中的 $\vee, \wedge, 1, 0$.

引理 2.4.4 设 P 为格, 则 P 为模格当且仅当以下性质对 P 中的所有区间 I 都成立: 若 $c^\flat, c$ 皆是 $x \in I$ 在 I 中的补, $c^\flat \leq c$, 则 $c^\flat = c$.

证明 若 P 为模格, 则任意区间 I 亦然. 不妨假设 $I = P$; 对于断言中的 $x, c^\flat, c$, 我们有

$$c = c \wedge 1 = c \wedge (x \vee c^\flat) = c^\flat \vee (x \wedge c) = c^\flat \vee 0 = c^\flat.$$

反之, 假设关于补的条件对所有区间成立. 设 $a^\flat, a, b \in P$ 满足 $a^\flat \leq a$. 命

$$b \wedge a \leq c_1 := a^\flat \vee (b \wedge a) \underset{\because (2.4.1)}{\leq} a \wedge (b \vee a^\flat) =: c_2 \leq b \vee a^\flat.$$

今将证明 c_1, c_2 皆是 b 在 $\left[b \wedge a,\ b \vee a^\flat\right]$ 中的补, 从而 $c_1 = c_2$. 首先按定义验证 $c_1 \leq a$, 故

$$b \wedge a \geq b \wedge c_1 = (a^\flat \vee (b \wedge a)) \wedge b \underset{\because (2.4.1)}{\geq} (a^\flat \wedge b) \vee (b \wedge a) = b \wedge a,$$

于是 $b \wedge c_1 = b \wedge a$. 另一方面, $b \vee c_1 = a^\flat \vee (b \wedge a) \vee b = a^\flat \vee b$. 综之, c_1 的确是 b 在 $\left[b \wedge a,\ b \vee a^\flat\right]$ 中的补.

格的对偶性 (注记 2.4.3) 将 $a^\flat, a$ 的序关系互换, $\wedge$ 和 $\vee$ 互换, c_1 和 c_2 的角色也互换. 以上论证在 $(P, \leq^{\mathrm{op}})$ 中操作遂给出 c_2 是 b 在 $\left[b \wedge a,\ b \vee a^\flat\right]$ 中的补. □

命题 2.4.5 设 a, b 为模格 $(P, \leq)$ 的元素, 则存在偏序集的同构

$$\begin{aligned} [a \wedge b, a] &\xleftrightarrow{1:1} [b, a \vee b] \\ x &\longmapsto x \vee b \\ y \wedge a &\longleftarrow\!\shortmid\ y \end{aligned}$$

称之为**标准同构**.

证明 双向的映射显然良定义而且保序. 对于 $x \in [a \wedge b, a]$, 模格的定义给出 $(x \vee b) \wedge a = (a \wedge b) \vee x$, 右式即 x. 对偶地, $y \in [b, a \vee b]$ 蕴涵 $(y \wedge a) \vee b = y$ (注记 2.4.3), 故映射互逆. □

初等代数学中的 Zassenhaus 引理 (见 [25, 引理 4.6.4], 确切地说是其模论版本) 及其推论可以用格论进行提炼.

定理 2.4.6 (模格的 Zassenhaus 引理) 设 $(P, \leq)$ 为模格. 给定元素 $u^\flat \leq u$ 和 $v^\flat \leq v$, 则有下图

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
u^\flat \vee (u \wedge v) \arrow[dr, dash] \arrow[dd, dash] & & (u \wedge v) \vee v^\flat \arrow[dl, dash] \arrow[dd, dash] \\
& u \wedge v \arrow[dd, dash] & \\
u^\flat \vee (u \wedge v^\flat) \arrow[dr, dash] & & (u^\flat \wedge v) \vee v^\flat \arrow[dl, dash] \\
& (u^\flat \wedge v) \vee (u \wedge v^\flat) &
\end{tikzcd}$$

其意义是图的各项满足

$$\begin{array}{c} x \\ \rotatebox{90}{$\leq$} \\ y \end{array} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] x \arrow[dr, dash] & & y \arrow[dl, dash] \\ & x \wedge y & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & x \vee y \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ x & & y \end{tikzcd} \quad . \tag{2.4.2}$$

此外, 存在区间的标准同构

$$\begin{aligned} \left[u^\flat \vee (u \wedge v^\flat),\ u^\flat \vee (u \wedge v)\right] &\xleftarrow{\sim} \left[(u^\flat \wedge v) \vee (v \wedge v^\flat),\ u \wedge v\right] \\ &\xrightarrow{\sim} \left[(u^\flat \wedge v) \vee v^\flat,\ (u \wedge v) \vee v^\flat\right], \end{aligned}$$

它们由命题 2.4.5 中的映射 $x \vee u^\flat \vee (u \wedge v) \leftarrow\!\shortmid x \mapsto x \vee (u^\flat \wedge v) \vee v^\flat$ 实现.

证明 最后一部分的同构是对图中两个平行四边形运用命题 2.4.5 的结果, 关键在检查 (2.4.2). 注意到图表对 $u \leftrightarrow v$, $u^\flat \leftrightarrow v^\flat$ 左右对称, 故端详左半部即可. 各项之间的偏序不难看透. 接着验证 $\wedge$ 情形: 按模格定义导出

$$\left(u^\flat \vee (u \wedge v^\flat)\right) \wedge (u \wedge v) = \left(u^\flat \wedge (u \wedge v)\right) \vee (u \wedge v^\flat) = (u^\flat \wedge v) \vee (u \wedge v^\flat).$$

至于 $\vee$ 的情形, 由 $u \wedge v^\flat \leq u \wedge v$ 立见

$$u^\flat \vee (u \wedge v^\flat) \vee (u \wedge v) = u^\flat \vee (u \wedge v).$$

由此验证 (2.4.2) 成立. □

以下考虑格中的有限降链, 写作 $x_0 \geq x_1 \geq \cdots \geq x_r$ 的形式 ($r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$). 插入有限多个中间项所得的降链称为原降链的**加细**; 如果插入项包含某个 $y \notin \{x_0, \ldots, x_r\}$, 则称之为真加细.

定义 2.4.7 对于模格中的两条等长降链 $x_0 \geq \cdots \geq x_r$ 和 $x'_0 \geq \cdots \geq x'_r$, 当以下条件成立时称两者是**等价**的: 存在 $\{0, \ldots, r\}$ 到自身的双射 σ (亦即重排), 使得对每个 i 都存在偏序集的同构

$$\tau_i : [x_{i+1}, x_i] \simeq \left[x'_{\sigma(i)+1}, x'_{\sigma(i)}\right],$$

并且 τ_i 分解为有限多个标准同构 (命题 2.4.5) 或其逆的合成.

定理 2.4.8 (模格的 Schreier 加细定理) 考虑模格 $(P, \leq)$ 中的降链

$$x_0 \geq \cdots \geq x_r, \quad y_0 \geq \cdots \geq y_s,$$

使得 $x_0 = y_0$, $x_r = y_s$, 其中 $r, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. 那么两者存在等价的加细 (定义 2.4.7).

证明 论证与群的情形 [25, 定理 4.6.6] 无异, 皆基于定理 2.4.6, 在此略陈梗概. 定义

$$x_{i,j} := x_{i+1} \vee (x_i \wedge y_j), \quad y_{j,i} := (x_i \wedge y_j) \vee y_{j+1},$$

其中对 $x_{i,j}$ 要求 $0 \leq i < r$ 而 $0 \leq j \leq s$, 对 $y_{j,i}$ 要求 $0 \leq i \leq r$ 而 $0 \leq j < s$. 那么 $x_{i,j+1} \leq x_{i,j}$, $x_{i,0} = x_i$, $x_{i,s} = x_{i+1}$, 所以 $(x_{i,j})_{i,j}$ 按此顺序加细了 $x_0 \geq \cdots \geq x_r$; 同理, $(y_{j,i})_{j,i}$ 加细 $y_0 \geq \cdots \geq y_s$. 在定理 2.4.6 中取 $u^\flat = x_{i+1}$, $u = x_i$ 和 $v^\flat = y_{j+1}$, $v = y_j$ 可得

$$[x_{i,j+1}, x_{i,j}] \simeq [y_{j,i+1}, y_{j,i}],$$

而且此同构能分解为标准同构及其逆. 明所欲证. □

今后仅考虑严格升/降链.

定义 2.4.9 选定偏序集 P 及其元素 $a < b$. 若 P 中的降链 $b = x_0 > \cdots > x_r = a$ 无真加细, 则称之为 $[a, b]$ 的**合成列**.

合成列的长度定义为上述之 $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$; 留意到 $r = 0$ 当且仅当 $a = b$.

定理 2.4.10 (模格的 Jordan–Hölder 定理) 设 $a < b$ 为模格 $(P, \leq)$ 的元素, 则 $[a, b]$ 的任两个合成列都等长, 并且在定义 2.4.7 意义下相互等价.

证明 这是定理 2.4.8 的直接推论. □

关键在于哪些偏序集中的区间具有合成列. 类比于熟知的模论情形, 这点可以由升链/降链条件来确保.

定义 2.4.11 设 $(P, \leq)$ 为偏序集, 若 P 中不存在无穷升链 $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$, 则称 P 是 **Noether** 的; 若不存在无穷降链 $x_1 > x_2 > x_3 > \cdots$, 则称 P 是 **Artin** 的. 既是 Artin 又是 Noether 的偏序集称为是**有限长度**的.

若 $(P, \leq)$ 具有 Noether (或 Artin, 有限长度) 之性质, 则其子集亦然. 易证 Noether (或 Artin) 条件等价于 P 的任意非空子集都含有相对于 $\leq$ 的极大元 (或极小元). 本章主要将这些概念应用于子对象构成的偏序集, 见定义 1.1.3.

定义 2.4.12 选定范畴 $\mathcal{C}$. 称 $\mathcal{C}$ 的对象 X 是 Noether (或 Artin, 有限长度) 的, 如果其子对象构成的偏序集 $(\mathrm{Sub}_X, \subset)$ 是 Noether (或 Artin, 有限长度) 的.

焦点转回一般的偏序集.

引理 2.4.13 考虑偏序集 $(P, \leq)$ 的元素 $a \leq b$.

(i) 若 $[a, b]$ 是有限长度的, 则其中的链都能加细为合成列; 特别地, $[a, b]$ 有合成列.

(ii) 若假设 $[a, b]$ 是模格, 并且有合成列, 则 $[a, b]$ 是有限长度的.

证明 无妨设 $a < b$. 对于 (i), 给定链 $y_0 > \cdots > y_r$, 说明每个 $[y_i, y_{i+1}]$ 都有合成列即足. 不妨设 $y_i = a$ 而 $y_{i+1} = b$. Artin 条件确保存在极小之 $x^0 \in [a, b]$ 使得 $x^0 > a$. 同理, 若 $x^0 \neq b$ 则存在极小之 $x^1 \in [a, b]$ 使得 $x^1 > x^0$, 依此类推. 根据 Noether 条件, 步骤必在有限步内停止, 给出之链 $b > \cdots > x^0 > a$ 无真加细.

对于 (ii), 选定合成列 $b = x_0 > \cdots > x_r = a$. 定理 2.4.8 表明任意有限长度的链 $\cdots > y_i > y_{i+1} > \cdots$ 都与上述合成列有等价的加细, 故链长不能超过合成列的长度. 于是 $[a, b]$ 是有限长度偏序集. □

定义 2.4.14 设 $(P, \leq)$ 是有限长度的有界模格. 任取 P 的合成列 $1 = x_0 > \cdots > x_r = 0$. 称 $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 为 $(P, \leq)$ 的**长度**.

定理 2.4.10 说明长度是良定义的, 无关合成列的选取; $(P, \leq)$ 的长度为 0 当且仅当 P 是独点集.

2.5 直和分解

首先讨论如何以矩阵表示直和之间的态射. 相关论证和模论的情形 [25, §6.3] 如出一辙, 我们仅作简要的回顾.

选定加性范畴 $\mathcal{A}$. 考虑 $\mathcal{A}$ 中对象 $X_1, \ldots, X_n$ 和 $X'_1, \ldots, X'_m$. 定义 1.3.3 介绍的直和 $\bigoplus_{i=1}^n X_i$ 带有态射 $\bigoplus_{i=1}^n X_i \xrightarrow{p_j} X_j$ 和 $X_j \xrightarrow{\iota_j} \bigoplus_{i=1}^n X_i$. 同理对 $\bigoplus_{i=1}^m X'_i$ 亦有 p'_j, ι'_j 等等. 积和余积的泛性质给出

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}\left(\bigoplus_{j=1}^n X_j, \bigoplus_{i=1}^m X'_i\right) &\xrightarrow[\sim]{\phi \mapsto (p'_i\phi)_i} \prod_{i=1}^m \mathrm{Hom}\left(\bigoplus_{j=1}^n X_j, X'_i\right) \\ &\xrightarrow[\sim]{(p'_i\phi)_i \mapsto (p'_i\phi\iota_j)_{i,j}} \prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^m \mathrm{Hom}(X_j, X'_i).\end{aligned}$$

因此任意态射 $\phi : \bigoplus_{j=1}^n X_j \to \bigoplus_{i=1}^m X'_i$ 对应到矩阵

$$\mathcal{M}(\phi) = (\phi_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \cdots & \phi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{m1} & \cdots & \phi_{mn} \end{pmatrix}, \quad \phi_{ij} := p'_i \phi \iota_j : X_j \to X'_i.$$

反过来说, 任何由 $\phi_{ij} : X_j \to X'_i$ 构成的矩阵 $\mathcal{M} = (\phi_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ 都唯一确定了态射 ϕ 使得 $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\phi)$. 态射合成与矩阵乘法匹配:

$$\mathcal{M}(\psi\phi) = \mathcal{M}(\psi)\mathcal{M}(\phi)$$

其中矩阵元的相乘由合成 $\mathrm{Hom}(X'_j, X''_i) \times \mathrm{Hom}(X_k, X'_j) \to \mathrm{Hom}(X_k, X''_i)$ 给出.

引理 2.5.1 给定 $\mathcal{A}$ 中的一族态射 $\phi_i : X_i \to X'_i$, 其中 $i = 1, \ldots, n$, 令 $\phi := (\phi_1, \ldots, \phi_n) : \bigoplus_{i=1}^n X_i \to \bigoplus_{i=1}^n X'_i$. 则 ϕ 是同构 $\iff$ 每个 ϕ_i 都是同构.

证明 方向 $\Longleftarrow$ 属显然. 至于 $\Longrightarrow$, 记矩阵 $\mathcal{M}(\phi^{-1})$ 为 $(\psi_{ij})_{i,j}$, 那么

$$\mathcal{M}(\phi^{-1})\mathcal{M}(\phi) = \begin{pmatrix} \psi_{11}\phi_1 & \cdots & \psi_{1n}\phi_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{n1}\phi_1 & \cdots & \psi_{nn}\phi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{X_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{id}_{X_n} \end{pmatrix}$$

故 $\phi_1, \ldots, \phi_n$ 左可逆; 同理它们右可逆. □

仍考虑直和分解 $X \simeq \bigoplus_{i=1}^n X_i$, 其中 $n \ge 1$ 而 $\forall i$, $X_i \neq 0$; 由此得到态射族 $\iota_i : X_i \to X$ 和 $p_i : X \to X_i$. 对每个 $1 \le i \le n$, 命 $e_i := \iota_i p_i \in \mathrm{End}(X)$, 它们具备以

下性质. 回忆到环 $\mathrm{End}(X)$ 的**幂等元**意谓满足 $e^2=e$ 的元素 $e\in\mathrm{End}(X)$; 不致混淆时, 我们也说 e 是 $\mathcal{A}$ 的幂等元.

(E1) 每个 e_i 皆是幂等元: $e_i^2=(\iota_i p_i)(\iota_i p_i)=\iota_i(p_i\iota_i)p_i=\iota_i p_i$.

(E2) 正交性: $i\neq j \implies e_ie_j=\iota_ip_i\iota_jp_j=0$.

(E3) 等式 $\sum_{i=1}^n e_i=1$ 在环 $\mathrm{End}(X)$ 中成立.

今后一律视直和项 X_i 为 X 的子对象, 并将分解写作等式 $X=\bigoplus_{i=1}^n X_i$. 若进一步要求 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, 则满足 (E1)—(E3) 的幂等元族 $e_1,\ldots,e_n\in\mathrm{End}(X)$ 反过来定义 X 的子对象

$$X_i:=\ker\left(\sum_{j\neq i}e_i\right)=\mathrm{im}(e_i),\quad i=1,\ldots,n$$

一方面它们带有单态射 $X_i\xrightarrow{\iota_i}X$, 另一方面正交性蕴涵 $e_i:X\to X$ 唯一地分解为 $X\xrightarrow{p_i}X_i\xrightarrow{\iota_i}X$. 这正是直和所需的资料.

从幂等元 $e_1,\ldots,e_n$ 到直和项 $X_1,\ldots,X_n$ 的过渡无需 Abel 范畴的全部性质; 我们只须假设 $\mathcal{A}$ 是具零对象的 Ab-范畴, 使得幂等元皆有核; 这种范畴称为 **Karoubi 范畴**或**伪 Abel 范畴**. 本章习题部分将有进一步讨论.

命题 2.5.2 给定 Abel 范畴 (或更一般的 Karoubi 范畴) $\mathcal{A}$ 的对象 $X\neq 0$ 和 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$, 以上构造给出双射

$$\left\{\text{直和分解 } X=\bigoplus\nolimits_{i=1}^n X_i\right\}\xleftrightarrow{1:1}\left\{(e_i)_{i=1}^n\in\mathrm{End}(X)^n:\text{满足 (E1)—(E3)}\right\}.$$

直和项 $X_1,\ldots,X_n$ 的重排对应到 $e_1,\ldots,e_n$ 的重排.

证明 如 [25, 命题 6.12.4]. □

对于 $n=2$ 的特例, 直和分解联系于一类特殊的短正合列, 称为分裂短正合列.

命题 2.5.3 对于 Abel 范畴中的短正合列 $0\to X'\xrightarrow{f}X\xrightarrow{g}X''\to 0$, 以下陈述等价.

(i) 存在 $s:X''\to X$ 使得 $gs=\mathrm{id}_{X''}$.

(ii) 存在 $r:X'\to X$ 使得 $rf=\mathrm{id}_{X'}$.

(iii) 存在图表 $X' \underset{f}{\overset{r}{\leftrightarrows}} X \underset{g}{\overset{s}{\leftrightarrows}} X''$ 使 $X\simeq X'\oplus X''$, 见 §1.3 关于双积的回顾.

(iv) 映射 $g_*:\mathrm{Hom}(S,X)\to\mathrm{Hom}(S,X'')$ (映 φ 为 $g\varphi$) 对一切对象 S 皆满.

(v) 映射 $f^*:\mathrm{Hom}(X,S)\to\mathrm{Hom}(X',S)$ (映 ψ 为 ψf) 对一切对象 S 皆满.

当上述任一条件成立时, 称短正合列 $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ **分裂**. 陈述 (i) 的态射 $s: X'' \to X$, (ii) 的 $r: X' \to X$ 与 (iii) 的同构 $X \xrightarrow{\sim} X' \oplus X''$ (且记为 Φ) 之间相互对应如下

- 从 Φ 到 s: 取合成 $X'' \xrightarrow{\iota_2} X' \oplus X'' \xrightarrow{\Phi^{-1}} X$;
- 从 s 到 r: 态射 $\mathrm{id}_X - sg : X \to X$ 唯一地分解为 $X \xrightarrow{r} X' \xrightarrow{f} X$, 此即所求之 r;
- 从 r 到 Φ: 取 $(r, g) : X \to X' \oplus X''$, 此为同构.

此外, 给定 s 或相应的 r, 与 (iii) 的直和分解对应的正交幂等元是

$$e' := fr = \mathrm{id}_X - sg, \quad e'' := sg = \mathrm{id}_X - fr.$$

证明 模的情形见 [25, 命题 6.8.5]; 由于其证明仅涉及 Hom 集里的代数操作和双积的刻画, 而这些性质在 Abel 范畴中同样成立, 论证可以一字不易地照搬. 这里不再赘述.□

在命题 2.5.3 的场景中, 给定 $f : X' \to X$ 和 $g : X \to X''$, 当 $gs = \mathrm{id}_{X''}$ 时称 s 为 g 的一个**截面**, 当 $rf = \mathrm{id}_{X'}$ 时称 r 为 f 的一个**收缩**; 这些术语源于拓扑学. 截面和收缩的存在性分别蕴涵 g 单, f 满, 反之则不然.

另外, 注意到命题的 (i) — (v) 整体是自对偶的.

定义 2.5.4 设 S 为 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中的非零对象. 若 $S = S' \oplus S''$ 蕴涵 $S' = 0$ 或 $S'' = 0$, 则称 S 是**不可分解对象**.

推论 2.5.5 Abel 范畴中的非零对象 X 不可分解当且仅当

$$\forall e \in \mathrm{End}(X), \quad e^2 = e \iff (e = 0 \ \vee \ e = 1).$$

证明 应用命题 2.5.2. □

我们希望研究形如 $X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$ 的分解, $X \neq 0$ 而每个 X_i 皆是不可分解对象. 问题分成存在性和唯一性. 对于模的情形, 这是 Krull–Remak–Schmidt 定理的内容, 见 [25, 推论 6.12.9]. 对于一般的 Abel 范畴则需要一些回顾和准备工作. 以下参照 [11] 的进路.

定义 2.5.6 设 $\mathcal{A}$ 为任意范畴. 其中的**双链**意谓资料 $(X_n, \alpha_n, \beta_n)_{n=0}^{\infty}$, 其中 X_n 是 $\mathcal{A}$ 的对象而 $X_n \underset{\beta_n}{\overset{\alpha_n}{\rightleftarrows}} X_{n+1}$ 是其间的态射, α_n 满而 β_n 单 ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$). 对于 $\mathcal{A}$ 的对象 X, 当以下条件成立时称 X 满足**双链条件**: 对于所有满足 $X_0 = X$ 的双链 (X_n, α_n, β_n), 当 $n \gg 0$ 时 α_n, β_n 皆是同构.

以下结果是 [25, 引理 6.11.5] 的推广.

引理 2.5.7 (Abel 范畴中的 Fitting 引理) 设 $\mathcal{A}$ 为 Abel 范畴, X 为其中满足双链条件的非零对象, $f \in \mathrm{End}(X)$.

(i) 当 $n \gg 0$ 时 $\ker(f^n)$ 和 $\mathrm{im}(f^n)$ 与 n 无关, 分别记为 $\ker(f^\infty)$ 和 $\mathrm{im}(f^\infty)$. 我们有 $X = \ker(f^\infty) \oplus \mathrm{im}(f^\infty)$.

(ii) 若 X 不可分解, 则 f 在环 $\mathrm{End}(X)$ 中或者可逆, 或者幂零.

证明 对 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 定义 $X_n := \mathrm{im}(f^n)$, 因此 $X_0 = X$. 应用命题 1.2.5 和 $\mathrm{coim} \xrightarrow{\sim} \mathrm{im}$ 得到满态射 $\alpha_n : X_n \to X_{n+1}$ (由 f 诱导) 和单态射 $\beta_n : X_{n+1} \to X_n$. 如是遂有双链 $(X_n, \alpha_n, \beta_n)_{n=0}^\infty$.

当 $n \gg 0$ 时 α_n 和 β_n 为同构. 因此可以良定义 X 的子对象 $\mathrm{im}(f^\infty) := \mathrm{im}(f^n)$, 其中 $n \gg 0$, 相应的单态射记为 $\iota : \mathrm{im}(f^\infty) \hookrightarrow X$. 而 $\ker(f^n) = \ker[X \to \mathrm{im}(f^n)]$ 在 $n \gg 0$ 时也是与 n 无关的子对象 $\ker(f^\infty)$.

于是当 $n \gg 0$ 时态射 $\alpha_{2n-1} \cdots \alpha_n : X_n \to X_{2n}$ 可逆, 记其逆为 $\psi : \mathrm{im}(f^\infty) \xrightarrow{\sim} \mathrm{im}(f^\infty)$. 命

$$p := \psi f^n : X \to \mathrm{im}(f^\infty), \quad \ker(p) = \ker(f^\infty) \qquad (n \gg 0).$$

从 $p\iota = \mathrm{id}_{\mathrm{im}(f^\infty)}$ 可知 $e := \iota p \in \mathrm{End}(X)$ 为幂等元, $\mathrm{im}(e) = \mathrm{im}(f^\infty)$, $\ker(e) = \ker(f^\infty)$, 代入命题 2.5.2 即见 (i) 的分解.

若 X 不可分解, 则或者 $\mathrm{im}(f^\infty) = 0$ 而 $\ker(f^\infty) = X$, 此时 f 幂零, 或者 $\mathrm{im}(f^\infty) = X$ 而 $\ker(f^\infty) = 0$, 此时 f 可逆. 此即 (ii). □

回忆 [25, 定义 6.12.3]: 若 S 是环, 而且 $S \smallsetminus S^\times$ 是双边理想, 则称 S 为**局部环**.

推论 2.5.8 设 Abel 范畴中的非零对象 X 满足双链条件, 则 X 不可分解当且仅当 $\mathrm{End}(X)$ 是局部环.

证明 引理 2.5.7 说明若 X 不可分解, 则 $\mathrm{End}(X)$ 的元素或者幂零或者可逆, 二者必居其一. 剩下的论证仅涉及 $\mathrm{End}(X)$ 的环结构, 和 [25, 引理 6.12.6] 无异. □

现在可以陈述 Krull–Remak–Schmidt 定理在 Abel 范畴中的版本.

定理 2.5.9 (M. Atiyah) 设 X 是 Abel 范畴中的非零对象.

(i) 若 X 满足双链条件, 则存在 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 和不可分解子对象 $X_1, \ldots, X_n$, 使得 $X = \bigoplus_{i=1}^n X_i$, 而且每个 $\mathrm{End}(X_i)$ 都是局部环.

(ii) 设 X 能分解为 $\bigoplus_{i=1}^n X_i$ 和 $\bigoplus_{j=1}^m X'_j$, 其中每个 X_i, X'_j 皆不可分解, $\mathrm{End}(X_i)$, $\mathrm{End}(X'_j)$ 皆是局部环. 那么 $n = m$, 并且存在从 $\{1, \ldots, n\}$ 到自身的双射 σ 使得 $X_i \simeq X'_{\sigma(i)}$ 对所有 i 皆成立.

证明 问题在于论证满足双链条件之 X 必然有如 (i) 的分解, 其余只涉及 End 环中的代数操作, 和 [25, 定理 6.12.8] 无异. 故以下假设双链条件成立.

注意到若有分解 $X = Y \oplus Z$, 其中 Y 非零, 则 Y 也满足双链条件: 诚然, 对于满足 $Y_0 = Y$ 的双链 $(Y_n, \alpha_n, \beta_n)_{n=0}^\infty$, 取 $X_n := Y_n \oplus Z$ 和 $\tilde{\alpha}_n := \alpha_n \oplus \mathrm{id}_Z$, $\tilde{\beta}_n := \beta_n \oplus \mathrm{id}_Z$ 则

得到满足 $X_0 = X$ 的双链, 而引理 2.5.1 蕴涵 $\tilde{\alpha}_n$ (或 $\tilde{\beta}_n$) 为同构当且仅当 α_n (或 β_n) 亦然.

若 X 已不可分解, 推论 2.5.8 蕴涵 $\mathrm{End}(X)$ 是局部环, 此即 (i). 若断言 (i) 对 X 不成立, 则必存在非零子对象 X_1, Y_1 使得 $X = X_1 \oplus Y_1$ 而且断言 (i) 对 X_1 不成立. 对 X_1 续行如是操作, 给出 $X_1 = X_2 \oplus Y_2$; 迭代给出双链 $(X_n, \alpha_n, \beta_n)_{n=0}^{\infty}$, 其中 $\alpha_n : X_n \twoheadrightarrow X_{n+1}$ 和 $\beta_n : X_{n+1} \hookrightarrow X_n$ 来自 $X_n = X_{n+1} \oplus Y_{n+1}$, 恒非同构, 而且 $X_0 := X$, 与双链条件矛盾. 明所欲证. □

实践中的要点是知悉双链条件何时成立. 一个充分条件如下.

命题 2.5.10 设 X 是 Abel 范畴中的有限长度对象 (定义 2.4.12), 则 X 满足双链条件.

证明 给定双链 $(X_n, \alpha_n, \beta_n)_{n=0}^{\infty}$ 满足 $X_0 = X$. 那么 $(\mathrm{im}(\beta_0 \cdots \beta_n))_{n=0}^{\infty}$ 是偏序集 Sub_X 中的降链; 因为 β_n 皆单, 当 $n \gg 0$ 时 Artin 条件给出交换图表

$$\begin{tikzcd}
X_{n+1} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\beta_n"'] & \mathrm{im}(\beta_0 \cdots \beta_{n+1}) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\simeq"] & X_0 \\
X_n \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{im}(\beta_0 \cdots \beta_n) \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

此时 β_n 为同构. 同理, 对升链 $(\ker(\alpha_n \cdots \alpha_0))_{n=0}^{\infty}$ 应用 Noether 条件并利用 α_n 的满性, 当 $n \gg 0$ 时可得行正合的交换图表

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker(\alpha_n \cdots \alpha_0) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & X_0 \arrow[r, "\alpha_n \cdots \alpha_0"] \arrow[d, equal] & X_n \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{n+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker(\alpha_{n+1} \cdots \alpha_0) \arrow[r] & X_0 \arrow[r, "\alpha_{n+1} \cdots \alpha_0"'] & X_{n+1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

此时 α_{n+1} 为同构. □

习题部分将介绍更多推导双链条件的方法.

2.6 子对象和同构定理

本节取定 Abel 范畴 $\mathcal{A}$. 对于 $\mathcal{A}$ 的任何对象 X, 其子对象之间的偏序按 §1.1 的惯例标为 $\subset$; 相应的偏序集是 $(\mathrm{Sub}_X, \subset)$.

本节的结果对于 $\mathcal{A} = R\text{-Mod}$ 的情形都是熟知的, 其中 R 是任意环; 但对于 Abel 范畴需要不同的论证.

定义 2.6.1 令 X 为 $\mathcal{A}$ 中的对象.

- 给定 X 的子对象 X', 相应的**商**定为 $X/X' := \mathrm{coker}[X' \to X]$, 它自然是 X 的商对象. 任何满态射 $f : X \twoheadrightarrow X''$ 皆可理解为 X 对 $\ker(f)$ 的商.

◇ 给定 X 的一族子对象 $X_1,\ldots,X_n$, 相应的**交**与**和**分别定义为

$$X_1 \cap \cdots \cap X_n := X_1 \underset{X}{\times} \cdots \underset{X}{\times} X_n,$$
$$X_1 + \cdots + X_n := \mathrm{im}\left[X_1 \oplus \cdots \oplus X_n \xrightarrow{\sigma} X\right],$$

其中 σ 由诸 $X_i \hookrightarrow X$ 诱导 (可想成求和). 它们自然地是 X 的子对象: $X_1 \cap \cdots \cap X_n$ 的情形归结为引理 1.1.6, 而 $X_1 + \cdots + X_n$ 的情形则来自定义.

举例明之, 上同调的定义可以用商改写为

$$\mathrm{H}^n(X) := \ker(d_X^n)/\,\mathrm{im}(d_X^{n-1}).$$

推而广之, 对于任何集合 I 和 X 的一族子对象 $(X_i)_{i\in I}$, 只要它们在 X 上的纤维积 (或它们在 $\mathcal{A}$ 中的余积 $\coprod_{i\in I} X_i$) 存在, 同样方法可以良定义 $\bigcap_{i\in I} X_i$ (或 $\sum_{i\in I} X_i$). 此定义的角色由下述事实阐明.

命题 2.6.2 给定 X 的一族子对象 $(X_i)_{i\in I}$. 一旦它们在 X 上的纤维积 (或在 $\mathcal{A}$ 中的余积 $\coprod$) 存在, 便给出 $(X_i)_{i\in I}$ 在偏序集 $(\mathrm{Sub}_X, \subset)$ 中的下确界 (或上确界).

证明 按构造可见 $\bigcap_{j\in I} X_j \subset X_i \subset \sum_{j\in I} X_j$ 对每个 i 皆成立.

接着考虑子对象 $Y \hookrightarrow X$. 对于交的情形, 假定 $\forall i \in I$, $Y \subset X_i$, 亦即存在一族交换图表 $\begin{array}{ccc} Y & \hookrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow & \\ X_i & & \end{array}$, 则纤维积的泛性质给出态射 $Y \to \bigcap_{i\in I} X_i$ 使得 $Y \subset \bigcap_{i\in I} X_i$. 对于和的情形, 假定 $\forall i \in I$, $X_i \subset Y$. 以余积的泛性质构作交换图表

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i\in I} X_i & \xrightarrow{\sigma} & X \\ & \searrow & \uparrow \\ & & Y. \end{array}$$

代入引理 1.2.3 可知 $\coprod_{i\in I} X_i \to Y$ 唯一地透过 $\mathrm{coim}(\sigma) \simeq \mathrm{im}(\sigma)$ 分解, 与映入 X 的态射兼容, 此即 $\sum_{i\in I} X_i := \mathrm{im}(\sigma) \subset Y$. □

约定 2.6.3 鉴于命题 2.6.2, 我们也不妨绕开纤维积或余积, 直接将一族子对象 $(X_i)_{i\in I}$ 的交 $\bigcap_i X_i$ (或和 $\sum_i X_i$) 定为它们在 Sub_X 中的上确界 (或下确界), 前提是它存在. 若指标集 I 带有滤过偏序, 而 $i \le j \implies X_i \le X_j$, 则上确界 $\sum_{i\in I} X_i$ 也可以合理地记作递增并 $\bigcup_{i\in I} X_i$.

推论 2.6.4 对于任意对象 X, 偏序集 $(\mathrm{Sub}_X, \subset)$ 是定义 2.4.1 意义下的有界格.

证明 任两个子对象 Y, Z 的上确界是 $Y + Z$, 下确界是 $Y \cap Z$; 偏序集 Sub_X 的上界为 X, 下界为 0. □

本节着眼于 $(\mathrm{Sub}_X, \subset)$ 的结构, 但商对象的版本 $(\mathrm{Quot}_X, \twoheadleftarrow)$ 实无不同, 这是基于显然的倒序双射 $\mathrm{Sub}_X \simeq \mathrm{Quot}_X$: 子对象 X' 和商对象 X'' 对应, 当且仅当它们能置入短正合列 $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$. 故今后不另外讨论.

定义 2.6.5 给定态射 $f : X \to Y$ 及子对象 $X' \hookrightarrow X$, $Y' \hookrightarrow Y$, 记

$$f^{-1}(Y') := X \underset{Y}{\times} Y', \quad f(X') := \mathrm{im}\left[X' \hookrightarrow X \xrightarrow{f} Y\right];$$

它们分别是 X 和 Y 的子对象. 这给出双向的保序映射 $\mathrm{Sub}_X \underset{f^{-1}(\cdot)}{\overset{f(\cdot)}{\rightleftarrows}} \mathrm{Sub}_Y$.

引理 2.6.6 给定 $f : X \to Y$ 如上.

(i) 对一切 $X' \in \mathrm{Sub}_X$ 和 $Y' \in \mathrm{Sub}_Y$, 皆有

$$X' \subset f^{-1}(Y') \iff f(X') \subset Y'.$$

(ii) 给定 Sub_X (或 Sub_Y) 的一族元素 $(X_i)_{i\in I}$, $(Y_i)_{i\in I}$, 我们有

$$f\left(\sum_{i\in I} X_i'\right) = \sum_{i\in I} f(X_i'), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} Y_i'\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(Y_i'),$$

前提是所论的交与和存在.

证明 对于 (i), 循定义可知 $X' \subset f^{-1}(Y')$ 等价于存在交换图表

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, dashed, "\exists"] \arrow[d, hook] & Y' \arrow[d, hook] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y. \end{tikzcd}$$

因为 $f(X')$ 是 $X' \hookrightarrow X \xrightarrow{f} Y$ 的余像, 引理 1.2.3 表明这般交换图表一一对应于

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d, hook] & f(X') \arrow[r, dashed, "\exists"] \arrow[d, hook] & Y' \arrow[dl, hook'] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y & \end{tikzcd}$$

此即 (i). 若考虑与偏序集对应的范畴 Sub_X 等等, 则 (i) 相当于说 $f(\cdot) : \mathsf{Sub}_X \to \mathsf{Sub}_Y$ 是 $f^{-1}(\cdot) : \mathsf{Sub}_Y \to \mathsf{Sub}_X$ 的左伴随函子. 既然积 (或余积) 对应下确界 (或上确界), 因而 (ii) 是 [25, 定理 2.8.12] 的推论. □

引理 2.6.7 考虑子对象 $i : A \hookrightarrow X$, $j : B \hookrightarrow X$, 则态射 $(i, j) : A \oplus B \to X$ 为同构当且仅当

$$A \cap B = 0, \quad A + B = X.$$

此外, 交换图表

$$\begin{tikzcd} A\cap B \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "\delta_2"'] & A \arrow[d, "i"] \\ B \arrow[r, "j"'] & A+B \end{tikzcd}$$

既是推出又是拉回, 其中 δ_1 和 δ_2 是典范态射.

证明 定义 $\Delta: A\cap B\to A\oplus B$ 为对角态射, 其刻画为 $p_i\Delta=\delta_i$ (其中 $i=1,2$); 另定义反对角态射 $\Delta^-: A\cap B\to A\oplus B$ 使得 $p_1\Delta^-=-\delta_1$ 而 $p_2\Delta^-=\delta_2$.

注记 2.1.5 蕴涵 Δ 使得 $A\cap B := A\underset{X}{\times} B \xrightarrow{\sim} \ker\left[A\oplus B\xrightarrow{(i,-j)} X\right]$. 若以 (i,j) 代 $(i,-j)$, 则 $A\oplus B\to X$ 的像仍是 $A+B$, 而其核由 Δ 变为 Δ^-. 于是有行正合交换图表

$$\begin{tikzcd} & & & X & \\ 0 \arrow[r] & A\cap B \arrow[r, "\Delta^-"'] & A\oplus B \arrow[r] \arrow[ur, "{(i,j)}"] & A+B \arrow[r] \arrow[u] & 0 \end{tikzcd}$$

因此 $(i,j): A\oplus B\to X$ 为同构当且仅当 $A\cap B=0$ 且 $A+B=X$.

注记 2.1.5 将 $A\underset{A\cap B}{\sqcup} B$ 等同于 $(A\oplus B)/\operatorname{im}(\Delta^-)$. 于是我们有交换图表

$$\begin{tikzcd} A\cap B \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "\delta_2"'] & A \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "i"] & \\ B \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "j"'] & (A\oplus B)/\operatorname{im}(\Delta^-) \arrow[dr, "\simeq"] & \\ & & A+B \end{tikzcd}$$

而且其左上方块是推出图表, 故整个外框亦然. 因为 δ_1 单, 命题 2.1.6 蕴涵它也是拉回. □

易言之, B 是 A 在格 Sub_X 中的补 (定义 2.4.2) 当且仅当 $(i,j): A\oplus B\xrightarrow{\sim} X$; 后者也经常写作等式 $A\oplus B=X$.

模论奠基于几个基本同构定理; 参看 [25, 命题 6.1.11, 6.1.12, 6.1.13]. 以下将扩之于一般的 Abel 范畴 $\mathcal{A}$.

定理 2.6.8 选定对象 X.

(i) 对任何态射 $f: X\to Y$, 存在典范同构 $X/\ker(f)\xrightarrow{\sim}\operatorname{im}(f)$ 使得图表

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & \operatorname{im}(f) \\ X/\ker(f) \arrow[ur, two heads, "\simeq"'] & \end{tikzcd} \quad \text{交换.}$$

(ii) 选定子对象 $Z \hookrightarrow X$, 记自然态射 $X \twoheadrightarrow \overline{X} := X/Z$ 为 π. 存在保序双射

$$\begin{aligned} \{Y \in \mathrm{Sub}_X : Z \subset Y\} &\xleftrightarrow{1:1} \mathrm{Sub}_{\overline{X}} \\ Y &\longmapsto \pi(Y) = Y/Z =: \overline{Y} \\ \pi^{-1}(\overline{Y}) &\longleftarrow\!\shortmid\ \overline{Y}, \end{aligned}$$

符号如定义 2.6.5; 若 $Y \supset Z$ 如上, 则存在典范同构 $X/Y \xrightarrow{\sim} \overline{X}/\overline{Y}$ 使图表

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \overline{X} \arrow[d, two heads] \\ X/Y \arrow[r, "\sim"'] & \overline{X}/\overline{Y} \end{tikzcd}$$

交换, 并且 $\overline{Y_1 \cap Y_2} = \overline{Y_1} \cap \overline{Y_2}$, $\overline{Y_1 + Y_2} = \overline{Y_1} + \overline{Y_2}$.

(iii) 对于 $Y, Z \in \mathrm{Sub}_X$, 存在典范同构 $Y/(Y \cap Z) \xrightarrow{\sim} (Y+Z)/Z$ 使图表

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & Y+Z \arrow[d, two heads] \\ Y/(Y\cap Z) \arrow[r, "\sim"'] & (Y+Z)/Z \end{tikzcd} \quad \text{交换.}$$

证明 鉴于短正合列 $0 \to \ker(f) \to X \to \mathrm{im}(f) \to 0$, 断言 (i) 仅是复述定义.

至于 (ii). 给定 Y, 首先构造行正合的交换图表

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Z \arrow[r] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r] \arrow[d, hook] & Y/Z \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists!"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Z \arrow[r] & X \arrow[r, "\pi"'] & \overline{X} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

虚线箭头源自余核的函子性 (1.3.3). 应用定理 2.3.3 立见 $\ker[Y/Z \to \overline{X}] = 0$ 而 $X/Y \xrightarrow{\sim} \mathrm{coker}[Y/Z \to \overline{X}]$; 特别地,

$$Y/Z = \mathrm{im}[Y \to \overline{X}] = \pi(Y) \in \mathrm{Sub}_{\overline{X}}, \quad X/Y \simeq \overline{X}/\pi(Y).$$

先前已说明 (ii) 的双向映射皆保序. 以下证明它们互逆. 给定 Y, 因为 $\overline{Y} \hookrightarrow \overline{X}$ 是 $\overline{X} \to \overline{X}/\overline{Y}$ 的核, 命题 1.3.9 表明 $\pi^{-1}(\overline{Y}) := X \underset{\overline{X}}{\times} \overline{Y} \hookrightarrow X$ 是合成态射 $X \to \overline{X} \to \overline{X}/\overline{Y}$ 的核, 但后者又是 $X \to X/Y$ 的核, 这就将子对象 $\pi^{-1}(\overline{Y})$ 等同于 $Y = \ker[X \to X/Y]$.

反之给定 $\overline{Y}$, 记 $Y := X \underset{\overline{X}}{\times} \overline{Y} = \pi^{-1}(\overline{Y})$. 试端详拉回图表

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \overline{Y} \arrow[d, hook] \\ X \arrow[r, "\pi"'] & \overline{X}. \end{tikzcd}$$

第二行的 π 既然满, 命题 2.1.6 蕴涵第一行亦满, 这就说明 $\overline{Y} = \pi(Y)$.

最后, 等式 $\overline{Y_1 \cap Y_2} = \overline{Y_1} \cap \overline{Y_2}$, $\overline{Y_1 + Y_2} = \overline{Y_1} + \overline{Y_2}$ 是 $Y \leftrightarrow \overline{Y}$ 保序的直接推论.

对于 (iii), 考虑行正合的交换图表

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Y \cap Z \arrow[r] \arrow[d, hook] & Y \arrow[r] \arrow[d, hook] & Y/(Y \cap Z) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists!\theta"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Z \arrow[r] & Y + Z \arrow[r] & (Y+Z)/Z \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

其中 θ 来自余核的函子性. 引理 2.6.7 蕴涵左侧方块是推出. 推出保余核 (命题 1.3.10), 故 θ 是同构. 明所欲证. $\square$

推论 2.6.9 *考虑交换图表*

$$\begin{tikzcd} \ker(g') \arrow[r, hook] \arrow[d, "k"'] & W \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & Y \arrow[r, two heads] \arrow[d, "f"] & \mathrm{coker}(g') \arrow[d, "c"] \\ \ker(g) \arrow[r, hook] & X \arrow[r, "g"'] & Z \arrow[r, two heads] & \mathrm{coker}(g) \end{tikzcd}$$

其中 k, c 是函子性 (1.3.3) 刻画的态射. 若中间方块是拉回 (或推出), 则 c 单 (或 k 满).

证明 处理拉回情形即足. 由于沿 f 的拉回可以分步进行, 问题简化为 f 满和 f 单两种情形. 若 f 满, 命题 2.1.6 蕴涵中间方块也是推出, 此时 c 是同构. 若 f 单, 将沿 g 的拉回分段拆成

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathrm{im}(g) \underset{Z}{\times} Y \arrow[r, "g''"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, two heads] & \mathrm{im}(g) \arrow[r, hook] & Z; \end{tikzcd}$$

命题 2.1.6 蕴涵 $W \to \mathrm{im}(g) \underset{Z}{\times} Y$ 满, 从而 $\mathrm{coker}(g') = \mathrm{coker}(g'')$. 问题遂简化到 f, g 皆单的情形. 此时 $W = Y \cap X$, 而 c 分解为 $Y/(Y \cap X) \xrightarrow{\sim} (Y+X)/X \hookrightarrow Z/X$. $\square$

定理 2.6.10 *对于所有对象 X, 偏序集 $(\mathrm{Sub}_X, \subset)$ 都是定义 2.4.2 意义下的有界模格.*

证明 已知 $(\mathrm{Sub}_X, \subset)$ 为有界格. 以下考虑 Sub_X 中的任一区间 $[Y_1, Y_2]$. 引理 2.4.4 将问题化约为下述断言: 对于所有 $A, B, C \in [Y_1, Y_2]$,

$$\big(A, B \text{ 皆是 } C \text{ 的补}, \; A \subset B\big) \implies A = B. \tag{2.6.1}$$

首先, 定理 2.6.8 (ii) 的保序双射将 (2.6.1) 简化到 $Y_1 = 0$ 而 $Y_2 = X$ 之情形. 关于补的前提借由引理 2.6.7 化为 $A \oplus C \xrightarrow{\sim} X \xleftarrow{\sim} B \oplus C$, 其中的同构由从 A, B, C 到 X 的单态射 $\iota_A, \iota_B, \iota_C$ 诱导. 按假设, 存在 $\alpha : A \to B$ 使得 $\iota_A = \iota_B \alpha$. 如是则有交换图表

$$\begin{tikzcd} B \oplus C \arrow[r, "(\iota_B, \iota_C)"] & X \\ A \oplus C \arrow[u, "(\alpha, \mathrm{id}_C)"] \arrow[ur, "(\iota_A, \iota_C)"'] & \end{tikzcd}$$

故 (α, id_C) 为同构, 根据引理 2.5.1, 这又蕴涵 α 为同构. 故 (2.6.1) 得证. □

模格性质是将模论中的一些标准论证移植到 Abel 范畴上的重要桥梁.

2.7 单性和半单性

本节取定 Abel 范畴 $\mathcal{A}$.

约定 2.7.1 按惯例, 将 Abel 范畴中一族对象 $(X_i)_{i\in I}$ 的余积 $\coprod_{i\in I} X_i$ (假设存在) 写作 $\bigoplus_{i\in I} X_i$ 的形式, 称为其**直和**. 当 I 有限时, 一切回归定义 1.3.3 的约定.

定义 2.7.2 *若 $\mathcal{A}$ 的对象 X 非零, 而且 $\mathrm{Sub}_X = \{0, X\}$, 则称 X 为***单对象**.

对象 X 单相当于说对于任何短正合列 $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$, 或者 $X' = 0$ 或者 $X' \xrightarrow{\sim} X$, 二者必居其一; 等价地说, $X \xrightarrow{\sim} X''$ 或 $X'' = 0$ 二者必居其一. 因此 X 在 $\mathcal{A}$ 中和在 $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ 中的单性相等价.

注意到 $X \neq 0 \iff \mathrm{id}_X \neq 0 \iff \mathrm{End}(X)$ 非零环.

引理 2.7.3 (Schur 引理) *选定对象 X, Y. 若 X (或 Y) 为单对象, 则 $\mathrm{Hom}(X, Y)$ 中的非零态射皆单 (或满). 作为推论, 当 X 是单对象时 $\mathrm{End}(X)$ 是除环.*

证明 设 X 单, $f : X \to Y$ 非零, 则必有 $\ker(f) = 0$. 至于 Y 单的情形则可用对偶性处理. 既单又满的态射是同构 (命题 1.2.7), 故取 $X = Y$ 可知 $\mathrm{End}(X)$ 为除环. □

已知 Sub_X 是有界模格 (定理 2.6.10). 引理 2.4.13 表明 X 是有限长度的当且仅当偏序集 $[0, X]$ 有合成列; 后者也简称为 X 的合成列. 有限长度对象 X 的**长度**定为

$$\ell(X) := \mathrm{Sub}_X \text{ 的长度 } \in \mathbb{Z}_{\geq 0};$$

见定义 2.4.14. 注意到 $\ell(X) = 0 \iff X = 0$. 按惯例, $Y \subsetneq Z$ 意谓 $Y \subset Z$ 且 $Y \neq Z$.

定义–定理 2.7.4 (Abel 范畴的 Jordan–Hölder 定理) *设 X 是有限长度对象. 任取 X 的合成列 $X = X_0 \supsetneq \cdots \supsetneq X_r = 0$; 精确到同构, 其子商 X_i/X_{i+1} 称为 X 的***合成因子**. *合成因子都是单对象; 它们构成的集合 (元素容许带重数) 记为 $\mathrm{JH}(X)$, 与合成列的选取无关.*

证明 合成因子必然单, 否则 $X_0 \supsetneq \cdots \supsetneq X_r$ 有真加细. 设 $X = X'_0 \supsetneq \cdots \supsetneq X'_s$ 为另一合成列. 定理 2.4.10 蕴涵它和 $X_0 \supsetneq \cdots \supsetneq X_r$ 等价; 特别地, 它们的指标集之间存在双射 $i \leftrightarrow j$, 使得区间 $[X_{i+1}, X_i]$ 和 $[X'_{j+1}, X'_j]$ 可以通过模格中的标准同构 $[a \wedge b, a] \xrightarrow{\sim} [b, a \vee b]$ (见命题 2.4.5) 相连接.

迄今一切都是格论语言, 然而定理 2.6.8 (iii) 表明这类区间同构对应于商对象在 $\mathcal{A}$ 中的同构

$$X_i/X_{i+1} \simeq X'_j/X'_{j+1}.$$

变动 $i \leftrightarrow j$ 可见精确到同构和重排, 合成因子无关合成列的选取. □

注意到 $\mathrm{JH}(X)$ 的元素个数 (计入重数) 正是 $\ell(X)$. 带重数的集合也能取并, 相当于重数相加, 此运算仍记为 $\cup$.

引理 2.7.5 给定短正合列 $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$. 对象 X 长度有限当且仅当 X', X'' 亦然; 此时 $\mathrm{JH}(X) = \mathrm{JH}(X') \cup \mathrm{JH}(X'')$, 从而 $\ell(X) = \ell(X') + \ell(X'')$.

证明 定理 2.6.8 (ii) 将偏序集 $\mathrm{Sub}_{X'}$ 和 $\mathrm{Sub}_{X''}$ 分别嵌为 Sub_X 的区间 $[0, X']$ 和 $[X', X]$. 故 X 长度有限蕴涵 X', X'' 长度有限. 反之设 X', X'' 长度有限, 取合成列

$$X' = X'_0 \supsetneq \cdots \supsetneq X'_r = 0, \quad X'' = X''_0 \supsetneq \cdots \supsetneq X''_s = 0.$$

按定理 2.6.8 (ii) 将每个 X''_i 都提升为 X 的子对象 $Y_i \supset X'$, 特别地 $Y_0 = X$ 而 $Y_s = X'$; 于是

$$X = Y_0 \supsetneq \cdots \supsetneq Y_s \supsetneq X'_1 \supsetneq \cdots \supsetneq X'_r = 0$$

是合成列, 其子商组成 $\mathrm{JH}(X') \cup \mathrm{JH}(X'')$. □

定义 2.7.6 对象 X 称为是

- **半单**的, 如果存在一族单子对象 $(X_i)_{i \in I}$ 使得 $X = \bigoplus_{i \in I} X_i$;
- **分裂**的, 如果所有短正合列 $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ 皆分裂.

若所有对象皆半单 (或分裂), 则称 $\mathcal{A}$ 为半单 (或分裂) Abel 范畴[2].

许多文献在半单对象的定义中要求 I 有限.

引理 2.7.7 若 $X = \bigoplus_{i=1}^n X_i$, 其中 $X_1, \ldots, X_n$ 为单对象, 则 X 是有限长度的, $\mathrm{JH}(X) = \{X_1, \ldots, X_n\}$ (计重数), 而 $\ell(X) = n$.

证明 考虑合成列 $\bigoplus_{i=1}^n X_i \supsetneq \bigoplus_{i=1}^{n-1} X_i \supsetneq \cdots \supsetneq 0$. □

注记 2.7.8 对于一般的半单对象 $X = \bigoplus_{i \in I} X_i$, 关于 X 的 Noether, Artin 和有限长度的性质全部等价于 I 有限, 这是因为通过从 I 添入 (或删去) 直和项, 极易在 Sub_X 中构造严格升链 (或严格降链).

我们希望了解分裂对象和半单对象的联系. 论证类似于模的情况 [25, 命题 6.11.4].

命题 2.7.9 设 X 是分裂对象, 则 X 的子对象和商对象亦分裂. 若进一步设 X 是 Artin 对象, 则 X 是有限长度半单对象.

[2]文献中的定义不尽统一, 有人将这里的分裂 Abel 范畴称为半单 Abel 范畴.

证明 给定短正合列 $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$, 条件蕴涵 $X \simeq X' \oplus X''$, 故 X'' 嵌入为 X 的子对象. 问题遂化约为证 X 的每个子对象 X' 皆分裂. 给定 $X'_0 \subset X'$, 存在 $Y \subset X$ 使得 $X = X'_0 \oplus Y$. 问题化为证

$$X' = X'_0 \oplus (Y \cap X').$$

这是引理 2.6.7 的应用: 一方面 $X'_0 \cap (Y \cap X') \subset X'_0 \cap Y = 0$, 另一方面 Sub_X 是模格, 故 $X'_0 + (Y \cap X') = X' \cap (Y + X'_0) = X' \cap X = X'$. 上式得证.

进一步设 X 是 Artin 对象. 若 $X \neq 0$ 则存在极小非零子对象 X_1, 它必然单, 并且存在直和分解 $X = X_1 \oplus Y_1$. 注意到 Y_1 仍是分裂 Artin 对象; 若 $Y_1 \neq 0$ 则继续取 $Y_1 = X_2 \oplus Y_2$ 等等. Artin 条件确保严格降链 $X \supsetneq Y_1 \supsetneq Y_2 \cdots$ 在有限步内停止, 给出所求分解 $X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$. □

命题 2.7.10 对选定的对象 X 考虑以下性质.

(i) $X = \sum_{Y \in \mathcal{F}} Y$, 其中 $\mathcal{F}$ 是 Sub_X 的某个有限子集, 每个 $Y \in \mathcal{F}$ 皆单;

(ii) $X = \bigoplus_{Y \in \mathcal{F}} Y$, 其中 $\mathcal{F}$ 是 Sub_X 的某个有限子集, 每个 $Y \in \mathcal{F}$ 皆单;

(iii) X 分裂.

我们有 (i) $\implies$ (ii) $\implies$ (iii).

证明 重复 [25, 命题 6.11.4] 中对 (i) $\implies$ (ii) $\implies$ (iii) 的论证. □

注记 2.7.11 若要将命题 2.7.10 的陈述扩及无穷子集 $\mathcal{F} \subset \mathrm{Sub}_X$, 则应当要求 $\mathcal{A}$ 是 §2.10 行将介绍的 Grothendieck 范畴. 由之可见 Grothendieck 范畴的半单对象必分裂, 而半单 Grothendieck 范畴自动分裂. 只要读者掌握了相关定义, 则论证类似于模的情形, 故留作本章习题.

2.8 正合函子, 内射对象和投射对象

对于给定的函子 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, 可以谈论它是否保 $\varinjlim$ 或 $\varprojlim$, 详见 [25, §2.8] 或 §1.5 的介绍. 本节关注 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 为 Abel 范畴而 F 为加性函子的情形. 考虑 $\varprojlim$ (或 $\varinjlim$) 的特例 ker (或 coker), 对 $\mathcal{A}$ 中的任意态射 $f : X \to Y$, 我们得到典范态射 $F\ker(f) \to \ker F(f)$ 及其对偶版本 $\operatorname{coker} F(f) \to F\operatorname{coker}(f)$, 使得下图交换

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
F\ker(f) \arrow[rr] \arrow[dr, "{F[\ker(f) \hookrightarrow X]}"'] & & \ker F(f) \arrow[dl] \\
& FX &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\operatorname{coker} F(f) \arrow[rr] & & F\operatorname{coker}(f) \\
& FY. \arrow[ul] \arrow[ur, "{F[Y \twoheadrightarrow \operatorname{coker}(f)]}"'] &
\end{tikzcd}$$

关于函子保极限的说法, 在此化为:

◇ 若 $\ker F(f) \xrightarrow{\sim} F\ker(f)$ 对一切 f 都成立, 则称函子 F **保核**;

◇ 若 $F\,\mathrm{coker}(f) \xrightarrow{\sim} \mathrm{coker}\,F(f)$ 对一切 f 都成立, 则称 F **保余核**.

如果 $(X^\bullet, d^\bullet)$ 是 Abel 范畴中的复形, 则 $(FX^\bullet, Fd^\bullet)$ 亦然, 问题在于正合性.

命题 2.8.1 设 $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 为 Abel 范畴之间的加性函子. 以下陈述等价:

(L1) F 保核;

(L2) 设 $0 \to X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X''$ 在 $\mathcal{A}$ 中正合, 则 $0 \to F(X') \xrightarrow{Ff} F(X) \xrightarrow{Fg} F(X'')$ 在 $\mathcal{B}$ 中正合;

(L3) F 保有限 $\varprojlim$.

对偶地, 以下陈述也等价:

(R1) F 保余核;

(R2) 设 $X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X'' \to 0$ 在 $\mathcal{A}$ 中正合, 则 $F(X') \xrightarrow{Ff} F(X) \xrightarrow{Fg} F(X'') \to 0$ 在 $\mathcal{B}$ 中正合;

(R3) F 保有限 $\varinjlim$

证明 基于对偶性, 以下仅讨论 (L1)—(L3).

(L1) $\implies$ (L2). 形如 $0 \to \bullet \to \bullet \to \bullet$ 的正合列恰好对应到态射的核, 见 §2.2 后半部的说明.

(L2) $\implies$ (L3). 一切有限 $\varprojlim$ 都可以从有限积和等化子来构造. 已知加性函子保双积, 而 F 保 ker 故保所有等化子 (注记 1.3.8). 因此 F 保有限 $\varprojlim$.

(L3) $\implies$ (L1) 是平凡的. □

对于加性函子 F 如上, 若 $(X^\bullet, d^\bullet)$ 正合蕴涵 $(FX^\bullet, Fd^\bullet)$ 正合, 则称 F 保正合列; 类似地, 我们也可以谈论 F 是否保短正合列; 两者实则是等价的.

命题 2.8.2 设 $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 为 Abel 范畴之间的加性函子. 以下陈述等价:

(E1) F 保短正合列;

(E2) F 保正合列;

(E3) F 保有限 $\varprojlim$ 和有限 $\varinjlim$.

证明 (E1) $\implies$ (E2). 给定 $\mathcal{A}$ 中的正合列 $(X^\bullet, d^\bullet)$, 将之拆解为短正合列

$$0 \longrightarrow \ker(d^n) \xrightarrow{\iota^n} X^n \xrightarrow{\mathbf{d}^n} \ker(d^{n+1}) \longrightarrow 0$$

其中的态射 $\mathbf{d}^n$ 由 $d^n = \iota^{n+1}\mathbf{d}^n$ 刻画; 上标 n 可任取, 但 X^n 不能是正合列的右端点.

按假设 $0 \to F(\ker(d^n)) \xrightarrow{F\iota^n} F(X^n) \xrightarrow{F\mathbf{d}^n} F(\ker(d^{n+1})) \to 0$ 依然正合, $Fd^n = F\iota^{n+1}F\mathbf{d}^n$. 于是这些短正合列重新组装为 $\mathcal{B}$ 中的正合列 $(FX^\bullet, Fd^\bullet)$.

(E2) $\implies$ (E3). 若 F 保正合列, 则它满足命题 2.8.1 的性质 (L2) 和 (R2).

(E3) $\implies$ (E1). 设 $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ 在 $\mathcal{A}$ 中正合. 再度应用命题 2.8.1, 可见 $0 \to F(X') \to F(X) \to F(X'')$ 和 $F(X') \to F(X) \to F(X'') \to 0$ 皆正合, 故 $0 \to F(X') \to F(X) \to F(X'') \to 0$ 正合. □

请留意到 (E3) $\iff$ (L3) $\wedge$ (R3).

定义 2.8.3 (正合函子) 对于 Abel 范畴间的加性函子 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, 考虑命题 2.8.1 中的条件 (L1)—(L3), (R1)—(R3) 以及命题 2.8.2 中的条件 (E1)—(E3).

- ◇ 若 (L1)—(L3) 之中的任一条成立, 则称 F **左正合**.
- ◇ 若 (R1)—(R3) 之中的任一条成立, 则称 F **右正合**.
- ◇ 若 (E1)—(E3) 之中的任一条成立, 则称 F **正合**; 这也相当于说 F 左, 右皆正合.

举例明之, Abel 范畴之间的等价当然是正合函子. 另一则极端的例子是零函子: 它映一切对象为零对象, 映一切态射为零态射; 这也是正合的.

根据引理 1.3.11, 左正合函子保持单态射, 右正合函子保持满态射.

注记 2.8.4 鉴于 (E1), 若已知 F 左正合 (或右正合), 则 F 正合等价于 F 保持满态射 (或单态射).

验证左/右正合性质的常用手段是伴随函子.

定理 2.8.5 考虑 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 之间的一对加性函子

$$F : \mathcal{A} \rightleftarrows \mathcal{B} : G.$$

设 F, G 可以扩充为伴随对 (F, G, φ), 则 F 右正合而 G 左正合; 事实上, F 保 $\varinjlim$ 而 G 保 $\varprojlim$.

证明 应用 [25, 定理 2.8.12] 与命题 2.8.1 中的条件 (L3), (R3). □

例 2.8.6 (极限的左/右正合性) 设 $\mathcal{A}$ 为 Abel 范畴, I 为任意范畴, 并且假设所有函子 $\alpha : I \to \mathcal{A}$ 都有 $\varinjlim$ (或 $\varprojlim$). 按命题 2.1.4 赋 $\mathcal{A}^I$ 以 Abel 范畴的结构. 以下来说明函子 $\varinjlim : \mathcal{A}^I \to \mathcal{A}$ 右正合 (或左正合).

讨论 $\varinjlim$ 的情形即可. 鉴于定理 2.8.5, 一种策略是说明 $\varinjlim$ 有右伴随. 定义对角函子 $\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^I$, 映一切 $L \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ 为常值函子 $\mathrm{Ob}(I) \ni i \mapsto L$. 此时有伴随对

$$\varinjlim : \mathcal{A}^I \rightleftarrows \mathcal{A} : \Delta.$$

这是 $\varinjlim$ 的泛性质的立即推论: 在 $\mathcal{A}^I$ 中给定从函子 $\alpha: I \to \mathcal{A}$ 到 $\Delta(L)$ 的态射相当于给定一族相容的态射 $f_i: \alpha(i) \to L$, 换言之, 即给定以 α 为底, 以 L 为顶点的锥; 相关回顾可见 §1.5.

例 2.8.7 设 $f: R \to S$ 为环同态. 考虑左模范畴之间的函子

$$\begin{tikzcd} R\text{-}\mathsf{Mod} \arrow[r, bend left, "S\underset{R}{\otimes}(\cdot)"] & S\text{-}\mathsf{Mod} \arrow[l, "{}_{R\to S}\mathcal{F}"'] \\ \end{tikzcd}$$
$$\begin{tikzcd} R\text{-}\mathsf{Mod} \arrow[r, bend right, "\mathrm{Hom}_R({}_RS,\cdot)"'] & S\text{-}\mathsf{Mod} \end{tikzcd}$$

其中遗忘函子 ${}_{R\to S}\mathcal{F}$ 无非是将一个 S-模透过 f 变为 R-模, 函子 $S\underset{R}{\otimes}(\cdot)$ 和 $\mathrm{Hom}_R({}_RS,\cdot)$ 的讨论则可见 [25, §6.6], 此处 ${}_RS$ 意谓视 S 为左 R-模. 根据 [25, 推论 6.6.8],

$$\left(S\underset{R}{\otimes}-,\ {}_{R\to S}\mathcal{F}\right), \quad \left({}_{R\to S}\mathcal{F},\ \mathrm{Hom}_R({}_RS,-)\right)$$

皆为伴随对 (此处省略伴随同构). 定理 2.8.5 遂蕴涵

$$S\underset{R}{\otimes}(\cdot)\ \text{右正合}, \quad \mathrm{Hom}({}_RS,\cdot)\ \text{左正合}, \quad {}_{R\to S}\mathcal{F}\ \text{正合}.$$

这些正合性质也可以直接从代数上验证. 举遗忘函子 ${}_{R\to S}\mathcal{F}$ 为例: 一列模同态 $\cdots \to M^n \xrightarrow{d^n} M^{n+1} \to \cdots$ 是否为复形 (即 $d^{n+1}d^n = 0$), 或者是否正合 (即 $\mathrm{im}(d^n) = \ker(d^{n+1})$), 皆无关乎 R 或 S 的乘法, 而只依赖于 M^n 的加法群结构; 换言之, ${}_{\mathbb{Z}\to S}\mathcal{F}: S\text{-}\mathsf{Mod} \to \mathsf{Ab}$ 已然是正合函子. 另一视角则是直接验证 ${}_{R\to S}\mathcal{F}$ 保持所有极限, 这点可以就 [25, 定理 6.2.2] 的构造直接检查.

正合函子自动保持态射的 im 和 coim (定义 1.2.1, 命题 1.3.12); 它还保持上同调.

命题 2.8.8 *设 $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是 Abel 范畴间的正合函子. 对于 $\mathcal{A}$ 中的任何复形 $(X^\bullet, d^\bullet)$, 在 $\mathcal{B}$ 中有典范同构*

$$F\,\mathrm{H}^n(X^\bullet, d^\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n(FX^\bullet, Fd^\bullet), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

证明 问题化约到三项复形 $X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X''$ 的情形. 回归 (2.2.2) 的定义:

$$\begin{aligned} F\left(\mathrm{H}\left[X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X''\right]\right) &= F\,\mathrm{coker}\left[\mathrm{im}(f) \to \ker(g)\right] \\ &\simeq \mathrm{coker}\left[F\,\mathrm{im}(f) \to F\ker(g)\right] \\ &\simeq \mathrm{coker}\left[\mathrm{im}(Ff) \to \ker(Fg)\right] = \mathrm{H}\left[FX' \xrightarrow{Ff} FX \xrightarrow{Fg} FX''\right], \end{aligned}$$

涉及的所有同构都是典范的. □

正合忠实函子具有特别良好的性质.

命题 2.8.9 对于 Abel 范畴之间的加性函子 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, 以下陈述等价:

(i) F 正合而且忠实;

(ii) F 正合, 而且对所有 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ 皆有 $FX = 0 \iff X = 0$;

(iii) $X' \to X \to X''$ 在 $\mathcal{A}$ 中正合当且仅当 $FX' \to FX \to FX''$ 在 $\mathcal{B}$ 中正合.

证明 (i) $\implies$ (ii): 若 $FX = 0$, 则 $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{FX} = 0$ 蕴涵 $\mathrm{id}_X = 0$, 故 $X = 0$.

(ii) $\implies$ (iii): 应用命题 2.8.8.

(iii) $\implies$ (i): 条件已蕴涵 F 正合. 设 $u : X \to Y$ 满足 $Fu = 0$, 由于

$$X \xrightarrow{\mathrm{id}} X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{\mathrm{id}} Y,$$

在 F 之下的像正合, 它本身亦正合, 从而 $u = 0$. □

于 §1.10 介绍的局部化给出正合函子的例子.

命题 2.8.10 (局部化的正合性) 设 $\mathcal{A}$ 为 Abel 范畴, $S \subset \mathrm{Mor}(\mathcal{A})$ 为乘性系 (定义 1.10.5), 则定理 1.10.11 给出的范畴 $\mathcal{A}[S^{-1}]$ 带有典范的 Abel 范畴结构, 使得局部化函子 $Q : \mathcal{A} \to \mathcal{A}[S^{-1}]$ 正合.

证明 定理 1.10.16 赋予 $\mathcal{A}[S^{-1}]$ 典范的加性范畴结构, 使得 Q 为加性函子. 今将说明 $\mathcal{A}[S^{-1}]$ 中的每个态射 f 都有核及余核, 并且是严格态射. 根据 $\mathcal{A}[S^{-1}]$ 的构造, 将 f 合成一个来自 S 的同构之后, 可确保 f 是 $\mathcal{A}$ 中某个态射对 Q 的像, 这不影响欲证的性质. 引理 1.10.15 说明 Q 保持一切有限 $\varinjlim$ 和 $\varprojlim$, 特别地, 它将 $\mathcal{A}$ 中的 ker, coker, im, coim 映为 $\mathcal{A}[S^{-1}]$ 中的相应构造, 因而也保持图表 (1.2.1). 如是表明 $\mathcal{A}[S^{-1}]$ 是 Abel 范畴; 命题 2.8.2 的 (E3) 表明 Q 正合. □

注意到如果进一步要求 $\mathcal{A}$ 是 $\Bbbk$-线性的, 其中 $\Bbbk$ 是交换环, 则 Q 是 $\Bbbk$-线性 Abel 范畴之间的函子. 这同样是定理 1.10.16 的内容.

另一类格外重要的例子是 Hom 函子. 设 T 是 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的对象, 则 $\mathrm{Hom}(T, \cdot)$ 给出函子 $\mathcal{A} \to \mathsf{Ab}$, 而 $\mathrm{Hom}(\cdot, T)$ 给出函子 $\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Ab}$; 在态射的层面上, 它们分别映 $f : X \to Y$ 为 Hom 上的 f_* 和 f^*. 显然两者都是加性函子.

如果 $\mathcal{A}$ 是 $\Bbbk$-线性 Abel 范畴, 则 Hom 函子可取值在 $\Bbbk$-Mod 中, 成为 $\Bbbk$-线性的函子; 这层推广对此后的讨论影响甚小, 因此就不另外阐述了.

命题 2.8.11 (Hom 函子左正合) 设 $\mathcal{A}$ 为 Abel 范畴, T 为 $\mathcal{A}$ 的对象. 那么 $\mathrm{Hom}(T, \cdot) : \mathcal{A} \to \mathsf{Ab}$ 和 $\mathrm{Hom}(\cdot, T) : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Ab}$ 都是左正合函子.

证明 基于对偶性 (以 $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ 代 $\mathcal{A}$), 处理 $\mathrm{Hom}(T, \cdot)$ 即可. 问题归结为证 $\mathrm{Hom}(T, \cdot)$ 保 ker. 因为 Ab 中的 ker 无非是群论中定义的核, 一切转译为 ker 的泛性质. □

定义 2.8.12 设 X 是 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的对象. 若 $\mathrm{Hom}(X,\cdot):\mathcal{A}\to\mathsf{Ab}$ 是正合函子, 则称 X 为**投射对象**; 若 $\mathrm{Hom}(\cdot,X):\mathcal{A}^{\mathrm{op}}\to\mathsf{Ab}$ 是正合函子, 则称 X 为**内射对象**.

依注记 2.8.4 和命题 2.8.11, 为了判断对象 X 是否为投射 (或内射), 仅须检查函子 $\mathrm{Hom}(X,\cdot)$ (或 $\mathrm{Hom}(\cdot,X)$) 是否保持满态射. 因此:

- 对象 P 是投射的当且仅当对 $\mathcal{A}$ 中的任何正合列 $Y\xrightarrow{g}X\to 0$ 和态射 $P\to X$, 存在 $P\to Y$ 使下图交换

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\exists"'] \arrow[d] & \\ Y \arrow[r, "g"'] & X \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

  (相当于 $g_*:\mathrm{Hom}(P,Y)\to\mathrm{Hom}(P,X)$ 满.)

- 对象 I 是内射的当且仅当对 $\mathcal{A}$ 中的任何正合列 $0\to X\xrightarrow{f}Y$ 和态射 $X\to I$, 存在 $Y\to I$ 使下图交换

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[dl, "\exists"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

  (相当于 $f^*:\mathrm{Hom}(I,Y)\to\mathrm{Hom}(I,X)$ 满.)

引理 2.8.13 考虑 Abel 范畴中的短正合列 $0\to X'\xrightarrow{f}X\xrightarrow{g}X''\to 0$. 若 X' 是内射对象, 或者 X'' 是投射对象, 则此短正合列分裂.

证明 基于对偶性, 不妨设 X' 是内射对象. 在上述讨论中考虑交换图表

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{X'}"'] & X \arrow[dl, "\exists r"] \\ & X' & \end{tikzcd}$$

再将 $rf=\mathrm{id}_{X'}$ 代入命题 2.5.3. □

引理 2.8.14 考虑 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中一族对象 $(X_i)_{i\in I}$. 设余积 $\coprod_{i\in I}X_i$ (或积 $\prod_{i\in I}X_i$) 在 $\mathcal{A}$ 中存在, 则它是内射 (或投射) 对象当且仅当每个 X_i 亦然.

证明 基于对偶性, 仅须考虑余积 $\coprod_{i\in I}X_i$ 情形. 泛性质给出函子的同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\left(\coprod_{i\in I}X_i,-\right)\xrightarrow{\sim}\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X_i,-):\mathcal{A}\to\mathsf{Ab}.$$

一切归结为以下的初等观察: 给定一族映射 $(f_i:A_i\to B_i)_{i\in I}$, 其中 A_i,B_i 为集合, 则诱导映射 $(f_i)_{i\in I}:\prod_{i\in I}A_i\to\prod_{i\in I}B_i$ 是满射当且仅当每个 f_i 皆满. □

举例明之, 考虑环 R, 则所有自由 R-模皆是 R-Mod 的投射对象. 诚然, 问题归结为证 R 本身是投射对象, 然而 $\mathrm{Hom}(R,\cdot) : R\text{-Mod} \to \mathsf{Ab}$ 同构于遗忘函子 $\mathcal{F} : R\text{-Mod} \to \mathsf{Ab}$, 方法是映同态 $\varphi : R \to X$ 为 $\varphi(1) \in X$, 由此知 $\mathrm{Hom}(R,\cdot)$ 正合.

自由模同时也是 R-Mod 的生成元, 见定义 1.12.8 和例 1.12.10. 兼为余生成元 (或生成元) 的内射 (或投射) 对象格外实用. 谨奉上一则简单刻画.

命题 2.8.15 (内射余生成元和投射生成元) Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中的内射 (或投射) 对象 X 是余生成元 (或生成元) 的充要条件是: 对于任何 $T \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}), T \neq 0$, 皆有 $\mathrm{Hom}(T,X) \neq 0$ (或 $\mathrm{Hom}(X,T) \neq 0$).

这也等价于 $\mathrm{Hom}(\cdot,X)$ (或 $\mathrm{Hom}(X,\cdot)$) 是正合忠实函子.

证明 仅论 X 为内射对象的情形. 首先设 X 是余生成元. 对 $T \underset{0}{\overset{\mathrm{id}_T}{\rightrightarrows}} T$ 应用余生成元的定义, 知存在 $\delta \in \mathrm{Hom}(T,X)$ 使得 $\delta = \delta \circ \mathrm{id}_T \neq \delta \circ 0 = 0$.

现在考虑另一方向. 目标是说明若 $h : S \to T$ 非零, 则存在 $\delta \in \mathrm{Hom}(T,X)$ 使得 $\delta h \neq 0$. 先假设 h 单, 此时由 $h^* : \mathrm{Hom}(T,X) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(S,X) \neq 0$ 立得所求之 δ. 对于一般的 h, 对 $\mathrm{im}(h) \hookrightarrow T$ 应用内射对象的性质 (定义 2.8.12 之下的讨论), 将上一步得到的 $\delta : \mathrm{im}(h) \to X$ 延拓到 $T \to X$.

关于正合忠实函子的断言是命题 2.8.9 的直接应用. □

在经典场景中, 为了在 Abel 范畴上开展同调代数, 我们经常要求其中有足够的内射对象或投射对象.

定义 2.8.16 设 $\mathcal{A}$ 为 Abel 范畴.

◇ 若对于所有 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, 存在内射对象 I 和单态射 $X \hookrightarrow I$, 则称 $\mathcal{A}$ 有**足够的内射对象**.

◇ 若对于所有 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, 存在投射对象 P 和满态射 $P \twoheadrightarrow X$, 则称 $\mathcal{A}$ 有**足够的投射对象**.

两个概念相对偶. 构造内射对象或投射对象的常见手段是运用正合函子的伴随, 细说如下.

命题 2.8.17 考虑 Abel 范畴之间的一对函子 $\mathcal{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{B}$, 并且假设 F 是正合函子.

◇ 若 G 是 F 的左伴随, 则 G 映 $\mathcal{B}$ 的投射对象为 $\mathcal{A}$ 的投射对象;

◇ 若 G 是 F 的右伴随, 则 G 映 $\mathcal{B}$ 的内射对象为 $\mathcal{A}$ 的内射对象.

证明 基于对偶性, 考虑 G 是左伴随的情形即可. 此时 G 必是加性函子 (推论 1.3.6). 设 P 为 $\mathcal{B}$ 的投射对象. 对于 $\mathcal{A}$ 中任意的正合列 $(X^\bullet, d^\bullet)$, 我们有 Ab 中的复形的同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(GP, X^\bullet) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(P, FX^\bullet).$$

因为 F 正合, $(FX^\bullet, Fd^\bullet)$ 是正合列, 从而右式在 Ab 中正合. 这就说明 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(GP,\cdot) : \mathcal{A} \to \mathsf{Ab}$ 是正合函子. 证毕. □

举例明之, 考虑环 R 和遗忘函子 $\mathcal{F}: R\text{-}\mathsf{Mod} \to \mathsf{Ab}$. 根据例 2.8.7, $\mathcal{F}$ 正合且有右伴随 $G := \mathrm{Hom}_{\mathsf{Ab}}(R, \cdot)$. 命题 2.8.17 说明 G 映 Ab 的内射对象为 R 的内射对象, 而 Ab 的内射对象容易刻画: 它们无非是可除 $\mathbb{Z}$-模. 这是模论中构造内射 R-模并说明 $R\text{-}\mathsf{Mod}$ 有足够内射对象的标准手法, 见 [25, 定理 6.9.14].

另一方面, $R\text{-}\mathsf{Mod}$ 也有足够的投射对象: 对任意 R-模 X, 任取子集 $A \subset X$ 使得 A 生成 X, 则 $R^{\oplus A} \twoheadrightarrow X$.

例 2.8.18 以下的综合演练涉及抽象的 Abel 范畴, 它将在 §3.12 用于研究导出函子的长正合列. 设 $\mathcal{A}$ 为 Abel 范畴. 考虑范畴 $\mathbf{2}$ (图解为 $0 \to 1$). 函子范畴 $\mathcal{A}^{\mathbf{2}}$ 仍是 Abel 范畴 (命题 2.1.4): 它是 "箭头范畴": 其对象是 $\mathcal{A}$ 的态射 $X_0 \to X_1$, 其态射则是 $\mathcal{A}$ 中的交换方块 $\begin{array}{ccc} X_0 & \longrightarrow & Y_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_1 & \longrightarrow & Y_1 \end{array}$.

对于 $i \in \{0,1\}$, 求值函子 $\mathrm{ev}_i : \mathcal{A}^{\mathbf{2}} \to \mathcal{A}$ 映对象 $X_0 \to X_1$ 为 X_i; 另外按以下方式定义从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{A}^{\mathbf{2}}$ 的加性函子

$$L_0 : X \mapsto [X \to 0], \quad L_1 : X \mapsto [0 \to X], \quad H : X \to [X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X],$$

其中 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, 在态射层面的定义自明. 现在来证明以下结果.

(i) 函子 ev_0 和 ev_1 皆正合, 皆映 $\mathcal{A}^{\mathbf{2}}$ 的内射对象 (或投射对象) 为 $\mathcal{A}$ 的内射对象 (或投射对象). 此外函子 H 也正合.

(ii) 函子 H, L_0 (或 H, L_1) 映 $\mathcal{A}$ 的内射对象 (或投射对象) 为 $\mathcal{A}^{\mathbf{2}}$ 的内射对象 (或投射对象).

(iii) 若 $\mathcal{A}$ 有足够的内射对象 (或投射对象), 则 $\mathcal{A}^{\mathbf{2}}$ 亦然.

因为 $\varinjlim$ 和 $\varprojlim$ 在 $\mathcal{A}^{\mathbf{2}}$ 中是逐项构造的, 故 $\mathrm{ev}_0, \mathrm{ev}_1$ 和 H 皆正合. 断言 (i) 的余下部分和 (ii) 渊源于 ev_i 满足的伴随关系, 图示如下, 其验证留作简单的习题:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^{\mathbf{2}} \arrow[r, "\mathrm{ev}_0" description] & \mathcal{A} \arrow[l, bend right, "H:\text{左伴随}"'] \arrow[l, bend left, "L_0:\text{右伴随}"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{A}^{\mathbf{2}} \arrow[r, "\mathrm{ev}_1" description] & \mathcal{A}. \arrow[l, bend right, "L_1:\text{左伴随}"'] \arrow[l, bend left, "H:\text{右伴随}"] \end{tikzcd}$$

至于断言 (iii), 先论内射对象情形. 给定 $\mathcal{A}^{\mathbf{2}}$ 的对象 $[X_0 \xrightarrow{f} X_1]$, 取单态射 $\epsilon_i : X_i \hookrightarrow I_i$, 其中 I_i 是内射对象, $i \in \{0,1\}$. 由此得到 $\mathcal{A}^{\mathbf{2}}$ 中的两个态射, 记为交换图表

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, hook, "\epsilon_0"] \arrow[d, "f"'] & I_0 \arrow[d] \\ X_1 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \quad \text{和} \quad \begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "\epsilon_1 f"] \arrow[d, "f"'] & I_1 \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ X_1 \arrow[r, hook, "\epsilon_1"'] & I_1 \end{tikzcd}$$

框出两列分别是 $L_0(I_0)$ 和 $H(I_1)$, 由 (ii) 知皆为 $\mathcal{A}^{\mathbf{2}}$ 的内射对象, 其直和亦然 (引理

2.8.14). 于是交换图表

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, hook, "(\epsilon_0,\epsilon_1 f)"] \arrow[d, "f"'] & I_0 \oplus I_1 \arrow[d, "\text{投影}"] \\ X_1 \arrow[r, hook, "\epsilon_1"'] & I_1 \end{tikzcd}$$

将 $[X_0 \xrightarrow{f} X_1]$ 嵌入内射对象. 对于投射对象的情形, 改用函子 H 和 L_1 便是.

例 2.8.18 的讨论可以从 $\mathcal{A}^2$ 扩及一般的函子范畴 $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$, 论证并无本质困难. 本章习题将予以勾勒.

2.9 Serre 子范畴和 K_0 群

Abel 范畴的全子范畴自动继承 Ab-范畴的结构, 因此可以探讨子范畴是否具有加性或 Abel 范畴的性质.

定义 2.9.1 如果 $\mathcal{B}$ 是 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的全子范畴, $\mathcal{B}$ 本身是 Abel 范畴, 而且包含函子 $\iota : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ 正合 (定义 2.8.3), 则称 $\mathcal{B}$ 为 $\mathcal{A}$ 的**子 Abel 范畴**.

命题 2.9.2 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的全子范畴 $\mathcal{B}$ 是子 Abel 范畴当且仅当下述条件成立.

- $0 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$;
- 若 $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ 则 $X \oplus Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$;
- 对于任意态射 $f : X \to Y$, 若 $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$, 则 $\ker(f)$ 和 $\mathrm{coker}(f)$ 也可以取在 $\mathcal{B}$ 中.

证明 观察到这些条件自对偶. "仅当" 方向是明白的. 现在假设以上条件成立, 则 $\mathcal{B}$ 是加性范畴, 而 $\iota : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ 是加性函子. 接着说明 ι 保持有限 $\varprojlim$ 和有限 $\varinjlim$. 首先 ι 保持 0 和有限直和. 其次, 等化子可用 ker 来表示 (注记 1.3.8), 而条件表明子范畴 $\mathcal{B}$ 对取 ker 封闭. 由此知 ι 保有限 $\varprojlim$, 而 $\varinjlim$ 之情形是对偶的.

回顾 im 和 coim 的定义 1.2.1, 配合上一步可知 $\mathcal{B}$ 也对之封闭. 对于 $\mathcal{B}$ 中的任意态射 f, 图表 (1.2.1) 的典范态射 $\mathrm{coim}(f) \xrightarrow{\sim} \mathrm{im}(f)$ 是 $\mathcal{A}$ 的同构, 从而是 $\mathcal{B}$ 的同构. 综上可知 $\mathcal{B}$ 是子 Abel 范畴. □

定义 2.9.3 (J.-P. Serre) Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的全子范畴 $\mathcal{T}$ 若满足以下条件, 则称为 $\mathcal{A}$ 的 **Serre 子范畴**.

- $0 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$;
- 对于 $\mathcal{A}$ 中的任意短正合列 $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$, 我们有 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$ 当且仅当 $X', X'' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$.

若将最后一条放宽为: 对于 $\mathcal{A}$ 的任意正合列

$$W \to X' \to X \to X'' \to Y,$$

我们有 $W, X', X'', Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}) \implies X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$, 则称 $\mathcal{T}$ 为 $\mathcal{A}$ 的**弱 Serre 子范畴**[3].

举例来说, 对于交换环 R, 所有 Noether (或 Artin) 模构成 R-Mod 的 Serre 子范畴. 这是模论常识 [25, 引理 6.10.2].

若 $\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{A}$ 的 Serre 子范畴 (或弱 Serre 子范畴), 则 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$ 之于 $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ 亦然.

弱 Serre 子范畴 $\mathcal{T}$ 具有以下的饱和性质: 若 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ 同构于 $\mathcal{T}$ 的对象, 则 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$; 这是将最后一则条件施于正合列 $0 \to 0 \to X \xrightarrow{\sim} Y \to 0$ 的结论.

推论 2.9.4 设 $\mathcal{T}$ 为 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的弱 Serre 子范畴, 则 $\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{A}$ 的子 Abel 范畴.

证明 验证命题 2.9.2 的条件即可. 首先 $0 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$. 其次, 在弱 Serre 子范畴的定义中代入以下正合列

$$0 \to X \to X \oplus Y \to Y \to 0 \quad (\text{命题 } 2.2.7),$$

$$0 \to 0 \to \ker(f) \to X \xrightarrow{f} Y, \quad X \xrightarrow{f} Y \to \operatorname{coker}(f) \to 0 \to 0,$$

可见 $\mathcal{T}$ 对直和与 ker, coker 封闭. □

例 2.9.5 若 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是 Abel 范畴之间的正合函子, 则所有满足 $FX = 0$ 的对象构成 $\mathcal{A}$ 的 Serre 子范畴, 记为 $\ker(F)$.

定理 2.9.6 (Serre 商) 设 $\mathcal{T}$ 为 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的 Serre 子范畴, 则存在 Abel 范畴 $\mathcal{A}/\mathcal{T}$ (容许是大范畴) 连同本质满的正合函子 $Q : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{T}$, 使得 $\ker(Q) = \mathcal{T}$, 并且以下泛性质成立: 对所有 Abel 范畴 $\mathcal{B}$ 和满足 $\ker(F) \supset \mathcal{T}$ 的正合函子 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, 存在唯一的正合函子 $G : \mathcal{A}/\mathcal{T} \to \mathcal{B}$ 使得 $F = GQ$.

泛性质中的 G 是忠实函子当且仅当 $\ker(F) = \mathcal{T}$.

证明 命 $S := \{f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{A}) : \ker(f), \operatorname{coker}(f) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})\}$. 兹断言 S 是定义 1.10.5 所谓的乘性系.

显然 S 包含所有恒等态射, 故 (S1) 成立. 设 $f : X \to Y$ 和 $g : Y \to Z$ 为 S 的元素. 基于相互对偶的正合列

$$0 \to \ker(f) \to \ker(gf) \xrightarrow{f} \ker(g),$$

$$\operatorname{coker}(f) \xrightarrow{g} \operatorname{coker}(gf) \to \operatorname{coker}(g) \to 0,$$

立见 $gf \in S$, 故 (S2) 成立. 接着考虑态射 $X \xrightarrow{s \in S} Z \xleftarrow{f} Y$. 命 $W := X \underset{Z}{\times} Y$, 带有态射 $s' : W \to Y$. 注意到 $\ker(s') \simeq \ker(s)$ (命题 1.3.10), 而 f 诱导 $\operatorname{coker}(s') \hookrightarrow \operatorname{coker}(s)$ (推

[3]这个略显突兀的定义是为导出范畴量身定制的, 见 §4.4.

论 2.6.9), 由此可知 $s' \in S$. 故 (S3) 成立. 最后考虑态射 $X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{s \in S} W$, 满足 $sf = sg$; 从 $\mathrm{im}(f-g) \hookrightarrow \ker(s)$ 可见 $\mathrm{im}(f-g) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$, 于是 $Z := \ker(f-g) \hookrightarrow X$ 是 S 中的态射, 这验证了 (S4).

综上, S 是左乘性系. 诸条件自对偶, 故 S 也是右乘性系. 现在取 $Q : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{T} := \mathcal{A}[S^{-1}]$ 为局部化函子. 命题 1.10.4 表明 Q 本质满 (事实上 $\mathrm{Ob}(\mathcal{A}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{A}/\mathcal{T})$); 命题 2.8.10 表明 Q 是 Abel 范畴之间的正合函子. 注意到 $\mathrm{id}_{QX} = Q(\mathrm{id}_X)$ 为 0 等价于存在 $U \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ 使得 $U \xrightarrow{0} X$ 属于 S (推论 1.10.13), 显然这又等价于 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$; 因此 $\ker(Q) = \mathcal{T}$.

以下验证泛性质. 若 $\ker(F) \supset \mathcal{T}$, 则正合列 $\ker(s) \to X \xrightarrow{s \in S} Y \to \mathrm{coker}(s)$ 表明 F 映 S 为同构, 而局部化的泛性质确定所求之 G.

其次验证 G 正合. 首先定理 1.10.16 确保它是加性的. 由于 $\mathcal{A}[S^{-1}]$ 中的任意态射总可以适当地合成来自 S 的同构, 以确保它来自 $\mathcal{A}$, 所以保核性质归结为 F 与 Q 的正合性. 同理可知 G 保余核. 忠实性质的刻画归结为命题 2.8.9 的陈述 (ii). □

注意到 $\mathcal{A}/\mathcal{T}$ 被构造为局部化, 因此它有可能是 "大范畴". 习题将给出 $\mathcal{A}/\mathcal{T}$ 的另一种描述, 以在 $\mathcal{A}$ 良幂 (定义 1.12.11) 的前提下控制 Serre 商的大小.

例 2.9.7 设 S 为交换环 R 的乘性子集. 定义 R-Mod 的全子范畴 $\mathcal{T}$, 使得 $M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$ 当且仅当对每个 $m \in M$ 皆存在 $s \in S$ 使得 $sm = 0$. 容易验证 $\mathcal{T}$ 是 Serre 子范畴. 以下说明 R-Mod$/\mathcal{T}$ 和 $R[S^{-1}]$-Mod 等价.

诚然, $M \mapsto M[S^{-1}] := M \underset{R}{\otimes} R[S^{-1}]$ 给出正合函子 $F : R\text{-Mod} \to R[S^{-1}]\text{-Mod}$, 映 $\mathcal{T}$ 为零, 故泛性质给出正合函子 $G : R\text{-Mod}/\mathcal{T} \to R[S^{-1}]\text{-Mod}$. 易见 $\ker(F) = \mathcal{T}$, 所以 G 忠实. 此外 G 本质满: 将任意 $R[S^{-1}]$-模 N 视为 R-模, 请读者验证 $R[S^{-1}]$-模的同构 $N \underset{R}{\otimes} R[S^{-1}] \simeq N$.

于是问题归结为证明 G 是全忠实的. 给定 $R[S^{-1}]$-模同态 $\varphi : M_1[S^{-1}] \to M_2[S^{-1}]$, 取 $M_0 := \{m \in M_1 : \varphi(m \otimes 1) \text{ 来自 } M_2\}$, 则包含映射 $\iota : M_0 \hookrightarrow M_1$ 是 R-模同态, $\mathrm{coker}(\iota) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$, 而且图表 $M_1 \xleftarrow{\iota} M_0 \xrightarrow{\varphi|_{M_0}} M_2$ 在 R-Mod$/\mathcal{T}$ 中确定的态射映至 φ. 明所欲证.

我们接着介绍和 Serre 子范畴密切相关的一种重要构造.

定义 2.9.8 设 $\mathcal{A}$ 为 Abel 范畴. 按如下方式定义交换群 $\mathrm{K}_0(\mathcal{A})$, 群运算写作加法. 考虑以 $\mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ 为基的自由 $\mathbb{Z}$-模 F, 记 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ 对应的元素为 $\langle X \rangle \in F$. 令 $R \subset F$ 为由如下元素生成的子模

$$\langle X \rangle - \langle X' \rangle - \langle X'' \rangle, \quad 0 \to X' \to X \to X'' \to 0 : \mathcal{A} \text{ 中的正合列},$$

则 $\mathrm{K}_0(\mathcal{A}) := F/R$ 称为 $\mathcal{A}$ 的 $\mathbf{K_0}$ **群**. 今后记 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ 在 $\mathrm{K}_0(\mathcal{A})$ 中的像为 $[X]$.

引理 2.9.9 对于任意 Abel 范畴 $\mathcal{A}$, 以下等式在 $\mathrm{K}_0(\mathcal{A})$ 中成立.

(i) $[0] = 0$;
(ii) 设 $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, 则 $X \simeq Y$ 蕴涵 $[X] = [Y]$;
(iii) $[X \oplus Y] = [X] + [Y]$;
(iv) 若 $0 \to X^1 \xrightarrow{f^1} \cdots \xrightarrow{f^{n-1}} X^n \to 0$ 为 $\mathcal{A}$ 中的正合列, 则 $\sum_{i=1}^n (-1)^i [X^i] = 0$;
(v) 循 §2.6 的符号, 考虑 X 的一族子对象 $X = X_0 \supset \cdots \supset X_r = 0$, 则

$$[X] = \sum_{i=0}^{r-1} [X_i / X_{i+1}].$$

证明 考虑短正合列 $0 \to 0 \to 0 \to 0 \to 0$ 可得 (i). 若 $X \simeq Y$, 则 $0 \to X \xrightarrow{\sim} Y \to 0 \to 0$ 配合 (i) 给出 (ii). 命题 2.2.7 的短正合列蕴涵 (iii).

对于 (iv), 不妨补上零项, 将正合列向左右无穷延伸. 考虑短正合列

$$0 \to \ker(f^i) \to X^i \to \mathrm{im}(f^i) \to 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

于是 $\left[X^i\right] = \left[\ker(f^i)\right] + \left[\mathrm{im}(f^i)\right] = \left[\ker(f^i)\right] + \left[\ker(f^{i+1})\right]$, 再取交错和即可.

最后, (v) 是借 $0 \to X_1 \to X_0 \to X_0/X_1 \to 0$ 对 r 递归论证的结果. □

注记 2.9.10 由于本书惯例是将群实现在小集上, 鉴于引理 2.9.9 (ii), 彻底规范的办法应当是在定义 $\mathrm{K}_0(\mathcal{A})$ 时要求 $\mathcal{A}$ 有一副小骨架 [25, 引理 2.2.12], 且置不论.

定理 2.9.11 (Euler–Poincaré 原理) 设 $\cdots \to X^i \xrightarrow{d_X^i} X^{i+1} \to \cdots$ 是 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中的复形, 仅有限多项非零, 则等式

$$\sum_i (-1)^i \left[\mathrm{H}^i(X)\right] = \sum_i (-1)^i \left[X^i\right], \quad \mathrm{H}^i(X) := \mathrm{H}\left[X^{i-1} \xrightarrow{d_X^{i-1}} X^i \xrightarrow{d_X^i} X^{i+1}\right]$$

在 $\mathrm{K}_0(\mathcal{A})$ 中成立.

证明 对每个 i 都有正合列

$$0 \to \ker\left(d_X^{i-1}\right) \to X^{i-1} \xrightarrow{d_X^{i-1}} \ker\left(d_X^i\right) \to \mathrm{H}^i(X) \to 0,$$

而且当 $|i| \gg 0$ 时各项皆为 0. 应用引理 2.9.9 (iv) 在 $\mathrm{K}_0(\mathcal{A})$ 中求和, 可得

$$\sum_i (-1)^i \left(\left[X^{i-1}\right] + \left[\mathrm{H}^i(X)\right]\right) = \sum_i (-1)^i \left(\left[\ker\left(d_X^{i-1}\right)\right] + \left[\ker\left(d_X^i\right)\right]\right).$$

右式相消为 0, 整理后导出 $\sum_i (-1)^i \left[\mathrm{H}^i(X)\right] = \sum_i (-1)^i \left[X^i\right]$. □

例 2.9.12 取 $\mathcal{A}$ 为除环 D 上的有限维向量空间所成之 Abel 范畴. 由于向量空间有基, $\mathrm{K}_0(\mathcal{A}) = \mathbb{Z} \cdot [D]$. 另一方面, 易见 $[X] \mapsto \dim_D X$ 确定群同态 $\dim : \mathrm{K}_0(\mathcal{A}) \to \mathbb{Z}$, 映 $[D]$ 为 1. 综上可知 $\dim : \mathrm{K}_0(\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$.

倘若容许无穷维向量空间, K_0 群将是平凡的. 原因在于对任何 D-向量空间 V, 由集合基数的考量可知存在 D-向量空间 W 使得 $V \oplus W \simeq W$, 而且 $\dim_D W = \max\{\dim_D V, \aleph_0\}$, 这将导致 $[V] = 0$.

对于 Abel 范畴之间的正合函子 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, 易见 $[X] \mapsto [FX]$ 确定群同态 $\mathrm{K}_0(f) : \mathrm{K}_0(\mathcal{A}) \to \mathrm{K}_0(\mathcal{B})$. 因此若 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{B}$ 的 Abel 子范畴, 则有自然同态 $\mathrm{K}_0(\mathcal{A}) \to \mathrm{K}_0(\mathcal{B})$.

命题 2.9.13 设 $\mathcal{T}$ 为 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的 Serre 子范畴. 记其 Serre 商为 $\mathcal{B} := \mathcal{A}/\mathcal{T}$, 则正合函子 $\mathcal{T} \to \mathcal{A} \xrightarrow{Q} \mathcal{B}$ 诱导的同态给出加法群的正合列

$$\mathrm{K}_0(\mathcal{T}) \to \mathrm{K}_0(\mathcal{A}) \xrightarrow{\mathrm{K}_0(Q)} \mathrm{K}_0(\mathcal{B}) \to 0.$$

证明 首先 $Q : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是本质满的, 故 $\mathrm{K}_0(\mathcal{A}) \to \mathrm{K}_0(\mathcal{B})$ 满. 其次, $\mathrm{K}_0(\mathcal{T}) \to \mathrm{K}_0(\mathcal{A}) \to \mathrm{K}_0(\mathcal{B})$ 显然合成为 0. 问题在于证 $\ker(\mathrm{K}_0(Q)) \subset \mathrm{im}\,[\mathrm{K}_0(\mathcal{T}) \to \mathrm{K}_0(\mathcal{A})]$.

设 $\sum_{i=1}^{n} a_i[X_i] \in \ker(\mathrm{K}_0(Q))$, 其中 $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. 这相当于说存在一族 $\mathcal{B}$ 中的短正合列 $0 \to Y_j' \xrightarrow{f_j} Y_j \xrightarrow{g_j} Y_j'' \to 0$ 和 $b_j \in \mathbb{Z}$, 其中 $j = 1, \ldots, m$, 使得等式

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \langle QX_i \rangle = \sum_{j=1}^{m} b_j \left(\langle Y_j \rangle - \langle Y_j' \rangle - \langle Y_j'' \rangle \right) \tag{2.9.1}$$

在以 $\mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ 为基的自由 $\mathbb{Z}$-模中成立. 由于 $Q : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 在定理 2.9.6 中是以局部化构造的, 回忆该定理和 §1.10 的内容可知

- Q 等同 $\mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ 与 $\mathrm{Ob}(\mathcal{B})$, 故 (2.9.1) 导致 $\mathrm{K}_0(\mathcal{A})$ 中的等式

$$\sum_{i=1}^{n} a_i[X_i] = \sum_{j=1}^{m} b_j \left([Y_j] - [Y_j'] - [Y_j''] \right); \tag{2.9.2}$$

- 此外, 只要适当地以 $\mathcal{B}$ 中来自 S 的同构调整 Y_j, Y_j', Y_j'' 和 f_j, g_j, 还能确保存在 $\mathcal{A}$ 中的态射 u_j, v_j 使得 $f_j = Q(u_j)$ 而 $g_j = Q(v_j)$. 根据 $Q(v_j u_j) = g_j f_j = 0$ 和推论 1.10.13, 还可以进一步用 S 调整, 使得 $v_j u_j = 0$.

于是对每个 $1 \leq j \leq m$, 在 $\mathcal{A}$ 中都有正合列

$$0 \to \ker(v_j) \to Y_j \xrightarrow{v_j} Y_j'' \to \mathrm{coker}(v_j) \to 0,$$
$$0 \to \ker(u_j) \to Y_j' \xrightarrow{u_j} \ker(v_j) \to \frac{\ker(v_j)}{\mathrm{im}(u_j)} \to 0.$$

由 Q 正合可见 $\mathrm{coker}(v_j)$, $\ker(u_j)$ 以及 $\frac{\ker(v_j)}{\mathrm{im}(u_j)}$ 都是 $\mathcal{T} = \ker(Q)$ 的对象. 由此在 $\mathrm{K}_0(\mathcal{A})$ 中推得

$$[Y_j] - [Y_j'] - [Y_j''] \in \mathrm{im}\,[\mathrm{K}_0(\mathcal{T}) \to \mathrm{K}_0(\mathcal{A})].$$

上式代回 (2.9.2), 即得 $\ker(\mathrm{K}_0(Q)) \subset \mathrm{im}\,[\mathrm{K}_0(\mathcal{T}) \to \mathrm{K}_0(\mathcal{A})]$. □

面对形如命题 2.9.13 的正合列, 屡试不爽的思路是设法将它左延, 亦即寻求一族高阶 K-群 $\mathrm{K}_i(\cdot)$, 其中 $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 连同典范的正合列

$$\cdots \to \mathrm{K}_{i+1}(\mathcal{B}) \to \mathrm{K}_i(\mathcal{T}) \to \mathrm{K}_i(\mathcal{A}) \to \mathrm{K}_i(\mathcal{B}) \to \cdots$$

我们还期盼 $(\mathrm{K}_i(\mathcal{A}))_{i\geq 0}$ 蕴藏关于 $\mathcal{A}$ 的深刻信息, 而且在一定程度上是可算的. 这些内容属于 K-理论, 应用范围不限于 Abel 范畴. 由于相关构造基于同伦论的见地, 本书无法细述, 请感兴趣的读者参阅 [27].

2.10 Grothendieck 范畴

请先回忆何谓小极限, 完备性和生成元 (定义 1.12.8).

定义 2.10.1 (Grothendieck 范畴) 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴. 当以下条件成立时, 我们称 $\mathcal{A}$ 是 Grothendieck 范畴.

- ◇ $\mathcal{A}$ 是余完备的, 换言之, 它具备所有小 $\varinjlim$;
- ◇ $\mathcal{A}$ 有生成元;
- ◇ 对于所有滤过小范畴 I (见 §1.6), 函子 $\varinjlim : \mathcal{A}^I \to \mathcal{A}$ 正合, 或等价地说, 对于 $\mathcal{A}^I$ 中的任何态射 $\alpha \to \beta \to \gamma$, 我们有

$$\forall i \in \mathrm{Ob}(I),\ 0 \to \alpha(i) \to \beta(i) \to \gamma(i) \to 0 \text{ 正合} \\ \implies 0 \to \varinjlim \alpha \to \varinjlim \beta \to \varinjlim \gamma \to 0 \text{ 正合}.$$

由于例 2.8.6 已说明 $\varinjlim$ 保余核, 根据注记 2.8.4, 最后一则条件也等价于滤过小 $\varinjlim$ 保单态射. 以下论证颇能说明这一条件的用法.

命题 2.10.2 设 $\mathcal{A}$ 为 Grothendieck 范畴, 则对于任意小集 I, 取直和 (亦即余积) 给出正合函子 $\bigoplus_I : \mathcal{A}^I \to \mathcal{A}$.

证明 有限情形是明显的, 而命题 1.6.10 将 $\bigoplus_I$ 表成有限直和的滤过 $\varinjlim$. □

其次是一条貌不惊人却颇为实用的性质, 它同样基于滤过 $\varinjlim$ 的正合性.

命题 2.10.3 取定滤过偏序小集 $(I, \leq)$. 设 $\mathcal{A}$ 是 Grothendieck 范畴, 或者更一般地说, 设 $\varinjlim : \mathcal{A}^{(I,\leq)} \to \mathcal{A}$ 存在而且正合. 对于任意 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ 和

- ◇ 子对象 $Y \subset X$,
- ◇ X 的子对象族 $(X_i)_{i\in I}$, 满足 $i \leq j \implies X_i \subset X_j$,

按照约定 2.6.3 的符号, 我们有

$$\varinjlim_{i\in I} X_i \xrightarrow{\sim} \bigcup_{i\in I} X_i \subset X,$$

$$Y \cap \left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) = \bigcup_{i\in I}(Y\cap X_i) \ \in \mathrm{Sub}_X.$$

证明 由于 $\varinjlim_i$ 正合, 诸 $X_i \hookrightarrow X$ 和 $\varinjlim$ 的泛性质确定的典范态射 $\iota: \varinjlim_i X_i \to X$ 仍然单. 若所有 $X_i \hookrightarrow X$ 都透过某个子对象 $Z \subset X$ 分解, 则泛性质将 ι 分解为 $\varinjlim_i X_i \to Z \subset X$. 这就表明 $\iota: \varinjlim_i X_i \hookrightarrow X$ 确实给出 $(X_i)_{i\in I}$ 在 Sub_X 中的上确界. 第一式得证.

其次, 记商态射 $X \to X/Y$ 为 q, 则有 $Y = \ker(q)$ 和 $Y \cap X_i = \ker\left[q|_{X_i} : X_i \to Y\right]$. 既然取 $\varinjlim_i$ 保核, 配合上一段遂有 $Y \cap \left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) = \bigcup_{i\in I}(Y\cap X_i)$. □

例 2.10.4 (模范畴) 设 R 为环, 则 R-Mod 是 Grothendieck 范畴. 诚然, 余完备性是熟知的 [25, 定理 6.2.2], 滤过 $\varinjlim$ 的正合性则见诸 [25, 引理 6.8.3]. 作为 $R = \mathbb{Z}$ 的特例, Ab 是 Grothendieck 范畴.

为了铺陈更深入的理论, 需要和生成元相关的一些准备.

定义 2.10.5 设 s 为范畴 $\mathcal{C}$ 的生成元. 若对于 $\mathcal{C}$ 中的所有单态射 $i: S_1 \hookrightarrow S_2$, 相应的 $i_*: \mathrm{Hom}(s, S_1) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(s, S_2)$ 为双射当且仅当 i 为同构, 则称 s 为 $\mathcal{C}$ 的**强生成元**.

命题 2.10.6 设范畴 $\mathcal{C}$ 有强生成元, 而且对于所有对象 X 和单态射 $S_i \hookrightarrow X$ (其中 $i = 1, 2$), 存在纤维积 $S_1 \cap S_2 := S_1 \underset{X}{\times} S_2$. 令 $\kappa := |\mathrm{Hom}(s, X)|$, 则 $|\mathrm{Sub}_X| \leq 2^\kappa$.

证明 设 s 为强生成元, X 为任意对象. 兹断言

$$\begin{aligned} \mathrm{Sub}_X &\to \left\{\mathrm{Hom}(s, X) \text{ 的子集}\right\} \\ S &\mapsto \mathrm{Hom}(s, S) \end{aligned}$$

为单射; 由于 $\mathrm{Hom}(s, X)$ 是小集, 这将给出所求的性质.

给定 $S_1, S_2 \in \mathrm{Sub}_X$ 使得 $\mathrm{Hom}(s, S_1) = \mathrm{Hom}(s, S_2)$. 设 $S_1 \subset S_2$, 则强生成元的定义即刻导致 $S_1 = S_2$. 一般情形下, $S_1 \cap S_2 \subset S_i$ (其中 $i = 1, 2$, 参见定义 2.6.1), 而且作为 $\mathrm{Hom}(s, X)$ 的子集有

$$\mathrm{Hom}\left(s, S_1 \cap S_2\right) = \mathrm{Hom}\left(s, S_1\right) \cap \mathrm{Hom}(s, S_2) = \mathrm{Hom}(s, S_i), \quad i = 1, 2.$$

由上一步可知 $S_1 = S_1 \cap S_2 = S_2$. 明所欲证. □

命题 2.10.7 Abel 范畴中的生成元自动是强生成元.

证明 设 $\mathcal{A}$ 为 Abel 范畴, s 为其生成元. 对给定的单态射 $i: S_1 \hookrightarrow S_2$, 考虑态射对

$$S_2 \underset{0}{\overset{q:\text{商态射}}{\rightrightarrows}} S_2/S_1$$

若 i 非同构则 $q \neq 0$, 故生成元的定义说明存在 $\epsilon \in \mathrm{Hom}(s, S_2)$ 使得 $q\epsilon \neq 0\epsilon = 0$; 此 ϵ 无法通过 $S_1 = \ker(q)$ 分解. □

推论 2.10.8 Grothendieck 范畴都是良幂而且余良幂的 (定义 1.12.11).

证明 由于 Abel 范畴中存在有限纤维积, 结合命题 2.10.6 和 2.10.7 可得良幂性质. 此外, 在 Abel 范畴中 Sub_X 和 Quot_X 总是等势. □

推论 2.10.9 任何 Grothendieck 范畴 $\mathcal{A}$ 都是完备的; 换言之, 它具备所有小 $\varprojlim$.

证明 已知 $\mathcal{A}$ 余完备而且良幂. 代入推论 1.12.14. □

因此 Grothendieck 范畴有任意的小直和与小直积. 习题部分将说明 (1.1.1) 的典范态射 $\delta : \bigoplus_{i \in I} X_i \to \prod_{i \in I} X_i$ 为单; 这点对于模范畴的情形自属显然.

推论 2.10.10 设 $\mathcal{A}$ 为 Grothendieck 范畴, 则函子 $G : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ 可表当且仅当它保小 $\varprojlim$, 或更具体地说, G 将 $\mathcal{A}$ 中的小 $\varinjlim$ 化为 Set 中的小 $\varprojlim$.

证明 对 $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ 应用推论 1.12.16. □

注意: 尽管 Grothendieck 范畴的定义非自对偶, 上述结果的对偶版本仍然成立; 见推论 2.10.16.

以下着手说明 Grothendieck 范畴有足够的内射对象; 事实上, 我们将说明定义 2.8.16 中的 $X \hookrightarrow I$ 不仅存在, 其中的 I 还可以取为以 X 为变量的函子。

引理 2.10.11 设 $\mathcal{A}$ 是 Grothendieck 范畴, s 为其生成元. 对象 I 是内射对象当仅当对于所有单态射 $X \hookrightarrow s$, 任何态射 $X \to I$ 都能延拓为 $s \to I$; 换言之, 这些资料延拓为交换图表 $\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, hook] & I \\ s \arrow[ur, dashed, "\exists"'] & \end{tikzcd}$.

证明 内射性质等价于: 对任意单态射 $A \hookrightarrow B$, 所有态射 $f : A \to I$ 都能延拓为 $B \to I$. 故 “仅当” 方向显然.

现论证另一方向. 回忆到 $\mathcal{A}$ 良幂; 给定 $I \xleftarrow{f} A \hookrightarrow B$ 如上, 考虑小集

$$\mathcal{S} := \left\{ (A', f') \;\middle|\; \begin{array}{l} A \subset A' \subset B \text{ (子对象)}, \\ f' : A' \to I \text{ 延拓 } f \end{array} \right\},$$

它按延拓关系赋有偏序. 应用滤过 $\varinjlim$ 的正合性, 可知 $\mathcal{S}$ 的任何全序子集 $\mathcal{T}$ 都有上界

$$\tilde{A} := \varinjlim_{(A', f') \in \mathcal{T}} A', \quad \tilde{f} := \varinjlim_{(A', f') \in \mathcal{T}} f' : \tilde{A} \to I.$$

Zorn 引理遂表明 $\mathcal{S}$ 有极大元 (A', f'). 目标是证 $A' = B$. 设若不然, 则由于 s 是强生成元, 存在 $g : s \to B$ 使得 g 无法透过 $A' \hookrightarrow B$ 分解. 以下说明 f' 可以延拓为 $A' + g(s) \to I$, 这将与 (A', f') 的极大性矛盾.

令 $Y := A' \cap g(s)$. 考虑实线部分的交换图表

$$\begin{tikzcd}
\ker(g) \arrow[r, hook] & g^{-1}(Y) \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, hook] & Y \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & A' \arrow[r, "f'"] & I \\
 & s \arrow[r, two heads, "g"'] \arrow[urrr, dashed, "\varphi" near end] & g(s) \arrow[urr, dashed, bend right, "f''"'] & &
\end{tikzcd}$$

按假设, 存在虚线所示之 φ 使三角部分交换. 又由于 φ 在 $\ker(g)$ 上为零, 故存在虚线所示之 f'' 使得 $\varphi = f''g$. 用 $g^{-1}Y \twoheadrightarrow Y$ 拉回, 可推得 f' 和 f'' 限制在 Y 上相同, 故它们按纤维余积的泛性质粘合为 $A' + g(s) \to I$. 明所欲证. $\square$

行将介绍的是所谓 “小对象论证” 的一种变体. 先回忆定义 1.13.6 及相关讨论涉及的正则基数.

定义 2.10.12 设 $\mathcal{C}$ 为范畴, $I \subset \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ 为任意子集, α 为正则小基数.

(i) 当以下条件成立时, 称 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 相对于 I 是 α-小对象: 设 $\tilde{\alpha}$ 为正则小基数, $\tilde{\alpha} \geq \alpha$. 对于所有从滤过范畴 $\tilde{\alpha}$ 到 $\mathcal{C}$ 的函子 $\beta \mapsto Y_\beta$, 若态射 $Y_\beta \to Y_{\beta'}$ 对所有 $\beta \leq \beta'$ 皆属于 I, 则 (1.13.1) 是双射.

(ii) 若 X 相对于 $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ 是 α-小的, 则称 X 为 α-小对象.

相对于选定的 I, 若 $\alpha \leq \alpha'$, 则 α-小蕴涵 α'-小.

引理 2.10.13 设 $\mathcal{A}$ 是 Grothendieck 范畴, X 为其对象, α 为正则小基数. 若 $\alpha > \kappa := |\mathrm{Sub}_X|$, 则 X 相对于单态射是 α-小对象 (定义 2.10.12).

证明 考虑定义 2.10.12 (i) 中的资料 $\beta \mapsto Y_\beta$, 并要求 $\beta \leq \beta'$ 时 $Y_\beta \to Y_{\beta'}$ 为单态射. 不失一般性, 不妨在该定义中取 $\alpha = \tilde{\alpha}$.

由于 $\mathcal{A}$ 中的滤过 $\varinjlim$ 正合, 易见 $Y_\beta \to \varinjlim_\gamma Y_\gamma$ 仍是单态射. 既然 Ab 中的滤过 $\varinjlim$ 也正合, $\varinjlim_{\gamma<\alpha} \mathrm{Hom}(X, Y_\gamma) \to \mathrm{Hom}(X, \varinjlim_{\gamma<\alpha} Y_\gamma)$ 亦单, 问题化为证其满性. 以下将每个 Y_β 都视为 $\varinjlim_\gamma Y_\gamma$ 的子对象.

给定态射 $f : X \to \varinjlim_\gamma Y_\gamma$, 每个 $\beta < \alpha$ 都确定 X 的子对象 $f^{-1}(Y_\beta)$; 可设 $f^{-1}(Y_\beta) \neq X$ 对每个 β 成立, 否则无劳论证. 回忆到 f^{-1} 由纤维积给出; 再次应用滤过 $\varinjlim$ 的正合性导出自然同构

$$\varinjlim_\beta f^{-1}(Y_\beta) \simeq f^{-1}\left(\varinjlim_\beta Y_\beta\right) = X.$$

由于子对象 $f^{-1}(Y_\beta)$ 的数量不超过 κ, 存在 α 的子集 S 使得 $|S| \leq \kappa$, 而且左式可改为 $\varinjlim_{\beta \in S}$.

考虑序数 $\sigma := \sup S \leq \alpha$. 兹断言 $\sigma < \alpha$. 设若不然, 则由于 $|S| \leq \kappa < \alpha$ 而 $|S| \geq \mathrm{cf}(\alpha)$ (命题 1.13.7 (ii)), 这将与 α 为正则基数的条件矛盾. 此断言确保 $f^{-1}(Y_\beta)$

总是 $f^{-1}(Y_\sigma)$ 的子对象 (其中 $\beta \in S$). 这导致 $f^{-1}(Y_\sigma) = X$, 从而 f 透过 Y_σ 分解. 证毕. □

定理 2.10.14 (A. Grothendieck) 设 $\mathcal{A}$ 为 Grothendieck 范畴. 记 $\mathcal{I}$ 为由 $\mathcal{A}$ 中的内射对象构成的全子范畴, 其包含函子记为 $\iota : \mathcal{I} \to \mathcal{A}$. 存在函子 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{I}$, 连同 $\varphi : \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \to \iota F$, 使得每个

$$\varphi_X : X \to F(X), \quad X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$$

皆为 $\mathcal{A}$ 中的单态射. 特别地, $\mathcal{A}$ 有足够的内射对象.

证明 选定生成元 s. 命 F_0 为函子 $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}$. 第一步是对每个对象 X 构造推出图表

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{Y \in \mathrm{Sub}_s} \bigoplus_{\varphi: Y \to X} Y \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\boxplus"] & X \arrow[d, "\varphi(0,1)_X"] \\
\bigoplus_{Y \in \mathrm{Sub}_s} \bigoplus_{\varphi: Y \to X} s \arrow[r] & F_1(X)
\end{tikzcd}$$

命题 2.1.6 确保上图的 $\varphi(0,1)_X : X \to F_1(X)$ 为单. 当 X 变动, $X \mapsto F_1(X)$ 是从 $\mathcal{A}$ 到自身的函子, $\varphi(0,1) : F_0 \to F_1$ 是态射.

推而广之, 今将对所有小序数 α 构造函子 $F_\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, 连同态射族 $\varphi(\beta, \alpha) : F_\beta \to F_\alpha$ (其中 $\beta \leq \alpha$), 使得

- ◇ $\varphi(\alpha, \alpha) = \mathrm{id}_{F_\alpha}$,
- ◇ $\varphi(\beta, \alpha)_X : F_\beta(X) \to F_\alpha(X)$ 对所有 X 皆单,
- ◇ 若 $\gamma \leq \beta \leq \alpha$ 则 $\varphi(\beta, \alpha)\varphi(\gamma, \beta) = \varphi(\gamma, \alpha)$.

构造基于超穷递归 [25, §1.3]: 从 $\alpha = 0$ 的情形出发, 假设对每个序数 $\beta < \alpha$ 皆已定义了 F_β 和相应的态射族 $\varphi(\beta', \beta)$, 命

$$F_\alpha(X) := \begin{cases} F_1(F_\beta(X)), & \alpha = \beta + 1 \\ \varinjlim_{\beta < \alpha} F_\beta(X) & \alpha : \text{极限序数}, \end{cases}$$

其中 $\varinjlim$ 的构造是相对于 $(\varphi(\beta', \beta))_{\beta' \leq \beta < \alpha}$ 而言. 鉴于 F_1 的性质和滤过 $\varinjlim$ 保单态射, $\varphi(\beta, \alpha)$ 的取法理应是明显的.

根据引理 1.13.9, 可取正则小基数 α 使 $\alpha > |\mathrm{Sub}_s|$. 以下说明 $F_\alpha X$ 对所有 X 都是内射对象. 给定 $Y \hookrightarrow s$ 和 $f : Y \to F_\alpha X$. 正则基数必然是极限序数, 见 [25, 引理 1.4.6] 之后的讨论; 按 F_α 的构造, $\mathrm{Sub}_Y \subset \mathrm{Sub}_s$ 和引理 2.10.13 可知 f 通过某个 $\varphi : Y \to F_\beta X$ 分解, 其中 $\beta + 1 < \alpha$. 考虑交换图表

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\text{透过 } (Y,\varphi)"] \arrow[d, hook] & \bigoplus_{Y' \in \mathrm{Sub}_s} \bigoplus_{\varphi': Y' \to F_\beta X} Y' \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\boxplus"] & F_\beta X \arrow[d] \arrow[dr] & \\
s \arrow[r, "\text{透过 } (Y,\varphi)"'] & \bigoplus_{Y' \in \mathrm{Sub}_s} \bigoplus_{\varphi': Y' \to F_\beta X} s \arrow[r] & F_{\beta+1} X \arrow[r] & F_\alpha X
\end{tikzcd}$$

凝神观照, 依此延拓 f 为 $s \to F_\alpha X$. 引理 2.10.11 遂蕴涵 $F_\alpha X$ 是内射对象. 最后, 取 $F := F_\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{I}$ 和 $\varphi := \varphi(0, \alpha)$ 即所求. □

推论 2.10.15 任何 Grothendieck 范畴皆有内射余生成元.

证明 取 Grothendieck 范畴 $\mathcal{A}$ 的生成元 s. 已知 Quot_s 是小集. 取定内射对象 I 连同单态射 $\bigoplus_{Q \in \mathrm{Quot}_s} Q \hookrightarrow I$. 以下用命题 2.8.15 的判准来说明 I 是余生成元.

设 $T \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ 非零. 存在非零态射 $s \to T$, 分解为 $s \twoheadrightarrow Q' \hookrightarrow T$. 于是有

$$Q' \hookrightarrow \bigoplus_{Q \in \mathrm{Quot}_s} Q \hookrightarrow I.$$

根据内射对象定义, 此合成态射有延拓 $T \to I$, 它显然非零. 明所欲证. □

推论 2.10.16 设 $\mathcal{A}$ 为 Grothendieck 范畴, 则函子 $F : \mathcal{A} \to \mathsf{Set}$ 可表当且仅当它保小 $\varprojlim$.

证明 已知 $\mathcal{A}$ 有余生成元, 代入推论 1.12.16 便是. □

2.11 Gabriel–Popescu 定理

本节仍沿用 §2.10 的惯例. 选定 Grothendieck 范畴 $\mathcal{A}$, 并且将 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}$ 简记为 Hom. 以 $X^{\oplus I}$ 代表 I 份对象 X 在 $\mathcal{A}$ 中的直和, I 是小集.

Gabriel–Popescu 定理说明 $\mathcal{A}$ 总能实现为某个右模范畴 $\mathsf{Mod}\text{-}R$ 的反射局部化 (注记 1.10.19), 环 R 和涉及的函子取决于生成元 s. 以下取法 L. Kuhn [12] 的证明, 但仅限于单个对象 s 的情形. 其中一步需要导出函子的经典理论, 将在 §3.12 详细介绍.

取 $s \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. 命 $R := \mathrm{End}(s)$ 并且考虑函子

$$\begin{aligned} G : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathsf{Mod}\text{-}R \\ X &\longmapsto \mathrm{Hom}(s, X), \end{aligned}$$

其中 R 按态射的合成右作用. 易见 G 是 Abel 范畴之间的加性函子, 保所有小 $\varprojlim$. 观察到 $G(s) = R$. 今后记 $\mathrm{Hom}_R := \mathrm{Hom}_{\mathsf{Mod}\text{-}R}$ 以区别于 $\mathrm{Hom} := \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}$.

引理 2.11.1 上述函子 $G : \mathcal{A} \to \mathsf{Mod}\text{-}R$ 有左伴随 $P : \mathsf{Mod}\text{-}R \to \mathcal{A}$. 伴随对的余单位 $\varepsilon : PG \to \mathrm{id}$ 使得 $\varepsilon_s : PG(s) \to s$ 为同构; 特别地, 这给出典范同构 $P(R) \simeq s$, 而且 P 诱导的环同态 $R = \mathrm{End}_R(R) \to \mathrm{End}(P(R)) \simeq \mathrm{End}(s)$ 即 id_R.

证明 左伴随 P 的存在性源自特殊伴随函子定理 1.12.13 和推论 2.10.8. 其次, 对任意

$Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, 兹断言下图交换:

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Hom}(PG(s), Y) \arrow[d, "\simeq"] & & \\
\mathrm{Hom}(s, Y) \arrow[urr, "\varepsilon_s^*"] \arrow[rr, "G"] \arrow[drr, "\mathrm{id}"'] & & \mathrm{Hom}_R(G(s), G(Y)) \arrow[d, "\simeq"] & \ni & \psi \arrow[d, mapsto] \\
 & & G(Y) & \ni & \psi(1_R)
\end{tikzcd}$$

- 上半部交换是关于伴随对 (P, G) 的普遍性质: 任给 $f \in \mathrm{Hom}(s, Y)$, 则 $f\varepsilon_s$ 在 $\mathrm{Hom}_R(G(s), G(Y))$ 中的像等于 $G(f\varepsilon_s) \circ \eta_{Gs}$, 见 [25, (2.5)]; 而根据伴随对的三角等式, 后者又等于 $(Gf)\left((G\varepsilon_s)\eta_{Gs}\right) = Gf$.

- 从 G 的定义可直接检验下半部交换.

于是 ε_s^* 是同构. 进一步取 Y 为推论 2.10.15 提供的内射余生成元, 则可见 ε_s 为同构. 关于环同态 $\mathrm{End}_R(G(s)) \xrightarrow{P} \mathrm{End}(PG(s)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(s) = R$ 的描述不过是上述结果的形式推论. □

如何描述 P? 对任意右 R-模 M, 存在小集 I, J 和正合列

$$R^{\oplus J} \to R^{\oplus I} \to M \to 0;$$

取 P 保小 $\varinjlim$, 于是 $PM \simeq \mathrm{coker}\left[s^{\oplus J} \to s^{\oplus I}\right]$.

定理 2.11.2 (P. Gabriel, N. Popescu, L. Kuhn) 取 s 为 Grothendieck 范畴 $\mathcal{A}$ 的生成元. 以下性质成立:

- 函子 $G = \mathrm{Hom}(s, \cdot) : \mathcal{A} \to \mathsf{Mod}\text{-}\mathcal{R}$ 有正合的左伴随 P;

- G 是全忠实的, 伴随对的余单位态射给出同构 $\varepsilon : PG \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_{\mathsf{Mod}\text{-}R}$;

- P 诱导范畴的等价 $\mathsf{Mod}\text{-}\mathcal{R}/\ker(P) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$.

证明 引理 2.11.1 已说明 G 有左伴随 P. 兹断言若 $u : M \to GX$ 是 $\mathsf{Mod}\text{-}R$ 的单态射, 则对应的 $v := \varepsilon_X \circ Pu : PM \to X$ (见 [25, (2.5)]) 是 $\mathcal{A}$ 的单态射. 将 M 写成有限生成 R-子模的滤过 $\varinjlim$. 由于 P 保 $\varinjlim$ 而 $\mathcal{A}$ 中的滤过 $\varinjlim$ 正合, 问题化约到 M 有限生成的情形.

取有限集 I 连同 $R^{\oplus I} \twoheadrightarrow M$. 这给出 $e : s^{\oplus I} \twoheadrightarrow PM$. 若能证明 $\ker(ve) = \ker(e)$ 即可推出 v 单. 基于命题 2.10.7, 问题进一步化约为说明任何态射 $f : s \to s^{\oplus I}$ 若满足 $vef = 0$, 则 $ef = 0$. 作两点观察:

- 按构造, e 来自 P 的像, 而因为 I 有限, 将 f 表作 $R \oplus I$ 的元素, 引理 2.11.1 的第二部分确保 f 也来自 P 的像;

◇ 其次, 若 Mod-R 的态射 $\psi: N \to M$ 满足 $v \circ P\psi = 0$, 则 $\psi = 0$. 这是基于 u 的单性和 Ab 中的交换图表

$$\begin{tikzcd} v \in \mathrm{Hom}(PM, X) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "(P\psi)^*"'] & \mathrm{Hom}_R(M, GX) \ni u \arrow[d, "\psi^*"] \\ \mathrm{Hom}(PN, X) \arrow[r, "\sim"'] & \mathrm{Hom}_R(N, GX). \end{tikzcd}$$

于是 $ef: s \to PM$ 总来自于 P 的像, 而 $vef = 0$ 蕴涵 $ef = 0$. 断言得证.

伴随对的余单位态射 ε 为同构等价于 G 全忠实, 这则一般事实留作习题. 以下来证明 ε 为同构. 命 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. 既然 $\varepsilon_X: PG(X) \hookrightarrow X$ 对应 $\mathrm{id}_X: GX \to GX$, 由前一步可知 ε_X 单. 至于满性, 命题 2.10.7 将此化约为证明任意 $\alpha: s \to X$ 都透过 $\varepsilon_X: PG(X) \to X$ 分解. 然而引理 2.11.1 已给出交换图表

$$\begin{tikzcd} PG(s) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "PG(\alpha)"'] & s \arrow[d, "\alpha"] \\ PG(X) \arrow[r, hook, "\varepsilon_X"'] & X \end{tikzcd}$$

由之立见所求的分解.

接着证明 P 正合. 已知 P 右正合, 再证左导出函子 $\mathrm{L}_1 P = 0$ 即可. 对任意右 R-模 M, 取短正合列

$$0 \to K \xrightarrow{u} F \to M \to 0, \quad F: \text{自由模}.$$

基于 "移维" 的技巧 (命题 3.12.9), 可见

$$\mathrm{L}_1 P(M) \simeq \ker[Pu: P(K) \to P(F)].$$

问题遂归结为证 Pu 单. 将 F 表作有限秩自由子模 F' 的滤过 $\varinjlim$ (亦可写作递增并), 相应地 $K = \varinjlim_{F'}(F' \cap K)$; 因为 P 保 $\varinjlim$ 而 $\mathcal{A}$ 中的滤过 $\varinjlim$ 正合, 问题化约到 $F = R^{\oplus I} \simeq G(s^{\oplus I})$ 的情形, I 为有限集. 然而证明之初业已说明若 $u: K \to G(s^{\oplus I})$ 单, 则 $v = \varepsilon_{s^{\oplus I}} \circ Pu: P(K) \to s^{\oplus I}$ 单, 因而 Pu 单. 正合性得证.

最后, 将定理 2.9.6 给予的泛性质用于 P, 给出忠实加性函子 $\overline{P}$: Mod-$\mathcal{R}/\ker(P) \to \mathcal{A}$. 记 $\overline{G}$ 为合成 $\mathcal{A} \xrightarrow{G}$ Mod-$R \to$ Mod-$R/\ker(P)$, 则 $P \circ G \simeq \mathrm{id}$ 和泛性质蕴涵 $\overline{P} \circ \overline{G} \simeq \mathrm{id}$. 由此知 $\overline{P}$ 还是全忠实且本质满的, 以 $\overline{G}$ 为拟逆. 明所欲证. □

注记 2.11.3 基于 Gabriel–Popescu 定理 2.11.2, 可以推出 Grothendieck 范畴是定义 1.13.10 意义下的可展示范畴. 这是因为 Mod-$R \simeq R^{\mathrm{op}}$-Mod 已知是可展示的; 应用 [1, 1.40 Corollary] 可将此性质 "反射" 到 $\mathcal{A}$ 上.

习题

1. 说明自由 $\mathbb{Z}$-模在 $\mathbb{Z}$-Mod 中构成的加性全子范畴不是 Abel 范畴.

2. 设 X 是 Abel 范畴中的对象, $Y, Z \in \mathrm{Sub}_X$. 考虑偏序集之间的同构

$$\begin{tikzcd} {[Y \cap Z, Y]} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\simeq"] & {[Z, Y+Z]} \arrow[d, "\simeq"] \\ \mathrm{Sub}_{Y/(Y\cap Z)} \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Sub}_{(Y+Z)/Z} \end{tikzcd}$$

其中垂直箭头来自定理 2.6.8 (ii), 底部水平箭头来自定理 2.6.8 (iii) 的 $Y/(Y\cap Z) \simeq (Y+Z)/Z$, 而顶部水平箭头 $W \mapsto W + Z$ 则来自命题 2.4.5. 说明上图交换.

3. 设 $\Bbbk$ 为交换环, $\mathcal{A}$ 为 $\Bbbk$-线性 Abel 范畴. 证明若 $\mathcal{A}$ 中的所有 $\mathrm{Hom}(X, Y)$ 都是 Artin $\Bbbk$-模, 则 $\mathcal{A}$ 具备定义 2.5.6 的双链条件. 〈提示〉 给定双链 $(X_n, \alpha_n, \beta_n)_{n=0}^{\infty}$, 则 $f \mapsto \beta_n f \alpha_n$ 确定 $\Bbbk$-模的一列单同态 $\mathrm{Hom}(X_{n+1}, X_{n+1}) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(X_n, Y_n)$; 它是同构当且仅当 α_n 和 β_n 皆为同构.

4. 若 Ab-范畴 $\mathcal{K}$ 有零对象, 而且对于所有 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{K})$ 和幂等元 $e \in \mathrm{End}(X)$, 存在核 $\ker(e)$, 则称 $\mathcal{K}$ 为 Karoubi 范畴.

(i) 证明 Karoubi 范畴中的每个幂等元 e 都有余核, 而且有典范同构 $\ker(1-e) \simeq \mathrm{coker}(1-e)$.

(ii) 对任意具有零对象的 Ab-范畴 $\mathcal{C}$, 典范地构造 Karoubi 范畴 $\mathrm{kar}(\mathcal{C})$ 连同全忠实加性函子 $\varphi_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \to \mathrm{kar}(\mathcal{C})$, 使得对于每个 Karoubi 范畴 $\mathcal{K}$, 函子

$$\varphi_{\mathcal{C}}^*: \mathcal{K}^{\mathrm{kar}(\mathcal{C})} \to \mathcal{K}^{\mathcal{C}}, \quad F \mapsto F\varphi_{\mathcal{C}}$$

是等价; 这里的 $\mathcal{K}^{\mathcal{C}}$ 是所有加性函子 $\mathcal{C} \to \mathcal{K}$ 所成的函子范畴, 依此类推.

(iii) 若 $\Bbbk$ 是交换环, $\mathcal{C}$ 是 $\Bbbk$-线性的, 则 $\mathrm{kar}(\mathcal{C})$ 也有自然的 $\Bbbk$-线性结构.

一般称 $\mathrm{kar}(\mathcal{C})$ 为 $\mathcal{C}$ 的 Karoubi 包, 它是向 $\mathcal{C}$ 形式地添入所有直和项的产物.

〈提示〉 命 $\mathrm{kar}(\mathcal{C})$ 的对象为形如 (X, e) 的资料, $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 而 $e \in \mathrm{End}(X)$ 是幂等元; 态射 $(X, p) \to (Y, q)$ 由 $\mathcal{C}$ 中满足 $qf = f = fp$ 的态射 $f: X \to Y$ 确定, 而 $\varphi_{\mathcal{C}}(X) = (X, \mathrm{id}_X)$.

5. 对给定的环 R, 验证所有投射 R-模构成一个 Karoubi 范畴, 它不是 Abel 范畴.

6. 设 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 具备所有小直和 $\bigoplus_{i\in I}$ (或小直积 $\prod_{i\in I}$); 换言之, 要求下标集 I 是小集. 证明小集 $\Sigma \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ 是生成系 (或余生成系) 当且仅当对所有 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ 皆存在 Σ 中元素的小直和 (或小直积) S 连同满态射 $S \twoheadrightarrow X$ (或单态射 $X \hookrightarrow S$).

7. 设 A, B, C 是 Abel 范畴中的对象 X 的子对象, 满足 $A \cap (B + C) = 0 = B \cap C$. 证明 $A \cap B = 0$ 而 $(A + B) \cap C = 0$.

〈提示〉 构造单态射 $(A + B) \cap C \to A$, 并说明它通过 $A \cap (B + C)$ 分解.

8. 证明有限生成 $\mathbb{Z}$-模构成的 Abel 范畴有足够的投射对象, 但没有足够的内射对象.

9. (Schanuel 引理) 考虑任意 Abel 范畴中的投射对象 P, Q 和短正合列

$$0 \to K \to P \xrightarrow{\phi} M \to 0,$$

$$0 \to L \to Q \xrightarrow{\psi} M \to 0.$$

由此构造拉回图表

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, "\phi'"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & P \arrow[d, "\phi"] \\ Q \arrow[r, "\psi"'] & M. \end{tikzcd}$$

请给出短正合列 $0 \to L \to X \xrightarrow{\psi'} P \to 0$ 和 $0 \to K \to X \xrightarrow{\phi'} Q \to 0$, 然后证明存在同构 $K \oplus Q \simeq L \oplus P$. 提示 应用命题 1.3.10, 2.1.6.

10. 证明 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 是 Ab 的内射余生成元.

11. 详细验证例 2.8.18 中的伴随关系.

12. 设 $\mathcal{C}$ 为非空范畴, $\mathcal{A}$ 为 Abel 范畴. 对每个 $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, 求值函子 $\mathrm{ev}_c : \mathcal{A}^{\mathcal{C}} \to \mathcal{A}$ 映 F 为 Fc.

(i) 假设 $\mathcal{A}$ 具备所有形如 $\bigoplus_{c\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$ 和 $\bigoplus_{f\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c,c')}$ 的直和. 对每个 $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 定义函子 $\mathcal{L}_c : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ 如下: 在对象层次, $(\mathcal{L}_c X)(c') = \bigoplus_{\mathrm{Hom}(c,c')} X$. 补全态射层面的定义, 使得 $\mathcal{L}_c$ 成为 ev_c 的左伴随. 提示 给定 $c' \to c''$, 函子在态射层面的定义由 $\mathrm{Hom}(c,c') \to \mathrm{Hom}(c,c'')$ 和 id_X 确定.

(ii) 承上, 证明若 $\mathcal{A}$ 有足够的投射对象, 则 $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ 亦然.

(iii) 探讨对偶版本: 假设 $\mathcal{A}$ 具备所有形如 $\prod_{c\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$ 和 $\prod_{f\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c',c)}$ 的积, 定义函子 $\mathcal{R}_c : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ 使得 $(\mathcal{R}_c X)(c') = \prod_{\mathrm{Hom}(c',c)} X$, 给出 ev_c 的右伴随; 继而证明若 $\mathcal{A}$ 有足够的内射对象, 则 $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ 亦然.

(iv) 探讨当 $\mathcal{C} = \mathbf{2}$ 时它们与例 2.8.18 的联系.

13. 承上题, 设 $\mathcal{C}$ 是小范畴. 证明若 s 是 $\mathcal{A}$ 的生成元 (或余生成元), 则所有 $\mathcal{L}_c(s)$ (或 $\mathcal{R}_c(s)$) 构成 $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ 的生成系 (或余生成系), 其中 c 取遍 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, 前提是所需的直和 (或直积) 存在.
提示 以生成元情形为例, 对所有 $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 和 $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ 的态射 $f : X \to Y$ 皆有交换图表

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(s, Y(c)) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{\mathcal{C}}}(\mathcal{L}_c(s), Y) \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(s, X(c)) \arrow[r, "\sim"'] \arrow[u, "f(c)_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{\mathcal{C}}}(\mathcal{L}_c(s), X). \arrow[u, "f_*"'] \end{tikzcd}$$

14. 对于 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的 Serre 子范畴 $\mathcal{T}$, 定义新的范畴使得它的对象集等于 $\mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, 而从 X 到 Y 的态射集等于

$$\varinjlim_{X'\subset X, Y'\subset Y} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X', Y/Y'), \quad X/X',\ Y' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}).$$

(i) 补全态射合成的定义, 并且说明此范畴和定理 2.9.6 的 Serre 商 $\mathcal{A}/\mathcal{T}$ 相等价.

(ii) 以此说明当 $\mathcal{A}$ 良幂 (定义 1.12.11) 时, $\mathcal{A}/\mathcal{T}$ 也是 $\mathcal{U}$-范畴, $\mathcal{U}$ 是选定的 Grothendieck 宇宙.

15. 设 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的子 Abel 范畴, 而且对每个 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ 都存在一列子对象 $0 = X_0 \subset \cdots \subset X_n = X$ 使得 $X_i/X_{i-1} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$, 则包含函子 $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ 诱导群同构 $\mathrm{K}_0(\mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{K}_0(\mathcal{A})$.
提示 以 $[X] \mapsto \sum_{i=1}^{n}[X_i/X_{i-1}]$ 构造逆映射; 以 Schreier 加细定理 2.4.8 说明它和子对象列的选取无关.

16. 设 $\mathcal{A}$ 为 Grothendieck 范畴, $(X_i)_{i\in I}$ 为一族对象, 其中 I 为小集. 证明 (1.1.1) 的典范态射 $\delta : \bigoplus_{i\in I} X_i \to \prod_{i\in I} X_i$ 为单.

提示 对所有有限子集 $F \subset I$ 考虑交换图表

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{i\in I} X_i \arrow[r, "\delta"] & \prod_{i\in I} X_i \\ \bigoplus_{i\in F} X_i \arrow[u] \arrow[r, "\sim", "\delta_F"'] & \prod_{i\in F} X_i \arrow[u] \end{tikzcd}$$

取滤过之 $\varinjlim_{F\subset I:\ \text{有限}} \delta_F$ 以导出 δ 为单态射, 见命题 1.6.10.

17. 证明若 $\mathcal{A}$ 是 Grothendieck 范畴, 则复形范畴 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ (见 §3.1) 和函子范畴 $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ 都是 Grothendieck 范畴, 其中 $\mathcal{C}$ 是任意小范畴.

18. 考虑 Grothendieck 范畴 $\mathcal{A}$ 的对象 X.

(i) 试补全注记 2.7.11 的严谨证明. 提示 移植模论的论证, 留意无穷直和.

(ii) 当以下条件成立时, 证明 X 分裂蕴涵 X 半单: 对任意非零之 $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, 存在非零子对象 $Y_0 \subset Y$ 使得偏序集 $\mathrm{Sub}_{Y_0} \smallsetminus \{Y_0\}$ 中的每个链都有上界. 对 $\mathcal{A} = R\text{-}\mathsf{Mod}$ 验证此前提.

第三章 复形

如无申明, 本章考虑的复形都是注记 2.2.6 所称的上链复形, 提及 $\Bbbk$ 时均指任意交换环.

♣♣♣ 待撰写

阅读提示

♣♣♣ 待撰写

3.1 加性范畴上的复形

定义 2.2.4 已初步介绍了复形的概念和常用记法. 选定加性范畴 $\mathcal{A}$, 并考虑其上的无穷长, 亦即无端点项的复形 $X = (X^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$; 态射 d^n 经常标为 d^n_X. 基于历史的缘由, 这些态射 d^n_X 也被称为 "微分".

定义 3.1.1 从复形 X 到 Y 的态射定义为资料 $(f^n)_{n\in\mathbb{Z}}$, 也简记为 f, 其中 $f^n \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^n, Y^n)$ 须满足

$$d^n_Y f^n = f^{n+1} d^n_X, \quad n \in \mathbb{Z};$$

全体复形及其间的态射构成范畴 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$: 复形 X 到自身的恒等态射由 $(\mathrm{id}_X)^n := \mathrm{id}_{X^n}$ 确定, 态射合成按 $(gf)^n = g^n f^n$ 定义. 加法 $f + g := (f^n + g^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 使 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X, Y)$ 成为交换群.

若 $\mathcal{A}$ 在定义 1.4.1 下是 $\Bbbk$-线性的, 其中 $\Bbbk$ 是选定的交换环, 则 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X, Y)$ 也同样对逐项的纯量积构成 $\Bbbk$-模. 在本节的结果中, "加性" 一词全都可以代换为更广泛

的 "$\Bbbk$-线性", 但为了节约笔墨, 今后仅陈述加性版本.

复形定义中的关键性质是 $d^{n+1}d^n = 0$, 这点也可以用微分分次对象的语言改述[1].

定义 3.1.2 (分次对象) 取 $\mathcal{A}$ 为任意范畴, 回忆积范畴 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 的构造:

- 其对象形如 $X = (X^n)_{n\in\mathbb{Z}}$, 其中 $X^n \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$;
- 其态射形如 $f = (f^n : X^n \to Y^n)_{n\in\mathbb{Z}}$, 无其它条件, 而合成是逐项 (或曰逐次) 操作的, 亦即 $(gf)^n = g^n f^n$;
- 定义 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 的自同构 T 为下述 "平移" 函子: $(TX)^n = X^{n+1}$, $(Tf)^n = f^{n+1}$.

对象 $X = (X^n)_n$ 也称为 $\mathcal{A}$ 上的 $\mathbb{Z}$-分次对象, 简称**分次对象**.

推而广之, $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^m}$ 的对象称为 $\mathbb{Z}^m$-分次对象, 写作 $(X^{n_1,\ldots,n_m})_{n_1,\ldots,n_m}$, 其态射则写作 $(f^{n_1,\ldots,n_m})_{n_1,\ldots,n_m}$. 此范畴带有一族相交换的平移函子 $T_1,\ldots,T_m$. 特例 $m=2$ 又称**双分次对象**.

若 $\mathcal{A}$ 是加性范畴, 则 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^m}$ 亦然: 态射相加, 对象作直和等一切操作都是逐次施行的.

定义 3.1.3 (微分分次对象) 设 $\mathcal{A}$ 为加性范畴, 其上的微分分次对象定义为资料 (X, d), 其中 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$ 而 $d : X \to TX$ 满足 $(Td)d = 0$. 态射 $(X, d) \to (Y, d)$ 定义为满足 $(Tf)d = df$ 的态射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}}(X, Y)$.

将微分分次对象 (X, d) 中的 d 具体表成态射族 $d_X^n : X^n \to X^{n+1}$, 则 d 的条件是 $d_X^{n+1}d_X^n = 0$, 而态射的条件是 $f^{n+1}d_X^n = d_Y^n f^n$, 复归定义 3.1.1. 因此 $\mathcal{A}$ 上的微分分次对象范畴同构于复形范畴. 本节将不加说明地切换两种视角.

研究复形的第一步是了解 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的各种极限. 积范畴 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 的版本相对容易, 其极限可以对每个 $n \in \mathbb{Z}$ 取, 亦即逐项地在 $\mathcal{A}$ 中构造. 以下说明如何将此提升到 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 层次. 记 $U : \mathsf{C}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 为忘却函子, 映微分分次对象 (X, d) 为分次对象 X.

引理 3.1.4 (极限的逐项构造) 任给函子 $\alpha : I \to \mathsf{C}(\mathcal{A})$, 记 $\overline{\alpha} := U\alpha$. 假设 $\varinjlim \overline{\alpha}$ 存在, 则它可以唯一地升级为 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 的对象, 使之给出 $\varinjlim \alpha$; 对 $\varprojlim$ 亦有相应结果.

按定义 1.5.2 的语言, 这相当于说忘却函子 U 生所有 $\varinjlim$ 和 $\varprojlim$.

证明 设 $\alpha : I \to \mathsf{C}(\mathcal{A})$ 映 $i \in \mathrm{Ob}(I)$ 为微分分次对象 $\alpha(i) = (\overline{\alpha}(i), d_i)$. 若 $\varinjlim \overline{\alpha}$ 存在, 则诸 d_i 确定 $d : \varinjlim \overline{\alpha} \to (T \varinjlim \overline{\alpha} \simeq \varinjlim T\overline{\alpha})$ (自同构 T 自动保 $\varinjlim$), 其刻画是交换图表

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim \overline{\alpha} \arrow[r, "d"] & \varinjlim T\overline{\alpha} \arrow[r, "\sim"] & T \varinjlim \overline{\alpha} \\
\overline{\alpha}(i) \arrow[u] \arrow[r, "d_i"'] & T\overline{\alpha}(i) \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd} \qquad (i \in \mathrm{Ob}(I)).$$

按此由 $(Td_i)d_i = 0$ 推得 $(Td)d = 0$, 给出 $(\varinjlim \overline{\alpha}, d) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}(\mathcal{A}))$. 图表说明这是使 $(\overline{\alpha}(i), d_i) \to (\varinjlim \overline{\alpha}, d)$ 为态射的唯一选法.

[1] 相关讨论将在 §5.2 接续.

以下验证它在 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中作为 $\varinjlim \alpha$ 的泛性质. 在 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中给定一族相容的态射 $f_i : \alpha(i) \to L$, 忘却给出 $f_i : \overline{\alpha}(i) \to U(L)$, 它们来自唯一的 $f : \varinjlim \overline{\alpha} \to U(L)$. 关键在于证 f 为 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 的态射. 虽是意料之中, 我们还是郑重其事地作图

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim \overline{\alpha} \arrow[rr, "d"] \arrow[dd, "f"'] & & \varinjlim T\overline{\alpha} \arrow[r, "\sim"] & T \varinjlim \overline{\alpha} \arrow[dd, "Tf"] \\
& \overline{\alpha}(i) \arrow[ul] \arrow[dl, "f_i"] \arrow[r, "d_i"] & T\overline{\alpha}(i) \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[dr, "Tf_i"] & \\
U(L) \arrow[rrr, "d_L"'] & & & TU(L)
\end{tikzcd} \qquad (i \in \mathrm{Ob}(I)).$$

每个构件都可以按定义或构造验证交换. 于是 $d_L f$ 和 $(Tf)d$ 合成每个 $\overline{\alpha}(i) \to \varinjlim \overline{\alpha}$ 皆交换; 按 $\varinjlim \overline{\alpha}$ 的泛性质推得 $d_L f = (Tf)d$. 明所欲证. □

命题 3.1.5 范畴 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 是加性范畴; 如果 $\mathcal{A}$ 完备 (或余完备), 则 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 亦然.

证明 以引理 3.1.4 将所需的极限逐次地化到 $\mathcal{A}$ 上. □

定义 3.1.6 (平移函子) 设 X 为 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 的对象, $n \in \mathbb{Z}$. 定义复形 $X[n]$ 如下[2]

$$(X[n])^k := X^{k+n}, \quad d^k_{X[n]} := (-1)^n d_X^{k+n}.$$

这给出加性函子 $[n] : \mathsf{C}(\mathcal{A}) \to \mathsf{C}(\mathcal{A})$: 若 $f : X \to Y$ 为复形之间的态射, 则 $f[n] : X[n] \to Y[n]$ 由 $f[n]^k := f^{n+k}$ 给出.

显然 $X[n]$ 仍是复形, 故函子是良定义的. 以下性质属显然.

- ◇ $[0] = \mathrm{id}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}$.
- ◇ $[n][m] = [n+m]$. 因此 $[n]$ 是从 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 的自同构, 以 $[-n]$ 为逆.
- ◇ $(d_X^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ 可以视为复形之间的态射 $d_X : X \to X[1]$.

约定 3.1.7 对于 $\mathcal{A}$ 的任何对象 S, 可将其视同复形 $(S^n, d_S^n)_{n \in \mathbb{Z}}$, 其中 $S^0 := S$ 而其余项为 0, 并且 d_S^n 全取为零态射. 这给出全忠实加性函子 $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathsf{C}(\mathcal{A})$. 推而广之, 对任意 $n \in \mathbb{Z}$, 复形 $S[-n]$ 是置 S 于第 n 次项, 其余各项为 0 之复形.

以下结果是自明的.

命题 3.1.8 给定加性函子 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$, 则 $(X^n, d_X^n)_n \mapsto (FX^n, Fd_X^n)_n$ 给出函子 $\mathsf{C}F : \mathsf{C}(\mathcal{A}) \to \mathsf{C}(\mathcal{A}')$. 它和平移函子相交换: $[m] \circ \mathsf{C}F = \mathsf{C}F \circ [m]$ 对所有 $m \in \mathbb{Z}$ 皆成立.

---

[2] 在 $d_{X[n]}$ 的定义中插入 $(-1)^n$ 是有好处的, 它也和不加正负号的版本 $X[n]^\circ := \left(X^{n+k}, d_X^{k+n}\right)_k$ 相互同构: 按 $(\cdots, +, -, +, \cdots)$ 取 $X[n] \xrightarrow{\sim} X[n]^\circ$ 便是.

注记 3.1.9 本节一切结果都适用于注记 2.2.6 提及的链复形 $(X_\bullet, d_\bullet)$. 链复形范畴上的平移函子按

$$X[n]_k := X_{k+n}, \quad d_k^{X[n]} = (-1)^n d_{n+k}^X$$

来定义. 若按 $X_n = X^{-n}$ 和 $d_n = d^{-n}$ 进行过渡, 则链复形的平移 $[1]$ 对应于复形的 $[-1]$.

3.2 Hom 复形与同伦

先前已经定义过两个复形之间的 Hom. 本节说明如何将其升级为复形, 并且将态射的合成升级为复形上的某种乘法. 仍取 $\mathcal{A}$ 为任意加性范畴. 当 $\Bbbk$ 是任意交换环而 $\mathcal{A}$ 是 $\Bbbk$-线性范畴时, 本节所有陈述都有不言自明的 $\Bbbk$-线性版本.

回忆到取 Hom 集给出函子 $\mathrm{Hom} : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{A} \to \mathsf{Ab}$. 不带上标的 Hom 指涉 $\mathcal{A}$ 或 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的 Hom 集, 必要时以下标注明.

定义 3.2.1 (Hom 复形) 设 X, Y 为 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 的对象, 对每个 $n \in \mathbb{Z}$ 定义

$$\mathrm{Hom}^n(X, Y) := \prod_{k \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\left(X^k, Y^{k+n}\right);$$

态射的逐项合成给出

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}^n(Y, Z) \times \mathrm{Hom}^m(X, Y) &\longrightarrow \mathrm{Hom}^{n+m}(X, Z) \\ (g, f) &\longmapsto gf := \left(g^{k+m} f^k\right)_{k \in \mathbb{Z}}. \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

注意到 $d_X = (d_X^k)_k \in \mathrm{Hom}^1(X, X)$, 对 d_Y 亦同, 按此定义

$$\begin{aligned} d^n = d^n_{\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y)} : \mathrm{Hom}^n(X, Y) &\longrightarrow \mathrm{Hom}^{n+1}(X, Y) \\ f &\longmapsto d_Y f - (-1)^n f d_X. \end{aligned}$$

定义于 (3.2.1) 的运算显然满足结合律和对加法的分配律. 给定 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的态射 $u : \underline{X} \to X$ 和 $v : Y \to \underline{Y}$, 分别视同 $\mathrm{Hom}^0(\underline{X}, X)$ 和 $\mathrm{Hom}^0(Y, \underline{Y})$ 的元素, 则对每个 $n \in \mathbb{Z}$ 都有同态

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}^n(u, v) : \mathrm{Hom}^n(X, Y) &\longrightarrow \mathrm{Hom}^n(\underline{X}, \underline{Y}) \\ f &\longmapsto vfu. \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

定义–命题 3.2.2 以上资料 $(\mathrm{Hom}^n(X, Y), d^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ 给出 $\mathsf{C}(\mathsf{Ab})$ 的对象, 称为 **Hom 复形**. 当 X 和 Y 变动, 此构造连同 (3.2.2) 给出加性函子

$$\mathrm{Hom}^\bullet : \mathsf{C}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}} \times \mathsf{C}(\mathcal{A}) \to \mathsf{C}(\mathsf{Ab}).$$

证明 先验证 $d^{n+1}d^n = 0$. 因为 $d_Y^2 = 0 = d_X^2$, 直接计算给出

$$\begin{aligned} d^{n+1}\left(d^n f\right) &= d_Y\left(d_Y f - (-1)^n f d_X\right) - (-1)^{n+1}\left(d_Y f - (-1)^n f d_X\right) d_X \\ &= (-1)^{n+1} d_Y f d_X - (-1)^{n+1} d_Y f d_X = 0. \end{aligned}$$

其次是函子性. 将 (3.2.2) 定义的 $\mathrm{Hom}^\bullet(u,v)$ 编入图表

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}^n\left(X^\bullet, Y^\bullet\right) \arrow[r, "\mathrm{Hom}^{n+1}(u,v)"] \arrow[d, "d^n"'] & \mathrm{Hom}^n\left(\underline{X}^\bullet, \underline{Y}^\bullet\right) \arrow[d, "\underline{d}^n"] \\ \mathrm{Hom}^{n+1}\left(X^\bullet, Y^\bullet\right) \arrow[r, "\mathrm{Hom}^{n+1}(u,v)"'] & \mathrm{Hom}^{n+1}\left(\underline{X}^\bullet, \underline{Y}^\bullet\right); \end{tikzcd}$$

由于 $d_X u = u d_{\underline{X}}$, $v d_Y = d_{\underline{Y}} v$, 它显然交换. □

此外, 取 $d_{\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y)}$ 和平移相容. 证明比陈述容易得多.

引理 3.2.3 设 $n, m \in \mathbb{Z}$ 而 $f \in \mathrm{Hom}^n(X,Y)$. 将 f 等同于 $\mathrm{Hom}^{n-m}(X, Y[m])$ 的元素 $\underline{f} = (f^k)_k$, 或 $\mathrm{Hom}^{n-m}(X[-m], Y)$ 的元素 $\overline{f} = (f^{k-m})_k$, 则

$$d^{n-m}_{\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y[m])}\underline{f} \xlongequal{\text{等同于}} (-1)^m d^n_{\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y)} f,$$

$$d^{n-m}_{\mathrm{Hom}^\bullet(X[-m],Y)}\overline{f} \xlongequal{\text{等同于}} d^n_{\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y)} f.$$

这导致 $\mathrm{Hom}^\bullet(X, Y[m]) = \mathrm{Hom}^\bullet(X,Y)[m] \simeq \mathrm{Hom}^\bullet(X[-m], Y)$.

证明 以第一式为例,

$$\left(d^{n-m}_{\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y[m])}\underline{f}\right)^k = d^{k+n-m}_{Y[m]}\underline{f}^k - (-1)^{n-m}\underline{f}^{k+1} d^k_X : X^k \to Y^{k+n+1},$$

这也等于 $(-1)^m\left(d_Y^{k+n} f^k - (-1)^n f^{k+1} d_X^k\right)$. 关于 $\overline{f}$ 的论证类似[3]. □

定义于 (3.2.1) 的乘法运算还满足 Leibniz 律.

引理 3.2.4 设 X, Y, Z 为复形, $(g,f) \in \mathrm{Hom}^n(Y,Z) \times \mathrm{Hom}^m(X,Y)$. 相对于 (3.2.1) 之乘法, 以下等式在 $\mathrm{Hom}^{n+m+1}(X,Z)$ 中成立

$$d^{n+m}(gf) = (d^n g)f + (-1)^n g(d^m f).$$

证明 直接计算, 敬请读者练习. □

引理 3.2.5 设 $n \in \mathbb{Z}$ 而 $f \in \mathrm{Hom}^n(X,Y)$, 则 $d^n f = 0$ 等价于 $f \in \mathrm{Hom}(X, Y[n])$.

证明 引理 3.2.3 将问题化约到 $n=0$ 情形. 易见 $d^0 f = 0 \iff d_Y f = f d_X$. □

[3] 虽然 $\overline{f}$ 的情形缺少符号 $(-1)^m$, 依然有 Hom 复形的同构, 详见定义 3.1.6 的注记.

定义 3.2.6 设 $n\in\mathbb{Z}$. 将 $\mathrm{Hom}(X,Y[n])$ 视同 $\mathrm{Hom}^n(X,Y)$ 的子集.

- ◇ 若 $f,g\in\mathrm{Hom}(X,Y[n])$ 而 $g-f=d^{n-1}h$, 则称 h 是从 f 到 g 的**同伦**.
- ◇ 对于 f,g 如上, 若存在从 f 到 g 的同伦 g, 则称 f 和 g 同伦. 与零态射同伦的 f 称为是**零伦**的.

作为 $n=0$ 时的特例, $f\in\mathrm{Hom}(X,Y)$ 零伦当且仅当存在一族态射 $h^m: X^m\to Y^{m-1}$ 使得

$$\forall m\in\mathbb{Z},\quad f^m=d_Y^{m-1}h^m+h^{m+1}d_X^m.$$

同伦是等价关系. 引理 3.2.5 在 Ab (或 $\Bbbk$-Mod) 中给出关键等式

$$\mathrm{H}^n\left(\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y),d^\bullet\right)=\mathrm{Hom}\left(X,Y[n]\right)/\{\text{零伦态射}\}.$$

下一结果说明零伦态射不但对加法封闭, 还构成理想.

引理 3.2.7 设 $X\xrightarrow{f}Y[m]$ 和 $Y\xrightarrow{g}Z[n]$ 为复形之间的态射. 若 f 或 g 零伦, 则 $g[m]\circ f: X\to Z[n+m]$ 零伦.

证明 以下省略 d 的上标. 设 $f=dh$, 其中 $h\in\mathrm{Hom}^{-1}(X,Y[m])$. 将合成放在 $\mathrm{Hom}^\bullet$ 中理解, 不妨将 $g[m]\circ f$ 写成 gf. 引理 3.2.4 蕴涵 $d(gh)=(dg)h+(-1)^n g(dh)=(-1)^n gf$, 故 gf 零伦. 至于 $g=dh$ 情形, 论证无异. □

省略符号 $d_{\mathrm{Hom}^\bullet}$, 引理 3.2.4 和 3.2.7 说明 $\mathrm{Hom}^\bullet$ 上的乘法 (3.2.1) 诱导

$$\mathrm{H}^n\left(\mathrm{Hom}^\bullet(Y,Z)\right)\times\mathrm{H}^m\left(\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y)\right)\to\mathrm{H}^{n+m}\left(\mathrm{Hom}^\bullet(X,Z)\right),\tag{3.2.3}$$

二元运算 (3.2.3) 从 (3.2.1) 继承结合律和对加法的分配律.

定义 3.2.8 从 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 定义范畴 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, 使得

$$\begin{gathered}\mathrm{Ob}\left(\mathsf{K}(\mathcal{A})\right):=\mathrm{Ob}\left(\mathsf{C}(\mathcal{A})\right),\\ \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}\left(X,Y\right):=\mathrm{H}^0\left(\mathrm{Hom}^\bullet\left(X,Y\right),d^\bullet_{\mathrm{Hom}}\right),\end{gathered}$$

态射的合成由 (3.2.3) 确定.

观察到 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 是加性范畴: 态射集的加法运算显然, 零对象来自 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 的零对象, 而积 (或余积) 的存在性来自以下更一般的性质: 存在自然同构

$$\begin{gathered}\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}\left(X,\prod_{i\in I}Y_i\right)\simeq\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(X,Y_i)\\ \text{或}\quad\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}\left(\coprod_{i\in I}X_i,Y\right)\simeq\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(X_i,Y),\end{gathered}$$

其中 I 是任意集, 前提是 $\prod_{i\in I} Y_i$ (或 $\coprod_i X_i$) 存在于 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 层次. 由于在 $\mathsf{C}(\mathsf{Ab})$ 中取直积和取 H^0 可交换, 一切归结为 Hom 复形的显然同构

$$\mathrm{Hom}^\bullet\left(X, \prod_i Y_i\right) \simeq \prod_i \mathrm{Hom}^\bullet(X, Y_i)$$
$$\text{或}\quad \mathrm{Hom}^\bullet\left(\coprod_i X_i, Y\right) \simeq \prod_i \mathrm{Hom}^\bullet(X_i, Y).$$

平移函子 $[n]$ 诱导加性范畴 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 的自同构, 仍记为 $[n]$. 加性函子 $\mathsf{C}(\mathcal{A}) \to \mathsf{K}(\mathcal{A})$ 在对象集上定为恒等映射, 在态射集上定为商映射. 下述泛性质是明白的.

命题 3.2.9 *若 $\mathcal{B}$ 为 Ab-范畴, 而加性函子 $F: \mathsf{C}(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}$ 映零伦态射映为零态射, 则 F 唯一地透过 $\mathsf{C}(\mathcal{A}) \to \mathsf{K}(\mathcal{A})$ 分解.*

下一章的习题将说明 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 通常不是 Abel 范畴.

注记 3.2.10 对于链复形 (注记 2.2.6) 也有相应的 Hom 链复形 $\mathrm{Hom}_\bullet$:

$$\mathrm{Hom}_n(X, Y) := \prod_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}\left(X_k, Y_{k+n}\right),$$
$$d_n f = d_Y f - (-1)^n f d_X, \quad f \in \mathrm{Hom}_n(X, Y).$$

事实上, 按注记 2.2.6 介绍的手法取 $X^n = X_{-n}$, $d^n = d_{-n}$ 等等, 则 $(\mathrm{Hom}_n(X,Y), d_n)_n$ 正是对应到 $(\mathrm{Hom}^n(X,Y), d^n)_n$ 的链复形:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_n\left(X, Y\right) &= \prod_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}\left(X_k, Y_{n+k}\right) \xlongequal{h=-k} \prod_{h\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}\left(X^h, Y^{h-n}\right) \\ &= \mathrm{Hom}^{-n}\left(X, Y\right),\end{aligned}$$

而 d_n 和 d^{-n} 的关联类此. 对于链复形也能定义 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 的相应版本.

给定加性范畴之间的加性函子 $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, 则对于任意 $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}(\mathcal{A}))$, 逐项取 F 给出 $\mathsf{C}(\mathsf{Ab})$ 的态射

$$\begin{gathered}\mathrm{Hom}^\bullet\left(X, Y\right) \to \mathrm{Hom}^\bullet\left(\mathsf{C}F(X), \mathsf{C}F(Y)\right) \\ (f^n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto (F(f^n))_{n\in\mathbb{Z}},\end{gathered}$$

两边同取 H^0, 得到 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{B})}(\mathsf{C}F(X), \mathsf{C}F(Y))$. 如是得到函子 $\mathsf{K}F: \mathsf{K}(\mathcal{A}) \to \mathsf{K}(\mathcal{B})$ 使得下图交换

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C}(\mathcal{A}) \arrow[r, "\mathsf{C}F"] \arrow[d] & \mathsf{C}(\mathcal{B}) \arrow[d] \\ \mathsf{K}(\mathcal{A}) \arrow[r, "\mathsf{K}F"'] & \mathsf{K}(\mathcal{B}), \end{tikzcd} \tag{3.2.4}$$

参见命题 3.1.8. 这些构造和伴随对是兼容的.

命题 3.2.11 考虑伴随对 (F, G, φ), 其中 $F : \mathcal{A} \rightleftarrows \mathcal{B} : G$ 是加性范畴之间的加性函子, 则

$$\mathsf{K}F : \mathsf{K}(\mathcal{A}) \rightleftarrows \mathsf{K}(\mathcal{B}) : \mathsf{K}G$$

也自然地成为伴随对.

证明 伴随对的资料 φ 是一族双射 $\varphi_{A,B} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(FA, B) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, GB)$, 对 A 和 B 具函子性. 它们依命题 1.4.3 是线性的, 由此诱导复形的典范同构

$$\mathrm{Hom}^\bullet(\mathsf{C}F(X), Y) \simeq \mathrm{Hom}^\bullet(X, \mathsf{C}G(Y)),$$

鉴于 (3.2.4), 两边同取 H^0 便使 $\mathsf{K}F$ 成为 $\mathsf{K}G$ 的左伴随. □

3.3 映射锥

本节仍取定加性范畴 $\mathcal{A}$ 和相应的复形范畴 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$.

定义 3.3.1 给定 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的态射 $f : X \to Y$, 其**映射锥** $\mathrm{Cone}(f)$ 定为以下复形

$$\mathrm{Cone}(f)^n := X^{n+1} \oplus Y^n,$$

$$d^n_{\mathrm{Cone}(f)} := \text{矩阵表法} \begin{array}{c c} & \begin{matrix} X^{n+1} & Y^n \end{matrix} \\ \begin{matrix} X^{n+2} \\ Y^{n+1} \end{matrix} & \begin{pmatrix} -d^{n+1}_X & 0 \\ f^{n+1} & d^n_Y \end{pmatrix} \end{array}$$

$$: X^{n+1} \oplus Y^n \to X^{n+2} \oplus Y^{n+1},$$

其中 $n \in \mathbb{Z}$. 由于 $d^n_{X[1]} = -d^{n+1}_X$, 另有简练记法

$$\mathrm{Cone}(f) := \left(X[1] \oplus Y, \begin{pmatrix} d_{X[1]} & 0 \\ f[1] & d_Y \end{pmatrix} \right).$$

易证 $\mathrm{Cone}(f)$ 仍是复形, 这是以下矩阵计算的结论:

$$\begin{pmatrix} -d^{n+1}_X & 0 \\ f^{n+1} & d^n_Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d^n_X & 0 \\ f^n & d^{n-1}_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^{n+1}_X d^n_X & 0 \\ -f^{n+1} d^n_X + d^n_Y f^n & d^n_Y d^{n-1}_Y \end{pmatrix}.$$

例 3.3.2 设 $f : X \to Y$ 是 $\mathcal{A}$ 中的态射. 将 X, Y 视同 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 的对象 (集中于 0 次项), 则 $\mathrm{Cone}(f)$ 无非是复形 $[X \xrightarrow{f} Y]$ (次数为 $-1, 0$).

以下两则函子性按定义是自明的.

命题 3.3.3 给定 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的交换图表

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[d, "f'"] \\ Y \arrow[r, "\psi"'] & Y' \end{tikzcd}$$

则 $\begin{pmatrix} \varphi[1] & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix}$ 给出态射 $\mathrm{Cone}(f) \to \mathrm{Cone}(f')$.

命题 3.3.4 设 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ 为加性函子, $f : X \to Y$ 为 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的态射. 相应的函子 $\mathsf{C}F : \mathsf{C}(\mathcal{A}) \to \mathsf{C}(\mathcal{A}')$ 在 $\mathsf{C}(\mathcal{A}')$ 中满足典范同构

$$(\mathsf{C}F)(\mathrm{Cone}(f)) \simeq \mathrm{Cone}(\mathsf{C}F(f)).$$

映射锥可以置入以下的 “三角”, 这是今后一切理论的基础.

定义 3.3.5 考虑 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的态射 $f : X \to Y$. 对之可在 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中构造典范态射

$$Y \xrightarrow{\alpha(f)} \mathrm{Cone}(f) \xrightarrow{\beta(f)} X[1],$$

具体以矩阵表达如下:

$$\alpha(f)^n := \text{嵌入} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{id}_{Y^n} \end{pmatrix} : Y^n \to X[1]^n \oplus Y^n,$$
$$\beta(f)^n := \text{投影} \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{X[1]^n} & 0 \end{pmatrix} : X[1]^n \oplus Y^n \to X[1]^n.$$

易见它们的确给出 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的态射.

以下收集关于映射锥的几条同伦性质. 首先我们说明映射锥可以设想为态射的 “同伦余核” 或 “同伦核”. 这是同伦论的基本思想在复形层次的体现.

命题 3.3.6 选定 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的态射 $f : X \to Y$. 存在典范双射

$$\mathrm{Hom}\,(\mathrm{Cone}(f), T) \xleftrightarrow{1:1} \{(u, h) : u \in \mathrm{Hom}(Y, T),\ h : \text{从 } uf \text{ 到 } 0 \text{ 的同伦}\},$$

$$\mathrm{Hom}\,(T, \mathrm{Cone}(f)[-1]) \xleftrightarrow{1:1} \{(v, k) : v \in \mathrm{Hom}(T, X),\ k : \text{从 } fv \text{ 到 } 0 \text{ 的同伦}\},$$

其中 T 为 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 的任意对象, $\mathrm{Hom} := \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}$. 更具体地说,
- ◇ $\tilde{u} : \mathrm{Cone}(f) \to T$ 的像 (u, h) 满足 $u = \tilde{u} \circ \alpha(f)$,
- ◇ $\tilde{v} : T \to \mathrm{Cone}(f)[-1]$ 的像 (v, k) 满足 $v = \beta(f)[-1] \circ \tilde{v}$.

证明 首先处理 $\mathrm{Hom}\,(\mathrm{Cone}(f), T)$ 的情形. 态射 $\tilde{u} : \mathrm{Cone}(f) \to T$ 相当于一族 $\mathcal{A}$ 中的态射 $h^n : X^{n+1} \to T^n$ 和 $u^n : Y^n \to T^n$, 其中 $n \in \mathbb{Z}$, 所需条件写成矩阵等式

$$\begin{pmatrix} h^{n+1} & u^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ f^{n+1} & d_Y^n \end{pmatrix} = d_T^n \begin{pmatrix} h^n & u^n \end{pmatrix}.$$

具体展开, 可见它相当于说 $u=(u^n)_n: Y\to T$ 是 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的态射, 而 $h:=(h^{n-1})_n$ 满足 $d^{-1}_{\mathrm{Hom}^\bullet(X,T)}h=uf$. 此即所求的双射; 根据 $\alpha(f)$ 的定义, $u=\tilde{u}\circ\alpha(f)$ 是自明的.

其次, 考虑态射 $\tilde{v}: T\to\mathrm{Cone}(f)[-1]$. 这相当于 $\mathcal{A}$ 的态射族 $v^n: T^n\to X^n$ 和 $\underline{k}^n: T^n\to Y^{n-1}$, 所需条件写作

$$\begin{pmatrix} d_X^n & 0 \\ -f^n & -d_Y^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^n \\ \underline{k}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^{n+1} \\ \underline{k}^{n+1} \end{pmatrix} d_T^n \quad (n\in\mathbb{Z}).$$

它相当于说 $v=(v^n)_n: T\to X$ 是 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的态射, 而 $k:=(-\underline{k}^n)_n$ 满足 $d^{-1}_{\mathrm{Hom}^\bullet(T,Y)}k=fv$. 根据 $\beta(f)$ 的定义, $v=\beta(f)[-1]\circ\tilde{v}$ 亦属显然. □

注记 3.3.7 (同伦余核, 同伦核) 由命题 3.3.6 推得: 态射 $u: Y\to T$ (或 $v: T\to X$) 满足 uf (或 fv) 零伦当且仅当它通过 $\alpha(f): Y\to\mathrm{Cone}(f)$ (或 $\beta(f)[-1]:\mathrm{Cone}(f)[-1]\to X$) 分解. 这自然让人联想到余核 (或核) 的泛性质, 差别在于:

- ◇ 此处以 uf (或 fv) 零伦来替代精确等式 $=0$;
- ◇ 命题给出的分解 $\tilde{u}$ (或 $\tilde{v}$) 不仅坐实了 uf (或 fv) 零伦这一事实, 还包含了它如何同伦于 0, 这是更高一阶的资料.

这些性质无法简单地在 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 或 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 中按照初等范畴论的概念来处理; 实际上 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 中鲜少有核或余核. 基于此, $Y\to\mathrm{Cone}(f)$ 又称 f 的**同伦余核**, 而 $\beta(f)[-1]:\mathrm{Cone}(f)[-1]\to X$ 又称 f 的**同伦核**. 耐人寻味的是映射锥 $\mathrm{Cone}(f)$ 及其平移在此意义下兼具 "余核" 以及 "核" 两种角色.

称 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的态射 f 典范地同伦于 g, 如果存在典范的 h 使得 $g-f=d^{-1}h$; 若 f 典范地同伦于 0, 则称它典范地零伦.

命题 3.3.8 选定加性范畴 $\mathcal{A}$.

(i) 若 $f: X\to Y$ 是 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的同构, 则 $\mathrm{id}_{\mathrm{Cone}(f)}$ 典范地零伦.

(ii) 对于 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的任意态射 $f: X\to Y$, 定义 3.3.5 的态射满足于

$$\beta(f)\circ\alpha(f)=0,$$

而 $\alpha(f)\circ f$ 和 $f[1]\circ\beta(f)$ 皆典范地零伦.

证明 首先考虑 (i). 基于映射锥的函子性 (命题 3.3.3), 不妨设 $f=\mathrm{id}_X$. 定义

$$s^n:=\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_{X^n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}: X^{n+1}\oplus X^n\to X^n\oplus X^{n-1},\quad n\in\mathbb{Z}.$$

直接计算给出

$$d^{n-1}_{\mathrm{Cone}(\mathrm{id}_X)} s^n + s^{n+1} d^n_{\mathrm{Cone}(\mathrm{id}_X)} = \begin{pmatrix} -d^n_X & 0 \\ \mathrm{id}_{X^n} & d^{n-1}_X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_{X^n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_{X^{n+1}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d^{n+1}_X & 0 \\ \mathrm{id}_{X^{n+1}} & d^n_X \end{pmatrix} = \mathrm{id}_{X^{n+1}\oplus X^n},$$

故 $s = (s^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 使 $\mathrm{id}_{\mathrm{Cone}(\mathrm{id}_X)}$ 零伦.

接着考虑 (ii). 易见 $\beta(f)\circ\alpha(f) = 0$. 剩下的同伦来自命题 3.3.6: 取 $T = \mathrm{Cone}(f)$, 则 $\tilde{u} := \mathrm{id}_{\mathrm{Cone}(f)} \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Cone}(f), T)$ 使 $\alpha(f)\circ f$ 零伦; 取 $T = \mathrm{Cone}(f)[-1]$, 则 $\tilde{v} := \mathrm{id}_{\mathrm{Cone}(f)[-1]} \in \mathrm{Hom}(T, \mathrm{Cone}(f)[-1])$ 使 $f\circ\beta(f)[-1]$ 零伦, 也使 $f[1]\circ\beta(f)$ 零伦.□

定义 3.3.5 自 f 引出两个新态射 $\alpha(f)$ 和 $\beta(f)$. 精确到同伦, 它们的映射锥并不产生新对象; 且先从 $\mathrm{Cone}(\alpha(f))$ 入手来说明这点. 首先观察到

$$\mathrm{Cone}(\alpha(f))^n = Y^{n+1} \oplus \mathrm{Cone}(f)^n = Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Y^n.$$

按矩阵写法,

$$\alpha(\alpha(f)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{id}_{X[1]} & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_Y \end{pmatrix} : \mathrm{Cone}(f) \to \mathrm{Cone}(\alpha(f)),$$

$$\beta(\alpha(f)) = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{Y[1]} & 0 & 0 \end{pmatrix} : \mathrm{Cone}(\alpha(f)) \to Y[1].$$

引理 3.3.9 对于 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的态射 $f : X \to Y$, 用矩阵写法可定义一对态射

$$\begin{pmatrix} -f[1] \\ \mathrm{id}_{X[1]} \\ 0 \end{pmatrix} : \quad X[1] \underset{\psi}{\overset{\phi}{\rightleftarrows}} \mathrm{Cone}(\alpha(f)) \quad : \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_{X[1]} & 0 \end{pmatrix}$$

使得 $\psi\circ\phi = \mathrm{id}_{X[1]}$, 下图在 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 中交换

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Cone}(f) \arrow[r, "\beta(f)"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathrm{Cone}(f)}"'] & X[1] \arrow[r, "-f[1]"] \arrow[d, "\phi"] & Y[1] \arrow[d, "\mathrm{id}_{Y[1]}"] \\ \mathrm{Cone}(f) \arrow[r, "\alpha(\alpha(f))"'] & \mathrm{Cone}(\alpha(f)) \arrow[r, "\beta(\alpha(f))"'] & Y[1] \end{tikzcd}$$

而且 ϕ, ψ 在 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 中互逆.

证明 根据之前对 $\mathrm{Cone}(\alpha(f))$ 的描述, $d^n_{\mathrm{Cone}(\alpha(f))}$ 按矩阵写法表作

$$\begin{pmatrix} -d^{n+1}_Y & 0 & 0 \\ 0 & -d^{n+1}_X & 0 \\ \mathrm{id}_{Y^{n+1}} & f^{n+1} & d^n_Y \end{pmatrix} : Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Y^n \to Y^{n+2} \oplus X^{n+2} \oplus Y^{n+1}.$$

问题化为在 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中验证以下断言:

◇ $\phi := (\phi^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 和 $\psi := (\psi^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 都是复形之间的态射;

◇ $\psi\circ\phi = \mathrm{id}_{X[1]}$;

◇ $\psi\circ\alpha(\alpha(f)) = \beta(f)$;

◇ $\beta(\alpha(f))\circ\phi = -f[1]$;

◇ 存在 $s = (s^n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathrm{Hom}^{-1}(\mathrm{Cone}(\alpha(f)), \mathrm{Cone}(\alpha(f)))$ 使得 $\mathrm{id}_{\mathrm{Cone}(\alpha(f))} - \phi\circ\psi = d^{-1}_{\mathrm{Hom}^\bullet}(s)$.

前四条都是初等的. 以矩阵写法取

$$s^n := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{id}_{Y^n} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \mathrm{Cone}(\alpha(f))^n \to \mathrm{Cone}(\alpha(f))^{n-1}$$

则可验证最后一条断言. □

至于 $\beta(f)$ 的情形, 我们稍事修改, 考虑 $-\beta(f)[-1] : \mathrm{Cone}(f)[-1] \to X$ 的映射锥.

定义 3.3.10 对于 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的态射 $f : X \to Y$, 其**映射柱**定为

$$\mathrm{Cyl}(f) := \mathrm{Cone}\left(\mathrm{Cone}(f)[-1] \xrightarrow{-\beta(f)[-1]} X\right).$$

它带有典范态射 $X \to \mathrm{Cyl}(f) \to \mathrm{Cone}(f)$.

映射柱有和映射锥相同形式的函子性 (命题 3.3.3). 鉴于注记 3.3.7, $\mathrm{Cyl}(f)$ 可以和加性范畴中的余像相比拟 (命题 1.3.12), 因此也可以视作 f 的同伦余像.

具体地说, $\mathrm{Cyl}(f)^n = \mathrm{Cone}(f)^n \oplus X^n = X^{n+1}\oplus Y^n \oplus X^n$, 态射 $X \to \mathrm{Cyl}(f)$ (或 $\mathrm{Cyl}(f) \to \mathrm{Cone}(f)$) 是向第三个直和项的嵌入 (或向前两个直和项的投影), 而

$$d^n_{\mathrm{Cyl}(f)} = \begin{pmatrix} d^n_{\mathrm{Cone}(f)} & 0 \\ -\beta(f)^n & d^n_X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d^{n+1}_X & 0 & 0 \\ f^{n+1} & d^n_Y & 0 \\ -\mathrm{id}^{n+1}_X & 0 & d^n_X \end{pmatrix}.$$

引理 3.3.11 对于 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的态射 $f : X \to Y$, 可定义一对态射

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{id}_Y \\ 0 \end{pmatrix} : Y \underset{\psi}{\overset{\phi}{\rightleftarrows}} \mathrm{Cyl}(f) : \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_Y & f \end{pmatrix}$$

使得 $\psi\circ\phi=\mathrm{id}_Y$, 下图在 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 中交换

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"'] & Y \arrow[r, "\alpha(f)"] \arrow[d, "\phi"] & \mathrm{Cone}(f) \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathrm{Cone}(f)}"] \\ X \arrow[r] & \mathrm{Cyl}(f) \arrow[r] & \mathrm{Cone}(f) \end{tikzcd}$$

而且 ϕ,ψ 在 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 中互逆. 进一步, f 分解为 $X\to\mathrm{Cyl}(f)\xrightarrow{\psi}Y$ 的合成.

证明 一望可知 $\psi\circ\phi=\mathrm{id}_Y$. 接着证 ϕ 和 ψ 在 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 中互逆. 一如引理 3.3.9, 取

$$\begin{aligned} s^n &:= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{id}_{X^n} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : X^{n+1}\oplus Y^n\oplus X^n\to X^n\oplus Y^{n-1}\oplus Y^{n-1}, \\ s &:= (s^n)_{n\in\mathbb{Z}}, \end{aligned}$$

并且验证 $\mathrm{id}_{\mathrm{Cyl}(f)}-\phi\circ\psi=d^{-1}_{\mathrm{Hom}^\bullet}(s)$ 即可.

图表右侧方块在 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中已经交换. 至于左侧方块, 简单观察到 $X\to\mathrm{Cyl}(f)\xrightarrow{\psi}Y$ 合成为 f 便是. □

引理 3.3.9 连同引理 3.3.11 表明: 精确到 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 中的同构, 任何态射 $f:X\to Y$ 皆能被一个简单得多的投影 $\mathrm{Cone}(\alpha(f))[-1]\to Y$ (或嵌入 $X\to\mathrm{Cyl}(f)$) 来替换, 而且此构造对 f 具函子性. 这在同调代数或同伦论中是一个重要思想.

映射柱在 $f=\mathrm{id}_X$ 的特例另有妙用, 它可以用来诠释同伦. 对于熟悉同调论的读者, 一切自有拓扑诠释, 但此处只论其代数版本.

命题 3.3.12 设 X 为 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 的对象, 命 $\mathrm{Cyl}_X:=\mathrm{Cyl}(\mathrm{id}_X)$. 注意到 $\mathrm{Cyl}_X^n=X^{n+1}\oplus X^n\oplus X^n$.

(i) 在 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中有态射 $X \overset{i_0}{\underset{i_1}{\rightrightarrows}} \mathrm{Cyl}_X \xrightarrow{j} X$, 以矩阵记法对每个 $n\in\mathbb{Z}$ 定义为

$$i_0^n := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{id}_{X^n} \end{pmatrix}, \quad i_1^n := \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{id}_{X^n} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j^n := \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_{X^n} & \mathrm{id}_{X^n} \end{pmatrix},$$

它们满足 $ji_0=\mathrm{id}_X=ji_1$, 而且 j 在 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 中的像是同构.

(ii) 对 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 的任意对象 Y, 我们有双射

$$\left\{ (f,g,h) \;\middle|\; \begin{array}{l} f,g \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X,Y) \\ h \in \mathrm{Hom}^{-1}(X,Y) \\ g-f = d^{-1}_{\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y)} h \end{array} \right\} \xrightarrow{1:1} \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}\left(\mathrm{Cyl}_X, Y\right)$$

$$(f,g,h) \longmapsto \tilde{h} = (\tilde{h}^n)_{n\in\mathbb{Z}},\; \tilde{h}^n := \begin{pmatrix} h^n & g^n & f^n \end{pmatrix}.$$

特别地, $f = \tilde{h} i_0$ 而 $g = \tilde{h} i_1$.

证明 对于 (i), 注意到 i_0 无非是定义 3.3.10 中的典范态射 $X \to \mathrm{Cyl}(\mathrm{id}_X)$, 另一方面 i_1 则是引理 3.3.11 中的态射 $\phi : X \to \mathrm{Cyl}(\mathrm{id}_X)$; 引理 3.3.11 的交换图表蕴涵两者在 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 中给出同一个同构.

至于 j, 容易验证 $j^{n+1} d^n_{\mathrm{Cyl}_X} = \begin{pmatrix} 0 & d^n_X & d^n_X \end{pmatrix} = d^n_X j^n$; 可参照 (ii) 给出的矩阵. 因此 j 确实是态射, 而 $j i_0 = \mathrm{id}_X = j i_1$ 是自明的. 既然 i_0 和 i_1 在 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 中是同构, j 亦然.

对于 (ii), 将 $\mathrm{Hom}^0(\mathrm{Cyl}_X, Y)$ 的任意元素 $\tilde{h}$ 表作 $((h^n, g^n, f^n))_{n\in\mathbb{Z}}$, 其中

$$h^n : X^{n+1} \to Y^n, \quad f^n : X^n \to Y^n, \quad g^n : X^n \to Y^n$$

都是 $\mathcal{A}$ 的态射. 省略上标并以矩阵记法来计算

$$\tilde{h}\, d_{\mathrm{Cyl}_X} = \begin{pmatrix} h & g & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_X & 0 & 0 \\ \mathrm{id}_X & d_X & 0 \\ -\mathrm{id}_X & 0 & d_X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -hd_X + g - f & gd_X & fd_X \end{pmatrix},$$

$$d_Y\, \tilde{h} = \begin{pmatrix} d_Y h & d_Y g & d_Y f \end{pmatrix}.$$

因此 $\tilde{h}$ 是复形的态射当且仅当 $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X,Y)$ 而 $g - f = hd_X + d_Y h$. □

注记 3.3.13 映射锥和映射柱当然有同调版本 (见注记 2.2.6): 给定链复形的态射 $f : X \to Y$, 取

$$\begin{aligned} \mathrm{Cone}(f)_n &:= (X[-1] \oplus Y)_n, & \mathrm{Cyl}(f)_n &:= (X[-1] \oplus Y \oplus X)_n, \\ d_{\mathrm{Cone}(f)} &:= \begin{pmatrix} d_{X[-1]} & 0 \\ f & d_Y \end{pmatrix}, & d_{\mathrm{Cyl}(f)} &:= \begin{pmatrix} d_{X[-1]} & 0 & 0 \\ f & d_Y & 0 \\ -\mathrm{id}_{X[-1]} & 0 & d_X \end{pmatrix} \end{aligned}$$

本节所有陈述都能移植到链复形的情形, 特别地, 存在典范态射

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\alpha(f)} \mathrm{Cone}(f) \xrightarrow{\beta(f)} X[-1], \quad X \to \mathrm{Cyl}(f) \to \mathrm{Cone}(f).$$

3.4 相反范畴上的复形

选定加性范畴 $\mathcal{A}$. 本节旨在沟通 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ 上的复形. 由于涉及 $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ 的函子经常出现, 譬如 Hom 函子, 这一工序尽管简单却是必要的, 而其中涉及的一些正负号也需要适度的留意. 初学的读者不妨暂时略过本节, 或者先大致地浏览.

内容分成三个面向: 复形, 同伦, 映射锥. 以后将探讨的导出范畴版本 (命题 4.4.16) 是这些结果的直接应用.

定义–命题 3.4.1 加性范畴的等价 $\sigma : \mathsf{C}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}) \to \mathsf{C}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}}$ 定义如下: 对于 $\mathsf{C}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})$ 的对象 X, 在 $\mathcal{A}$ 中定义

$$(\sigma X)^n := X^{-n}, \quad d^n_{\sigma X} = (-1)^{n+1}\left[d_X^{-n-1,\mathrm{op}} : (\sigma X)^n \to (\sigma X)^{n+1}\right], \quad n \in \mathbb{Z}.$$

对于 $\mathsf{C}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})$ 的态射 $f = (f^n : X^n \to Y^n)_n$, 其像 σf 取作 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 的态射

$$(\sigma f)^n := \left(f^{-n}\right)^{\mathrm{op}} : (\sigma Y)^n \to (\sigma X)^n,$$

亦即 $\mathsf{C}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}}$ 的态射 $\sigma X \to \sigma Y$. 对所有 $m \in \mathbb{Z}$, 存在自然同构

$$s_m : \sigma \circ [m] \xrightarrow{\sim} [-m] \circ \sigma,$$

左式的 $[-m]$ 视同从 $\mathsf{C}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}}$ 到自身的函子 (严格写法应是 $[-m]^{\mathrm{op}}$).

证明 将 s_m 逐步化到 $m = 1$ 情形. 定义 $s_1 = (s_{1,X})_X$ 如下. 对每个 n, 取

$$s^n_{1,X} : \sigma(X[1])^n = X^{1-n} \xrightarrow[\sim]{(-1)^{n-1}} X^{1-n} = (\sigma X)[-1]^n. \tag{3.4.1}$$

一切归结为 $s^{n+1}_{1,X} d^n_{\sigma(X[1])} = -d_{X[1]}^{-n-1,\mathrm{op}} = d_X^{-n,\mathrm{op}} = (-1)^n d^{n-1}_{\sigma X} = d^n_{(\sigma X)[-1]} s^n_{1,X}$. $\square$

由于 $n(n+1) \equiv 0 \pmod 2$, 函子 σ 操作两次返回自身. 它是范畴之间的同构.

注记 3.4.2 当 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴时, $d^{\bullet}_{\sigma X}$ 带的正负号并不改变定义 2.2.5 介绍的上同调; 因此 $\mathrm{H}^{-n}(\sigma X) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ 对应到 $\mathrm{H}^n(X) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})$.

接着探讨 σ 和同伦的关系.

命题 3.4.3 以上定义的 σ 诱导加性范畴的等价 $\mathsf{K}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{K}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}}$.

证明 选定 $\mathsf{C}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})$ 的对象 X, Y. 对于 $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ 中的 $f = (f^k)_k \in \mathrm{Hom}^{-1}(X, Y)$, 用以下词典在 $\mathcal{A}$ 中定义 $\sigma f \in \mathrm{Hom}^{-1}(\sigma Y, \sigma X)$:

$\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ 的态射	$(-1)^{k+1} f^k$	$d_Y^{k-1} f^k + f^{k+1} d_X^k$	$(d^{-1} f)^k$
$\mathcal{A}$ 的态射	$(\sigma f)^{-k+1}$	$(\sigma f)^{-k+1} d_{\sigma Y}^{-k} + d_{\sigma X}^{-k-1} (\sigma f)^{-k}$	$d^{-1}(\sigma f)^{-k}$

这便足以说明 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(\sigma Y, \sigma X)$. $\square$

最后, 我们通过之前构造的 σ 和同构族 $(s_m)_m$ 来比较 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 和 $\mathsf{C}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})$ 的映射锥. 这部分的细节比较琐碎.

命题 3.4.4 对于 $\mathsf{C}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})$ 中的任意态射 $f: X \to Y$, 在 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中有交换图表

$$\begin{tikzcd}
\sigma\left(X[1]\right) \arrow[r, "\sigma(\beta(f))"] \arrow[d, "s_{1,X}"'] & \sigma\left(\mathrm{Cone}(f)\right) \arrow[r, "\sigma(\alpha(f))"] \arrow[d, "\theta"] & \sigma Y \arrow[r, "\sigma(f)"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \sigma X \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
(\sigma X)[-1] \arrow[r, "\alpha(\sigma(f))[-1]"'] & \mathrm{Cone}(\sigma(f))[-1] \arrow[r, "\beta(\sigma(f))[-1]"'] & \sigma Y \arrow[r, "\sigma(f)"'] & \sigma X
\end{tikzcd}$$

其中 θ 是典范同构, 而 $s_{1,X}$ 是定义–命题 3.4.1 给出的同构.

证明 倘若将 $\mathrm{Cone}(f)$ 换作 $X[1] \oplus Y$, 断言则是容易的, 所求同构取 $(s_1, \mathrm{id}_{\sigma Y})$ 即可. 这里的麻烦在于 $d_{\mathrm{Cone}(f)}$ 的矩阵有非对角项 $f[1]$. 尽管如此, 我们还是循相同方法, 以 (3.4.1) 来对每个 $n \in \mathbb{Z}$ 定义同构

$$\begin{aligned}
\theta^n : \sigma\left(\mathrm{Cone}(f)\right)^n &= \sigma\left(X[1]\right)^n \oplus (\sigma Y)^n \\
&\xrightarrow[\sim]{(s_{1,X},\mathrm{id})^n = ((-1)^{n-1}\mathrm{id},\mathrm{id})} (\sigma X)[-1]^n \oplus (\sigma Y)^n \xlongequal{\text{换位}} \left((\sigma Y) \oplus (\sigma X)[-1]\right)^n,
\end{aligned}$$

而 $\mathcal{A}$ 的态射 $d^n_{\sigma(\mathrm{Cone}(f))}$ 按此对应到

$$\begin{pmatrix} d^n_{\sigma Y} & 0 \\ * & d^n_{(\sigma X)[-1]} \end{pmatrix} : \left((\sigma Y) \oplus (\sigma X)[-1]\right)^n \to \left((\sigma Y) \oplus (\sigma X)[-1]\right)^{n+1}.$$

如证明开头所述, 对角项不成问题, 重点在于确定矩阵的左下角元素. 基于定义–命题 3.4.1, 它等于 $(-1)^{n+1}$ 乘以 $\mathcal{A}$ 中的合成态射

$$\begin{tikzcd}
(\sigma Y)^n \arrow[r] \arrow[d, equal] & (\sigma(X[1]))^{n+1} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, equal] & (\sigma X)[-1]^{n+1} \arrow[d, equal] \\
Y^{-n} \arrow[r, "(f^{-n})^{\mathrm{op}}"'] & X^{-n} \arrow[r, "s^{n+1}_{1,X} = (-1)^n"'] & X^{-n}
\end{tikzcd}$$

的产物, 亦即 $-\sigma(f)^n$. 由此可见

$$\theta := (\theta^n)_{n\in\mathbb{Z}} : \sigma(\mathrm{Cone}(f)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cone}(\sigma(f))[-1]$$

是 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的同构. □

无庸赘言, 本节的结果也适用于链复形, 并且可以推广到 $\mathcal{A}$ 是 $\Bbbk$-线性的情形.

3.5 双复形

依然取 $\mathcal{A}$ 为加性范畴.

定义 3.5.1 (双复形) 加性范畴 $\mathcal{A}$ 上的双复形意谓 $\mathcal{A}$ 中的一族对象 $(X^{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2}$, 连同态射 ${}^{\triangleright}d^{p,q}: X^{p,q} \to X^{p+1,q}$ 和 ${}^{\vartriangle}d^{p,q}: X^{p,q} \to X^{p,q+1}$, 满足于

$$ {}^{\triangleright}d^{p+1,q}\,{}^{\triangleright}d^{p,q} = 0, \quad {}^{\vartriangle}d^{p,q+1}\,{}^{\vartriangle}d^{p,q} = 0, \quad {}^{\triangleright}d^{p,q+1}\,{}^{\vartriangle}d^{p,q} = {}^{\vartriangle}d^{p+1,q}\,{}^{\triangleright}d^{p,q}. $$

上述资料照例简记为 $(X^{\bullet,\bullet}, {}^{\triangleright}d, {}^{\vartriangle}d)$, $X^{\bullet,\bullet}$ 或 X.

关于 ${}^{\triangleright}d, {}^{\vartriangle}d$ 的条件可简写为

$$ {}^{\triangleright}d^2 = 0, \quad {}^{\vartriangle}d^2 = 0, \quad {}^{\triangleright}d\,{}^{\vartriangle}d = {}^{\vartriangle}d\,{}^{\triangleright}d. $$

定义 3.5.2 给定加性范畴 $\mathcal{A}$, 从双复形 X 到 Y 的态射意谓一族态射

$$ f = (f^{p,q}: X^{p,q} \to Y^{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2}, $$

使得对所有 p, q 都有

$$ {}^{\triangleright}d_Y^{p,q} f^{p,q} = f^{p+1,q}\,{}^{\triangleright}d_X^{p,q}, \quad {}^{\vartriangle}d_Y^{p,q} f^{p,q} = f^{p,q+1}\,{}^{\vartriangle}d_X^{p,q}. $$

上述关系可以简写为 ${}^{\triangleright}d_Y f = f\,{}^{\triangleright}d_X$ 和 ${}^{\vartriangle}d_Y f = f\,{}^{\vartriangle}d_X$.

一如命题 3.1.5 的情形, 这些定义使 $\mathcal{A}$ 上的所有双复形构成加性范畴 $\mathsf{C}^2(\mathcal{A})$.

双复形 X 形象地表作

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r] & X^{p,q+1} \arrow[u] \arrow[r] & X^{p+1,q+1} \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & X^{p,q} \arrow[u, "{}^{\vartriangle}d^{p,q}"] \arrow[r, "{}^{\triangleright}d^{p,q}"'] & X^{p+1,q} \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

每行 $(X^{\bullet,q}, d^{\bullet,q})$ 和每列 $(X^{p,\bullet}, d^{p,\bullet})$ 都是复形. 因此双复形可以按列或按行收纳.

定义 3.5.3 加性函子 $F_{\mathrm{I}}: \mathsf{C}^2(\mathcal{A}) \to \mathsf{C}(\mathsf{C}(\mathcal{A}))$ 定义如下: 对于双复形 X, 取 $(F_{\mathrm{I}}X)^p = X^{p,\bullet}$ 而 $d^p_{F_{\mathrm{I}}X} = {}^{\triangleright}d^{p,\bullet}: (F_{\mathrm{I}}X)^p \to (F_{\mathrm{I}}X)^{p+1}$. 类似地, 按 $(F_{\mathrm{II}}X)^q = X^{\bullet,q}$ 和 $d^q_{F_{\mathrm{II}}X} = {}^{\vartriangle}d^{\bullet,q}$ 定义加性函子 $\mathsf{C}^2(\mathcal{A}) \to \mathsf{C}(\mathsf{C}(\mathcal{A}))$. 此处 $p, q \in \mathbb{Z}$.

定义 3.5.2 蕴涵 F_{I}, F_{II} 都是加性范畴之间的同构. 示意如下:

$$
\begin{tikzcd}
\vdots & & & & \\
(F_{\mathrm{II}}X)^q \arrow[u, "d^q_{F_{\mathrm{II}}X}"] & := & \cdots \arrow[r] & X^{p,q} \arrow[u, "{}^{\vartriangle}d^{p,q}"] \arrow[r, "{}^{\triangleright}d^{p,q}"'] & \cdots \\
\vdots \arrow[u] & & & {} \arrow[u] & \\
& & & \| & \\
& & \cdots \arrow[r] & (F_{\mathrm{I}}X)^p \arrow[r, "d^p_{F_{\mathrm{I}}X}"] & \cdots
\end{tikzcd} \tag{3.5.1}
$$

定义 3.5.4 (全复形) 设 $\mathcal{A}$ 具有可数余积, 以直和符号 $\bigoplus$ 标记, 而 X 是 $\mathsf{C}^2(\mathcal{A})$ 的对象. 定义 $\mathcal{A}$ 上的复形 $\mathrm{tot}_{\oplus}(X)$ 如下:

- ◇ $\mathrm{tot}_{\oplus}(X)^n := \bigoplus_{p+q=n} X^{p,q}$,
- ◇ $d^n : \mathrm{tot}_{\oplus}(X)^n \to \mathrm{tot}_{\oplus}(X)^{n+1}$ 拉回到 $X^{p,q}$ 等于 ${}^{\triangleright}d^{p,q} + (-1)^p\, {}^{\vartriangle}d^{p,q}$.

省略上标, 按定义写出 $d^2 : X^{p,q} \to X^{p+2,q} \oplus X^{p+1,q+1} \oplus X^{p,q+2}$ 可得

$$\left({}^{\triangleright}d^2,\ (-1)^p\, {}^{\triangleright}d\, {}^{\vartriangle}d + (-1)^{p+1}\, {}^{\vartriangle}d\, {}^{\triangleright}d,\ {}^{\vartriangle}d^2\right) = (0,0,0).$$

在函子 $\mathrm{tot}_{\oplus}$ 的构造中以积 $\prod$ 代余积, 可以类似地得到 $\mathrm{tot}_{\Pi} X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}(\mathcal{A}))$, 前提是所论的积存在. 此处 $d^n : \mathrm{tot}_{\Pi}(X)^n \to \mathrm{tot}_{\Pi}(X)^{n+1}$ 的定义精神和 $\mathrm{tot}_{\oplus}$ 情形类似: 我们要求 d^{n-1} 投影到 $X^{p,q}$ 等于

$$\mathrm{tot}_{\Pi}^{n-1}(X) \xrightarrow{\text{投影}} X^{p-1,q} \oplus X^{p,q-1} \xrightarrow{({}^{\triangleright}d^{p-1,q},\,(-1)^p\,{}^{\vartriangle}d^{p,q-1})} X^{p,q}$$

的合成; 同理可证 $d^2 = 0$. 不致混淆时, $\mathrm{tot}_{\oplus} X$ 和 $\mathrm{tot}_{\Pi} X$ 都被称为 X 的**全复形**. 以下性质应当是自明的.

命题 3.5.5 在相应的条件下, $\mathrm{tot}_{\oplus}$ 和 tot_{Π} 都是从 $\mathsf{C}^2(\mathcal{A})$ 到 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 的加性函子.

在全复形的定义中, 上标 p 和 q 乍看并不对称. 为了消除这个错觉, 以下来定义 $\mathsf{C}^2(\mathcal{A})$ 的加性自同构 swap, 使得 $\mathrm{swap}(X)^{p,q} = X^{q,p}$, 并且互换 ${}^{\triangleright}d$ 和 ${}^{\vartriangle}d$. 即将与之搭配的还有符号 $(-1)^{pq}$, 它和 [25, 定义–定理 7.4.4] 的 Koszul 符号律本质上是同一套机制.

命题 3.5.6 对每个 $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ 和 $\mathsf{C}^2(\mathcal{A})$ 的对象 X, 定义一族自同构

$$r_X^{p,q} := (-1)^{pq}\mathrm{id}_X^{p,q} : X^{p,q} \to \mathrm{swap}(X)^{q,p}.$$

- ◇ 设 $\mathcal{A}$ 有可数余积, 则 $(r_X^{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2}$ 诱导同构 $r_X : \mathrm{tot}_{\oplus}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{tot}_{\oplus}(\mathrm{swap}(X))$.
- ◇ 设 $\mathcal{A}$ 有可数积, 则 $(r_X^{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2}$ 诱导同构 $r_X : \mathrm{tot}_{\Pi}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{tot}_{\Pi}(\mathrm{swap}(X))$.

证明 对所有 $(p,q)\in\mathbb{Z}^2$, 图表

$$\begin{tikzcd}
X^{p,q} \arrow[r, "({}^{\rhd}d,(-1)^{p\,\vartriangle}d)"] \arrow[d, "(-1)^{pq}\mathrm{id}"'] & X^{p+1,q}\oplus X^{p,q+1} \arrow[d, "((-1)^{(p+1)q}\mathrm{id},(-1)^{p(q+1)}\mathrm{id})"] \\
X^{p,q} \arrow[r, "((-1)^{q\,\rhd}d,{}^{\vartriangle}d)"'] & X^{p+1,q}\oplus X^{p,q+1}
\end{tikzcd}$$

交换, 故 r_X 确为复形之间的态射. □

在关于 $\mathrm{tot}_{\oplus} X$ (或 $\mathrm{tot}_{\Pi} X$) 的定义中, 可数余积 (或积) 的存在条件可以适当弱化: 如果对所有 n, 至多仅有有限个 (p,q) 满足 $p+q=n$ 而 $X^{p,q}\neq 0$, 则全复形定义中的余积 (或积) 化为有限直和. 这时可将两种全复形统一记为 $\mathrm{tot}(X)$. 定义 3.10.1 之后将有进一步的讨论.

注记 3.5.7 准此要领, 对任何 $k\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 皆可定义 k 重复形为资料

$$\left(X^{p_1,\ldots,p_k}\in\mathrm{Ob}(\mathcal{A})\right)_{p_1,\ldots,p_k\in\mathbb{Z}}, \quad {}^1d,\ldots,{}^kd,$$

其中 ${}^id^{p_1,\ldots,p_k}: X^{p_1,\ldots,p_k}\to X^{p_1,\ldots,p_i+1,\ldots,p_k}$, 而

$${}^id^2=0, \quad {}^id^jd={}^jd^id \quad (\text{省略上标}).$$

全体 k 重复形构成加性范畴 $\mathsf{C}^k(\mathcal{A})$. 按定义 3.5.3 的方式还可以定义一族加性函子 $F_i:\mathsf{C}^k(\mathcal{A})\to\mathsf{C}(\mathsf{C}^{k-1}(\mathcal{A}))$ 使得每个 F_i 都是范畴等价 ($k\geq 2$ 而 $i=1,\ldots,k$).

在此情形下, 假设 $\mathcal{A}$ 有可数余积或积, 则可依样画葫芦地定义全复形函子

$$\mathrm{tot}_{\oplus} \text{ 或 } \mathrm{tot}_{\Pi}: \mathsf{C}^k(\mathcal{A})\to\mathsf{C}(\mathcal{A}).$$

细节与双复形的情形无异, 毋须赘述.

定义从 $\mathsf{C}^2(\mathcal{A})$ 到自身的同构 $[m]_{\mathrm{I}}:=F_{\mathrm{I}}^{-1}\circ[m]\circ F_{\mathrm{I}}$ 和 $[m]_{\mathrm{II}}:=F_{\mathrm{II}}^{-1}\circ[m]\circ F_{\mathrm{II}}$, 分别对应到双复形的横向和纵向平移. 对所有 n,m 都有 $[m]_{\mathrm{I}}[n]_{\mathrm{II}}=[n]_{\mathrm{II}}[m]_{\mathrm{I}}$.

命题 3.5.8 对所有 $X\in\mathrm{Ob}(\mathsf{C}^2(\mathcal{A}))$ 和 $n\in\mathbb{Z}$, 定义

- $\theta_X^n:\mathrm{tot}_{\oplus}(X[1]_{\mathrm{I}})^n\to\mathrm{tot}_{\oplus}(X)[1]^n$, 使得它拉回 $X[1]_{\mathrm{I}}^{p,q}=X^{p+1,q}$ 上等于标准嵌入 $\iota_{p+1,q}:X^{p+1,q}\hookrightarrow\mathrm{tot}_{\oplus}(X)^{n+1}$;
- $(\theta'_X)^n:\mathrm{tot}_{\oplus}(X[1]_{\mathrm{II}})^n\to\mathrm{tot}_{\oplus}(X)[1]^n$, 使得它拉回 $X[1]_{\mathrm{II}}^{p,q}=X^{p,q+1}$ 上等于 $(-1)^p\iota_{p,q+1}$.

则这给出 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的典范同构

$$\begin{aligned}\theta_X &= (\theta_X^n)_n : \mathrm{tot}_{\oplus}(X[1]_{\mathrm{I}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{tot}_{\oplus}(X)[1],\\ \theta'_X &= ((\theta'_X)^n)_n : \mathrm{tot}_{\oplus}(X[1]_{\mathrm{II}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{tot}_{\oplus}(X)[1],\end{aligned}$$

连同反交换图表 (亦即: 两路合成差一个负号)

$$\begin{tikzcd} \mathrm{tot}_{\oplus}(X[1]_{\mathrm{I}}[1]_{\mathrm{II}}) \arrow[r, "\theta_{X[1]_{\mathrm{II}}}"] \arrow[d, "\theta'_{X[1]_{\mathrm{I}}}"'] & \mathrm{tot}_{\oplus}(X[1]_{\mathrm{II}})[1] \arrow[d, "\theta'_X[1]"] \\ \mathrm{tot}_{\oplus}(X[1]_{\mathrm{I}})[1] \arrow[r, "\theta_X[1]"'] & \mathrm{tot}_{\oplus}(X)[2]. \end{tikzcd}$$

以 tot_{Π} 代 $\mathrm{tot}_{\oplus}$, 仍然有同样的 θ_X, θ'_X 连同反交换图表.

证明 直接按全复形的定义 3.5.4 和平移函子的定义 3.1.6 来验证 θ_X 和 θ'_X 是复形的态射, 细节繁而不难. 反交换图表则归结为如下观察: 图表

$$\begin{tikzcd} X^{p+1,q+1} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "(-1)^p\mathrm{id}"'] & X^{p+1,q+1} \arrow[d, "(-1)^{p+1}\mathrm{id}"] \\ X^{p+1,q+1} \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & X^{p+1,q+1} \end{tikzcd}$$

反交换. □

双复形的主要应用场景之一是关于双函子的研究. 何谓双函子?

约定 3.5.9 形如 $F : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \to \mathcal{B}$ 的函子称为**双函子**. 一旦选定对象 $X_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}_i)$, 便得到单变元函子 $F(X_1, \cdot) : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{B}$ 和 $F(\cdot, X_2) : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{B}$. 由此可以谈论 F 对各个变元的加性, 正合性等等概念.

定义–命题 3.5.10 设 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{B}$ 为加性范畴, 而且双函子 $F : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \to \mathcal{B}$ 对每个变元都是加性的, 此时有相应的函子

$$\begin{aligned}\mathsf{C}^2F : \mathsf{C}(\mathcal{A}_1) \times \mathsf{C}(\mathcal{A}_2) &\longrightarrow \mathsf{C}^2(\mathcal{B})\\ (X, Y) &\longmapsto (F(X, Y))^{p,q} = F(X^p, Y^q),\\ &\qquad {}^{\triangleright}d^{p,q} = F\left(d_X^p, \mathrm{id}\right), \ {}^{\vartriangle}d^{p,q} = F\left(\mathrm{id}, d_Y^q\right).\end{aligned}$$

因此, 在 $\mathcal{B}$ 有可数余积或可数积的前提下, 可分别定义

$$\begin{aligned}\mathsf{C}_{\oplus}F &:= \mathrm{tot}_{\oplus} \circ \mathsf{C}^2F : \mathsf{C}(\mathcal{A}_1) \times \mathsf{C}(\mathcal{A}_2) \to \mathsf{C}(\mathcal{B}),\\ \mathsf{C}_{\Pi}F &:= \mathrm{tot}_{\Pi} \circ \mathsf{C}^2F : \mathsf{C}(\mathcal{A}_1) \times \mathsf{C}(\mathcal{A}_2) \to \mathsf{C}(\mathcal{B}).\end{aligned}$$

如果所论的 $\mathrm{tot}_{\oplus}$ 和 tot_{Π} 仅涉及有限直和, 则 $\mathsf{C}_{\oplus}$ 和 C_{Π} 相等.

证明 双复形的条件 ${}^{\rhd}d^{\vartriangle}d = {}^{\vartriangle}d^{\rhd}d$ 是双函子定义的直接应用, 其余皆属显然. □

双复形范畴中也有同伦. 设 $f, g : X \to Y$ 是 $\mathsf{C}^2(\mathcal{A})$ 中的一对态射, 则从 f 到 g 的同伦是指满足以下条件的两族态射

$$\begin{tikzcd} Y^{p-1,q} & X^{p,q} \arrow[l, "h^{p,q}"'] \arrow[d, "k^{p,q}"] \\ & X^{p,q-1} \end{tikzcd} \qquad (p,q) \in \mathbb{Z}^2,$$

$${}^{\vartriangle}d^{p-1,q}h^{p,q} = h^{p,q+1\,\vartriangle}d^{p,q}, \qquad {}^{\rhd}d^{p,q-1}k^{p,q} = k^{p+1,q\,\rhd}d^{p,q},$$
$$g^{p,q} - f^{p,q} = {}^{\rhd}d^{p-1,q}h^{p,q} + h^{p+1,q\,\rhd}d^{p,q} + {}^{\vartriangle}d^{p,q-1}k^{p,q} + k^{p,q+1\,\vartriangle}d^{p,q}.$$

这是合理的: 从 ${}^{\vartriangle}dh = h^{\vartriangle}d$, ${}^{\rhd}dk = k^{\rhd}d$ 和双复形的定义, 容易检查 ${}^{\rhd}dh + h^{\rhd}d + {}^{\vartriangle}dk + k^{\vartriangle}d$ 总是给出 $\mathsf{C}^2(\mathcal{A})$ 的态射.

双复形的同伦反映在全复形上. 详言之, 一旦有 $(h^{p,q}, k^{p,q})_{p,q\in\mathbb{Z}}$, 便可以定义 $\hat{h} \in \mathrm{Hom}^{-1}(\mathrm{tot}_{\oplus}(X), \mathrm{tot}_{\oplus}(X))$, 使 $\hat{h}$ 拉回到直和项 $X^{p,q}$ 上等于

$$(h^{p,q}, (-1)^p k^{p,q}) : X^{p,q} \to X^{p-1,q} \oplus X^{p,q-1},$$

这将使 $\mathrm{tot}_{\oplus}(g) - \mathrm{tot}_{\oplus}(f) = d^{-1}\hat{h}$; 以相同手法处理 tot_{Π}.

综上, 从双复形的同伦关系可以定义 $\mathsf{K}^2(\mathcal{A})$ 连同函子 $\mathsf{C}^2(\mathcal{A}) \to \mathsf{K}^2(\mathcal{A})$, 而在可数余积 (或积) 存在的前提下, 函子 $\mathrm{tot}_{\oplus}$ (或 tot_{Π}) 下降为 $\mathsf{K}^2(\mathcal{A}) \to \mathsf{K}(\mathcal{A})$.

回到加性范畴之间的双函子 $F : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \to \mathcal{B}$, 要求对每个变元都是加性的. 以下是 (3.2.4) 的双函子版本.

命题 3.5.11 取双函子 F 如上, 则 C^2F 分解为 $\mathsf{K}^2F : \mathsf{K}(\mathcal{A}_1) \times \mathsf{K}(\mathcal{A}_2) \to \mathsf{K}^2(\mathcal{B})$.

同理, $\mathsf{C}_{\oplus}F$ 或 $\mathsf{C}_{\Pi}F$ 分解为 $\mathsf{K}(\mathcal{A}_1) \times \mathsf{K}(\mathcal{A}_2) \to \mathsf{K}(\mathcal{B})$, 分别记为 $\mathsf{K}_{\oplus}F$ 或 $\mathsf{K}_{\Pi}F$, 前提是函子 $\mathsf{C}_{\oplus}F$ 或 $\mathsf{C}_{\Pi}F$ 有定义.

证明 以 $\mathsf{C}_{\oplus}F$ 的情形为例, 问题在于对 $\mathsf{C}(\mathcal{A}_1)$ 的零伦态射 $f_1 = d^{-1}g : X_1 \to Y_1$ 和 $\mathsf{C}(\mathcal{A}_2)$ 的任意态射 $f_2 : X_2 \to Y_2$ 说明对应的 $(\mathsf{C}^2F)(f_1, f_2) : \mathsf{C}^2F(X_1, X_2) \to \mathsf{C}^2F(Y_1, Y_2)$ 零伦. 显然的取法是 $h^{p,q} := F(g^p, f_2^q)$ 和 $k^{p,q} := 0$; 因为 f_2 是态射, h 的确与 ${}^{\vartriangle}d = F(\mathrm{id}, d)$ 交换. 对第二个变元也类似地处理. □

命题 3.5.8 给出典范同构

$$\mathsf{C}_{\oplus}F(X[1], Y) \simeq \mathsf{C}_{\oplus}F(X, Y)[1] \simeq \mathsf{C}_{\oplus}(X, Y[1]),$$
$$\mathsf{K}_{\oplus}F(X[1], Y) \simeq \mathsf{K}_{\oplus}F(X, Y)[1] \simeq \mathsf{K}_{\oplus}(X, Y[1]).$$

以 Π 代 $\oplus$ 亦同.

例 3.5.12 (Hom 双复形) 考虑双函子 $\mathrm{Hom}(\cdot,\cdot) : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{A} \to \mathsf{Ab}$, 它映对象 (S, T) 为 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(S, T)$. 以下说明 Hom 复形 $\mathrm{Hom}^{\bullet}(X, Y)$ 典范地同构于合成函子

$$\mathsf{C}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}} \times \mathsf{C}(\mathcal{A}) \xrightarrow{(\sigma^{-1}, \mathrm{id})} \mathsf{C}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}) \times \mathsf{C}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\mathsf{C}_{\Pi}\,\mathrm{Hom}(\cdot,\cdot)} \mathsf{C}(\mathsf{Ab})$$

在对象 (X,Y) 处的取值, 其中的 σ 如定义–命题 3.4.1.

为此, 我们首先考虑从 $\mathcal{A}\times\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ 到 Ab 的双函子 $F(T,S)=\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(S,T)$, 以及

$$\mathsf{C}(\mathcal{A})\times\mathsf{C}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}}\xrightarrow{(\mathrm{id},\sigma^{-1})}\mathsf{C}(\mathcal{A})\times\mathsf{C}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})\xrightarrow{\mathsf{C}^2F}\mathsf{C}^2(\mathsf{Ab}).$$

设 $X,Y\in\mathrm{Ob}(\mathsf{C}(\mathcal{A}))$. 称对象 (Y,X) 在上述合成函子之下的像 $\mathrm{Hom}^{\bullet,\bullet}(X,Y)$ 为 **Hom 双复形**. 鉴于显然的交换图表

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}}\times\mathsf{C}(\mathcal{A}) \arrow[r, "{(\sigma^{-1},\mathrm{id})}"] \arrow[d, "\simeq"', "对调"] & \mathsf{C}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})\times\mathsf{C}(\mathcal{A}) \arrow[r, "{\mathsf{C}^2\,\mathrm{Hom}(\cdot,\cdot)}"] \arrow[d, "\simeq"', "对调"] & \mathsf{C}^2(\mathsf{Ab}) \arrow[d, "\mathrm{swap}"] \\
\mathsf{C}(\mathcal{A})\times\mathsf{C}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}} \arrow[r, "{(\mathrm{id},\sigma^{-1})}"'] & \mathsf{C}(\mathcal{A})\times\mathsf{C}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}) \arrow[r, "\mathsf{C}^2F"'] & \mathsf{C}^2(\mathsf{Ab})
\end{tikzcd}$$

和命题 3.5.6, 原问题归结为证 $\mathrm{tot}_{\Pi}\,\mathrm{Hom}^{\bullet,\bullet}(X,Y)$ 典范地同构于 $\mathrm{Hom}^{\bullet}(X,Y)$.

细观定义可见

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}^{p,q}(X,Y)&=\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\left(X^{-q},Y^{p}\right),\\
{}^{\triangleright}d^{p,q}&=(d_Y^p)_*:\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\left(X^{-q},Y^{p}\right)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\left(X^{-q},Y^{p+1}\right),\\
{}^{\vartriangle}d^{p,q}&=(-1)^{q+1}(d_X^{-q-1})^*:\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\left(X^{-q},Y^{p}\right)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\left(X^{-q-1},Y^{p}\right).
\end{aligned}$$

现在来确定 $\mathrm{tot}_{\Pi}\,\mathrm{Hom}^{\bullet,\bullet}(X,Y)$. 首先,

$$(\mathrm{tot}_{\Pi}\,\mathrm{Hom}^{\bullet,\bullet}(X,Y))^n=\prod_{p+q=n}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\left(X^{-q},Y^{p}\right)=\prod_{k\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}\left(X^{k},Y^{k+n}\right)$$

(代入 $k=-q$), 此即 $\mathrm{Hom}^n(X,Y)$. 下一步描述 $d^n_{\mathrm{tot}_{\Pi}\,\mathrm{Hom}^{\bullet,\bullet}(X,Y)}$: 它在 $\mathrm{Hom}^{n+1}(X,Y)$ 中的第 (p,q) 个坐标 $(p+q=n+1)$ 来自

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}^{p-1,q}(X,Y) \arrow[r, "{{}^{\triangleright}d^{p-1,q}}"] & \mathrm{Hom}^{p,q}(X,Y) \\
 & \mathrm{Hom}^{p,q-1}(X,Y). \arrow[u, "{(-1)^{p}\,{}^{\vartriangle}d^{p,q-1}}"']
\end{tikzcd}$$

水平箭头是 $(d_Y^p)_*$, 而垂直箭头是 $(-1)^{p+q}(d_X^{-q})^*=-(-1)^n(d_X^{-q})^*$. 和 Hom 复形的定义 3.2.1 比较, 立见 $\mathrm{tot}_{\Pi}\,\mathrm{Hom}^{\bullet,\bullet}(X,Y)=\mathrm{Hom}^{\bullet}(X,Y)$. 明所欲证.

最后, 如果 $\mathcal{A}$ 是 $\Bbbk$-线性的, $\mathrm{Hom}^{\bullet,\bullet}(X,Y)$ 可以升级为映至 $\mathsf{C}^2(\Bbbk\text{-}\mathsf{Mod})$ 的函子.

3.6 Abel 范畴上的复形

本节设 $\mathcal{A}$ 为 Abel 范畴. 一如既往, 本节关于加性的陈述都能推广到 $\mathcal{A}$ 为 $\Bbbk$-线性的情形.

对 Abel 范畴上的复形 X 可以探讨上同调 (定义 2.2.5). 回忆到 $[n]$ 不仅平移复形的上标, 还将 $d_X^\bullet$ 乘上符号 $(-1)^n$, 但后者并不改变各个 d_X 的核与像. 由此得到

$$\mathrm{H}^k\left(X[n]\right) = \mathrm{H}^{n+k}\left(X\right), \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

命题 3.1.5 已确保 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 为加性范畴. 以下说明它还是 Abel 范畴.

命题 3.6.1 范畴 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 是 Abel 范畴. 确切地说, 对所有 $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}(\mathcal{A}))$, 我们有 $X \oplus Y = (X^n \oplus Y^n, (d_X^n, d_Y^n))_{n\in\mathbb{Z}}$, 而对于任何态射 $f: X \to Y$, 可取

$$\begin{aligned} \ker(f)^n &= \left(\ker(f^n)\right)_{n\in\mathbb{Z}}, & \operatorname{coker}(f)^n &= \left(\operatorname{coker}(f^n)\right)_{n\in\mathbb{Z}}, \\ \operatorname{im}(f)^n &= \left(\operatorname{im}(f^n)\right)_{n\in\mathbb{Z}}, & \operatorname{coim}(f)^n &= \left(\operatorname{coim}(f^n)\right)_{n\in\mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

设 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 的态射 f 和 g 可合成且 $gf = 0$, 则 $H := \mathrm{H}\left[X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z\right]$ 是以下复形:

- ◇ 第 n 次项为 $H^n := \mathrm{H}\left[X^n \xrightarrow{f^n} Y^n \xrightarrow{g^n} Z^n\right]$,
- ◇ 态射 $d_H^n : H^n \to H^{n+1}$ 由 d_X^n, d_Y^n 连同 $\mathrm{H}[\cdots]$ 的函子性 (命题 2.2.2) 确定.

作为推论, $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 正合当且仅当 $X^n \xrightarrow{f^n} Y^n \xrightarrow{g^n} Z^n$ 对每个 $n \in \mathbb{Z}$ 皆正合.

证明 命题 3.1.5 业已说明如何以从复形到分次对象的忘却函子 $U : \mathsf{C}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 将所需的 $\varinjlim$ 和 $\varprojlim$ 逐次地化到 $\mathcal{A}$ 上; 根本在于 U 生所有 $\varinjlim$ 和 $\varprojlim$ (引理 3.1.4). 这就给出关于 $X \oplus Y$ 和 $\ker(f)$, $\operatorname{coker}(f)$ 等等的逐次构造.

特别地, 根据刻画 (1.2.1), 典范态射 $\operatorname{coim}(f) \to \operatorname{im}(f)$ 由 $\mathcal{A}$ 中的 $\operatorname{coim}(f^n) \to \operatorname{im}(f^n)$ 给出. 逐次同构即复形同构. 综上, $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 的态射皆严格. 故 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴. 对于 $\mathrm{H}[X \to Y \to Z]$ 的描述也是类似处理. □

注记 3.6.2 同理可证双复形范畴 $\mathsf{C}^2(\mathcal{A})$, 乃至 k 重复形范畴 $\mathsf{C}^k(\mathcal{A})$ 仍是 Abel 范畴, 其中 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$; 见注记 3.5.7.

接着考察 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的态射 $f : X \to Y$, 命题 2.2.2 对每个 $n \in \mathbb{Z}$ 唯一地确定 $\mathrm{H}^n(f) : \mathrm{H}^n(X) \to \mathrm{H}^n(Y)$, 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} \ker(d_X^n) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\text{由 } f \text{ 诱导}"'] & \mathrm{H}^n(X) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathrm{H}^n(f)"] & \operatorname{coker}(d_X^{n-1}) \arrow[d, "\text{由 } f \text{ 诱导}"] \\ \ker(d_Y^n) \arrow[r, two heads] & \mathrm{H}^n(Y) \arrow[r, hook] & \operatorname{coker}(d_Y^{n-1}). \end{tikzcd} \tag{3.6.1}$$

对给定的态射 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, 此刻画即刻给出 $\mathrm{H}^n(gf) = \mathrm{H}^n(g)\,\mathrm{H}^n(f)$; 此外 $\mathrm{H}^n(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\mathrm{H}^n(X)}$.

命题 3.6.3 (上同调作为函子) 对所有 $n \in \mathbb{Z}$, 上述定义给出加性函子 $\mathrm{H}^n : \mathsf{C}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$.

证明 性质 $\mathrm{H}^n(gf) = \mathrm{H}^n(g)\,\mathrm{H}^n(f)$ 和 $\mathrm{H}^n(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ 直接来自 (3.6.1) 的刻画; 同理可得 $\mathrm{H}^n(f_1 + f_2) = \mathrm{H}^n(f_1) + \mathrm{H}^n(f_2)$ 以及 $\mathrm{H}^n(tf) = t\,\mathrm{H}^n(f)$, 如果 $\mathcal{A}$ 是 $\Bbbk$-线性的而 $t \in \Bbbk$.□

复形之间的短正合列自动诱导上同调的长正合列, 这是长正合列在同调论中最初等的形式.

命题 3.6.4 (短正合列诱导长正合列) 设 $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ 是 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的短正合列, 则基于定理 2.3.3 可导出 $\mathcal{A}$ 中的典范正合列

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathrm{H}^{n-1}(Y) \arrow[r, "\mathrm{H}^{n-1}(g)"] & \mathrm{H}^{n-1}(Z) \arrow[dll, rounded corners, "\delta^{n-1}"] \\
\mathrm{H}^n(X) \arrow[r, "\mathrm{H}^n(f)"] & \mathrm{H}^n(Y) \arrow[r, "\mathrm{H}^n(g)"] & \mathrm{H}^n(Z) \arrow[dll, rounded corners, "\delta^n"] \\
\mathrm{H}^{n+1}(X) \arrow[r, "\mathrm{H}^{n+1}(f)"'] & \mathrm{H}^{n+1}(Y) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

它具备如下的函子性: 若有 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的行正合交换图表

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \underline{X} & \longrightarrow & \underline{Y} & \longrightarrow & \underline{Z} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

则它们给出交换图表

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \to & \mathrm{H}^n(X) & \to & \mathrm{H}^n(Y) & \to & \mathrm{H}^n(Z) & \to & \mathrm{H}^{n+1}(X) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \to & \mathrm{H}^n(\underline{X}) & \to & \mathrm{H}^n(\underline{Y}) & \to & \mathrm{H}^n(\underline{Z}) & \to & \mathrm{H}^{n+1}(\underline{X}) & \to & \cdots .
\end{array}$$

证明 对每个 $n \in \mathbb{Z}$ 皆有正合列 $\mathrm{coker}(d_X^n) \to \mathrm{coker}(d_Y^n) \to \mathrm{coker}(d_Z^n) \to 0$: 对

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & X^{n-1} & \longrightarrow & Y^{n-1} & \longrightarrow & Z^{n-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & X^n & \longrightarrow & Y^n & \longrightarrow & Z^n & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

取定理 2.3.3 之正合列的 coker 部分便是. 类似道理, 也有正合列 $0 \to \ker(d_X^n) \to \ker(d_Y^n) \to \ker(d_Z^n)$. 它们可以置入行正合的交换图表

$$\begin{tikzcd} & \operatorname{coker}(d_X^{n-2}) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{coker}(d_Y^{n-2}) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{coker}(d_Z^{n-2}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \ker(d_X^n) \arrow[r] & \ker(d_Y^n) \arrow[r] & \ker(d_Z^n) & \end{tikzcd} \tag{3.6.2}$$

垂直箭头分别由 d_X^{n-1}, d_Y^{n-1}, d_Z^{n-1} 诱导, 具有形如 $\operatorname{coker}(d^{n-2}) \overset{d^{n-1}}{\twoheadrightarrow} \operatorname{im}(d^{n-1}) \hookrightarrow \ker(d^n)$ 的满–单分解 (省略下标).

根据引理 1.3.11 (iii), 可从 $\operatorname{coker}(d^{n-2}) \twoheadrightarrow \operatorname{im}(d^{n-1})$ 确定 (3.6.2) 中垂直箭头的核, 再由 (2.2.2) 依序得到 $\mathrm{H}^{n-1}(X)$, $\mathrm{H}^{n-1}(Y)$, $\mathrm{H}^{n-1}(Z)$; 同理, 从 $\operatorname{im}(d^{n-1}) \hookrightarrow \ker(d^n)$ 确定垂直箭头的余核, 则依序得到 $\mathrm{H}^n(X)$, $\mathrm{H}^n(Y)$ 和 $\mathrm{H}^n(Z)$. 应用定理 2.3.3 以得出连接态射 $\delta^{n-1} : \mathrm{H}^{n-1}(Z) \to \mathrm{H}^n(X)$ 和长正合列中涉及 H^n 和 H^{n-1} 的项. 应用注记 2.3.2 可得函子性. □

定义 3.6.5 (拟同构) 设 $f : X \to Y$ 为 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的态射. 若 $\mathrm{H}^n(f)$ 对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 皆为同构, 则称 f 为拟同构.

命题 3.6.6 设 $f : X \to Y$ 为 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 的态射, $n \in \mathbb{Z}$. 若 f 零伦, 则 $\mathrm{H}^n(f) = 0$.

证明 取 $h \in \operatorname{Hom}^{-1}(X, Y)$ 使得 $f = d_Y h + h d_X$. 合成态射 $\ker(d_X^n) \hookrightarrow X^n \xrightarrow{h^{n+1} d_X^n} Y^n$ 为 0, 另一方面 $d_Y^{n-1} h^n$ 通过 $\operatorname{im}(d_Y^{n-1})$ 分解, 故 $\mathrm{H}^n(f) = 0$. □

推论 3.6.7 对所有 $n \in \mathbb{Z}$, 上同调函子 $\mathrm{H}^n : \mathsf{C}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ 唯一地通过 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 分解. 故拟同构的概念可以扩及 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 的态射. 若 $f : X \to Y$ 在 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 中为同构, 则 f 是拟同构.

证明 结合命题 3.2.9 和 3.6.6. □

3.7 映射锥和长正合列

长正合列是同调代数的主要工具, 本节旨在比较从短正合列构造长正合列的三种方法. 精确到一些正负号, 它们殊途同归. 以下取 $\mathcal{A}$ 为 Abel 范畴.

命题 3.7.1 设 $f : X \to Y$ 为 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的态射. 令 $\alpha(f)$, $\beta(f)$ 如定义 3.3.5, 则

$$0 \to Y \xrightarrow{\alpha(f)} \operatorname{Cone}(f) \xrightarrow{\beta(f)} X[1] \to 0$$

是 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的正合列.

证明 回忆 $\alpha(f)$ 和 $\beta(f)$ 的定义. 断言的正合性归结为

$$0 \to Y^n \xrightarrow{(0,\mathrm{id})} X^{n+1} \oplus Y^n \xrightarrow{\text{投影}} X^{n+1} \to 0,$$

对每个 $n \in \mathbb{Z}$ 的正合性, 此即命题 2.2.7 的内容. □

给定 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的态射 $f : X \to Y$, 命题 3.7.1 的短正合列连同命题 3.6.4 给出 $\mathcal{A}$ 中的长正合列

$$\cdots \to \mathrm{H}^n(Y) \xrightarrow{\mathrm{H}^n(\alpha(f))} \mathrm{H}^n(\mathrm{Cone}(f)) \xrightarrow{\mathrm{H}^n(\beta(f))} \underbrace{\mathrm{H}^n(X[1])}_{=\mathrm{H}^{n+1}(X)} \xrightarrow{\xi^n} \mathrm{H}^{n+1}(Y) \to \cdots \tag{3.7.1}$$

标为 ξ^n 者是诱导自短正合列的连接态射; 推论 3.7.5 将证明此连接态射无非是 $\mathrm{H}^{n+1}(f) : \mathrm{H}^{n+1}(X) \to \mathrm{H}^{n+1}(Y)$, 所以映射锥的长正合列 (3.7.1) 其每段都是明确的, 都来自 f, $\alpha(f)$ 和 $\beta(f)$.

下述结果则从另一个方向表明: 从 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中任意短正合列出发, 也可以自然地和映射锥建立联系. 方式分两种.

引理 3.7.2 给定 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的短正合列 $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$, 则

$$\Phi := (0, g) : \mathrm{Cone}(f) \to Z, \quad \Phi' := (f[1], 0) : X[1] \to \mathrm{Cone}(g),$$

皆是拟同构, 它们具有以下性质:

(i) $\Phi \circ \alpha(f) = g$ 而 $\beta(g) \circ \Phi' = f[1]$,

(ii) $\alpha(g)\Phi + \Phi'\beta(f) : \mathrm{Cone}(f) \to \mathrm{Cone}(g)$ 典范地零伦.

证明 端详 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 的交换图表

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\mathrm{id}_X"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "g"'] & Z \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_Z"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & Z \arrow[r, "\mathrm{id}_Z"'] & Z \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

每一行皆正合; 映射锥的函子性 (命题 3.3.3) 遂给出 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的态射

$$\begin{gathered} 0 \longrightarrow \mathrm{Cone}(\mathrm{id}_X) \longrightarrow \mathrm{Cone}\left(X \xrightarrow{f} Y\right) \longrightarrow \mathrm{Cone}(0 \to Z) \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow \mathrm{Cone}(X \to 0) \longrightarrow \mathrm{Cone}\left(Y \xrightarrow{g} Z\right) \longrightarrow \mathrm{Cone}(\mathrm{id}_Z) \longrightarrow 0 \end{gathered} \tag{3.7.2}$$

逐项考察, 并利用前述交换图表及映射锥的定义, 可见 (3.7.2) 每行皆正合. 此外, 容易看出 $\mathrm{Cone}(f) \to \mathrm{Cone}(0 \to Z) \simeq Z$ (或 $X[1] \simeq \mathrm{Cone}(X \to 0) \to \mathrm{Cone}(g)$) 即是 Φ (或 Φ'). 一旦知道它们是复形的态射, (i) 的性质便是自明的.

对 (3.7.2) 应用命题 3.6.4, 对每个 $n \in \mathbb{Z}$ 得到正合列

$$\mathrm{H}^n(\mathrm{Cone}(\mathrm{id}_X)) \to \mathrm{H}^n(\mathrm{Cone}(f)) \xrightarrow{\mathrm{H}^n(\Phi)} \mathrm{H}^n(Z) \to \mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{Cone}(\mathrm{id}_X)),$$

$$\mathrm{H}^{n-1}(\mathrm{Cone}(\mathrm{id}_Z)) \to \mathrm{H}^n(X[1]) \xrightarrow{\mathrm{H}^n(\Phi')} \mathrm{H}^n(\mathrm{Cone}(g)) \to \mathrm{H}^n(\mathrm{Cone}(\mathrm{id}_Z)).$$

引理 3.3.8 (i) 和命题 3.6.6 表明左右端点项皆为 0, 故 Φ 和 Φ' 是拟同构.

最后验证 (ii). 按照 $\mathrm{Cone}(f)^n = X^{n+1} \oplus Y^n$ 和 $\mathrm{Cone}(g)^n = Y^{n+1} \oplus Z^n$ 将态射写成矩阵

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & Z \arrow[dr, "\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{id} \end{pmatrix}", "\alpha(g)"'] & \\ \mathrm{Cone}(f) \arrow[ur, "\begin{pmatrix} 0 & g \end{pmatrix}", "\Phi"'] \arrow[dr, "\beta(f)", "\begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \end{pmatrix}"'] & & \mathrm{Cone}(g) \\ & X[1] \arrow[ur, "\Phi'", "\begin{pmatrix} f[1] \\ 0 \end{pmatrix}"'] & \end{tikzcd}, \quad \alpha(g)\Phi + \Phi'\beta(f) = \begin{pmatrix} f[1] & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}.$$

另外取 $s = (s^n)_n \in \mathrm{Hom}^{-1}(\mathrm{Cone}(f), \mathrm{Cone}(g))$ 为

$$s^n := \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_{Y^n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : X^{n+1} \oplus Y^n \to Y^n \oplus Z^{n-1},$$

这也是唯一合理的取法. 直接的矩阵计算表明 $d^{n-1}_{\mathrm{Cone}(g)} s^n + s^{n+1} d^n_{\mathrm{Cone}(f)}$ 等于

$$\begin{pmatrix} -d^n_Y & 0 \\ g^n & d^{n-1}_Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_{Y^n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_{Y^{n+1}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d^{n+1}_X & 0 \\ f^{n+1} & d^n_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^{n+1} & 0 \\ 0 & g^n \end{pmatrix}.$$

故 $\alpha(g)\Phi + \Phi'\beta(f)$ 确实零伦. □

综上, 从 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的短正合列 $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ 出发, 有三种方式在 $\mathcal{A}$ 中导出长正合列

$$\begin{aligned} \cdots &\longrightarrow \mathrm{H}^{n-1}(Y) \longrightarrow \mathrm{H}^{n-1}(Z) \\ &\longrightarrow \mathrm{H}^n(X) \longrightarrow \mathrm{H}^n(Y) \longrightarrow \mathrm{H}^n(Z) \\ &\longrightarrow \mathrm{H}^{n+1}(X) \longrightarrow \mathrm{H}^{n+1}(Y) \longrightarrow \cdots. \end{aligned}$$

(A) 直接应用命题 3.6.4 得到长正合列

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}^n(Y) \xrightarrow{\mathrm{H}^n(g)} \mathrm{H}^n(Z) \xrightarrow{\delta^n} \mathrm{H}^{n+1}(X) \xrightarrow{\mathrm{H}^{n+1}(f)} \mathrm{H}^{n+1}(Y) \longrightarrow \cdots$$

(B) 应用引理 3.7.2 的拟同构 $\Phi : \mathrm{Cone}(f) \to Z$, 配合 (3.7.1) 得出交换图表

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathrm{H}^n(Y) \arrow[r, "\mathrm{H}^n(\alpha(f))"] \arrow[d, equal] & \mathrm{H}^n\left(\mathrm{Cone}(f)\right) \arrow[r, "\mathrm{H}^n(\beta(f))"] \arrow[d, "\simeq"', "\mathrm{H}^n(\Phi)"] & \mathrm{H}^n(X[1]) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{H}^{n+1}(Y) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{H}^n(Y) \arrow[r, "\mathrm{H}^n(g)"'] & \mathrm{H}^n(Z) \arrow[r, "\eta^n"'] & \mathrm{H}^{n+1}(X) \arrow[r, "\xi^n"'] & \mathrm{H}^{n+1}(Y) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

其中

- ◇ $\eta^n := \mathrm{H}^n(\beta(f))\,\mathrm{H}^n(\Phi)^{-1}$,
- ◇ ξ^n 是 (3.7.1) 中的连接态射 $\mathrm{H}^{n+1}(X) = \mathrm{H}^n(X[1]) \to \mathrm{H}^{n+1}(Y)$.

已知第一行正合, 故第二行给出长正合列的另一种构造.

(C) 同上, 但改用引理 3.7.2 的拟同构 $\Phi' : X[1] \to \mathrm{Cone}(g)$, 得到交换图表

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathrm{H}^n(Z) \arrow[r, "\mathrm{H}^n(\alpha(g))"] \arrow[d, equal] & \mathrm{H}^n\left(\mathrm{Cone}(g)\right) \arrow[r, "\mathrm{H}^n(\beta(g))"] & \mathrm{H}^n(Y[1]) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{H}^{n+1}(Z) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{H}^n(Z) \arrow[r, "(\eta')^n"'] & \mathrm{H}^n(X[1]) \arrow[r, "\mathrm{H}^n(f[1])"'] \arrow[u, "\simeq", "\mathrm{H}^n(\Phi')"'] & \mathrm{H}^{n+1}(Y) \arrow[r, "(\xi')^n"'] & \mathrm{H}^{n+1}(Z) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

其中

- ◇ $(\eta')^n := \mathrm{H}^n(\Phi')^{-1}\,\mathrm{H}^n(\alpha(g))$,
- ◇ $(\xi')^n$ 来自 (3.7.1) (以 g 代 f) 中的连接态射 $\mathrm{H}^{n+1}(Y) = \mathrm{H}^n(Y[1]) \to \mathrm{H}^{n+1}(Z)$.

已知第一行正合, 故第二行也给出长正合列.

这三种长正合列有何异同?

- ◇ 构造 (A) 和 (B) 仅差一些负号: 命题 3.7.3 将说明 $\eta^n = -\delta^n$, 而推论 3.7.5 则蕴涵 $\xi^n = \mathrm{H}^{n+1}(f)$.
- ◇ 构造 (A) 和 (C) 的产物相同: 推论 3.7.4 将基于 (B) 的结果来说明 $(\eta')^n = \delta^n$, 而推论 3.7.5 蕴涵 $(\xi')^n = \mathrm{H}^{n+1}(g)$.
- ◇ 因此 (B) 和 (C) 仅在连接态射 $\mathrm{H}^n(Z) \to \mathrm{H}^{n+1}(X)$ 处差一个负号, 这点可由三角范畴的旋转公理 (TR3) 得到合理的解释, 见之后的命题 4.4.7.

我们先着手来确立这些关系.

命题 3.7.3 在上述场景中, $\eta^n = -\delta^n$ 对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 皆成立.

证明 以下论证取自 [10, Proposition 12.3.6]. 由于论证比较曲折, 敬邀读者先尝试 $\mathcal{A} = R$-Mod 的具体情形, 其中 R 是环; 图追踪 [25, §6.8] 的办法对之给出直截了当的证明.

对于一般的 Abel 范畴 $\mathcal{A}$, 首先选定 $n \in \mathbb{Z}$, 取纤维积

$$S := \operatorname{coker}(d_Y^{n-1}) \underset{\operatorname{coker}(d_Z^{n-1})}{\times} \mathrm{H}^n(Z).$$

连接同态 δ^n 如何构造? 它是施 (2.3.2) 于 (3.6.2) 的图表

$$\begin{tikzcd}
& \operatorname{coker}(d_X^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{coker}(d_Y^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{coker}(d_Z^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker(d_X^{n+1}) \arrow[r] & \ker(d_Y^{n+1}) \arrow[r] & \ker(d_Z^{n+1}) &
\end{tikzcd}$$

的产物, 在此调整为

$$\begin{tikzcd}
& S \arrow[r, two heads, "w"] \arrow[d, "v"] \arrow[dl, bend right, "u"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathrm{H}^n(Z) \arrow[d, hook] \\
& \operatorname{coker}(d_Y^{n-1}) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "a"] & \operatorname{coker}(d_Z^{n-1}) \arrow[d] \\
\ker(d_X^{n+1}) \arrow[r, hook, "b"'] \arrow[d, two heads] & \ker(d_Y^{n+1}) \arrow[r, "c"'] & \ker(d_Z^{n+1}) \\
\mathrm{H}^{n+1}(X) & &
\end{tikzcd} \tag{3.7.3}$$

的形式; 图中行列皆正合, 箭头 a 由 d_Y^n 诱导, b 由 f^{n+1} 诱导, 而箭头 u 的存在性和唯一性是缘于图表右半交换蕴涵 $cav = 0$. 回顾 (2.3.2) 的构造可见图表

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{H}^n(Z) \arrow[dr, "\delta^n"] & \\
S \arrow[ur, two heads, "w"] \arrow[dr, "u"'] & & \mathrm{H}^{n+1}(X) \\
& \ker\left(d_X^{n+1}\right) \arrow[ur, two heads] &
\end{tikzcd} \quad \text{交换;} \tag{3.7.4}$$

因为 w 已知满, 此图表也唯一地确定了 δ^n.

为了和映射锥作比较, 请按定义验证下图交换

$$\begin{tikzcd}
\ker(d_X^{n+1}) \oplus \operatorname{coker}(d_Y^{n-1}) \arrow[r, hook] \arrow[d, "{(b,a)}"'] & X^{n+1} \oplus \operatorname{coker}\left(d_Y^{n-1}\right) \arrow[r, two heads] & \operatorname{coker}\left(d_{\mathrm{Cone}(f)}^{n-1}\right) \arrow[d, "d_{\mathrm{Cone}(f)}^n"] \\
\ker(d_Y^{n+1}) \arrow[r, "\sim"] & 0 \oplus \ker\left(d_Y^{n+1}\right) \arrow[r, hook] & \ker\left(d_{\mathrm{Cone}(f)}^{n+1}\right)
\end{tikzcd}$$

其中横向箭头的定义理应是自明的. 既然 (3.7.3) 的扇形部分交换, 上图蕴涵

$$S \xrightarrow{(-u,v)} \ker\left(d_X^{n+1}\right) \oplus \operatorname{coker}\left(d_Y^{n-1}\right) \xrightarrow{\text{如上}} \operatorname{coker}\left(d_{\operatorname{Cone}(f)}^{n-1}\right) \xrightarrow{d_{\operatorname{Cone}(f)}^{n}} \ker\left(d_{\operatorname{Cone}(f)}^{n+1}\right)$$

合成为 0, 故 $S \xrightarrow{(-u,v)} \ker\left(d_X^{n+1}\right) \oplus \operatorname{coker}\left(d_Y^{n-1}\right) \to \operatorname{coker}\left(d_{\operatorname{Cone}(f)}^{n-1}\right)$ 唯一地分解为 $S \to \mathrm{H}^n(\operatorname{Cone}(f)) \hookrightarrow \operatorname{coker}\left(d_{\operatorname{Cone}(f)}^{n-1}\right)$. 兹断言下图交换:

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "{(-u,v)}"] \arrow[d] \arrow[ddd, bend right=60, "w"'] & \ker\left(d_X^{n+1}\right) \oplus \operatorname{coker}\left(d_Y^{n-1}\right) \arrow[r, "\text{投影}"] \arrow[dd] & \ker\left(d_X^{n+1}\right) \arrow[d, two heads] \\
 & & \mathrm{H}^{n+1}(X) \arrow[d, hook] \\
\mathrm{H}^n\left(\operatorname{Cone}(f)\right) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathrm{H}^n(\Phi)", "\simeq"'] & \operatorname{coker}\left(d_{\operatorname{Cone}(f)}^{n-1}\right) \arrow[r, "\text{由 } \beta(f) \text{ 诱导}"'] \arrow[d, "\text{由 } \Phi \text{ 诱导}"'] & \operatorname{coker}\left(d_X^{n}\right) \\
\mathrm{H}^n(Z) \arrow[r, hook] & \operatorname{coker}\left(d_Z^{n-1}\right).
\end{tikzcd} \tag{3.7.5}$$

诚然, 验证各个方块的交换性都是例行公事; 基于 (3.7.3) 和 $\Phi = (0, g)$, 可见 (3.7.5) 的

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "{(-u,v)}"] \arrow[d, bend right, "w"'] & \ker\left(d_X^{n+1}\right) \oplus \operatorname{coker}\left(d_Y^{n-1}\right) \arrow[d] \\
\mathrm{H}^n(Z) \arrow[r, hook] & \operatorname{coker}\left(d_Z^{n-1}\right)
\end{tikzcd}$$

部分也交换, 而又由于 $\mathrm{H}^n(Z) \to \operatorname{coker}(d_Z^{n-1})$ 为单, 与之合成立见 (3.7.5) 余下的左侧弓形部分亦交换.

观察到 $\mathrm{H}^n(\operatorname{Cone}(f)) \hookrightarrow \operatorname{coker}\left(d_{\operatorname{Cone}(f)}^{n-1}\right) \to \operatorname{coker}(d_X^n)$ 和 $\mathrm{H}^n(\operatorname{Cone}(f)) \xrightarrow{\mathrm{H}^n(\beta(f))} \mathrm{H}^{n+1}(X) \hookrightarrow \operatorname{coker}(d_X^n)$ 的合成相同, 皆由向 X^{n+1} 的投影诱导. 故 (3.7.5) 进一步给出交换图表

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[rr, "-u"] \arrow[d, "w"'] & & \ker\left(d_X^{n+1}\right) \arrow[d] \\
\mathrm{H}^n(Z) \arrow[r, "\sim", "\mathrm{H}^n(\Phi)^{-1}"'] & \mathrm{H}^n\left(\operatorname{Cone}(f)\right) \arrow[r, "\mathrm{H}^n(\beta(f))"'] & \mathrm{H}^{n+1}(X).
\end{tikzcd}$$

鉴于 (3.7.4), 这蕴涵 $S \xrightarrow{w} \mathrm{H}^n(Z) \xrightarrow{\delta^n} \mathrm{H}^{n+1}(X)$ 和 $S \xrightarrow{w} \mathrm{H}^n(Z) \xrightarrow{\eta^n} \mathrm{H}^{n+1}(X)$ 的合成差一个负号. 因为 w 满, 故 $\eta^n = -\delta^n$. 明所欲证. $\square$

推论 3.7.4 在上述场景中, $(\eta')^n = \delta^n$ 对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 皆成立.

证明 沿用引理 3.7.2 的记号. 基于命题 3.7.3, 问题归结为证 $(\eta')^n + \eta^n = 0$, 但后者是 $\alpha(g)\Phi + \Phi'\beta(f) : \mathrm{Cone}(f) \to \mathrm{Cone}(g)$ 零伦 (引理 3.7.2 (ii)) 的直接结论. □

推论 3.7.5 给定 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的任意态射 $f : X \to Y$, 长正合列 (3.7.1) 中的连接态射 $\xi^n : \mathrm{H}^{n+1}(X) \simeq \mathrm{H}^n(X[1]) \to \mathrm{H}^{n+1}(Y)$ 等于 $\mathrm{H}^{n+1}(f)$.

证明 对短正合列 $0 \to Y \to \mathrm{Cone}(f) \to X[1] \to 0$ 应用引理 3.7.2, 可得拟同构 $(0, \beta(f))$ 及行正合交换图表

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "\alpha(f)"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Cone}(f) \arrow[r, "\alpha(\alpha(f))"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Cone}(\alpha(f)) \arrow[r] \arrow[d, "{(0,\beta(f))}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "\alpha(f)"'] & \mathrm{Cone}(f) \arrow[r, "\beta(f)"'] & X[1] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

引理 3.3.9 论及的态射 $\psi : \mathrm{Cone}(\alpha(f)) \to X[1]$ 正是此处的 $(0, \beta(f))$: 它的第 n 次项是从 $Y^{n+1} \oplus \mathrm{Cone}(f)^n = Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Y^n$ 到 X^{n+1} 的投影. 该引理的交换图表遂给出

$$f[1] \circ (0, \beta(f)) + \beta(\alpha(f)) = 0 \quad (\text{在 } \mathsf{K}(\mathcal{A}) \text{ 中}). \tag{3.7.6}$$

现在回忆到 $\xi^n : \mathrm{H}^n(X[1]) \to \mathrm{H}^{n+1}(Y)$ 是以下短正合列的连接态射:

$$0 \to Y \xrightarrow{\alpha(f)} \mathrm{Cone}(f) \xrightarrow{\beta(f)} X[1] \to 0,$$

对此短正合列应用命题 3.7.3, 可见合成态射

$$\mathrm{H}^n(\mathrm{Cone}(\alpha(f))) \xrightarrow[\sim]{\mathrm{H}^n((0,\beta(f)))} \mathrm{H}^n(X[1]) \xrightarrow{\xi^n} \mathrm{H}^{n+1}(Y)$$

等于 $-\mathrm{H}^n(\beta(\alpha(f)))$. 然而 (3.7.6) 蕴涵 $\mathrm{H}^n(\beta(\alpha(f))) = -\mathrm{H}^n(f[1]) \circ \mathrm{H}^n((0, \beta(f)))$. 于是 $\xi^n = \mathrm{H}^n(f[1]) = \mathrm{H}^{n+1}(f)$. □

推论 3.7.6 承上, f 是拟同构当且仅当 $\mathrm{H}^n(\mathrm{Cone}(f)) = 0$ 对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 成立.

证明 代入推论 3.7.5 和 (3.7.1) 的长正合列, 按图索骥. □

3.8 练习: Hochschild 同调与上同调

本节回归具体. 取 $\Bbbk$ 为交换环, 将 $\Bbbk$-模之间的张量积 $\underset{\Bbbk}{\otimes}$ 简写作 $\otimes$, 将 $\Bbbk$-模 M 的 n 重张量积记为 $M^{\otimes n}$, 并约定 $M^{\otimes 0} := \Bbbk$. 对于 $\Bbbk$-代数 R, 按惯例, (R, R)-双模带有的 $\Bbbk$ 的左乘和右乘默认相等, 因此 (R, R)-双模也等同于左 $R \otimes R^{\mathrm{op}}$-模.

定义 3.8.1 (杠复形) 选定 $\Bbbk$-代数 R. 对每个 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 定义 (R, R)-双模

$$\mathsf{B}_n R := R \otimes R^{\otimes n} \otimes R = R^{\otimes(n+2)},$$
$$r(r_0 \otimes \cdots \otimes r_{n+1})r' = rr_0 \otimes \cdots \otimes r_{n+1}r',$$

其中 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 而 $r, r', r_0, \ldots, r_{n+1} \in R$. 对所有 $n \geq 1$ 定义同态

$$b_n : \mathsf{B}_n R \to \mathsf{B}_{n-1} R,$$
$$b_n\left(r_0 \otimes \cdots \otimes r_{n+1}\right) := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdots \otimes r_k r_{k+1} \otimes \cdots .$$

我们称 $\mathsf{B}R := (\mathsf{B}_n R, b_n)_{n \geq 0}$ 为 R 的杠复形; 这是注记 2.2.6 所谓的链复形.

经典的记法是将 $r_0 \otimes \cdots \otimes r_{n+1} \in \mathsf{B}_n R$ 记作 $(r_0 | \cdots | r_{n+1})$. 这是 "杠" 的由来. 同态 b 的作用相当于以所有可能方式抽掉任一道杠, 符号交错加总. 由此容易看出 $b^2 = 0$: 诚然, $b^2(r_0 | \cdots | r_{n+1})$ 是形如

$$(\cdots | r_{h-1} r_h | \cdots | r_{k-1} r_k | \cdots) \quad 或 \quad (\cdots | r_{h-1} r_h r_{h+1} | \cdots)$$

的元素的线性组合; 要从 $(\cdots | r_{h-1} | \cdots | r_k | \cdots)$ 抽杠得到这样的项, 恰有两种方式, 其符号相消. 因此 $\mathsf{B}R$ 确实是链复形.

现将杠复形作下图所示的增广, 记为 $\mathsf{B}'R$, 其中的态射 b_0 也称为增广同态.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "b_2"] & \mathsf{B}_1 R \arrow[r, "b_1"] & \mathsf{B}_0 R \arrow[r, "b_0"] & (\mathsf{B}_{-1} R := R) \arrow[r] & 0 \\
& & (r_0 | r_1) \arrow[u, phantom, "\in" rotate=90] \arrow[r, mapsto] & r_0 r_1 \arrow[u, phantom, "\in" rotate=90] &
\end{tikzcd}$$

引理 3.8.2 增广后的链复形 $\mathsf{B}'R$ 正合; 更精确地说, $\mathrm{id}_{\mathsf{B}'R}$ 零伦.

证明 今将构造一族同态 $h_n : \mathsf{B}'_n R \to \mathsf{B}'_{n+1} R$, 其中 $n \geq -1$, 使得 $b_{n+1} h_n + h_{n-1} b_n = \mathrm{id}_{\mathsf{B}'_n R}$ (约定 $h_{-2} = 0$, $b_{-1} = 0$); 这将使 $\mathrm{id}_{\mathsf{B}'R}$ 零伦. 具体取

$$h_n(r_0 | \cdots | r_{n+1}) = (1 | r_0 | \cdots | r_{n+1}), \quad 其中 1 = 1_R,$$

然后按线性延拓到 $\mathsf{B}'_n R$ 上. 对任意 $n \geq 0$ 和 $r_0, \ldots, r_{n+1} \in R$, 我们有

$$b_{n+1} h_n\left(r_0 | \cdots | r_{n+1}\right) = (r_0 | \cdots | r_{n+1}) + \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} (1 | \cdots | r_k r_{k+1} | \cdots),$$
$$h_{n-1} b_n\left(r_0 | \cdots | r_{n+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (1 | \cdots | r_k r_{k+1} | \cdots).$$

由此立见

$$(b_{n+1} h_n + h_{n-1} b_n)(r_0 | \cdots | r_{n+1}) = (r_0 | \cdots | r_{n+1}),$$

而因为 $b_0 h_{-1}(r) = b_0(1|r) = r$, 此式对 $n = -1$ 也平凡地成立. □

约定 3.8.3 命 $R^e := R \otimes R^{\mathrm{op}}$. 对于任意 (R, R)-双模 M, 包括 $M = R$ 的特例, 今后
◇ 按 $(r \otimes r')m = rmr'$ 将 M 作成左 R^e-模,

◇ 按 $m(r \otimes r') := r'mr$ 将 M 作成右 R^e-模.

对所有 M, 构造由 $\Bbbk$-模构成的链复形 $M \underset{R^e}{\otimes} \mathsf{B}R$ 和复形 $\mathrm{Hom}_{R^e}(\mathsf{B}R, M)$.

定义 3.8.4 (G. Hochschild) 对所有 n, 定义 $\Bbbk$-线性函子 $\mathrm{HH}_n, \mathrm{HH}^n : (R,R)\text{-}\mathsf{Mod} \rightrightarrows \Bbbk\text{-}\mathsf{Mod}$ 如下:

$$\begin{aligned} \text{Hochschild 同调} \quad & \mathrm{HH}_n(M) := \mathrm{H}_n\left(M \underset{R^e}{\otimes} \mathsf{B}R\right), \\ \text{Hochschild 上同调} \quad & \mathrm{HH}^n(M) := \mathrm{H}^n\left(\mathrm{Hom}_{R^e}(\mathsf{B}R, M)\right). \end{aligned}$$

对于特例 $M = R$, 此法定义了 R 的 Hochschild 同调 $\mathrm{HH}_n(R)$ 与上同调 $\mathrm{HH}^n(R)$.

为了简化 $\mathrm{HH}_n(M)$ 和 $\mathrm{HH}^n(M)$ 的描述, 我们引入两种 Hochschild 复形

$$\begin{aligned} C_\bullet(R,M) &:= \left[\cdots \to M \otimes R^{\otimes n} \xrightarrow{d_n} M \to \cdots \xrightarrow{d_2} M \otimes R \xrightarrow{d_1} M\right], \\ C^\bullet(R,M) &:= \left[M \xrightarrow{d^0} \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(R,M) \xrightarrow{d^1} \cdots \to \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(R^{\otimes n}, M) \xrightarrow{d^n} \cdots\right], \end{aligned} \tag{3.8.1}$$

次数分别为 $\ldots, 2, 1, 0$ 和 $0, 1, 2, \ldots$. 同态 d_n 和 d^n 按以下方式定义.

1. 依旧以杠标记 $M \otimes R^{\otimes n}$ 的元素 $m \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n$ 为 $(m|r_1|\cdots|r_n)$. 命

$$d_n(m|r_1|\cdots|r_n) = \underbrace{(mr_1|r_2|\cdots|r_n) + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k(m|\cdots|r_kr_{k+1}|\cdots)}_{=:d'_n(m|r_1|\cdots|r_n)} + (-1)^n(r_nm|r_1|\cdots|r_n). \tag{3.8.2}$$

2. 将 $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(R^{\otimes n}, M)$ 的元素视同 n 重 $\Bbbk$-线性映射 $R^n \to M$ (见 [25, §7.5]). 命

$$(d^n f)(r_1, \ldots, r_{n+1}) = r_1 f(r_2, \ldots, r_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k f(\ldots, r_kr_{k+1}, \ldots) + (-1)^{n+1} f(r_1, \ldots, r_n) r_{n+1}.$$

对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. 我们有同构

$$\begin{aligned} M \underset{R^e}{\otimes} \mathsf{B}_n R & \xleftrightarrow{\sim} M \otimes R^{\otimes n} \\ m \otimes (r_0 \otimes \cdots \otimes r_{n+1}) & \longmapsto (r_{n+1} m r_0 | r_1 | \cdots | r_n | 1) \\ m \otimes (1 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n \otimes 1) & \longleftarrow\!\shortmid (m|r_1|\cdots|r_n). \end{aligned}$$

和

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] \mathrm{Hom}_{R^e}(\mathsf{B}_n R, M) \arrow[rr, leftrightarrow, "\sim"] & & \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(R^{\otimes n}, M) \\ \varphi \arrow[rr, mapsto] & & {[(r_1, \ldots, r_n) \mapsto \varphi(1, r_1, \ldots, r_n, 1)]} \\ {[r_0 \otimes \cdots \otimes r_{n+1} \mapsto r_0 f(r_1, \ldots, r_n) r_{n+1}]} & & f. \arrow[ll, mapsto] \end{tikzcd}$$

简短的计算表明 $\mathrm{id}_M \otimes b_n$ 通过同构对应于 d_n, 而拉回 b_n^* 则对应于 d^n. 于是上述同构是复形的同构, 给出

$$\mathrm{HH}^n(R, M) \simeq \mathrm{H}^n(C^\bullet(R, M)), \quad \mathrm{HH}_n(R, M) \simeq \mathrm{H}_n(C_\bullet(R, M)).$$

建议初学的读者动手完成这些验证.

注记 3.8.5 设 R 交换, 则任意 R-模 M 按 $rmr' := rr'm$ 作成 (R, R)-双模. 这时 $C_\bullet(M, R)$ (或 $C^\bullet(M, R)$) 成为 R-模的复形, 方式是命

$$r \cdot (m|r_1|\cdots|r_n) = (rm|r_1|\cdots|r_n) \quad \text{或} \ (r \cdot f)(r_1, \ldots, r_n) = rf(r_1, \ldots, r_n),$$

因此 $\mathrm{HH}_n(M)$ 和 $\mathrm{HH}^n(M)$ 都升级为 R-模. 这点自然也可以从杠复形的层面来论证.

例 3.8.6 取 $M = R = \Bbbk$, 按上述构造立见 $d_1, d_2, \ldots$ 依序是 0, id, 0, id 等等, 于是 $\mathrm{HH}_0(\Bbbk) = \Bbbk$ 而 $\mathrm{HH}_{\geq 1}(\Bbbk) = 0$. 类似的论证给出 $\mathrm{HH}^0(\Bbbk) = \Bbbk$ 和 $\mathrm{HH}^{\geq 1}(\Bbbk) = 0$.

对于较高的 n, 按原始定义计算 $\mathrm{HH}^n(M)$ 和 $\mathrm{HH}_n(M)$ 一般是困难的. 之后的例 3.14.11 和 3.14.6 将分别说明

$$\mathrm{HH}_n(M) \simeq \mathrm{Tor}_n^{R^e}(M, R), \quad \mathrm{HH}^n(M) \simeq \mathrm{Ext}_{R^e}^n(R, M),$$

前提分别是 R 作为 $\Bbbk$-模平坦和投射; 届时就能以更简单的复形来计算 HH_n 和 HH^n 的一些特例.

例 3.8.7 (零次情形: 中心和余中心) 首先来考察 $\mathrm{HH}^0(M)$. 据定义可见 $d^0 : M = C^0(R, M) \to C^1(R, M) = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(R, M)$ 映 m 为 $[r \mapsto rm - mr]$. 因此

$$\mathrm{HH}^0(M) = \{m \in M : \forall r \in R, \ rm = mr\}$$

右式可以合理地称为 M 的**中心**; 当 $M = R$ 时, 它无非是环论意义的中心.

其次考虑 $\mathrm{HH}_0(M)$. 记 $[M, R]$ 为形如 $mr - rm$ 的元素在 M 中生成的 $\Bbbk$-子模, 其中 $m \in M$ 而 $r \in R$. 由于 $d_1(m|r) = mr - rm$, 我们有

$$\mathrm{im}\,[d_1 : M \otimes R \to M] = [M, R], \quad \mathrm{HH}_0(M) = M/[M, R].$$

特别地, $M = R$ 的特例给出所有换位子 $r'r - rr'$ 在 R 中生成的子模 $[R, R]$, 对应的 $\Bbbk$-模 $R/[R, R]$ 称为 R 的**余中心**. 一切满足 $\varphi(rr') = \varphi(r'r)$, 亦即性质近乎 "迹" 的 $\Bbbk$-模同态 $\varphi : R \to N$ 都唯一地通过 $R/[R, R] = \mathrm{HH}_0(R)$ 分解.

例 3.8.8 (一次情形: 求导) 现在来探讨 $\mathrm{HH}^1(M)$. 记 $[r,m] := rm - mr$, 则

$$\begin{aligned}\ker(d^1) &= \{D \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(R,M) : \forall r_1, r_2 \in R,\ r_1D(r_2) - D(r_1r_2) + D(r_1)r_2 = 0\},\\ \mathrm{im}(d^0) &= \{[\cdot, m] \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(R,M) : m \in M\}.\end{aligned}$$

关于 $\ker(d^1)$ 的条件可以改写成 Leibniz 律 $D(r_1r_2) = r_1D(r_2) + D(r_1)r_2$. 具此性质的 $\Bbbk$-模同态 D 应当设想为取值在 M 上的求导运算, 它们构成的 $\Bbbk$-模记为 $\mathrm{Der}_{\Bbbk}(R,M)$; 其中形如 $[\cdot, m]$ 的元素构成子模 $\mathrm{Inn}_{\Bbbk}(R,M)$, 于是

$$\mathrm{HH}^1(M) = \mathrm{Der}_{\Bbbk}(R,M)/\mathrm{Inn}_{\Bbbk}(R,M)$$

分类了 R 上所有取值在 M 的求导运算, 精确到 $\mathrm{Inn}_{\Bbbk}(R,M)$.

现在假设 R 交换以诠释 $\mathrm{HH}_1(M)$. 我们需要一些准备: 定义以符号 $\widetilde{\mathrm{d}r}$ 为基的自由 R-模 $\bigoplus_{r\in R} R\widetilde{\mathrm{d}r}$, 再定义由以下元素生成的子模 N:

$$\mathrm{d}\widetilde{(r+r')} - \widetilde{\mathrm{d}r} - \widetilde{\mathrm{d}r'}, \quad \widetilde{\mathrm{d}tr} - t\widetilde{\mathrm{d}r}, \quad \widetilde{\mathrm{d}rr'} - r\widetilde{\mathrm{d}r'} - r'\widetilde{\mathrm{d}r},$$

其中 $r, r' \in R$ 而 $t \in \Bbbk$. 由此定义 R-模

$$\begin{aligned}\Omega_{R|\Bbbk} &:= \bigoplus_{r\in R} R\widetilde{\mathrm{d}r} \Big/ N\\ &= \sum_{r\in R} R\,\mathrm{d}r, \quad \mathrm{d}r := \widetilde{\mathrm{d}r} \text{ 的像},\end{aligned}$$

称之为 $\Bbbk$-代数 R 的 Kähler 微分形式模; 它由以下泛性质刻画:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_R(\Omega_{R|\Bbbk}, M) &\xleftrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{\Bbbk}(R,M)\\ \varphi &\longmapsto [r \mapsto \varphi(\mathrm{d}r)] \qquad M : R\text{-模},\\ [\mathrm{d}r \mapsto D(r)] &\longleftarrow\!\!\shortmid D.\end{aligned}$$

请读者直接验证. 此同构表明 $r \mapsto \mathrm{d}r$ 给出的 $R \to \Omega_{R|\Bbbk}$ (对应 $\varphi = \mathrm{id}$) 是 “泛求导”. 相关内容理应是交换环论的主题, 点到为止.

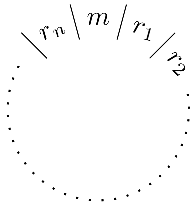
回到 $\mathrm{HH}_1(M)$. 设 M 为 R-模, 按 $rmr' := (rr')m$ 作成 (R,R)-双模. 由此立见 $d_1 : M\otimes R \to M$ 为 0, 而 $d_2 : M \otimes R^{\otimes 2} \to M \otimes R$ 的像由形如 $(rm|r') - (m|rr') + (r'm|r)$ 的元素生成. 综上可得双向的 $\Bbbk$-模同态

$$\begin{aligned}(M\otimes R)/\,\mathrm{im}(d_2) &\rightleftarrows M \underset{R}{\otimes} \Omega_{R|\Bbbk}\\ (m|r) + \mathrm{im}(d_2) &\longmapsto m \otimes \mathrm{d}r\\ (r'm|r) + \mathrm{im}(d_2) &\longleftarrow\!\!\shortmid m \otimes r'\,\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

既有 $\mathrm{im}(d_2)$ 和 $\Omega_{R|\Bbbk}$ 的描述, 例行的验证表明同态良定义而且互逆; 事实上, 它们还是 R-模的同构. 这就给出 $\mathrm{HH}_1(M) \simeq M \underset{R}{\otimes} \Omega_{R|\Bbbk}$. 特别地, $\mathrm{HH}_1(R) \simeq \Omega_{R|\Bbbk}$.

Hochschild 同调和上同调有丰富的内涵, 它与求导和微分形式的联系并非偶然. 习题将给出更多针对 Hochschild 上同调的诠释.

回到 Hochschild 链复形. 考虑到 R^e 在 $\mathsf{B}_n R$ 和在 M 上的作用, 直观的思路应是将 $C_n(R,M)$ 的元素 $(m|r_1|\cdots|r_n)$ 排列成环形



于是 $d_n(m|r_1|\cdots|r_n)$ 即以 $n+1$ 种方式抽杠, 交错加总的产物. 对特例 $M=R$, 图像有明显的旋转对称性. 从代数的视角, 我们对每个 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 定义 $\Bbbk$-模同态

$$\begin{aligned} t_n : R^{\otimes(n+1)} &\longrightarrow R^{\otimes(n+1)} \\ (r_0|\cdots|r_n) &\longmapsto (-1)^n\cdot(r_n|r_0|\cdots|r_{n-1}); \end{aligned}$$

这导致 $t_n^{n+1}=\mathrm{id}$.

旋转对称性通向**循环同调**理论. 从历史的角度, 研究循环同调至少有两个动机. 一是为了寻求 de Rham 理论在非交换情形的类比. 二是着眼于 K-理论的研究与应用, 包括指标定理的种种推广. 本节仅将 Hochschild 同调, 上同调与循环同调作为轻便的教具, 目的在熟悉复形操作, 只能浅尝辄止. 有心深入的读者可参阅专著, 如 [14, 24] 等.

对所有 $n\geq 0$, 命 $N_n := \mathrm{id}+t_n+\cdots+(t_n)^n\in\mathrm{End}_{\Bbbk}(R^{\otimes(n+1)})$. 定义链复形意义下的**循环双复形** $\mathrm{CC}(R)=(\mathrm{CC}(R)_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2}$ 为

$$\begin{tikzcd}
\vdots & & \vdots \arrow[d, "d_{q+1}"] & \vdots \arrow[d, "d'_{q+1}"] & \\
q & \cdots & R^{\otimes(q+1)} \arrow[l, "N_q"'] \arrow[d, "d_q"] & R^{\otimes(q+1)} \arrow[l, "\mathrm{id}-t_q"'] \arrow[d, "d'_q"] & \cdots \arrow[l] \\
q-1 & \cdots & R^{\otimes q} \arrow[l, "N_{q-1}"'] \arrow[d] & R^{\otimes q} \arrow[l, "\mathrm{id}-t_{q-1}"'] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \\
& \cdots & p:\text{偶数} & p+1:\text{奇数} & \cdots
\end{tikzcd}$$

各项都是 $\Bbbk$-模, $q<0$ 的项全设为 0; 态射 d_q 和 d'_q 的定义见诸 (3.8.2). 观察到

- 偶数列是 (3.8.1) 的 Hochschild 链复形 $C_\bullet(R,R)$.

◇ 奇数列是增广杠复形 $\mathsf{B}'R$, 但平移下标使它始于 0 次项. 于是引理 3.8.2 蕴涵奇数列皆正合, 事实上它们在 $\mathsf{K}(\Bbbk\text{-Mod})$ 中为 0.

为了说明 $\mathrm{CC}(R)$ 确实是双复形, 需要以下观察. 论证是初等而且有趣的, 而且没有本质上的困难, 故留作本章习题.

引理 3.8.9 设 R 为 $\Bbbk$-代数. 对所有 $q \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, 有 $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}\left(R^{\otimes(q+1)}, R^{\otimes q}\right)$ 中的等式

$$d_q(\mathrm{id} - t_q) = (\mathrm{id} - t_{q-1})d'_q, \quad d'_q N_q = N_{q-1} d_q.$$

对所有双复形 $C = (C_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}$ 和 $m \in \mathbb{Z}$, 定义其横向[4]平移 $C_{\mathrm{I}}[m]$ 为双复形 $(C_{m+i,j})_{i,j}$. 对所有 $p \in \mathbb{Z}$, 定义简单粗暴的横向截断函子 $\sigma_{\mathrm{I},\leq p}C$ (或 $\sigma_{\mathrm{I},\geq p}C$), 它将满足 $i > p$ (或 $i < p$) 的 $C_{i,j}$ 代换为 0, 其余不变. 因此我们有双复形的短正合列 (注意顺序!)

$$0 \to \sigma_{\mathrm{I},\leq p}C \to C \to \sigma_{\mathrm{I},\geq p+1}C \to 0. \tag{3.8.3}$$

此外, 对所有 $a \leq b$ 定义函子 $\sigma_{\mathrm{I},[a,b]} := \sigma_{\mathrm{I},\leq b}\sigma_{\mathrm{I},\geq a} = \sigma_{\mathrm{I},\geq a}\sigma_{\mathrm{I},\leq b}$.

将这些函子应用于 $\mathrm{CC}(R)$, 再取全复形 tot_{Π} (定义 3.5.4), 便抵达以下定义.

定义 3.8.10 (B. Feigin, B. Tsygan; A. Connes) 对 $\Bbbk$-代数 R 和任意 n, 定义

$$\begin{aligned} \mathrm{HP}_n(R) &:= \mathrm{H}_n\left(\mathrm{tot}_{\Pi}(\mathrm{CC}(R))\right) && \text{(周期循环同调)}, \\ \mathrm{HC}_n(R) &:= \mathrm{H}_n\left(\mathrm{tot}\left(\sigma_{\mathrm{I},\geq 0}\mathrm{CC}(R)\right)\right) && \text{(循环同调)}. \end{aligned}$$

它们都是函子 $\Bbbk\text{-Alg} \to \Bbbk\text{-Mod}$.

由于 $\sigma_{\mathrm{I},\geq 0}\mathrm{CC}(R)$ 落在第一象限, 其全复形仅涉及有限直和 $\bigoplus_{\substack{p+q=n \\ p,q\geq 0}} \mathrm{CC}_{p,q}(R)$, 故相应的 tot 不加下标.

按定义立见 $\mathrm{HC}_{<0}(R) = 0$, 而 $\mathrm{HC}_0(R)$ 等于 R 对 $\mathrm{im}[d_1 : R^{\otimes 2} \to R]$ 和 $\mathrm{im}[\mathrm{id} - t_0] = 0$ 取商的产物, 亦即 $R/[R,R]$. 习题将给出更多相对简单情形下的计算.

循环复形具备周期性 $\mathrm{CC}(R) = \mathrm{CC}(R)_{\mathrm{I}}[-2]$, 导致同构 $\mathrm{HP}_n(R) \xrightarrow{\sim} \mathrm{HP}_{n-2}(R)$. 对于循环同调, 对应的场景是"左移两格"的满态射

$$\begin{gathered} \sigma_{\mathrm{I},\geq 0}\mathrm{CC}(R) \to \left(\sigma_{\mathrm{I},\geq 0}\mathrm{CC}(R)\right)_{\mathrm{I}}[-2] \\ \mathrm{CC}(R)_{p,q} \to \begin{cases} \mathrm{CC}(R)_{p-2,q} \text{ (恒等)}, & p \geq 2 \\ 0, & 0 \leq p < 2. \end{cases} \end{gathered}$$

它的核由 $\mathrm{CC}(R)$ 的第 $0,1$ 列, 亦即子双复形 $\sigma_{\mathrm{I},[0,1]}\mathrm{CC}(R)$ 给出. 这就定出循环同调的 Connes 周期算子 $S : \mathrm{HC}_n(R) \to \mathrm{HC}_{n-2}(R)$.

定理 3.8.11 (A. Connes) 设 R 为 $\Bbbk$-代数. 我们有典范的长正合列

$$\cdots \xrightarrow{S} \mathrm{HC}_{n-1}(R) \xrightarrow{B} \mathrm{HH}_n(R) \xrightarrow{I} \mathrm{HC}_n(R) \xrightarrow{S} \mathrm{HC}_{n-2}(R) \to \cdots$$

[4]本书的惯例是以下标 I 代表横向操作, 以 II 代表纵向操作.

其中 S 是 Connes 周期算子, I 由嵌入 $C_\bullet(R,R) \xrightarrow{\text{第 0 列}} \sigma_{\mathrm{I},\geq 0}\mathrm{CC}(R)$ 给出, 而 B 是适当的连接同态.

证明 第一步是在 (3.8.3) 中取 $p=0$, 得到双复形的短正合列

$$0 \longrightarrow \text{第 0 列} \longrightarrow \sigma_{\mathrm{I},[0,1]}\mathrm{CC}(R) \longrightarrow \text{第 1 列} \longrightarrow 0.$$

取全复形只涉及有限直和; 逐次考察, 可见其产物仍是短正合列

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \text{第 0 列} \arrow[r] & \operatorname{tot}\left(\sigma_{\mathrm{I},[0,1]}\mathrm{CC}(R)\right) \arrow[r] & \text{第 1 列} \arrow[r] & 0 \\ & C_\bullet(R,R) \arrow[u, "\simeq"] & & \mathsf{B}'R. \arrow[u, "\simeq"] & \end{tikzcd}$$

已知 $\mathsf{B}'R$ 正合, 应用命题 3.6.4 的长正合列遂知 $C_\bullet(R,R) \to \operatorname{tot}\left(\sigma_{\mathrm{I},[0,1]}\mathrm{CC}(R)\right)$ 是复形的拟同构.

接着考虑定义 S 时提及的短正合列

$$0 \longrightarrow \sigma_{\mathrm{I},[0,1]}\mathrm{CC}(R) \longrightarrow \sigma_{\mathrm{I},\geq 0}\mathrm{CC}(R) \longrightarrow \left(\sigma_{\mathrm{I},\geq 0}\mathrm{CC}(R)\right)_{\mathrm{I}}[-2] \longrightarrow 0.$$

取全复形后仍是短正合列, 而根据上一步, 三个全复形的 n 次上同调分别等同于 $\mathrm{HH}_n(R)$, $\mathrm{HC}_n(R)$ 和 $\mathrm{HC}_{n-2}(R)$. 明所欲证. □

注记 3.8.12 以 $\mathrm{CC}'(R)^{p,q} := \operatorname{Hom}_{\Bbbk}\left(\mathrm{CC}(R)_{p,q}, \Bbbk\right)$ 定义上链复形意义下的循环双复形 $\mathrm{CC}'(R)$; 按定义 3.8.10 如法炮制, 得到

$$\begin{aligned} \mathrm{HP}^n(R) &:= \mathrm{H}^n\left(\operatorname{tot}_{\oplus}(\mathrm{CC}'(R))\right) && \text{(周期循环上同调)}, \\ \mathrm{HC}^n(R) &:= \mathrm{H}^n\left(\operatorname{tot}\left(\sigma_{\mathrm{I}}^{\geq 0}\mathrm{CC}'(R)\right)\right) && \text{(循环上同调)} \end{aligned}$$

等等, 其中 $\sigma_{\mathrm{I}}^{\geq 0}$ 仍代表横向的暴力截断函子. 这时定理 3.8.11 的长正合列仍有对应版本

$$\cdots \xrightarrow{S} \mathrm{HC}^{n+1}(R) \xrightarrow{I} \mathrm{HH}^{n+1}(R) \xrightarrow{B} \mathrm{HC}^n(R) \xrightarrow{S} \mathrm{HC}^{n+2}(R) \to \cdots$$

对应的 Connes 周期算子 S 来自于 "右移两格" 的单态射, 亦即

$$\sigma_{\mathrm{I}}^{\geq 0}\mathrm{CC}'(R) \to \left(\sigma_{\mathrm{I}}^{\geq 0}\mathrm{CC}'(R)\right)_{\mathrm{I}}[2].$$

随着之后掌握的工具渐多, 我们还会反复回归 Hochschild 同调, 上同调以及循环同调, 上同调的讨论.

3.9 截断函子

本节伊始, 选定加性范畴 $\mathcal{A}$.

定义 3.9.1 对复形 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}(\mathcal{A}))$ 采用以下术语, 并标注它们构成的全子范畴:

称呼	有界	下有界	上有界
条件	$\lvert n\rvert \gg 0 \implies X^n = 0$	$n \ll 0 \implies X^n = 0$	$n \gg 0 \implies X^n = 0$
全子范畴	$\mathsf{C}^{\mathrm{b}}(\mathcal{A})$	$\mathsf{C}^{+}(\mathcal{A})$	$\mathsf{C}^{-}(\mathcal{A})$

推而广之, 对于 $-\infty \leq s \leq t \leq +\infty$, 我们记 $\mathsf{C}^{[s,t]}(\mathcal{A})$ 为满足 $n \notin [s,t] \implies X^n = 0$ 的复形构成的全子范畴, 并且记 $\mathsf{C}^{\geq s}(\mathcal{A}) := \mathsf{C}^{[s,+\infty]}(\mathcal{A})$, $\mathsf{C}^{\leq t}(\mathcal{A}) := \mathsf{C}^{[-\infty,t]}(\mathcal{A})$.

这些全子范畴都是加性范畴, 而 $\mathsf{C}^{+}(\mathcal{A})$, $\mathsf{C}^{-}(\mathcal{A})$ 和 $\mathsf{C}^{\mathrm{b}}(\mathcal{A}) = \mathsf{C}^{+}(\mathcal{A}) \cap \mathsf{C}^{-}(\mathcal{A})$ 还是子 Abel 范畴. 平移函子 $[n]$ 保持 $\mathsf{C}^{+}(\mathcal{A})$, $\mathsf{C}^{-}(\mathcal{A})$ 和 $\mathsf{C}^{\mathrm{b}}(\mathcal{A})$ 不变, 但映 $\mathsf{C}^{[a,b]}(\mathcal{A})$ 为 $\mathsf{C}^{[a-n,b-n]}(\mathcal{A})$.

此外, $\mathcal{A}$ 自然地等同于 $\mathsf{C}^{\geq 0}(\mathcal{A}) \cap \mathsf{C}^{\leq 0}(\mathcal{A})$.

对于任意 $\star \in \{+,-,\mathrm{b}\}$, 态射同伦的概念 (定义 3.2.6) 可以限制到 $\mathsf{C}^{\star}(\mathcal{A})$ 上. 定义 3.2.8 因而有如下推广.

定义 3.9.2 对于 $\star \in \{+,-,\mathrm{b}\}$, 我们有 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 的加性全子范畴 $\mathsf{K}^{\star}(\mathcal{A})$, 它对平移函子保持封闭.

接下来假设 $\mathcal{A}$ 为 Abel 范畴. 我们将探讨如何将复形 X 的 $< n$ (或 $> n$) 次部分截断. 朴素的思路是将其余各项全换为 0. 此法简则简矣, 却打乱了上同调, 是故我们引入更精细的版本.

定义 3.9.3 (截断函子) 设 $\mathcal{A}$ 为 Abel 范畴, $n \in \mathbb{Z}$. 将复形 X 表作一列态射 $\cdots \to$

$X^n \to X^{n+1} \to \cdots$. 命

$$\begin{tikzcd}
\tau^{\leq n}X \arrow[d, hook] & \cdots \arrow[r] & X^{n-2} \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[r] & \ker(d^n) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \\
\tilde{\tau}^{\leq n}X \arrow[d, hook] & \cdots \arrow[r] & X^{n-2} \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[r] & X^n \arrow[r] & \mathrm{coim}(d^n) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \arrow[r] & \cdots \\
X \arrow[d, two heads] & \cdots \arrow[r] & X^{n-2} \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, two heads, "d^{n-1}"] & X^n \arrow[r] & X^{n+1} \arrow[r] & X^{n+2} \arrow[r] & \cdots \\
\tilde{\tau}^{\geq n}X \arrow[d, two heads] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathrm{im}(d^{n-1}) \arrow[r] & X^n \arrow[r] \arrow[d, two heads] & X^{n+1} \arrow[r] & X^{n+2} \arrow[r] & \cdots \\
\tau^{\geq n}X & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathrm{coker}(d^{n-1}) \arrow[r] & X^{n+1} \arrow[r] & X^{n+2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

其中省略的项是自明的, 垂直方向仅标注除 id 和 0 之外的态射. 这给出左侧各复形之间的态射; 注意到 $\mathrm{coim} \simeq \mathrm{im}$.

易见 $\tau^{\leq n}$, $\tilde{\tau}^{\leq n}$, $\tau^{\geq n}$, $\tilde{\tau}^{\geq n}$ 都是加性函子. 我们有 $\tau^{\leq n} = [-n] \circ \tau^{\leq 0} \circ [n]$, 对于 $\tilde{\tau}^{\leq n}$, $\tau^{\geq n}$, $\tilde{\tau}^{\geq n}$ 亦同.

此外, 若 $m \leq n$, 则有自明的满态射 $\tau^{\geq m}X \twoheadrightarrow \tau^{\geq n}X$ 和 $\tilde{\tau}^{\geq m}X \twoheadrightarrow \tau^{\geq n}X$, 以及自明的单态射 $\tau^{\leq m}X \hookrightarrow \tau^{\leq n}X$ 和 $\tilde{\tau}^{\leq m}X \hookrightarrow \tilde{\tau}^{\leq n}X$.

引理 3.9.4 上述诸态射对所有 $k \in \mathbb{Z}$ 诱导 $\mathcal{A}$ 中的同构

$$\mathrm{H}^k\left(\tau^{\leq n}X\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^k\left(\tilde{\tau}^{\leq n}X\right) \simeq \begin{cases} \mathrm{H}^k(X), & k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases},$$

$$\mathrm{H}^k\left(\tilde{\tau}^{\geq n}X\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^k\left(\tau^{\geq n}X\right) \simeq \begin{cases} \mathrm{H}^k(X), & k \geq n \\ 0, & k < n \end{cases},$$

以及 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的短正合列

$$\begin{gathered}
0 \to \tilde{\tau}^{\leq n-1}X \to \tau^{\leq n}X \to \mathrm{H}^n(X)[-n] \to 0, \\
0 \to \mathrm{H}^n(X)[-n] \to \tau^{\geq n}X \to \tilde{\tau}^{\geq n+1}X \to 0, \\
0 \to \tau^{\leq n}X \to X \to \tilde{\tau}^{\geq n+1}X \to 0, \\
0 \to \tilde{\tau}^{\leq n-1}X \to X \to \tau^{\geq n}X \to 0, \\
0 \to \tau^{\leq n}X \to \tilde{\tau}^{\leq n}X \to \mathrm{Cone}\left(\mathrm{id}_{\mathrm{im}(d_X^n)[-n-1]}\right) \to 0
\end{gathered}$$

此处 $\mathrm{H}^n(X)[-n]$ 按约定 3.1.7 理解. 所有态射对 X 皆具函子性.

证明 态射 $\tau^{\leq n}X \to \mathrm{H}^n(X)[-n]$ 在 n 次项是

$$\ker(d^n) \twoheadrightarrow \ker(d^n)/\,\mathrm{im}(d^{n-1}) = \mathrm{H}^n(X),$$

其余项则是零态射; $\mathrm{H}^n(X)[-n] \to \tau^{\geq n}X$ 在 n 次项是

$$\ker(d^n)/\operatorname{im}(d^{n-1}) \hookrightarrow X^n/\operatorname{im}(d^{n-1}) = \operatorname{coker}(d^{n-1}).$$

剩下的验证全是例行公事. □

因此 $\tau^{\leq n}$, $\tilde{\tau}^{\leq n}$ (或 $\tau^{\geq n}$, $\tilde{\tau}^{\geq n}$) 的效果确实是将次数 $> n$ (或 $< n$) 的上同调截断.

注记 3.9.5 对于复形 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}(\mathcal{A}))$, 套用定义–命题 3.4.1 的函子 σ 可得 $\sigma X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}))$. 精确到一些无害的正负号, 这相当于在复形中倒转箭头再翻转标号. 鉴于 ker 和 coker 的对偶性, $\tau^{\geq n}(X)$ 在此操作下对应到 $\tau^{\leq -n}(\sigma X) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}))$, 如此等等. 同理, 因为 im 和 coim 对偶, $\tilde{\tau}^{\geq n}(X) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}(\mathcal{A}))$ 对应于 $\tilde{\tau}^{\leq -n}(\sigma X) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}))$.

相较于 $\tilde{\tau}^{\leq n}$ 和 $\tilde{\tau}^{\geq n}$, 函子 $\tau^{\leq n}$ 和 $\tau^{\geq n}$ 有一些更方便的性质. 首先是伴随关系.

命题 3.9.6 对所有 $n \in \mathbb{Z}$, 我们有伴随关系

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X,Y) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}^{\leq n}(\mathcal{A})}\left(X, \tau^{\leq n}Y\right), \quad X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^{\leq n}(\mathcal{A})) \\
\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X,Y) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}^{\geq n}(\mathcal{A})}\left(\tau^{\geq n}X, Y\right), \quad Y \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^{\geq n}(\mathcal{A})).
\end{aligned}$$

证明 就截断的定义看是明白的. 请读者写下对应的单位和余单位态射: 它们或者是定义 3.9.3 写下的态射, 或者是 id. □

其次, $\tau^{\leq n}$ 和 $\tau^{\geq n}$ 可以下降到 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 的层面.

定义–命题 3.9.7 对所有 $n \in \mathbb{Z}$, 函子 $\tau^{\leq n}$ (或 $\tau^{\geq n}$) 自然地诱导从 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 到其自身的函子, 仍记为 $\tau^{\leq n}$ (或 $\tau^{\geq n}$).

证明 设 $h \in \mathrm{Hom}^{-1}(X,Y)$. 对 $\tau^{\leq n}$ 的情形, 取 $\overline{h}^n : \ker(d_X^n) \to Y^{n-1}$ 为 h^n 和 $\ker(d_X^n) \to X^n$ 的合成, 依照下图定义 $\overline{h} \in \mathrm{Hom}^{-1}\left(\tau^{\leq n}X, \tau^{\leq n}Y\right)$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X^{n-2} \arrow[r] \arrow[dl, "h^{n-2}"'] & X^{n-1} \arrow[r] \arrow[dl, "h^{n-1}"'] & \ker(d_X^n) \arrow[r] \arrow[dl, "\overline{h}^n"'] & 0 \arrow[r] \arrow[dl] & 0 \arrow[r] \arrow[dl] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y^{n-2} \arrow[r] & Y^{n-1} \arrow[r] & \ker(d_Y^n) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots;
\end{tikzcd}$$

不难看出 $\tau^{\leq n}\left(d^{-1}h\right) = d^{-1}\overline{h}$.

至于 $\tau^{\geq n}$ 的情形, 改取 $\underline{h}^{n+1} : X^{n+1} \to \operatorname{coker}(d_Y^{n-1})$ 为 h^{n+1} 和 $Y^n \to \operatorname{coker}(d_Y^{n-1})$ 的合成, 以此定义 $\underline{h} \in \mathrm{Hom}^{-1}\left(\tau^{\geq n}X, \tau^{\geq n}Y\right)$; 其余思路是类似的. □

以下简单而关键的性质直接导自定义 3.9.3.

命题 3.9.8 对所有整数 $a < b$, n 和 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ 都有

$$\begin{gathered}
\tau^{\leq a}\tau^{\geq b}(X) = 0 = \tau^{\geq b}\tau^{\leq a}(X), \\
\tau^{\leq n}\tau^{\geq n}(X) \simeq \mathrm{H}^n(X)[-n] \simeq \tau^{\geq n}\tau^{\leq n}(X) \quad (\text{典范同构}).
\end{gathered}$$

3.10 双复形的上同调

本节旨在探讨双复形 X 沿水平或垂直方向的上同调, 以及它们和全复形的上同调之间的关系. 相关结果将用于研究双函子的导出函子, 后者在早期文献中往往是以谱序列处理的. 相关论证取法 [10, §12.5].

令 $\mathcal{A}$ 为 Abel 范畴. 一如既往地, 当 $\mathcal{A}$ 为 $\Bbbk$-线性 Abel 范畴时, 所有结果都有相应的推广.

回忆到定义 3.5.3 (或更显豁的图表 (3.5.1)) 引入了一对可逆加性函子

$$\mathsf{C}^2(\mathcal{A}) \underset{F_{\mathrm{II}}}{\overset{F_{\mathrm{I}}}{\rightrightarrows}} \mathsf{C}(\mathsf{C}(\mathcal{A})),$$

以此对任意双复形 X 定义 (以下 $p, q, n \in \mathbb{Z}$):

$$\mathrm{H}^p_{\mathrm{I}}(X) := \mathrm{H}^p \circ F_{\mathrm{I}} = \text{复形} \begin{bmatrix} \vdots \\ {}^{\vartriangle}d \uparrow \\ \mathrm{H}^p(X^{\bullet, q+1}, {}^{\triangleright}d) \\ {}^{\vartriangle}d \uparrow \\ \mathrm{H}^p(X^{\bullet, q}, {}^{\triangleright}d) \\ {}^{\vartriangle}d \uparrow \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (\text{参见命题 } 3.6.1),$$

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^q_{\mathrm{II}}(X) &:= \mathrm{H}^q \circ F_{\mathrm{II}} \\ &= \text{复形} \left[\cdots \xrightarrow{{}^{\triangleright}d} \mathrm{H}^q(X^{p,\bullet}, {}^{\vartriangle}d) \xrightarrow{{}^{\triangleright}d} \mathrm{H}^q(X^{p+1,\bullet}, {}^{\vartriangle}d) \xrightarrow{{}^{\triangleright}d} \cdots \right], \\ \tau^{\leq n}_{\mathrm{I}} &:= (F_{\mathrm{I}})^{-1} \circ \tau^{\leq n} \circ F_{\mathrm{I}}, \\ \tau^{\leq n}_{\mathrm{II}} &:= (F_{\mathrm{II}})^{-1} \circ \tau^{\leq n} \circ F_{\mathrm{II}}, \end{aligned}$$

以及 $\tilde{\tau}^{\leq n}_{\mathrm{I}}$, $\tau^{\geq n}_{\mathrm{I}}$, $\tilde{\tau}^{\geq n}_{\mathrm{I}}$ 和 $\tilde{\tau}^{\leq n}_{\mathrm{II}}$, $\tau^{\geq n}_{\mathrm{II}}$, $\tilde{\tau}^{\geq n}_{\mathrm{II}}$. 于是仍有函子之间的态射 $\tau^{\leq n}_{\mathrm{I}} \to \tilde{\tau}^{\leq n}_{\mathrm{I}} \to \mathrm{id}_{\mathsf{C}^2(\mathcal{A})} \to \tilde{\tau}^{\geq n}_{\mathrm{I}} \to \tau^{\geq n}_{\mathrm{I}}$ 和 $\tau^{\leq n}_{\mathrm{II}} \to \tilde{\tau}^{\leq n}_{\mathrm{II}} \to \mathrm{id}_{\mathsf{C}^2(\mathcal{A})} \to \tilde{\tau}^{\geq n}_{\mathrm{II}} \to \tau^{\geq n}_{\mathrm{II}}$.

定义 3.10.1 对双复形 X 记 $\mathrm{Supp}(X) := \{(p, q) \in \mathbb{Z}^2 : X^{p,q} \neq 0\}$. 命 $\mathsf{C}^2_f(\mathcal{A})$ 为由 $\mathsf{C}^2(\mathcal{A})$ 的如下对象 X 构成的全子范畴: 我们要求对所有 $n \in \mathbb{Z}$, 集合 $\{(p, q) \in \mathrm{Supp}(X) : p + q = n\}$ 有限.

例 3.10.2 如果 $\mathrm{Supp}(X) \subset \mathbb{Z}^2_{\geq 0}$ (第一象限), 或 $\mathrm{Supp}(X) \subset \mathbb{Z}^2_{\leq 0}$ (第三象限), 又或者 $\mathrm{Supp}(X)$ 是有限多个列或行之并, 则 X 是 $\mathsf{C}^2_f(\mathcal{A})$ 的对象.

全复形 $\mathrm{tot}_{\oplus}(X)$ 和 $\mathrm{tot}_{\Pi}(X)$ 对 $\mathsf{C}^2_f(\mathcal{A})$ 的所有对象 X 都有定义, 无须对 $\mathcal{A}$ 另加条件. 而且此时 $\mathrm{tot}_{\oplus}(X) = \mathrm{tot}_{\Pi}(X)$; 由此得到加性函子 $\mathrm{tot} : \mathsf{C}^2_f(\mathcal{A}) \to \mathsf{C}(\mathcal{A})$.

以下观察是简单然而必要的: 设 X 是 $\mathsf{C}^2_f(\mathcal{A})$ 的对象, $n \in \mathbb{Z}$ 给定, 则存在有限子集 $S \subset \mathbb{Z}^2$, 使得 $\mathrm{H}^n(\mathrm{tot}(X))$ 由资料 $(X^{p,q}, {}^{\triangleright}d^{p,q}, {}^{\vartriangle}d^{p,q})_{(p,q)\in S}$ 完全确定.

引理 3.10.3 全复形函子 $\mathrm{tot} : \mathsf{C}^2_f(\mathcal{A}) \to \mathsf{C}(\mathcal{A})$ 是正合的; 参看定义 2.8.3.

证明 设 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 为 $\mathsf{C}^2_f(\mathcal{A})$ 中的正合列. 回忆相关定义, 例如命题 3.6.1, 可见问题在于对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 证

$$\bigoplus_{p+q=n} X^{p,q} \xrightarrow{\bigoplus_{p+q=n} f^{p,q}} \bigoplus_{p+q=n} Y^{p,q} \xrightarrow{\bigoplus_{p+q=n} g^{p,q}} \bigoplus_{p+q=n} Z^{p,q}$$

是 $\mathcal{A}$ 中的正合列; 因为直和有限, 一切归结为 $X^{p,q} \xrightarrow{f^{p,q}} Y^{p,q} \xrightarrow{g^{p,q}} Z^{p,q}$ 的正合性. □

次一引理纯粹是定义的操演, 适用于任意加性范畴 $\mathcal{A}$.

引理 3.10.4 设 $h \in \mathbb{Z}$, 而 Y 为 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 的对象. 由此构造

- ◇ $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 的对象 $Y[-h]$;
- ◇ $\mathsf{C}(\mathsf{C}(\mathcal{A}))$ 的对象 $Y_{\mathrm{I}}[-h]$: 其 h 次项为 Y, 其余项全为 0.

此时有 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的典范同构

$$(\mathrm{tot} \circ F_{\mathrm{I}}^{-1})\,\mathrm{Cone}\left(\mathrm{id}_{Y_{\mathrm{I}}[-h]}\right) \simeq \mathrm{Cone}\left(\mathrm{id}_{Y[-h]}\right),$$
$$(\mathrm{tot} \circ F_{\mathrm{I}}^{-1}) Y_{\mathrm{I}}[-h] \simeq Y[-h].$$

证明 按定义, $\mathrm{Cone}\left(\mathrm{id}_{Y_{\mathrm{I}}[-h]}\right)$ 是 $\mathsf{C}^{[h-1,h]}(\mathsf{C}(\mathcal{A}))$ 的对象 $Y \xrightarrow{\mathrm{id}_Y} Y$ (集中于次数 $h-1$ 和 h). 因此 $Z := F_{\mathrm{I}}^{-1}\,\mathrm{Cone}\left(\mathrm{id}_{Y_{\mathrm{I}}[-h]}\right)$ 等于下图所示的双复形:

$$\begin{array}{ccccc}
n \in \mathbb{Z} & & \vdots & & \vdots \\
 & & \uparrow{\scriptstyle d_Y} & & \uparrow{\scriptstyle d_Y} \\
(q = n-h+2) & & Y^{n-h+2} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & Y^{n-h+2} \\
 & & \uparrow{\scriptstyle d_Y} & & \uparrow{\scriptstyle d_Y} \\
(q = n-h+1) & & Y^{n-h+1} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & Y^{n-h+1} \\
 & & \vdots & & \vdots \\
 & & (p = h-1) & & (p = h)
\end{array}$$

而 $p \notin \{h-1, h\}$ 对应的列全为 0. 按全复形的定义 3.5.4 立见

$$\begin{aligned} \mathrm{tot}(Z)^n &= Y^{n-h+1} \oplus Y^{n-h} = Y[-h]^{n+1} \oplus Y[-h]^n \\ &= \mathrm{Cone}\left(\mathrm{id}_{Y[-h]}\right)^n, \\ d^n_{\mathrm{tot}(Z)} &= \begin{pmatrix} (-1)^{h-1} d_Y^{n-h+1} & 0 \\ \mathrm{id}_{Y^{n-h+1}} & (-1)^h d_Y^{n-h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d^{n+1}_{Y[-h]} & 0 \\ \mathrm{id}_{Y[-h]^{n+1}} & d^n_{Y[-h]} \end{pmatrix} \\ &= d^n_{\mathrm{Cone}\left(\mathrm{id}_{Y[-h]}\right)}. \end{aligned}$$

第二个同构可以类似地检验, 但更加容易, 故留给读者. □

引理 3.10.5 设 X 为 $\mathsf{C}^2_f(\mathcal{A})$ 的对象, $q \in \mathbb{Z}$.

(i) 自然态射 $\mathrm{tot}\left(\tau_{\mathrm{I}}^{\leq q} X\right) \to \mathrm{tot}\left(\tilde{\tau}_{\mathrm{I}}^{\leq q} X\right)$ 是拟同构;

(ii) 存在典范短正合列

$$0 \to \mathrm{tot}\left(\tilde{\tau}_{\mathrm{I}}^{\leq q-1}(X)\right) \to \mathrm{tot}\left(\tau_{\mathrm{I}}^{\leq q}(X)\right) \to \mathrm{H}^q_{\mathrm{I}}(X)[-q] \to 0.$$

证明 在 $\mathsf{C}(\mathsf{C}(\mathcal{A}))$ 中应用引理 3.9.4 得到短正合列

$$\begin{gathered} 0 \to \tau^{\leq q} F_{\mathrm{I}}(X) \to \tilde{\tau}^{\leq q} F_{\mathrm{I}}(X) \to \mathrm{Cone}\left(\mathrm{id}_{\mathrm{im}\left(d^q_{F_{\mathrm{I}} X}\right)_{\mathrm{I}}[-q-1]}\right) \to 0, \\ 0 \to \tilde{\tau}^{\leq q-1} F_{\mathrm{I}}(X) \to \tau^{\leq q} F_{\mathrm{I}}(X) \to \mathrm{H}^q_{\mathrm{I}}(X)_{\mathrm{I}}[-q] \to 0. \end{gathered}$$

符号 $(\cdots)_{\mathrm{I}}[\cdots]$ 的意义如引理 3.10.4. 现在对这些短正合列取 $\mathrm{tot} \circ F_{\mathrm{I}}^{-1}$. 引理 3.10.3 表明 tot 正合, 此外 F_{I}^{-1} 当然也正合; 代入引理 3.10.4 遂有 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的短正合列

$$\begin{gathered} 0 \to \mathrm{tot}\left(\tau_{\mathrm{I}}^{\leq q} X\right) \to \mathrm{tot}\left(\tilde{\tau}_{\mathrm{I}}^{\leq q} X\right) \to \mathrm{Cone}\left(\mathrm{id}_{\mathrm{im}(d^q_{F_{\mathrm{I}} X})[-q-1]}\right) \to 0, \\ 0 \to \mathrm{tot}\left(\tilde{\tau}_{\mathrm{I}}^{\leq q-1} X\right) \to \mathrm{tot}\left(\tau_{\mathrm{I}}^{\leq q} X\right) \to \mathrm{H}^q_{\mathrm{I}}(X)[-q] \to 0. \end{gathered}$$

第二式即 (ii). 至于 (i) 则是第一式配合命题 3.6.4 和 3.3.8 (i) 的产物. □

对于 $\mathsf{C}^2(\mathcal{A})$ 的任意对象 X, 记 $\mathrm{H}_{\mathrm{I}}(X)$ 和 $\mathrm{H}_{\mathrm{II}}(X)$ 为如下双复形 $(p, q \in \mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned} \left(\mathrm{H}_{\mathrm{I}}(X)^{p,\bullet}, {}^{\vartriangle}d^{p,\bullet}_{\mathrm{H}_{\mathrm{I}}(X)}\right) &:= \mathrm{H}^p_{\mathrm{I}}(X), \quad {}^{\vartriangleright}d^{\bullet,\bullet}_{\mathrm{H}_{\mathrm{I}}(X)} := 0, \\ \left(\mathrm{H}_{\mathrm{II}}(X)^{\bullet,q}, {}^{\vartriangleright}d^{\bullet,q}_{\mathrm{H}_{\mathrm{II}}(X)}\right) &:= \mathrm{H}^q_{\mathrm{II}}(X), \quad {}^{\vartriangle}d^{\bullet,\bullet}_{\mathrm{H}_{\mathrm{II}}(X)} := 0, \end{aligned} \tag{3.10.1}$$

换言之, $\mathrm{H}_{\mathrm{I}}(X)$ (或 $\mathrm{H}_{\mathrm{II}}(X)$) 是沿着 ${}^{\vartriangleright}d$ (或 ${}^{\vartriangle}d$) 方向对 X 取上同调的产物. 它们都是 $\mathsf{C}^2(\mathcal{A})$ 到自身的函子. 进而可定义 $\mathrm{H}_{\mathrm{II}}\,\mathrm{H}_{\mathrm{I}}(X)$ 和 $\mathrm{H}_{\mathrm{I}}\,\mathrm{H}_{\mathrm{II}}(X)$, 两者都满足 ${}^{\vartriangleright}d = 0 = {}^{\vartriangle}d$.

定理 3.10.6 设 $f: X \to Y$ 为 $\mathsf{C}^2_f(\mathcal{A})$ 中的态射. 若其诱导态射 $\mathrm{H}_{\mathrm{II}}\,\mathrm{H}_{\mathrm{I}}(X) \to \mathrm{H}_{\mathrm{II}}\,\mathrm{H}_{\mathrm{I}}(Y)$ 是同构, 则 $\mathrm{tot}(f): \mathrm{tot}(X) \to \mathrm{tot}(Y)$ 是拟同构.

将条件换为诱导态射 $\mathrm{H}_{\mathrm{I}}\,\mathrm{H}_{\mathrm{II}}(X) \to \mathrm{H}_{\mathrm{I}}\,\mathrm{H}_{\mathrm{II}}(Y)$ 是同构, 结论亦同.

证明　条件相当于说 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的态射 $\mathrm{H}^n_{\mathrm{I}}(f):\mathrm{H}^n_{\mathrm{I}}(X)\to\mathrm{H}^n_{\mathrm{I}}(Y)$ 对每个 $n\in\mathbb{Z}$ 皆是拟同构. 证明第一步是化约到下式成立的情形:

$$q\ll 0 \implies \tilde{\tau}^{\leq q}_{\mathrm{I}}(X)=0=\tilde{\tau}^{\leq q}_{\mathrm{I}}(Y). \tag{3.10.2}$$

诚然, 设 $r\in\mathbb{Z}$, 以引理 3.9.4 的函子截断, 可见原条件蕴涵 $\mathrm{H}^n_{\mathrm{I}}\left(\tau^{\geq r}_{\mathrm{I}}f\right):\mathrm{H}^n_{\mathrm{I}}\left(\tau^{\geq r}_{\mathrm{I}}X\right)\to\mathrm{H}^n_{\mathrm{I}}\left(\tau^{\geq r}_{\mathrm{I}}Y\right)$ 对所有 n 也是拟同构. 然而对于给定的 n, 从 $\mathsf{C}^2_f(\mathcal{A})$ 的定义易见 $r\ll 0$ 时有交换图表

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^n(\mathrm{tot}(X)) \arrow[r, "\mathrm{H}^n(\mathrm{tot}(f))"] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathrm{H}^n(\mathrm{tot}(Y)) \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathrm{H}^n\left(\mathrm{tot}(\tau^{\geq r}_{\mathrm{I}}X)\right) \arrow[r, "\mathrm{H}^n\left(\mathrm{tot}(\tau^{\geq r}_{\mathrm{I}}f)\right)"'] & \mathrm{H}^n\left(\mathrm{tot}(\tau^{\geq r}_{\mathrm{I}}Y)\right)
\end{tikzcd} \tag{3.10.3}$$

第二行的双复形满足 (3.10.2), 故今后不妨以 $\tau^{\geq r}_{\mathrm{I}}f$ 代替 f, 并假定 (3.10.2) 成立. 我们的目标是对选定的 n 证 $\mathrm{H}^n(\mathrm{tot}(f))$ 为同构.

对任意 $q\in\mathbb{Z}$, 引理 3.10.5 (ii) 给出行正合的交换图表

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{tot}\left(\tilde{\tau}^{\leq q-1}_{\mathrm{I}}X\right) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{q-1}"] & \mathrm{tot}\left(\tau^{\leq q}_{\mathrm{I}}X\right) \arrow[r] \arrow[d, "\beta_q"] & \mathrm{H}^q_{\mathrm{I}}(X)[-q] \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{tot}\left(\tilde{\tau}^{\leq q-1}_{\mathrm{I}}Y\right) \arrow[r] & \mathrm{tot}\left(\tau^{\leq q}_{\mathrm{I}}Y\right) \arrow[r] & \mathrm{H}^q_{\mathrm{I}}(Y)[-q] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中垂直箭头来自 f. 以下证明 α_q 和 β_q 皆为拟同构. 若 α_{q-1} 是拟同构, 则相应的长正合列的函子性 (命题 3.6.4) 结合命题 2.3.4 将蕴涵 β_q 也是拟同构. 另一方面, 引理 3.10.5 (i) 给出交换图表

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{tot}\left(\tau^{\leq q}_{\mathrm{I}}X\right) \arrow[r, "\text{拟同构}"] \arrow[d, "\beta_q"'] & \mathrm{tot}\left(\tilde{\tau}^{\leq q}_{\mathrm{I}}X\right) \arrow[d, "\alpha_q"] \\
\mathrm{tot}\left(\tau^{\leq q}_{\mathrm{I}}Y\right) \arrow[r, "\text{拟同构}"'] & \mathrm{tot}\left(\tilde{\tau}^{\leq q}_{\mathrm{I}}Y\right)
\end{tikzcd}$$

所以 β_q 是拟同构蕴涵 α_q 亦然. 由于 $q\ll 0$ 时 α_q 无非 $0\xrightarrow{\sim}0$, 由之递归地推得 α_q,β_q 对所有 q 都是拟同构.

回忆到 $n\in\mathbb{Z}$ 已选定. 和 (3.10.3) 的道理类似, 当 $q\gg 0$ 时有交换图表

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^n(\mathrm{tot}(X)) \arrow[r, "\mathrm{H}^n(\mathrm{tot}(f))"] & \mathrm{H}^n(\mathrm{tot}(Y)) \\
\mathrm{H}^n\left(\mathrm{tot}(\tau^{\leq q}_{\mathrm{I}}X)\right) \arrow[r, "\sim", "\mathrm{H}^n(\beta_q)"'] \arrow[u, "\simeq"] & \mathrm{H}^n\left(\mathrm{tot}(\tau^{\leq q}_{\mathrm{I}}Y)\right) \arrow[u, "\simeq"']
\end{tikzcd}$$

故 $\mathrm{H}^n(\mathrm{tot}(f))$ 确实为同构.

最后, 相同论证仍适用于 $\mathrm{H_I}\,\mathrm{H_{II}}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H_I}\,\mathrm{H_{II}}(Y)$ 的情形; 另一观点则是以命题 3.5.6 对换 $\mathrm{H_I}$ 和 $\mathrm{H_{II}}$. $\square$

以上证明颇费周折, 例 5.6.3 将介绍基于谱序列的另证.

推论 3.10.7 设 X 为 $\mathsf{C}^2_f(\mathcal{A})$ 的对象. 若 X 行正合, 换言之 $(X^{\bullet,q}, {}^{\triangleright}d)$ 对每个 $q \in \mathbb{Z}$ 都正合, 则 $\mathrm{tot}(X)$ 正合. 类似地, 若 X 列正合, 则 $\mathrm{tot}(X)$ 正合.

证明 若 X 行正合, 则 $\mathrm{H_{II}}\,\mathrm{H_I}(X) \xrightarrow{\sim} 0$, 因此定理 3.10.6 蕴涵 $\mathrm{tot}(X) \to \mathrm{tot}(0) = 0$ 是拟同构, 亦即 $\mathrm{tot}(X)$ 正合.

列正合情形的论证完全相同, 或者也可以借助命题 3.5.6 来相互过渡. $\square$

3.11 解消

设 $\mathcal{A}$ 为 Abel 范畴. 考虑复形 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}(\mathcal{A}))$. 若 X^n 对每个 $n \in \mathbb{Z}$ 都是 $\mathcal{A}$ 的内射对象 (或投射对象), 则称 X 由内射对象 (或投射对象) 组成. 莫忘一则平凡事实: 0 既是内射对象也是投射对象.

定义 3.11.1 设 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}(\mathcal{A}))$.

- 设 $X \to I$ 为 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的拟同构, 其中 $I \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^+(\mathcal{A}))$ 由内射对象组成, 则称 $X \to I$ 为 X 的**内射解消**.
- 设 $P \to X$ 为 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的拟同构, 其中 $P \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^-(\mathcal{A}))$ 由投射对象组成, 则称 $P \to X$ 为 X 的**投射解消**.

以 $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ 代 $\mathcal{A}$, 亦即倒转箭头, 显见内射解消和投射解消相对偶.

例 3.11.2 作为最初步也最经典的特例, 考虑 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ 的内射解消 $X \to I$. 定义只要求 $I \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^+(\mathcal{A}))$, 但我们希望取到 $I \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^{\geq 0}(\mathcal{A}))$. 方法是运用截断

$$X \to I \to \tau^{\geq 0} I.$$

为了说明其合成是内射解消, 须验证两条性质. 首先引理 3.9.4 说明这仍是拟同构. 其次, $\tau^{\geq 0} I$ 仍由内射对象组成. 何以故? 考虑短正合列 $0 \to \mathrm{im}\left(d_I^{n-1}\right) \to I^n \to \mathrm{coker}\left(d_I^{n-1}\right) \to 0$, 由于 $n \ll 0$ 时 $d_I^{n-1} = 0$ 而 $n < 0$ 时 $\mathrm{coker}\left(d_I^{n-1}\right) \simeq \mathrm{im}\left(d_I^n\right)$, 以引理 2.8.13 和 2.8.14 可递归地说明 $n \leq 0$ 时

$$I^n \simeq \mathrm{im}\left(d_I^{n-1}\right) \oplus \mathrm{coker}\left(d_I^{n-1}\right), \quad \mathrm{coker}\left(d_I^{n-1}\right) \text{ 是内射对象;}$$

取 $n = 0$ 可得 $\mathrm{coker}\left(d_I^{-1}\right)$ 是内射对象, 故 $\tau^{\geq 0} I$ 由内射对象组成.

由于实践中关心的是足够 “深” 的解消, 上述观察表明无妨以 $X \to \tau^{\geq 0} I$ 代替 $X \to I$, 使内射解消形如

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & I^0 & \longrightarrow & I^1 & \longrightarrow & I^2 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

这也可以摊平, 视同 $\mathcal{A}$ 的正合列

$$0 \to X \to I^0 \to I^1 \to \cdots, \quad \text{每个 } I^n \text{ 都是内射对象}, n \geq 0.$$

同理, 对于投射解消 $P \to X$, 以 $\tau^{\leq 0} P \to P \to X$ 的合成代替 $P \to X$, 不妨设其来自 $\mathcal{A}$ 的正合列

$$\cdots \to P^{-1} \to P^0 \to X \to 0, \quad \text{每个 } P^n \text{ 都是投射对象}, n \leq 0.$$

上式惯常以链复形的写法记为 $\cdots \to P_1 \to P_0 \to X \to 0$, 其中 $P_n := P^{-n}$.

问题在于内射或投射解消的存在性. 基于对偶性, 无妨先讨论内射解消的构造. 最简单的仍是 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ 的情形. 假定 $\mathcal{A}$ 有足够的内射对象, 见定义 2.8.16. 首先任取单态射 $X \to I^0$ 使得 I^0 为内射对象. 递归地假设已有正合列

$$0 \to X \to I^0 \to \cdots \to I^n, \quad n \geq 0,$$

使得 $I^0, \ldots, I^n$ 皆为内射对象. 存在内射对象 I^{n+1} 和单态射 $\operatorname{coker}\left[I^{n-1} \to I^n\right] \to I^{n+1}$, 取合成遂给出 $I^n \to I^{n+1}$, 使得 $0 \to X \to \cdots \to I^{n+1}$ 也正合. 反复操作即是 X 的内射解消.

在 $\mathcal{A}$ 有足够的投射对象的前提下, $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ 的投射解消 $\cdots \to P^0 \to X \to 0$ 其构造全然是对偶的. 这些构造可以扩及复形, 但需要一些有界条件, 详如下述.

定理 3.11.3 设 $\mathcal{A}^\flat$ 是 $\mathcal{A}$ 的加性全子范畴, 而且对 $\mathcal{A}$ 的每个对象 A 都存在单态射 $A \hookrightarrow B$ (或满态射 $B \twoheadrightarrow A$) 使得 $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}^\flat)$, 则

(i) 对 $\mathsf{C}^+(\mathcal{A})$ (或 $\mathsf{C}^-(\mathcal{A})$) 的所有对象 X, 存在拟同构

$$f : X \to I \quad (\text{或 } f : P \to X),$$

使得 f 单 (或满), 而且 $I \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^+(\mathcal{A}^\flat))$ (或 $P \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^-(\mathcal{A}^\flat))$).

(ii) 更精确地说, 若 $m \in \mathbb{Z}$ 而 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^{\geq m}(\mathcal{A}))$ (或 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^{\leq m}(\mathcal{A}))$), 则可取 $I \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^{\geq m}(\mathcal{A}))$ (或 $P \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^{\leq m}(\mathcal{A}))$).

作为推论, 若 $\mathcal{A}$ 有足够的内射对象 (或投射对象), 则如上之 X 有内射解消 $X \hookrightarrow I$ (或投射解消 $P \twoheadrightarrow X$).

证明 基于对偶性, 以下仅论 X 来自 $\mathsf{C}^+(\mathcal{A})$ 的版本. 对于 (i), 递归地假设已有交换图表

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[r, "d_X^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & X^n \arrow[r, "d_X^n"] \arrow[d, "f^n"] & X^{n+1} \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & I^{n-1} \arrow[r, "d_I^{n-1}"'] & I^n & &
\end{tikzcd}$$

使得第二行是 $\mathcal{A}^\flat$ 的对象构成的复形, $m \ll 0 \implies I^m = 0$, 每个 f^m 皆单 $(m \leq n)$, 而且当 $m \leq n-1$ 时 f^m 诱导同构 $\ker(d_X^m)\,/\,\mathrm{im}\left(d_X^{m-1}\right) \xrightarrow{\sim} \ker(d_I^m)\,/\,\mathrm{im}\left(d_I^{m-1}\right)$.

我们希望将图表第二行右延. 首先假设

$$f^n\left(\mathrm{im}\left(d_X^{n-1}\right)\right) = \mathrm{im}\left(d_I^{n-1}\right) \cap f^n\left(\ker\left(d_X^n\right)\right) = \mathrm{im}\left(d_I^{n-1}\right) \cap f^n(X^n); \tag{3.11.1}$$

留意到其中的包含关系 $\cdots \subset \cdots \subset \cdots$ 恒成立. 构造推出图表

$$\begin{tikzcd}
X^n/\ker\left(d_X^n\right) \arrow[r, hook, "\delta:\text{由 } d_X^n \text{ 诱导}"] \arrow[d, "\alpha:\text{由 } f^n \text{ 诱导}"'] \arrow[dr, phantom, "\boxplus"] & X^{n+1} \arrow[d, "\beta"] \\
I^n/\left(f^n\left(\ker\left(d_X^n\right)\right) + \mathrm{im}\left(d_I^{n-1}\right)\right) \arrow[r, "\eta"'] & T
\end{tikzcd}$$

注意到 f^n 单, 而 (3.11.1) 蕴涵

$$\begin{aligned}
\left(f^n\left(\ker\left(d_X^n\right)\right) + \mathrm{im}\left(d_I^{n-1}\right)\right) \cap f^n(X^n) &\overset{\text{定理 } 2.6.10}{=} f^n\left(\ker\left(d_X^n\right)\right) + \left(\mathrm{im}\left(d_I^{n-1}\right) \cap f^n(X^n)\right) \\
&= f^n\left(\ker\left(d_X^n\right)\right),
\end{aligned}$$

所以 α 也是单态射.

应用命题 2.1.6 两次, 可见推出图表中的 β 和 η 亦单. 取单态射 $T \hookrightarrow I^{n+1}$ 使得 $I^{n+1} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}^\flat)$, 由之得到合成态射

$$d_I^n : I^n \twoheadrightarrow I^n/\left(f^n\left(\ker\left(d_X^n\right)\right) + \mathrm{im}\left(d_I^{n-1}\right)\right) \xrightarrow{\eta} T \hookrightarrow I^{n+1},$$

$$f^{n+1} : X^{n+1} \xrightarrow{\beta} T \hookrightarrow I^{n+1}.$$

显见 $d_I^n d_I^{n-1} = 0$ 而 f^{n+1} 单, $d_I^n f^n = f^{n+1} d_X^n$. 单态射 f^n 对上同调诱导

$$\begin{aligned}
\frac{\ker\left(d_X^n\right)}{\mathrm{im}\left(d_X^{n-1}\right)} \longrightarrow \frac{\ker\left(d_I^n\right)}{\mathrm{im}\left(d_I^{n-1}\right)} &= \frac{f^n\left(\ker d_X^n\right) + \mathrm{im}\left(d_I^{n-1}\right)}{\mathrm{im}\left(d_I^{n-1}\right)} \\
(\because \text{定理 } 2.6.8 \text{ (iii)}) \quad &\simeq \frac{f^n\left(\ker d_X^n\right)}{f^n\left(\ker d_X^n\right) \cap \mathrm{im}\left(d_I^{n-1}\right)};
\end{aligned}$$

依据 (3.11.1) 立见此为同构. 右延成功.

现在说明在一般状况下如何修改 I^n 以化约到 (3.11.1) 成立的情形. 兹考虑典范态射

$$I^n \underset{p_1}{\overset{\iota_1}{\rightleftarrows}} I^n \oplus \left(X^n/\,\mathrm{im}\left(d_X^{n-1}\right)\right) \underset{p_2}{\overset{\iota_2}{\leftrightarrows}} X^n/\,\mathrm{im}\left(d_X^{n-1}\right) \overset{q}{\twoheadleftarrow} X^n.$$

任选 $J \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}^\flat)$ 和单态射 $j : I^n \oplus \left(X^n / \operatorname{im}\left(d_X^{n-1}\right)\right) \hookrightarrow J$. 定义合成态射

$$f' : X^n \xrightarrow{(f^n, \iota_2 q)} I^n \oplus \left(X^n / \operatorname{im}\left(d_X^{n-1}\right)\right) \xrightarrow{j} J,$$

$$d' : I^{n-1} \xrightarrow{d_I^{n-1}} I^n \xrightarrow{\iota_1} I^n \oplus \left(X^n / \operatorname{im}\left(d_X^{n-1}\right)\right) \xrightarrow{j} J.$$

容易看出 f' 单, $\ker(d') = \ker\left(d_I^{n-1}\right)$ 和 $f' d_X^{n-1} = d' f^{n-1}$.

此外, 在 $I^n \oplus \left(X^n / \operatorname{im}\left(d_X^{n-1}\right)\right)$ 中操作可见

$$f'(X^n) \cap \operatorname{im}(d') = f'\left(\operatorname{im}\left(d_X^{n-1}\right)\right).$$

这表明以 $d' : I^{n-1} \to J$ (或 $f' : X^n \to J$) 代替 $d_I^{n-1} : I^{n-1} \to I^n$ (或 $f^n : X^n \to I^n$), 可以确保 (3.11.1) 成立.

最后讨论 (ii). 在上述构造中取 $\cdots = I^{m-2} = I^{m-1} = 0$. 显见 (3.11.1) 对 $n = m-1$ 成立 (各项全为零), 所以图表右延过程中不产生次数 $< m$ 的非零项. 明所欲证 □

推论 3.11.4 设 $\mathcal{A}$ 有足够的内射对象 (或投射对象), 则 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}(\mathcal{A}))$ 有内射解消 $X \to I$ (或投射解消 $P \to X$) 当且仅当 $n \ll 0$ (或 $n \gg 0$) 时 $\mathrm{H}^n(X) = 0$.

证明 就内射解消的情形为例. 解消定义中的拟同构条件导致 “仅当” 方向. 而在 $m \ll 0$ 时, 截断函子给出拟同构 $X \to \tau^{\geq m} X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^+(\mathcal{A}))$, 依此将 “当” 的方向化约到命题 3.11.3. □

内射或投射解消的理论价值可以从以下基本结果得到说明, 它还蕴涵内射解消或投射解消在同伦意义下唯一.

定理 3.11.5 取定 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的拟同构 $\alpha : X \to Y$.

◇ 给定态射 $\gamma : X \to I$, 其中 I 是 $\mathsf{C}^+(\mathcal{A})$ 的对象, 由内射对象组成. 在 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 中存在唯一的态射 β 使下图交换:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"'] & Y \arrow[dl, "\beta"] \\ I & \end{tikzcd}$$

◇ 给定态射 $\gamma : P \to Y$, 其中 P 是 $\mathsf{C}^-(\mathcal{A})$ 的对象, 由投射对象组成. 在 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 中存在唯一的态射 β 使下图交换:

$$\begin{tikzcd} Y & X \arrow[l, "\alpha"'] \\ P \arrow[u, "\gamma"] \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

两个断言当然相互对偶. 稍后的定理 4.4.1 之后将给予简洁的处理. 本章的习题部分则另有直接论证, 而且能进一步说明当 α 单时能取 β 使图表在 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中交换. 不论哪种进路, 都离不开以下性质.

引理 3.11.6 设 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 的对象 X 零调.

- ◇ 若 $\mathsf{C}^+(\mathcal{A})$ 的对象 I 由内射对象组成, 则 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(X, I) = 0$.
- ◇ 若 $\mathsf{C}^-(\mathcal{A})$ 的对象 P 由投射对象组成, 则 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(P, X) = 0$.

证明 处理 I 的情形即足. 取定 $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X, I)$. 回顾同伦定义 3.2.6, 我们寻求一族态射 $h^n : X^n \to I^{n-1}$, 其中 n 取遍 $\mathbb{Z}$, 使得

$$\alpha^n = d_I^{n-1} h^n + h^{n+1} d_X^n, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{3.11.2}$$

递归地假设已有 $\ldots, h^{n-1}, h^n$ 使 (3.11.2) 对 $\ldots, \alpha^{n-2}, \alpha^{n-1}$ 成立. 这是合理的: 当 $n \ll 0$ 时, 可以取 $\ldots, h^{n-1}, h^n$ 全为 0. 我们寻求虚线标出的态射

$$\begin{tikzcd}
 & I^n & \\
X \arrow[ur, "\alpha^n - d_I^{n-1} h^n"] \arrow[r, two heads, "d_X^n"'] & \mathrm{im}\,(d_X^n) \arrow[u, dashed, "\beta"] \arrow[r, hook] & X^{n+1} \arrow[ul, dashed, "h^{n+1}"']
\end{tikzcd}$$

使得全图交换. 首先,

$$\left(\alpha^n - d_I^{n-1} h^n\right) d_X^{n-1} = d_I^{n-1} \alpha^{n-1} - d_I^{n-1} \left(\alpha^{n-1} - d_I^{n-2} h^{n-1}\right) = 0.$$

因为 X 零调, 这诱导图示之态射 β. 其次, 因为 I^n 是内射对象, β 能延拓为 $h^{n+1} : X^{n+1} \to I^n$. 明所欲证. □

按导出范畴的视角, 定理 3.11.3 和 3.11.5 提供的信息已足够开展导出函子的研究. 行将介绍的几种解消则经常搭配谱序列来运用, 见 §5.6. 以下针对内射版本进行表述. 我们需要一些准备.

引理 3.11.7 设 $A, C \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}(\mathcal{A}))$. 对每个 $n \in \mathbb{Z}$ 定义 $B^n := A^n \oplus C^n$, 带有自明的态射 $A^n \xrightarrow{i^n} B^n \xrightarrow{p^n} C^n$. 我们有双射

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(C, A[1]) \xrightarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{c|l} (d_B^n)_{n\in\mathbb{Z}} & \text{使 } (B^n, d_B^n)_n \text{ 成为复形, 而且} \\ & 0 \to A \xrightarrow{(i^n)_n} B \xrightarrow{(p^n)_n} C \to 0 \text{ 正合} \end{array} \right\},$$

方式是映 $\delta : C \to A[1]$ 为矩阵表法确定的态射族

$$d_B^n = \begin{pmatrix} d_A^n & \delta^n \\ 0 & d_C^n \end{pmatrix} : B^n \to B^{n+1}.$$

证明 一旦知道 $(B^n, d_B^n)_n$ 成为复形, 而且 $(i^n)_n$ 和 $(p^n)_n$ 是复形的态射, 则 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 的正合性可以逐项地检验, 不在话下.

使 $d_B^n i^n = i^{n+1} d_A^n$ 和 $d_C^n p^n = p^{n+1} d_B^n$ 恒成立的充要条件是存在一族 $\delta^n : C^n \to A^{n+1}$, 使得 d_B^n 能表为断言中的上三角矩阵. 问题归结为刻画使 $d_B^{n+1} d_B^n = 0$ 的 $(\delta^n)_n$. 例行的计算给出充要条件 $d_A^{n+1}\delta^n + \delta^{n+1} d_C^n = 0$, 亦即 $d_{A[1]}^n \delta^n = \delta^{n+1} d_C^n$. □

命题 3.11.8 (马蹄引理) 设 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 是 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的短正合列, $A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^+(\mathcal{A}))$. 任取性质如定理 3.11.3 所述的内射解消 $\epsilon : A \to I$ 和 $\eta : C \to K$, 则这些资料扩充为 $\mathsf{C}^+(\mathcal{A})$ 中的行正合交换图表

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r] & J \arrow[r] & K \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[u, "\epsilon"] & B \arrow[r] \arrow[u, "\kappa"] & C \arrow[r] \arrow[u, "\eta"'] & 0 \end{tikzcd}$$

使得 $\kappa : B \to J$ 也是内射解消, 而且 κ 单.

读者不妨尝试对 $A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ 的特例给出相对简单的证明.

证明 在 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中构造推出图表

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r] & L \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[u, "\epsilon"] \arrow[ur, phantom, "\boxplus"] & B \arrow[r] \arrow[u] & C \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{id}"'] & 0 \end{tikzcd}$$

此处用到两则事实:

- ◇ 推出保余核 C;
- ◇ 命题 2.1.6 和 $A \to B$ 的单性蕴涵 $I \to L$ 也是单态射.

特别地, 上图仍是行正合交换图表, 因而 $L \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^+(\mathcal{A}))$. 同样应用命题 2.1.6 和 ϵ 单可得 $B \to L$ 亦单.

由于 I^n 内射, 引理 2.8.13 蕴涵短正合列 $0 \to I^n \to L^n \to C^n \to 0$ 对每个 n 皆分裂, 给出同构 $\Phi^n : L^n \xrightarrow{\sim} I^n \oplus C^n$. 引理 3.11.7 确定 $\delta : C \to I[1]$ 使得

$$\begin{tikzcd} L^n \arrow[r, "\Phi^n", "\sim"'] \arrow[d, "d_L^n"'] & I^n \oplus C^n \arrow[d, "e^n"] \\ L^{n+1} \arrow[r, "\sim", "\Phi^{n+1}"'] & I^{n+1} \oplus C^{n+1} \end{tikzcd} \quad \text{交换, 其中 } e^n := \begin{pmatrix} d_I^n & \delta^n \\ 0 & d_C^n \end{pmatrix}, \tag{3.11.3}$$

同样可用引理 3.11.7 从任意 $\theta : K \to I[1]$ 构造复形 J, 使得

$$J^n := I^n \oplus K^n, \quad d_J^n := \begin{pmatrix} d_I^n & \theta^n \\ 0 & d_K^n \end{pmatrix}, \quad 0 \to I \to J \to K \to 0 \text{ 正合.}$$

我们希望取 θ 使得 $L^n \xrightarrow[\sim]{\Phi^n} I^n \oplus C^n \xrightarrow{(\mathrm{id}, \eta^n)} J^n$ 给出态射 $L \to J$. 倘若此性质成立, 则 $L \to J$ 单; 记 κ 为 $B \to L \to J$ 的合成, 它仍然单. 容易验证断言中的图表交换. 由于

ϵ 和 η 都是拟同构, 命题 3.6.4 的长正合列, 其函子性连同五项引理 (命题 2.3.4) 表明 κ 也是拟同构, 因而是所求的内射解消.

如何取 θ? 为了使上述的 $L^n \to J^n$ 成为复形的态射, 根据 (3.11.3), 充要条件是

$$\begin{pmatrix} \mathrm{id}_{I^{n+1}} & 0 \\ 0 & \eta^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_I^n & \delta^n \\ 0 & d_K^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_I^n & \theta^n \\ 0 & d_K^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{I^n} & 0 \\ 0 & \eta^n \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z};$$

换言之, $\delta = \theta\eta$. 由于拟同构 η 逐项单, 而 I 由内射对象组成, 本章的一道习题将确保存在 $\theta : K \to I[1]$ 使得 $\theta\eta = \delta$. 证毕. □

为了陈述下一个结果, 我们对给定的复形 X 和每个 $p \in \mathbb{Z}$ 定义

$$B^p := \mathrm{im}\left(d_X^{p-1}\right), \quad Z^p := \ker\left(d_X^p\right), \quad H^p := Z^p/B^p = \mathrm{H}^p(X),$$

依此将 X 拆解为以下短正合列

$$0 \to Z^p \to X^p \xrightarrow{d_X^p} B^{p+1} \to 0, \quad 0 \to B^p \to Z^p \to H^p \to 0.$$

Cartan–Eilenberg 解消可设想为这些短正合列的同步解消.

定理 3.11.9 (H. Cartan, S. Eilenberg) 设 $\mathcal{A}$ 有足够的内射对象. 对 $\mathsf{C}^+(\mathcal{A})$ 的每个对象 X, 存在满足以下条件的双复形 I, 连同 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的态射 $\epsilon : X \to (I^{\bullet,0}, {}^{\triangleright}d^{\bullet,0})$, 其中 ${}^{\triangleright}d$ 和 ${}^{\triangle}d$ 来自 I 的双复形结构 (定义 3.5.1):

(i) 对所有 $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ 都有 $q < 0 \implies I^{p,q} = 0$.

(ii) 取 $N \in \mathbb{Z}$ 使得 $n < N \implies X^n = 0$, 则对所有 $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ 都有 $p < N \implies I^{p,q} = 0$.

(iii) 对每个 $p \in \mathbb{Z}$, 我们有 $X^p \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ 的内射解消

$$0 \to X^p \xrightarrow{\epsilon^p} I^{p,0} \xrightarrow{{}^{\triangle}d^{p,0}} I^{p,1} \xrightarrow{{}^{\triangle}d^{(p,1)}} \cdots.$$

(iv) 上述态射诱导 $Z^p := \ker\left(d_X^p\right)$ 的内射解消

$$0 \to \ker\left(d_X^p\right) \to \ker\left({}^{\triangleright}d^{p,0}\right) \to \ker\left({}^{\triangleright}d^{p,1}\right) \to \cdots.$$

(v) 类似地, $B^{p+1} := \mathrm{im}\left(d_X^p\right)$ 有内射解消

$$0 \to \mathrm{im}\left(d_X^p\right) \to \mathrm{im}\left({}^{\triangleright}d^{p,0}\right) \to \mathrm{im}\left({}^{\triangleright}d^{p,1}\right) \to \cdots.$$

(vi) 类似地, $H^p := \mathrm{H}^p(X)$ 有内射解消

$$0 \to \mathrm{H}^p(X) \to \underbrace{\mathrm{H}^p\left(I^{\bullet,0}, {}^{\triangleright}d\right) \to \mathrm{H}^p\left(I^{\bullet,1}, {}^{\triangleright}d\right) \to \cdots}_{=\mathrm{H}_{\mathrm{I}}^p(I),\ \text{请见 §3.10}}.$$

具备上述性质的资料 (I, ϵ) 称为 X 的 **Cartan–Eilenberg 解消**.

证明 取 $N \in \mathbb{Z}$ 使得 $n < N \implies X^n = 0$. 之前已经定义了短正合列

$$\begin{aligned} 0 \to Z^N \to X^N \to B^{N+1} \to 0, \qquad & 0 \to B^{N+1} \to Z^{N+1} \to H^{N+1} \to 0, \\ 0 \to Z^{N+1} \to X^{N+1} \to B^{N+2} \to 0, \qquad & 0 \to B^{N+2} \to Z^{N+2} \to H^{N+2} \to 0, \\ & \vdots \end{aligned}$$

为每个 H^n (或 B^n) 循例 3.11.2 的方式选定内射解消, 当 $n < N$ (或 $n \leq N$) 时取之为 $0 \to 0$.

- 注意到 $Z^N = H^N$. 命题 3.11.8 将 Z^N 和 B^{N+1} 的内射解消一道扩充为 X^N 的内射解消 $I^{N,\bullet}$, 与第一个短正合列相容.
- 其次, 以命题 3.11.8 将 B^{N+1} 连同 H^{N+1} 的内射解消一道扩充为 Z^{N+1} 的内射解消, 与第二个短正合列相容.
- 现在重复同样操作, 得到 X^{N+1} 的内射解消 $I^{N+1,\bullet}$, 连同 Z^{N+2} 的内射解消, 分别与第三和第四个短正合列相容.

依此类推, 对每个 n 得到内射解消 $X^n \to I^{n,0} \to I^{n,1} \to \cdots$, 当 $n < N$ 时 $I^{n,\bullet} := 0$. 以上构造也指明如何定义 $I^{n,m} \to I^{n,m+1}$ 以得到双复形 $(I, {}^{\triangleright}d, {}^{\vartriangle}d)$. 明所欲证. $\square$

注记 3.11.10 对所有 $p, q \in \mathbb{Z}$, Cartan–Eilenberg 解消中的短正合列

$$\begin{gathered} 0 \to \ker\left({}^{\triangleright}d^{p,q}\right) \to I^{p,q} \xrightarrow{{}^{\triangleright}d^{p,q}} \operatorname{im}\left({}^{\triangleright}d^{p,q}\right) \to 0, \\ 0 \to \operatorname{im}\left({}^{\triangleright}d^{p-1,q}\right) \to \ker\left({}^{\triangleright}d^{p,q}\right) \to \underbrace{\mathrm{H}^p\left(I^{\bullet,q}, {}^{\triangleright}d\right)}_{=:\mathrm{H}_{\mathrm{I}}(I)^{p,q}} \to 0 \end{gathered}$$

的每一项都是内射对象, 引理 2.8.13 蕴涵它们分裂. 因此它们在任何加性函子 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 作用后依然正合. 于是 F 保持 Cartan–Eilenberg 解消中的横向上同调.

注记 3.11.11 Cartan–Eilenberg 解消给出为 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^+(\mathcal{A}))$ 构造内射解消的另一种迂回手段. 首先将 X 看成双复形, 第 0 行 $(X^{\bullet,0}, {}^{\triangleright}d^{\bullet,0})$ 为 X, 其余为 0. 易见 $\epsilon : X \to I$ 成为 $\mathsf{C}^2_f(\mathcal{A})$ 中的态射. 按 §3.10 的符号, 对 X 和 I 先取竖向上同调 H_{II}, 再取横向上同调 H_{I}; 不难验证诱导态射 $\mathrm{H}_{\mathrm{I}}\,\mathrm{H}_{\mathrm{II}}(X) \to \mathrm{H}_{\mathrm{I}}\,\mathrm{H}_{\mathrm{II}}(I)$ 为同构. 定理 3.10.6 遂表明

$$\mathrm{tot}(\epsilon) : X = \mathrm{tot}(X) \to \mathrm{tot}(I)$$

是 $\mathsf{C}^+(\mathcal{A})$ 中的拟同构. 注意到 $\mathrm{tot}^n(I)$ 对每个 $n \in \mathbb{Z}$ 都是内射对象的有限直和. 于是我们得到内射解消 $X \to \mathrm{tot}(I)$.

3.12 经典导出函子

本节目的是在不使用导出范畴语言的前提下, 说明如何对有足够内射对象 (或投射对象) 的 Abel 范畴探讨种种左导出函子 (或右导出函子); 这已经囊括应用中常见的许多上同调理论. 具体定义依赖于 §3.11 介绍的内射解消 (或投射解消).

定义 3.12.1 设 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 为 Abel 范畴之间的加性函子.

- ◇ 设 $\mathcal{A}$ 有足够的内射对象. 对每个 $X \in \mathsf{C}^+(\mathcal{A})$ 选取内射解消 $X \to I$; 对每个 $n \in \mathbb{Z}$, 定义 F 的第 n 次**右导出函子** $\mathrm{R}^n F$ 在 X 处的取值为

$$\mathrm{R}^n F(X) := \mathrm{H}^n(\mathsf{C}F(I)).$$

- ◇ 设 $\mathcal{A}$ 有足够的投射对象. 对每个 $X \in \mathsf{C}^-(\mathcal{A})$ 选取投射解消 $P \to X$; 对每个 $n \in \mathbb{Z}$, 定义 F 的第 n 次**左导出函子** $\mathrm{L}^n F$ 在 X 处的取值为

$$\mathrm{L}^n F(X) := \mathrm{H}^n(\mathsf{C}F(P)).$$

这些函子取值都在 $\mathcal{B}$ 中. 对于左导出函子, 另有常见的记法是 $\mathrm{L}_n F := \mathrm{L}^{-n} F$. 依构造, 它们自带一族典范态射 $\mathrm{H}^n(\mathsf{C}F(X)) \to \mathrm{R}^n F(X)$ 和 $\mathrm{L}^n F(X) \to \mathrm{H}^n(\mathsf{C}F(X))$.

这一定义留下几个问题. 首先, 它们在何种意义下依赖于解消的选取? 其次, 以上仅是对象层次的定义, 如何将其升级为函子? 左右两种导出函子显然相对偶, 故以下仅论右导出函子. 我们且从第二个问题入手, 将基本工具表述成一则引理.

引理 3.12.2 考虑 $\mathsf{C}^+(\mathcal{A})$ 中的图表 (实线部分)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & I \arrow[d, dashed, "\beta"] \\ Y \arrow[r] & J \end{tikzcd} \qquad \begin{aligned} X \to I &: \ \text{拟同构}, \\ Y \to J &: \ \text{内射解消}, \\ f &: \ \text{任意态射}, \end{aligned}$$

此时在 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 中存在唯一的态射 β, 使得图表在 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 中交换.

证明 对 $X \to I$ 和 $X \xrightarrow{f} Y \to J$ 应用定理 3.11.5. □

反转箭头可在 $\mathsf{C}^-(\mathcal{A})$ 中得到投射解消的版本. 事实上, 本章习题将证明当 $X \hookrightarrow I$ 时可取 β 使图表在 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中交换. 由于本节关心的主要是 $\mathrm{H}^n(\beta)$, 故 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 版本已然足够.

转回导出函子的讨论. 在 $\mathsf{C}^+(\mathcal{A})$ 中考虑 $f : X \to Y$ 和内射解消 $X \to I$, $Y \to J$. 代入引理 3.12.2, 可见对于所有 $n \in \mathbb{Z}$, 态射

$$\mathrm{R}^n F(f) := \mathrm{H}^n(\mathsf{K}F\beta) : \ \mathrm{H}^n(\mathsf{K}F(I)) \to \mathrm{H}^n(\mathsf{K}F(J))$$

仅依赖 f 和 $X \to I$, $Y \to J$, 而且一旦选定内射解消, 则有

$$\begin{gathered}\mathrm{R}^n F(f_1 + f_2) = \mathrm{R}^n F(f_1) + \mathrm{R}^n F(f_2),\\ \mathrm{R}^n F(gf) = \mathrm{R}^n F(g)\, \mathrm{R}^n F(f), \quad \mathrm{R}^n F(\mathrm{id}) = \mathrm{id}.\end{gathered}$$

取 $X = Y$, $f = \mathrm{id}_X$, 则上述讨论还蕴涵不同的内射解消给出相同之 $(\mathrm{R}^n F)(X)$, 精确到唯一的同构. 这一切表明 $\mathrm{R}^n F(X)$ 一如范畴论中种种由泛性质刻画的对象, 在典范同构的意义下不依赖辅助资料 (内射解消) 的选取, 并且 $\mathrm{R}^n F : \mathsf{C}^+(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}$ 是加性函子.

按构造, 如果 $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 都是加性函子, 则每个态射 $F \to G$ 都典范地对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 诱导 $\mathrm{R}^n F \to \mathrm{R}^n G$. 一旦取定内射解消 $X \to I$, 则 $\mathrm{R}^n F(X) \to \mathrm{R}^n G(X)$ 具体由 $\mathsf{C}F(I) \to \mathsf{C}G(I)$ 确定. 类似地, 它也诱导 $\mathrm{L}_n F \to \mathrm{L}_n G$.

约定 3.12.3 以下谈论加性函子 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 的右导出函子 (或左导出函子) 时, 总默认 $\mathcal{A}$ 有足够的内射对象 (或投射对象).

定理 3.12.4 (导出函子的长正合列) 设 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 为 Abel 范畴之间的加性函子. 考虑 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的短正合列 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$.

◇ 设 $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^+(\mathcal{A}))$, 此时存在一族典范态射 $\delta^n = \delta^n_{X,Y,Z} : \mathrm{R}^n F(Z) \to \mathrm{R}^{n+1} F(X)$ (其中 $n \in \mathbb{Z}$), 使得我们有正合列

$$\cdots \to \mathrm{R}^{n-1} F(Z) \xrightarrow{\delta^{n-1}} \mathrm{R}^n F(X) \to \mathrm{R}^n F(Y) \to \mathrm{R}^n F(Z) \xrightarrow{\delta^n} \mathrm{R}^{n+1} F(X) \to \cdots.$$

◇ 设 $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^-(\mathcal{A}))$, 此时存在一族典范态射 $\partial_n = \partial_n^{X,Y,Z} : \mathrm{L}_n F(Z) \to \mathrm{L}_{n-1} F(X)$ (其中 $n \in \mathbb{Z}$), 使得我们有正合列

$$\cdots \to \mathrm{L}_{n+1} F(Z) \xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathrm{L}_n F(X) \to \mathrm{L}_n F(Y) \to \mathrm{L}_n F(Z) \xrightarrow{\partial_n} \mathrm{L}_{n-1} F(X) \to \cdots.$$

而且连接态射 δ^n 和 ∂_n 具以下函子性: 设

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

是行正合交换图表, 则图表

$$\begin{tikzcd} \mathrm{R}^n F(Z) \arrow[r, "\delta^n"] \arrow[d, "\mathrm{R}^n F(\gamma)"'] & \mathrm{R}^{n+1} F(X) \arrow[d, "\mathrm{R}^{n+1} F(\alpha)"] \\ \mathrm{R}^n F(Z') \arrow[r, "\delta^n"'] & \mathrm{R}^{n+1} F(X') \end{tikzcd} \quad \text{或} \quad \begin{tikzcd} \mathrm{L}_n F(Z) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\mathrm{L}_n F(\gamma)"'] & \mathrm{L}_{n-1} F(X) \arrow[d, "\mathrm{L}_{n-1} F(\alpha)"] \\ \mathrm{L}_n F(Z') \arrow[r, "\partial_n"'] & \mathrm{L}^{n-1} F(X') \end{tikzcd}$$

对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 皆交换.

证明 仅论 $\mathrm{R}^n F$ 情形. 对短正合列 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ 运用命题 3.11.8, 得到行正合交换图表

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r] & J \arrow[r] & K \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[u] & Y \arrow[r] \arrow[u] & Z \arrow[r] \arrow[u] & 0 \end{tikzcd}$$

其中每一列都是内射解消. 引理 2.8.13 确保 $0 \to I^n \to J^n \to K^n \to 0$ 分裂, 于是它们在 F 下的像也是分裂短正合列; 作为推论, $0 \to \mathsf{C}F(I) \to \mathsf{C}F(J) \to \mathsf{C}F(K) \to 0$ 仍然正合. 因此命题 3.6.4 给出态射族 δ^n 以及长正合列

$$\cdots \to \mathrm{R}^{n-1}F(Z) \xrightarrow{\delta^{n-1}} \mathrm{R}^n F(X) \to \mathrm{R}^n F(Y) \to \mathrm{R}^n F(Z) \xrightarrow{\delta^n} \cdots$$

连接态射 δ^n 的函子性比较复杂, 这里运用例 2.8.18 的 Abel 范畴 $\mathcal{A}^{\mathbf{2}}$ 来处理. 首先将给定的行正合交换图表写作 $\mathcal{A}^{\mathbf{2}}$ 的短正合列

$$0 \to [X \xrightarrow{\alpha} X'] \to [Y \xrightarrow{\beta} Y'] \to [Z \xrightarrow{\gamma} Z'] \to 0.$$

由例 2.8.18 已知 $\mathcal{A}^{\mathbf{2}}$ 有足够的内射对象, 于是可取内射解消 $[X \to X'] \hookrightarrow \mathcal{I}$ 和 $[Z \to Z'] \hookrightarrow \mathcal{K}$, 再以命题 3.11.8 将之延拓为 $\mathsf{C}(\mathcal{A}^{\mathbf{2}})$ 中的行正合交换图表

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{I} \arrow[r] & \mathcal{J} \arrow[r] & \mathcal{K} \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & {[X \to X']} \arrow[r] \arrow[u] & {[Y \to Y']} \arrow[r] \arrow[u] & {[Z \to Z']} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \end{tikzcd} \tag{3.12.1}$$

使 $[Y \to Y'] \to \mathcal{J}$ 也是内射解消. 接着将 $\mathcal{J}^n$ 展开为 $[J^n \to (J')^n]$ 等等. 运用例 2.8.18 的函子 ev_0 和 ev_1 可知 J^n, $(J')^n$ 等等都是 $\mathcal{A}$ 的内射对象, 而 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的态射 $Y \to J$, $Y' \to J'$ 等等是内射解消. 综之, 这在原给定的交换图表之上竖起了相容的内射解消.

现将 (3.12.1) 的第一行展开为 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的行正合交换图表

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d] & J \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & I' \arrow[r] & J' \arrow[r] & K' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

它在取 $\mathsf{C}F$ 后依然行正合. 故 δ^n 的函子性化约为命题 3.6.4 的相应陈述. □

在经典场景下, 主要考虑的是函子 $\mathrm{R}^n F$ 或 $\mathrm{L}_n F$ 在 $\mathcal{A}$ 上的限制, 仍写作 $\mathrm{R}^n F(X)$ 或 $\mathrm{L}_n F(X)$ 的形式, $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. 这是透过 "摊平" 为正合列的内射解消 $0 \to X \to I^0 \to I^1 \to \cdots$ (或投射解消 $\cdots \to P^1 \to P^0 \to X \to 0$) 来计算的; 见例 3.11.2 的说明. 对复形定义的导出函子在早期文献中称为**超导出函子**, 更适合以导出范畴或谱序列来处理. 是故以下聚焦于 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ 的经典情形.

第一步是将定理 3.12.4 的长正合列提炼为 δ-函子的概念.

定义 3.12.5 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 为 Abel 范畴. 从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的一族**上同调 δ-函子**意谓以下资料:

- ◇ 一族加性函子 $F^n : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, 其中 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$;
- ◇ 对 $\mathcal{A}$ 中的每个短正合列 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ 指定一族态射 $\delta^n : F^n Z \to F^{n+1} X$ (称为连接态射), 其中 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 它们对短正合列之间的态射具有函子性, 并且有正合列

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F^0(X) \arrow[r] & F^0(Y) \arrow[r] & F^0(Z) \arrow[dll, rounded corners, to path={ -- ([xshift=2ex]\tikztostart.east) |- node[near end, fill=white]{\scriptstyle \delta^0} ($(\tikztostart)!.5!(\tikztotarget)$) -| ([xshift=-2ex]\tikztotarget.west) -- (\tikztotarget)}] \\
& F^1(X) \arrow[r] & F^1(Y) \arrow[r] & F^1(Z) \arrow[dll, rounded corners, to path={ -- ([xshift=2ex]\tikztostart.east) |- node[near end, fill=white]{\scriptstyle \delta^1} ($(\tikztostart)!.5!(\tikztotarget)$) -| ([xshift=-2ex]\tikztotarget.west) -- (\tikztotarget)}] \\
& F^2(X) \arrow[r] & F^2(Y) \arrow[r] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

从上同调 δ-函子 $(F^n, \delta^n)_{n \geq 0}$ 到 $(G^n, \eta^n)_{n \geq 0}$ 之间的态射是一族态射 $\varphi^n : F^n \to G^n$, 要求和短正合列给出的连接态射相容; 换言之, 要求图表

$$\begin{tikzcd}
G^{n-1}(X) \arrow[r, "\eta^{n-1}"] & G^n(X) \\
F^{n-1}(X) \arrow[u, "\varphi^{n-1}"] \arrow[r, "\delta^{n-1}"'] & F^n(X) \arrow[u, "\varphi^n"']
\end{tikzcd}$$

对所有 $n \geq 1$ 和短正合列 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ 皆交换.

对偶地, 从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的一族**同调 δ-函子**意谓以下资料:

- ◇ 一族加性函子 $F_n : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, 其中 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$;
- ◇ 对 $\mathcal{A}$ 中的每个短正合列 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ 指定一族连接态射 $\partial^n : F_n Z \to F_{n-1} X$, 对短正合列之间的态射具有函子性, 并且有正合列

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & F_2(Y) \arrow[r] & F_2(Z) \arrow[dll, rounded corners, to path={ -- ([xshift=2ex]\tikztostart.east) |- node[near end, fill=white]{\scriptstyle \partial_2} ($(\tikztostart)!.5!(\tikztotarget)$) -| ([xshift=-2ex]\tikztotarget.west) -- (\tikztotarget)}] & \\
F_1(X) \arrow[r] & F_1(Y) \arrow[r] & F_1(Z) \arrow[dll, rounded corners, to path={ -- ([xshift=2ex]\tikztostart.east) |- node[near end, fill=white]{\scriptstyle \partial_1} ($(\tikztostart)!.5!(\tikztotarget)$) -| ([xshift=-2ex]\tikztotarget.west) -- (\tikztotarget)}] & \\
F_0(X) \arrow[r] & F_0(Y) \arrow[r] & F_0(Z) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

同调 δ-函子之间的态射按和先前类似的方法定义, 要求与连接态射相容.

留意到定义中的长正合列自动蕴涵 F^0 左正合, F_0 右正合. 现在回到导出函子.

命题 3.12.6 对 Abel 范畴之间的加性函子 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, 当 $\mathcal{A}$ 有足够的内射对象时, 以下性质成立:

- $\diamond$ $n<0 \implies \mathrm{R}^n F=0$;
- $\diamond$ 若 I 是 $\mathcal{A}$ 的内射对象, 则 $n>0 \implies \mathrm{R}^n F(I)=0$;
- $\diamond$ $(\mathrm{R}^n F, \delta^n)_{n\geq 0}$ 成为上同调 δ-函子;
- $\diamond$ 若 F 左正合, 则有典范同构 $F \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}^0 F$.

对偶地, 当 $\mathcal{A}$ 有足够的投射对象时, 以下性质成立:

- $\diamond$ $n<0 \implies \mathrm{L}_n F=0$;
- $\diamond$ 若 P 是 $\mathcal{A}$ 的投射对象, 则 $n>0 \implies \mathrm{L}_n F(P)=0$;
- $\diamond$ $(\mathrm{L}_n F, \partial_n)_{n\geq 0}$ 成为同调 δ-函子;
- $\diamond$ 若 F 右正合, 则有典范同构 $\mathrm{L}_0 F \xrightarrow{\sim} F$.

证明 讨论 $\mathrm{R}^n F$ 的情形即可. 取 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ 的内射解消 $0 \to X \to I^0 \to I^1 \to \cdots$. 于是

$$\mathrm{R}^n F(X) = \mathrm{H}^n(\cdots \to 0 \to 0 \to \underbrace{FI^0}_{0\ 次项} \to \underbrace{FI^1}_{1\ 次项} \to \cdots).$$

由此立见 $n<0$ 时 $\mathrm{R}^n F(X)$ 为 0. 若 I 是 $\mathcal{A}$ 的内射对象, 则可取内射解消为 $0 \to I \xrightarrow{\mathrm{id}} I \to 0 \cdots$ (后续全为 0), 从而 $n>0$ 时 $\mathrm{R}^n F(I)=0$.

基于以上两点, 关于上同调 δ-函子的断言无非是复述定理 3.12.4.

最后设 F 左正合. 注意到 $X \xrightarrow{\sim} \ker\left[I^0 \to I^1\right]$; 左正合函子保核, 故 $\mathrm{R}^0 F(X) = \ker\left[FI^0 \to FI^1\right]$ 自然地同构于 FX. $\square$

一般来说, 我们仅对左正合函子考虑右导出函子, 对右正合函子考虑左导出函子. 何以故? 初等的解释基于正合列的补项问题: 以 F 左正合的情形为例, 给定 $\mathcal{A}$ 中的短正合列 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$, 我们希望将正合列 $0 \to FX \to FY \to FZ$ 尽量右延. 右导出函子起到的正是这一作用.

习惯将 $n \geq 1$ 时的 $\mathrm{R}^n F$ 或 $\mathrm{L}_n F$ 称为 F 的高次导出函子, 默认定义在 $\mathcal{A}$ 的对象上, 而非复形上. 作为补项的一则应用, 下述推论表明正合性的阻碍恰是高次导出函子.

推论 3.12.7 对于左正合 (或右正合) 加性函子 $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, 以下性质等价.

(i) $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 正合.

(ii) 对于所有 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ 和 $n>0$ 皆有 $\mathrm{R}^n F(X)=0$ (或 $\mathrm{L}_n F(X)=0$).

(iii) 对于所有 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ 皆有 $\mathrm{R}^1 F(X)=0$ (或 $\mathrm{L}_1 F(X)=0$).

证明 考虑左正合情形. (i) $\implies$ (ii): 计算导出函子所用的复形 $I^0 \to I^1 \to \cdots$ 在第零项之外都是正合的, 故它对 F 的像亦然. (ii) $\implies$ (iii) 平凡. 至于 (iii) $\implies$ (i), 对 $\mathcal{A}$ 中的短正合列 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ 考察相应的正合列

$$0 \to FX \to FY \to FZ \to \mathrm{R}^1 F(Z)$$

即是. $\square$

约定 3.12.8 对于左正合 (或右正合) 加性函子 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, 若 $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ 对 F 的高次左导出函子 (或右导出函子) 都取 0, 则称 A 是 ***F*-零调**的; 例如当 F 左正合 (或右正合) 时, 命题 3.12.6 蕴涵所有内射对象 (或投射对象) 都是 F-零调的.

以下的经典技巧称为移维, 它可以用于对导出函子进行一些递归论证.

命题 3.12.9 (移维) 设加性函子 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 左正合 (或右正合), $\mathcal{A}$ 有足够的内射对象 (或投射对象). 设有 $\mathcal{A}$ 中的短正合列

$$0 \to X \to A \to B \to 0, \quad (\text{或 } 0 \to B \to A \to X \to 0),$$

而且 A 是 F-零调的, 则当 $n \geq 1$ 时有自然同构

$$\mathrm{R}^n F(X) \simeq \begin{cases} \mathrm{R}^{n-1} F(B), & n \geq 2 \\ \mathrm{coker}\,[FA \to FB]\,, & n = 1; \end{cases}$$

或

$$\mathrm{L}_n F(X) \simeq \begin{cases} \mathrm{L}_{n-1} F(B), & n \geq 2 \\ \ker\,[FB \to FA]\,, & n = 1. \end{cases}$$

证明 基于对偶性, 仅证 $\mathrm{R}^n F(X)$ 的情形. 仔细打量相应的长正合列

$$\mathrm{R}^{n-1}F(A) \to \mathrm{R}^{n-1}F(B) \to \mathrm{R}^n F(X) \to \underbrace{\mathrm{R}^n F(A)}_{=0}, \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq 1},$$

并应用 $\mathrm{R}^0 F(A) \simeq FA$ 和 $\mathrm{R}^0 F(B) = FB$ 便是. □

次一结果表明 F-零调对象也可用来求导出函子.

推论 3.12.10 设 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 左正合 (或右正合), 而且有 $\mathcal{A}$ 中的正合列

$$0 \to X \to A^0 \to A^1 \to \cdots \quad (\text{或 } \cdots \to A_1 \to A_0 \to X \to 0)$$

其中 A^n (或 A_n) 对所有 $n \geq 0$ 都是 F-零调对象; 另外命 $A^{-n} = 0$ (或 $A_{-n} = 0$). 此时有自然同构

$$\mathrm{R}^n F(X) \simeq \mathrm{H}^n\left(FA^\bullet\right), \quad \text{或} \quad \mathrm{L}_n F(X) \simeq \mathrm{H}_n\left(FA_\bullet\right).$$

证明 仅证 $\mathrm{R}^n F(X)$ 情形. 对 $m \geq 1$ 命 $B^m := \mathrm{im}\left[A^{m-1} \to A^m\right] = \ker\left[A^m \to A^{m+1}\right]$; 另记 $B^0 := X$. 原正合列遂拆解为

$$0 \to B^m \to A^m \to B^{m+1} \to 0, \quad m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

当 $n = 0$, 断言归结为 F 保核: $FX \simeq \ker[FA^0 \to FA^1]$. 当 $n \geq 1$, 以命题 3.12.9 反复移维, 得到一系列自然同构

$$\mathrm{R}^n F(X) = \mathrm{R}^n F(B^0) \simeq \cdots \simeq \mathrm{R}^1 F(B^{n-1}) \simeq \mathrm{coker}\left[FA^{n-1} \to FB^n\right];$$

又因为 F 保核, B^n 的定义蕴涵 FB^n 等同于 $\ker\left[FA^n \to FA^{n+1}\right]$. 证毕. □

留意到以上论证主要依赖长正合列, 鲜少动用导出函子的定义, 这就提示我们在一般的上同调 (或同调) δ-函子之中刻画 F 的导出函子. 关键在于要求高次 δ-函子在适当的对象上取 0.

定义 3.12.11 设 $E:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 为 Abel 范畴之间的加性函子. 若对所有 $X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ 皆存在单态射 $a:X\hookrightarrow Y$ (或满态射 $a:Y\twoheadrightarrow X$) 使得 $Ea=0$, 则称 E **可拭** (或**余可拭**).

我们即将从可拭性质推导以下泛性质.

定义 3.12.12 设 $(R^n,\delta^n)_{n\geq 0}$ 为从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的上同调 δ-函子. 若对于所有从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的 δ-函子 $(F^n,\delta^n_F)_{n\geq 0}$, 所有态射 $\varphi^0:R^0\to F^0$ 皆能唯一地延拓为 δ-函子之间的态射 $(\varphi^n)_{n\geq 0}$, 则称 $(R^n,\delta^n)_{n\geq 0}$ 为**泛上同调 δ-函子**.

对偶地, 设同调 δ-函子 $(L_n,\partial_n)_{n\geq 0}$ 满足以下性质: 对任何同调 δ-函子 $(F_n,\partial^F_n)_{n\geq 0}$, 任何态射 $\varphi_0:F_0\to L_0$ 皆可唯一地延拓为 $(\varphi_n)_{n\geq 0}$, 则称 $(L_n,\partial_n)_{n\geq 0}$ 为**泛同调 δ-函子**.

我们的目标是说明给定左正合 (或右正合) 函子 $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$, 满足 $R^0=F$ 的泛上同调 δ-函子 (或满足 $L_0=F$ 的泛同调 δ-函子) 若存在则唯一, 精确到唯一的同构.

引理 3.12.13 设 $E:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 可拭, $0\to X\to I\to B\to 0$ 为 $\mathcal{A}$ 的短正合列, $f:X\to Y$ 是任意态射, 则存在行正合的交换图表

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & I \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "\iota"'] & J \arrow[r] & C \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

使得 $E\iota=0$.

证明 取单态射 $h:Y\hookrightarrow J_0$ 使得 $Eh=0$. 构造推出图表

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook] \arrow[d, "hf"'] \arrow[dr, phantom, "\boxplus"] & I \arrow[d] \\
J_0 \arrow[r, "k"'] & J,
\end{tikzcd}$$

其中的 k 由命题 2.1.6 可知为单. 取 $\iota=kh:Y\to J$, 取 $C:=\mathrm{coker}(\iota)$, 这给出所求图表的左方块; 从余核的函子性得到右方块. $\square$

命题 3.12.14 设 $(R^n,\delta^n)_{n\geq 0}$ 是从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的上同调 δ-函子. 若 $n>0$ 蕴涵 R^n 可拭, 则 $(R^n,\delta^n)_{n\geq 0}$ 是泛上同调 δ-函子.

对偶地, $n>0$ 部分余可拭的同调 δ-函子也必然是泛的.

证明 只论上同调版本. 令 $(F^n,\delta^n_F)_{n\geq 0}$ 为从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的上同调 δ-函子, $\varphi^0:R^0\to F^0$. 以下递归地对 $n\geq 1$ 构造 φ^n. 给定 $X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, 根据假设, 存在短正合列

$$0\to X\to I\to B\to 0$$

使得 $R^n(I \to B) = 0$. 相应的长正合列给出实线部分的行正合交换图表

$$\begin{tikzcd}
F^{n-1}I \arrow[r] & F^{n-1}B \arrow[r, "\delta_F^{n-1}"] & F^n X \arrow[r] & F^n I \\
R^{n-1}I \arrow[r] \arrow[u, "\varphi_I^{n-1}"] & R^{n-1}B \arrow[r, "\delta^{n-1}"'] \arrow[u, "\varphi_B^{n-1}"] & R^n X \arrow[r] \arrow[u, dashed, "\varphi_X^n"'] & 0.
\end{tikzcd}$$

根据行的正合性和余核的泛性质, 可知存在唯一的虚线箭头 φ_X^n 使全图交换; 这刻画了所求之 φ_X^n, 但它目前还依赖 $X \hookrightarrow I$ 的选取.

给定任意态射 $f : X \to Y$, 兹断言存在行正合交换图表

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & I \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] & J \arrow[r] & C \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd} \tag{3.12.2}$$

使得 $R^n(X \to I)$ 和 $R^n(Y \to J)$ 皆为 0: 先取 $X \hookrightarrow I$, 再代入引理 3.12.13 便是. 将此代入 φ_X^n 和 φ_Y^n 的构造, 得到

$$\begin{tikzcd}
& F^{n-1}B \arrow[rr] \arrow[dd] & & F^n X \arrow[dd] \\
R^{n-1}B \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & R^n X \arrow[ur, "\varphi_X^n"'] & \\
& F^{n-1}C \arrow[rr] & & F^n Y \\
R^{n-1}C \arrow[ur] \arrow[rr] & & R^n Y \arrow[ur, "\varphi_Y^n"'] \arrow[from=uu, crossing over] &
\end{tikzcd}$$

其中除右侧以外, 每一面按构造, 定义或递归假设都交换. 又因为 $R^{n-1}B \to R^n X$ 已知满, 根据熟悉的技巧, 右面也随之交换.

以上论证同时说明了 φ_X^n 不依赖 $X \hookrightarrow I$ 的选择 (取 $f = \mathrm{id}_X$), 而且对 X 具有函子性 (取任意 f). 这就完成了 φ^n 的构造.

最后说明 $(\varphi^n)_{n \geq 0}$ 和连接态射相容. 给定短正合列 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$, 以引理 3.12.13 取行正合交换图表

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"'] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] & I \arrow[r] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

使得 $R^n(X \to I) = 0$. 由此对每个 $n \geq 1$ 构造图表

$$\begin{tikzcd}
F^{n-1}Z \arrow[r, "F^{n-1}\alpha"] & F^{n-1}B \arrow[r, "\delta_F^n"] & F^n X \\
R^{n-1}Z \arrow[r, "R^{n-1}\alpha"'] \arrow[u, "\varphi_Z^{n-1}"] & R^{n-1}B \arrow[r, "\delta^n"'] \arrow[u, "\varphi_B^{n-1}"] & R^n X \arrow[u, "\varphi_X^n"']
\end{tikzcd}$$

根据前一个交换图表和上同调 δ-函子的性质, 两行合成为各自的连接态射; 问题化为证全图交换. 左块依 φ^{n-1} 的函子性交换, 右块依 φ^n_X 的构造交换. 证毕. □

至此得到导出函子的刻画.

推论 3.12.15 设 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 左正合, $\mathcal{A}$ 有足够的内射对象, 则 $(\mathrm{R}^n F, \delta^n)_{n\geq 0}$ 是满足 $\mathrm{R}^0 F \simeq F$ 的泛上同调 δ-函子.

对偶地, 设 F 右正合而 $\mathcal{A}$ 有足够的投射对象, 则 $(\mathrm{L}_n F, \partial_n)_{n\geq 0}$ 是满足 $\mathrm{L}_0 F \simeq F$ 的泛同调 δ-函子.

证明 讨论左正合情形即足. 当 $n > 0$ 时 $\mathrm{R}^n F$ 可抹: 这是因为任何 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ 皆可嵌入某个内射对象 I, 而命题 3.12.6 蕴涵 $\mathrm{R}^n F(I) = 0$; 此外它也蕴涵 $\mathrm{R}^0 F \simeq F$. 将此代入命题 3.12.14. □

3.13 实例: $\varprojlim^1$

对于导出函子, 我们选择的首例来自一类常见的 $\varprojlim$. 将 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 按照标准的全序结构作成范畴, 于是范畴 $\mathbb{Z}_{\geq 0}^{\mathrm{op}}$ 可以表作 $\cdots \to 2 \to 1 \to 0$. 对任意范畴 $\mathcal{A}$, 考虑函子范畴

$$\mathsf{InvSys}(\mathcal{A}) := \mathcal{A}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}^{\mathrm{op}}}, \tag{3.13.1}$$

其对象可以视同资料 $(A_n, f_n)_{n\geq 0}$, 其中 $A_n \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ 而 $f_n \in \mathrm{Hom}(A_{n+1}, A_n)$; 这般资料也称为 $\mathcal{A}$ 中的**逆向系**. 本节将以导出函子为工具, 在 Abel 范畴的情形研究它们的 $\varprojlim$.

约定 3.13.1 如果 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 有可数积 (或可数余积, 亦即直和), 而且取积函子 $\prod : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \to \mathcal{A}$ (或直和函子 $\oplus : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \to \mathcal{A}$) 是正合函子, 则称 $\mathcal{A}$ 有正合的可数积 (或可数余积).

取积函子总是左正合的, 因此在可数积存在的前提下, 其正合性等价于 $\prod$ 保持满态射: 对于任一族满态射 $(g_n : A_n \to B_n)_{n\geq 0}$, 相应的 $\prod_{n\geq 0} g_n : \prod_{n\geq 0} A_n \to \prod_{n\geq 0} B_n$ 亦满. 可数余积的情形则反是.

假设 3.13.2 本节考虑的 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 均假定有正合的可数积.

对于任意环 R, 模范畴 R-Mod 即有此性质.

定义 3.13.3 给定 $\mathsf{InvSys}(\mathcal{A})$ 的对象 $A = (A_n, f_n)_n$, 定义平移态射 $T_A : \prod_{n\geq 0} A_n \to \prod_{n\geq 0} A_n$: 当 $\mathcal{A} = \mathsf{Ab}$ 时, $T_A((a_n)_{n\geq 0}) := (f_n(a_{n+1}))_{n\geq 0}$, 一般情形准此可知. 再定义典范态射

$$\Delta_A := T_A - \mathrm{id} : \prod_{n\geq 0} A_n \to \prod_{n\geq 0} A_n,$$

当 A 变动, 这给出取积函子 $\prod_{n\geq 0}$ 的自同态 T 和 $\Delta = T - \mathrm{id}$.

留意到以上定义只需要 $\mathcal{A}$ 是有可数积的 Ab-范畴.

回忆到 $\varprojlim$ 一般通过等化子和积来构造. 对于眼下的情形, $\mathsf{InvSys}(\mathcal{A})$ 自然地成为 Abel 范畴 (命题 2.1.4), 故构造化为 $\varprojlim A = \ker\left[\Delta_A : \prod_n A_n \to \prod_n A_n\right]$.

此外 $\mathsf{InvSys}(\mathcal{A})$ 也有正合的可数积, 因为函子范畴的极限可以逐项地构造, 见 §1.5.

引理 3.13.4 以上构造给出左正合加性函子 $\varprojlim : \mathsf{InvSys}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$. 另一方面, 取积函子 $\prod_{n\geq 0} : \mathsf{InvSys}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ 则是正合函子.

证明 两个函子的加性皆显然, 左正合性来自例 2.8.6. 根据假设, 函子 $\prod_{n\geq 0}$: $(A_n, f_n)_n \mapsto \prod_n A_n$ 也保满态射, 因为它逐项如此. 故注记 2.8.4 说明它正合. □

定义 3.13.5 按以下方式定义一族加性函子 $\lim^n : \mathsf{InvSys}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned}
\lim^0 &:= \varprojlim = \ker \Delta : \ A \mapsto \ker \Delta_A, \\
\lim^1 &:= \operatorname{coker} \Delta : \ A \mapsto \operatorname{coker} \Delta_A, \\
\lim^n &:= 0, \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}.
\end{aligned}$$

今设 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ 为 $\mathsf{InvSys}(\mathcal{A})$ 中的短正合列; 换言之, 逐项正合. 应用正合函子 $\prod_{n\geq 0}$ 及其自同态 Δ, 得到行正合交换图表

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \prod_n X_n \arrow[r] \arrow[d, "\Delta_X"'] & \prod_n Y_n \arrow[r] \arrow[d, "\Delta_Y"] & \prod_n Z_n \arrow[r] \arrow[d, "\Delta_Z"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \prod_n X_n \arrow[r] & \prod_n Y_n \arrow[r] & \prod_n Z_n \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

应用定理 2.3.3 得到长正合列

$$0 \to \lim^0 X \to \lim^0 Y \to \lim^0 Z \xrightarrow[\text{连接态射}]{\delta^0} \lim^1 X \to \lim^1 Y \to \lim^1 Z \to 0;$$

它对短正合列具有函子性. 另对 $n > 0$ 取 $\delta^n := 0$. 总结如下.

引理 3.13.6 资料 $(\lim^n, \delta^n)_{n\geq 0}$ 给出从 $\mathsf{InvSys}(\mathcal{A})$ 到 $\mathcal{A}$ 的上同调 δ-函子 (定义 3.12.5), 满足 $\lim^0 \simeq \varprojlim$.

目光转向 $\varprojlim$ 的右导出函子. 设 $\mathcal{A}$ 有足够的内射对象. 兹断言 $\mathsf{InvSys}(\mathcal{A})$ 亦然. 之前的习题已经讨论过一般的函子范畴 $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ 的情形. 对于 $\mathcal{C} = \mathbb{Z}_{\geq 0}^{\mathrm{op}}$ 的特例, 一切容易手动验证.

引理 3.13.7 在假设 3.13.2 的条件下, 定义 $\mathsf{InvSys}(\mathcal{A})$ 的加性全子范畴 $\mathcal{R}$ 使得

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{R}) = \left\{ \begin{array}{l|l} R = (R_k, r_k)_{k\geq 0} & R \text{ 是内射对象}, \Delta_R \text{ 满} \\ \quad \in \mathrm{Ob}\left(\mathsf{InvSys}(\mathcal{A})\right) & \forall k,\ R_k \text{ 是 } \mathcal{A} \text{ 的内射对象} \end{array} \right\},$$

则对每个 $A \in \mathrm{Ob}\left(\mathsf{InvSys}(\mathcal{A})\right)$ 皆存在 $R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})$ 和单态射 $A \hookrightarrow R$.

证明 对每个 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 定义函子 $\mathcal{R}_m : \mathcal{A} \to \mathsf{InvSys}(\mathcal{A})$, 映对象 X 为

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \xrightarrow{\mathrm{id}} & X & \xrightarrow{\mathrm{id}} & X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & 0 \\ \cdots & & \text{第 } m+1 \text{ 项} & & \text{第 } m \text{ 项} & & & & \end{array} \tag{3.13.2}$$

它是 $\mathrm{ev}_m : (A_n, f_n)_{n\geq 0} \mapsto A_m$ 的右伴随, 从而映内射对象为内射对象 (命题 2.8.17). 此外不难验证 $\Delta_{\mathcal{R}_m X}$ 是满态射, 对之可以明确写下一个右逆.

给定 $A = (A_n, f_n)_{n\geq 0}$, 对每个 m 取 $\mathcal{A}$ 的内射对象 I_m 和单态射 $A_m \hookrightarrow I_m$, 则 $A \hookrightarrow \prod_{m\geq 0} \mathcal{R}_m(I_m) =: R$, 右式根据引理 2.8.14 仍是内射对象. 既然 $\prod_m$ 正合, $\Delta_R = \prod_m \Delta_{\mathcal{R}_m I_m}$ 仍然满. 综上, $R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})$. □

依此便能谈论 $\mathrm{R}^n \varprojlim$, 其中 $n \geq 0$. 回忆到它们可以刻画为泛上同调 δ-函子 (推论 3.12.15).

定理 3.13.8 (S. Eilenberg) 在假设 3.13.2 的条件下, 当 $n > 0$ 时 $\lim^n$ 是定义 3.12.11 所谓的可拭函子. 作为推论, 存在典范同构 $\mathrm{R}^1 \varprojlim \simeq \lim^1$, 而 $n \notin \{0, 1\}$ 时 $\mathrm{R}^n \varprojlim = 0$.

证明 引理 3.13.7 表明 $\lim^1$ 可拭, 故 $(\lim^n)_{n\geq 0}$ 也是泛 δ-函子 (命题 3.12.14). □

既然明确了 $\varprojlim$ 的正合性障碍 $\lim^1$, 现在来研究何时能确保 $\lim^1 = 0$.

例 3.13.9 若 $\mathsf{InvSys}(\mathcal{A})$ 的对象 A 满足 $\lim^1 A = 0$, 则对任何商对象 Q 也有 $\lim^1 Q = 0$, 这是因为短正合列 $0 \to K \to A \to Q \to 0$ 诱导的长正合列以 $\lim^1 A \to \lim^1 Q \to 0$ 收尾.

例 3.13.10 如果每个 $f_n : A_{n+1} \to A_n$ 都有截面 (即右逆) s_n, 则 Δ_A 也有截面 $\Sigma_A : \prod_n A_n \to \prod_n A_n$, 因而 Δ_A 满. 如果使用元素的写法, 则可递归地取 $\Sigma_A((b_n)_n) = (a_n)_n$, 其中 $a_0 = 0$ 而 $a_{n+1} := s_n(a_n + b_n)$. 一般情形依此可知.

定义 3.13.11 (Mittag-Leffler 条件) 设范畴 $\mathcal{C}$ 的所有态射都有像 (定义 1.2.1). 考虑 $\mathsf{InvSys}(\mathcal{C})$ 的对象 $X = (X_k, f_k)_{k\geq 0}$. 对于 $b \geq a$, 定义 $f_a^b : X_b \to X_a$ 为合成 $f_a \cdots f_{b-1}$ (约定 $f_a^a = \mathrm{id}$). 若以下条件成立, 则称 X 是 Mittag-Leffler 的:

$$\forall k \geq 0,\ \exists N \geq k, \quad n \geq N \implies \mathrm{im}\, f_k^n = \mathrm{im}\, f_k^N.$$

举例明之, 若每个 f_k 皆满, 则 $(X_k, f_k)_{k\geq 0}$ 自动是 Mittag-Leffler 的.

对于 Mittag-Leffler 的 $(X_k, f_k)_{k\geq 0}$, 每个 X_k 都有良定义的子对象 $X_k^\flat := \mathrm{im}\, f_k^N$, 其中 $N \gg k$. 不难看出这使相应的态射列

$$\cdots \to X_2^\flat \xrightarrow{f_1^\flat} X_1^\flat \xrightarrow{f_0^\flat} X_0^\flat$$

中的每个 $f_k^\flat := f_k|_{X_{k+1}^\flat}$ 都成为满的.

引理 3.13.12 取 $\mathcal{C}$ 为 Set 或 $R\text{-}\mathsf{Mod}$, 其中 R 是任意环. 假设 $\mathsf{InvSys}(\mathcal{C})$ 的对象 $(X_n, f_n)_{n\geq 0}$ 是 Mittag-Leffler 的.

(i) 包含态射族 $X_n^\flat \hookrightarrow X_n$ 诱导典范同构 $\varprojlim_n X_n^\flat \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n X_n$

(ii) 对于 $\mathcal{C} = \mathsf{Set}$ 的情形, 若每个 X_n 皆非空, 则 $\varprojlim_n X_n \neq \varnothing$.

证明 对于 (i), 写下 $\varprojlim$ 在这些范畴中的具体构造

$$\varprojlim_n X_n = \left\{ (x_n)_{n\geq 0} \in \prod_{n\geq 0} X_n : \forall n \geq 0,\ f_n(x_{n+1}) = x_n \right\};$$

上式的每个 x_n 自动属于 $\bigcap_{N\geq n} \mathrm{im}(f_N)$, 由此立见 $\varprojlim_n X_n = \varprojlim_n X_n^\flat$.

对于 (ii), 按定义可见 $X_n^\flat$ 必然非空. 于是问题按 (i) 化约到每个 f_n 皆满的情形, 因而是显然的. □

命题 3.13.13 取 R 为环, $\mathcal{A} := R\text{-}\mathsf{Mod}$. 若 $\mathsf{InvSys}(\mathcal{A})$ 的对象 $A = (A_n, f_n)_{n\geq 0}$ 是 Mittag-Leffler 的, 则 $\lim^1 A = 0$; 等价地说, 此时对于 $\mathsf{InvSys}(\mathcal{A})$ 中的所有短正合列 $0 \to A \to B \to C \to 0$, 相应的 $0 \to \varprojlim A \to \varprojlim B \to \varprojlim C \to 0$ 也正合.

证明 先论证两个断言的等价性. 设 $A \in \mathsf{InvSys}(\mathcal{A})$. 若 $\lim^1 A = 0$, 则 $0 \to \varprojlim A \to \varprojlim B \to \varprojlim C \to 0$ 正合是长正合列的直接推论. 反之, 设 $0 \to \varprojlim A \to \varprojlim B \to \varprojlim C \to 0$ 恒正合. 取单态射 $A \hookrightarrow B$ 使得 B 是 $\mathsf{InvSys}(\mathcal{A})$ 的内射对象, 则移维 (命题 3.12.9) 给出 $\mathrm{R}^1 \varprojlim A = 0$, 继而由定理 3.13.8 导出 $\lim^1 A = 0$.

进入正题. 设短正合列 $0 \to \underbrace{(A_n, f_n)_n}_{=A} \xrightarrow{\varphi} \underbrace{(B_n, g_n)_n}_{=B} \xrightarrow{\psi} \underbrace{(C_n, h_n)}_{=C} \to 0$ 中的 A 是 Mittag-Leffler 的. 目标是证 $\varprojlim \psi$ 满. 鉴于引理 3.13.12 (ii), 问题化为对每个 $(c_n)_{n\geq 0} \in \varprojlim C$ 证非空集的映射列

$$\cdots \to \psi_2^{-1}(c_2) \xrightarrow{g_1} \psi_1^{-1}(c_1) \xrightarrow{g_0} \psi_0^{-1}(c_0)$$

是 Mittag-Leffler 的. 给定 $k \geq 0$, 取 $N \geq k$ 充分大, 使得 $n \geq N$ 时 $\mathrm{im}\, f_k^n = \mathrm{im}\, f_k^N$. 设 $b_N \in \psi_N^{-1}(c_N)$; 为了验证 Mittag-Leffler 条件, 以下说明对每个 $n \geq N$ 皆存在 $b_n \in \psi_n^{-1}(c_n)$ 使得 $g_k^n(b_n) = g_k^N(b_N)$.

任取 $b_n' \in \psi_n^{-1}(c_n)$, 则 $\psi_N\left(g_N^n(b_n')\right) = c_N = \psi_N(b_N)$, 故存在 a_N 使 $g_N^n(b_n') - b_N = \varphi_N(a_N)$. 再取 a_n 使得 $f_k^n(a_n) = f_k^N(a_N)$, 则 $b_n := b_n' - \varphi_n(a_n)$ 即所求. □

对于满足假设 3.13.2 的一般 Abel 范畴 $\mathcal{A}$, 存在反例说明 Mittag-Leffler 条件未必蕴涵 $\lim^1 = 0$, 详细讨论见 [19].

以下结果是一则简单的操练, 它也将用于 §3.15.

推论 3.13.14 设 $\mathcal{A}$ 满足假设 3.13.2, 而 $A \to B \to C \to D$ 是 $\mathsf{InvSys}(\mathcal{A})$ 中的正合列. 若 $\lim^1 A = 0$, 则

$$\varprojlim B \to \varprojlim C \to \varprojlim D$$

是 $\mathcal{A}$ 中的正合列.

证明 命 $H := \ker[C \to D]$, $X := \operatorname{im}[A \to B]$. 因为 $\varprojlim$ 左正合, 故有典范同构

$$\ker\left[\varprojlim C \to \varprojlim D\right] \simeq \varprojlim H.$$

态射 $B \to C$ 分解为 $B \twoheadrightarrow H \hookrightarrow C$. 问题化为证 $\varprojlim B \to \varprojlim H$ 满. 例 3.13.9 说明 $\lim^1 X = 0$, 故对短正合列 $0 \to X \to B \to H \to 0$ 取 $\varprojlim$ 可见 $\varprojlim B \to \varprojlim H$ 满. □

3.14 实例: Ext 和 Tor

我们即将探讨 Hom 和 $\otimes$ 的导出函子. 宜先引入一些辅助概念.

定义 3.14.1 设 $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{B}$ 为 Abel 范畴, 而双函子 $F : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \to \mathcal{B}$ (约定 3.5.9) 对两个变元都是左正合函子. 若对于所有内射对象 $I_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}_i)$ (其中 $i = 1, 2$),

$$F(I_1, \cdot) : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{B} \quad \text{和} \quad F(\cdot, I_2) : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{B}$$

都是正合函子, 则称 F 是**平衡**的.

对偶地, 如果 F 对两个变元都右正合, 而且对于所有投射对象 $P_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}_i)$, 函子 $F(P_1, \cdot)$ 和 $F(\cdot, P_2)$ 都正合, 则称 F 是平衡的.

基于对偶性, 以下定理仅针对两个变元皆左正合的双函子来陈述.

定理 3.14.2 设 $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{B}$ 为 Abel 范畴, $\mathcal{A}_1$ 和 $\mathcal{A}_2$ 皆有足够的内射对象. 设双函子 $F : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \to \mathcal{B}$ 对两个变元都是左正合函子. 由此可对每个变元取右导出函子, 记为

$$\mathrm{R}^n_{\mathrm{I}} F(\cdot, X_2) : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{B}, \quad \mathrm{R}^n_{\mathrm{II}} F(X_1, \cdot) : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{B},$$

其中 $X_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}_i)$ 固定, $i = 1, 2$. 若 F 是平衡的, 则有双函子 $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \to \mathcal{B}$ 之间的典范同构

$$\mathrm{R}^n_{\mathrm{I}} F(X_1, X_2) \simeq \mathrm{R}^n_{\mathrm{II}} F(X_1, X_2).$$

证明 证明依赖双复形的理论, 见 §3.5 和 §3.10. 对 $i = 1, 2$ 取内射解消 $0 \to X_i \to I_i^0 \to I_i^1 \to \cdots$; 另对 $n < 0$ 定义 $I_i^n := 0$. 由此定义双复形 $F(I_1^\bullet, I_2^\bullet)$.

另一方面, 定义复形 $F(X_1, I_2^\bullet)$ 和 $F(I_1^\bullet, X_2)$. 将它们视为双复形, 分别集中在纵轴 $(0, \bullet)$ 和横轴 $(\bullet, 0)$ 上, 其余项全设为零. 因此 $X_i \xrightarrow{\sim} \ker[I_i^0 \to I_i^1]$ 诱导 $\mathsf{C}^2_f(\mathcal{B})$ 中的态射

$$F(X_1, I_2^\bullet) \xrightarrow{\lambda} F(I_1^\bullet, I_2^\bullet) \xleftarrow{\rho} F(I_1^\bullet, X_2).$$

兹断言 $\mathrm{tot}(\lambda)$ 和 $\mathrm{tot}(\rho)$ 都是拟同构.

先处理 λ. 对其两边同取横向上同调 $\mathrm{H_I}$. 这不改变落在纵轴上的 $F(X_1, I_2^\bullet)$; 而因为 $F(\cdot, I_2^q)$ 对每个 q 都是正合函子, 我们有

$$(\mathrm{H_I}\, F\,(I_1^\bullet, I_2^\bullet))^{p,q} = \begin{cases} 0, & p \neq 0 \\ \ker\left[F(I_1^0, I_2^q) \to F(I_1^1, I_2^q)\right] = F(X_1, I_2^q), & p = 0. \end{cases}$$

这就说明 $\mathrm{H_I}(\lambda) : \mathrm{H_I}\, F(X_1, I_2^\bullet) \to \mathrm{H_I}\, F\,(I_1^\bullet, I_2^\bullet)$ 是同构. 因此 $\mathrm{H_{II}}\,\mathrm{H_I}(\lambda)$ 仍是同构. 代入定理 3.10.6 可知 $\mathrm{tot}(\lambda)$ 是拟同构.

对于 ρ, 相同论证给出 $\mathrm{H_I}\,\mathrm{H_{II}}(\rho)$ 是同构, 故定理 3.10.6 蕴涵 $\mathrm{tot}(\rho)$ 是拟同构.

观察到 $F(X_1, I_2^\bullet)$ 的全复形仍是它自身, 取 H^n 给出 $\mathrm{R}^n_{\mathrm{II}}F(X_1, X_2)$. 类似地, 对 $F(I_1^\bullet, X_2)$ 或其全复形取 H^n 给出 $\mathrm{R}^n_{\mathrm{I}}F(X_1, X_2)$. 透过 $\mathrm{tot}\,(F(I_1^\bullet, I_2^\bullet))$ 的中介, 遂有

$$\mathrm{R}^n_{\mathrm{I}}F(X_1, X_2) \simeq \mathrm{R}^n_{\mathrm{II}}F(X_1, X_2).$$

由于任何态射 $X_i \to Y_i$ 都可以提升为内射解消之间的态射, 提升在同伦意义下唯一, 故实际得到的是双函子的同构 $\mathrm{R}^n_{\mathrm{I}}F \simeq \mathrm{R}^n_{\mathrm{II}}F$. □

注记 3.14.3 上述论证实际给出了一套同时解消两个变元, 以双复形 $F(I_1^\bullet, I_2^\bullet)$ 的全复形 "平衡地" 对 F 求导的技术.

现在取 $\mathcal{A}$ 为 Abel 范畴, 考虑双函子 $\mathrm{Hom} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{A} \to \mathsf{Ab}$, 命题 2.8.11 表明 Hom 对两个变元皆左正合. 对每个 $n \in \mathbb{Z}$ 作如下定义.

- ◇ 设 $\mathcal{A}$ 有足够的投射对象, 命 $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A},\mathrm{I}}(X, Y) := \mathrm{R}^n_{\mathrm{I}}\,\mathrm{Hom}(X, Y)$, , 它由 X 在 $\mathcal{A}$ 中的投射解消确定.
- ◇ 设 $\mathcal{A}$ 有足够的内射对象, 命 $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A},\mathrm{II}}(X, Y) := \mathrm{R}^n_{\mathrm{II}}\,\mathrm{Hom}(X, Y)$, , 它由 Y 在 $\mathcal{A}$ 中的内射解消确定.

定义–命题 3.14.4 (Ext 函子) 双函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}$ 是平衡的. 因此只要 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 有足够的内射对象和投射对象, 即可对每个 $n \in \mathbb{Z}$ 定义双函子

$$\mathrm{Ext}^n = \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{A} \to \mathsf{Ab}$$

为 $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(X, Y) := \mathrm{Ext}^n_{\mathrm{I}}(X, Y) \simeq \mathrm{Ext}^n_{\mathrm{II}}(X, Y)$ (典范同构).

证明 平衡性正是内射对象和投射对象的定义, 因此适用定理 3.14.2. □

若 R 是环而 $\mathcal{A} = R\text{-}\mathsf{Mod}$ 或 $\mathsf{Mod}\text{-}R$, 则记 $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}$ 为 Ext^n_R.

注意到 $\mathrm{Ext}^0 = \mathrm{Hom}$, 而 $(\mathrm{Ext}^n)_{n \geq 0}$ 对变元 X 和 Y 分别有形式如下的长正合列

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^{n-1}(X', Y) \xrightarrow{\delta^{n-1}} \mathrm{Ext}^n(X'', Y) \to \mathrm{Ext}^n(X, Y) \to \mathrm{Ext}^n(X', Y) \to \cdots$$

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^{n-1}(X, Y'') \xrightarrow{\delta^{n-1}} \mathrm{Ext}^n(X, Y') \to \mathrm{Ext}^n(X, Y) \to \mathrm{Ext}^n(X, Y'') \to \cdots$$

其中 $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ 和 $0 \to Y' \to Y \to Y'' \to 0$ 都是给定的短正合列.

当 $\mathcal{A}$ 是 $\Bbbk$-线性 Abel 范畴时, Ext^n 的取值当然能升级到范畴 $\Bbbk\text{-}\mathsf{Mod}$ 里.

注记 3.14.5 符号 Ext 指代 "扩张", 这是由于 $\mathrm{Ext}^1(X, Y)$ 的元素和扩张 $0 \to Y \to E \to X \to 0$ (亦即短正合列) 的同构类一一对应; 更高次的 Ext^n 也有类似诠释. 这一事实宜从导出范畴解释, 详见 §4.5.

基于推论 3.12.7 对正合性的刻画, 立见

◇ 对象 I 内射 $\iff \mathrm{Ext}^1(\cdot, I) = 0 \iff \mathrm{Ext}^{\geq 1}(\cdot, I) = 0$;

◇ 对象 P 投射 $\iff \mathrm{Ext}^1(P, \cdot) = 0 \iff \mathrm{Ext}^{\geq 1}(P, \cdot) = 0$.

例 3.14.6 (HH^n 作为 Ext^n) 回到 §3.8 关于 Hochschild 同调与上同调的的基本框架: $\Bbbk$ 为交换环, R 为 $\Bbbk$-代数, 现在进一步要求 R 作为 $\Bbbk$-模是投射的. 记 $\otimes := \otimes_{\Bbbk}$. 利用张量积的伴随关系 [25, 定理 6.6.5], 或者利用投射模是自由模的直和项这一事实, 可见 $R^{\otimes n}$ 仍是投射 $\Bbbk$-模. 现将 $R \otimes R^{\otimes n} \otimes R$ 作成左 $R^e := R \otimes R^{\mathrm{op}}$-模. 因为 $R \otimes (\cdot) \otimes R : \Bbbk\text{-}\mathsf{Mod} \to R^e\text{-}\mathsf{Mod}$ 是忘却函子的左伴随 [25, 推论 6.6.8], 它保投射对象 (命题 2.8.17). 故引理 3.8.2 说明杠复形 $\mathsf{B}R$ 给出 R 作为左 R^e-模的投射解消

$$\cdots \to \mathsf{B}_1 R \to \mathsf{B}_0 R \to R \to 0. \tag{3.14.1}$$

现在设 M 是 (R, R)-双模, 代入 Hochschild 上同调 $\mathrm{HH}^n(M)$ 的原始定义 3.8.4, 遂得

$$\mathrm{HH}^n(M) = \mathrm{H}^n\left(\mathrm{Hom}_{R^e}(\mathsf{B}R, M)\right) = \mathrm{Ext}^n_{R^e}(R, M).$$

次一主题是 Tor 函子. 选定环 R. 模范畴 $R\text{-}\mathsf{Mod}$ (或 $\mathsf{Mod}\text{-}R$) 有足够的投射对象: 事实上, 自由模必然是投射模, 见 [25, 例 6.9.6].

张量积给出双函子

$$\otimes_R : \mathsf{Mod}\text{-}R \times R\text{-}\mathsf{Mod} \to \mathsf{Ab},$$

它对每个变元都是右正合的, 见 [25, 命题 6.9.2]; 对之可套用先前理论的右正合版本, 对两个变元定义左导出函子 $\mathrm{L}_{\mathrm{I},n}\otimes_R$ 和 $\mathrm{L}_{\mathrm{II},n}\otimes_R$, 它们仅在 $n \geq 0$ 时非零. 也请回忆何谓平坦模 [25, 定义 6.9.4].

定义–命题 3.14.7 (Tor 函子) *对于任何环 R, 双函子 $\otimes_R$ 是平衡的. 因此可对每个 $n \in \mathbb{Z}$ 定义双函子*

$$\mathrm{Tor}_n = \mathrm{Tor}^R_n : \mathsf{Mod}\text{-}R \times R\text{-}\mathsf{Mod} \to \mathsf{Ab}$$

为 $\mathrm{Tor}^R_n(X, Y) := (\mathrm{L}_{\mathrm{I},n}\otimes_R)(X, Y) \simeq (\mathrm{L}_{\mathrm{II},n}\otimes_R)(X, Y)$ (典范同构).

证明 平衡性缘于投射模必平坦 [25, 推论 6.9.9]. 应用定理 3.14.2 的左导出版本. □

我们有 $\mathrm{Tor}_0^R(X,Y) = X \underset{R}{\otimes} Y$, 而 $(\mathrm{Tor}_n)_{n\geq 0}$ 有如下形式的长正合列

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_{n+1}^R(X'',Y) \xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathrm{Tor}_n^R(X',Y) \to \mathrm{Tor}_n^R(X,Y) \to \mathrm{Tor}_n^R(X'',Y) \to \cdots$$
$$\cdots \to \mathrm{Tor}_{n+1}^R(X,Y'') \xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathrm{Tor}_n^R(X,Y') \to \mathrm{Tor}_n^R(X,Y) \to \mathrm{Tor}_n^R(X,Y'') \to \cdots$$

其中 $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ 和 $0 \to Y' \to Y \to Y'' \to 0$ 都是给定的短正合列.

继续重复和 Ext 情形相似的套话.

- ◇ 右 R-模 M 平坦 $\iff$ $\mathrm{Tor}_1^R(M,\cdot) = 0$ $\iff$ $\mathrm{Tor}_{\geq 1}^R(M,\cdot) = 0$;
- ◇ 左 R-模 N 平坦 $\iff$ $\mathrm{Tor}_1^R(\cdot,N) = 0$ $\iff$ $\mathrm{Tor}_{\geq 1}^R(\cdot,N) = 0$;

设 M 为 R-模. 仿照投射解消的定义, M 的**平坦解消**定义为如下形式的正合列

$$\cdots \to F^2 \to F^1 \to F^0 \to M \to 0, \quad \text{每个 } F^n \text{ 都是平坦 } R\text{-模}.$$

鉴于推论 3.12.10 和上述观察, $\mathrm{Tor}_n^R(X,Y)$ 亦可 X 或 Y 的平坦解消来计算. 这是计算 Tor 的实际技术, 而投射解消主要是在理论层面起作用.

这类计算自然也可以 “平衡”. 任取平坦解消 $\cdots \to P_1 \to P_0 \to X \to 0$ 和 $\cdots \to Q_1 \to Q_0 \to X \to 0$. 构造链复形意义下的双复形 $P_\bullet \underset{R}{\otimes} Q_\bullet$, 并且简记其全复形为 $P \otimes Q$. 注记 3.14.3 的同调版本表明 $\mathrm{Tor}_n^R(X,Y) \simeq \mathrm{H}_n(P\otimes Q)$; 该处论证所需的性质只有 $P_p \underset{R}{\otimes} (\cdot)$ 和 $(\cdot) \underset{R}{\otimes} Q_q$ 的正合性, 这正是平坦性所保证的.

注记 3.14.8 (双模结构) 选定环 A, B; 设 X 是 (A,R)-双模, Y 是 (R,B)-双模. 由于 Tor_n^R 是双函子, $\mathrm{Tor}_n^R(X,Y)$ 具有典范的 (A,B)-双模结构. 以 A 的左乘为例, 每个 $a \in A$ 都给出 X 作为右 R-模的自同态, 因而诱导 $\mathrm{Tor}_n^R(X,Y)$ 的自同态 L_a; 它们满足 $L_a L_{a'} = L_{aa'}$. 对 B 的右乘也在第二个变元作类似处理. 取 $n=0$ 便回到 $X \underset{R}{\otimes} Y$ 上的自然双模结构.

若选定 Y 作为左 R-模的平坦解消 $\cdots \to P_0 \to Y \to 0$, 则 A 的左乘作用可以直接在复形 $X \underset{R}{\otimes} P_\bullet$ 上读出: 它来自 A 对 X 的左乘. 右乘亦作如是观.

作为特例, 选定环同态 $R \to S$, 则 $\mathrm{Tor}_n^R(\cdot,S)$ (或 $\mathrm{Tor}_n^R(S,\cdot)$) 升级为函子 $\mathsf{Mod}\text{-}R \to \mathsf{Mod}\text{-}S$ (或 $R\text{-}\mathsf{Mod} \to S\text{-}\mathsf{Mod}$).

类似的论证表明: 对于 (R,A)-双模 X 和 (R,B)-双模 Y, 每个 $\mathrm{Ext}_R^n(X,Y)$ 都自然地成为 (A,B)-双模.

交换环 R 上的模不分左右, 对应的范畴统一写作 $R\text{-}\mathsf{Mod}$; 此时任何 R-模自然也是 (R,R)-双模, 故 Tor_n^R 升级为双函子 $(R\text{-}\mathsf{Mod})^2 \to R\text{-}\mathsf{Mod}$.

命题 3.14.9 当 R 是交换环时, 存在双函子的一族典范同构 $\mathrm{Tor}_n^R(X,Y) \simeq \mathrm{Tor}_n^R(Y,X)$, 其中 $n \in \mathbb{Z}$.

证明 分别取 X 和 Y 的平坦解消 $P_\bullet$ 和 $Q_\bullet$. 命 $P \otimes Q$ 为双复形 $P_\bullet \underset{R}{\otimes} Q_\bullet$ 的全复形. 张量积的交换约束 [25, 命题 6.5.14] 给出典范同构

$$P_p \underset{R}{\otimes} Q_q \simeq Q_q \underset{R}{\otimes} P_p, \quad p, q \in \mathbb{Z}.$$

应用命题 3.5.6 即可导出全复形的典范同构 $P \otimes Q \simeq Q \otimes P$. 证毕. □

注记 3.14.10 符号 Tor 意指 "挠元", 源自以下特例. 取环 R 的左理想 $\mathfrak{a}$, 再取任意右 R-模 X. 因为自由左模 R 平坦, 对 $0 \to \mathfrak{a} \to R \to R/\mathfrak{a} \to 0$ 应用命题 3.12.9 来移维, 可得典范同构

$$\begin{aligned}\mathrm{Tor}_1^R(X, R/\mathfrak{a}) &\simeq \ker\left[X \underset{R}{\otimes} \mathfrak{a} \to X \underset{R}{\otimes} R \simeq X\right] \\ &\simeq \left\{\sum_i x_i \otimes a_i \in X \underset{R}{\otimes} \mathfrak{a} : \sum_i x_i a_i = 0\right\}, \\ \mathrm{Tor}_n^R(X, R/\mathfrak{a}) &\simeq \mathrm{Tor}_{n-1}^R(X, \mathfrak{a}), \quad (n > 1).\end{aligned}$$

如进一步取 $t \in R$ 非右零因子, 再取 $\mathfrak{a} := Rt \overset{\sim}{\leftarrow} R$ (映 r 为 rt), 则 $\mathrm{Tor}_1^R(X, R/Rt) \simeq \{x \in X : xt = 0\}$, 即 X 的 t-挠元子模, 而 $n > 1$ 时 $\mathrm{Tor}_n^R(X, R/Rt) = 0$.

例 3.14.11 (HH_n 作为 Tor_n) 接续例 3.14.6 的起手式, 但将关于 R 的前提弱化为 R 是平坦 $\Bbbk$-模. 此时 $R^{\otimes n}$ 也平坦, 而结合约束 $(\cdot) \underset{R^e}{\otimes} (R \otimes R^{\otimes n} \otimes R) \simeq (\cdot) \otimes R^{\otimes n}$ 表明 $R \otimes R^{\otimes n} \otimes R$ 是平坦左 R^e-模. 故 $\mathsf{B}R$ 是 R 作为左 R^e-模的平坦解消, 如 (3.14.1).

对任意 (R, R)-双模 M, 代入 Hochschild 同调的原始定义 3.8.4 可得

$$\mathrm{HH}_n(M) = \mathrm{H}_n\left(M \underset{R^e}{\otimes} \mathsf{B}R\right) = \mathrm{Tor}_n^{R^e}(M, R).$$

现在可以结合例 3.14.6 和 3.14.11 来计算更多 Hochschild 同调与上同调的实例. 首先取多项式代数 $R = \Bbbk[t]$, 将 $R^e = R \otimes R^{\mathrm{op}}$ 等同于 $\Bbbk[x, y]$, 则 R 作为 R^e-模有自由解消

$$0 \to R^e \xrightarrow{\text{乘以 } x-y} R^e \xrightarrow{f \mapsto f(t,t)} R \to 0.$$

由此计算 $\mathrm{Ext}^n_{R^e}(R, \cdot)$ 与 $\mathrm{Tor}_n^{R^e}(\cdot, R)$, 立得 $n \in \{0, 1\}$ 时 $\mathrm{HH}_n(R) \simeq R \simeq \mathrm{HH}^n(R)$, 而 $n > 1$ 时 $\mathrm{HH}_n(R) = 0 = \mathrm{HH}^n(R)$.

其次取 $R = \Bbbk[t]/(t^2)$, 则 $R^e = \Bbbk[x, y]/(x^2, y^2)$. 对 R^e-模 R 有周期 2 的自由解消

$$\cdots \xrightarrow{x+y} R^e \xrightarrow{x-y} R^e \xrightarrow{x+y} R^e \xrightarrow{\text{乘以 } x-y} R^e \xrightarrow{f \mapsto f(t,t)} R \to 0,$$

正合性敬请读者直接验证. 对任意 R-模 M, 取 $M \underset{R^e}{\otimes} (\cdot)$ 和 $\mathrm{Hom}_{R^e}(\cdot, M)$ 分别给出

$$\cdots \xrightarrow{2t} M \xrightarrow{0} M \xrightarrow{2t} M \xrightarrow{0} M \to M \underset{R^e}{\otimes} R \to 0,$$

$$0 \to \mathrm{Hom}_{R^e}(R, M) \to M \xrightarrow{0} M \xrightarrow{2t} M \xrightarrow{0} M \xrightarrow{2t} \cdots.$$

因此 $\mathrm{HH}_k(M)$ 和 $\mathrm{HH}^k(M)$ 仅依赖 $k \bmod 2$; 倘若仅按定义计算, 此周期性恐怕不易察觉.

在 $\Bbbk$ 为域的情形, 由此可读出 $\mathrm{HH}_n(M)$ 和 $\mathrm{HH}^n(M)$, 但答案取决于 $\mathrm{char}(\Bbbk)$. 习题将讨论 $R = \Bbbk[t]/(t^n)$ 的一般情形.

以下结论常用于代数拓扑学, 同时也是先前内容的一次小验收, 它涉及链复形及其同调 (注记 2.2.6). 设 $C = (C_\bullet, d_\bullet^C)$ (或 $D = (D_\bullet, d_\bullet^D)$) 是右 R-模 (或左 R-模) 构成的链复形. 由之构造链双复形 $C_\bullet \otimes D_\bullet$, 并将其全复形记为

$$C \otimes D := \mathrm{tot}_\oplus (C_\bullet \otimes D_\bullet);$$

张量积的下标 R 省略. 具体地说, 全复形 $C \otimes D$ 的 n 次项是 $\bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes D_q$, 而其 d_n 拉回到 $C_p \otimes D_q$ 上等于 $d_p^C \otimes \mathrm{id} + (-1)^p \mathrm{id} \otimes d_q^D$. 这给出自明的典范同态

$$\kappa : \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{H}_p(C) \otimes \mathrm{H}_q(D) \to \mathrm{H}_n(C \otimes D).$$

定理 3.14.12 (同调 Künneth 定理) 取链复形 C, D 如上. 若每个 C_p 和 $\mathrm{im}\left(d_p^C\right)$ 都是平坦右 R-模, 则有典范短正合列

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{H}_p(C) \otimes \mathrm{H}_q(D) \xrightarrow{\kappa} \mathrm{H}_n(C \otimes D) \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{H}_p(C), \mathrm{H}_q(D)) \longrightarrow 0.$$

证明 对所有 $p \in \mathbb{Z}$ 定义 C_p 的子模 $B_p := \mathrm{im}\left(d_{p+1}^C\right)$ 和 $Z_p := \ker\left(d_p^C\right)$. 按 $d^Z = d^B := 0$ 将它们作成链复形 $Z = Z_\bullet$ 和 $B = B_\bullet$.

短正合列 $0 \to Z_p \to C_p \xrightarrow{d_p^C} B_{p-1} \to 0$ 和 Tor 函子的长正合列蕴涵 Z_p 亦平坦. 又因为 B_{p-1} 平坦, 故长正合列也说明

$$0 \to Z_p \otimes D_q \to C_p \otimes D_q \to B_{p-1} \otimes D_q \to 0$$

正合. 既然模的直和 (容许无穷) 保持正合性, 上式遂给出链复形的短正合列

$$0 \to Z \otimes D \to C \otimes D \to B[-1] \otimes D \to 0.$$

又因为 $d^Z = d^{B[-1]} = 0$, 对应的同调长正合列化为

$$\overbrace{\bigoplus_{p+q=n+1} B_{p-1} \otimes \mathrm{H}_q(D)}^{=\bigoplus_{p+q=n} B_p \otimes \mathrm{H}_q(D)} \xrightarrow{\partial_{n+1}} \bigoplus_{p+q=n} Z_p \otimes \mathrm{H}_q(D) \to \mathrm{H}_n(C \otimes D)$$
$$\to \underbrace{\bigoplus_{p+q=n} B_{p-1} \otimes \mathrm{H}_q(D)}_{=\bigoplus_{p+q=n-1} B_p \otimes \mathrm{H}_q(D)} \xrightarrow{\partial_n} \bigoplus_{p+q=n-1} Z_p \otimes \mathrm{H}_q(D).$$

待明确的仅有连接同态 ∂_{n+1} 和 ∂_n. 兹断言它们皆来自包含同态 $B_p \hookrightarrow Z_p$, 至多差一些简单的正负号. 为此须返归长正合列的明确构造, 即命题 3.6.4 的同调版本, 但此处可运用图追踪, 见 [25, 命题 6.8.6] 以上的说明; 细节留给读者验证.

作为推论, $\mathrm{coker}(\partial_{n+1})$ 等同于 $\bigoplus_{p+q=n} \mathrm{H}^p(C) \otimes \mathrm{H}^q(D)$, 从它到 $\mathrm{H}^n(C \otimes D)$ 的单态射等同于 κ.

最后, $0 \to B_p \to Z_p \to \mathrm{H}_p(C) \to 0$ 是 $\mathrm{H}_p(C)$ 的平坦解消, 故 $\ker(\partial_n) \simeq \bigoplus\limits_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{H}_p(C), \mathrm{H}_q(D))$. 至此得到所断言的短正合列. □

留意: 当 R 是除环, κ 必然是同构.

因为 D 在拓扑应用中充当了同调的系数, 定理 3.14.12 在 D 集中于零次项的特例也称为同调**泛系数定理**. 这类结果还有种种变体, 同时环结构也赋予 Tor 不共于其它导出双函子的运算, 这些结构似乎更适合以导出范畴或谱序列的语言来梳理.

3.15 K-内射和 K-投射复形

复形的内射和投射解消在 §3.12 给出导出函子的初步定义. 这些构造需要复形上有界或下有界, 但涉及无界复形及其导出范畴的应用则需要更广的一类解消. K-内射或 K-投射解消的理论肇自 [21]. 本节旨在提供一些相关的准备, 论证取法于 [22], 读者也可以参照 [10, Chapter 14] 或 [4].

定义 3.15.1 (N. Spaltenstein) 设 $\mathcal{A}$ 为 Abel 范畴.

- ◇ 满足以下条件的 $I \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}(\mathcal{A}))$ 称为 **K-内射复形**[5]: 当 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}(\mathcal{A}))$ 零调时, $\mathrm{Hom}^\bullet(X, I)$ 也零调.

  若 $f : A \to I$ 是 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的拟同构, I 是 K-内射的, 则称 f 是 A 的 **K-内射解消**.

- ◇ 满足以下条件的 $P \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}(\mathcal{A}))$ 称为 **K-投射复形**: 当 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}(\mathcal{A}))$ 零调时, $\mathrm{Hom}^\bullet(P, X)$ 也零调.

  若 $f : P \to A$ 是 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的拟同构, P 是 K-投射的, 则称 f 是 A 的 **K-投射解消**.

若 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 的所有对象都有 K-内射解消 (或 K-投射解消), 则称 $\mathcal{A}$ 有足够的 K-内射 (或 K-投射) 复形.

两套定义当然对偶. 实际操作中, 以下判准往往更方便.

引理 3.15.2 复形 I (或 P) 是 K-内射 (或 K-投射) 的当且仅当对于所有零调之 X, 皆有 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(X, I) = 0$ (或 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(P, X) = 0$).

[5] 更合理的术语兴许是同伦内射复形, 以及同伦投射复形.

证明 设 $n \in \mathbb{Z}$. 引理 3.2.3 说明

$$\mathrm{H}^n \operatorname{Hom}^\bullet(X, I) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(X[-n], I), \quad \mathrm{H}^n \operatorname{Hom}^\bullet(P, X) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(P, X[n]);$$

然而 X 零调等价于 $X[-n]$ 零调, 也等价于 $X[n]$ 零调. □

例 3.15.3 引理 3.11.6 立刻转译为以下陈述.

- 若 $I \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^+(\mathcal{A}))$ 由内射对象组成, 则 I 是 K-内射的.
- 若 $P \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^-(\mathcal{A}))$ 由投射对象组成, 则 P 是 K-投射的.

这将内射 (或投射) 解消化为 K-内射 (或 K-投射) 解消的特例.

例 3.15.4 (A. Dold) 例 3.15.3 的单边有界条件不可或缺. 作为例子, 取 $\mathcal{A} = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-Mod, 考虑其中的零调复形 Q 如下

$$\cdots \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \cdots$$

每项都是自由模. 另一方面, 取逐项的张量积 $Q \underset{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, 得到复形

$$\cdots \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \cdots$$

因此 Q 并非 K-投射的, 否则 id_Q 将同伦于 0, 而 $\mathrm{id}_{Q\otimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$ 亦然, 与 $\mathrm{H}^n(Q \underset{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 矛盾.

换个角度, 此例也说明投射对象组成的无界复形并非合理的解消: $0 \to Q$ 和 $0 \to 0$ 都是拟同构, 而上一段说明 id_Q 不同伦于 0, 从而 Q 和 0 在 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 中并不同构, 由此可见定理 3.11.5 无法简单扩及无界情形.

次一结果是定理 3.11.5 的自然推广, 其证明也同样付与定理 4.4.1 之后的讨论.

定理 3.15.5 取定 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的拟同构 $\alpha : X \to Y$.

- 给定态射 $\gamma : X \to I$, 其中 I 是 K-内射复形. 存在 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 中的交换图表

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"'] & Y. \arrow[dl, "\beta"] \\ I & \end{tikzcd}$$

- 给定态射 $\gamma : P \to Y$, 其中 P 是 K-投射复形. 存在 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 中的交换图表

$$\begin{tikzcd} Y & X. \arrow[l, "\alpha"'] \\ P \arrow[u, "\gamma"] \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

无论在哪种情形, β 作为 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 的态射都是唯一的.

命题 3.15.6 定义–命题 3.4.1 的等价 σ 满足: $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}))$ 是 K-内射 (或 K-投射) 的当且仅当 $\sigma X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Ob}(\mathsf{C}(\mathcal{A}))$ 是 K-投射 (或 K-内射) 的.

证明 函子 σ 保持零调复形, 诱导 $\mathsf{K}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{K}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}}$ (命题 3.4.3), 故保持引理 3.15.2 的判准. □

继而考虑伴随函子. 命题 2.8.17 在此有相应的版本。

命题 3.15.7 考虑 Abel 范畴之间的一对函子 $\mathcal{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{B}$, 并且假设 F 是正合函子.

- ◇ 若 G 是 F 的左伴随, 则 $\mathsf{K}G : \mathsf{K}(\mathcal{B}) \to \mathsf{K}(\mathcal{A})$ 映 K-投射复形为 K-投射复形;
- ◇ 若 G 是 F 的右伴随, 则 $\mathsf{K}G : \mathsf{K}(\mathcal{B}) \to \mathsf{K}(\mathcal{A})$ 映 K-内射复形为 K-内射复形.

证明 基于对偶性, 考虑 G 是左伴随的情形即可. 此时 G 自动是加性函子 (推论 1.3.6). 设 $P \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}(\mathcal{B}))$ 为 K-投射复形. 对于任意零调复形 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}(\mathcal{A}))$, 命题 3.2.11 给出同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(\mathsf{K}G(P), X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{B})}(P, \mathsf{K}F(X)).$$

由 F 正合得 $\mathsf{K}F(X)$ 零调, 右式为 0. 应用引理 3.15.2 完成证明. □

本节后续的任务是探讨 K-内射或 K-投射解消的存在性, 这部分需要比较曲折的论证. 且先从内射情形入手.

引理 3.15.8 考虑 $\mathcal{A}$ 上的一列复形 $\cdots \to I_2 \to I_1 \to I_0$. 假设

- ◇ 每个 I_k 都是 K-内射的;
- ◇ 对每个 k 和 n, 态射 $I^n_{k+1} \to I^n_k$ 是有截面的满态射 (换言之它有右逆, 见命题 2.5.3 后的解说);
- ◇ 对每个 n, 在 $\mathcal{A}$ 中存在 $I^n := \varprojlim_k I^n_k$.

此时诱导的 $d^n_I := \varprojlim_k d^n_{I_k} : I^n \to I^{n+1}$ 使 $I := (I^n, d^n_I)_n$ 成为 K-内射复形.

证明 设 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}(\mathcal{A}))$ 零调. 对每个 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 从复形 $\mathrm{Hom}^\bullet(X, I_k)$ 截取

$$\begin{array}{ccccccc}
\prod_n \mathrm{Hom}\left(X^n, I_k^{n-2}\right) & \to & \prod_n \mathrm{Hom}\left(X^n, I_k^{n-1}\right) & \to & \prod_n \mathrm{Hom}\left(X^n, I_k^{n}\right) & \to & \prod_n \mathrm{Hom}\left(X^n, I_k^{n+1}\right) \\
\| & & \| & & \| & & \| \\
\mathrm{Hom}^{-2}(X, I_k) & & \mathrm{Hom}^{-1}(X, I_k) & & \mathrm{Hom}^{0}(X, I_k) & & \mathrm{Hom}^{1}(X, I_k)
\end{array} \tag{3.15.1}$$

根据 I_k 为 K-内射复形的假设, 此列正合. 现在考虑由 $I_{k+1} \to I_k$ 诱导的同态

$$\mathrm{Hom}\left(X^n, I_{k+1}^{n-2}\right) \to \mathrm{Hom}\left(X^n, I_k^{n-2}\right);$$

因为存在截面 $I_k^{n-2} \to I_{k+1}^{n-2}$, 上式为满. 取 $\prod_n$ 后亦满, 因之 (3.15.1) 的左端项当 k 变动时是 Mittag-Leffler 的 (定义 3.13.11).

现在让 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 在 (3.15.1) 中变动, 由推论 3.13.14 导出

$$\varprojlim_k \prod_n \mathrm{Hom}\left(X^n, I_k^{n-1}\right) \to \varprojlim_k \prod_n \mathrm{Hom}\left(X^n, I_k^{n}\right) \to \varprojlim_k \prod_n \mathrm{Hom}\left(X^n, I_k^{n+1}\right)$$

正合. 其次, $\varprojlim_k$ 和 $\prod_n$ 可以交换, 这表明

$$\begin{tikzcd}
\prod_n \varprojlim_k \mathrm{Hom}\left(X^n, I_k^{n-1}\right) \arrow[r] & \prod_n \varprojlim_k \mathrm{Hom}\left(X^n, I_k^{n}\right) \arrow[r] & \prod_n \varprojlim \mathrm{Hom}\left(X^n, I_k^{n+1}\right) \\
\prod_n \mathrm{Hom}\left(X^n, I^{n-1}\right) \arrow[u, "\simeq"] & \prod_n \mathrm{Hom}\left(X^n, I^{n}\right) \arrow[u, "\simeq"] & \prod_n \mathrm{Hom}\left(X^n, I^{n+1}\right) \arrow[u, "\simeq"]
\end{tikzcd}$$

也正合. 然而这也是 $\mathrm{Hom}^\bullet(X, I)$ 的一段, 中项处的上同调正是 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(X, I)$. 综上, 对任意零调之 X 都有 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(X, I) = 0$. 应用引理 3.15.2 即可完成证明. □

引理 3.15.9 设 $\mathcal{A}$ 有足够的内射对象, 则对所有 $A \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}(\mathcal{A}))$, 都存在 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的交换图表

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & I_2 \arrow[r] & I_1 \arrow[r] & I_0 \\
\cdots \arrow[r] & \tau^{\geq -2}A \arrow[r] \arrow[u, "f_2"] & \tau^{\geq -1}A \arrow[r] \arrow[u, "f_1"] & \tau^{\geq 0}A \arrow[u, "f_0"]
\end{tikzcd}$$

其中 $\tau^{\geq k}A$ 及其间的箭头如定义 3.9.3 所述, 使得

- ◇ 每个 I_k 都是 $\mathsf{C}^+(\mathcal{A})$ 的对象, 由内射对象组成;
- ◇ 每个垂直箭头 f_k 既是单态射, 也是拟同构;
- ◇ 对每个 k 和 n, 态射 $I_{k+1}^n \to I_k^n$ 是有截面的满态射.

证明 从右向左构造. 以下论及的内射解消都默认为单态射.

首先对 $\tau^{\geq 0}A \in \mathsf{C}^+(\mathcal{A})$ 应用定理 3.11.3 得到内射解消 $f_0 : \tau^{\geq 0}A \to I_0$.

其次, 观定义 3.9.3 可见 $\tau^{\geq -k-1}A \to \tau^{\geq -k}A$ 逐项满, 因而是 $\mathsf{C}^+(\mathcal{A})$ 中的满态射. 现在假设已构造所需之拟同构

$$\tau^{\geq 0}A \xrightarrow{f_0} I_0, \quad \ldots, \quad \tau^{\geq -k}A \xrightarrow{f_k} I_k$$

连同相应的交换图表. 以定理 3.11.3 取 $H := \ker\left[\tau^{\geq -k-1}A \to \tau^{\geq -k}A\right]$ 的内射解消 $H \xrightarrow{g} J$, 则应用命题 3.11.8 可得 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的行正合交换图表

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & J \arrow[r] & I_{k+1} \arrow[r] & I_k \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & H \arrow[r] \arrow[u, "g"] & \tau^{\geq -k-1}A \arrow[r] \arrow[u, "f_{k+1}"] & \tau^{\geq -k}A \arrow[r] \arrow[u, "f_k"] & 0
\end{tikzcd}$$

使得 f_{k+1} 是内射解消. 第一行正合相当于 $0 \to J^n \to I^n_{k+1} \to I^n_k \to 0$ 对所有 n 皆正合, 而每项都是 $\mathcal{A}$ 的内射对象, 故引理 2.8.13 说明 $I^n_{k+1} \to I^n_k$ 有截面. 明所欲证. □

后继的讨论将用到 §3.13 的一些符号.

取 A 如上. 当 $k \geq 0$ 变动, 诸 $\tau^{\geq -k}A$ 给出 $\mathsf{InvSys}(\mathsf{C}(\mathcal{A}))$ 的对象, 记为 τA. 截断函子的定义给出一族典范态射 $A \to \tau^{\geq -k}A$. 逐项地考虑复形 $\tau^{\geq -k}A$, 可见它们的 $\varprojlim_k$ 存在, 而且上述典范态射诱导同构

$$A \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{k\geq 0} \left(\tau^{\geq -k}A\right). \tag{3.15.2}$$

其次考察 I_k. 假定 $\mathcal{A}$ 有可数积, 因此 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 也有逐项地构造的可数积. 对 $A \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}(\mathcal{A}))$ 考虑引理 3.15.9 给出的交换图表. 我们有

$$I := \varprojlim_k I_k \quad \text{存在.}$$

更具体地说, 根据定义 3.13.3 及其后的讨论, I 和 A 皆可置入正合列

$$0 \to I \to \prod_k I_k \xrightarrow{\Delta_I} \prod_k I_k,$$

$$0 \to A \to \prod_k \tau^{\geq -k}A \xrightarrow{\Delta_{\tau A}} \prod_k \tau^{\geq -k}A,$$

态射 Δ_I 和 $\Delta_{\tau A}$ 见诸上引定义. 由此可得交换图表

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook] \arrow[d] & \prod_k I_k & A \arrow[r, hook] \arrow[d] & \prod_k \tau^{\geq -k}A \\ \mathrm{Cone}(\Delta_I)[-1] \arrow[ur, "{\beta(\Delta_I)[-1]}"'] & & \mathrm{Cone}(\Delta_{\tau A})[-1] \arrow[ur, "{\beta(\Delta_{\tau A})[-1]}"'] & \end{tikzcd} \tag{3.15.3}$$

垂直箭头的定义都是嵌入映射锥的第一个坐标; 一种小题大做的解释则是用同伦核的泛性质 (命题 3.3.6).

另一方面, 从 $(f_k)_{k\geq 0}$ 和 $\varprojlim$ 的泛性质可得态射

$$f : A \simeq \varprojlim_k(\tau^{\geq -k}A) \to \varprojlim_k I_k = I,$$

它使下图交换

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\text{如 (3.15.3)}"] & \mathrm{Cone}\left(\Delta_I\right)[-1] \\ A \arrow[u, "f"] \arrow[r] & \mathrm{Cone}\left(\Delta_{\tau A}\right)[-1]. \arrow[u, "\text{由诸 } f_k \text{ 诱导}"'] \end{tikzcd} \tag{3.15.4}$$

引理 3.15.8 连同引理 3.15.9 说明 I 是 K-内射复形. 若能说明 f 是拟同构, 则 f 给出 A 的 K-内射分解. 最后这一击需要另加条件.

引理 3.15.10 在上述场景中, 进一步设 $\mathcal{A}$ 有正合的可数积 (约定 3.13.1), 则 f 是拟同构当且仅当 $A \to \mathrm{Cone}(\Delta_{\tau A})[-1]$ 是拟同构.

证明 对自然的交换图表

$$\begin{tikzcd}
\prod_k I_k \arrow[r, "\Delta_I"] & \prod_k I_k \arrow[r, "\alpha(\Delta_I)"] & \mathrm{Cone}\,(\Delta_I) \\
\prod_k \tau^{\geq -k} A \arrow[u, "\prod_k f_k"] \arrow[r, "\Delta_A"'] & \prod_k \tau^{\geq -k} A. \arrow[u, "\prod_k f_k"] \arrow[r, "\alpha(\Delta_{\tau A})"'] & \mathrm{Cone}\,(\Delta_{\tau A}) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

取映射锥的长正合列 (3.7.1), 导出行正合交换图表

$$\begin{tikzcd}
\cdots \mathrm{H}^n\left(\prod_k I_k\right) \arrow[r] & \mathrm{H}^n\left(\mathrm{Cone}(\Delta_I)\right) \arrow[r] & \mathrm{H}^{n+1}\left(\prod_k I_k\right) \arrow[r, "\mathrm{H}^{n+1}(\Delta_I)"] & \mathrm{H}^{n+1}\left(\prod_k I_k\right) \\
\cdots \mathrm{H}^n\left(\prod_k \tau^{\geq -k} A\right) \arrow[u, "\mathrm{H}^n(\prod_k f_k)"] \arrow[r] & \mathrm{H}^n\left(\mathrm{Cone}(\Delta_{\tau A})\right) \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{H}^{n+1}\left(\prod_k \tau^{\geq -k} A\right) \arrow[u, "\mathrm{H}^{n+1}(\prod_k f_k)"] \arrow[r, "\mathrm{H}^{n+1}(\Delta_{\tau A})"'] & \mathrm{H}^{n+1}\left(\prod_k \tau^{\geq -k} A\right). \arrow[u, "\mathrm{H}^{n+1}(\prod_k f_k)"']
\end{tikzcd}$$

回忆到每个 f_k 都是拟同构. 可数积正合故 $\prod_k f_k$ 仍是拟同构. 代入命题 2.3.4 遂得 $\mathrm{Cone}(\Delta_{\tau_A}) \to \mathrm{Cone}(\Delta_I)$ 也是拟同构.

其次证明 $I \to \mathrm{Cone}(\Delta_I)[-1]$ 是拟同构. 首先断言 Δ_I 是满的, 逐项检查如下. $\Delta_{I^n} : \prod_k I_k^n \to \prod_k I_k^n$ 之所以满, 是因为 $I_{k+1}^n \to I_k^n$ 有截面, 见例 3.13.10. 将短正合列 $0 \to I \to \prod_k I_k \xrightarrow{\Delta_I} \prod_k I_k \to 0$ 代入引理 3.7.2, 可见先前定义的态射 $I \to \mathrm{Cone}(\Delta_I)[-1]$ 确实是拟同构.

将这些结果代入交换图表 (3.15.4), 便是所求的充要条件. □

定理 3.15.11 满足以下两则条件的 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 有足够的 K-内射复形:

- ◇ $\mathcal{A}$ 有正合的可数积;
- ◇ $\mathcal{A}$ 有足够的内射对象.

证明 按引理 3.15.10, 问题化为对 $A \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}(\mathcal{A}))$ 证 $A \to \mathrm{Cone}(\Delta_{\tau A})[-1]$ 为拟同构. 选定 $n \in \mathbb{Z}$. 既然可数积正合, 引理 3.9.4 给出典范同构

$$\mathrm{H}^n\left(\prod_k \tau^{\geq -k} A\right) \simeq \prod_k \mathrm{H}^n\left(\tau^{\geq -k} A\right) \simeq \prod_{k \geq -n} \mathrm{H}^n(A).$$

假如对 $\mathcal{A}$ 的对象可以谈论元素, 则态射 $\Delta_{\tau A}$ 在取 H^n 以后表作

$$\begin{aligned}
\prod_{k \geq -n} \mathrm{H}^n(A) &\xrightarrow{\nabla^n} \prod_{k \geq -n} \mathrm{H}^n(A) \\
(a_k)_{k \geq -n} &\longmapsto (a_{k+1} - a_k)_{k \geq -n}.
\end{aligned}$$

易见 ∇^n 满, 而 $\ker(\nabla^n) = \{(a)_{k\geq -n} : a \in \mathrm{H}^n(A)\}$, 即其 "对角" 部分. 这些观察不难移植到一般的 $\mathcal{A}$ 上. 现在考虑映射锥的长正合列

$$\cdots \to \mathrm{H}^n\,\mathrm{Cone}(\Delta_{\tau A})[-1] \to \prod_{k\geq -n} \mathrm{H}^n(A) \xrightarrow[\text{满}]{\nabla^n} \prod_{k\geq -n} \mathrm{H}^n(A) \to \mathrm{H}^n\,\mathrm{Cone}(\Delta_{\tau A})\cdots$$

这将 $\mathrm{H}^n\,\mathrm{Cone}(\Delta_{\tau A})[-1] \to \prod_{k\geq -n} \mathrm{H}^n(A)$ 等同于 $\ker(\nabla^n)$ 的嵌入. 此外, (3.15.3) 蕴涵

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^n(A) \arrow[d] \arrow[dr, hook, "\text{对角态射}"] & \\ \mathrm{H}^n\left(\mathrm{Cone}(\Delta_{\tau A})[-1]\right) \arrow[r, hook] & \prod_{k\geq -n} \mathrm{H}^n(A) \end{tikzcd}$$

交换. 综上可知 $\mathrm{H}^n(A) \to \mathrm{H}^n\left(\mathrm{Cone}(\Delta_{\tau A})[-1]\right)$ 对每个 n 皆是同构. □

以命题 3.15.6 倒转箭头, 遂给出定理 3.15.11 的对偶版本.

定理 3.15.12 满足以下两则条件的 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 有足够的 K-投射复形:
- ◇ $\mathcal{A}$ 有正合的可数余积;
- ◇ $\mathcal{A}$ 有足够的投射对象.

推论 3.15.13 若 $\mathcal{A}$ 是有足够投射对象的 Grothendieck 范畴 (定义 2.10.1), 则它也有足够的 K-投射复形.

证明 Grothendieck 范畴 $\mathcal{A}$ 按定义有可数余积. 命题 2.10.2 蕴涵可数余积正合. 代入定理 3.15.12. □

例 3.15.14 设 R 为环. 定理 3.15.11 和推论 3.15.13 表明 R-Mod 有足够的 K-内射和 K-投射复形.

事实上, Grothendieck 范畴上的所有复形皆有 K-内射解消, 而且 K-内射解消可以和定理 2.10.14 作成函子, 这是 [20] 的主定理, 亦见 [22, Tag 079P]; 它足以对付定理 3.15.11 所不及, 而几何学中常见的一些场景.

习题

1. 本题联系态射的同伦以及映射锥的同构. 设 $\mathcal{A}$ 为加性范畴, 考虑 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 的任一对态射 $f, g \in \mathrm{Hom}(X, Y)$. 建立双射

$$\left\{ s \in \mathrm{Hom}^{-1}(X,Y) : d^{-1}_{\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y)}(s) = f - g \right\} \xrightarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{l} h : \mathrm{Cone}(f) \to \mathrm{Cone}(g), \\ \text{复形态射, 使下图交换} \end{array} \right\},$$

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Cone}(f) \arrow[dd, "h"] \arrow[dr, "\beta(f)"] & \\ Y \arrow[ur, "\alpha(f)"] \arrow[dr, "\alpha(g)"'] & & X[1] \\ & \mathrm{Cone}(g) \arrow[ur, "\beta(g)"'] & \end{tikzcd},$$

而且如是态射 h 必为复形的同构; 特别地, f 和 g 同伦当且仅当存在如是之 h.

提示 图表在 n 次项的交换性等价地表述为矩阵等式

$$h^n = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{X^{n+1}} & 0 \\ s^{n+1} & \mathrm{id}_{Y^n} \end{pmatrix}, \quad 其中\ s^{n+1} : X^{n+1} \to Y^n.$$

2. 选定 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 以及其上的复形 X. 试证以下陈述等价.

(i) X 在 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 中等于 0;

(ii) id_X 零伦;

(iii) X 零调, 而且存在 $(s^n)_n \in \mathrm{Hom}^{-1}(X, X)$ 使得 $d^n s^{n+1} d^n = d^n$ 对所有 n 成立;

(iv) 存在 $\mathcal{A}$ 的一列对象 $(Y^n)_n$ 和复形的同构 $\Phi : X \xrightarrow{\sim} (Y^n \oplus Y^{n+1}, \overline{d}^n)_n$, 其中 $\overline{d}$ 用矩阵表为 $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

提示 仅论 (iii) $\implies$ (iv). 条件蕴涵 $d^{n-1}s^n \in \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(X^n)$ 是幂等元; 由此得到分解 $X^n = Y^n \oplus Z^n$, 使得 $Y^n = \mathrm{im}(d^{n-1}s^n)$. 论证 $Y^n = \mathrm{im}(d^{n-1})$ 而 d^n 限制为同构 $Z^n \xrightarrow{\sim} \mathrm{im}(d^n)$, 然后让 Φ 对应到 $\left(\begin{smallmatrix} ds \\ d \end{smallmatrix}\right)$.

3. 选定 Abel 范畴 $\mathcal{A}$. 证明 X 是 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 的内射对象当且仅当 X 由 $\mathcal{A}$ 的内射对象组成, 而且在 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 中等于 0. 陈述投射对象的版本.

提示 对于 "仅当" 情形, 注意到 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 的短正合列 $0 \to X \to \mathrm{Cone}(\mathrm{id}_X) \to X[1] \to 0$ 分裂; 由命题 3.3.8 可知 X 零调. 取截面 $X[1] \to \mathrm{Cone}(\mathrm{id}_X)$, 表之为 $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -\theta \end{smallmatrix}\right)$, 其中 $\theta^n : X^{n+1} \to X^n$. 验证 $d_X^{n-1}\theta^{n-1} + \theta^n d_X^n = \mathrm{id}_{X^n}$ 以说明 id_X 零伦.

选定 n, 按上一道习题将 X^n 分解为 $Y^n \oplus Y^{n+1}$, 后续问题化为证 Y^n 内射. 任取 $\mathcal{A}$ 的态射 $f : A \to Y^n$ 和单态射 $g : A \hookrightarrow B$, 考虑 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 的行正合交换图表

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A[-n] \arrow[r, "{g[-n]}"] \arrow[d, "\Psi"'] & B[-n] \arrow[dl, dashed, "\exists"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

其中 $\Psi^n = \left(\begin{smallmatrix} f \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. 以此验证 Y^n 的内射条件.

对于 "当" 的情形, 仍将 X^n 表示成 $Y^n \oplus Y^{n+1}$, 具体描述所有可能的态射 $f : Z \to X$.

4. 设 $\Bbbk$ 是交换环, R 是 $\Bbbk$-代数. 记 $M_n(R)$ 为 R 上的 $n \times n$ 矩阵 $\Bbbk$-代数. 试给出典范同构 $\mathrm{HH}_0(M_n(R)) \simeq \mathrm{HH}_0(R)$ 和 $\mathrm{HH}^0(M_n(R)) \simeq \mathrm{HH}^0(R)$. 事实上, 对任意 HH_m 和 HH^m 都有这般同构.

5. 在 §3.8 的情境中, 对每个 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 定义 $\mathsf{B}_n R$ 的子双模

$$\mathrm{Triv}_n R := \sum_{h=1}^{n} R \otimes (\cdots \otimes \underbrace{\Bbbk}_{第\ h\ 个} \otimes \cdots) \otimes R, \quad \mathrm{Triv}_0 R = 0.$$

(i) 验证这给出 $\mathsf{B}R$ 的子复形 $\mathrm{Triv}R$, 而且 $\mathrm{Triv}R$ 在 $\mathsf{K}(R^e\text{-}\mathsf{Mod})$ 中为 0. 提示〉 将引理 3.8.2 证明中的 $(h^n)_n$ 限制到 $\mathrm{Triv}R$ 上.

(ii) 记 $\overline{R} := R/\Bbbk$, 定义 R 的既约杠复形为商

$$\overline{\mathsf{B}}R := \mathsf{B}R/\mathrm{Triv}R = \left(R \otimes \overline{R}^{\otimes n} \otimes R, b_n\right)_{n \geq 0}.$$

参照 (3.8.1) 的模式来简化 $M \underset{R^e}{\otimes} \overline{\mathsf{B}}R$ 和 $\mathrm{Hom}_{R^e}\left(\overline{\mathsf{B}}R, M\right)$.

(iii) 给出典范同构 $\mathrm{H}_n\left(M \underset{R^e}{\otimes} \overline{\mathsf{B}}R\right) \simeq \mathrm{HH}_n(M)$ 和 $\mathrm{H}^n\left(\mathrm{Hom}_{R^e}(\overline{\mathsf{B}}R, M)\right) \simeq \mathrm{HH}^n(M)$.

提示〉 将之前对 $\mathrm{Triv}R$ 的处理方式用于 $\mathrm{im}\left[M \underset{R^e}{\otimes} \mathrm{Triv}R \to M \underset{R^e}{\otimes} \mathsf{B}R\right]$.

6. 设 $\Bbbk$ 为交换环, $\tilde{R}$ 和 R 为 $\Bbbk$-代数, 按本书惯例要求含幺元, 并且作为 $\Bbbk$-模有分裂短正合列

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \tilde{R} \underset{s}{\overset{p}{\rightleftarrows}} R \longrightarrow 0$$

其中 M 是 $\tilde{R}$ 的双边理想, $ps = \mathrm{id}_R$, 而且 $M^2 = \{0\}$. 通过 s 将 $\tilde{R}$ 等同于 $R \oplus M$.

(i) 对 $m \in M$ 和 $r \in R$, 任取 $\tilde{r} \in p^{-1}(r)$, 说明 $\tilde{r}m$ 和 $m\tilde{r}$ 只和 m, r 有关, 此运算使 M 成为 (R, R)-双模.

(ii) 说明存在双线性映射 $f : R^2 \to M$ 使得 $\tilde{R}$ 的乘法由下式确定:

$$(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1 r_2, r_1 m_2 + m_1 r_2 + f(r_1, r_2)), \quad r_1, r_2 \in R, \ m_1, m_2 \in M.$$

(iii) 这样的资料 $(R, \tilde{R}, M)$ 称为 R 对 M 的零平方扩张. 证明在合适的同构意义下, 零平方扩张由 $\mathrm{HH}^2(M)$ 分类, 零元对应到平凡扩张 $R \times M$. 提示〉 使用前述的既约复形计算 $\mathrm{HH}^2(M)$.

7. 补全引理 3.8.9 的证明.

8. 在定义 3.8.10 的框架下, 对 $R = \Bbbk$ 的特例验证

(i) 当 n 是奇数时, $\mathrm{HP}_n(\Bbbk) = \mathrm{HC}_n(\Bbbk) = 0$;

(ii) 当 n 是偶数 (或者非负偶数) 时, $\mathrm{HP}_n(\Bbbk)$ (或 $\mathrm{HC}_n(\Bbbk)$) 同构于 $\Bbbk$.

9. 在定义 3.8.10 和定理 3.8.11 的框架下, 取多项式环 $R = \Bbbk[t]$.

(i) 说明例 3.8.8 的 $\Omega_{R|\Bbbk}$ 是秩 1 自由 R-模, 以 $\mathrm{d}t$ 为基.

(ii) 描述连接同态 $B : \mathrm{HC}_0(R) \to \mathrm{HH}_1(R)$; 注意到两边都同构于 R.

(iii) 尽量明确地描述所有的 $\mathrm{HC}_n(R)$. 在 $\Bbbk = \mathbb{Z}$ 的情形说明 $\mathrm{HC}_1(\mathbb{Z}[t]) = \bigoplus_{n \geq 2} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

提示〉 运用定理 3.8.11 的长正合列, 以及例 3.14.11 对 $\mathrm{HH}_n(\Bbbk[t])$ 在高次情形的计算.

10. 设 $\mathcal{A}$ 为 Abel 范畴, $0 \to X \to I^0 \to I^1 \to \cdots$ 为 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的正合列. 视 $I := [I^0 \to I^1 \to \cdots]$ 为双复形, $I^{p,q} := (I^p)^q$. 在 $I \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^2_f(\mathcal{A}))$ 的前提下, 证明自明的态射 $X \to \mathrm{tot}(I)$ 是拟同构.

11. 对 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^2_f(\mathcal{A}))$, 其中 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, 证明若第 i 列 $\left(X^{i,\bullet}, {}^{\vartriangle}d\right)$ 和第 j 行 $\left(X^{\bullet,j}, {}^{\triangleright}d\right)$ 对所有 $i, j \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$ 皆正合, 则对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 皆有典范同构 $\mathrm{H}^n\left(X^{0,\bullet}, {}^{\vartriangle}d\right) \simeq \mathrm{H}^n\left(X^{\bullet,0}, {}^{\triangleright}d\right)$.
$\boxed{\text{提示}}$ 定义从 $\mathsf{C}^2(\mathcal{A})$ 到自身的暴力截断函子 $\sigma_{\mathrm{I}}^{\leq n}$ (或 $\sigma_{\mathrm{I}}^{\geq n}$), 它将双复形 $(X^{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}$ 中 $i > n$ (或 $i < n$) 的项换为 0, 其余不变. 以定理 3.10.6 论证

$$\text{第 0 列} = \sigma_{\mathrm{I}}^{\leq 0}\sigma_{\mathrm{I}}^{\geq 0}(X) \twoheadleftarrow \sigma_{\mathrm{I}}^{\geq 0}X \hookrightarrow X$$

的两段态射都诱导全复形的拟同构. 行列对调亦同.

12. 设 $\mathcal{A}$ 为 Abel 范畴, $\alpha : X \to Y$ 是 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的拟同构, 而且 α 单. 给定 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的态射 $\gamma : X \to I$, 其中 $I \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^+(\mathcal{A}))$ 由内射对象组成. 证明存在 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的态射 $\beta : Y \to I$ 使得 $\gamma = \beta\alpha$.
$\boxed{\text{提示}}$ 逐步构造 β^n; 当 $n \ll 0$ 时命 $\beta^n = 0$. 设已有 β^{n-1}. 所求的 $\beta^n : Y^n \to I^n$ 在子对象 $\mathrm{im}(\alpha^n)$ 和 $\mathrm{im}(d_Y^{n-1})$ 上已经确定. 如能证明子对象的等式

$$\mathrm{im}\,(\alpha^n) \cap \mathrm{im}\left(d_Y^{n-1}\right) = \alpha^n\left(\mathrm{im}\left(d_X^{n-1}\right)\right),$$

则态射可以延拓到 $\mathrm{im}(\alpha^n) + \mathrm{im}(d_Y^{n-1})$, 进而延拓为 $\beta^n : Y^n \to I^n$.
借助 α^n 将每个 X^n 视为 Y^n 的子对象. 重点在于证任意态射 $\phi : T \to Y^n$ 若透过 $X^n \cap \mathrm{im}\left(d_Y^{n-1}\right)$ 分解, 则自动透过 $\mathrm{im}\left(d_X^{n-1}\right)$ 分解. 论证这样的态射诱导 $T \to \ker\left(d_X^n\right)$. 论证 $T \to \ker\left(d_X^n\right) \twoheadrightarrow \mathrm{H}^n(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n(Y)$ 合成为 0, 从而 ϕ 透过 $\mathrm{im}\left(d_X^{n-1}\right)$ 分解.

13. 以上一道习题的结果证明定理 3.11.5 中关于 β 的存在性部分. $\boxed{\text{提示}}$ 讨论第一种情形即可. 关于映射柱的引理 3.3.11 将 $X \xrightarrow{\alpha} Y$ 分解为 $X \xrightarrow{\alpha'} \mathrm{Cyl}(\alpha) \xrightarrow{\psi} Y$, 其中 α' 单, ψ 在 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 中可逆.

14. 证明定理 3.11.5 中关于 β 的唯一性.
$\boxed{\text{提示}}$ 讨论第一种情形. 仍以映射柱化约到 $\alpha^n : X^n \hookrightarrow Y^n$ 对每个 n 都是直和项的嵌入的情形. 设 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 的态射 $\beta_i : Y \to I$ $(i = 1, 2)$ 满足 $\gamma - \beta_i\alpha = d^{-1}_{\mathrm{Hom}^\bullet(X,I)}h_i$, 其中 $h_i \in \mathrm{Hom}^{-1}(X, I)$. 取零调复形 $C := \mathrm{coker}(\alpha)$, 定义 $h^n : Y^n \simeq X^n \oplus C^n \to I^{n-1}$ 使得它拉回 X^n (或 C^n) 等于 $h_1^n - h_2^n$ (或 0). 验证

$$\beta_1 - \beta_2 - d^{-1}_{\mathrm{Hom}^\bullet(Y,I)}h \;: Y \to I$$

合成 α 为 0, 因此 $\beta_1 - \beta_2$ 精确到同伦分解为 $Y \twoheadrightarrow C \to I$; 再对其后段应用引理 3.11.6.

15. 设 $\mathcal{A}$ 为 Abel 范畴, 证明 $(\mathrm{H}^n)_{n\geq 0}$ 给出从 $\mathsf{C}^{\geq 0}(\mathcal{A})$ (见定义 3.9.1) 到 $\mathcal{A}$ 的泛上同调 δ-函子.
$\boxed{\text{提示}}$ 为了证明 $n > 0$ 时 H^n 可拭, 考虑 $\alpha(\mathrm{id}_X) : X \hookrightarrow \mathrm{Cone}(\mathrm{id}_X)$, 然后适当地截断; 运用命题 3.3.8 (i).

16. (Milnor 正合列的复形版本) 考虑任意环 R 和 $\mathsf{InvSys}(\mathsf{C}(R\text{-}\mathsf{Mod}))$ 的对象 $(X_k, f_k)_{k\geq 0}$, 要求 $(X_k^n, f_k^n)_{k\geq 0}$ 对每个 $n \in \mathbb{Z}$ 都是 Mittag-Leffler 的; 今后省略符号 f_k. 按下述步骤建立短正合列

$$0 \to \mathrm{lim}^1_k\,\mathrm{H}^{n-1}(X_k) \to \mathrm{H}^n(\varprojlim_k X_k) \to \varprojlim_k \mathrm{H}^n(X_k) \to 0.$$

(i) 按照定理 3.11.9 的方式定义 $B_k^n \subset Z_k^n \subset X_k^n$ 和 H_k^n, 作成复形 $B_k \subset Z_k \subset X_k$ 和 H_k, 使得 d_{B_k}, d_{Z_k} 和 d_{H_k} 全为 0. 证明 $(B_k^n)_{k\geq 0}$ 对每个 n 都是 Mittag-Leffler 的.

(ii) 说明 $0 \to \varprojlim_k Z_k \to \varprojlim_k X_k \xrightarrow{d} \left(\varprojlim_k X_k\right)[1]$ 正合.

(iii) 定义 $B^n := \mathrm{im}\left(d^{n-1} : \varprojlim_k X_k^{n-1} \to \varprojlim X_k^n\right)$, 作成复形使得 $d_B = 0$. 证明有短正合列 $0 \to B[1] \to \varprojlim_k B_k[1] \to \lim^1 Z_k \to 0$.

提示 应用短正合列 $0 \to Z_k \to X_k \xrightarrow{d} B_k[1] \to 0$ 和 $(X_k^n)_{k\geq 0}$ 的 Mittag-Leffler 条件.

(iv) 推导同构 $\lim^1 Z_k \xrightarrow{\sim} \lim^1 H_k$ 和短正合列 $0 \to \varprojlim_k B_k \to \varprojlim_k Z_k \to \varprojlim_k H_k \to 0$.

提示 应用短正合列 $0 \to B_k \to Z_k \to H_k \to 0$ 和 $(B_k^n)_{k\geq 0}$ 的 Mittag-Leffler 条件.

(v) 以适当的嵌入 $B \hookrightarrow \varprojlim_k B_k \hookrightarrow \varprojlim_k Z_k$ 推导所求的短正合列.

17. 设 $\Bbbk$ 为域. 定义 $\mathsf{InvSys}(\Bbbk\text{-}\mathsf{Mod})$ 的对象 A, B 使得 $A_k := X^k\Bbbk[\![X]\!]$ 而 $B_k := X^k\Bbbk[X]$, 对应的态射为包含态射. 它们不满足 Mittag–Leffler 条件. 证明 $\lim^1 A = 0$ 而 $\lim^1 B \simeq \Bbbk[\![X]\!]/\Bbbk[X]$. 提示 将这些理想列嵌入环, 用命题 3.12.9 的移维技巧来计算 $\lim^1$.

18. 设 D 是除环. 说明 $n > 0$ 时 Ext^n_D 和 Tor^D_n 全为 0.

19. 对任何环 R, 严谨地表述并证明典范同构 $\mathrm{Tor}^R_n(X, Y) \simeq \mathrm{Tor}^{R^{\mathrm{op}}}_n(Y, X)$.

20. 设整环 R 为主理想环. 试对所有有限生成 R-模 M, N 和 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 精确描述 $\mathrm{Ext}^n_R(M, N)$ 和 $\mathrm{Tor}^R_n(M, N)$.

21. 设 M 为 $\mathbb{Z}$-模, 说明 $\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}_1(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, M)$ 是 M 的所有挠元构成的子群.

22. (上同调泛系数定理) 考虑环 R 和左 R-模构成的链复形 $C = (C_\bullet, d^C_\bullet)$. 对于任意左 R-模 G, 逐项取 $\mathrm{Hom}_R(\cdot, G)$ 给出上链复形 $C^\bullet := \mathrm{Hom}(C_\bullet, G)$, 其第 n 次上同调记为 $\mathrm{H}^n(C, G)$. 假设 $B_n := \mathrm{im}(d_{n+1})$ 和 $Z_n := \ker(d_n)$ 对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 都是投射模, 并且命 $H_n := Z_n/B_n = \mathrm{H}_n(C)$. 证明此时对每个 $n \in \mathbb{Z}$ 都有典范的短正合列

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{H}_{n-1}(C), G) \to \mathrm{H}^n(C, G) \to \mathrm{Hom}_R(\mathrm{H}_n(C), G) \to 0.$$

进一步证明若 R 是主理想环, 而且每个 C_n 都自由, 则条件必成立.

提示 定义从 $(R\text{-}\mathsf{Mod})^{\mathrm{op}}$ 到 Ab 的函子 $D(\cdot) := \mathrm{Hom}_R(\cdot, G)$. 运用短正合列 $0 \to H_n \to C_n/B_n \to B_{n-1} \to 0$ 和条件得到行正合交换图表

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & D(Z_{n-1}) \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d] & D(Z_{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, "D(d_n^C)"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & D(B_{n-1}) \arrow[r, "D(d_n^C)"'] & D(C_n/B_n) \arrow[r] & D(H_n) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

说明 d_C^{n-1} 分解为 $D(C_{n-1}) \twoheadrightarrow D(Z_{n-1}) \xrightarrow{D(d_n^C)} D(C_n/B_n) \hookrightarrow D(C_n)$, 而 $D(C_n/B_n) \simeq \ker(d_C^n)$, 故图表中路的余核是 $\mathrm{H}^n(C, G)$. 另一方面, $0 \to B_{n-1} \to Z_{n-1} \to H_{n-1} \to 0$ 说明左路余核是 $\mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{H}_{n-1}(C), G)$. 应用定理 2.3.3.

23. 在 §3.8 的框架下, 取 $R = \Bbbk[t]/(t^n)$, 其中 t 是多项式的变元, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, 而 $R^e = R[x, y]/(x^n, y^n)$.

(a) 说明以下链复形正合

$$\cdots \xrightarrow{v} R^e \xrightarrow{u} R^e \xrightarrow{v} R^e \xrightarrow{u} R^e \to R \to 0,$$

其中 $R^e \to R$ 映 $f(x,y)$ 为 $f(t,t)$, 而

$$u := x - y, \quad v := \sum_{\substack{a+b=n-1 \\ a,b\geq 0}} x^a y^b.$$

以此说明对任何 R-模 M 都有 $\mathrm{HH}_{k+2}(M) \simeq \mathrm{HH}_k(M)$ 和 $\mathrm{HH}^{k+2}(M) \simeq \mathrm{HH}^k(M)$.

(b) 设 $\Bbbk$ 为域, 给出 $\mathrm{HH}_k(M)$ 和 $\mathrm{HH}^k(M)$ 的描述, 按照 $k \geq 1$ 和 $\mathrm{char}(\Bbbk)$ 互素与否分开讨论.

24. 证明 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的对象 I 是内射对象当且仅当它视为复形是 K-内射的. 陈述其对偶版本. 提示 一个方向来自例 3.15.3. 对于反方向, 将 $\mathcal{A}$ 中的短正合列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 视同零调复形, 从给定的态射 $A \to I$ 构造从此短正合列到 I 的态射.

25. (N. Nitsure) 考虑 Abel 范畴之间的左正合函子 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. 设 $\mathcal{A}$ 有足够的内射对象, $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. 取 X 的内射解消 $0 \to X \to I^0 \to I^1 \to \cdots$ 和 F-零调解消 $0 \to X \to A^0 \to A^1 \to \cdots$. 记

$$I := [\cdots \to 0 \to I^0 \to I^1 \to \cdots], \quad A := [\cdots \to 0 \to A^0 \to A^1 \to \cdots].$$

- ◇ 引理 3.12.2 在 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 中确定唯一的态射 $\beta : A \to I$, 和 $A \leftarrow X \to I$ 兼容. 它给出 $c^n := \mathrm{H}^n(\beta) : \mathrm{H}^n(A) \to \mathrm{H}^n(I) = \mathrm{R}^n F(X)$.
- ◇ 另一方面, 推论 3.12.10 又通过移维给出同构 $d^n : \mathrm{H}^n(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}^n F(X)$.

证明对所有 $n \geq 0$ 都有 $d^n = (-1)^{n(n+1)/2} c^n$. 提示 这是 [18] 的内容.

第四章 三角范畴与导出范畴

♣♣♣ 待撰写

阅读提示

♣♣♣ 待撰写

4.1 三角范畴的定义

三角范畴是配备一族好三角的带平移的加性范畴. 先来解释何谓带平移的范畴.

定义 4.1.1 带平移的范畴意谓资料 $(\mathcal{D}, T)$, 其中 $\mathcal{D}$ 是范畴而 $T : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ 是等价[1], 称为 $\mathcal{D}$ 的**平移函子**; 另外选定 T 的拟逆函子 T^{-1} 以及同构 $T^{-1}T \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{D}} \simeq TT^{-1}$, 使之成为 [25, 定理 2.6.12] 所谓的伴随等价.

- ◇ 从 $(\mathcal{D}, T)$ 到 $(\mathcal{D}', T')$ 的函子意谓函子 $F : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ 连同指定的同构 $FT \simeq T'F$. 习惯是略去同构, 将此资料简记为 $F : (\mathcal{D}, T) \to (\mathcal{D}', T')$.

[1] 许多文献要求 T 是自同构, 此时 T^{-1} 唯一, 而 $T^{-1}T = \mathrm{id}_{\mathcal{D}} = TT^{-1}$. 这已经囊括本书实际处理的所有情形, 又避免 2-范畴论的潜在的枝微末节, 所以读者无妨也作此假设. 但要注意的是稳定模型范畴或稳定 ∞-范畴的研究难免涉及非同构的情形, 拓扑学中尤其如此.

◇ 两个函子 $(\mathcal{D},T) \overset{F}{\underset{F'}{\rightrightarrows}} (\mathcal{D}',T')$ 之间的态射意谓使下图交换的态射 $\varphi : F \to F'$:

$$\begin{tikzcd} FT \arrow[r, "\varphi T"] \arrow[d, "\simeq"'] & F'T \arrow[d, "\simeq"] \\ T'F \arrow[r, "T'\varphi"'] & T'F' \end{tikzcd}$$

◇ 带平移范畴 $(\mathcal{D},T)$ 的子范畴意谓 $\mathcal{D}$ 的子范畴 $\mathcal{D}'$ 及 $T' := T|_{\mathcal{D}}$, 使得 $(\mathcal{D}',T')$ 也是带平移的范畴.

若 $\mathcal{D}$ 是加性范畴, 而 T 是加性函子 (自动如此, 见推论 1.3.6), 则称 $(\mathcal{D},T)$ 是带平移的加性范畴; 这些范畴之间的函子也相应地要求加性. 对于 $\Bbbk$-线性的情形依然如此, 其中 $\Bbbk$ 是任意交换环.

若 $(\mathcal{D},T)$ 是带平移的范畴, $(\mathcal{D}^{\mathrm{op}},T^{-1})$ 亦然. 按惯例, 资料 $(\mathcal{D},T)$ 常简记为 $\mathcal{D}$. 以下概念相当方便.

定义 4.1.2 (带次数的态射) 带平移的范畴 $(\mathcal{D},T)$ 上的 m 次态射意谓形如 $f : X \to T^m Y$ 的态射, 也写作 $f : X \xrightarrow{+m} Y$ 之形. 给定 $X \xrightarrow[f]{+m} Y \xrightarrow[g]{+n} Z$, 其合成 gf 定为 $m+n$ 次态射 $T^m(g)f$. 对这类态射亦可谈论交换图表.

对于多元情形, 设 $\mathcal{D}$ 带有自同构 $T_1,\ldots,T_n$, 彼此严格交换 $T_iT_j = T_jT_i$, 则 $(m_1,\ldots,m_n)$ 次态射定为形如 $X \to T_1^{m_1}\cdots T_n^{m_n}Y$ 的态射, 记作 $X \xrightarrow{+(m_1,\ldots,m_n)} Y$.

举例明之, 选定范畴 $\mathcal{A}$, 定义 3.1.2 的分次对象范畴 $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}},T)$ 便是带平移的范畴; 推而广之, 还可以考虑 $\mathbb{Z}^n$-分次对象范畴 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^n}$, 连同它对每个变元的平移函子 $T_1,\ldots,T_n$, 依此探讨 $\mathbb{Z}^n$-分次对象之间的带次数的态射.

例 4.1.3 加性范畴 $\mathcal{A}$ 上的复形范畴 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 连同平移函子 $T : X \mapsto X[1]$ (定义 3.1.6) 构成带平移的加性范畴. 定义 3.2.8 的范畴 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 继承来自 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 的平移函子, 依然写作 $T : X \mapsto X[1]$. 自明的函子 $F : \mathsf{C}(\mathcal{A}) \to \mathsf{K}(\mathcal{A})$ 显然满足 $FT = TF$. 推而广之, 对于 $\star \in \{+,-,\mathrm{b}\}$, 定义 3.9.1 (或定义 3.9.2) 引入的范畴 $\mathsf{C}^\star(\mathcal{A})$ (或 $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$) 亦复如是.

本章主要考虑带平移的加性范畴.

定义 4.1.4 设 $(\mathcal{D},T)$ 为带平移的加性范畴. 其中的**三角**意谓 $\mathcal{D}$ 中形如

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$$

的态射. 三角之间的态射意谓形如

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"] & TX \arrow[d, "T\alpha"] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[r, "g'"'] & Z' \arrow[r, "h'"'] & TZ' \end{tikzcd}$$

的交换图表, 两行是给定的三角; 如是态射也简写为 $(X,Y,Z) \to (X',Y',Z')$. 按此可以定义三角之间的同构.

如将加性范畴换作更一般的 $\Bbbk$-线性范畴, 其中 $\Bbbk$ 为任意交换环, 依然有类似概念.

显然, $(\mathcal{D},T)$ 和 $(\mathcal{D}^{\mathrm{op}},T^{-1})$ 的三角是一回事.

注记 4.1.5 考虑带平移的 $\Bbbk$-线性范畴 $(\mathcal{D},T)$ 中的三角 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$ 和 $\epsilon,\zeta,\eta \in \Bbbk^\times$. 当 $\epsilon\zeta\eta = 1$ 时原三角与 $X \xrightarrow{\epsilon f} Y \xrightarrow{\zeta g} Z \xrightarrow{\eta h} TX$ 同构, 这是缘于交换图表

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\epsilon"] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\epsilon\zeta"] & TX \arrow[d, "\epsilon\zeta\eta"] \\ X \arrow[r, "\epsilon f"'] & Y \arrow[r, "\zeta g"'] & Z \arrow[r, "\eta h"'] & TX. \end{tikzcd}$$

按照定义 4.1.2, 我们也无妨将三角表作 $X \to Y \to Z \xrightarrow{+1}$ 之形, 或者更形象地表作 $\begin{tikzcd} & Y \arrow[dr] & \\ X \arrow[ur] & & Z \arrow[ll, "+1"] \end{tikzcd}$. 所以不妨将三角想像为盘旋上升的链, 三角之间的态射则是形似脱氧核糖核酸的结构; 态射中的 α, β, γ 等箭头类比于碱基之间的氢键.

定义 4.1.6 (三角范畴与三角函子) 所谓三角范畴, 是指一个带平移的加性范畴 $(\mathcal{D},T)$ 配上其中的一族三角 $\mathcal{H}$, 称为**好三角**, 满足以下公理.

(TR0) 同构于某个好三角的三角仍是好三角.

(TR1) 对每个 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$, 三角 $X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X \to 0 \to TX$ 是好三角.

(TR2) 每个态射 $f : X \to Y$ 都能扩充为形如 $X \xrightarrow{f} Y \to Z \to TX$ 的好三角, $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$.

(TR3) 三角 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$ 是好三角当且仅当它的 "逆时针旋转"

$$Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX \xrightarrow{-Tf} TY$$

是好三角 (正负号也可以取为 $(-++)$, $(+-+)$ 或 $(---)$, 见注记 4.1.5).

(TR4) 给定实线部分的交换图表

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & Z \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\gamma"] & TX \arrow[d, dashed, "T\alpha"] \\ X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & TX' \end{tikzcd}$$

并假设每行都是好三角, 则存在虚线所示态射 $\gamma : Z \to Z'$, 使得含 $\alpha,\beta,\gamma,T\alpha$ 的全图交换, 从而给出三角的态射.

(TR5) 给定好三角

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h} Z' \to TX,$$

$$Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{k} X' \to TY,$$

$$X \xrightarrow{gf} Z \xrightarrow{m} Y' \to TX,$$

存在好三角

$$Z' \xrightarrow{u} Y' \xrightarrow{v} X' \xrightarrow{w} TZ'$$

使得下图交换:

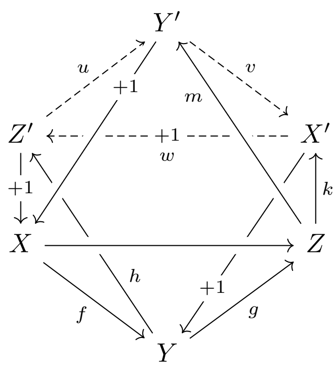
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"] & Z' \arrow[r] \arrow[d, "u"] & TX \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "gf"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[r, "m"] \arrow[d, equal] & Y' \arrow[r] \arrow[d, "v"] & TX \arrow[d, "Tf"] \\
Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & Z \arrow[r, "k"] \arrow[d, "m"] & X' \arrow[r] \arrow[d, equal] & TY \arrow[d, "Th"] \\
Z' \arrow[r, "u"'] & Y' \arrow[r, "v"'] & X' \arrow[r, "w"'] & TZ'.
\end{tikzcd}$$

仅满足 (TR0) — (TR4) 的资料 $(\mathcal{D}, T, \mathcal{H})$ 称为**预三角范畴**. 我们经常在符号中省略资料 T 和 $\mathcal{H}$.

从 $\mathcal{D}$ 到 $\mathcal{D}'$ 的**三角函子**意谓带平移加性范畴之间的函子 $F : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$, 使得 F 映好三角为好三角, 三角函子之间的态射则和定义 4.1.1 相同; 由此可以定义何谓三角函子的拟逆. 若一对三角函子 $\mathcal{D} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}'$ 互为拟逆, 则称其为 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}'$ 之间的**等价**.

当 $(\mathcal{D}, T)$ 为 $\Bbbk$-线性时, 上述定义皆有相应的推广.

注记 4.1.7 按照定义 4.1.2 的记法, 公理 (TR5) 可以改写成图表



虚线部分代表断言存在的态射, 而此八面体有四个面是好三角, 其余四面交换; 细节请读者琢磨. 职是之故, (TR5) 又称为八面体公理.

注记 4.1.8 (对偶性) 设 $(\mathcal{D}, T, \mathcal{H})$ 是预三角范畴 (或三角范畴). 视 T^{-1} 为 $\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ 到自身的函子, 另记为 S. 定义 $(\mathcal{D}^{\mathrm{op}}, S)$ 的一族三角 $\mathcal{K}$ 如下: 设

$$[X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX] \in \mathcal{H},$$

则 $T^{-1}Z \xrightarrow{T^{-1}h} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 可视同 $\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ 的三角

$$Z \xrightarrow{g^{\mathrm{op}}} Y \xrightarrow{f^{\mathrm{op}}} X \xrightarrow{(T^{-1}h)^{\mathrm{op}}} SZ; \tag{4.1.1}$$

定义 $\mathcal{K}$ 为所有在同构意义下形如 (4.1.1) 的三角所成之集. 容易验证 $(\mathcal{D}^{\mathrm{op}}, S, \mathcal{K})$ 成为预三角范畴 (或三角范畴). 此手续施行两次, 便回到原来的 $(\mathcal{D}, T, \mathcal{H})$.

定义–命题 4.2.10 将引入子预三角范畴和子三角范畴的概念, 此处按下不表.

引理 4.1.9 设 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{+1}$ 是预三角范畴中的好三角, 则 $gf = 0$.

证明 公理 (TR1) 和 (TR4) 给出交换图表

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "g"'] & Z \arrow[r] & TX \end{tikzcd}$$

由之立见 $gf = 0$. □

定义 4.1.10 (上同调函子) 设 $\mathcal{D}$ 为预三角范畴而 $\mathcal{A}$ 为 Abel 范畴. 满足以下性质的加性函子 $H : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ 称为上同调函子: 对 $\mathcal{D}$ 的每个好三角 $X \to Y \to Z \xrightarrow{+1}$, 相应的 $HX \to HY \to HZ$ 都是 $\mathcal{A}$ 中的正合列.

注记 4.1.11 对上同调函子 F 和 $\mathcal{D}$ 中的每个好三角 $X \to Y \to Z \xrightarrow{+1}$, 以 (TR3) 反复旋转, 可以将定义 4.1.10 中的正合列扩展为长正合列

$$\cdots \to HT^{-1}Z \to HX \to HY \to HZ \to HTX \to HTY \to \cdots.$$

旋转三角会引进一些负号, 但不影响上式的正合性.

上同调函子的基本例子是 Hom 函子.

命题 4.1.12 设 $\mathcal{D}$ 为预三角范畴而 S 是 $\mathcal{D}$ 的对象, 则函子 $\mathrm{Hom}(S, \cdot) : \mathcal{D} \to \mathsf{Ab}$ 和 $\mathrm{Hom}(\cdot, S) : \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Ab}$ 都是上同调函子.

若 $(\mathcal{D}, T)$ 是 $\Bbbk$-线性的, 则将 Ab 换为 $\Bbbk$-Mod, 相应的陈述依然成立.

证明 基于对偶性, 处理 $\mathrm{Hom}(S, \cdot)$ 即可. 考虑好三角 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{+1}$ 和相应的

$$\mathrm{Hom}(S, X) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}(S, Y) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}(S, Z).$$

引理 4.1.9 蕴涵 $g_* f_* = (gf)_* = 0$. 另一方面, 设 $h \in \mathrm{Hom}(S, Y)$ 满足 $g_*(h) = gh = 0$, 考虑实线部分的交换图表

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "k"'] & S \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & TS \arrow[d, dashed, "Tk"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "g"'] & Z \arrow[r] & TX \end{tikzcd}$$

若能找到虚线所示的 $k : S \to X$ 使全图交换, 则 $f_*(k) = h$ 即所求. 但 (TR1) 确保两行都是好三角, 用 (TR3) 适当旋转后, k 存在乃是 (TR4) 的推论. □

推论 4.1.13 *对于预三角范畴中形如 $X \xrightarrow{f} Y \to 0 \xrightarrow{+1}$ 的三角, f 必然是同构.*

证明 对每个对象 S, 命题 4.1.12 给出 Ab 中的正合列

$$\underbrace{\mathrm{Hom}(S, T^{-1}0)}_{=0} \to \mathrm{Hom}(S, X) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}(S, Y) \to \underbrace{\mathrm{Hom}(S, 0)}_{=0},$$

故 f_* 为同构. 因为 S 是任意的, 故 f 为同构. □

4.2 基本性质

上节仅含预三角范畴, 三角范畴和上同调函子的初步定义和性质. 本节铺展进一步的结构.

命题 4.2.1 *考虑预三角范畴 $\mathcal{D}$ 中的交换图表*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & TX \arrow[d, "T\alpha"] \\ Y' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & TX' \end{tikzcd}$$

若每行都是好三角, 而且 α, β, γ 中任两者为同构, 则另一态射亦然.

证明 用 (TR3) 适当旋转, 不妨设 α 和 γ 为同构. 为证 β 为同构, 仅须对每个对象 S 证 $\mathrm{Hom}(S, Y) \xrightarrow{\beta_*} \mathrm{Hom}(S, Y')$ 是同构. 命题 4.1.12 给出行正合交换图表

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(S, T^{-1}Z) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathrm{Hom}(S, X) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathrm{Hom}(S, Y) \arrow[r] \arrow[d, "\beta_*"] & \mathrm{Hom}(S, Z) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{Hom}(S, TX) \arrow[d, "\simeq"] \\ \mathrm{Hom}(S, T^{-1}Z') \arrow[r] & \mathrm{Hom}(S, X') \arrow[r] & \mathrm{Hom}(S, Y') \arrow[r] & \mathrm{Hom}(S, Z') \arrow[r] & \mathrm{Hom}(S, TX'). \end{tikzcd}$$

对上图应用命题 2.3.4 便是. □

在以上论证中也可以用 $\mathrm{Hom}(\cdot, S)$ 来取代 $\mathrm{Hom}(S, \cdot)$.

注记 4.2.2 姑且称三角 $X \to Y \to Z \xrightarrow{+1}$ 为特殊三角 (或余特殊三角), 若对所有 $S \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$, 列

$$\cdots \to \mathrm{Hom}(S,X) \to \mathrm{Hom}(S,Y) \to \mathrm{Hom}(S,Z) \to \mathrm{Hom}(S,TX) \to \cdots$$

(或相应的 $\mathrm{Hom}(\cdot,S)$ 版本) 皆正合. 如果 $X_i \to Y_i \to Z_i \xrightarrow{+1}$ 是一族好三角 ($i \in I$), 那么 $\prod_i X_i \to \prod_i Y_i \to \prod_i Z_i \xrightarrow{+1}$ (或 $\coprod_i X_i \to \coprod_i Y_i \to \coprod_i Z_i \xrightarrow{+1}$) 是特殊三角 (或余特殊三角), 前提是所论的积 (或余积) 存在; 这无非是积和余积的泛性质连同 [25, 引理 6.8.3] 的结论. 注意到 $T : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ 既是等价, 必然保积和余积. 命题 4.2.1 可以推广至两行都是特殊 (或余特殊) 三角的情形.

推论 4.2.3 对于预三角范畴 $\mathcal{D}$ 中的任意态射 $f : X \to Y$, 公理 (TR2) 中的好三角 $X \xrightarrow{f} Y \to Z \xrightarrow{+1}$ 在同构意义下唯一.

证明 给定好三角 $X \xrightarrow{f} Y \to Z \xrightarrow{+1}$ 和 $X \xrightarrow{f} Y \to Z' \xrightarrow{+1}$, 公理 (TR4) 给出态射 γ 使得图表

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_Y"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & TX \arrow[d, "\mathrm{id}_{TX}"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r] & Z' \arrow[r] & TX
\end{tikzcd}$$

交换. 命题 4.2.1 遂蕴涵 γ 为同构. □

必须强调, 推论 4.2.3 中的同构**并非是典范的**.

引理 4.2.4 设 $\mathcal{D}$ 为预三角范畴, $X_i \xrightarrow{f_i} Y_i \xrightarrow{g} Z_i \xrightarrow{h} TX_i$ 为一族好三角. 假设 $\prod_i X_i$, $\prod_i Y_i$, $\prod_i Z_i$ 皆存在, 则

$$\prod_{i\in I} X_i \xrightarrow{\prod_i f_i} \prod_{i\in I} Y_i \xrightarrow{\prod_i g_i} \prod_{i\in I} Z_i \xrightarrow{\prod_i h_i} \underbrace{\prod_{i\in I} TX_i}_{\simeq T(\prod_{i\in I} X_i)}$$

也是好三角. 以 $\coprod_{i\in I}$ 代 $\prod_{i\in I}$, 相应的断言也成立.

证明 鉴于对偶性, 以下仅处理 $\prod_{i\in I}$ 的情形. 今后总将 $\prod_i TX_i$ 等同于 $T(\prod_i X_i)$. 以 (TR2) 取好三角 $\prod_i X_i \xrightarrow{\prod_i f_i} \prod_i Y_i \to Q \xrightarrow{h} \prod_i TX_i$. 对每个 $i \in I$ 应用 (TR4) 以得到交换图表

$$\begin{tikzcd}
\prod_{j\in I} X_j \arrow[r, "\prod_j f_j"] \arrow[d] & \prod_j Y_j \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\exists\gamma_i"] & \prod_{j\in I} TX_j \arrow[d] \\
X_i \arrow[r, "f_i"'] & Y_i \arrow[r, "g_i"'] & Z_i \arrow[r, "h_i"'] & TX_i
\end{tikzcd}$$

垂直方向除 γ_i 都是典范投影态射. 积的泛性质遂给出交换图表

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in I} X_i \arrow[r, "\prod_i f_i"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \prod_{i\in I} Y_i \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & Q \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\prod_i \gamma_i"] & \prod_{i\in I} TX_i \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
\prod_{i\in I} X_i \arrow[r, "\prod_i f_i"'] & \prod_{i\in I} Y_i \arrow[r, "\prod_i g_i"'] & \prod_{i\in I} Z_i \arrow[r, "\prod_i h_i"'] & \prod_{i\in I} TX_i .
\end{tikzcd}$$

第二行是注记 4.2.2 所谓的特殊三角, 命题 4.2.1 的推广版本蕴涵 $\prod_{i\in I}\gamma_i$ 为同构. □

推论 4.2.5 在任意预三角范畴中, 形如 $X \xrightarrow{\iota_1} X\oplus Y \xrightarrow{p_2} Y \xrightarrow{0} TX$ 的三角总是好三角, 其中 ι_i 和 p_j 的定义如 §1.3.

证明 对好三角 $X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X \to 0 \to TX$ 和 $0 \to Y \xrightarrow{\mathrm{id}_Y} Y \to 0$ 应用引理 4.2.4. □

反之, 若好三角的其中一个态射为 0, 则它来自直和; 此事实可旋转到以下情况来验证.

命题 4.2.6 在任意预三角范畴中, 形如 $X \to M \to Y \xrightarrow{0} TX$ 的好三角必然同构于推论 4.2.5 中的三角 $X \to X\oplus Y \to Y \xrightarrow{0} TX$.

证明 应用 (TR4) 适当旋转后的版本, 可知存在态射 $\alpha : X\oplus Y \to M$ 使得下图给出好三角之间的态射

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"'] & X\oplus Y \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "\alpha"] & Y \arrow[r, "0"] \arrow[d, "\mathrm{id}_Y"] & TX \arrow[d, "\mathrm{id}_{TX}"] \\
X \arrow[r] & M \arrow[r] & Y \arrow[r, "0"'] & TX
\end{tikzcd}$$

命题 4.2.1 蕴涵 α 为同构. □

次一结果说明加性在三角函子的定义中实属多余.

推论 4.2.7 设 $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ 为预三角范畴, 其平移函子皆记为 T. 设 $F : (\mathcal{D}, T) \to (\mathcal{D}', T)$ 是带平移范畴之间的函子, 并且 F 映好三角为好三角, 则 F 是加性的, 从而 F 自动是三角函子.

证明 从 $\mathcal{D}$ 的好三角 $0 \xrightarrow{\mathrm{id}} 0 \xrightarrow{\mathrm{id}} 0 \xrightarrow{\mathrm{id}} 0$ 可得 $\mathcal{D}'$ 的好三角 $F(0) \xrightarrow{\mathrm{id}} F(0) \xrightarrow{\mathrm{id}} F(0) \xrightarrow{\mathrm{id}} F(0)$. 引理 4.1.9 遂导致 $\mathrm{id}_{F(0)} = \mathrm{id}_{F(0)} \circ \mathrm{id}_{F(0)} = 0$, 从而 $F(0) \simeq 0$. 这又蕴涵 F 映零态射为零态射.

接着考虑 $\mathcal{D}$ 中由推论 4.2.5 给出的好三角 $X \xrightarrow{\iota_1} X\oplus Y \xrightarrow{p_2} Y \xrightarrow{0} TX$. 相应地,

$$FX \xrightarrow{F\iota_1} F(X\oplus Y) \xrightarrow{Fp_2} FY \xrightarrow{0} TFX$$

是 $\mathcal{D}'$ 中的好三角. 在命题 4.2.6 中取 $M := F(X \oplus Y)$, 则该证明中的 α 显然可取作由直和泛性质确定之典范态射 $FX \oplus FY \to F(X \oplus Y)$, 从而知 α 为同构. 基于推论 1.3.6 (iii), F 是加性的. $\square$

以下两则结果表明在预三角范畴的等价中 (定义 4.1.6), 假设单向为三角函子即可. 这是命题 4.1.12 的又一应用.

命题 4.2.8 设 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}'$ 为预三角范畴, 考虑函子 $\mathcal{D} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}'$ 并假设 (F, G) 为伴随对, 则 F 为三角函子当且仅当 G 为三角函子; 此时伴随对的单位 $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{D}} \to GF$ 和余单位 $\varepsilon : FG \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}'}$ 都和平移函子相容, 见定义 4.1.1.

证明 鉴于对偶性, 考虑 F 为三角函子的情形即足. 推论 1.3.6 表明 G 是加性的. 将 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}'$ 的平移函子同记为 T. 简单地搬运结构以得到新的伴随对

$$\hat{F} := TFT^{-1}, \quad \hat{G} := TGT^{-1}, \quad \hat{\eta} := T\eta T^{-1}, \quad \hat{\varepsilon} := T\varepsilon T^{-1}.$$

因为 $\hat{F} \simeq F$, 右伴随的唯一性 [25, 命题 2.6.10] 给出相应的 $\hat{G} \simeq G$ 连同交换图表

$$\begin{tikzcd} \hat{F}\hat{G} \arrow[r, "\hat{\varepsilon}"] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathrm{id}_{\mathcal{D}'} \\ FG \arrow[ur, "\varepsilon"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \hat{G}\hat{F} \arrow[d, "\simeq"'] & \mathrm{id}_{\mathcal{D}} \arrow[l, "\hat{\eta}"'] \arrow[dl, "\eta"] \\ GF & \end{tikzcd}$$

特别地, $GT \simeq TG$, 而关于 $\hat{\varepsilon}$ 的交换图表可改写为

$$\begin{tikzcd} TFGX \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, "T\varepsilon_X"'] & FTGX \arrow[r, "\sim"] & FGTX \arrow[dl, "\varepsilon_{TX}"] \\ & TX & \end{tikzcd} \qquad (X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}')) \tag{4.2.1}$$

此式及其对 η 的对偶版本说明 η 和 ε 都和平移函子兼容.

以下说明 G 保持好三角. 考虑 $\mathcal{D}'$ 中的好三角 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{+1}$. 取 $\mathcal{D}$ 中好三角 $GX \xrightarrow{Gf} GY \xrightarrow{h} A \xrightarrow{+1}$, 取它对 F 的像, 再应用 (TR3) 获得交换图表

$$\begin{tikzcd} FGX \arrow[r, "FGf"] \arrow[d, "\varepsilon_X"'] & FGY \arrow[r, "Fh"] \arrow[d, "\varepsilon_Y"] & FA \arrow[r] \arrow[d] & TFGX \arrow[d, "T\varepsilon_X"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "g"'] & Z \arrow[r] & TX. \end{tikzcd}$$

对上图应用伴随性, 并且以 (4.2.1) 调整右侧方块, 易得交换图表

$$\begin{tikzcd} GX \arrow[r, "Gf"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"'] & GY \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\mathrm{id}_Y"] & A \arrow[r] \arrow[d] & TGX \arrow[d, "\mathrm{id}_{TGX}"] \\ GX \arrow[r, "Gf"'] & GY \arrow[r, "Gg"'] & GZ \arrow[r] & TGX \end{tikzcd}$$

其第一行是好三角. 对任意 $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ 取 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(B, \cdot)$, 给出交换图表

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(B,GX) \arrow[r, "(Gf)_*"] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathrm{Hom}(B,GY) \arrow[r, "h_*"] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{Hom}(B,A) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(B,TGX) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{Hom}(B,TGY) \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathrm{Hom}(B,GX) \arrow[r, "(Gf)_*"'] & \mathrm{Hom}(B,GY) \arrow[r, "(Gg)_*"'] & \mathrm{Hom}(B,GZ) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(B,TGX) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(B,TGY)
\end{tikzcd}$$

而命题 4.1.12 表明第一行正合. 另一方面, 第二行因 $TG \simeq GT$ 和伴随性同构于由好三角 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{+1}$ 诱导的

$$\mathrm{Hom}(FB,X) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}(FB,Y) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}(FB,Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}(FB,TX) \longrightarrow \mathrm{Hom}(FB,TY),$$

因而也正合. 既然 B 可任取, 命题 2.3.4 遂蕴涵 $A \to GZ$ 为同构, 故 $GX \xrightarrow{Gf} GY \xrightarrow{Gg} GZ \to TGX$ 确实是 $\mathcal{D}$ 中的好三角. □

推论 4.2.9 设 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}'$ 为预三角范畴, 函子 $\mathcal{D} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}'$ 互为拟逆, 则

(i) F 为三角函子当且仅当 G 亦然;

(ii) 若 F 为三角函子, 则 F 和 G 给出预三角范畴之间的等价.

证明 以 [25, 定理 2.6.12] 将 (F, G) 和 (G, F) 实现为伴随对, 再应用命题 4.2.8. □

定义–命题 4.2.10 (子预三角范畴) 设 $\mathcal{D}'$ 为预三角范畴 $\mathcal{D}$ 的加性全子范畴, 对平移函子 T 封闭. 记包含函子为 $\iota : \mathcal{D}' \to \mathcal{D}$.

(i) 在 $\mathcal{D}'$ 上使得 ι 为三角函子的预三角结构若存在则是唯一的, 此时 $X \to Y \to Z \xrightarrow{+1}$ 是 $\mathcal{D}'$ 的好三角当且仅当它在 $\mathcal{D}$ 中是好三角.

(ii) 上述预三角结构存在的充要条件为: 若 $X \to Y \to Z \xrightarrow{+1}$ 是 $\mathcal{D}$ 的好三角, 任两项属于 $\mathrm{Ob}(\mathcal{D}')$, 则另一项同构于 $\mathcal{D}'$ 的对象.

(iii) 若进一步假设 $\mathcal{D}$ 为三角范畴, 则 $\mathcal{D}'$ 亦然.

这样的预三角范畴 (或三角范畴) $\mathcal{D}'$ 称为 $\mathcal{D}$ 的**子预三角范畴** (或**子三角范畴**).

证明 首先处理 (i). 设 ι 是三角函子, 则 $\mathcal{D}'$ 的好三角当然是 $\mathcal{D}$ 的好三角. 反之设 $\mathcal{D}$ 的好三角 $X \xrightarrow{f} Y \to Z \xrightarrow{+1}$ 满足 $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}')$. 任取 $\mathcal{D}'$ 的好三角 $X \xrightarrow{f} Y \to Z' \xrightarrow{+1}$, 对 $\mathcal{D}$ 应用推论 4.2.3 可见两者同构, 而 $\mathcal{D}'$ 是全子范畴, 故 (TR0) 蕴涵 $X \xrightarrow{f} Y \to Z \xrightarrow{+1}$ 也是 $\mathcal{D}'$ 的好三角. 这正是断言的预三角结构.

若上述三角结构存在, 则熟悉的推论 4.2.3 表明 (ii) 的条件是必要的, 因为旋转后总可以假设 $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}')$. 反之设 (ii) 的条件成立, 按 (i) 所断言的方式定义 $\mathcal{D}'$ 中的

好三角. 关于 $\mathcal{D}'$ 的公理 (TR0), (TR1), (TR3) 和 (TR4) 直接继承自 $\mathcal{D}$. 对于 (TR2), 对 $\mathcal{D}'$ 中态射 $f: X \to Y$ 取 $\mathcal{D}$ 的好三角 $X \xrightarrow{f} Y \to Z \xrightarrow{+1}$, 则条件表明 Z 同构于 $\mathcal{D}'$ 的对象; 因此不妨设 $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}')$, 给出 $\mathcal{D}'$ 中的好三角. 至此可见 $\mathcal{D}'$ 成为预三角范畴. 充分性得证.

对于 (iii), 要点在于对 $\mathcal{D}'$ 验证 (TR5): 诚然, 对 $\mathcal{D}$ 应用 (TR5) 所得之 $Z' \to Y' \to X' \xrightarrow{+1}$ 按照 (i) 也自动是 $\mathcal{D}'$ 的好三角. □

约定 4.2.11 选定范畴 $\mathcal{C}$. 若子范畴 $\mathcal{C}'$ 具备同构封闭性

$$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}'),\ \forall Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}), \quad X \simeq Y \implies Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$$

则称 $\mathcal{C}'$ 为**饱和子范畴**. 对任一族全子范畴 $(\mathcal{C}_i)_{i\in I}$ (要求 I 非空), 其交 $\bigcap_{i\in I} \mathcal{C}_i$ 按定义是 $\mathcal{C}$ 的全子范畴, 满足 $\mathrm{Ob}\left(\bigcap_{i\in I} \mathcal{C}_i\right) = \bigcap_{i\in I} \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_i)$.

命题 4.2.12 设 $\mathcal{D}$ 为预三角范畴 (或三角范畴), 而 $(\mathcal{D}_i)_{i\in I}$ 是一族饱和子预三角范畴 (或饱和子三角范畴), $I \neq \varnothing$, 则 $\bigcap_{i\in I} \mathcal{D}_i$ 也是饱和子预三角范畴 (或饱和子三角范畴).

证明 饱和子范畴的交显然保持定义–命题 4.2.10 (ii) 的条件. □

常见的手法是以上同调函子截出饱和子预三角范畴 (或子三角范畴).

命题 4.2.13 设 $\mathcal{D}$ 为预三角范畴 (或三角范畴), $H: \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ 为上同调函子, 而 $\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{A}$ 的弱 Serre 子范畴 (定义 2.9.3). 定义 $\mathcal{D}$ 的全子范畴 $\mathcal{D}_{H,\mathcal{T}}$ 如下

$$X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}_{H,\mathcal{T}}) \iff \forall n \in \mathbb{Z},\ H(T^n X) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}).$$

则 $\mathcal{D}_{H,\mathcal{T}}$ 是 $\mathcal{D}$ 的饱和子预三角范畴 (或饱和子三角范畴).

证明 方法是验证定义–命题 4.2.10 (ii) 的条件. 饱和性质和 T-不变性是显然的. 现在考虑 $\mathcal{D}$ 的好三角 $X \to Y \to Z \xrightarrow{+1}$, 其中两项来自 $\mathcal{D}_{H,\mathcal{T}}$; 旋转后不妨假设 $X, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}_{H,\mathcal{T}})$. 对每个 $n \in \mathbb{Z}$ 都有正合列

$$H(T^{n-1}Z) \to H(T^n X) \to H(T^n Y) \to H(T^n Z) \to H(T^{n+1}X).$$

代入弱 Serre 子范畴的定义, 可得 $H(T^n Y) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$. □

例 4.2.14 设 $\mathcal{D}$ 为预三角范畴 (或三角范畴), $H: \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ 为上同调函子. 定义 $\mathcal{N}_H$ 为由对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 都满足 $H(T^n X) = 0$ 的对象构成的全子范畴. 这相当于在命题 4.2.13 中取 $\mathcal{T}$ 为零对象构成的子范畴. 因此 $\mathcal{N}_H$ 是子预三角范畴 (或子三角范畴).

稍后在 §4.3 将动用以下的技术性结果, 它依赖于八面体公理 (TR5).

引理 4.2.15 (J.-L. Verdier) 三角范畴 $\mathcal{D}$ 中的任意交换图表

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \\
X' \arrow[u, "u"] \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[u, "v"']
\end{tikzcd}$$

皆能扩充为图表

$$\begin{tikzcd}
TX' \arrow[r, "Tf'"] & TY' \arrow[r, "Tg'"] & TZ' \arrow[r, "-Th'"] & T^2X' \\
X'' \arrow[u, "o"] \arrow[r, "f''"] & Y'' \arrow[u, "p"] \arrow[r, "g''"] & Z'' \arrow[u, "q"] \arrow[r, "h''"] \arrow[ur, phantom, "\star"] & TX'' \arrow[u, "-To"'] \\
X \arrow[u, "r"] \arrow[r, "f"] & Y \arrow[u, "s"] \arrow[r, "g"] & Z \arrow[u, "t"] \arrow[r, "h"] & TX \arrow[u, "Tr"'] \\
X' \arrow[u, "u"] \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[u, "v"] \arrow[r, "g'"'] & Z' \arrow[u, "w"] \arrow[r, "h'"'] & TX' \arrow[u, "Tu"']
\end{tikzcd}$$

使得每行每列都是好三角, 标作 $\star$ 的方块反交换 (亦即 $(To)h'' = -(Th')q$), 其余方块皆交换.

证明 以下逐步构造所求的好三角, 再证交换和反交换性. 首先分别对 u, v, f, f' 应用 (TR2), 得图表的

$$\begin{tikzcd}
\bullet & \bullet & & \\
\bullet \arrow[u] & \bullet \arrow[u] & & \\
\bullet \arrow[u] \arrow[r] & \bullet \arrow[u] \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \\
\bullet \arrow[u] \arrow[r] & \bullet \arrow[u] \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet
\end{tikzcd}$$

部分, 使得其中每行每列都是好三角. 其次, 对 $fu = vf' : X' \to Y$ 应用 (TR2) 给出好三角 $X' \to Y \xrightarrow{m} A \xrightarrow{n} TX'$. 以下构造将基于 (TR5).

1. 对包含 f', v 和 vf' 的三个好三角应用 (TR5), 得到好三角之间的态射

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, equal] & Y' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "v"] & Z' \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "i"] & TX' \arrow[d, equal] \\
X' \arrow[r, "vf'"] \arrow[d, "f'"'] & Y \arrow[r, "m"] \arrow[d, equal] & A \arrow[r, "n"] \arrow[d, "j"] & TX' \arrow[d, "Tf'"] \\
Y' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g'"'] & Y \arrow[r, "s"] \arrow[d, "m"] & Y'' \arrow[r, "p"] \arrow[d, equal] & TY' \arrow[d, "Tg'"] \\
Z' \arrow[r, "i"'] & A \arrow[r, "j"'] & Y'' \arrow[r, "k"'] & TZ'
\end{tikzcd} \tag{4.2.2}$$

最后一行是新构造的好三角.

2. 对包含 u, f, fu 的三个好三角应用 (TR5), 给出好三角之间的态射

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, "r"] \arrow[d, "f"] & X'' \arrow[r, "o"] \arrow[d, "a"] & TX' \arrow[d, equal] \\
X' \arrow[r, "fu"] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[r, "m"] \arrow[d, equal] & A \arrow[r, "n"] \arrow[d, "b"] & TX' \arrow[d, "Tu"] \\
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "m"] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, equal] & TX \arrow[d, "Tr"] \\
X'' \arrow[r, "a"'] & A \arrow[r, "b"'] & Z \arrow[r, "c"'] & TX''
\end{tikzcd} \tag{4.2.3}$$

最后一行是新构造的好三角.

3. 对 $f'' := ja : X'' \to Y''$ 应用 (TR2) 得到好三角 $X'' \xrightarrow{f''} Y'' \xrightarrow{g''} Z'' \xrightarrow{h''} TX''$.

4. 考虑以上步骤配合 (TR3) 旋转得到的好三角

$$X'' \xrightarrow{a} A \xrightarrow{b} Z \xrightarrow{c} TX'', \quad A \xrightarrow{j} Y'' \xrightarrow{k} TZ' \xrightarrow{-Ti} TA,$$
$$X'' \xrightarrow{f''=ja} Y'' \xrightarrow{g''} Z'' \xrightarrow{h''} TX''.$$

应用 (TR5) 遂给出好三角之间的态射

$$\begin{tikzcd}
X'' \arrow[r, "a"] \arrow[d, equal] & A \arrow[r, "b"] \arrow[d, "j"] & Z \arrow[r, "c"] \arrow[d, "t"] & TX'' \arrow[d, equal] \\
X'' \arrow[r, "f''"] \arrow[d, "a"'] & Y'' \arrow[r, "g''"] \arrow[d, equal] & Z'' \arrow[r, "h''"] \arrow[d, "q"] & TX'' \arrow[d, "Ta"] \\
A \arrow[r, "j"] \arrow[d, "b"'] & Y'' \arrow[r, "k"] \arrow[d, "m"] & TZ' \arrow[r, "-Ti"] \arrow[d, equal] & TA \arrow[d, "Tb"] \\
Z \arrow[r, "t"'] & Z'' \arrow[r, "q"'] & TZ' \arrow[r, "l"'] & TZ
\end{tikzcd} \tag{4.2.4}$$

最后一行是新构造的好三角. 命 $w := ib$. 图表 (4.2.4) 交换蕴涵 $l = -Tw$, 故旋转给出好三角

$$Z' \xrightarrow{w} Z \xrightarrow{t} Z'' \xrightarrow{q} TZ'.$$

上述操作给出所求图表的第二行和第三列. 剩余第一行 (或第四列) 是第四行 (或第一列) 按 (TR3) 旋转的产物, 故也是好三角 (见注记 4.1.5).

接下来验证交换性和反交换性. 从 $w = ib$ 和 (4.2.2) 蕴涵之 $s = jm$, 可知 (u, v, w)

和 (r,s,t) 分别是以下合成

$$(X',Y',Z') \xrightarrow[(4.2.2)]{(\mathrm{id},v,i)} (X',Y,A) \xrightarrow[(4.2.3)]{(u,\mathrm{id},b)} (X,Y,Z),$$

$$(X,Y,Z) \xrightarrow[(4.2.3)]{(r,m,\mathrm{id})} (X'',A,Z) \xrightarrow[(4.2.4)]{(\mathrm{id},j,t)} (X'',Y'',Z''),$$

故皆是三角之间的态射. 最后考虑图中态射 $(o,p,q,-To)$. 问题归结为证下图交换:

$$\begin{tikzcd}
TX' \arrow[r, "Tf'"] & TY' \arrow[r, "Tg'"] & TZ' \arrow[r, "-Th'"] & T^2X' \\
A \arrow[u, "n"] \arrow[r, "j"] & Y'' \arrow[u, "p"] \arrow[r, "k"] & TZ' \arrow[u, equal] \arrow[r, "-Ti"] & TA \arrow[u, "Tn"'] \\
X'' \arrow[u, "a"] \arrow[uu, bend left=60, "o"] \arrow[r, "f''"'] & Y'' \arrow[u, equal] \arrow[r, "g''"'] & Z'' \arrow[u, "q"] \arrow[r, "h''"'] & TX''. \arrow[u, "Ta"'] \arrow[uu, bend right=60, "To"']
\end{tikzcd}$$

诚然, (4.2.3) 蕴涵 $o=na$, 两翼交换. 又由于 (4.2.3) 的右侧三个方块交换, 故上半部交换; 下半部交换则缘于 (4.2.4). 明所欲证. □

除了命题 4.2.8, 本节所有陈述都能扩及 $\Bbbk$-线性范畴, 其中 $\Bbbk$ 是交换环.

注记 4.2.16 三角范畴中的生成元和紧对象是本书的遗珠. 尽管它们的思路通于定义 1.12.8 和 1.13.2 的版本, 但是在三角范畴中需要不同的定义. 这在一些场合是有用的, 并且通向重要的 Brown 可表性定理在三角范畴中的形式: 若 $\mathcal{D}$ 是具有小 $\coprod$ 的 "紧生成" 三角范畴, 而上同调函子 $H:\mathcal{D}^{\mathrm{op}}\to\mathsf{Ab}$ 化 $\mathcal{D}$ 的小 $\coprod$ 为 Ab 的 $\prod$, 则 H 可表. 建议有需求的读者参考 [22, Tags 09SI, 09SM, 0A8E].

留意 Brown 可表性定理与 §1.12, §1.13, §2.10 的各种可表性或伴随函子定理之间的家族相似性.

4.3 三角范畴的局部化

本节探究三角范畴和局部化理论的关系. 具体地说,

- ◇ 范畴的局部化在 §1.10 的构造是形式地对乘性系中的态射添逆, 而本节首要任务是说明这保持 (预) 三角结构;
- ◇ 对于三角范畴, 局部化的另一种观点是形式地将一个三角子范畴零化, 思路类似于 §2.9 中 Serre 商的构造.

以下默认 $(\mathcal{D},T)$ 为预三角范畴. 若将加性范畴扩及 $\Bbbk$-线性的情形, 其中 $\Bbbk$ 是任意交换环, 则本节的结果都有相应的推广, 兹不赘述.

定义 4.3.1 设 $S\subset\mathrm{Mor}(\mathcal{D})$ 为定义 1.10.5 的乘性系. 若下述条件成立, 则称 S 与三角兼容.

(ST1) 设 $s \in \mathrm{Mor}(\mathcal{D})$, 则 $s \in S$ 当且仅当 $Ts \in S$.

(ST2) 考虑实线部分的交换图表

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & Z \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\gamma"] & TX \arrow[d, dashed, "T\alpha"] \\ X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & TX' \end{tikzcd}$$

若 $\alpha, \beta \in S$, 则存在虚线所示态射 γ, 使得全图交换而且 $\gamma \in S$.

请注意到 (ST2) 是 (TR4) 对 S 的细化.

命题 4.3.2 设乘性系 $S \subset \mathrm{Mor}(\mathcal{D})$ 与三角兼容, 则局部化 $\mathcal{D}[S^{-1}]$ (容许是大范畴) 具有唯一的预三角范畴结构, 使得 $Q : \mathcal{D} \to \mathcal{D}[S^{-1}]$ 是三角函子; 精确到同构, $\mathcal{D}[S^{-1}]$ 中的好三角是 $\mathcal{D}$ 中好三角的像. 如果 $\mathcal{D}$ 是三角范畴, 则 $\mathcal{D}[S^{-1}]$ 亦然.

证明 定理 1.10.16 表明 $\mathcal{D}[S^{-1}]$ 为加性范畴. 此外, (ST1) 和局部化的泛性质给出唯一一对从 $\mathcal{D}[S^{-1}]$ 到自身的函子, 使下图交换:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, shift left, "T"] \arrow[d, "Q"'] & \mathcal{D} \arrow[l, shift left, "T^{-1}"] \arrow[d, "Q"] \\ \mathcal{D}[S^{-1}] \arrow[r, shift left] & \mathcal{D}[S^{-1}] \arrow[l, shift left] \end{tikzcd}$$

泛性质还表明第二行的函子互逆, 仍记之为 $\mathcal{D}[S^{-1}] \underset{T^{-1}}{\overset{T}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}[S^{-1}]$, 以免符号超载. 综上, $(\mathcal{D}[S^{-1}], T)$ 成为带平移的加性范畴.

兹说明预三角结构的唯一性. 三角函子 Q 按定义必保持好三角. 反过来说, 对于 $\mathcal{D}[S^{-1}]$ 的好三角 $X \xrightarrow{f} Y \to Z \xrightarrow{+1}$, 用同构调整后可设 $f : X \to Y$ 来自 $\mathcal{D}$ 的态射, 为免混淆另记为 $f_0 : X_0 \to Y_0$. 以 (TR2) 将 f_0 扩充为好三角 $X_0 \xrightarrow{f_0} Y_0 \to Z_0 \xrightarrow{+1}$, 则推论 4.2.3 确保它对 Q 的像同构于原三角.

以下证明预三角结构的存在性. 按所断言的方式定义 $\mathcal{D}[S^{-1}]$ 中的好三角. 公理 (TR0) 属自明, 而 (TR1) 和 (TR3) 直接继承自 $\mathcal{D}$. 对于 (TR2), 考虑 $\mathcal{D}[S^{-1}]$ 中的态射 $f : X \to Y$; 一如既往, 以来自 S 的同构调整后无妨设 f 来自 $\mathcal{D}$, 则 (TR2) 也回归到 $\mathcal{D}$ 上.

对于 (TR4), 考虑 $\mathcal{D}[S^{-1}]$ 中的交换图表 (虚线部分稍后讨论)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, dashed, "\gamma"] & TX \arrow[d, dashed, "T\alpha"] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[r, "g'"'] & Z' \arrow[r, "h'"'] & TX' \end{tikzcd} \tag{4.3.1}$$

其中每行都是好三角, 而且水平箭头皆来自 $\mathcal{D}$. 按 §1.10 的构造可证存在 $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$, 态射 $[A \to B] \in \mathrm{Mor}(\mathcal{D})$ 和 $s, t \in S$, 使 $\alpha = as^{-1}$, $\beta = bt^{-1}$ 在 $\mathcal{D}[S^{-1}]$ 中成立, 而且使下图实线部分在 $\mathcal{D}$ 中交换 (虚线部分和 C 稍后讨论):

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "h"] & TX \\
A \arrow[u, "s"] \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[u, "t"] \arrow[r, dashed] \arrow[d, "b"'] & C \arrow[u, dashed, "u"] \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed, "c"'] & TA \arrow[u, dashed, "Ts"'] \arrow[d, dashed, "Ta"'] \\
X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[r, "g'"'] & Z' \arrow[r, "h'"'] & TX'.
\end{tikzcd}$$

这一步的图表构造略显琐碎, 留给读者作为日常练习.

现在对 $A \to B$ 在 $\mathcal{D}$ 中应用 (TR2) 以得到第二行的好三角 $A \to B \to C \xrightarrow{+1}$, 再应用 (ST2) 以得到 $C \xrightarrow{u \in S} Z$, 应用 (TR4) 以得到 $C \xrightarrow{c} Z'$, 使得全图在 $\mathcal{D}$ 中交换. 在 $\mathcal{D}[S^{-1}]$ 中取 $\gamma := cu^{-1}$, 遂使 (4.3.1) 全图交换. 这就验证了 (TR4).

若 $\mathcal{D}$ 为三角范畴, 则 (TR5) 对 $\mathcal{D}[S^{-1}]$ 也一样化到 $\mathcal{D}$ 上来验证. □

命题 4.3.3 设 $\mathcal{N}$ 为三角范畴 $\mathcal{D}$ 的饱和子三角范畴 (定义–命题 4.2.10, 约定 4.2.11), 则

$$S\mathcal{N} := \left\{ s \in \mathrm{Mor}(\mathcal{D}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists \text{ 好三角 } X \xrightarrow{s} Y \to Z \xrightarrow{+1} \\ \text{使得 } Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{N}) \end{array} \right\},$$

是与三角兼容的乘性系.

证明 因为 $\mathcal{N}$ 对平移封闭, 旋转三角可见 $S\mathcal{N}$ 满足 (ST1). 其次, 考虑 (ST2) 中的交换图表并假设 $\alpha, \beta \in S$. 引理 4.2.15 给出图表

$$\begin{tikzcd}
 & & & \\
X'' \arrow[r] \arrow[u, "+1"] & Y'' \arrow[r] \arrow[u, "+1"] & Z'' \arrow[r, "+1"] \arrow[u, "+1"] & {} \\
X \arrow[r] \arrow[u] & Y \arrow[r] \arrow[u] & Z \arrow[r, "+1"] \arrow[u] & {} \\
X' \arrow[r] \arrow[u, "\alpha"] & Y' \arrow[r] \arrow[u, "\beta"] & Z' \arrow[r, "+1"] \arrow[u, "\gamma"] & {}
\end{tikzcd}$$

使得每行每列都是好三角, 所有方块皆交换, 而 (α, β, γ) 给出三角之间的态射. 应用 $\mathcal{N}$ 的饱和性, $\alpha, \beta \in S$ 和推论 4.2.3, 可见 $X'', Y'' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{N})$. 饱和子三角范畴的定义进一步导致 $Z'' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{N})$, 于是 $\gamma \in S$. 如是验证 (ST2).

其次验证乘性系的公理 (定义 1.10.5). 因为 $0 \in \mathcal{N}$, 公理 (S1) 来自 (TR1).

验证 (S2) 如下: 设 $f,g\in S\mathcal{N}$, 取好三角 $X\xrightarrow{f}Y\to Z'\xrightarrow{+1}$ 和 $Y\xrightarrow{g}Z\to X'\xrightarrow{+1}$ 使得 $Z',X'\in\mathrm{Ob}(\mathcal{N})$, 再用 (TR2) 取好三角 $X\xrightarrow{gf}Z\to Y'\xrightarrow{+1}$. 应用 (TR5) 可得好三角 $Z'\to Y'\to X'\xrightarrow{+1}$, 故子三角范畴的性质蕴涵 $Y'\in\mathrm{Ob}(\mathcal{N})$, 亦即 $gf\in S\mathcal{N}$.

验证 (S3) 如下: 考虑态射 $X\xrightarrow{s\in S\mathcal{N}}Z\xleftarrow{f}Y$. 取好三角 $X\xrightarrow{s}Z\xrightarrow{h}N\xrightarrow{+1}$ 使得 $N\in\mathrm{Ob}(\mathcal{N})$, 再用 (TR2) 取三角 $Y\xrightarrow{hf}N\to U\xrightarrow{+1}$. 对图表

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "hf"] \arrow[d, "f"'] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & U \arrow[r, "+1"] \arrow[d, dashed] & TY \arrow[d, dashed, "Tf"] \\
Z \arrow[r, "h"'] & N \arrow[r] & TX \arrow[r, "-Ts"'] & TZ
\end{tikzcd}$$

的实线部分应用 (TR4) 得虚线所示态射, 得到好三角之间的态射. 旋转后给出 $S\mathcal{N}$ 的元素 $s':W:=T^{-1}U\to Y$, 适当的 $f':W\to X$, 连同 (S3) 所需的交换图表

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "s\in S\mathcal{N}"'] & W \arrow[l, "f'"'] \arrow[d, "s'\in S\mathcal{N}"] \\
Z & Y. \arrow[l, "f"]
\end{tikzcd}$$

验证 (S4) 如下. 在该公理中以 $(f-g,0)$ 代 (f,g), 问题化约为下述断言: 对于态射 $f:X\to Y$, 若存在 $s:Y\to W$ 使得 $s\in S\mathcal{N}$ 且 $sf=0$, 则存在 $t:Z\to X$ 使得 $t\in S\mathcal{N}$ 而 $ft=0$. 为了证明这点, 取好三角 $N\to Y\xrightarrow{s}W\xrightarrow{+1}$ 使得 $N\in\mathrm{Ob}(\mathcal{N})$. 因为 $\mathrm{Hom}(X,\cdot)$ 是上同调函子而 $sf=0$, 存在 $h\in\mathrm{Hom}(X,N)$ 使得 f 分解为 $X\xrightarrow{h}N\to Y$. 取好三角 $Z\xrightarrow{t}X\xrightarrow{h}N\xrightarrow{+1}$, 则 $t\in S\mathcal{N}$. 另一方面 $ht=0$ (引理 4.1.9) 导致 $ft=0$, 故 (S4) 成立.

对于 (S3) 和 (S4) 的对偶版本, 论证完全相同. □

定理 4.3.4 (Verdier 局部化) 设 $\mathcal{N}$ 为三角范畴 $\mathcal{D}$ 的饱和子三角范畴. 定义 $\mathcal{D}/\mathcal{N}:=\mathcal{D}\left[(S\mathcal{N})^{-1}\right]$ (容许是大范畴), 配备命题 4.3.2 的三角结构, 则局部化函子 $Q:\mathcal{D}\to\mathcal{D}/\mathcal{N}$ 具下述性质.

(i) 对于 $\mathcal{D}$ 中的任意态射 $f:X\to Y$, 我们有 $Qf=0$ 当且仅当 f 能分解为 $X\to N\to Y$, 其中 $N\in\mathrm{Ob}(\mathcal{N})$; 特别地, Q 映 $\mathcal{N}$ 为 0.

(ii) 对于每个预三角范畴 $\mathcal{E}$ 和三角函子 $F:\mathcal{D}\to\mathcal{E}$, 若 F 映 $\mathcal{N}$ 为 0, 则 F 唯一地分解为 $\mathcal{D}\xrightarrow{Q}\mathcal{D}/\mathcal{N}\xrightarrow{\overline{F}}\mathcal{E}$, 其中 $\overline{F}$ 是三角函子.

(iii) 对于每个 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 和上同调函子 $H:\mathcal{D}\to\mathcal{A}$, 若 H 映 $\mathcal{N}$ 为 0, 则 H 唯一地分解为 $\mathcal{D}\xrightarrow{Q}\mathcal{D}/\mathcal{N}\xrightarrow{\overline{H}}\mathcal{A}$, 其中 $\overline{H}$ 是上同调函子.

证明 对于 (i), 若 f 分解为 $X \to N \to Y$, 则因为好三角 $N \xrightarrow{\mathrm{id}_N} N \to 0 \xrightarrow{+1}$ 的旋转 $N \to 0 \to TN \xrightarrow{+1}$ 表明 $N \to 0$ 被映为 $\mathcal{D}/\mathcal{N}$ 中的同构, 故 Qf 通过 $QN = 0$ 分解, $Qf = 0$. 反之若 $Qf = 0$, 则存在态射 $s : M \to X$ 使得 $s \in S\mathcal{N}$ 而 $fs = 0$ (推论 1.10.13). 按 $S\mathcal{N}$ 定义, 存在每行皆为好三角的交换图表 (实线部分)

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "s"] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & N \arrow[r] \arrow[d, dashed] & TM \arrow[d, dashed] \\ 0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "\mathrm{id}_Y"'] & Y \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \quad (N \in \mathrm{Ob}(\mathcal{N})),$$

以 (TR4) 得到虚线所示态射使全图交换, 这将 f 分解为 $X \to N \to Y$.

考虑 (ii) 的情境. 设 $s \in S\mathcal{N}$, 将其置入好三角 $X \xrightarrow{s} Y \to N \xrightarrow{+1}$ 使得 $N \in \mathrm{Ob}(\mathcal{N})$, 则 $FX \xrightarrow{Fs} FY \to 0 \xrightarrow{+1}$ 是 $\mathcal{E}$ 中的好三角. 应用推论 4.1.13 可知 Fs 为同构. 泛性质遂给出唯一分解 $H = \overline{F} \circ Q$, 使得 $\overline{F}$ 是加性函子. 鉴于 $\mathcal{D}/\mathcal{N}$ 上的三角结构的描述 (命题 4.3.2), 关于 $\overline{F}$ 保平移和保三角的验证都是例行公事, 略去不述.

考虑 (iii) 的情境. 同样将 $s \in S\mathcal{N}$ 置入好三角 $X \xrightarrow{s} Y \to N \xrightarrow{+1}$, 取 H 得到正合列 $\underbrace{HT^{-1}N}_{=0} \to HX \xrightarrow{Hs} HY \to \underbrace{HN}_{=0}$, 故 Hs 为同构. 泛性质遂给出唯一分解 $H = \overline{H} \circ Q$, 使得 $\overline{H}$ 是加性函子. 为了验证 $\overline{H}$ 是上同调函子, 请回忆 $\mathcal{D}/\mathcal{N}$ 的好三角同构于 $\mathcal{D}$ 的好三角的像. □

例 4.3.5 上同调函子给出与三角兼容的乘性系的一类重要例子. 设 $H : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ 为上同调函子. 对于 $\mathcal{D}$ 的态射 $f : X \to Y$, 若 $H(T^n f)$ 对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 都是 $\mathcal{A}$ 中的同构, 则称 f 为 **H-拟同构**. 全体 H-拟同构给出子集 $S_H \subset \mathrm{Mor}(\mathcal{D})$, 它显然满足 (ST1), 而 (ST2) 则是上同调函子的长正合列 (注记 4.1.11) 连同命题 2.3.4 的结论.

另一方面, 定义 $\mathcal{N}_H$ 如例 4.2.14; 这是饱和子三角范畴, 由之可定义 $S\mathcal{N}_H$. 两者有以下的简单联系.

命题 4.3.6 设 $H : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ 为上同调函子, 则 $S\mathcal{N}_H = S_H$.

证明 设 $f : X \to Y$ 是 $\mathcal{D}$ 的态射. 将它扩张为好三角 $X \xrightarrow{f} Y \to N \xrightarrow{+1}$; 回忆到 N 在同构意义下唯一, 故上同调函子的长正合列蕴涵

$$f \text{ 是 } H\text{-拟同构} \iff \forall n,\ H(T^n N) = 0,$$

而右式相当于说 $N \in \mathrm{Ob}(\mathcal{N}_H)$. 明所欲证. □

于是对 S_H 的局部化有至少两种进路: 或者是添入 S_H 的逆, 或者是将 $\mathcal{N}_H$ 零化. 这给出 Verdier 局部化 $Q : \mathcal{D} \to \mathcal{D}/\mathcal{N}_H = \mathcal{D}[S_H^{-1}]$ 的两种泛性质.

最后来处理局部化和子范畴之间的关系. 设 $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{I}$ 为三角范畴 $\mathcal{D}$ 的子三角范畴, $\mathcal{N}$ 饱和, 那么 $\mathcal{N} \cap \mathcal{I}$ 也是 $\mathcal{I}$ 的饱和子三角范畴. Verdier 局部化的泛性质遂确定三角函子 $i : \mathcal{I}/(\mathcal{N} \cap \mathcal{I}) \to \mathcal{D}/\mathcal{N}$.

作一则简单观察: 相对于 $\mathcal{N}\cap\mathcal{I}\subset\mathcal{I}$ 所定义的 $S(\mathcal{N}\cap\mathcal{I})$ 满足

$$S(\mathcal{N}\cap\mathcal{I}) = S\mathcal{N}\cap\mathrm{Mor}(\mathcal{I}). \tag{4.3.2}$$

上式的 $\subset$ 属显然. 至于 $\supset$, 假设 $\mathcal{I}$ 的态射 $f: X\to Y$ 能置入 $\mathcal{D}$ 的好三角 $X\xrightarrow{f} Y\to N\xrightarrow{+1}$ 使得 $N\in\mathrm{Ob}(\mathcal{N})$, 则推论 4.2.3 说明 N 同构于 $\mathcal{I}$ 的某个对象; 而因为 $\mathcal{N}$ 饱和, 不妨取 $N\in\mathrm{Ob}(\mathcal{N}\cap\mathcal{I})$, 于是 $f\in S(\mathcal{N}\cap\mathcal{I})$.

命题 4.3.7 设 $\mathcal{N}, \mathcal{D}, \mathcal{I}$ 如上, 并假定对于所有 $X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$, 皆存在 $Y\in\mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ 和属于 $S\mathcal{N}$ 的态射 $X\to Y$ (或 $Y\to X$). 此时 $i:\mathcal{I}/(\mathcal{N}\cap\mathcal{I})\to\mathcal{D}/\mathcal{N}$ 是三角范畴的等价.

证明 命题 1.11.2 蕴涵 i 是等价, 推论 4.2.9 将其升级为三角版本. □

此结果将用于导出函子的研究.

4.4 导出范畴

本节前半部考虑加性范畴 $\mathcal{A}$, 其后定义导出范畴时将要求 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴. 例 4.1.3 业已说明 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 及 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 是带平移的加性范畴, 将它们的平移函子统一记为 $X\mapsto X[1]$.

考虑 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的态射 $f: X\to Y$ 及其映射锥 $\mathrm{Cone}(f)$. 定义 3.3.5 遂给出 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的三角

$$X\xrightarrow{f} Y\xrightarrow{\alpha(f)}\mathrm{Cone}(f)\xrightarrow{\beta(f)} X[1] \tag{4.4.1}$$

取商则得到 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 中的三角.

定理 4.4.1 视 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 为带平移 T 的加性范畴. 若其中的三角 $X\to Y\to Z\xrightarrow{+1}$ 同构于形如 (4.4.1) 的三角, 则称之为 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 的好三角. 这些好三角构成集合 $\mathcal{H}$, 使资料 $(\mathsf{K}(\mathcal{A}), T, \mathcal{H})$ 成为三角范畴.

证明 逐一验证定义 4.1.6 诸公理. (TR0) 和 (TR2) 按定义实属显然, (TR3) 则归结为引理 3.3.9 在 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 中给出的交换图表

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\alpha(f)"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \mathrm{Cone}(f) \arrow[r, "\beta(f)"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & X[1] \arrow[r, "-f[1]"] \arrow[d, "\simeq"] & Y[1] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
Y \arrow[r, "\alpha(f)"'] & \mathrm{Cone}(f) \arrow[r, "\alpha(\alpha(f))"'] & \mathrm{Cone}(\alpha(f)) \arrow[r, "\beta(\alpha(f))"'] & Y[1].
\end{tikzcd}$$

至于 (TR1), 对 $X\in\mathrm{Ob}(\mathsf{K}(\mathcal{A}))$ 考虑零态射的映射锥 $0\to X\to X\xrightarrow{+1}$, 以 (TR3) 旋转即得好三角 $X\xrightarrow{\mathrm{id}_X} X\to 0\xrightarrow{+1}$.

对于 (TR4), 考虑 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 中的交换图表 (实线部分)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[r, "\alpha(f)"] \arrow[d, "\beta"] & \mathrm{Cone}(f) \arrow[r, "\beta(f)"] \arrow[d, dashed, "\gamma"] & TX \arrow[d, dashed, "T\alpha"] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[r, "\alpha(f')"'] & \mathrm{Cone}(f') \arrow[r, "\beta(f')"'] & TX'. \end{tikzcd} \tag{4.4.2}$$

左侧方块交换相当于说存在 $\mathcal{A}$ 的一族态射 $h^n : X^n \to (Y')^{n-1}$, 使得

$$\beta^n f^n - (f')^n \alpha^n = h^{n+1} d_X^n + d_{Y'}^{n-1} h^n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

以矩阵记法对每个 $n \in \mathbb{Z}$ 定义态射

$$\gamma^n = \begin{pmatrix} \alpha^{n+1} & 0 \\ h^{n+1} & \beta^n \end{pmatrix} : X^{n+1} \oplus Y^n \to (X')^{n+1} \oplus (Y')^n.$$

请验证

$$\begin{pmatrix} \alpha^{n+1} & 0 \\ h^{n+1} & \beta^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_X^n & 0 \\ f^n & d_Y^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_{X'}^n & 0 \\ (f')^n & d_{Y'}^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ h^n & \beta^{n-1} \end{pmatrix},$$

故它们确定态射 $\gamma : \mathrm{Cone}(f) \to \mathrm{Cone}(f')$. 易见 (4.4.2) 右边两个方块在 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中交换. 注意到由于同伦 $(h^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 可有多种选取, γ 并非典范的.

剩下的任务是验证 (TR5). 在该公理的陈述中不妨取 $Z' = \mathrm{Cone}(f)$, $X' = \mathrm{Cone}(g)$ 和 $Y' = \mathrm{Cone}(gf)$, 而 h, k, m 分别是 $\alpha(f)$, $\alpha(g)$ 和 $\alpha(gf)$, 相应的 $+1$ 次态射则形如 $\beta(\cdot)$. 利用映射锥的函子性 (命题 3.3.3) 或直接检验, 可得态射

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Cone}(f) \arrow[r, "u:=(\mathrm{id}_{X[1]}, g)"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Cone}(gf) \arrow[r, "v:=(f[1], \mathrm{id}_Z)"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Cone}(g) \arrow[d, equal] \\ Z' & Y' & X'. \end{tikzcd}$$

基于映射锥的函子性, 这使 (TR5) 图中无关 w 的方块皆交换; 为了使剩下部分, 亦即 (TR5) 的右下角方块交换, $w : X' \to TZ'$ 能且仅能取为合成态射

$$X' \xrightarrow{\beta(g)} TY \xrightarrow{T(\alpha(f))} TZ'.$$

问题遂归结为证明 $Z' \xrightarrow{u} Y' \xrightarrow{v} X' \xrightarrow{w} TZ'$ 是好三角. 注意到对于每个 $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Cone}(u)^n &= \mathrm{Cone}(f)^{n+1} \oplus \mathrm{Cone}(gf)^n = X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Z^n, \\ (X')^n &= \mathrm{Cone}(g)^n = Y^{n+1} \oplus Z^n. \end{aligned}$$

以矩阵记法定义

$$\varphi^n := \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_{Y^{n+1}} & f^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{id}_{Z^n} \end{pmatrix} : \mathrm{Cone}(u)^n \to (X')^n,$$

$$\psi^n := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{id}_{Y^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{Z^n} \end{pmatrix} : (X')^n \to \mathrm{Cone}(u)^n.$$

可直接验证它们给出 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的态射 $\varphi : \mathrm{Cone}(u) \leftrightarrows X' : \psi$, 满足 $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{X'}$ 和 $\varphi \circ \alpha(u) = v$, $\beta(u) \circ \psi = w$. 接着打量图表

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{Y'}"'] & X' \arrow[r, "w"] \arrow[d, shift left, "\psi"] & TZ' \arrow[d, "\mathrm{id}_{TZ'}"] \\ Y' \arrow[r, "\alpha(u)"'] & \mathrm{Cone}(u) \arrow[r, "\beta(u)"'] \arrow[u, shift left, "\varphi"] & TZ' \end{tikzcd}$$

只要说明它在 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 中交换, 而且 ψ 和 φ 在 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 中互逆, 即可说明 (u, v, w) 给出好三角, 而唯一待证的是 $\psi \circ \varphi$ 同伦等价于 $\mathrm{id}_{\mathrm{Cone}(u)}$. 取 $h^n : \mathrm{Cone}(u)^n \to \mathrm{Cone}(u)^{n-1}$ 为自明的合成态射

$$X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Z^n \twoheadrightarrow X^{n+1} \hookrightarrow X^{n+1} \oplus Y^n \oplus X^n \oplus Z^{n-1}.$$

例行验证给出 $\mathrm{id}_{\mathrm{Cone}(u)^n} - \psi^n \varphi^n = h^{n+1} d^n_{\mathrm{Cone}(u)} + d^{n-1}_{\mathrm{Cone}(u)} h^n$. 明所欲证. □

同伦等价在证明中不可或缺. 倘若在 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 层面操作, 映射锥无法给出三角范畴.

证明 (定理 3.11.5 和 3.15.5 的证明) 至此可以补全定理 3.11.5 的未竟证明. 基于对偶性, 以下仅考虑 $Y \xleftarrow{\alpha} X \xrightarrow{\gamma} I$ 的情形, α 是拟同构, $I \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^+(\mathcal{A}))$ 由内射对象组成. 上同调函子 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(\cdot, I)$ (命题 4.1.12) 给出长正合列

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(\mathrm{Cone}(\alpha), I) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(Y, I) \\ &\qquad \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(X, I) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(\mathrm{Cone}(\alpha)[-1], I); \end{aligned}$$

然而 $\mathrm{Cone}(\alpha)$ 零调 (推论 3.7.6), 故引理 3.11.6 蕴涵 α^* 为同构.

至于关乎 K-内射或 K-投射复形的定理 3.15.5, 论证全然相似. □

推论 4.4.2 对于 $\star \in \{+, -, \mathrm{b}\}$, 定义 3.9.2 引入的范畴 $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$ 是 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 的子三角范畴 (定义–命题 4.2.10).

证明 显然 $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$ 对平移函子封闭. 其次, 对于映射锥 $X \xrightarrow{f} Y \to \mathrm{Cone}(f) \xrightarrow{+1}$, 易见 X, Y 属于 $\mathsf{C}^\star(\mathcal{A})$ 当且仅当 $\mathrm{Cone}(f) \in \mathsf{C}^\star(\mathcal{A})$. 这就说明定义–命题 4.2.10 的条件具足. □

命题 4.4.3 设 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ 为加性范畴之间的加性函子, 则 $\mathsf{K}F : \mathsf{K}(\mathcal{A}) \to \mathsf{K}(\mathcal{A}')$ 是三角函子. 以 $\mathsf{K}^\star(\cdot)$ 代 $\mathsf{K}(\cdot)$ 亦然, 其中 $\star \in \{+, -, \mathrm{b}\}$.

证明 归结为同样显然的命题 3.1.8 (保平移) 和命题 3.3.4 (保映射锥). □

推论 4.4.4 设 $\mathcal{A}'$ 为 $\mathcal{A}$ 的加性全子范畴, 则 $\mathsf{K}(\mathcal{A}')$ 嵌入为 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 的子三角范畴; 以 $\mathsf{K}^\star(\cdot)$ 代 $\mathsf{K}(\cdot)$ 亦然, 其中 $\star \in \{+, -, \mathrm{b}\}$.

命题 4.4.5 设 $\mathcal{A}$ 为 Abel 范畴, 则 $\mathrm{H}^n : \mathsf{K}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ 对每个 $n \in \mathbb{Z}$ 都是定义 4.1.10 所述的上同调函子. 以 $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$ 代 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 亦然, 其中 $\star \in \{+, -, \mathrm{b}\}$.

证明 考虑 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 中由映射锥给出的好三角 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\alpha(f)} \mathrm{Cone}(f) \xrightarrow{+1}$. 基于 (3.7.1) 和推论 3.7.5 (这是 §3.7 的核心), 可知

$$\mathrm{H}^n(X) \xrightarrow{\mathrm{H}^n(f)} \mathrm{H}^n(Y) \xrightarrow{\mathrm{H}^n(\alpha(f))} \mathrm{H}^n(\mathrm{Cone}(f))$$

的确正合. □

导出范畴的定义将涉及 Verdier 局部化. 按照例 4.3.5 记法, 上同调函子 $\mathrm{H}^0 : \mathsf{K}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ 确定与三角兼容的乘性系

$$\mathrm{qis} := S_{\mathrm{H}^0} \subset \mathrm{Mor}(\mathsf{K}(\mathcal{A})),$$

其元素无非是拟同构. 理解 qis 的另一观点则是考虑 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 中由零调复形构成的饱和子三角范畴 $\mathcal{N} := \mathcal{N}_{\mathrm{H}^0}$. 命题 4.3.6 业已说明 $S\mathcal{N} = \mathrm{qis}$.

对于 $\star \in \{+, -, \mathrm{b}\}$, 同样可以对 $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$ 定义与三角兼容的乘性系 $\mathrm{qis}^\star := \mathrm{qis} \cap \mathrm{Mor}(\mathsf{K}^\star(\mathcal{A}))$ 和 $\mathcal{N}^\star := \mathcal{N} \cap \mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$; 它们仍满足 $S\mathcal{N}^\star = \mathrm{qis}^\star$.

定义 4.4.6 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的**导出范畴**定义为三角范畴

$$\begin{aligned} \mathsf{D}(\mathcal{A}) &:= \mathsf{K}(\mathcal{A})\left[\mathrm{qis}^{-1}\right] \\ &= \mathsf{K}(\mathcal{A})/\mathcal{N}. \end{aligned}$$

类似地, 对于 $\star \in \{+, -, \mathrm{b}\}$ 也可以定义三角范畴

$$\begin{aligned} \mathsf{D}^\star(\mathcal{A}) &:= \mathsf{K}^\star(\mathcal{A})\left[(\mathrm{qis}^\star)^{-1}\right] \\ &= \mathsf{K}^\star(\mathcal{A})/\mathcal{N}^\star. \end{aligned}$$

我们称 $\mathsf{D}^+(\mathcal{A})$ (或 $\mathsf{D}^-(\mathcal{A})$, $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{A})$) 为 $\mathcal{A}$ 的下有界 (或上有界, 有界) 导出范畴.

难以避免的问题是控制导出范畴在集合论意义下的大小, 因为我们并不希望 $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ 是大范畴, 请参照注记 1.10.14 的相关讨论. 这点留待推论 4.5.2 处理.

命题 4.4.7 每个 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 的短正合列 $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ 都可以典范地延拓为 $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ 的好三角 $X \to Y \to Z \xrightarrow{+1}$. 精确地说, 在 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 中存在典范的交换图表

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "\alpha(f)"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Cone}(f) \arrow[r, "\beta(f)"] \arrow[d, "\Phi"] & X[1] \arrow[dd, "\Phi'"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, equal] & Z \arrow[d, equal] & \\
\mathrm{Cone}(g)[-1] \arrow[r, "{\beta(g)[-1]}"'] \arrow[u, leftarrow, "{\Phi'[-1]}"'] & Y \arrow[r, "g"'] & Z \arrow[r, "-\alpha(g)"'] & \mathrm{Cone}(g)
\end{tikzcd}$$

其第一行和第三行都是好三角, Φ 和 Φ' 都是拟同构.

证明 交换图表无非是复述引理 3.7.2. 第一行的好三角是 f 的映射锥, 第二行则是 g 的映射锥的旋转. □

复形范畴的短正合列因此能被导出范畴的三角结构捕捉. 另一方面, 使 $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ 成为 Abel 范畴的 $\mathcal{A}$ 甚为稀少, 本章习题将予以刻画.

本章习题也将介绍群 $\mathrm{K}_0(\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{A}))$, 并给出它和定义 2.9.8 的 $\mathrm{K}_0(\mathcal{A})$ 之间的联系, 读者应当尝试.

根据 $\mathcal{N}$ 的刻画和定理 4.3.4, 上同调函子 $\mathrm{H}^n : \mathsf{K}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ 通过导出范畴分解为

$$\mathrm{H}^n : \mathsf{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}, \quad \mathrm{H}^n(X) = \mathrm{H}^0(X[n]),$$

其中 $n \in \mathbb{Z}$. 对 $\star \in \{+, -, \mathrm{b}\}$ 和 $\mathsf{D}^\star(\mathcal{A})$ 亦复如是.

由泛性质确定三角函子 $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}^{\pm}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}(\mathcal{A})$, 它们与上同调函子 H^0 交换. 我们希望将这些函子视为子三角范畴的嵌入, 为此需要一则抽象结果.

引理 4.4.8 设 $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{I}$ 为三角范畴 $\mathcal{D}$ 的子三角范畴, $\mathcal{N}$ 饱和. 当以下任一条件在 $\mathcal{D}$ 中成立时, 函子 $i : \mathcal{I}/(\mathcal{N} \cap \mathcal{I}) \to \mathcal{D}/\mathcal{N}$ 是全忠实的:

(i) 任意态射 $Y \to N$ 皆有分解 $Y \to Y' \to N$;

(ii) 任意态射 $N \to Y$ 皆有分解 $N \to Y' \to Y$;

其中要求 $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$, $N \in \mathrm{Ob}(\mathcal{N})$ 给定, 而 $Y' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{N} \cap \mathcal{I})$.

证明 基于对偶性, 以下仅考虑 (i) 成立的情形. 回忆 (4.3.2) 确保的 $S(\mathcal{N} \cap \mathcal{I}) = S\mathcal{N} \cap \mathrm{Mor}(\mathcal{I})$. 我们希望应用命题 1.11.1 (ii) 的判准, 问题因而归结为证明: 设 $s : W \to Y$ 为乘性系 $S\mathcal{N}$ 中的态射, 而 $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$, 则存在 $g : V \to W$ 使得 $V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ 而 $sg \in S\mathcal{N}$.

取好三角 $W \xrightarrow{-s} Y \to N \xrightarrow{+1}$ 使得 $N \in \mathrm{Ob}(\mathcal{N})$. 分解 $Y \to N$ 为 $Y \xrightarrow{\alpha} Y' \xrightarrow{\beta} N$, 其中 $Y' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{N} \cap \mathcal{I})$. 扩充 α 为 $\mathcal{I}$ 中的好三角 $V \to Y \xrightarrow{\alpha} Y' \xrightarrow{+1}$, 以得到实线部分的

交换图表

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & Y' \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & TV \arrow[r] \arrow[d, dashed, "Tg"] & TY \arrow[d, dashed, "\mathrm{id}"] \\ Y \arrow[r] & N \arrow[r] & TW \arrow[r, "Ts"'] & TY \end{tikzcd}$$

其中每行都是好三角. 以 (TR4) 取 $Tg : TV \to TW$ 使全图交换. 注意到 $V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ 而 $TV \to TY$ 属于 $S\mathcal{N}$; 是故 $sg : V \to Y$ 仍属于 $S\mathcal{N}$. 证毕. □

命题 4.4.9 对于所有 $\star \in \{+, -, \mathrm{b}\}$, 函子 $\mathsf{D}^{\star}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}(\mathcal{A})$ 是全忠实的. 对于任意 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{D}(\mathcal{A}))$, 它同构于 $\mathsf{D}^{+}(\mathcal{A})$ (或 $\mathsf{D}^{-}(\mathcal{A})$, $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{A})$) 的对象当且仅当 $n \ll 0$ (或 $n \gg 0$, $|n| \gg 0$) 蕴涵 $\mathrm{H}^n(X) = 0$.

证明 这是引理 4.4.8 的应用: 在其中取 $\mathcal{D} = \mathsf{K}(\mathcal{A})$, $\mathcal{I} = \mathsf{K}^{\star}(\mathcal{A})$ 和 $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\mathrm{H}^0}$. 以 $\star = +$ 为例, 兹断言对所有 $Y \in \mathrm{Ob}(\mathsf{K}^{+}(\mathcal{A}))$, $N \in \mathrm{Ob}(\mathcal{N})$ 和态射 $N \to Y$, 存在分解

$$N \to Y' \to Y, \quad Y' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{N}^{+}).$$

这是由于当 $n \ll 0$ 时, $N \to Y$ 自然地分解为 $N \to \tau^{\geq n} N \to \tau^{\geq n} Y = Y$, 其中 $\tau^{\geq n}$ 是定义 3.9.3 的截断函子, 而 $\tau^{\geq n} N \in \mathrm{Ob}(\mathcal{N}^{+})$.

进一步, 若 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}(\mathcal{A}))$ 满足 $n \ll 0 \implies \mathrm{H}^n(X) = 0$, 则当 $n \ll 0$ 时 $X \to \tau^{\geq n} X$ 在 $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ 中为同构, 这便在同构意义下刻画了 $\mathsf{D}^{+}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}(\mathcal{A})$ 的像.

关于 $\star = -$ 的论证是对偶的. 同理可证 $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathcal{A}) \to \mathsf{K}^{\pm}(\mathcal{A})$ 诱导全忠实函子 $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}^{\pm}(\mathcal{A})$, 其像同样由 H^n 刻画. 由此可得关于 $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}(\mathcal{A})$ 的情形. □

推论 4.4.10 函子 $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}^{\pm}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}(\mathcal{A})$ 的每一段都是子三角范畴的嵌入.

证明 应用 H^n 的长正合列对 $\star \in \{+, -, \mathrm{b}\}$ 验证 $\mathsf{D}^{\star}(\mathcal{A})$ 作为 $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ 的加性全子范畴满足定义–命题 4.2.10 的诸条件, 故成为子三角范畴, 而 $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}^{\pm}(\mathcal{A})$ 的情形也是明白的. □

定义 4.4.11 对于 $-\infty \leq s \leq t \leq +\infty$, 记 $\mathsf{D}^{[s,t]}(\mathcal{A})$ (或 $\mathsf{K}^{[s,t]}(\mathcal{A})$) 为条件

$$n \notin [s, t] \implies \mathrm{H}^n(X) = 0$$

在 $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ (或 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$) 中截出的全子范畴. 记

$$\begin{aligned} \mathsf{D}^{\geq s}(\mathcal{A}) &:= \mathsf{D}^{[s,+\infty]}(\mathcal{A}), & \mathsf{D}^{\leq t}(\mathcal{A}) &:= \mathsf{D}^{[-\infty,t]}(\mathcal{A}), \\ \mathsf{K}^{\geq s}(\mathcal{A}) &:= \mathsf{K}^{[s,+\infty]}(\mathcal{A}), & \mathsf{K}^{\leq t}(\mathcal{A}) &:= \mathsf{K}^{[-\infty,t]}(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

我们有自然的加性函子 $\mathcal{A} \to \mathsf{C}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}(\mathcal{A})$, 它将对象置于复形的零次项. 定理 4.5.4 将说明 $\mathcal{A}$ 依此等价于 $\mathsf{D}^{\leq 0}(\mathcal{A}) \cap \mathsf{D}^{\geq 0}(\mathcal{A})$.

注记 4.4.12 如果 $\mathcal{A}$ 是 $\Bbbk$-线性的, 其中 $\Bbbk$ 是交换环, 则 $\mathsf{D}(\mathcal{A})$, $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{A})$ 等等及其间的嵌入也都是 $\Bbbk$-线性的; 见定理 1.10.16.

定义–命题 3.9.7 的截断函子 $\tau^{\leq n}$, $\tau^{\geq n}$ 既然保持零调复形, 因而诱导 $\tau^{\leq n}: \mathsf{D}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}^{\leq n}(\mathcal{A})$ 和 $\tau^{\geq n}: \mathsf{D}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}^{\geq n}(\mathcal{A})$.

命题 4.4.13 对任意 $n \in \mathbb{Z}$, 我们有典范的伴随对和好三角

$$\text{包含}: \mathsf{D}^{\leq n}(\mathcal{A}) \rightleftarrows \mathsf{D}(\mathcal{A}) : \tau^{\leq n},$$

$$\tau^{\geq n}: \mathsf{D}(\mathcal{A}) \rightleftarrows \mathsf{D}^{\geq n}(\mathcal{A}) : \text{包含},$$

$$\tau^{\leq n}X \to X \to \tau^{\geq n+1}X \xrightarrow{+1}, \quad X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{D}(\mathcal{A})).$$

证明 伴随对只论第一式. 设 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{D}^{\leq n}(\mathcal{A}))$, $Y \in \mathrm{Ob}(\mathsf{D}(\mathcal{A}))$. 所求的伴随对分别以 $\eta_X: X \to \tau^{\leq n}X$ 和 $\varepsilon_Y: \tau^{\leq n}Y \to Y$ 为单位和余单位: ε_Y 是截断函子在复形层次已有的典范态射, 而 η_X 是拟同构 $\tau^{\leq n}X \to X$ 的逆. 问题在于验证三角等式. 在复形层次截断后, 等式可以化约到 X 来自 $\mathsf{C}^{\leq n}(\mathcal{A})$ 的情形来验证, 此时 $\eta_X = \mathrm{id}_X$. 所求的三角等式化约到命题 3.9.6 的复形版本.

至于好三角, 回忆到 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 层面有短正合列 $0 \to \tau^{\leq n}X \to X \to \tilde{\tau}^{\geq n+1}X \to 0$ 和拟同构 $\tilde{\tau}^{\geq n+1}X \to \tau^{\geq n+1}X$ (引理 3.9.4). □

注记 4.4.14 (导出范畴的直接构造) 记 $\mathrm{Qis} \subset \mathrm{Mor}(\mathsf{C}(\mathcal{A}))$ 为拟同构所成子集. 若在 $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ 的定义中不先取 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, 而是直接对拟同构添逆以得到 $\mathsf{C}(\mathcal{A})[\mathrm{Qis}^{-1}]$, 结果是否和 $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ 相同? 答案是肯定的. 稍加思索泛性质, 可知关键在于对任意范畴 $\mathcal{D}$ 和函子 $G: \mathsf{C}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}$ 验证以下性质: 设 G 映 Qis 为同构, 而 $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X, Y)$ 同伦, 则 $Gf = Gg$.

关键在于运用映射柱. 设 h 是从 f 到 g 的同伦. 它按命题 3.3.12 (ii) 的方式确定态射 $\tilde{h}: \mathrm{Cyl}_X \to Y$ 使得 $f = \tilde{h}i_0$, $g = \tilde{h}i_1$. 然而该命题 (i) 蕴涵 $ji_0 = ji_1$, 其中 $j: \mathrm{Cyl}_X \to X$ 是拟同构, 从而 Gj 是同构, 这又导致 $Gi_0 = Gi_1$. 性质得证.

尽管能够一步到位地用 $\mathsf{C}(\mathcal{A})[\mathrm{Qis}^{-1}]$ 构造 $\mathsf{D}(\mathcal{A})$, 过渡到 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 的好处是后者具有三角结构; 另一则理由则是 Qis 并非乘性系. 对于 $\mathsf{D}^\star(\mathcal{A})$ (其中 $\star \in \{+, -, \mathrm{b}\}$) 也当作如是观.

另一类重要的子三角范畴是从上同调截出的.

定义 4.4.15 (上同调截出的三角子范畴) 设 $\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{A}$ 的弱 Serre 子范畴 (定义 2.9.3). 定义 $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ 的全子范畴 $\mathsf{D}_{\mathcal{T}}(\mathcal{A})$ 如下

$$X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{D}_{\mathcal{T}}(\mathcal{A})) \iff \forall n \in \mathbb{Z},\ \mathrm{H}^n(X) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}).$$

根据命题 4.2.13, 这是 $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ 的饱和子三角范畴.

对于 $\star \in \{+, -, \mathrm{b}\}$, 定义饱和子三角范畴 $\mathsf{D}^\star_{\mathcal{T}}(\mathcal{A}) := \mathsf{D}_{\mathcal{T}}(\mathcal{A}) \cap \mathsf{D}^\star(\mathcal{A})$.

最后, $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ 的导出范畴有简单的联系. 按注记 4.1.8 的方法, 对三角范畴的相反范畴赋予三角结构.

命题 4.4.16 定义–命题 3.4.1 的等价 $\sigma : \mathsf{C}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{C}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}}$ 诱导三角范畴的等价

$$\mathsf{D}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}) \simeq \mathsf{D}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}}, \quad \mathsf{D}^{\pm}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}) \simeq \mathsf{D}^{\mp}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}}, \quad \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}) \simeq \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}}.$$

此外, 对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 皆有 $\tau^{\leq n} \circ \sigma = \sigma \circ \tau^{\geq -n}$ 和 $\tau^{\geq n} \circ \sigma = \sigma \circ \tau^{\leq -n}$.

证明 命题 3.4.3 说明 σ 诱导 $\mathsf{K}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}) \simeq \mathsf{K}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}}$. 它保持好三角 (请仔细比较命题 3.4.4 和注记 4.1.8), 保持上同调 (注记 3.4.2), 故诱导 $\mathsf{D}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{D}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}}$. 关于截断函子的断言归结为注记 3.9.5. □

4.5 态射和扩张

本节取 $\mathcal{A}$ 为 Abel 范畴. 我们不加说明地等同 $\mathrm{Ob}(\mathsf{C}(\mathcal{A}))$, $\mathrm{Ob}(\mathsf{K}(\mathcal{A}))$ 和 $\mathrm{Ob}(\mathsf{D}(\mathcal{A}))$, 必要时以 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}$, $\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}$, $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}$ 和 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}$ 来区别不同范畴的态射集

命题 4.5.1 设 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^+(\mathcal{A}))$ 由内射对象组成, 或者推而广之, 设 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}(\mathcal{A}))$ 是定义 3.15.1 所述的 K-内射复形, 则 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(\cdot, X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}(\cdot, X)$.

对偶地, 设 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^-(\mathcal{A}))$ 由投射对象组成, 或者设 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}(\mathcal{A}))$ 是 K-投射复形, 则 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(X, \cdot) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}(X, \cdot)$.

证明 基于对偶性, 以下只处理 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}(\cdot, X)$ 的情形. 引理 1.10.8 表明

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}(T, X) \simeq \varinjlim_{\substack{\alpha: S \to T \\ \mathsf{K}(\mathcal{A})\text{ 的拟同构}}} \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(S, X), \quad T \in \mathrm{Ob}(\mathsf{K}(\mathcal{A})). \tag{4.5.1}$$

设 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^+(\mathcal{A}))$ 由内射对象组成. 给定拟同构 $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(S, T)$, 定理 3.11.5 表明 $\alpha^* : \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(T, X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(S, X)$, 故 (4.5.1) 的 $\varinjlim$ 简化为 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(T, X)$. 若 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}(\mathcal{A}))$ 是 K-内射复形, 则改用定理 3.15.5. □

上一命题的直接应用之一是控制导出范畴的大小. 此处重新启用选定的 Grothendieck 宇宙 $\mathcal{U}$, 以及关于 $\mathcal{U}$-范畴 (即默认意义下的 “范畴”) 和 $\mathcal{U}$-小范畴的术语.

推论 4.5.2 设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{U}$-范畴.

(i) 若 $\mathcal{A}$ 有足够的内射对象 (或投射对象), 则 $\mathsf{D}^+(\mathcal{A})$ (或 $\mathsf{D}^-(\mathcal{A})$) 也是 $\mathcal{U}$-范畴.

(ii) 若 $\mathcal{A}$ 有足够的 K-内射或 K-投射复形 (定义 3.15.1), 则 $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ 也是 $\mathcal{U}$-范畴.

(iii) 若 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{U}$-小范畴, 则 $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ 亦然.

证明 关键在于验证 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}(X, Y)$ 为 $\mathcal{U}$-小集. 注意到 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}$ 版本是容易的, 因为易证 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{U}$-范畴.

设 $\mathcal{A}$ 有足够的内射对象, 而 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{D}^+(\mathcal{A}))$; 不失一般性可设 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^+(\mathcal{A}))$ 由内射对象组成; 代入命题 4.5.1 即得 (i). 若 X 有 K-内射解消 (或 Y 有 K-投射解消), 不失一般性可设 X 是 K-内射复形 (或 Y 是 K-投射复形); 和先前相同的论证给出 (ii).

对于 (iii), 留意到 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 此时是 $\mathcal{U}$-小范畴. 将此代入注记 1.10.14. □

命题 4.5.3 (正交性) 设 $a, b, n \in \mathbb{Z}$, $a < b$.

(i) 若 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{D}^{\leq a}(\mathcal{A}))$ 而 $Y \in \mathrm{Ob}(\mathsf{D}^{\geq b}(\mathcal{A}))$, 则 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}(X, Y) = 0$.

(ii) 若 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{D}^{\leq n}(\mathcal{A}))$ 而 $Y \in \mathrm{Ob}(\mathsf{D}^{\geq n}(\mathcal{A}))$, 则 H^n 给出典范同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\left(\mathrm{H}^n(X), \mathrm{H}^n(Y)\right).$$

证明 设 $a \leq b$. 将给定的 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}(X, Y)$ 用 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 中的图表 $X \xleftarrow{s} Z \xrightarrow{g} Y$ 表示, 其中 s 是拟同构. 不妨以 g 代 f, 化约到 f 来自 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 的情形. 其次, 用 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的合成 $\tau^{\leq a}X \to X \xrightarrow{f} Y \to \tau^{\geq b}Y$ 取代 f, 其前后两段皆是拟同构, 由此可进一步化约到 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^{\leq a}(\mathcal{A}))$ 而 $Y \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^{\geq b}(\mathcal{A}))$ 的情形.

当 $a < b$ 时, $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的态射 $X \to Y$ 必然为 0, 这就证得 (i).

令 X, Y 同上, 但是取 $a = n = b$ 以处理 (ii). 考虑典范态射

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\left(\mathrm{H}^n(X), \mathrm{H}^n(Y)\right) \xleftarrow{\mathrm{H}^n} \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}(X, Y). \tag{4.5.2}$$

◇ 第一段态射 H^n 是同构: 因为 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^{\leq n}(\mathcal{A}))$, $Y \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^{\geq n}(\mathcal{A}))$, 任意 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X, Y)$ 只可能在 n 次项非零, 而对 f^n 的唯一条件是

$$f^n\left(\mathrm{im}(d_X^{n-1})\right) = 0, \quad f\left(X^n\right) \subset \ker\left(d_Y^n\right).$$

然而 $X^n / \mathrm{im}\left(d_X^{n-1}\right) = \mathrm{H}^n(X)$ 且 $\ker\left(d_Y^n\right) = \mathrm{H}^n(Y)$.

◇ 第二段态射也是同构: 这是由于对 X, Y 的条件导致 $\mathrm{Hom}^{-1}(X, Y) = \{0\}$.

断言 (ii) 遂归结为证 (4.5.2) 末段为同构. 应用引理 1.10.8 得出

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}(X, Y) \simeq \varinjlim_{[Y \rightarrowtail Z] \in \mathrm{Ob}(\mathrm{qis}_{Y/})} \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(X, Z).$$

若 $Y \to Z$ 是拟同构, 则在 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 中 $Y \to Z \to \tau^{\geq n}Z$ 的每一段都是拟同构. 这表明满足 Z 来自 $\mathsf{C}^{\geq n}(\mathcal{A})$ 的拟同构 $Y \to Z$ 给出滤过范畴 $\mathrm{qis}_{Y/}$ 的共尾子范畴 (定义 1.6.4 和命题 1.6.8). 基于命题 1.6.5, 今后不妨将 $\varinjlim$ 限制在此子范畴上.

已知 (4.5.2) 的前两段为典范同构. 取 $Y \to Z$ 如上, 由此得到的交换图表

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{H}^n(X), \mathrm{H}^n(Y)) \arrow[d, "\simeq"'] & \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(X, Y) \arrow[l, "\mathrm{H}^n"', "\sim"] \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{H}^n(X), \mathrm{H}^n(Z)) & \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(X, Z) \arrow[l, "\sim"', "\mathrm{H}^n"]
\end{tikzcd}
$$

遂说明 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(X,Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(X,Z)$. 于是先前的 $\varinjlim$ 取常值 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(X,Y)$. 如此便说明 (4.5.2) 的末段为同构. □

定理 4.5.4 将 $\mathcal{A}$ 的对象视同集中在零次项的复形, 这给出加性范畴的等价 $\mathcal{A} \to \mathsf{D}^{\leq 0}(\mathcal{A}) \cap \mathsf{D}^{\geq 0}(\mathcal{A})$.

证明 显然 $\mathcal{A}$ 的对象给出 $\mathsf{D}^{\leq 0}(\mathcal{A}) \cap \mathsf{D}^{\geq 0}(\mathcal{A})$ 的对象, 由此得到加性函子 $\Phi : \mathcal{A} \to \mathsf{D}^{\leq 0}(\mathcal{A}) \cap \mathsf{D}^{\geq 0}(\mathcal{A})$. 命题 4.5.3 (ii) 蕴涵 Φ 是全忠实的.

接着说明 Φ 本质满. 设 X 是 $\mathsf{D}^{\leq 0}(\mathcal{A}) \cap \mathsf{D}^{\geq 0}(\mathcal{A})$ 的对象. 在 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中对复形 X 应用截断函子, 可知 $X \to \tau^{\geq 0}X \leftarrow \tau^{\leq 0}\tau^{\geq 0}X$ 每段都是拟同构, 然而命题 3.9.8 蕴涵 $\tau^{\leq 0}\tau^{\geq 0}X \simeq \mathrm{H}^0(X)$. 于是 Φ 是等价. □

既然等价及其拟逆函子自动保持加性结构 (推论 1.3.6), 今后将不加说明地将 $\mathcal{A}$ 等同于 $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{A})$ 的全子范畴.

定义 4.5.5 令 $\star \in \{+, -, \mathrm{b}, \ \}$ (取 $\star =$ 　代表无上标). 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}'$ 为 Abel 范畴. 若三角函子 $R : \mathsf{D}^{\star}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}^{\star}(\mathcal{A}')$ 限制为 $\mathcal{A} \to \mathsf{D}^{[a,b]}(\mathcal{A}')$, 其中 $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$, 则称 R 的**幅度**包含于 $[a,b]$.

一则简单的观察是: 若 $X' \to X \to X'' \xrightarrow{+1}$ 是 $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ 的好三角, $X', X'' \in \mathrm{Ob}\left(\mathsf{D}^{[a,b]}(\mathcal{A})\right)$, 则 $X \in \mathrm{Ob}\left(\mathsf{D}^{[a,b]}(\mathcal{A})\right)$. 这是 H^n 的长正合列的直接应用.

引理 4.5.6 若 R 的幅度包含于 $[a,b]$, 则对任意 $-\infty < c \leq d < +\infty$ 皆有

$$R \text{ 限制为 } \mathsf{D}^{[c,d]}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}^{[c+a,d+b]}(\mathcal{A}').$$

证明 平凡的是 $c = d$ 的情形. 当 $c < d$ 时, 对任意 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{D}^{[c,d]}(\mathcal{A}))$, 取命题 4.4.13 的好三角

$$\tau^{\leq d-1}X \to X \to \tau^{\geq d}X \xrightarrow{+1}, \quad \tau^{\geq d}X \simeq \mathrm{H}^d(X)[-d]$$

对 R 的像, 配合先前观察来递归地论证. □

作为推论, 若 R 的幅度有限, 则 R 限制为 $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{A}')$.

继续介绍一则相关结果, 它说明三角函子如何由能它在 $\mathcal{A}$ 上的取值来确定.

命题 4.5.7 (出口引理 [8, Chapter I, §7]) 设 $\mathcal{T}$ 为 $\mathcal{A}$ 的弱 Serre 子范畴, $\star \in \{\ , +, \mathrm{b}\}$. 考虑三角函子 $F, G : \mathsf{D}^{\star}_{\mathcal{T}}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}(\mathcal{A}')$ 及其间的态射 $\eta : F \to G$, 使得 $\eta_X : FX \to GX$ 对所有 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$ 皆为同构. 当以下任一条件成立时, η 也是同构:

(i) $\star = \mathrm{b}$;

(ii) $\star = +$, 存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使 F, G 限制为 $\mathsf{D}^{\geq 0}_{\mathcal{T}}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}^{\geq k}(\mathcal{A}')$;

(iii) $\star =$, 存在 $k, \ell \in \mathbb{Z}$ 使 F, G 皆限制为 $\mathsf{D}^{\geq 0}_{\mathcal{T}}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}^{\geq k}(\mathcal{A}')$ 和 $\mathsf{D}^{\leq 0}_{\mathcal{T}}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}^{\leq \ell}(\mathcal{A}')$.

设 $\mathfrak{I}$ 是 $\mathrm{Ob}(\mathcal{T})$ 的子集, 而且对每个 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$ 皆存在 $I \in \mathfrak{I}$ 和单态射 $X \hookrightarrow I$. 若将对 η_X 的条件改为 η_I 对每个 $I \in \mathfrak{I}$ 皆为同构, 则在 (i) 或 (ii) 的前提下, η 仍是同构.

当然, (ii) 也有针对 $\star = -$ 的对偶版本, 不再赘述.

证明　对 (i) 照搬引理 4.5.6 论证, 以好三角 $\tau^{\leq d}X \to X \to \tau^{\geq d+1}X \xrightarrow{+1}$ 和命题 4.2.1 递归地化到 $X \simeq \mathrm{H}^d(X)[-d]$ 的情形.

对于 (ii), 目标是对所有 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{D}^{+}_{\mathcal{T}}(\mathcal{A}))$ 和 $j \in \mathbb{Z}$ 证明 $\mathrm{H}^j(FX) \to \mathrm{H}^j(GX)$ 为同构. 仍然考虑上述好三角, 但取 $d \gg 0$ 使得 $F\tau^{\geq d+1}X$ 和 $G\tau^{\geq d+1}X$ 都落在 $\mathsf{D}^{\geq j+1}(\mathcal{A}')$. 由此得到行正合交换图表

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{H}^j\left(F\tau^{\leq d}X\right) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^j(FX) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{H}^j\left(F\tau^{\leq d}X\right) \arrow[r] & \mathrm{H}^j(GX) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

然而 $\tau^{\leq d}X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathcal{T}}(\mathcal{A}))$, 由此化到 (i).

对于 (iii), 任取 $d \in \mathbb{Z}$, 以 $\tau^{\leq d}X \to X \to \tau^{\geq d+1}X \xrightarrow{+1}$ 和命题 4.2.1 化约到 (ii) 及其对偶版本.

考虑最后一则断言. 由于 (ii) 已证出, 说明 η_X 对所有 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$ 皆为同构即可. 取正合列 $0 \to X \to I^0 \to I^1 \to \cdots$ 使得每个 I^n 都属于 $\mathfrak{I}$. 将此写成复形的拟同构 $X \to I$, 问题遂归结为证 η_I 为同构. 为此, 定义复形的暴力截断 $\sigma^{\leq d}I$, 它在次数 $\leq d$ 的部分等于 I, 其余的项为 0; 类似地定义 $\sigma^{\geq d+1}I$. 现在可以沿用 (i) 和 (ii) 的论证, 仅须改用 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的典范短正合列

$$0 \to \sigma^{\geq d+1}I \to I \to \sigma^{\leq d}X \to 0$$

和相应的好三角即可. 细节留给读者. □

现在回顾定理 4.5.4, 全忠实性质 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}(X, Y)$ 是其证明的关键. 如果容许 X 和 Y 的次数错开, 会得到什么信息? 这是以下探讨的重点.

定义 4.5.8 (Ext 函子: 一般情形)　对 $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ 和 $n \in \mathbb{Z}$, 定义 $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(X, Y) := \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}(X, Y[n])$. 函子 $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{A} \to \mathsf{Ab}$ 对每个变元都是加性的.

符号 $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(X, Y)$ 在定义–命题 3.14.4 也曾出现, 关于 RHom 的讨论将会通两种定义, 见推论 4.9.4. 此处不要求 $\mathcal{A}$ 有足够的内射对象或投射对象.

一如 Hom 的情形, 我们仍然将 Ext^n 对两个变元的函子性依序称为拉回和推出. 不致混淆时, 也将 $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}$ 简记为 Ext^n. 以下说明它和 §3.14 定义的 Ext^n 性质类似.

命题 4.5.9 以下命 X, Y 为 $\mathcal{A}$ 的任意对象. 双函子族 $(\mathrm{Ext}^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 具有下述性质.

(i) 若 $n < 0$ 则 $\mathrm{Ext}^n(X,Y) = 0$.

(ii) 存在典范同构 $\mathrm{Ext}^0(X,Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)$.

(iii) 给定 $\mathcal{A}$ 的短正合列 $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ 和 $0 \to Y' \to Y \to Y'' \to 0$, 它们诱导相应的长正合列

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^{n-1}(X',Y) \xrightarrow{\delta^{n-1}} \mathrm{Ext}^n(X'',Y) \to \mathrm{Ext}^n(X,Y) \to \mathrm{Ext}^n(X',Y) \to \cdots$$

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^{n-1}(X,Y'') \xrightarrow{\delta^{n-1}} \mathrm{Ext}^n(X,Y') \to \mathrm{Ext}^n(X,Y) \to \mathrm{Ext}^n(X,Y'') \to \cdots$$

其中的连接态射 δ^{n-1} 对短正合列具有函子性.

(iv) 若 $\mathrm{Ext}^1(X,\cdot) = 0$ (或 $\mathrm{Ext}^1(\cdot,Y) = 0$), 则 X (或 Y) 是 $\mathcal{A}$ 的投射对象 (或内射对象).

证明 断言 (i) 和 (ii) 是命题 4.5.3 的直接推论.

对于断言 (iii), 先以命题 4.4.7 将短正合列典范地作成 $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ 的好三角 $X' \to X \to X'' \xrightarrow{+1}$ 和 $Y' \to Y \to Y'' \xrightarrow{+1}$, 然后应用 Hom 对每个变元都是上同调函子这一性质 (命题 4.1.12).

最后, (iv) 是将 (i) 和 (ii) 代入长正合列 (iii) 的产物. □

由于 Ext^n 由 $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ 的 Hom 给出, 对于 $f \in \mathrm{Ext}^n(X,Y)$ 和 $g \in \mathrm{Ext}^n(X',Y')$, 我们有显然的直和 $f \oplus g \in \mathrm{Ext}^n(X \oplus X', Y \oplus Y')$. 另一方面, 在 Ext 上有合成运算

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^m(Y,Z) \times \mathrm{Ext}^n(X,Y) & & \\ \| & & \\ \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}(Y, Z[n]) \times \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}(X, Y[m]) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^{n+m}(X,Z) \\ (f,g) & \longmapsto & fg := f[m] \circ g, \end{array}$$

其中 $m, n \in \mathbb{Z}$. 易见它具结合律和双线性. 作为推论, 交换群

$$\mathrm{Ext}(X) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Ext}^n(X,X)$$

带有自然的环结构, 以 $\mathrm{id}_A \in \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(A)$ 为乘法幺元, 而 $\mathrm{Ext}(X,Y) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Ext}^n(X,Y)$ 成为 $(\mathrm{Ext}(Y), \mathrm{Ext}(X))$-双模.

推而广之, 如果 $\mathcal{A}$ 是 $\Bbbk$-线性的, $\Bbbk$ 是交换环, 则诸函子 Ext^n 的取值提升到 $\Bbbk$-Mod, 而 $\mathrm{Ext}(X)$ 成为 $\Bbbk$-代数. 乘法的定义表明此时 $\mathrm{Ext}(X)$ 进一步成为分次 $\Bbbk$-代数, 见 [25, 定义 7.4.1]. 这类构造在表示理论中颇为有用.

定义 4.5.10 设 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. 以上定义的分次代数 $\mathrm{Ext}(A)$ 称为对象 X 的 **Ext-代数**.

符号 Ext 是 "扩张" 的简写. 为了说明两者的具体联系, 先来定义何谓扩张.

定义 4.5.11 设 X 和 Y 为 $\mathcal{A}$ 的对象, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. 称 $\mathcal{A}$ 中形如

$$\mathcal{E}: \quad 0 \to Y \to E^1 \to \cdots \to E^n \to X \to 0$$

的正合列为 X 同构 Y 的 n-**扩张**. 对于固定的 X, Y, 在所有 n-扩张的集合上考虑由二元关系

$\mathcal{E} \sim_0 \mathcal{E}' \iff$ 存在交换图表

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & E^1 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & E^n \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] & E'_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E'_n \arrow[r] & X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

所生成[2]的等价关系 $\sim$, 这些 n-扩张的等价类构成集合 $\mathrm{Ext}^{n,\text{米田}}(X, Y)$.

命题 2.3.4 蕴涵 1-扩张的等价化为短正合列的同构

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] & E' \arrow[r] & X \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

约定 4.5.12 今后迳称 1-扩张为扩张, 称其间的等价为同构. 分裂短正合列 (命题 2.5.3) 又称为分裂扩张, 它们彼此同构.

对于 n-扩张有以下运算.

▷ **合成** 给定 $[\mathcal{E}_1] \in \mathrm{Ext}^{n,\text{米田}}(Y, Z)$ 和 $[\mathcal{E}_2] \in \mathrm{Ext}^{m,\text{米田}}(X, Z)$, 以正合列头尾相接来定义 $[\mathcal{E}_1] \circ [\mathcal{E}_2] \in \mathrm{Ext}^{n+m,\text{米田}}(X, Y)$. 这也称为**米田积**.

▷ **拉回** 给定态射 $f : X' \to X$, 相应的 $f^* : \mathrm{Ext}^{n,\text{米田}}(X, Y) \to \mathrm{Ext}^{n,\text{米田}}(X', Y)$ 来自以下操作: 给定 $[\mathcal{E}] \in \mathrm{Ext}^{n,\text{米田}}(X, Y)$, 考虑交换图表

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & E^1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[r] & E^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & E^n \underset{X}{\times} X' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] & E^1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E^{n-1} \arrow[r] & E^n \arrow[r] & X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

标 □ 的方块是拉回图表; 拉回保核, 而且 $E^n \underset{X}{\times} X' \to X'$ 依然满 (命题 2.1.6), 由此可验证第一行仍正合, 其等价类即 $f^*[\mathcal{E}]$.

[2]换言之, $\mathcal{E}_1 \sim \mathcal{E}_2$ 当且仅当它们能透过一连串这样的交换图表相连.

▷ **推出** 给定态射 $g: Y \to Y'$, 相应的 $g_*: \mathrm{Ext}^{n,米田}(X,Y) \to \mathrm{Ext}^{n,米田}(X,Y')$ 来自以下操作: 给定 $[\mathcal{E}] \in \mathrm{Ext}^{n,米田}(X,Y)$, 推出给出交换图表

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\boxplus"] & E^1 \arrow[r] \arrow[d] & E^2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[r] & E^n \arrow[r] \arrow[d, equal] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Y' \arrow[r] & E^1 \sqcup_Y Y' \arrow[r] & E^2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E^n \arrow[r] & X \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

对偶地验证第二行仍正合, 其等价类即 $g_*[\mathcal{E}]$.

▷ **直和** 将两个扩张逐项取直和 $\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}'$ 再取等价类, 得到映射

$$\oplus: \mathrm{Ext}^{n,米田}(X,Y) \times \mathrm{Ext}^{n,米田}(X',Y') \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n,米田}(X \oplus X', Y \oplus Y').$$

▷ Baer 和 这是如下映射

$$\dot{+}: \mathrm{Ext}^{n,米田}(X,Y) \times \mathrm{Ext}^{n,米田}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n,米田}(X,Y).$$

其定义是将 $[\mathcal{E}_1] \oplus [\mathcal{E}_2]$ 沿 $Y \oplus Y \twoheadrightarrow Y$ 推出, 再沿 $X \hookrightarrow X \times X$ 拉回 (见约定 1.3.2), 其产物即 $[\mathcal{E}_1] \dot{+} [\mathcal{E}_2] \in \mathrm{Ext}^{n,米田}(X,Y)$.

可以验证拉回和推出相交换: $g_* f^* = f^* g_*$, 而 Baer 和 $\dot{+}$ 也是交换的. 这些性质亦可通过以下定理化约到 Ext^n 上.

定理 4.5.13 (米田信夫) 对所有 $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ 和 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, 存在典范双射

$$\mathrm{Ext}^{n,米田}(X,Y) \xrightarrow{1:1} \mathrm{Ext}^n(X,Y),$$

映 n-扩张 $0 \to Y \to E^1 \to \cdots \to E^n \to X \to 0$ 的等价类为 $as^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}(X, Y[n])$, 其中

$$\begin{tikzcd} X & & & \\ Z \arrow[u, "s:拟同构"] \arrow[d, "a"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & E^1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E^n \arrow[u] \\ Y[n] & Y & & & \end{tikzcd}$$

省略项皆为 0. 双射使 n-扩张的合成, 直和, 拉回, 推出匹配 Ext^n 上的相应运算, 而 Baer 和 $\dot{+}$ 对应到 $\mathrm{Ext}^n(X,Y)$ 的加法群结构.

证明 扩张的等价 $\mathcal{E} \sim \mathcal{E}'$ 反映为相应的复形 Z, Z' 之间的拟同构, 所示的映射因而是良定义的. 关键在于说明它既满且单. 且从满性入手.

任意 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}(X, Y[n])$ 都来自于 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 的图表 $X \xleftarrow{s} Z \xrightarrow{a} Y[n]$, 其中 s 是拟同构. 与拟同构 $\tau^{\leq 0} Z \to Z$ 合成后, 不妨设 $Z \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^{\leq 0}(\mathcal{A}))$; 其次, 命题 3.9.6 的伴随关系又使 s 和 a 通过拟同构 $Z \twoheadrightarrow \tau^{\geq -n} Z$ 分解. 于是可假定 $Z \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^{[-n,0]}(\mathcal{A}))$.

由于 Z 在 0 次项之外皆正合. 仿照先前对扩张的推出的定义, 定义复形 Z' 为下图的第二行

$$\begin{tikzcd}
\cdots 0 \arrow[r] & Z^{-n} \arrow[r] \arrow[d, "a^{-n}"'] \arrow[dr, phantom, "\boxplus"] & Z^{-n+1} \arrow[r] \arrow[d] & Z^{-n+2} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
\cdots 0 \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z^{-n-1} \bigsqcup_{Z^{-n}} Y \arrow[r] & Z^{-n+2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

诸垂直箭头给出拟同构 $Z \to Z'$. 根据纤维余积的泛性质, a 也唯一地分解为 $Z \to Z' \xrightarrow{a'} Y[n]$.

此外, $Z \xrightarrow{s} X$ 也典范地分解为 $Z \to Z' \xrightarrow{s'} X$. 当 $n > 1$ 时这是明显的, 而 $n = 1$ 时 $(s')^0 : Z^0 \bigsqcup_{Z^{-1}} Y \to X$ 由 $s^0 : Z^0 \to X$ 和 $Y \xrightarrow{0} X$ 确定.

综上, 我们已化约到 $X \xleftarrow{s} Z \xrightarrow{a} Y[n]$ 形如

$$\begin{tikzcd}
\cdots 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X \arrow[r] & 0 \cdots \\
\cdots 0 \arrow[r] & Z^{-n} \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d, equal] & Z^{-n+1} \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & Z^0 \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & 0 \cdots \\
\cdots 0 \arrow[r] & Y \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \cdots
\end{tikzcd}$$

的情形, 但上图摊平便是 n-扩张 $0 \to Y \to Z^{-n+1} \to \cdots \to Z^0 \to X \to 0$. 满性得证.

现在说明单性. 鉴于 (1.10.1), 出发点是 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 的交换图表

$$\begin{tikzcd}
& Z_2 \arrow[dl, "s_2"'] \arrow[dr, "a_2"] & \\
X & W \arrow[l, "t"'] \arrow[r, "b"] \arrow[u] \arrow[d] & Y[n] \\
& Z_1 \arrow[ul, "s_1"] \arrow[ur, "a_1"'] &
\end{tikzcd}$$

$W \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}(\mathcal{A}))$, $\quad s_i, t$: 拟同构,
$(Z_i; s_i, a_i)$ 具有先前所化约到的形式, 对应 n-扩张,
$(i = 1, 2)$.

我们希望说明这给出 n-扩张的等价. 按照先前的技巧, 首先和 $\tau^{\leq 0} W \to W$ 作合成以化约到 $W \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^{\leq 0}(\mathcal{A}))$. 再以截断的伴随关系让所有态射 (在 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中) 通过 $W \twoheadrightarrow \tau^{\geq -n} W$ 分解; 记 K 为 $W \twoheadrightarrow \tau^{\geq -n} W$ 的核, 由于对所有 $V \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^{[-n,0]}(\mathcal{A}))$ 都有 $\mathrm{Hom}^{-1}(K, V) = 0$, 此操作不改变图表在 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 中的交换性. 以此化约到 $W \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^{[-n,0]}(\mathcal{A}))$ 的情形.

同理可见 $\mathrm{Hom}^{-1}(W, X) = 0$, 故图表左半部已在 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中交换. 至于图表右半部, 我们重复证明满性时的推出操作, 化约到 $W^{-n} = Z_i^{-n} = Y$ 而 $b^{-n} = a_i^{-n} = \mathrm{id}_Y$ 的情形; 这使右半部在 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中平凡地交换, 同时左半部情况保持不变 (请验证). 综上可见 $(W; t, b)$ 也对应到 n-扩张, 而交换图表见证定义 4.5.11 的等价关系 $\sim$. 这就给出所求的单性.

关于合成, 直和, 拉回和推出在此双射下的匹配都是例行公事. 至于 Baer 和 $\dotplus$, 命题 1.3.5 将 $\mathrm{Ext}^n(X,Y) := \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}(X,Y[n])$ 中的加法 $f+g$ 实现为合成 $X \to X\oplus X \xrightarrow{f\oplus g} (Y\oplus Y)[n] \to Y[n]$, 正好匹配 $\dotplus$ 的定义. □

对偶地, $\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}(X,Y[n])$ 的元素也可以由 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中形如 $X \xrightarrow{b} Z \xleftarrow{t} Y[n]$ 的图表来代表, 其中 t 是拟同构. 两种构造的比较请见本章习题.

命题 4.5.14 考虑扩张 $0\to Y \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} X \to 0$. 相对于命题 4.5.9 的长正合列

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,E) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,X) \to \mathrm{Ext}^1(X,Y),$$

此扩张在 $\mathrm{Ext}^1(X,Y)$ 中确定的元素是 id_X 的像.

证明 连接态射 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,X) \to \mathrm{Ext}^1(X,Y)$ 无非是 e_*, 其中 $e\in \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}(X,Y[1])$ 由 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的图表

$$X \xleftarrow[\text{拟同构}]{\Phi} \mathrm{Cone}(f) \xrightarrow{\beta(f)} Y[1],$$

确定, 见命题 4.4.7. 然而 $\mathrm{Cone}(f)$ 是集中在 $-1,0$ 次项的复形 $Y\xrightarrow{f} E$. 对照定理 4.5.13, 立见 e 来自扩张 $0\to Y\xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} X \to 0$. □

命题 4.5.15 加法群 $\left(\mathrm{Ext}^{n,\text{米田}}(X,Y), \dotplus\right)$ 的零元由下述扩张确定:

$n=1$	分裂扩张 $0\to Y\to X\oplus Y \oplus X \to 0$
$n=2$	$0\to Y\xrightarrow{\mathrm{id}_Y} Y \xrightarrow{0} X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X \to 0$
$n\geq 3$	$0\to Y \xrightarrow{\mathrm{id}_Y} Y \to 0 \to \cdots \to 0 \to X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X \to 0$.

证明 对于 $n=1$ 情形, 设短正合列 $0\to Y\xrightarrow{f} E\xrightarrow{g} X\to 0$ 对应零元. 命题 4.5.14 的正合列说明存在 $s\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,E)$ 使得 $gs=\mathrm{id}_X$, 这使短正合列分裂.

其次处理 $n=2$ 情形. 基于平凡的理由, $\mathrm{Ext}^1(0,Y)$ 和 $\mathrm{Ext}^1(X,0)$ 都是零群, 对应的扩张可以取为 $0\to Y\xrightarrow{\mathrm{id}} Y\to 0\to 0$ 和 $0\to 0\to X\xrightarrow{\mathrm{id}} X\to 0$. 加法既然是双线性的, 它们头尾相接便是 $\mathrm{Ext}^2(X,Y)$ 的零元. 对 $n\geq 3$ 可考虑 $(n-1)$-扩张 $0\to\cdots\to 0\to X\xrightarrow{\mathrm{id}} X\to 0$, 类似方法给出 $\mathrm{Ext}^n(X,Y)$ 的零元. □

4.6 三角函子与局部化

选定三角范畴 $\mathcal{D}$ 及其饱和子三角范畴 $\mathcal{N}$, 相应的 Verdier 局部化记为 $Q:\mathcal{D}\to\mathcal{D}/\mathcal{N}$. 类似地, 我们考虑三角范畴 $\mathcal{D}'$ 及 $Q':\mathcal{D}'\to\mathcal{D}'/\mathcal{N}'$.

设 $F:\mathcal{D}\to\mathcal{D}'$ 为三角函子. 考虑实线部分的图表

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "Q"'] & \mathcal{D}' \arrow[d, "Q'"] \\ \mathcal{D}/\mathcal{N} \arrow[r, dashed] & \mathcal{D}'/\mathcal{N}' \end{tikzcd} \tag{4.6.1}$$

朴素的愿望是补全虚线部分使全图交换. 假若 $F(\mathrm{Ob}(\mathcal{N}))\subset\mathrm{Ob}(\mathcal{N}')$, 则 $Q'F$ 零化 $\mathcal{N}$, 此时定理 4.3.4 的泛性质诱导虚线标出的函子. 然而实践中的 F 鲜有此性质, 因此我们退而求其次, 转向 §1.8 介绍的 Kan 延拓.

定义 4.6.1 (三角函子的导出函子) 设 $F:\mathcal{D}\to\mathcal{D}'$ 如上.

- ◇ 若 $\mathrm{Lan}_Q(Q'F)$ 存在, 并且是三角函子, 则记为 $\mathrm{R}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{N}'}F:\mathcal{D}/\mathcal{N}\to\mathcal{D}'/\mathcal{N}'$;
- ◇ 若 $\mathrm{Ran}_Q(Q'F)$ 存在, 并且是三角函子, 则记为 $\mathrm{L}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{N}'}F:\mathcal{D}/\mathcal{N}\to\mathcal{D}'/\mathcal{N}'$.

我们称 $\mathrm{R}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{N}'}F$ (或 $\mathrm{L}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{N}'}F$) 为三角函子 F 的右导出函子 (或左导出函子), 其唯一性来自 Kan 延拓的唯一性, 精确到唯一的同构.

根据 Kan 延拓的定义 1.8.1, 这些资料可以置入 2-胞腔图表

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "Q"'] & \mathcal{D}' \arrow[d, "Q'"] \arrow[dl, Rightarrow, shorten=4mm] \\ \mathcal{D}/\mathcal{N} \arrow[r, "\mathrm{R}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{N}'}F"'] & \mathcal{D}'/\mathcal{N}' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "Q"'] & \mathcal{D}' \arrow[d, "Q'"] \\ \mathcal{D}/\mathcal{N} \arrow[r, "\mathrm{L}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{N}'}F"'] \arrow[ur, Rightarrow, shorten=4mm] & \mathcal{D}'/\mathcal{N}'. \end{tikzcd} \tag{4.6.2}$$

泛性质相当于说: 任何将 (4.6.1) 填充为 2-胞腔的方式都唯一地来自 $\mathrm{R}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{N}'}F$ 的 “外推”, 或唯一地 “内收” 至 $\mathrm{L}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{N}'}F$, 依填充方向而定.

作为演示, 以下说明如何应用 2-胞腔的泛性质从函子的态射 $F\to G$ 推导典范态射 $\mathrm{R}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{N}'}F\to\mathrm{R}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{N}'}G$, 前提是这些导出函子存在. 请端详以下合成:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, bend left=40, "F"] \arrow[r, phantom, bend left=20, "\Downarrow"] \arrow[r, "G"'] \arrow[d] & \mathcal{D}' \arrow[d] \arrow[dl, Rightarrow, shorten=4mm] \\ \mathcal{D}/\mathcal{N} \arrow[r, "\mathrm{R}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{N}'}G"'] & \mathcal{D}'/\mathcal{N}' \end{tikzcd}$$

根据 (4.6.2) 的泛性质, 它唯一地表成 $\mathrm{R}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{N}'}F$ 对应图表的外推, 此 “推” 即所求的典范态射. 对于 $\mathrm{L}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{N}'}F\to\mathrm{L}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{N}'}G$ 的情形完全是对偶的.

注记 4.6.2 设 $\mathrm{R}^{\mathcal{N}'}_{\mathcal{N}}F$ (或 $\mathrm{L}^{\mathcal{N}'}_{\mathcal{N}}F$) 存在; Kan 延拓的泛性质中的 (L,ξ) (或 (R,δ)) 若取为三角函子和与平移兼容的态射 (见定义 4.1.1), 则由之确定的态射 $\chi:\mathrm{R}^{\mathcal{N}'}_{\mathcal{N}}F\to L$ (或 $\theta:R\to\mathrm{L}^{\mathcal{N}'}_{\mathcal{N}}F$) 也自动与平移兼容, 这是唯一性的简单推论.

定义 4.6.1 引出两个问题. 首先, 如何确保 $\mathrm{R}^{\mathcal{N}'}_{\mathcal{N}}F$ (或 $\mathrm{L}^{\mathcal{N}'}_{\mathcal{N}}F$) 存在? 其次, 它们和函子合成的关系如何描述? 我们依序处理之.

定义 4.6.3 取 $\mathcal{N},\mathcal{N}'$ 和 $F:\mathcal{D}\to\mathcal{D}'$ 如上. 设 $\mathcal{I}$ 为 $\mathcal{D}$ 的子三角范畴. 若有

▷ **解消条件** 对每个 $X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ 皆存在 $S\mathcal{N}$ 中的态射 $X\to Y$ (或 $Y\to X$) 使得 $Y\in\mathrm{Ob}(\mathcal{I})$,

▷ **保 $\mathcal{N}$ 条件** $F(\mathrm{Ob}(\mathcal{N}\cap\mathcal{I}))\subset\mathrm{Ob}(\mathcal{N}')$,

则称 $\mathcal{I}$ 为 ***F*-内射** (或 ***F*-投射**) 的.

如果 $F(\mathrm{Ob}(\mathcal{N}))\subset\mathrm{Ob}(\mathcal{N}')$, 则 $\mathcal{D}$ 本身既是 F-内射又是 F-投射的.

条件 $F(\mathrm{Ob}(\mathcal{N}\cap\mathcal{I}))\subset\mathrm{Ob}(\mathcal{N}')$ 连同 Verdier 局部化的泛性质给出三角函子 $F^\flat:\mathcal{I}/(\mathcal{I}\cap\mathcal{N})\to\mathcal{D}'/\mathcal{N}'$.

命题 4.6.4 若 $\mathcal{I}$ 是 F-内射 (或 F-投射) 的子三角范畴, 则 $\mathrm{R}^{\mathcal{N}'}_{\mathcal{N}}F$ (或 $\mathrm{L}^{\mathcal{N}'}_{\mathcal{N}}F$) 存在, 可以适当选取, 以使下图交换:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}/\mathcal{N} \arrow[r, "\text{所求函子}"] & \mathcal{D}'/\mathcal{N}'. \\ \mathcal{I}/(\mathcal{I}\cap\mathcal{N}) \arrow[u, "i:\text{等价}"] \arrow[ur, "F^\flat"'] & \end{tikzcd}$$

证明 考虑 $\mathrm{R}^{\mathcal{N}'}_{\mathcal{N}}F$ 的情形. 左 Kan 延拓 $\mathrm{Lan}_Q(Q'F)$ 的存在性归结为命题 1.11.2, 唯一待验证的是 $Q'F$ 映 $S\mathcal{N}\cap\mathrm{Mor}(\mathcal{I})\xlongequal{(4.3.2)}S(\mathcal{N}\cap\mathcal{I})$ 为同构. 考虑此集合中的态射 $f:A\to B$, 扩充为好三角 $A\xrightarrow{f}B\to C\xrightarrow{+1}$, 其中 $C\in\mathrm{Ob}(\mathcal{N}\cap\mathcal{I})$. 于是好三角 $FA\xrightarrow{Ff}FB\to FC\xrightarrow{+1}$ 中 $FC\in\mathrm{Ob}(\mathcal{N}')$, 这就确保 $(Q'F)(f)$ 为同构.

命题 4.3.7 蕴涵 i 有三角拟逆函子 i^{-1}. 综上, $\mathrm{R}^{\mathcal{N}'}_{\mathcal{N}}F:=F^\flat\circ i^{-1}$ 给出 $\mathrm{Lan}_Q(Q'F)$, 它同时也是三角函子. 证毕. □

定理 4.6.5 考虑三角范畴 $\mathcal{D},\mathcal{D}',\mathcal{D}''$ 及其饱和子三角范畴 $\mathcal{N},\mathcal{N}',\mathcal{N}''$. 给定三角函子 $\mathcal{D}\xrightarrow{F}\mathcal{D}'\xrightarrow{F'}\mathcal{D}''$.

(i) 设右导出函子 $\mathrm{R}^{\mathcal{N}'}_{\mathcal{N}}F$, $\mathrm{R}^{\mathcal{N}''}_{\mathcal{N}'}F'$ 和 $\mathrm{R}^{\mathcal{N}''}_{\mathcal{N}}(F'F)$ 存在, 则有相应的典范态射

$$\mathrm{R}^{\mathcal{N}''}_{\mathcal{N}}(F'F)\to\left(\mathrm{R}^{\mathcal{N}''}_{\mathcal{N}'}F'\right)\left(\mathrm{R}^{\mathcal{N}'}_{\mathcal{N}}F\right).$$

(ii) 同上, 但考虑左导出函子, 相应的典范态射为

$$\left(\mathrm{L}_{\mathcal{N}'}^{\mathcal{N}''} F'\right)\left(\mathrm{L}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{N}'} F\right) \to \mathrm{L}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{N}''}(F'F).$$

(iii) 取定 $\mathcal{D}$ (或 $\mathcal{D}'$) 的子三角范畴 $\mathcal{I}$ (或 $\mathcal{I}'$). 设 $\mathcal{I}$ 是 F-内射的, $\mathcal{I}'$ 是 F'-内射的, 而且 $F(\mathrm{Ob}(\mathcal{I})) \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{I}')$, 则 $\mathcal{I}$ 是 $F'F$-内射的, 而 (i) 的典范态射为同构.

(iv) 同上, 但将条件中的内射代换为投射, 则 $\mathcal{I}$ 是 $F'F$-投射的, 而 (ii) 的典范态射为同构.

证明 显然 (i), (iii) 和 (ii), (iv) 相对偶, 处理前一对即可.

对于 (i), 记 $R := \mathrm{R}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{N}'} F$, $R' := \mathrm{R}_{\mathcal{N}'}^{\mathcal{N}''} F'$. 考虑 2-胞腔图表

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "Q"'] & \mathcal{D}' \arrow[d, "Q'"] \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[r, "F'"] & \mathcal{D}'' \arrow[d, "Q''"] \arrow[dl, Rightarrow] \\
\mathcal{D}/\mathcal{N} \arrow[r, "R"'] & \mathcal{D}'/\mathcal{N}' \arrow[r, "R'"'] & \mathcal{D}''/\mathcal{N}''
\end{tikzcd}$$

左 Kan 延拓的泛性质给出 $\mathrm{R}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{N}''}(F'F) \to R'R$, 其刻画是

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[r, "F'F"] \arrow[d, "Q"'] & \mathcal{D}'' \arrow[d, "Q''"] \arrow[dl, Rightarrow] \\
\mathcal{D}/\mathcal{N} \arrow[r, "\mathrm{R}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{N}''}(F'F)"' {name=U}] \arrow[r, bend right=60, "R'R"' {name=L}] & \mathcal{D}''/\mathcal{N}'' \arrow[from=U, to=L, Rightarrow, shorten=2pt]
\end{tikzcd}
\text{ 的合成 } =
\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[r, "F'F"] \arrow[d, "Q"'] & \mathcal{D}'' \arrow[d, "Q''"] \arrow[dl, Rightarrow] \\
\mathcal{D}/\mathcal{N} \arrow[r, "R'R"'] & \mathcal{D}''/\mathcal{N}''.
\end{tikzcd} \tag{4.6.3}$$

对于 (iii), $\mathcal{I}$ 的 $F'F$-内射性质直接来自定义 4.6.3 和条件 $F(\mathrm{Ob}(\mathcal{I})) \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{I}')$. 设 $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$. 命题 4.6.4 的构造遂给出

$$RQY = Q'FY \in \mathrm{Ob}\left(\mathcal{I}'/(\mathcal{N}' \cap \mathcal{I}')\right),$$
$$(R'R)QY = R'(Q'FY) = Q''F'FY = \mathrm{R}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{N}''}(F'F)(QY).$$

对于一般之 $QX \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}/\mathcal{N})$, 其中 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$, 存在 $S\mathcal{N}$ 中的态射 $X \to Y$ 使得 $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$, 从而 $QX \xrightarrow{\sim} QY$, 代入上一步得出同构 $\mathrm{R}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{N}''}(F'F)(QX) \simeq R'R(QX)$. 请感兴趣的读者以 (4.6.3) 解释这些同构的确和 $\mathrm{R}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{N}''}(F'F) \to R'R$ 兼容. □

注记 4.6.6 (P. Deligne 的定义) 根据命题 1.11.2 (iii), 导出函子在命题 4.6.4 的条件下表作

$$(\mathrm{R}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{N}'} F)(QX) \simeq \varinjlim_{(X \to Y) \in \mathrm{Ob}(S\mathcal{N}_{X/})} (Q'F)Y,$$
$$(\mathrm{L}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{N}'} F)(QX) \simeq \varprojlim_{(Y \to X) \in \mathrm{Ob}(S\mathcal{N}_{/X}^{\mathrm{op}})} (Q'F)Y,$$

而且这些极限可以被某个 Y 取到. 在 [23, Exp XVII, Déf 1.2.1] 中, Deligne 将 $(\mathrm{R}F_{\mathcal{N}}^{\mathcal{N}'}F)(QX)$ 和 $(\mathrm{L}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{N}'}F)(QX)$ 分别定义为上述极限, 条件是这些极限确实被某个 Y 取到. 此定义的优势之一在于它可以施于单个对象 X, 因而能够 "部分地" 定义.

以上表达式同时描述了导出函子作为 Kan 延拓所自带的态射 $Q'F \to (\mathrm{R}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{N}'}F)Q$ 和 $(\mathrm{L}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{N}'}F)Q \to Q'F$, 它们分别对应于在 $\varinjlim$ 和 $\varprojlim$ 中取 $Y = X$ 的项.

焦点转向双函子. 设 $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}'$ 为三角范畴, 其平移函子分别记为 T_1, T_2, T'.

定义 4.6.7 从 $\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$ 到 $\mathcal{D}'$ 的**三角双函子**意谓以下资料.

- ◇ 双函子 $F : \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \to \mathcal{D}'$, 它对每个变元都带有三角函子的结构;
- ◇ 下图对所有 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}_1)$ 和 $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}_2)$ 反交换 (亦即: 两路合成差一个负号)[3]

$$\begin{tikzcd}
F(T_1X, T_2Y) \arrow[r] \arrow[d] & T'F(X, T_2Y) \arrow[d] \\
T'F(T_1X, Y) \arrow[r] & (T')^2(X, Y)
\end{tikzcd}$$

其中的箭头来自于 F 对两个变元的三角函子结构.

承上, 分别取 $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$, $\mathcal{N}'$ 为 $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}'$ 的饱和子三角范畴, 相应的局部化函子记为 $Q_i : \mathcal{D}_i \to \mathcal{D}_i/\mathcal{N}_i$ $(i = 1, 2)$ 和 $Q' : \mathcal{D}' \to \mathcal{D}'/\mathcal{N}'$. 今后取定三角双函子 $F : \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \to \mathcal{D}'$, 对之可探讨下图的函子延拓问题.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \arrow[r, "F"] \arrow[d, "(Q_1, Q_2)"'] & \mathcal{D}' \arrow[d, "Q'"] \\
(\mathcal{D}_1/\mathcal{N}_1) \times (\mathcal{D}_2/\mathcal{N}_2) \arrow[r, dashed] & \mathcal{D}'/\mathcal{N}'
\end{tikzcd}$$

既然 (Q_1, Q_2) 是对乘性系 $S\mathcal{N}_1 \times S\mathcal{N}_2$ 的局部化 (注记 1.10.20), 依然能够谈论函子 $Q'F$ 沿 (Q_1, Q_2) 的两种 Kan 延拓.

定义 4.6.8 (三角双函子的导出函子) 对于上述资料, 若

$$\mathrm{Lan}_{(Q_1,Q_2)}(Q'F), \quad (\text{或 } \mathrm{Ran}_{(Q_1,Q_2)}(Q'F))$$

存在而且是三角双函子, 则记之为 $\mathrm{R}_{\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2}^{\mathcal{N}'}F$ (或 $\mathrm{L}_{\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2}^{\mathcal{N}'}F$), 称为 F 的右导出双函子 (或左导出双函子).

定义 4.6.9 考虑三角双函子 $F : \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \to \mathcal{D}'$ 和 $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}'$ 如上. 设 $\mathcal{I}_i$ 为 $\mathcal{D}_i$ 的子三角范畴. 当以下性质同步成立时, 我们称 $(\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2)$ 是 F-内射 (或 F-投射) 的:

- ◇ 对所有 $X_1 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I}_1)$, 子三角范畴 $\mathcal{I}_2$ 是 $F(X_1, \cdot)$-内射 (或投射) 的;
- ◇ 对所有 $X_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I}_2)$, 子三角范畴 $\mathcal{I}_1$ 是 $F(\cdot, X_2)$-内射 (或投射) 的.

[3] 请对照命题 3.5.8.

给定 $\mathcal{I}_j$ 如上 $(j=1,2)$, Verdier 局部化的泛性质给出 $i_j : \mathcal{I}_j/(\mathcal{I}_j \cap \mathcal{N}_j) \to \mathcal{D}_j/\mathcal{N}_j$. 以下是命题 4.6.4 的对应物.

命题 4.6.10 设 $(\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2)$ 是 F-内射的.

(i) 右导出双函子 $\mathrm{R}F := \mathrm{R}^{\mathcal{N}'}_{\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2} F$ 存在, 适当选取可使下图交换:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}_1/\mathcal{N}_1 \times \mathcal{D}_2/\mathcal{N}_2 \arrow[r, "\mathrm{R}F"] & \mathcal{D}'/\mathcal{N}' \\
\mathcal{I}_1/(\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{N}_1) \times \mathcal{I}_2/(\mathcal{I}_2 \cap \mathcal{N}_2) \arrow[u, "i=(i_1,i_2):\text{等价}"] \arrow[ur, "F^\flat"'] &
\end{tikzcd}$$

其中 $F^\flat$ 由局部化的泛性质确定.

(ii) 对于 $X_1 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I}_1)$, $X_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I}_2)$, 我们有典范同构

$$(\mathrm{R}F)(Q_1X_1, \cdot) \simeq \mathrm{R}^{\mathcal{N}'}_{\mathcal{N}_2} F(X_1, \cdot), \quad (\mathrm{R}F)(\cdot, Q_2X_2) \simeq \mathrm{R}^{\mathcal{N}'}_{\mathcal{N}_1} F(\cdot, X_2).$$

如以 F-投射代替 F-内射, 以 $\mathrm{L}F$ 代替 $\mathrm{R}F$, 相应的陈述依然成立.

证明 处理 F-内射情形即可. 首先, 命题 1.11.2 (i) 蕴涵 i 是等价; 而由条件可知 $Q'F$ 映 $S\mathcal{N}_1 \cap \mathrm{Mor}(\mathcal{I}_1) \times S\mathcal{N}_2 \cap \mathrm{Mor}(\mathcal{I}_2)$ 为同构, 对两个变元各自验证便是. 命题 1.11.2 (ii) 蕴涵 $Q'F$ 有沿 (Q_1, Q_2) 的左 Kan 延拓 $\mathrm{R}F$ 使上图交换. 这也同时由局部化的泛性质确定了 $F^\flat$.

接着说明 $\mathrm{R}F$ 是三角双函子: 鉴于命题 4.3.2, 相关性质容易通过等价 i 提升到 $\mathcal{I}_1 \times \mathcal{I}_2$ 上对 F 来检验. 至此得出 (i).

考虑 (ii). 基于对称性, 处理 $X_1 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I}_1)$ 固定的情况即可. 此时 $F^\flat(Q_1X_1, \cdot) : \mathcal{I}_2/\mathcal{I}_2 \cap \mathcal{N}_2 \to \mathcal{D}'/\mathcal{N}'$ 是由 $Q'F(X_1, \cdot)$ 按照 Verdier 局部化的泛性质确定的, 而且有函子的交换图表

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}_2/\mathcal{N}_2 \arrow[r, "\mathrm{R}F(Q_1X_1,\cdot)"] & \mathcal{D}'/\mathcal{N}' \\
\mathcal{I}_2/\mathcal{I}_2 \cap \mathcal{N}_2 \arrow[u, "i_2:\text{等价}"] \arrow[ur, "F^\flat(Q_1X_1,\cdot)"] & \mathcal{I}_2 \arrow[l] \arrow[u, "Q'F(X_1,\cdot)"']
\end{tikzcd}$$

既然 $\mathcal{I}_2$ 是 $F(X_1, \cdot)$-内射的, 对照命题 4.6.4 可知 $(\mathrm{R}F)(Q_1X_1, \cdot)$ 即 $\mathrm{R}^{\mathcal{N}'}_{\mathcal{N}_2} F(X_1, \cdot)$. $\square$

一旦假定存在 F-内射的 $(\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2)$ (或 F-投射的 $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$), 注记 4.6.6 的极限表达式也适用于 F 的左 (或右) 导出双函子.

4.7 导出函子通论

设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}'$ 为 Abel 范畴, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ 为选定的加性函子. 现将 §4.6 的理论, 特别是 (4.6.1) 的情境施于

$$\begin{tikzcd} \mathsf{K}^\star(\mathcal{A}) \arrow[r, "\mathsf{K}^\star F"] \arrow[d, "Q"'] & \mathsf{K}^\star(\mathcal{A}') \arrow[d, "Q'"] \\ \mathsf{D}^\star(\mathcal{A}) & \mathsf{D}^\star(\mathcal{A}') \end{tikzcd} \qquad (\star \in \{+, -, \ \})$$

其中 Q 和 Q' 是三角范畴的局部化函子; $\mathsf{K}^\star F$ 是三角函子 (命题 4.4.3). 空上标 $\star =$ 对应于 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ 情形. 回忆到 $\mathsf{D}^\star(\mathcal{A}) = \mathsf{K}^\star(\mathcal{A})/\mathcal{N}^\star$, 其中 $\mathcal{N}^\star$ 是零调复形构成的饱和子三角范畴; 对 $\mathcal{A}'$ 亦同.

除非 F 正合, 一般不存在使上图交换的三角函子 $\mathsf{D}^\star(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}^\star(\mathcal{A}')$. 合理的办法是透过左/右两种 Kan 延拓, 分别研究定义 4.6.1 意义下的左/右导出函子.

定义 4.7.1 (导出范畴之间的导出函子) 给定 $\star \in \{+, -, \ \}$, 若

$$\begin{aligned} {}^\star\mathrm{R}F : \mathsf{D}^\star(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}^\star(\mathcal{A}') : &\quad \mathsf{K}^\star F \text{ 的右导出函子,} \quad \text{或} \\ {}^\star\mathrm{L}F : \mathsf{D}^\star(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}^\star(\mathcal{A}') : &\quad \mathsf{K}^\star F \text{ 的左导出函子,} \end{aligned}$$

存在, 则称之为 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ 的**右导出函子** (或 **左导出函子**). 在导出函子存在的前提下, 对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 定义

$$\begin{gathered} {}^\star\mathrm{R}^n F := \mathrm{H}^n \circ {}^\star\mathrm{R}F, \\ {}^\star\mathrm{L}^n F := \mathrm{H}^n \circ {}^\star\mathrm{L}F, \quad {}^\star\mathrm{L}_n F := {}^\star\mathrm{L}^{-n} F. \end{gathered}$$

它们是取值在 $\mathcal{A}'$ 的函子, 下标 n 是顾及研究左导出函子时所常用的链复形记法. 不致混淆时, 左上标 $\star$ 将经常省略.

例 4.7.2 (正合函子求导) 最简单的是 F 为正合函子的情形, 对所有 $\star \in \{+, -, \ \}$, 导出函子 ${}^\star\mathrm{R}F$ 和 ${}^\star\mathrm{L}F$ 总是存在; 因为此时 $\mathsf{K}^\star F$ 保持零调复形, 它们直接由局部化的泛性质确定.

定理 4.7.3 (导出函子的长正合列) 给定 $\star \in \{+, -, \ \}$. 在 ${}^\star\mathrm{R}F$ 或 ${}^\star\mathrm{L}F$ 存在的前提下, 对 $\mathsf{D}^\star(\mathcal{A})$ 的所有好三角 $X \to Y \to Z \xrightarrow{+1}$ 皆有典范长正合列

$$\begin{gathered} \cdots \to {}^\star\mathrm{R}^{n-1}F(Z) \to {}^\star\mathrm{R}^n F(X) \to {}^\star\mathrm{R}^n F(Y) \to {}^\star\mathrm{R}^n F(Z) \to {}^\star\mathrm{R}^{n+1}F(X) \to \cdots, \\ \cdots \to {}^\star\mathrm{L}_{n+1}F(Z) \to {}^\star\mathrm{L}_n F(X) \to {}^\star\mathrm{L}_n F(Y) \to {}^\star\mathrm{L}_n F(Z) \to {}^\star\mathrm{L}_{n-1}F(X) \to \cdots. \end{gathered}$$

证明 按定义, ${}^\star\mathrm{R}F$ 或 ${}^\star\mathrm{L}F$ 都是三角函子, 再应用上同调函子 H^0 便是. □

如何确保导出函子的存在性, 并加以计算? 命题 4.6.4 已经含藏一般的思路: 给定 $\star \in \{+,-,\ \}$, 取 $\mathcal{N}^*$ 如定义 4.4.6. 我们寻求 $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$ 的一个子三角范畴 $\mathcal{I}$, 希冀对函子图表

$$\mathsf{D}^\star(\mathcal{A}) = \mathsf{K}^\star(\mathcal{A})/\mathcal{N}^\star \xleftarrow{\text{等价}} \mathcal{I}/\mathcal{I}\cap\mathcal{N}^\star \xrightarrow{\text{局部化的泛性质}} \mathsf{K}^\star(\mathcal{A}')/\mathcal{N}^\star = \mathsf{D}^\star(\mathcal{A}')$$

取合成来定义 ${}^\star\mathrm{R}F$ 或 ${}^\star\mathrm{L}F$. 如何取 $\mathcal{I}$? 它应当是下述的 F-内射 (或 F-投射) 子范畴.

约定 4.7.4 取定 $\star$. 若 $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$ 的子三角范畴 $\mathcal{I}$ 是定义 4.6.3 所谓的 $\mathsf{K}^\star F$-内射 (或 $\mathsf{K}^\star F$-投射) 子三角范畴, 则简称 $\mathcal{I}$ 为 F-内射 (或 F-投射) 子范畴.

一旦存在 $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$ 的 F-内射 (或 F-投射) 子范畴 $\mathcal{I}$, 命题 4.6.4 便确保 ${}^\star\mathrm{R}F$ (或 ${}^\star\mathrm{L}F$) 存在, 它拉回 $\mathcal{I}$ 上同构于 $Q'\mathsf{K}^\star F$, 而注记 4.6.6 的极限表达式进一步确定导出函子作为 Kan 延拓所自带的典范态射

$$Q'\mathsf{K}^\star F \to ({}^\star\mathrm{R}F)Q \quad \text{或} \quad ({}^\star\mathrm{L}F)Q \to Q'(\mathsf{K}^\star F). \tag{4.7.1}$$

建立于 §4.6 的一般理论皆可直接调用. 譬如考虑 Abel 范畴之间的加性函子

$$\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{A}' \xrightarrow{F'} \mathcal{A}'',$$

在所论的导出函子存在的前提下, 我们有典范态射

$${}^\star\mathrm{R}(F'F) \to ({}^\star\mathrm{R}F')({}^\star\mathrm{R}F), \quad ({}^\star\mathrm{L}F')({}^\star\mathrm{L}F) \to {}^\star\mathrm{L}(F'F),$$

而定理 4.6.5 提供了同构的充分条件.

此外我们还有以下的相容性.

引理 4.7.5 若 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 和 $\mathsf{K}^+(\mathcal{A})$ 有 F-内射子范畴, 则 $\mathrm{R}F$ 限制到 $\mathsf{D}^+(\mathcal{A})$ 给出 ${}^+\mathrm{R}F$. 对于 F-投射子范畴, $\mathrm{L}F$ 和 ${}^-\mathrm{L}F$ 亦有相应的结果.

证明 首先处理 $\mathrm{R}F$. 设 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{K}^+(\mathcal{A}))$. 记 $\mathrm{qis}_{X/}$ 为 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 中所有拟同构 $X \to Y$ 所成范畴; 记 $\mathrm{qis}^+_{X/}$ 为 $\mathsf{K}^+(\mathcal{A})$ 的版本. 注记 4.6.6 给出典范同构

$$\mathrm{R}F(QX) \simeq \varinjlim_{[X\to Y]\in\mathrm{Ob}(\mathrm{qis}_{X/})} (Q'\mathsf{K}F)(Y), \tag{4.7.2}$$

对于 $\mathrm{qis}_{X/}$ 的任意对象 $X \to Y$, 当 $m \ll 0$ (仅关乎 X) 时 $X \to Y \to \tau^{\geq m}Y$ 是 $\mathrm{qis}^+_{X/}$ 的对象. 引理 1.10.7 确保 $\mathrm{qis}_{X/}$ 滤过, 故命题 1.6.8 确保子范畴 $\mathrm{qis}^+_{X/}$ 与之共尾. 于是 (4.7.2) 的 $\varinjlim$ 可在 $\mathrm{qis}^+_{X/}$ 上取 (命题 1.6.5), 然而这给出的无非 ${}^+\mathrm{R}F(QX)$.

对于 $\mathrm{L}F$, 改用注记 4.6.6 的左导出版本, 并且调换截断方向即足. □

接着谈谈约定 3.5.9 介绍的双函子. 对此, §4.6 同样已预备了适用的理论. 以下设 $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ 和 $\mathcal{B}$ 都是 Abel 范畴, 双函子 $F: \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \to \mathcal{B}$ 对每个变元都是加性的. 按定

义–命题 3.5.10 的方式定义函子

$$\begin{aligned} \mathsf{C}_{\oplus}F &:= \mathrm{tot}_{\oplus} \circ \mathsf{C}^2 F \quad (\text{若 } \mathcal{B} \text{ 有可数余积}), \\ \mathsf{C}_{\Pi}F &:= \mathrm{tot}_{\Pi} \circ \mathsf{C}^2 F \quad (\text{若 } \mathcal{B} \text{ 有可数积}). \end{aligned} \tag{4.7.3}$$

根据命题 3.5.11, 它们分解为 $\mathsf{K}(\cdot)$ 层次的函子 $\mathsf{K}_{\oplus}F$ 和 $\mathsf{K}_{\Pi}F$.

根据命题 3.5.11 之下的说明, 以及命题 3.5.8 的反交换图表,

$$\mathsf{K}_{\Pi}F,\ \mathsf{K}_{\oplus}F : \mathsf{K}^{\star}(\mathcal{A}_1) \times \mathsf{K}^{\star}(\mathcal{A}_2) \to \mathsf{K}^{\star}(\mathcal{B})$$

皆是定义 4.6.7 意义下的三角双函子. 另外命 $Q_i : \mathsf{K}(\mathcal{A}_i) \to \mathsf{D}(\mathcal{A}_i)$ 和 $Q : \mathsf{K}(\mathcal{B}) \to \mathsf{D}(\mathcal{B})$ 为局部化函子 $(i = 1, 2)$. 将一切代入定义 4.6.8 的框架, 其中 $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}'$ 取为 $\mathsf{K}^{\star}(\mathcal{A}_1)$, $\mathsf{K}^{\star}(\mathcal{A}_2)$, $\mathsf{K}^{\star}(\mathcal{B})$, 而其中的零调复形构成 $\mathcal{N}_1^{\star}$, $\mathcal{N}_2^{\star}$, $(\mathcal{N}')^{\star}$.

定义 4.7.6 (导出双函子) 取定 $\star \in \{+, -, \ \}$ 并考虑加性双函子 $F : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \to \mathcal{B}$.

- ◇ 设 $\mathcal{B}$ 有可数积. 若 $\mathsf{K}_{\Pi}F$ 在定义 4.6.8 下的右导出双函子 $\mathsf{D}^{\star}(\mathcal{A}_1) \times \mathsf{D}^{\star}(\mathcal{A}_2) \to \mathsf{D}^{\star}(\mathcal{B})$ 存在, 则称为 F 的**右导出双函子**, 记为 ${}^{\star}\mathrm{R}F$.
- ◇ 设 $\mathcal{B}$ 有可数余积. 若 $\mathsf{K}_{\oplus}F$ 的左导出双函子 $\mathsf{D}^{\star}(\mathcal{A}_1) \times \mathsf{D}^{\star}(\mathcal{A}_2) \to \mathsf{D}^{\star}(\mathcal{B})$ 存在, 则称为 F 的**左导出双函子**, 记为 ${}^{\star}\mathrm{L}F$.

依然记 ${}^{\star}\mathrm{R}^n F := \mathrm{H}^n \circ {}^{\star}\mathrm{R}F$ 和 ${}^{\star}\mathrm{L}_n F := \mathrm{H}^{-n} \circ {}^{\star}\mathrm{L}F$.

取定 $\star \in \{+, -, \ \}$, 设 $\mathcal{I}_i$ 是 $\mathsf{K}^{\star}(\mathcal{A}_i)$ 的子三角范畴, $i = 1, 2$. 按往例, 若 $(\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2)$ 是定义 4.6.9 所谓的 $\mathsf{K}^{\star}F$-内射 (或投射) 子范畴, 则迳称 $(\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2)$ 是 F-内射 (或投射) 的. 代入命题 4.6.10 立得以下结论, 其中的同构都是典范的.

- ◇ 若 $(\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2)$ 是 F-内射的, 则 ${}^{\star}\mathrm{R}F$ 存在, 而且
$$(X_1, X_2) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I}_1) \times \mathrm{Ob}(\mathcal{I}_2) \implies {}^{\star}\mathrm{R}F(Q_1X_1, Q_2X_2) \simeq Q\mathsf{K}_{\Pi}F(X_1, X_2). \tag{4.7.4}$$
- ◇ 若 $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ 是 F-投射的, 则 ${}^{\star}\mathrm{L}F$ 存在, 而且
$$(X_1, X_2) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{P}_1) \times \mathrm{Ob}(\mathcal{P}_2) \implies {}^{\star}\mathrm{L}F(Q_1X_1, Q_2X_2) \simeq Q\mathsf{K}_{\oplus}F(X_1, X_2). \tag{4.7.5}$$

接着讨论导出双函子上的一种乘法. 先介绍它在复形层面的版本. 符号照旧, 但要求 F 对每个变元都是右正合的. 对所有复形 X, 记 $Z^n(X) := \ker(d_X^n)$ 和 $B^n(X) := \mathrm{im}(d_X^{n-1})$. 对所有 $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ 皆有自明的态射

$$F\left(Z^p(X_1), Z^q(X_2)\right) \to Z^{p+q}\left(\mathsf{C}_{\oplus}F(X_1, X_2)\right);$$

它将 $F(B^p(X_1,), Z^q(X_2))$ 和 $F(Z^p(X_1), B^q(X_2))$ 的像都映入 $B^{p+q}\left(\mathsf{C}_{\oplus}F(X_1, X_2)\right)$. 应用右正合条件遂有典范态射

$$\kappa : F\left(\mathrm{H}^p(X_1), \mathrm{H}^q(X_2)\right) \to \mathrm{H}^{p+q}\left(\mathsf{C}_{\oplus}F(X_1, X_2)\right);$$

同调 Künneth 定理 3.14.12 之前的讨论是此构造的特例, 对应于 $F = \otimes_R$.

现将条件改为 F 对每个变元都左正合. 将以上构造对偶化, 得到典范态射

$$\lambda : \mathrm{H}^{p+q}\left(\mathsf{C}_{\Pi} F(X_1, X_2)\right) \to F\left(\mathrm{H}^p(X_1), \mathrm{H}^q(X_2)\right).$$

以上默认所论的可数 $\oplus$ 或 $\prod$ 存在. 由于此处仅关心上同调, 也不妨以 K 代 C.

命题 4.7.7 设 F 对每个变元都是右正合 (或左正合) 的, $\star \in \{+, -, \ \}$ 且存在 F-投射 (或 F-内射) 的 $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ (或 $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2)$), 则有典范态射

$$F\left(\mathrm{H}^p(\cdot), \mathrm{H}^q(\cdot)\right) \to \mathrm{H}^{p+q}\,{}^{\star}\mathrm{L}F \quad \text{或} \quad \mathrm{H}^{p+q}\,{}^{\star}\mathrm{R}F \to F\left(\mathrm{H}^p(\cdot), \mathrm{H}^q(\cdot)\right),$$

两边都是从 $\mathsf{D}^{\star}(\mathcal{A}_1) \times \mathsf{D}^{\star}(\mathcal{A}_2)$ 到 $\mathcal{B}$ 的函子, 它们由交换图表刻画

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{H}^{p+q}\,\mathsf{K}_{\oplus} F(X_1, X_2) \\
F\left(\mathrm{H}^p(X_1), \mathrm{H}^q(X_2)\right) \arrow[r] \arrow[ur, "\kappa"] & \mathrm{H}^{p+q}\,{}^{\star}\mathrm{L}F(Q_1X_1, Q_2X_2) \arrow[u, "\mathrm{can}"']
\end{tikzcd}$$

或

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{H}^{p+q}\,\mathsf{K}_{\Pi} F(X_1, X_2) \arrow[dl, "\lambda"'] \arrow[d, "\mathrm{can}"] \\
F\left(\mathrm{H}^p(X_1), \mathrm{H}^q(X_2)\right) & \mathrm{H}^{p+q}\,{}^{\star}\mathrm{R}F(Q_1X_1, Q_2X_2) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

其中取 $X_i \in \mathrm{Ob}(\mathsf{K}^{\star}(\mathcal{A}_i))$. 标为 can 者是导出函子作为 Kan 延拓自带的典范态射, 单变元情形可参见 (4.7.1).

证明 基于对偶性, 以下仅讨论关于 κ 的情形. 留意到除了 $\mathsf{K}_{\oplus} F(X_1, X_2)$, 图表另两个顶点只依赖 Q_1X_1 和 Q_2X_2.

选定 $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$. 由于图表里的所有态射都具有函子性, 基于 $\mathcal{P}_i/\mathcal{P}_i \cap \mathcal{N}_i^{\star}$ 和 $\mathsf{D}^{\star}(\mathcal{A}_i)$ 的等价性, 问题易化约为在 $X_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{P}_i)$ 的情形确定所求态射, 读者可以作图检验. 但此时 ${}^{\star}\mathrm{L}F(Q_1X_1, Q_2X_2) = \mathsf{K}_{\oplus} F(X_1, X_2)$, 断言归于平凡. □

简言之, 一切都可以通过取解消来计算, 最终结果无关选取.

4.8 有界导出函子

本节旨在说明如何以内射解消和投射解消来研究 ${}^{+}\mathrm{R}F$ 和 ${}^{-}\mathrm{L}F$. 无界导出范畴的情形留待 §4.11 讨论.

约定 4.8.1 本节将聚焦于 $\star \in \{+, -\}$ 的情形, 并且采行以下惯例.

◇ 对右导出函子一律取 $\star = +$, 采用简写 $\mathrm{R}F := {}^{+}\mathrm{R}F : \mathsf{D}^{+}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}^{+}(\mathcal{A}')$.

◇ 对左导出函子一律取 $\star = -$, 采用简写 $\mathrm{L}F := {}^{-}\mathrm{L}F : \mathsf{D}^{-}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}^{-}(\mathcal{A}')$.

鉴于引理 4.7.5, 这应当不致混淆.

定义–命题 4.8.2 设 $\mathcal{A}^\flat$ 为 $\mathcal{A}$ 的加性全子范畴. 当下列条件成立时, 称 $\mathcal{A}^\flat$ 相对于 F 是 **I 型**的, 此时 $\mathsf{K}^{+}\left(\mathcal{A}^\flat\right)$ 是 $\mathsf{K}^{+}(\mathcal{A})$ 的 F-内射子范畴:

(I1) 对任何 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ 都存在单态射 $X \hookrightarrow I$ 使得 $I \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}^\flat)$;

(I2) 若 $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ 是 $\mathcal{A}$ 的短正合列, $X', X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}^\flat)$, 则 X'' 亦然, 此时 $0 \to FX' \to FX \to FX'' \to 0$ 正合.

对偶地, 当下列条件成立时, 称 $\mathcal{A}^\flat$ 相对于 F 是 **P 型**的, 此时 $\mathsf{K}^{+}(\mathcal{A}^\flat)$ 是 $\mathsf{K}^{+}(\mathcal{A})$ 的 F-投射子范畴:

(P1) 对任何 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ 都存在满态射 $P \twoheadrightarrow X$ 使得 $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}^\flat)$;

(P2) 若 $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ 是 $\mathcal{A}$ 的短正合列, $X, X'' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}^\flat)$, 则 X' 亦然, 此时 $0 \to FX' \to FX \to FX'' \to 0$ 正合.

证明 仅论 I 型版本. 首先 $\mathsf{K}^{+}(\mathcal{A}^\flat)$ 是 $\mathsf{K}^{+}(\mathcal{A})$ 的子三角范畴 (推论 4.4.4). 应用定理 3.11.3 可知对任何 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{K}^{+}(\mathcal{A}))$ 都存在拟同构 $X \to I$ 使得 $I \in \mathsf{K}^{+}(\mathcal{A}^\flat)$, 这是 F-内射子范畴的解消条件. 剩余工作是说明 $X \in \mathsf{K}^{+}(\mathcal{A}^\flat)$ 零调蕴涵 FX 也零调.

对任意 $n \in \mathbb{Z}$ 皆有短正合列 $0 \to \ker(d^n) \to X^n \xrightarrow{d^n} \ker(d^{n+1}) \to 0$. 当 $n \ll 0$ 时 $\ker(d^n) = X^n = 0$; 利用 (I2) 递归地对所有 n 得到 $\ker(d^n) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}^\flat)$ 连同 $\mathcal{A}'$ 中的短正合列

$$0 \to F\ker(d^n) \to FX^n \xrightarrow{Fd^n} F\ker(d^{n+1}) \to 0.$$

这些短正合列的拼接表明 FX 零调. □

所谓 I 型或 P 型只是权宜称呼. 给出 F-内射或 F-投射子范畴的 $\mathcal{A}^\flat$ 实则有完整的刻画, 见 [10, Proposition 13.3.5].

以下结果说明导出函子可以透过用 I 型或 P 型全子范畴作解消来计算.

定理 4.8.3 若存在 $\mathcal{A}$ 的加性全子范畴 $\mathcal{A}^\flat$, 使得它相对于加性函子 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ 是 I 型的 (或 P 型的), 则导出函子 $\mathrm{R}F$ (或 $\mathrm{L}F$) 存在. 具体地说:

(i) 对任意 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{K}^{+}(\mathcal{A}))$ (或 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{K}^{-}(\mathcal{A}))$), 存在拟同构 $X \to I$ (或 $P \to X$) 使得 $I \in \mathrm{Ob}(\mathsf{K}^{+}(\mathcal{A}^\flat))$ (或 $P \in \mathrm{Ob}(\mathsf{K}^{-}(\mathcal{A}^\flat))$);

(ii) 对于如 (i) 的拟同构, (4.6.2) 中的态射给出

$$\mathrm{R}F(QX) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}F(QI) \xleftarrow{\sim} Q'\mathsf{K}^{+}F(I), \quad \mathrm{L}F(QX) \xleftarrow{\sim} \mathrm{L}F(QP) \xrightarrow{\sim} Q'\mathsf{K}^{-}F(P);$$

(iii) 函子 $\mathrm{R}F$ 限制为 $\mathsf{D}^{\geq 0}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}^{\geq 0}(\mathcal{A}')$ (或 $\mathrm{L}F$ 限制为 $\mathsf{D}^{\leq 0}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}^{\leq 0}(\mathcal{A}')$);

(iv) 设 F 左正合 (或右正合); 若 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, 则 (4.6.2) 中的态射给出同构 $FX \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}^0F(QX)$ (或 $FX \xleftarrow{\sim} \mathrm{L}_0F(QX)$);

(v) 若 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}^\flat)$, 则 $n > 0$ 时 $\mathrm{R}^nF(X) = 0$ (或 $\mathrm{L}_nF(X) = 0$).

证明 仅论 $\mathrm{R}F$ 的情形. 已知 $\mathsf{K}^+(\mathcal{A}^\flat)$ 是 F-内射的, 故拟同构 $X \to I$ 总是存在, 而 $\mathrm{R}F$ 的存在性和 $\mathrm{R}F(QX) \simeq Q'\mathsf{K}^+F(I)$ 不外是重述命题 4.6.4. 此即 (i) 和 (ii).

其次探讨 (iii). 若 $X \in \mathsf{D}^{\geq 0}(\mathcal{A})$, 则它同构于 $\mathsf{C}^{\geq 0}(\mathcal{A})$ 的对象. 回顾定理 3.11.3 知可取拟同构 $X \to I$ 使得 $I \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^{\geq 0}(\mathcal{A}^\flat))$. 因此

$$\mathrm{R}F(QX) \simeq Q'\mathsf{K}^+F(I) \in \mathrm{Ob}\left(\mathsf{D}^{\geq 0}(\mathcal{A}')\right).$$

若进一步要求 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}^\flat)$, 则拟同构 $X \to I$ 可以取为 id_X, 此时 $\mathrm{R}F(QX) = Q'\mathsf{K}^+F(X) = Q'FX$ 集中于零次项. 由此顺带证出 (v).

最后探讨 (iv). 设 F 左正合, 对 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ 取正合列 $0 \to X \to I^0 \to I^1 \to \cdots$, 使得每个 I^n 都属于 $\mathrm{Ob}(\mathcal{A}^\flat)$. 取 $I := [I^0 \to I^1 \to \cdots]$, 根据 (ii) 和左正合性遂有 $FX \xrightarrow{\sim} \ker\left[Fd_I^0 : F(I^0) \to F(I^1)\right] \simeq \mathrm{R}^0F(X)$. 明所欲证. □

例 4.8.4 (内射对象与投射对象) 设 $\mathcal{A}$ 有足够的内射对象, 取 $\mathcal{A}^\flat$ 为内射对象构成的加性全子范畴, 则它相对于所有 F 都是 I 型的: 条件 (I1) 自带, 至于 (I2), 引理 2.8.13 表明条件中的短正合列分裂, 从而 $X' \oplus X''$ 是内射对象, 将此代入引理 2.8.14 可知 X'' 也是内射对象.

对偶地, 设 $\mathcal{A}$ 有足够的投射对象, 它们构成的加性全子范畴 $\mathcal{A}^\flat$ 相对于所有 F 都是 P 型的.

例 4.8.4 可以用来会通 §3.12 对导出函子的经典定义. 假定 $\mathcal{A}$ 有足够的内射对象. 考虑右导出函子的限制 $\mathrm{R}^nF|_{\mathcal{A}}$. 由于 $\mathcal{A}$ 的短正合列典范地扩充为好三角 (命题 4.4.7), 长正合列立刻使 $(\mathrm{R}^nF|_{\mathcal{A}})_{n\geq 0}$ 成为定义 3.12.5 所谓的上同调 δ-函子; 对偶地, 左导出函子给出同调 δ-函子 $(\mathrm{L}_nF|_{\mathcal{A}})_{n\geq 0}$.

命题 4.8.5 *设 F 左正合 (或右正合), $\mathcal{A}$ 有足够的内射对象 (或投射对象), 则此时 $\mathrm{R}^nF : \mathsf{C}^+(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}'$ (或 $\mathrm{L}_nF : \mathsf{C}^-(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}'$) 等于先前定义 3.12.1 的版本.*

推而广之, 只要存在 I 型 (或 P 型) 的子范畴 $\mathcal{A}^\flat$ (定义–命题 4.8.2), 则 $(\mathrm{R}^nF|_{\mathcal{A}})_{n\geq 0}$ (或 $(\mathrm{L}_nF|_{\mathcal{A}})_{n\geq 0}$) 是定义 3.12.12 所谓的泛 δ-函子.

证明 仅考虑左正合情形. 对给定之 $X \in \mathsf{C}^+(\mathcal{A})$ 选取内射解消 $X \to I$, 则定理 4.8.3 (ii) 对每个 $n \in \mathbb{Z}$ 给出典范同构 $\mathrm{R}^nF(QX) \simeq \mathrm{H}^n\,\mathsf{K}^+F(I)$.

推而广之, 设 $\mathcal{A}^\flat$ 相对于 F 是 I 型的. 为了证明 $(\mathrm{R}^nF|_{\mathcal{A}})_{n\geq 0}$ 的泛性, 鉴于命题 3.12.14, 问题归结为证 $n > 0$ 时 $\mathrm{R}^nF|_{\mathcal{A}}$ 可拭; 然而这是定义–命题 4.8.2 的条件 (I1) 和定理 4.8.3 (v) 的直接结论. □

研究复合函子求导时往往需要一类更大的子范畴来作解消. 为此需要一则概念.

定义 4.8.6 设 $\mathrm{R}F$ (或 $\mathrm{L}F$) 存在. 对于 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, 若 $\mathrm{R}F(X)$ (或 $\mathrm{L}F(X)$) 是 $\mathsf{D}^{\geq 0}(\mathcal{A}') \cap \mathsf{D}^{\leq 0}(\mathcal{A}') \simeq \mathcal{A}'$ 的对象, 则称 X 是 $\mathcal{A}$ 的 ***F*-零调对象**.

以下结果表明导出函子可以由 F-零调解消来计算, 请参照推论 3.12.10.

推论 4.8.7 设 $\mathcal{A}$ 的加性全子范畴 $\mathcal{A}^\flat$ 相对于 F 是 I 型 (或 P 型) 的. 定义 $\mathcal{A}^\natural$ 为 $\mathcal{A}$ 的所有 F-零调对象构成的加性全子范畴, 则

(i) $\mathcal{A}^\natural \supset \mathcal{A}^\flat$;

(ii) $\mathcal{A}^\natural$ 也是 I 型 (或 P 型) 的;

(iii) 给定拟同构 $X \to I$ (或 $P \to X$), 其中 $I \in \mathrm{Ob}(\mathsf{K}^+(\mathcal{A}^\natural))$ (或 $P \in \mathrm{Ob}(\mathsf{K}^-(\mathcal{A}^\natural))$), 则 (4.6.2) 中的态射给出

$$\mathrm{R}F(QX) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}F(QI) \xleftarrow{\sim} Q'\mathsf{K}^+F(I), \quad \mathrm{L}F(QX) \xleftarrow{\sim} \mathrm{L}F(QP) \xrightarrow{\sim} Q'\mathsf{K}^-F(P).$$

证明 定理 4.8.3 (v) 蕴涵 (i). 条件 (I1) 或 (P1) 因而也对 $\mathcal{A}^\natural$ 成立. 以下考虑 (I2): 设 $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ 是 $\mathcal{A}$ 的短正合列, X', X 都是 F-零调的. 代入定理 4.7.3 的长正合列, 可得正合列

$$\underbrace{\mathrm{R}^n F(X)}_{=0} \to \mathrm{R}^n F(X'') \to \underbrace{\mathrm{R}^{n+1} F(X')}_{=0}, \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq 1},$$

从而 X'' 是 F-零调的; 另一方面, 长正合列的 $n = 0$ 部分连同 $\mathrm{R}^1F(X') = 0$ 则给出 $0 \to FX' \to FX \to FX'' \to 0$ 正合. 至于 (P2) 的验证则与此对偶. 此即 (ii).

最后, (iii) 是对 $\mathcal{A}^\natural$ 应用定理 4.8.3 (ii) 的产物. □

现在来阐述复合函子的求导. 基本工具是先前的定理 4.6.5.

定理 4.8.8 (复合函子求导) 考虑 Abel 范畴之间的加性函子

$$\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{A}' \xrightarrow{F'} \mathcal{A}''.$$

设有 $\mathcal{A}$ 的全子范畴 $\mathcal{A}^\flat$ 和 $\mathcal{A}'$ 的全子范畴 $(\mathcal{A}')^\flat$, 它们相对于 F 和 F' 都是 I 型的 (定义–命题 4.8.2), 而且 F 映 $\mathcal{A}^\flat$ 的对象为 $\mathcal{A}'$ 的 F'-零调对象, 则典范态射 $\mathrm{R}(F'F) \to (\mathrm{R}F')(\mathrm{R}F)$ 为同构.

对于左导出函子 $\mathrm{L}F$, $\mathrm{L}F'$ 和典范态射 $(\mathrm{L}F')(\mathrm{L}F) \to \mathrm{L}(F'F)$, 考虑 P 型子范畴, 则上述结果有相应的版本.

证明 仅论右导出函子情形. 命 $(\mathcal{A}')^\natural$ 为 $\mathcal{A}'$ 的 F'-零调对象构成的加性全子范畴. 推论 4.8.7 连同定义–命题 4.8.2 说明 $\mathsf{K}^+(\mathcal{A}^\flat)$ 和 $\mathsf{K}^+((\mathcal{A}')^\natural)$ 分别是 $\mathsf{K}^+(\mathcal{A})$ 和 $\mathsf{K}^+(\mathcal{A}')$ 的 F-内射子范畴. 代入定理 4.6.5 即可. □

运用定义 4.5.5 介绍的幅度, 可以对 F 的左/右导出函子分别定义维数的概念.

定义–命题 4.8.9 设 $F: \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ 左正合 (或右正合), 导出函子 $\mathrm{R}F$ (或 $\mathrm{L}F$) 存在并且按定理 4.8.3 的方式确定, 则存在 $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \sqcup \{+\infty\}$ 使得此导出函子的幅度包含于 $[0, d]$ (或 $[-d, 0]$); 所有这些 d 的下确界称为 $\mathrm{R}F$ (或 $\mathrm{L}F$) 的**维数**.

证明 仅论左正合情形. 定理 4.8.3 蕴涵 $\mathrm{R}F$ 限制为 $\mathcal{A} \to \mathsf{D}^{\geq 0}(\mathcal{A}')$, 因此其幅度包含于某个 $[0, d]$. □

作为推论, 如果 $\mathrm{R}F$ (或 $\mathrm{L}F$) 存在而且维数有限, 则它限制为 $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{A}')$.

例 4.8.10 (Tor 维数) 设 R 为环, X 为右 R-模. 考虑从 R-Mod 到 Ab 的右正合函子 $Y \mapsto X \otimes Y := X \underset{R}{\otimes} Y$. 因为 R-Mod 有足够的投射对象, $\mathrm{L}(X \otimes \cdot)$ 存在; $\mathrm{L}_n(X \otimes \cdot)$ 无非就是定义–命题 3.14.7 的 $\mathrm{Tor}_n^R(X, \cdot)$. 我们称 $\mathrm{L}(X \otimes \cdot)$ 的维数称为 X 的 Tor 维数. 对左 R-模当然也有类似的定义, 而且命题 3.14.9 蕴涵 R 交换时两者相等. 对导出张量积函子的讨论将在 §4.12 继续.

现在选定 Abel 范畴 $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{B}$ 和加性双函子

$$F: \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \to \mathcal{B}.$$

此处不要求 $\mathcal{B}$ 有可数余积或积, 原因在于 $\mathsf{C}^2 F$ 限制为

$$\mathsf{C}^2 F: \mathsf{C}^{\pm}(\mathcal{A}_1) \times \mathsf{C}^{\pm}(\mathcal{A}_2) \to \mathsf{C}^2_f(\mathcal{B}),$$

而在 $\mathsf{C}^2_f(\mathcal{B})$ 上, 全复形函子 $\mathrm{tot}_{\oplus} = \mathrm{tot}_{\Pi}$ 总有定义, 记为 tot. 同理, 记 $\mathsf{C}_{\oplus} F = \mathsf{C}_{\Pi} F$ 为 $\mathsf{C}F$, 记 $\mathsf{K}_{\oplus} F = \mathsf{K}_{\Pi} F$ 为 $\mathsf{K}F$.

为了研究定义 4.7.6 的导出双函子, 我们考虑 $\mathsf{K}^+(\mathcal{A}_i)$ (或 $\mathsf{K}^-(\mathcal{A}_i)$) 的子三角范畴 $\mathcal{I}_i$ (或 $\mathcal{P}_i$), 正负号照例取决于探讨的是右或左导出双函子, $i = 1, 2$. 如何选取 $(\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2)$ 或 $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$? 定义–命题 4.8.2 和 §3.10 的理论提供了以下答案.

引理 4.8.11 设 $\mathcal{A}_i^\flat$ 为 $\mathcal{A}_i$ 的加性全子范畴, $i = 1, 2$. 下列条件成立时 $\left(\mathsf{K}^+(\mathcal{A}_1^\flat), \mathsf{K}^+(\mathcal{A}_2^\flat)\right)$ (或 $\left(\mathsf{K}^-(\mathcal{A}_1^\flat), \mathsf{K}^-(\mathcal{A}_2^\flat)\right)$) 是 F-内射 (或 F-投射) 的:

- ◇ 当 $X_1 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}_1^\flat)$ 固定, $\mathcal{A}_2^\flat$ 相对于 $F(X_1, \cdot)$ 是 I 型 (或 P 型) 的;
- ◇ 当 $X_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}_2^\flat)$ 固定, $\mathcal{A}_1^\flat$ 相对于 $F(\cdot, X_2)$ 是 I 型 (或 P 型) 的.

作为特例, 若 $\mathcal{A}_1$ 和 $\mathcal{A}_2$ 皆有足够的内射对象 (或投射对象), 则 $\mathrm{R}F$ (或 $\mathrm{L}F$) 存在.

证明 取 $\mathcal{I}_i := \mathsf{K}^+(\mathcal{A}_i^\flat)$, 其中 $i = 1, 2$. 为了代入命题 4.6.10, 唯一待说明的是对于每个 $X_1 \in \mathrm{Ob}\left(\mathsf{K}^+(\mathcal{A}_1^\flat)\right)$, 函子 $(\mathsf{K}F)(X_1, \cdot): \mathsf{K}^+(\mathcal{A}_2^\flat) \to \mathsf{K}^+(\mathcal{B})$ 映零调复形为零调复形; 下标 1, 2 对换亦同.

任取 $Y \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^+(\mathcal{A}_2^\flat))$. 此时 $(\mathsf{K}^2 F)(X_1, Y)$ 属于 $\mathrm{Ob}\left(\mathsf{C}^2_f(\mathcal{B})\right)$. 按条件, 它的每一列 $F(X_1^p, Y^\bullet)$ 皆零调, 于是推论 3.10.7 蕴涵 $\mathsf{K}F(X_1, Y) := \mathrm{tot}(\mathsf{K}^2 F(X_1, Y))$ 正合. 明所欲证. □

一旦有了 F-内射 (或 F-投射) 子范畴, $\mathrm{R}F$ (或 $\mathrm{L}F$) 便可以按 (4.7.4) (或 (4.7.5)) 的方法来确定.

4.9 实例: RHom

本节继续取 $\mathcal{A}$ 为 Abel 范畴. 如果 $\mathcal{A}$ 还是 $\Bbbk$-线性的, 其中 $\Bbbk$ 是交换环, 则本节所有陈述中都可以用 $\Bbbk\text{-}\mathsf{Mod}$ 代 Ab, 以得到相应的升级版本.

双函子 $\mathrm{Hom} := \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{A} \to \mathsf{Ab}$ 对每个变元皆左正合. 为了探究它在定义 4.7.6 意义下的导出双函子, 我们需要一些准备. 首先, §4.8 的一般理论给出

$$\begin{aligned}\mathsf{C}\,\mathrm{Hom} : \mathsf{C}^+(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}) \times \mathsf{C}^+(\mathcal{A}) \to \mathsf{C}^+(\mathsf{Ab}),\\ \mathsf{K}\,\mathrm{Hom} : \mathsf{K}^+(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}) \times \mathsf{K}^+(\mathcal{A}) \to \mathsf{K}^+(\mathsf{Ab}).\end{aligned}$$

将所有局部化函子都记为 Q. 回忆定义–命题 3.4.1 给出的 $\sigma : \mathsf{C}^{\pm}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{C}^{\mp}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}}$; 它在三角范畴 $\mathsf{K}^{\pm}$ 和 $\mathsf{D}^{\pm}$ 的层次上诱导的同构仍记为 σ (命题 3.4.3, 4.4.16).

定义 4.9.1 若双函子 Hom 在定义 4.7.6 意义下的右导出双函子存在, 则记为 $\mathrm{RHom} = \mathrm{RHom}_{\mathcal{A}}$. 它既是从 $\mathsf{D}^+(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}) \times \mathsf{D}^+(\mathcal{A})$ 到 $\mathsf{D}^+(\mathsf{Ab})$ 的函子, 亦可通过 $\sigma : \mathsf{D}^{\pm}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{D}^{\mp}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}}$ 视同函子

$$\mathrm{RHom} : \mathsf{D}^-(\mathcal{A})^{\mathrm{op}} \times \mathsf{D}^+(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}^+(\mathsf{Ab}).$$

引理 4.9.2 记 $\mathcal{A}$ 中的内射 (或投射) 对象构成的全子范畴为 $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ (或 $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$).

- 若 $\mathcal{A}$ 有足够的内射对象, 则 $(\mathsf{K}^+(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}), \mathsf{K}^+(\mathcal{I}_{\mathcal{A}}))$ 是 Hom-内射的;
- 若 $\mathcal{A}$ 有足够的投射对象, 则 $(\mathsf{K}^+(\mathcal{P}_{\mathcal{A}}^{\mathrm{op}}), \mathsf{K}^+(\mathcal{A}))$ 是 Hom-内射的;

证明 只论有足够内射对象的情形, 投射情形完全类似. 兹验证引理 4.8.11 的条件.

首先固定 $X_1 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. 回忆到 $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ 对所有加性函子 $F : \mathcal{A} \to \mathsf{Ab}$ 都是 I 型的 (例 4.8.4); 取特例 $F = \mathrm{Hom}(X_1, \cdot)$ 即所求.

其次固定 $X_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I}_{\mathcal{A}})$. 为了验证 $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ 相对于 $\mathrm{Hom}(\cdot, X_2)$ 是 I 型的, 观察到解消条件 (I1) 平凡地成立; 至于 (I2), 须验证 $\mathrm{Hom}(\cdot, X_2) : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Ab}$ 是正合函子, 然而这正是 X_2 作为内射对象的刻画. $\square$

以下结果涉及定义 3.2.1 介绍的 Hom 复形, 记作 $\mathrm{Hom}^\bullet$.

定理 4.9.3 设 $\mathcal{A}$ 有足够的内射对象, 或足够的投射对象.

(i) 右导出双函子 RHom 存在.

(ii) 若 $\mathcal{A}$ 有足够的内射对象, $X_2 \to I_2$ 是内射解消, 则它诱导

$$\mathrm{RHom}(QX_1, QX_2) \xrightarrow{\sim} Q\,\mathrm{Hom}^\bullet(X_1, I_2).$$

作为特例, 若 $X_1 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ 则 $\mathrm{RHom}(QX_1, \cdot) \simeq \mathrm{R}(\mathrm{Hom}(X_1, \cdot)) : \mathsf{D}^+(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}^+(\mathsf{Ab})$.

(iii) 若 $\mathcal{A}$ 有足够的投射对象, $P_1 \to X_1$ 是投射解消, 则它诱导

$$\mathrm{RHom}(QX_1, QX_2) \xrightarrow{\sim} Q\,\mathrm{Hom}^\bullet(P_1, X_2).$$

作为特例, 若 $X_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ 则 $\mathrm{RHom}(\cdot, QX_2) \simeq \mathrm{R}(\mathrm{Hom}(\cdot, X_2)) : \mathsf{D}^-(\mathcal{A})^{\mathrm{op}} \to \mathsf{D}^+(\mathsf{Ab})$.

(iv) 存在典范同构 $\mathrm{H}^n\,\mathrm{RHom}(X,Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}(X, Y[n])$, 其中 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{D}^-(\mathcal{A}))$ 而 $Y \in \mathrm{Ob}(\mathsf{D}^+(\mathcal{A}))$; 当 $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ 时, 右式即定义 4.5.8 的 $\mathrm{Ext}^n(X,Y)$.

证明 鉴于引理 4.9.2 和下列观察, 断言 (i) — (iii) 都归为引理 4.8.11 的应用:

◇ 在复形层面, 例 3.5.12 给出典范同构 $\mathsf{C}\,\mathrm{Hom}\left(\sigma^{-1}(X_1), X_2\right) \simeq \mathrm{Hom}^\bullet(X_1, X_2)$, 右式即 Hom 双复形的全复形;

◇ $P_1 \to X_1$ 是 $\mathsf{K}^-(\mathcal{A})$ 中的投射解消当且仅当对应的 $\sigma^{-1}(X_1) \to \sigma^{-1}(P_1)$ 是 $\mathsf{K}^+(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})$ 中的内射解消.

对于 (iv), 先设 $\mathcal{A}$ 有足够的内射对象, 则不妨设 $Y \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^+(\mathcal{A}))$ 由内射对象组成. 等同 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 和 $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ 的对象, 则由命题 4.5.1 可知

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}(X, Y[n]) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(X, Y[n]) \simeq \mathrm{H}^n\,\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y) \xrightarrow[\sim]{\text{(ii)}} \mathrm{H}^n\,\mathrm{RHom}(X,Y).$$

至于 $\mathcal{A}$ 有足够投对象的情形, 论证完全相似. □

推论 4.9.4 设 $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. 若 $\mathcal{A}$ 有足够的内射对象 (或投射对象), 则定义 4.5.8 的 $\mathrm{Ext}^n(X,Y)$ 典范地同构于 §3.14 所定义的 $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A},\mathrm{II}}(X,Y)$ (或 $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A},\mathrm{I}}(X,Y)$).

证明 定理 4.9.3 (ii) 和 (iii) 的直接应用. □

定义 4.9.5 设 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. 以下按定义–命题 4.8.9 谈论右导出函子的维数.

◇ 设 $\mathcal{A}$ 有足够的内射对象, $\mathrm{R}(\mathrm{Hom}(\cdot, X)) : \mathsf{D}^-(\mathcal{A})^{\mathrm{op}} \to \mathsf{D}^+(\mathsf{Ab})$ 的维数称为 X 的**内射维数**, 记为 $\mathrm{inj.dim}(X)$.

◇ 设 $\mathcal{A}$ 有足够的投射对象, $\mathrm{R}(\mathrm{Hom}(X, \cdot)) : \mathsf{D}^+(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}^+(\mathsf{Ab})$ 的维数称为 X 的**投射维数**, 记为 $\mathrm{proj.dim}(X)$.

对于 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ 和 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \sqcup \{\infty\}$, 若内射解消 $0 \to X \to I^0 \to I^1 \to \cdots$ 满足 $k > n \implies I^k = 0$, 则称解消的长度 $\leq n$; 对投射解消亦可如法炮制. 符号 $\mathrm{Ext}^{\geq m}(Y, X) = 0$ 意谓 $k \geq m \implies \mathrm{Ext}^k(Y, X) = 0$, 其余情形依此类推.

命题 4.9.6 取 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. 设 $\mathcal{A}$ 有足够的内射对象, 则

$$\begin{aligned} \mathrm{inj.dim}(X) \leq n &\iff \mathrm{Ext}^{\geq n+1}(\cdot, X) = 0 \\ &\iff \mathrm{Ext}^{n+1}(\cdot, X) = 0 \iff X \text{ 有长度 } \leq n \text{ 的内射解消}. \end{aligned}$$

设 $\mathcal{A}$ 有足够的投射对象, 则

$$\begin{aligned}\text{proj.dim}(X) \leq n &\iff \text{Ext}^{\geq n+1}(X, \cdot) = 0 \\ &\iff \text{Ext}^{n+1}(X, \cdot) = 0 \iff X \text{ 有长度 } \leq n \text{ 的投射解消}.\end{aligned}$$

证明 仅论内射解消情形. 设 $\text{inj.dim}(X) \leq n$, 则维数定义导致任何 $Y \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ 都满足 $(\text{R}\,\text{Hom}(\cdot, X))\,(Y) \in \text{Ob}\left(\mathsf{D}^{[0,n]}(\mathsf{Ab})\right)$, 故 $\text{Ext}^{\geq n+1}(Y, X) = 0$.

设 $\text{Ext}^{n+1}(\cdot, X) = 0$, 任取内射解消 $0 \to X \to I^0 \xrightarrow{d^0} \cdots$ 并且对短正合列

$$0 \to X \to I^0 \to \text{im}\left(d_I^0\right) \to 0, \quad 0 \to \text{im}\left(d_I^{k-2}\right) \to I^{k-1} \to \text{im}\left(d_I^{k-1}\right) \to 0$$

(其中 $1 < k \leq n$) 以命题 3.12.9 反复移维, 可得

$$\text{Ext}^1\left(\cdot, \text{im}\left(d_I^{n-1}\right)\right) \simeq \cdots \simeq \text{Ext}^{n+1}\left(\cdot, X\right) = 0.$$

这说明 $\text{im}\left(d_I^{n-1}\right)$ 是内射对象 (推论 3.12.7). 以之代 I^n, 获取长度 $\leq n$ 的内射解消.

若 X 有长度 $\leq n$ 的内射解消, 依之对任意 $Y \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ 计算导出函子, 可得 $(\text{R}\,\text{Hom}(\cdot, X))\,(Y) \in \text{Ob}\left(\mathsf{D}^{[0,n]}(\mathsf{Ab})\right)$. □

对照例 4.8.10, 内射维数和投射维数也可以理解为两种 "Ext-维数", 尽管这不是标准术语.

定义–命题 4.9.7 (整体维数) 设 $\mathcal{A}$ 有足够的内射和投射对象, 则

$$\begin{array}{ccccc} \sup\limits_{X \in \text{Ob}(\mathcal{A})} \text{inj.dim}(X) & = & \inf\left\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \;\middle|\; \text{Ext}^{\geq n+1}(\cdot, \cdot) = 0\right\} & = & \sup\limits_{X \in \text{Ob}(\mathcal{A})} \text{proj.dim}(X) \\ & & \| & & \\ & & \sup\left\{ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{A}) \\ \text{Ext}^n(X, Y) \neq 0 \end{array} \right\} & & (\text{约定 } \inf \varnothing := \infty) \end{array}$$

记之为 $\text{gl.dim}(\mathcal{A}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \sqcup \{\infty\}$, 称为 $\mathcal{A}$ 的整体维数或同调维数.

证明 对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 命题 4.9.6 蕴涵 $n \geq \sup_X \text{inj.dim}(X)$ 等价于 $\text{Ext}^{\geq n+1}(\cdot, \cdot) = 0$; 对使之成立的 n 取 inf 便是. 至于 proj.dim 的情形也完全相同. □

整体维数是所有导出函子的维数上界.

推论 4.9.8 设 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ 为 Abel 范畴之间的左正合 (或右正合) 函子, $\mathcal{A}$ 有足够的内射和投射对象, 则 $\text{R}F$ (或 $\text{L}F$) 的维数不超过 $\text{gl.dim}(\mathcal{A})$.

证明 维数的定义涉及 $\text{R}F$ (或 $\text{L}F$) 的幅度 (定义 4.5.5). 为了控制幅度, 对任意 $X \in \text{Ob}(\mathcal{A})$, 以命题 4.9.6 取长度不超过 $\text{gl.dim}(\mathcal{A})$ 的内射 (或投射) 解消来确定 $\text{R}F(X)$ (或 $\text{L}F(X)$). □

作为本节的收尾, 我们介绍一则形似伴随性的结果.

定理 4.9.9 考虑 Abel 范畴之间的一对伴随加性函子 $F : \mathcal{A} \rightleftarrows \mathcal{A}' : G$. 设 $\mathcal{A}$ 有足够的投射对象, $\mathcal{A}'$ 有足够的内射对象. 此时存在 $\mathsf{D}^+(\mathsf{Ab})$ 中的典范同构

$$\mathrm{RHom}_{\mathcal{A}'}\left(\mathrm{L}F(X), Y\right) \simeq \mathrm{RHom}_{\mathcal{A}}\left(X, \mathrm{R}G(Y)\right),$$

其中 $X \in \mathrm{Ob}\,(\mathsf{D}^-(\mathcal{A}))$, $Y \in \mathrm{Ob}\,(\mathsf{D}^+(\mathcal{A}'))$. 作为推论, 存在 Ab 中的典范同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A}')}\left(\mathrm{L}F(X), Y\right) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}\left(X, \mathrm{R}G(Y)\right).$$

证明 取复形的投射解消 $P \to X$ 和内射解消 $Y \to I$. 代入定理 4.9.3 遂有

$$\mathrm{RHom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{L}F(QX), QY) \simeq Q\,\mathrm{Hom}^\bullet\left(\mathsf{K}F(P), I\right).$$

然而 $\mathsf{K}F(P)$ 是 F 对复形逐项地作用给出的, 按 Hom 复形的定义和伴随性, 可见右式同构于 $Q\,\mathrm{Hom}^\bullet\left(P, \mathsf{K}G(I)\right)$, 此即 $\mathrm{RHom}_{\mathcal{A}}(QX, \mathrm{R}F(QY))$.

定理 3.11.5 表明 X 的投射解消在 $\mathsf{K}^-(\mathcal{A})$ 中精确到唯一同构是唯一的, 而且 $\mathsf{D}^-(\mathcal{A})$ 的态射唯一地提升到投射解消上 (命题 4.5.1). 对 Y 的内射解消亦同. 这就说明以上构造的同构对 (X, Y) 有函子性.

最后一则断言是两边同取 H^0 的产物. □

在此, $\mathrm{L}F$ 和 $\mathrm{R}G$ 并非严格意义下的伴随函子: 前者是 D^- 之间的函子, 后者是 D^+ 之间的函子. 之后的 §4.11 将介绍无界导出范畴的版本, 从而弭平此差异.

4.10 实例: R lim 作为同伦极限

本节承 §3.13 的余绪. 取 $\mathcal{A}$ 为 Abel 范畴.

引理 4.10.1 设 $\mathcal{A}$ 有正合的可数积 (或可数余积), 见约定 3.13.1, 则 $\mathsf{C}(\mathcal{A}) \to \mathsf{K}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}(\mathcal{A})$ 的每一段都保可数积 (或可数余积). 此时有典范同构 $\mathrm{H}^n(\prod_k X_k) \xrightarrow{\sim} \prod_k \mathrm{H}^n(X_k)$ (或 $\mathrm{H}^n(\bigoplus_k X_k) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_k \mathrm{H}^n(X_k)$).

证明 证积的情形即可. 可数积的正合性即刻导致 $\mathrm{H}^n(\prod_k X_k) \xrightarrow{\sim} \prod_k \mathrm{H}^n(X_k)$.

对任意复形 Y, 按定义易见 $\mathrm{Hom}^\bullet\left(Y, \prod_k X_k\right)$ 同构于诸 $\mathrm{Hom}^\bullet\left(Y, X_k\right)$ 在 $\mathsf{C}(\mathsf{Ab})$ 中逐项构造的积. 应用可数积的正合性来取 H^0, 立得典范同构 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}\left(Y, \prod_k X_k\right) \simeq \prod_k \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(Y, X_k)$. 于是 $\mathsf{C}(\mathcal{A}) \to \mathsf{K}(\mathcal{A})$ 保 $\prod_k$.

以下证明 $\mathsf{K}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}(\mathcal{A})$ 保 $\prod_k$. 局部化函子 Q 省略不标. 给定 $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ 的一族态射 $f_k : Y \to X_k$, 可设它们来自 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 中的一族图表

$$Y \xrightarrow{b_k} Z_k \xleftarrow{s_k} X_k, \quad s_k : \text{拟同构}. \tag{4.10.1}$$

相应的 $s = \prod_k s_k : \prod_k X_k \to \prod_k Z_k$ 仍是拟同构. 兹断言图表

$$Y \xrightarrow{b := (b_k)_k} \prod_k Z_k \xleftarrow{s} \prod_k X_k$$

确定 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}(Y, \prod_k X_k)$, 后者无关 (4.10.1) 的选取, 仅取决于 $(f_k)_k$. 诚然, 下图交换蕴涵对每个 h 皆有 $p_h f = f_h$, 其中 $p_h : \prod_k X_k \to X_h$ 是典范投影态射:

$$\begin{tikzcd}
 & Z_h & X_h \arrow[l, "s_h"'] \\
Y \arrow[ur, "b_h"] \arrow[r, "b"'] & \prod_k Z_k \arrow[u] & \prod_k X_k. \arrow[l, "s"] \arrow[u, "p_h"']
\end{tikzcd}$$

设 $g \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}(Y, \prod_k X_k)$ 使得 $\forall h,\ p_h g = f_h$, 则有 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 的交换图表

$$\begin{tikzcd}
 & M_h & X_h \arrow[l, "t_h"'] \\
Y \arrow[ur, "c_h"] \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "(c_k)_k"'] & M \arrow[u, "r_h"'] \arrow[d, "(r_k)_k"] & \prod_k X_k \arrow[l, "t"'] \arrow[u, "p_h"'] \arrow[dl, "u"] \\
 & \prod_k M_k &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{array}{l}
h \in \mathbb{Z}, \\
t, t_h:\ \text{拟同构}, \\
u := (r_k)_k t = \prod_k t_k,
\end{array}$$

使得第二行给出 g 而 $\nearrow$ 给出 f_h; 方块部分的构造用到了条件 (S3) 对右乘性系的版本, 见定义 1.10.5.

运用 $\prod_k$ 的正合性可知 u 是拟同构; 这又反过来说明 g 也能由图表的 $\searrow\nearrow$ 部分确定. 然而 $Y \xrightarrow{c_k} M_k \xleftarrow{t_k} X_k$ 给出 f_k. 对照此前对 f 的构造, 可见 $f = g$. 至此验证了 $\prod_k$ 的泛性质. □

注记 4.10.2 若将积 (或余积) 的下标集换成任意小集 I, 仍有相应的陈述.

命 $\mathcal{D}$ 为 Ab-范畴. 考虑 (3.13.1) 定义的范畴 $\mathsf{InvSys}(\mathcal{D}) := \mathcal{D}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}^{\mathrm{op}}}$, 其对象即资料[4] $X = (X_k, f_k)_{k \geq 0}$, 其中 $X_k \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ 而 $f_k \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_{k+1}, X_k)$. 若 $\mathcal{D}$ 有可数积, 按定义 3.13.3 的方式定义典范态射

$$\Delta_X := T_X - \mathrm{id} : \prod_k X_k \to \prod_k X_k.$$

对偶地, 范畴 $\mathsf{DirSys}(\mathcal{D}) := \mathcal{D}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ 的对象即资料[5] $X = (X_k, g_k)_{k \geq 0}$, 其中 $X_k \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ 而 $g_k \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_k, X_{k+1})$. 以同样手法定义 $\nabla_X := T_X - \mathrm{id} : \bigoplus_k X_k \to \bigoplus_k X_k$, 前提是 $\mathcal{D}$ 有可数余积; T_X 仍是类似的平移态射.

假使 $\ker(\Delta_X)$ 或 $\mathrm{coker}(\nabla_X)$ 存在, 则有典范同构

$$\begin{aligned}
X \in \mathrm{Ob}\,(\mathsf{InvSys}(\mathcal{D})) &\implies \varprojlim_k X_k \xleftarrow{\sim} \ker(\Delta_X), \\
X \in \mathrm{Ob}\,(\mathsf{DirSys}(\mathcal{D})) &\implies \varinjlim_k X_k \xrightarrow{\sim} \mathrm{coker}(\nabla_X).
\end{aligned}$$

[4] 又称为 $\mathcal{D}$ 中的逆向系.

[5] 又称为 $\mathcal{D}$ 中的正向系.

朴素的愿望是施此于 $\mathcal{D} = \mathsf{D}(\mathcal{A})$, 然而导出范畴鲜少是 Abel 范畴. 尽管如此, 注记 3.3.7 说明映射锥可充当核与余核的某种同伦版本; 三角范畴中粗略对应的构造是好三角.

定义 4.10.3 (M. Bökstedt, A. Neeman [4]) 设 $\mathcal{D}$ 是三角范畴.

- 若 $\mathcal{D}$ 有可数积, 则 $\mathsf{InvSys}(\mathcal{D})$ 的对象 X 的**同伦极限** (或称同伦 $\varprojlim$) 意谓 $\mathcal{D}$ 的好三角
$$\mathrm{holim}(X) \to \prod_k X_k \xrightarrow{\Delta_X} \prod_k X_k \xrightarrow{+1}.$$
- 若 $\mathcal{D}$ 有可数余积, 则 $\mathsf{DirSys}(\mathcal{D})$ 的对象 X 的**同伦余极限** (或称同伦 $\varinjlim$) 意谓 $\mathcal{D}$ 的好三角
$$\bigoplus_k X_k \xrightarrow{\nabla_X} \bigoplus_k X_k \to \mathrm{hocolim}(X) \xrightarrow{+1}.$$

上述定义涉及的好三角彼此同构 (推论 4.2.3), 但同构并非典范的.

回到复形的讨论. 留意到 $\mathsf{InvSys}\,(\mathsf{C}(\mathcal{A})) = \mathsf{C}(\mathsf{InvSys}(\mathcal{A}))$, 两者的对象 X 同为交换图表

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, "f_1^n"'] & \vdots \arrow[d, "f_1^{n+1}"] & \\
\cdots \arrow[r] & X_1^n \arrow[r, "d_{X_1}^n"] \arrow[d, "f_0^n"'] & X_1^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f_0^{n+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & X_0^n \arrow[r, "d_{X_0}^n"] & X_0^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

每行皆为复形, 其间的态射同为双层交换图表. 依此可在 $\mathcal{D} := \mathsf{D}(\mathcal{A})$ 中比较 $\mathrm{holim}(X)$ 和 $\varprojlim$ 的右导出函子 $\mathrm{R}\lim(X)$, 前提是它们存在.

也留意到对 $\mathsf{C}(\mathsf{InvSys}(\mathcal{A}))$ 的对象 X 取上同调 H^m, 产物是 $(\mathrm{H}^m(X_k^\bullet), \mathrm{H}^m(f_k^\bullet))_{k\geq 0}$. 所以 $X \to Y$ 是拟同构等价于每个 $X_k \to Y_k$ 都是 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 中的拟同构.

定理 4.10.4 设 $\mathcal{A}$ 为 Abel 范畴, 具有正合的可数积和足够的内射对象.

(i) 左正合函子 $\varprojlim : \mathsf{InvSys}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ 的右导出函子存在, 记为
$$\mathrm{R}\lim : \mathsf{D}^+\,(\mathsf{InvSys}(\mathcal{A})) \to \mathsf{D}^+(\mathcal{A}).$$

(ii) 对 $\mathsf{C}^+(\mathsf{InvSys}(\mathcal{A}))$ 的任意对象 $X = (X_k, f_k)_{k\geq 0}$, 在 $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ 中存在好三角
$$\mathrm{R}\lim(X) \to \prod_k X_k \xrightarrow{\Delta_X} \prod_k X_k \xrightarrow{+1}$$
特别地, $\mathrm{R}\lim(X) \simeq \mathrm{holim}(X)$.

(iii) 在定义–命题 4.8.9 的意义下, $\mathrm{R}\lim$ 的维数 ≤ 1.

证明 因为 $\mathsf{InvSys}(\mathcal{A})$ 有足够的内射对象, 故 (i) 成立. 更精确地说, 取引理 3.13.7 的范畴 $\mathcal{R}$, 将 $\mathsf{InvSys}(\mathcal{A})$ 和 $\mathcal{R}$ 代入定理 3.11.3, 可知对 $\mathsf{C}^+(\mathsf{InvSys}(\mathcal{A}))$ 的任意对象 $X = (X_k, f_k)_{k\geq 0}$, 存在拟同构 $X \to Y$ 使得 $Y \in \mathrm{Ob}\,(\mathsf{C}^+(\mathcal{R}))$. 于是 $\mathrm{R}\lim(X) = \varprojlim Y$. 而 $\mathcal{R}$ 的定义又确保 Δ_Y 逐次满, 故有 $\mathsf{C}^+(\mathcal{A})$ 的短正合列

$$0 \to \varprojlim Y \to \prod_{k\geq 0} Y_k \xrightarrow{\Delta_Y} \prod_{k\geq 0} Y_k \to 0.$$

其次, $X_k \to Y_k$ 对每个 k 皆是拟同构. 可数积正合, 故 $\prod_{k\geq 0} X_k \to \prod_{k\geq 0} Y_k$ 也是拟同构. 这便给出 (ii) 断言的好三角

$$\mathrm{R}\lim(X) \to \prod_{k\geq 0} X_k \xrightarrow{\Delta_X} \prod_{k\geq 0} X_k \xrightarrow{+1} .$$

至于 (iii), 注意到当 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{InvSys}(\mathcal{A}))$ 时 Δ_X 简化为 $\mathsf{InvSys}(\mathcal{A})$ 的态射, 而 $\mathrm{holim}(X) \simeq \mathrm{Cone}(\Delta_X)[-1]$ 是 $\mathsf{D}^{[0,1]}(\mathcal{A})$ 的对象; 当然这也是定理 3.13.8 的复述. □

对于 $\varinjlim : \mathsf{DirSys}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$, 定理 4.10.4 有对偶版本, 不再赘述.

例 4.11.11 将说明如何对无界导出范畴得到 $\mathrm{R}\lim$, 使得定理 4.10.4 (ii) 依然适用.

4.11 无界导出函子

考虑 Abel 范畴之间的加性函子 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$. 本节回到定义 4.7.1, 着重探讨无界导出范畴版本的导出函子

$$\mathrm{R}F,\ \mathrm{L}F : \mathsf{D}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}(\mathcal{A}').$$

为了确保 $\mathrm{R}F$ 或 $\mathrm{L}F$ 存在并进行操作, 需要定义 3.15.1 的 K-内射复形或 K-投射复形, 以及相应的解消等概念.

引理 4.11.1 设 $\mathcal{A}$ 为 Abel 范畴. 设 $Z \in \mathrm{Ob}(\mathsf{K}(\mathcal{A}))$ 既是 K-内射 (或 K-投射) 又是零调的, 则 $Z = 0$.

证明 引理 3.15.2 蕴涵 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(Z, Z) = 0$. □

陈述一则一般结果. 选定三角范畴 $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}'$ 及其饱和子三角范畴 $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}'$.

引理 4.11.2 给定三角双函子 $G : \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \to \mathcal{D}'$, 定义 $\mathcal{D}_2$ 的全子范畴 $\mathcal{K}_2^G$ 使得

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{K}_2^G) = \{X_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}_2) : X_1 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{N}_1) \implies G(X_1, X_2) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{N}')\},$$

则 $\mathcal{K}_2^G$ 是饱和子三角范畴. 如将变元位置调换, 相应的叙述对 $\mathcal{K}_1^G \subset \mathcal{D}_1$ 依然成立.

证明 由 $G(X_1, X_2[1]) \simeq G(X_1, X_2)[1]$ 可知 $\mathcal{K}_2^G$ 对平移封闭. 同理, 设有好三角 $I \to J \to K \xrightarrow{+1}$, 其中 $I, K \in \mathrm{Ob}(\mathcal{K}_2^G)$, 则从好三角

$$G(X_1, I) \to G(X_1, J) \to G(X_1, K) \xrightarrow{+1}$$

容易看出 $X_1 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{N}_1) \implies G(X_1, J) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{N}')$. 饱和性质是自明的. □

此结果可以应用于 $\mathrm{Hom} : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{A} \to \mathsf{Ab}$ 以及相应的三角双函子 $\mathsf{K}_\Pi \mathrm{Hom}$. 例 3.5.12 已经说明后者本质上即是 Hom 复形:

$$\begin{aligned} (\mathsf{C}_\Pi \mathrm{Hom})(\sigma^{-1}X_1, X_2) &\simeq \mathrm{Hom}^\bullet(X_1, X_2), \\ (\mathsf{K}_\Pi \mathrm{Hom})(\sigma^{-1}X_1, X_2) &\simeq \mathrm{Hom}^\bullet(X_1, X_2) \text{ 在 } \mathsf{K}(\mathsf{Ab}) \text{ 中的像}, \end{aligned} \tag{4.11.1}$$

其中 $\sigma : \mathsf{C}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{C}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}}$ 和 $\mathsf{K}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{K}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}}$ 如定义–命题 3.4.1 和命题 3.4.3. 我们稍后还会用到它的导出范畴版本.

命题 4.11.3 全体 K-内射复形 (或 K-投射复形) 构成 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 的饱和子三角范畴 $\mathcal{I}$ (或 $\mathcal{P}$). 若 $\mathcal{A}$ 有足够的 K-内射 (或 K-投射) 复形, 则 $\mathcal{I}$ (或 $\mathcal{P}$) 对任意加性函子 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ 都是 F-内射的 (或 F-投射的).

证明 仅论 K-内射情形. 前半部是配合 K-内射复形的定义 3.15.1 和 (4.11.1), 将引理 4.11.2 施于 $G = \mathsf{K}_\Pi \mathrm{Hom}$ 的结果: 该处的 $\mathcal{K}_2^G$ 正是此处的 $\mathcal{I}$.

设 $\mathcal{A}$ 有足够的 K-内射复形. 若 I 是零调 K-内射复形, 则引理 4.11.1 蕴涵 $I = 0$, 故 $(\mathsf{K}F)I$ 当然零调. 因此定义 4.6.3 对 F-内射子三角范畴的全部条件成立. □

命 $Q : \mathsf{K}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}(\mathcal{A})$ 和 $Q : \mathsf{K}(\mathcal{A}') \to \mathsf{D}(\mathcal{A}')$ 为局部化函子.

推论 4.11.4 若 $\mathcal{A}$ 有足够的 K-内射复形, 则 F 有右导出函子 $\mathrm{R}F : \mathsf{D}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}(\mathcal{A}')$, 使得当 X 为 K-内射复形时 $\mathrm{R}F(QX) \simeq Q'\mathsf{K}F(X)$.

对偶地, 若 $\mathcal{A}$ 有足够的 K-投射复形, 则 F 有左导出函子 $\mathrm{L}F : \mathsf{D}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}(\mathcal{A}')$, 使得当 X 为 K-投射复形时 $\mathrm{L}F(QX) \simeq Q'\mathsf{K}F(X)$.

证明 将命题 4.11.3 的结论代入命题 4.6.4 的一般框架. □

现在选定 Abel 范畴 $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{B}$. 对加性双函子 $F : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \to \mathcal{B}$ 考虑定义 4.7.6 的导出双函子 $\mathrm{R}F$ (或 $\mathrm{L}F$) 的无界版本; 以下皆假设 $\mathcal{B}$ 有可数积 (或可数余积).

具体地说, 我们希望以上述子范畴 $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ (或 $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$) 确定 $\mathrm{R}F$ (或 $\mathrm{L}F$).

引理 4.11.5 取 $\mathsf{K}(\mathcal{A}_i)$ 的子三角范畴 $\mathcal{I}_i$ (或 $\mathcal{P}_i$) 如命题 4.11.3, 其中 $i = 1, 2$.

- ◇ 若 $\mathcal{A}_1$ 和 $\mathcal{A}_2$ 有足够的 K-内射复形, 则 $\mathcal{I}_1 \times \mathcal{I}_2$ 是 F-内射的.
- ◇ 若 $\mathcal{A}_1$ 和 $\mathcal{A}_2$ 有足够的 K-投射复形, 则 $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ 是 F-投射的.

证明 仅论 K-内射情形. 关键在于说明若 $X_1 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I}_1)$, 则 $(\mathsf{K}_\Pi F)(X_1, \cdot)$ 映 $\mathcal{I}_2$ 的所有零调对象 Z 为 $\mathsf{K}(\mathcal{B})$ 的零调对象. 但引理 4.11.1 说明 $Z = 0$, 而 $(\mathsf{K}_\Pi F)(X_1, \cdot)$ 是加性函子, 故这是当然的. 下标 $1, 2$ 调换后也有相应的结果. □

命 $Q : \mathsf{K}(\mathcal{B}) \to \mathsf{D}(\mathcal{B})$ 和 $Q_i : \mathsf{K}(\mathcal{A}_i) \to \mathsf{D}(\mathcal{A}_i)$ 为局部化函子 $(i = 1, 2)$.

命题 4.11.6 给定 $F : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \to \mathcal{B}$, 设 $\mathcal{A}_1$ 和 $\mathcal{A}_2$ 皆有足够的 K-内射 (或 K-投射) 复形, 则导出双函子 $\mathrm{R}F$ (或 $\mathrm{L}F$) 存在. 若 $X_i \in \mathrm{Ob}(\mathsf{K}(\mathcal{A}))$ 都是 K-内射的 (或 K-投射的), $i = 1, 2$, 则有典范同构

$$\mathrm{R}F(Q_1X_1, Q_2X_2) \simeq Q(\mathsf{K}_\Pi F)(X_1, X_2) \quad (\text{或 } \mathrm{L}F(Q_1X_1, Q_2X_2) \simeq Q(\mathsf{K}_\oplus F)(X_1, X_2))\ .$$

证明 直接将引理 4.11.5 的结果代入命题 4.6.10. □

对于具体给定的双函子 F, 经常可以取到比 K-内射 (或 K-投射) 复形更大的 F-内射 (或 F-投射) 子三角范畴. 以下着重讨论的 RHom 即是一例.

定理 4.11.7 (无界 RHom) 设 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 有足够的 K-内射复形, 或足够的 K-投射复形. 将局部化函子统一记为 Q.

(i) 双函子 $\mathrm{Hom} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{A} \to \mathsf{Ab}$ 有右导出函子 $\mathsf{D}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}) \times \mathsf{D}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}(\mathsf{Ab})$, 它也可以通过命题 4.4.16 的等价 σ 写作

$$\mathrm{RHom} : \mathsf{D}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}} \times \mathsf{D}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}(\mathsf{Ab}).$$

事实上, 若 $\mathcal{A}$ 有足够的 K-内射 (或 K-投射) 复形, 则 $\mathsf{K}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}} \times \mathcal{I}$ (或 $\mathcal{P}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{K}(\mathcal{A})$) 是 Hom-内射的.

(ii) 设 $\mathcal{A}$ 有足够的 K-内射复形, $X_2 \to I_2$ 是 K-内射解消, 则它诱导

$$\mathrm{RHom}(QX_1, QX_2) \xrightarrow{\sim} Q\,\mathrm{Hom}^\bullet(X_1, I_2).$$

作为特例, $\mathrm{RHom}(QX_1, \cdot) \simeq \mathrm{R}\left(\mathrm{Hom}(X_1, \cdot)\right)$.

(iii) 设 $\mathcal{A}$ 有足够的 K-投射复形, $P_1 \to X_1$ 是 K-投射解消, 则它诱导

$$\mathrm{RHom}(QX_1, QX_2) \xrightarrow{\sim} Q\,\mathrm{Hom}^\bullet(P_1, X_2).$$

作为特例, $\mathrm{RHom}(\cdot, QX_2) \simeq \mathrm{R}\left(\mathrm{Hom}(\cdot, X_2)\right)$.

(iv) 存在典范同构 $\mathrm{H}^n\,\mathrm{RHom}(X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}(X, Y[n]) =: \mathrm{Ext}^n(X, Y)$ (定义 4.5.8).

证明 和定理 4.9.3 几乎平行. 以 $\mathcal{A}$ 有足够的 K-内射复形的情形为例, 关键在于说明 $\mathsf{K}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}} \times \mathcal{I}$ 是 Hom-内射的.

- ◇ 固定复形 X_1, 函子 $(\mathsf{K}_\Pi\,\mathrm{Hom})(X_1, \cdot)$ 映一切零调 K-内射复形 X_2 为零调复形, 因为 X_2 在 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 中为 0 (引理 4.11.1).
- ◇ 固定 K-内射复形 X_2, 设复形 X_1 零调, 则 K-内射复形的定义导致 $\mathrm{Hom}^\bullet(X_1, X_2)$ 零调, 代入 (4.11.1) 可见 $(\mathsf{K}_\Pi\,\mathrm{Hom})(X_1, X_2)$ 也零调.

这便验证了 Hom-内射所需的零调条件, 而解消条件是平凡的. □

定理 4.11.8 考虑 Abel 范畴之间的一对伴随加性函子 $F : \mathcal{A} \rightleftarrows \mathcal{A}' : G$. 设 $\mathcal{A}$ 有足够的 K-投射复形, $\mathcal{A}'$ 有足够的 K-内射复形. 此时存在 $\mathsf{D}(\mathsf{Ab})$ 中的典范同构

$$\mathrm{RHom}_{\mathcal{A}'}\left(\mathrm{L}F(X), Y\right) \simeq \mathrm{RHom}_{\mathcal{A}}\left(X, \mathrm{R}G(Y)\right),$$

其中 $X \in \mathrm{Ob}\left(\mathsf{D}(\mathcal{A})\right)$, $Y \in \mathrm{Ob}\left(\mathsf{D}(\mathcal{A}')\right)$.

证明 论证和定理 4.9.9 相同. 唯一差别在于以 K-内射 (或 K-投射) 解消代替内射 (或投射) 解消, 并且以定理 3.15.5 代替定理 3.11.5 来探讨解消的唯一性. □

注记 4.11.9 对定理 4.11.8 两边同取 H^0, 即有伴随关系

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A}')}\left(\mathrm{L}F(X), Y\right) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}\left(X, \mathrm{R}G(Y)\right).$$

由于通过解消得到的导出函子总是定义 1.8.6 的绝对 Kan 延拓 (命题 1.11.3), 定理 1.8.7 也断言 $(\mathrm{L}F, \mathrm{R}G)$ 是伴随对. 两者给出相同的伴随同构. 何以故? 问题化约到 X 是 K-投射复形而 Y 是 K-内射复形的情形, 此时定理 4.11.8 的伴随同构透过 $\mathsf{K}(\cdot)$ 层次的单位 η 和余单位 ε 具体实现为

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A}')}\left(\mathsf{K}F(X), Y\right) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}\left(X, \mathsf{K}G(Y)\right).$$

另一方面, 定理 1.8.7 在导出范畴层次确定了 $\underline{\eta}$ 和 $\underline{\varepsilon}$, 该处给出的刻画足以说明它们 η, ε 相容. 细节敬请读者琢磨.

最后, 得到无界导出函子的另一套充分条件是基于维数的有限性 (定义–命题 4.8.9). 虽然其证明技术不超出本书范围, 为了避免岔题, 权且述而不证. 详见 [22, Tags 07K6, 07K7]. 我们的起点是定理 4.8.3 对有界导出函子的构造.

命题 4.11.10 取 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ 为 Abel 范畴之间的左正合 (或右正合) 函子. 假设

- ◇ 相对于 F, 存在 $\mathcal{A}$ 的 I 型 (或 P 型) 加性全子范畴 $\mathcal{A}^\flat$, 如定义–命题 4.8.2;
- ◇ 相应的有界导出函子 $^{+}\mathrm{R}F$ (或 $^{-}\mathrm{L}F$) 维数有限.

此时 $\mathrm{R}F$ (或 $\mathsf{L}F$): $\mathsf{D}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}(\mathcal{A}')$ 存在; 事实上, $\mathsf{K}(\mathcal{A}^\flat)$ 构成 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 的 F-内射 (或 F-投射) 子范畴.

例 4.11.11 设 $\mathcal{A}$ 具有正合的可数积和足够的内射对象. 取左正合函子 F 为 $\varprojlim : \mathsf{InvSys}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$. 定理 4.10.4 (iii) 说明有界版本 $\mathrm{R}\lim$ 的维数 ≤ 1, 子范畴 $\mathcal{R} \subset \mathsf{InvSys}(\mathcal{A})$ 对之是 I 型的. 前述结果因而给出无界导出函子

$$\mathrm{R}\lim : \mathsf{D}(\mathsf{InvSys}(\mathcal{A})) \to \mathsf{D}(\mathcal{A}).$$

一如定理 4.10.4 (ii) 的情形, 对 $\mathsf{C}(\mathsf{InvSys}(\mathcal{A}))$ 的所有对象 X 皆有 $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ 的好三角

$$\mathrm{R}\lim(X) \to \prod_k X_k \xrightarrow{\Delta_X} \prod_k X_k \xrightarrow{+1}.$$

特别地, $\mathrm{R}\lim(X) \simeq \mathrm{holim}(X)$. 该处的证明可以照搬; 将一切 $\mathsf{C}^+(\cdots)$ 直接改为 $\mathsf{C}(\cdots)$ 便是.

4.12 实例: K-平坦复形和 $\overset{\mathrm{L}}{\otimes}$

本节选定交换环 $\Bbbk$. 行将考虑的环都取作 $\Bbbk$-代数.

约定 4.12.1 设 R, S 为 $\Bbbk$-代数, 按本书惯例, (R,S)-双模 M 默认满足 $tm = mt$, 其中 $t \in \Bbbk$ 而 $m \in M$. 换言之 $(R,S)\text{-}\mathsf{Mod} \simeq (R \underset{\Bbbk}{\otimes} S^{\mathrm{op}})\text{-}\mathsf{Mod}$. 当 $\Bbbk = \mathbb{Z}$ 时, 此条件是多余的.

今后将忘却函子 $(R,S)\text{-}\mathsf{Mod} \to R\text{-}\mathsf{Mod}$ (或 $(R,S)\text{-}\mathsf{Mod} \to \mathsf{Mod}\text{-}S$) 记为 $M \mapsto {}_R M$ (或 $M \mapsto M_S$); 同样记法适用于复形. 忘却函子是正合的, 它们在导出范畴之间诱导的三角函子也按相同方式标记.

一则平凡的观察: 对于任何由 (R,S)-双模构成的复形 M, 我们有

$$M_S \text{ 零调} \iff M \text{ 零调} \iff {}_R M \text{ 零调}.$$

今后设 R, A, B 为 $\Bbbk$-代数. 我们的出发点是张量积给出的双函子

$$\otimes_R : (A,R)\text{-}\mathsf{Mod} \times (R,B)\text{-}\mathsf{Mod} \to (A,B)\text{-}\mathsf{Mod},$$

它对每个变元都右正合. 最单纯的是 $A = \Bbbk = B$ 的情形, 对应的双函子化为 $\otimes_R : \mathsf{Mod}\text{-}R \times R\text{-}\mathsf{Mod} \to \Bbbk$.

简单起见, 对于 (A,R)-双模构成的复形 X 和 (R,B)-双模构成的复形 Y, 今后将逐项作张量积得到的双复形记为 $X^\bullet \underset{R}{\otimes} Y^\bullet$, 而将其全复形记为

$$X \underset{R}{\otimes} Y := \mathrm{tot}_{\oplus}\left(X^\bullet \underset{R}{\otimes} Y^\bullet\right).$$

双模范畴有足够的 K-投射复形 (例 3.15.14), 故命题 4.11.6 确保无界左导出双函子存在. 以下抽象定义因之是合理的.

定义 4.12.2 记 $\otimes_R$ 的左导出函子 $\mathrm{L}\left(\cdot \underset{R}{\otimes} \cdot\right)$ 为

$$\overset{\mathrm{L}}{\underset{R}{\otimes}} : \mathsf{D}((A,R)\text{-}\mathsf{Mod}) \times \mathsf{D}((R,B)\text{-}\mathsf{Mod}) \to \mathsf{D}((A,B)\text{-}\mathsf{Mod}).$$

不致混淆时, 也将 $X \overset{\mathrm{L}}{\underset{R}{\otimes}} Y$ 简记为 $X \overset{\mathrm{L}}{\otimes} Y$.

上述定义直截了当, 但仍须引入称为 K-平坦解消的一类拟同构来助推 $\otimes_R$ 的研究, 理由有二:

- ◇ K-平坦解消 (或其上有界版本, 见命题 4.12.4) 对于确立一些重要性质和实际计算更有意义, 这点在 §3.14 已有体现;

- ◇ 当我们将张量积扩及层论等几何场景时, 可能仅有 K-内射解消而无 K-投射解消, 此时 K-平坦解消是研究导出张量积的唯一手段.

定义 4.12.3 (N. Spaltenstein [21, Definition 5.1]) 设 X 为右 R-模构成的复形. 若对所有由左 R-模构成的复形 Y,

$$Y \text{ 零调} \implies X \underset{R}{\otimes} Y \text{ 零调},$$

则称 X 是 **K-平坦**的[6]; 此性质仅关乎 X 在 $\mathsf{K}(\mathsf{Mod}\text{-}R)$ 中的同构类. 类似手法可对左 R-模构成的复形定义何谓 K-平坦.

对于上有界 K-平坦复形, K-平坦性可归结为模论中熟知的平坦性.

命题 4.12.4 设 X 为 $\mathsf{C}^-(R\text{-}\mathsf{Mod})$ 的对象, 而且每个 X^n 作为右 R-模皆平坦, 则 X 对 R 是 K-平坦的. 对 $\mathsf{C}^-(\mathsf{Mod}\text{-}R)$ 的对象亦同.

证明 设 Y 为左 R-模构成的零调复形, 今将往证 $X \underset{R}{\otimes} Y$ 零调. 应用截断函子将 Y 表为 $\varinjlim_m \tau^{\le m} Y$. 逐次地看, $\varinjlim_m$ 既和张量积交换 [25, 命题 6.9.2], 又和 $\bigoplus$ 交换, 问题因此化到 Y 上有界的情形. 于是 $X^\bullet \underset{R}{\otimes} Y^\bullet$ 落在定义 3.10.1 的范畴 $\mathsf{C}^2_f(\Bbbk\text{-}\mathsf{Mod})$. 因为 $X^p \underset{R}{\otimes} Y^\bullet$ 对每个 p 皆零调, 推论 3.10.7 确保 $X \underset{R}{\otimes} Y$ 零调. □

有鉴于此, 倘若只关心上有界复形和上有界导出范畴, 则不妨将本节出现的所有 K-平坦复形都代换为由平坦模构成的上有界复形.

定义 4.12.5 若 $P \to X$ 是 $\mathsf{C}((A,R)\text{-}\mathsf{Mod})$ 中的拟同构, 而且 P_R 是 K-平坦的, 则称 $P \to X$ 为 X 对 R 的 **K-平坦解消**. 如果所有 $X \in \mathsf{C}((A,R)\text{-}\mathsf{Mod})$ 都有对 R 的 K-平坦解消, 则称 $(A,R)\text{-}\mathsf{Mod}$ 对 R 有足够的 K-平坦复形.

以类似手法定义 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}((R,B)\text{-}\mathsf{Mod}))$ 对 R 的 K-平坦解消.

我们自然要问: 如何确保双模范畴对 R 有足够的 K-平坦复形? K-平坦和 K-投射复形之间有何关系? 毫不意外, 两者的桥梁来自伴随关系, 以 $\otimes$, Hom 和忘却函子为枢纽, 具体表为次一技术性引理. 倘若读者只关心交换环上的张量积, 亦即 A, R, B 全部等于 $\Bbbk$ 的特例, 则可先略过其证明, 因为这时的结论是平凡的.

引理 4.12.6 设 X 是 (A,R)-双模构成的 K-投射复形, 则当 A 是平坦 $\Bbbk$-模时, X_R 是 K-平坦的.

设 Y 是 (R,B)-双模构成的 K-投射复形, 则当 B 是平坦 $\Bbbk$-模时, ${}_RY$ 是 K-平坦的.

[6] 更合理的名称兴许是同伦平坦复形.

证明 处理第一则断言即足. 取左 R-模构成的零调复形 Y. 命题 3.5.6 说明

$$\operatorname{swap}(X \underset{R}{\otimes} Y) := \operatorname{tot}_{\oplus} \operatorname{swap}(X^{\bullet} \underset{R}{\otimes} Y^{\bullet}) \simeq X \underset{R}{\otimes} Y,$$

因此我们的目标相当于证 $\operatorname{swap}(X \underset{R}{\otimes} Y)$ 零调.

将 Y 视同 $(R, \Bbbk)$-Mod 上的零调复形. 类似地, 将任意 A-模 I 视同 $(A, \Bbbk)$-双模. 定义 $Z^p := \operatorname{Hom}_{\Bbbk}\left(Y_{\Bbbk}^{-p}, I_{\Bbbk}\right)$, 由此得到 (A, R)-双模构成的复形 Z, 其中 $d_Z^p := (-1)^{p+1}\left(d_Y^{-p-1}\right)^*$.

以下取 I 为内射左 A-模, 于是 $I_{\Bbbk}$ 是内射 $\Bbbk$-模, 原因是忘却函子 A-Mod $\to \Bbbk$-Mod 是正合函子 $A \underset{\Bbbk}{\otimes} \cdot$ 的右伴随; 见命题 2.8.17 和 [25, 推论 6.6.8]. 因此 Z 依然零调.

经典伴随关系 [25, 定义 6.6.5] 对每个 $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ 给出典范同构

$$\begin{aligned} H^{p,q} := \operatorname{Hom}_A\left(X^{-q} \underset{R}{\otimes} Y^{-p}, I\right) & \\ & \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{(A,R)}\left(X^{-q}, Z^p\right) = \operatorname{Hom}_{(A,R)}^{p,q}(X, Z), \end{aligned} \tag{4.12.1}$$

其中 $\operatorname{Hom}^{\bullet,\bullet}$ 表例 3.5.12 的 Hom-双复形. 为了使 (4.12.1) 成为双复形的同构, 对 $(H^{p,q})_{p,q}$ 定义双复形的结构, 使得 p-方向的 d 等于 $(-1)^{p+1}(d_Y^{p-1})^*$, 而 q-方向的 d 等于 $(-1)^{q+1}(d_X^{q-1})^*$. 初等数学表明有交换图表

$$\begin{tikzcd} H^{p,q} \arrow[r, "(-1)^{p+1}(d_Y^{-p-1})^*"] \arrow[d, "(-1)^{pq}"'] & H^{p+1,q} \arrow[d, "(-1)^{(p+1)q}"] \\ H^{p,q} \arrow[r, "(-1)^{p+q+1}(d_Y^{-p-1})^*"'] & H^{p+1,q} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H^{p,q} \arrow[r, "(-1)^{q+1}(d_X^{-q-1})^*"] \arrow[d, "(-1)^{pq}"'] & H^{p,q+1} \arrow[d, "(-1)^{p(q+1)}"] \\ H^{p,q} \arrow[r, "(-1)^{p+q+1}(d_X^{-q-1})^*"'] & H^{p,q+1}. \end{tikzcd} \tag{4.12.2}$$

现在对 (4.12.1) 两边取 tot_{Π}. 右边给出 Hom 复形 $\operatorname{Hom}_{(A,R)}^{\bullet}(X, Z)$. 左边的 n 次项是

$$\prod_{p+q=n} H^{p,q} \simeq \operatorname{Hom}_A\left(\bigoplus_{p+q=n} X^{-q} \underset{R}{\otimes} Y^{-p}, I\right) = \operatorname{Hom}_A\left(\operatorname{swap}(X \underset{R}{\otimes} Y)^{-n}, I\right).$$

逐项地将 $H^{p,q}$ 以自同构 $(-1)^{pq}$ 调整后, 从 n 次到 $n+1$ 次项的态射 d 化作拉回

$$(-1)^{n+1}\left(\operatorname{swap}(X \underset{R}{\otimes} Y)^{-n-1} \to \operatorname{swap}(X \underset{R}{\otimes} Y)^{-n}\right)^*,$$

其中 $(-1)^{n+1}$ 来源于 (4.12.2) 底部的 $(-1)^{p+q+1}$, 它不改变 $\operatorname{swap}(X \underset{R}{\otimes} Y)$ 的上同调. 既然 $\operatorname{Hom}_A(\cdot, I)$ 是正合函子而 Z 零调, 前述讨论归结为

$$\operatorname{Hom}_A\left(\mathrm{H}^{-n}(\operatorname{swap}(X \underset{R}{\otimes} Y)), I\right) \simeq \mathrm{H}^n \operatorname{Hom}_{(A,R)}^{\bullet}(X, Z) = 0.$$

又因为 n 和 I 可任取, 由此知 $\operatorname{swap}(X \underset{R}{\otimes} Y)$ 零调. 明所欲证. □

推论 4.12.7 若 A (或 B) 是平坦 $\Bbbk$-模, 则 (A,R)-Mod (或 (R,B)-Mod) 对 R 有足够的 K-平坦复形.

对推论 4.12.7 作两点简单观察.

◇ 若 $\Bbbk$ 是域, 则关于平坦性的条件自动成立.

◇ 取 $A=\Bbbk$ (或 $B=\Bbbk$), 则引理化为以下陈述: 右 (或左) R-模构成的 K-投射复形对 R 必然是 K-平坦的. 作为特例, Mod-R (或 R-Mod) 有足够的 K-平坦复形.

现在说明如何以 K-平坦解消确定 $\otimes_R$ 的导出函子. 为了简化符号, 今后各种局部化函子 Q 省略不标.

命题 4.12.8 定义 $\mathsf{K}((A,R)\text{-Mod})$ 的全子范畴 $\mathcal{F}_{A,R}$, 使得

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{F}_{A,R})=\{X : X_R \text{ 是 K-平坦的}\};$$

类似地定义 $\mathcal{F}_{R,B}$. 它们都是饱和三角子范畴. 以下探讨

$$\mathsf{K}((A,R)\text{-Mod})\times\mathsf{K}((R,B)\text{-Mod}) \quad \text{的 } \otimes_R\text{-投射子范畴}.$$

(i) 设 (A,R)-Mod 对 R 有足够的 K-平坦复形, 则 $(\mathcal{F}_{A,R},\mathsf{K}((R,B)\text{-Mod}))$ 是 $\otimes_R$-投射子范畴. 作为推论, 设 Y 是由 (R,B)-双模构成的复形, 则 $\cdot\overset{\mathrm{L}}{\underset{R}{\otimes}}Y$ 是 $\cdot\underset{R}{\otimes}Y$ 的左导出函子, 可由 K-平坦解消计算.

(ii) 设 (R,B)-Mod 对 R 有足够的 K-平坦复形, 则 $(\mathsf{K}((A,R)\text{-Mod}),\mathcal{F}_{R,B})$ 是 $\otimes_R$-投射子范畴. 作为推论, 设 X 是由 (A,R)-双模构成的复形, 则 $X\overset{\mathrm{L}}{\underset{R}{\otimes}}\cdot$ 是 $X\underset{R}{\otimes}\cdot$ 的左导出函子, 可由 K-平坦解消计算.

证明 引理 4.11.2 说明 $\mathcal{F}_{A,R}$ 和 $\mathcal{F}_{R,B}$ 都是饱和子三角范畴. 对于后续部分, 讨论 (i) 即可. 回顾 §4.7 相关定义, 可知关键是建立以下性质:

◇ 选定 $\mathcal{F}_{A,R}$ 中的复形 X, 若 Y 是零调复形, 则 $X\underset{R}{\otimes}Y$ 零调;

◇ 选定 Y, 若 X 是 $\mathcal{F}_{A,R}$ 中的零调复形, 则 $X\underset{R}{\otimes}Y$ 零调.

第一条性质由 K-平坦的定义自动保证. 现在考虑第二条. 由于 $X\underset{R}{\otimes}Y$ 只用到 R 对 Y 的左乘结构, 不妨设 $B=\Bbbk$. 此时推论 4.12.7 确保有 $\mathsf{C}(R\text{-Mod})$ 中的 K-平坦解消 $Q\to Y$. 由此得到

$$\mathsf{K}(R\text{-Mod}) \text{ 的好三角} \quad Q\to Y\to N\xrightarrow{+1}, \quad N: \text{零调复形},$$
$$\mathsf{K}(A\text{-Mod}) \text{ 的好三角} \quad X\underset{R}{\otimes}Q\to X\underset{R}{\otimes}Y\to X\underset{R}{\otimes}N\xrightarrow{+1}.$$

既然 X 零调而 Q 是 K-平坦的, $X \underset{R}{\otimes} Q$ 零调. 又因为 N 零调而 X 对 R 是 K-平坦的, $X \underset{R}{\otimes} N$ 零调. 综上可见 $X \underset{R}{\otimes} Y$ 亦零调.

最后, 关于 $\overset{\mathrm{L}}{\underset{R}{\otimes}}$ 的断言无非是命题 4.6.10 (ii) 的直接应用. □

例 4.12.9 (环变换与 $\overset{\mathrm{L}}{\otimes}$) 给定 $\Bbbk$-代数的同态 $R \to S$, 借此将 S 视为 (S, R)-双模. 循 [25, 推论 6.6.8] 的路线, 考虑右正合加性函子

$$ {}_{R\to S}P := S \underset{R}{\otimes} (\cdot) : R\text{-}\mathsf{Mod} \to S\text{-}\mathsf{Mod}. $$

它有左导出函子 $\mathrm{L}_{R\to S}P$, 在推论 4.12.7 和命题 4.12.8 中代入 $A = S$ 和 $B = \Bbbk$, 可见平坦性在此不成问题, 而

$$ \mathrm{L}_{R\to S}P \simeq S \overset{\mathrm{L}}{\underset{R}{\otimes}} (\cdot). $$

环变换还具有传递性: 给定同态 $R \to S \to T$, 则有典范同构

$$ \mathrm{L}_{S\to T}P \circ \mathrm{L}_{R\to S}P \xrightarrow{\sim} \mathrm{L}_{R\to T}P. $$

诚然, 所示态射来自关于复合函子求导的定理 4.6.5; 而因为

$$ X \underset{S}{\otimes} (S \underset{R}{\otimes} Y) \simeq X_R \underset{R}{\otimes} Y, \quad X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}(\mathsf{Mod}\text{-}S)),\ Y \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}(R\text{-}\mathsf{Mod})), $$

故 ${}_{R\to S}P$ 保持 K-平坦复形, 这就确保典范态射为同构.

根据完全类似的手法, 可以定义 $P_{R\to S} = (\cdot) \underset{R}{\otimes} S : \mathsf{Mod}\text{-}R \to \mathsf{Mod}\text{-}S$ 的左导出函子 $\mathrm{L}P_{R\to S}$, 它由 $(\cdot) \overset{\mathrm{L}}{\underset{R}{\otimes}} S$ 给出.

命题 4.12.10 *若 A 或 B 作为 $\Bbbk$-模是平坦的, 则有典范的 2-胞腔图表*

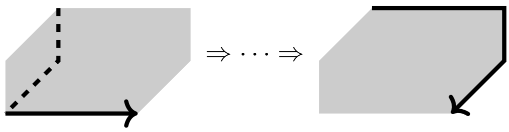
$$ \begin{tikzcd} \mathsf{D}((A,R)\text{-}\mathsf{Mod}) \times \mathsf{D}((R,B)\text{-}\mathsf{Mod}) \arrow[r, "\overset{\mathrm{L}}{\underset{R}{\otimes}}"] \arrow[d, "忘却"'] & \mathsf{D}((A,B)\text{-}\mathsf{Mod}) \arrow[d, "忘却"] \\ \mathsf{D}(\mathsf{Mod}\text{-}R) \times \mathsf{D}(R\text{-}\mathsf{Mod}) \arrow[r, "\overset{\mathrm{L}}{\underset{R}{\otimes}}"'] \arrow[ur, Rightarrow, "\sim"] & \mathsf{D}(\mathsf{Ab}). \end{tikzcd} $$

证明 这类性质大多借助解消来论证. 扼要地说, 设 X 是 (A, R)-双模构成的复形, Y 是 (R, B)-双模构成的复形. 根据命题 4.12.8, 不妨设 X_R (或 ${}_RY$) 是 K-平坦的; 此时 $X \underset{R}{\otimes} Y$ 同时给出第一行和第二行的 $\overset{\mathrm{L}}{\underset{R}{\otimes}}$, 由此得到同构 $\Rightarrow$, 暂且记为 α.

如欲抽象地刻画 α, 则可采用以下观点. 向所考察的图表另外叠加一层, 简单记为

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \mathsf{K}(\cdots)\times\mathsf{K}(\cdots) \arrow[rr, "\otimes_R"] \arrow[dl, "忘却"'] \arrow[dd] & & \mathsf{K}(\cdots) \arrow[dl, "忘却"'] \arrow[dd] \\
\mathsf{K}(\cdots)\times\mathsf{K}(\cdots) \arrow[rr, crossing over, "\otimes_R" near end] \arrow[dd] & & \mathsf{K}(\mathsf{Ab}) & \\
& \mathsf{D}(\cdots)\times\mathsf{D}(\cdots) \arrow[rr] \arrow[dl] & & \mathsf{D}(\cdots) \arrow[dl] \\
\mathsf{D}(\cdots)\times\mathsf{D}(\cdots) \arrow[rr] & & \mathsf{D}(\mathsf{Ab}) \arrow[from=uu, crossing over] &
\end{tikzcd}$$

其中垂直箭头都是局部化函子. 我们希望将底面填充为 $\begin{tikzcd}[sep=small]\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] \arrow[ur, Rightarrow] & \bullet\end{tikzcd}$. 方块的其余各面都容易处理: 基于左导出双函子的定义, 前后两面有如是填充; 基于局部化的泛性质, 左右两面精确到同构是交换的; 回顾张量积的定义可知顶面也交换. 按图索骥, 可得合成函子之间的态射

 $=: \sqsupset$.

回忆到 $\mathsf{D}(\cdots)\times\mathsf{D}(\cdots)\to\mathsf{D}(\cdots)$ 作为右 Kan 延拓是绝对的 (命题 1.11.3), 故合成

$$\mathsf{D}((A,R)\text{-}\mathsf{Mod})\times\mathsf{D}((R,B)\text{-}\mathsf{Mod}) \xrightarrow{\overset{\mathrm{L}}{\otimes}_R} \mathsf{D}((A,B)\text{-}\mathsf{Mod}) \xrightarrow{忘却} \mathsf{D}(\mathsf{Ab})$$

也是 $\sqsupset$ 沿 $\mathsf{K}(\cdots)\times\mathsf{K}(\cdots)\to\mathsf{D}(\cdots)\times\mathsf{D}(\cdots)$ 的右 Kan 延拓. 应用右 Kan 延拓的观察及其泛性质 (定义 1.8.1) 即得所求之 α.

一旦确认了 α 的存在性, 再按证明第一段的方式代入 K-平坦复形, 将一切函子提到上层计算, 即可证 α 为同构. □

今后经常省略这类基于泛性质的论证, 改以解消直接验证.

推论 4.12.11 对于定义 4.12.2 的函子 $\overset{\mathrm{L}}{\underset{R}{\otimes}}$, 在 A 或 B 作为 $\Bbbk$-模平坦的条件下有典范同构

$$\mathrm{H}^{-n}\left(X\overset{\mathrm{L}}{\underset{R}{\otimes}}Y\right)\simeq\mathrm{Tor}_n^R(X,Y),\quad n\in\mathbb{Z},$$

其中 X 是 (A,R)-双模, Y 是 (R,B)-双模, Tor_n^R 如定义–命题 3.14.7.

证明 左式来自命题 4.12.10 的图表按 ⮧ 方向的合成, 右式来自按 ↳ 方向的合成. □

命题 4.12.12 (结合约束) 设 A, B, R, S 为 $\Bbbk$-代数. 考虑以下两个函子

$$\begin{gathered}\mathsf{D}((A,R)\text{-}\mathsf{Mod})\times\mathsf{D}((R,S)\text{-}\mathsf{Mod})\times\mathsf{D}((S,B)\text{-}\mathsf{Mod})\to\mathsf{D}((A,B)\text{-}\mathsf{Mod})\\ (X,Y,Z)\mapsto(X\overset{\mathrm{L}}{\underset{R}{\otimes}}Y)\overset{\mathrm{L}}{\underset{S}{\otimes}}Z\\ (X,Y,Z)\mapsto X\overset{\mathrm{L}}{\underset{R}{\otimes}}(Y\overset{\mathrm{L}}{\underset{S}{\otimes}}Z).\end{gathered}$$

若 A 和 B 作为 $\Bbbk$-模皆平坦, 则有典范同构

$$a(X,Y,Z):(X\overset{\mathrm{L}}{\underset{R}{\otimes}}Y)\overset{\mathrm{L}}{\underset{S}{\otimes}}Z\xrightarrow{\sim}X\overset{\mathrm{L}}{\underset{R}{\otimes}}(Y\overset{\mathrm{L}}{\underset{S}{\otimes}}Z).$$

证明 固定 Y. 基于命题 4.12.8, 不妨设 X_R 和 $_RZ$ 为 K-平坦的. 于是所有 $\overset{\mathrm{L}}{\underset{R}{\otimes}}$ 都可以在复形的层次计算, 一切回归张量积的结合约束 [25, 命题 6.5.12]. □

在平坦性的前提下, 三个以上的对象按种种次序取 $\overset{\mathrm{L}}{\otimes}$, 得到的结果依照结合约束两两同构; 这些同构也服从融贯性, 具体可以仿照幺半范畴的五角形公理来表述, 见 [25, 定义 3.1.1]. 方法仍是取 K-平坦解消, 化约到复形层次去验证. 本书省墨, 仅拈出交换环的特例.

例 4.12.13 (交换环的 $\overset{\mathrm{L}}{\otimes}$) 设 R 为交换环. 在 $\overset{\mathrm{L}}{\otimes}:=\overset{\mathrm{L}}{\underset{R}{\otimes}}$ 的定义中将所有环取作 R, 特别地 $\Bbbk=R$, 如此则 (R,R)-Mod $=R$-Mod, 而之前关于平坦性的假设平凡地成立; 特别地, $\mathrm{H}^{-n}(X\overset{\mathrm{L}}{\otimes}Y)\simeq\mathrm{Tor}_n^R(X,Y)$ 对所有 R-模 X, Y 皆成立.

这使得 $\mathsf{D}(R\text{-}\mathsf{Mod})$ 对 $\overset{\mathrm{L}}{\otimes}$ 成为 [25, §3.1] 介绍的幺半范畴, 其幺元由 R 本身给出, 结合约束来自 4.12.12 的 $a=(a(X,Y,Z))_{X,Y,Z}$. 留意到 R 是平坦 R-模, 因而是 K-平坦的 (命题 4.12.4), 于是 $R\overset{\mathrm{L}}{\otimes}(\cdot)$ 和 $(\cdot)\overset{\mathrm{L}}{\otimes}R$ 皆可在复形层次计算, 由此易证幺半范畴的所有公理. 进一步, $\mathsf{D}(R\text{-}\mathsf{Mod})$ 还是 [25, 定义 3.3.1] 的对称幺半范畴. 对应的辫结构 (或称交换约束) $c(X,Y):X\overset{\mathrm{L}}{\otimes}Y\xrightarrow{\sim}Y\overset{\mathrm{L}}{\otimes}X$ 来自复形层次的交换约束, 公理同样在复形层次检验; 鉴于命题 3.5.6, 全复形的上标对调在此不成问题.

例 4.12.14 (Tor 代数) 承接例 4.12.13 的讨论, 设 R 交换. 将 R-模构成的复形 X,Y,Z,W 等同于它们在导出范畴中的像. 对所有 $(p,q)\in\mathbb{Z}^2$, 我们有典范态射

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^{-p}\left(X\overset{\mathrm{L}}{\otimes}Y\right)\otimes\mathrm{H}^{-q}\left(Z\overset{\mathrm{L}}{\otimes}W\right)&\to\mathrm{H}^{-p-q}\left((X\overset{\mathrm{L}}{\otimes}Y)\overset{\mathrm{L}}{\otimes}(Y\overset{\mathrm{L}}{\otimes}Z)\right)\\ &\simeq\mathrm{H}^{-p-q}\left((X\overset{\mathrm{L}}{\otimes}Z)\overset{\mathrm{L}}{\otimes}(Y\overset{\mathrm{L}}{\otimes}W)\right)\to\mathrm{H}^{-p-q}\left((X\otimes Z)\overset{\mathrm{L}}{\otimes}(Y\otimes W)\right),\end{aligned}$$

第一段是命题 4.7.7 的应用 (取 $F=\otimes$), 第二段用到 $(\mathsf{D}(R\text{-}\mathsf{Mod}),\overset{\mathrm{L}}{\otimes})$ 的结合约束和交

换约束, 第三段则来自 $\overset{\mathrm{L}}{\otimes}$ 作为左导出双函子自带的典范态射

$$QX_1 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} QX_2 \to Q(X_1 \otimes X_2), \quad X_1, X_2 \in \mathrm{Ob}(\mathsf{K}(R\text{-}\mathsf{Mod})),$$

精确起见, 此处重新标注了局部化函子 $Q : \mathsf{K}(R\text{-}\mathsf{Mod}) \to \mathsf{D}(R\text{-}\mathsf{Mod})$.

◇ 上述三段典范态射的合成, 给出 Tor 函子的 "外乘":

$$\mathrm{Tor}_p^R(X,Y) \otimes \mathrm{Tor}_q^R(Z,W) \to \mathrm{Tor}_{p+q}^R(X \otimes Z, Y \otimes W).$$

◇ 取 $Z = X$, $W = Y$ 为 R-代数 (集中在 0 次项), 其乘法给出 R-模同态 $X \otimes X \to X$ 和 $Y \otimes Y \to Y$. 外乘再和这些同态作合成, 便有

$$\mathrm{Tor}_p^R(X,Y) \otimes \mathrm{Tor}_q^R(X,Y) \to \mathrm{Tor}_{p+q}^R(X,Y),$$

称为 Tor 函子的 "内乘". 这使 $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Tor}_n^R(X,Y)$ 成为 [25, 定义 7.4.1] 所谓的 $\mathbb{Z}$-分次 R-代数, 称为 Tor 代数: 它仅在非负次数项非零, 0 次项给出子代数 $\mathrm{Tor}_0^R(X,Y) = X \otimes Y$, 后者的定义可见 [25, 定义 7.3.1]. 乘法所需的结合律可以化约到 $\overset{\mathrm{L}}{\otimes}$ 的结合约束和 X, Y 各自的乘法结合律来验证.

◇ 进一步要求 X 和 Y 是交换 R-代数. 这时 Tor 代数还是 [25, 定义 7.4.3] 所谓的 "反交换" $\mathbb{Z}$-分次代数[7]: 对所有 $p, q \in \mathbb{Z}$,

$$a \in \mathrm{Tor}_p^R(X,Y),\ b \in \mathrm{Tor}_q^R(X,Y) \implies ab = (-1)^{pq} ba.$$

既然 $X \otimes X \to X$ 和 $Y \otimes Y \to Y$ 皆交换, 正负号何来? 根源在外乘的定义: 命 C_1, C_2 为 $X \overset{\mathrm{L}}{\otimes} Y$ 的两份副本, 则 ab 和 ba 差一个同构 $C_1 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} C_2 \xrightarrow{\sim} C_2 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} C_1$, 即 $\overset{\mathrm{L}}{\otimes}$ 的交换约束; 若将 C_1, C_2 以 K-平坦复形表之, 则此同构在全复形的层次上正是命题 3.5.6 定义的同构 $r_{C_1^\bullet \otimes C_2^\bullet}$, 它在 (p,q) 次项给出符号 $(-1)^{pq}$.

回到一般的 $\Bbbk$-代数. 为了探讨 $\overset{\mathrm{L}}{\otimes}$ 和 RHom 的伴随关系, 我们尚需一则引理. 以下用 $\mathrm{RHom}_{(A,B)}$ 表示 (A,B)-Mod 的 RHom, 其余种类的双模 (或左模, 右模) 范畴依此类推.

引理 4.12.15 取定 $\Bbbk$-代数 A, B, R. 假定 B 作为 $\Bbbk$-模平坦, 则从 (A,B)-Mod 到 A-Mod 的忘却函子保持 K-内射复形, 而且 RHom_A 典范地升级为函子

$$\mathsf{D}\left((A,R)\text{-}\mathsf{Mod}\right)^{\mathrm{op}} \times \mathsf{D}\left((A,B)\text{-}\mathsf{Mod}\right) \to \mathsf{D}\left((R,B)\text{-}\mathsf{Mod}\right),$$

[7] 字面意义稍有误导性, 因为此性质是交换性的自然体现.

换言之, 有典范的 2-胞腔图表

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{D}\left((A,R)\text{-}\mathsf{Mod}\right)^{\mathrm{op}} \times \mathsf{D}\left((A,B)\text{-}\mathsf{Mod}\right) \arrow[r] \arrow[d, "忘却"'] & \mathsf{D}\left((R,B)\text{-}\mathsf{Mod}\right) \arrow[d, "忘却"] \arrow[dl, Rightarrow, "\sim"'] \\
\mathsf{D}(A\text{-}\mathsf{Mod})^{\mathrm{op}} \times \mathsf{D}(A\text{-}\mathsf{Mod}) \arrow[r, "\mathrm{RHom}_A"'] & \mathsf{D}(\mathsf{Ab}).
\end{tikzcd}$$

同理, 在 A 作为 $\Bbbk$-模平坦的前提下, RHom_B 也有类似的升级版本.

证明 若 B 是平坦 $\Bbbk$-模, 则 $Y \mapsto {}_AY$ 有正合的左伴随 $(\cdot) \underset{\Bbbk}{\otimes} B$, 故它保持 K-内射复形.

其次, 取 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{K}((A,R)\text{-}\mathsf{Mod}))$, $Y \in \mathrm{Ob}(\mathsf{K}(R,B)\text{-}\mathsf{Mod})$, 使得 Y 为 K-内射的. 根据上一步, $\mathrm{Hom}^\bullet({}_AX, {}_AZ)$ 确定 $\mathrm{RHom}_A({}_AX, {}_AZ)$, 但它同时也是 (R,B)-双模构成的复形. 这就完成了升级手续. □

定理 4.12.16 (RHom 和 $\overset{\mathrm{L}}{\otimes}$ 的伴随关系) 设 A, B, R 为 $\Bbbk$-代数. 以下 X, Y, Z 分别表 $\mathsf{D}((A,R)\text{-}\mathsf{Mod})$, $\mathsf{D}((R,B)\text{-}\mathsf{Mod})$, $\mathsf{D}((A,B)\text{-}\mathsf{Mod})$ 的对象. 假设 B 作为 $\Bbbk$-模平坦, 此时存在 $\mathsf{D}(\Bbbk)$ 中的典范同构

$$\mathrm{RHom}_{(A,B)}\left(X \overset{\mathrm{L}}{\underset{R}{\otimes}} Y, Z\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{RHom}_{(R,B)}\left(Y, \mathrm{RHom}_A\left({}_AX, {}_AZ\right)\right).$$

若假设 A 作为 $\Bbbk$-模平坦, 则存在 $\mathsf{D}(\Bbbk)$ 中的典范同构

$$\mathrm{RHom}_{(A,B)}\left(X \overset{\mathrm{L}}{\underset{R}{\otimes}} Y, Z\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{RHom}_{(A,R)}\left(X, \mathrm{RHom}_B\left(Y_B, Z_B\right)\right).$$

证明 考虑第一式. 设 Y 是 K-投射的, Z 是 K-内射的. 引理 4.12.6 确保 ${}_RY$ 是 K-平坦的, 而引理 4.12.15 确保 ${}_AZ$ 仍是 K-内射的. 所示的 RHom 和 $\overset{\mathrm{L}}{\underset{R}{\otimes}}$ 都可以在复形的层次来确定, 所求的同构因此化约为经典的伴随关系 [25, 定理 6.6.5]. 第二式的处理方法类似. □

例 4.12.17 (环变换的伴随关系) 对于例 4.12.9 的情形 (取 $R \to S$ 为 $\Bbbk$-代数的同态, $A = S$, $B = \Bbbk$ 和 $X = S$), 定理 4.12.16 的第一式化为典范同构

$$\begin{gathered}
\mathrm{RHom}_S\left(\mathrm{L}_{R\to S}P(Y), Z\right) \simeq \mathrm{RHom}_R\left(Y, {}_RZ\right), \\
Y \in \mathrm{Ob}(\mathsf{D}(R\text{-}\mathsf{Mod})), \quad Z \in \mathrm{Ob}(\mathsf{D}(S\text{-}\mathsf{Mod})).
\end{gathered}$$

为此, 唯一待说明的是 $\mathrm{RHom}_S({}_SS, {}_SZ) \simeq {}_RZ$: 这直接来自复形层次的同构

$$\mathrm{Hom}^\bullet\left({}_SS, \cdot\right) \simeq {}_R(\cdot) : S\text{-}\mathsf{Mod} \to R\text{-}\mathsf{Mod}.$$

如果进一步要求 R 和 S 皆是交换环, 则 RHom_S (或 RHom_R) 取值在 $\mathsf{D}(S\text{-}\mathsf{Mod})$ (或 $\mathsf{D}(R\text{-}\mathsf{Mod})$). 此时的伴随同构进一步改写作 $\mathsf{D}(R\text{-}\mathsf{Mod})$ 中的典范同构

$${}_R\mathrm{RHom}_S\left(\mathrm{L}_{R\to S}P(Y), Z\right) \simeq \mathrm{RHom}_R\left(Y, {}_RZ\right).$$

一切都可以通过取 K-内射和 K-投射解消在复形层面来验证. 右模情形自不待言.

习题

1. 设 $(\mathcal{D}, T, \mathcal{H})$ 为预三角范畴 (或三角范畴). 按下式定义一族新的三角 $\mathcal{H}^-$:

$$[X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX] \in \mathcal{H} \iff [X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{-h} TX] \in \mathcal{H}^-.$$

(i) 证明 $(\mathcal{D}, T, \mathcal{H}^-)$ 也是预三角范畴 (或三角范畴).

(ii) 证明 $(\mathcal{D}, T, \mathcal{H})$ 和 $(\mathcal{D}, T, \mathcal{H}^-)$ 作为预三角范畴相互等价.

2. 设 $(\mathcal{D}, T, \mathcal{H})$ 为预三角范畴. 证明 $\mathcal{D}$ 中的每个单态射 (或满态射) $u : X \to Y$ 都有左逆 (或右逆). 以此说明预三角范畴若是 Abel 范畴, 则必然分裂 (定义 2.7.6).

提示 将单态射 u 置入好三角 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$. 由 $u \circ T^{-1}w = 0$ 推导 $w = 0$, 再应用命题 4.2.6.

3. 应用上一道习题, 举出 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的例子使得 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 和 $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ 皆非 Abel 范畴.

提示 考虑 $\mathcal{A} = \mathsf{Ab}$ 中的态射 $f : \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, 其中 p 是素数. 假若 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ 是 Abel 范畴, 则讨论 $\mathsf{K}f$ 和 $\mathrm{H}^0(\mathsf{K}f)$ 的满–单分解, 将它们拆成直和项的投影和包含态射, 可导致矛盾.

4. 设 $\mathcal{A}$ 为 Abel 范畴. 证明 $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ 是 Abel 范畴当且仅当 $\mathcal{A}$ 分裂.

提示 对于 "仅当" 方向, 将 $\mathcal{A}$ 嵌入 $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ 并应用前几道习题的结果. 至于 "当" 的方向, 试对分裂之 $\mathcal{A}$ 说明取上同调给出从 $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ 到 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 的等价.

5. (预三角范畴的 K_0) 对任意预三角范畴 $(\mathcal{D}, T, \mathcal{H})$, 定义 $\mathrm{K}_0(\mathcal{D})$ 为 $\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ 生成的自由 $\mathbb{Z}$-模对以下关系的商,

$$\text{存在好三角 } X \to Y \to Z \xrightarrow{+1} \implies [X] - [Y] + [Z] = 0,$$

其中 $[X] \in \mathrm{K}_0(\mathcal{A})$ 代表含 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ 的等价类.

(i) 证明 $[0] = 0$, $[TX] = -[X]$ 和 $[X \oplus Y] = [X] + [Y]$.

(ii) 说明任何三角函子 $F : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ 都诱导典范同态 $\mathrm{K}_0(\mathcal{D}) \to \mathrm{K}_0(\mathcal{D}')$.

(iii) 说明任何上同调函子 $H : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ 都诱导典范同态 $\mathrm{K}_0(\mathcal{D}) \to \mathrm{K}_0(\mathcal{A})$, 其中 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴. 提示 用引理 2.9.9 (iv).

(iv) 考虑特例 $\mathcal{D} := \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{A})$. 给出互逆的同构

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{K}_0(\mathcal{A}) & \rightleftarrows & \mathrm{K}_0(\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{A})) \\ [A] & \longmapsto & [A] \\ \sum_n (-1)^n [\mathrm{H}^n(X)] & \longleftarrow\!\shortmid & [X] \end{array}$$

其中 $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, 也看作集中在 0 次项的复形. 提示 一个方向明显互逆, 另一个方向则需要复形的截断.

6. 设 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{D}(\mathcal{A}))$, 证明

$$X \in \mathsf{D}^{\leq 0}(\mathcal{A}) \iff \forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathsf{D}^{\geq 1}(\mathcal{A})),\ \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}(X, Z) = 0,$$
$$X \in \mathsf{D}^{\geq 0}(\mathcal{A}) \iff \forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathsf{D}^{\leq -1}(\mathcal{A})),\ \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}(Z, X) = 0.$$

提示 应用命题 4.5.3 (i) 以及命题 4.4.13 的伴随对和好三角.

7. 在定理 4.6.5 的情境下, 说明有函子及其间态射的交换图表 (省略符号 $\mathcal{N}, \ldots$):

$$\begin{tikzcd} \mathrm{R}(F''F'F) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{R}(F''F')\mathrm{R}F \arrow[d] \\ \mathrm{R}F''\mathrm{R}(F'F) \arrow[r] & \mathrm{R}F''\mathrm{R}F'\mathrm{R}F \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{L}(F''F'F) \arrow[r, leftrightarrow] & \mathrm{L}(F''F')\mathrm{L}F \\ \mathrm{L}F''\mathrm{L}(F'F) \arrow[u] & \mathrm{L}F''\mathrm{L}F'\mathrm{L}F. \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

8. 对 $F = \mathrm{Hom}$ 明确命题 4.7.7 给出的典范态射, 表为 $\mathrm{Ext}^{q-p}(X, Y) \to \mathrm{Hom}\left(\mathrm{H}^p(X), \mathrm{H}^q(Y)\right)$.

9. 如将定理 4.5.13 的双射改为以下形式: 从 n-扩张 $0 \to Y \to E^1 \to \cdots \to E^n \to X \to 0$ 构造 $t^{-1}b \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}(X, Y[n])$ 如下

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "b"'] \\ Z \\ Y[n] \arrow[u, "t:\text{拟同构}"] \end{tikzcd} \qquad \Bigg| \qquad \begin{tikzcd} & & & X \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ E^1 \arrow[r] & E^2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X \\ Y \arrow[u] \end{tikzcd}$$

由此得到 $t^{-1}b \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}(X, Y[n])$. 证明它和基于 as^{-1} 的原双射相差 $(-1)^n$. 对于 $n = 1$ 的特例, 用 $t^{-1}b$ 的版本推导命题 4.5.14 的相应版本 (涉及 id_Y 的像).

提示 证明 $ta - (-1)^n bs$ 典范地零伦. 对于第二部分, 留意命题 4.4.7 中的负号.

10. 设 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的所有对象 S, T 皆满足 $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{A}}(S, T) = 0$. 证明每个 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{A}))$ 都同构于 $\bigoplus_n \mathrm{H}^n(X)[-n]$. 说明 $\mathcal{A} := \mathbb{Z}\text{-}\mathsf{Mod}$ 满足此条件.

提示 不妨设 X 是有界复形. 从 $n \gg 0$ 的情形起步, 对 2-扩张 $0 \to \ker(d^n) \to X^n \xrightarrow{d^n} X^{n+1} \to \mathrm{coker}(d^n) \to 0$ 应用定理 4.5.13 和命题 4.5.15, 在同构意义下逐步修改 X 使得 $d^\bullet = 0$.

11. 证明若 $\mathcal{A}$ 有足够的内射对象, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ 是左正合加性函子, 而 $\mathrm{R}F$ 的维数有限, 则从三角函子 $\mathrm{R}F$ 诱导的 $\mathrm{K}_0(\mathcal{A}) \simeq \mathrm{K}_0(\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{A})) \to \mathrm{K}_0(\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{A}')) \simeq \mathrm{K}_0(\mathcal{A}')$ 由下式确定

$$[A] \mapsto \sum_n (-1)^n \left[\mathrm{R}^n F(A)\right], \quad A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}).$$

12. 设 R 为环, 证明 $\mathsf{C}(R\text{-}\mathsf{Mod})$ 中的 K-平坦复形的滤过 $\varinjlim$ 仍然平坦.

13. 设 R 为环. 若 R-模构成的复形 P 是 K-平坦的, 而且每个 P^n 都是平坦 R-模, 则称 P 是强 K-平坦的.

(i) 证明对于任何 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}(R\text{-}\mathsf{Mod}))$ 都存在强 K-平坦复形连同拟同构 $P \to X$. 提示 将 K-内射解消存在性的论证适当地对偶化 (见 §3.15).

(ii) 以 $\mathcal{SF}$ 表示强 K-平坦复形在 $\mathsf{K}(R\text{-}\mathsf{Mod})$ 中组成的全子范畴. 将范畴 $\mathsf{D}(R\text{-}\mathsf{Mod})$ 表成 $\mathcal{SF}$ 对拟同构的局部化.

14. (P. Berthelot, A. Ogus) 设 f 为交换环 R 中的非零因子. 对任意 R-模 M, 记 $M[f] := \{m \in M : fm = 0\}$; 满足 $M[f] = \{0\}$ 的模 M 称为是 f-无挠的. 先说明 f-无挠的 M 可嵌入为 $M[\frac{1}{f}] = M \underset{R}{\otimes} R[\frac{1}{f}]$ 的子模, 故 $f^m M$ 对任何 $m \in \mathbb{Z}$ 都有意义.

设 X 是由 f-无挠 R-模构成的复形, 基于上述观察, 定义 $X^\bullet \underset{R}{\otimes} R[\frac{1}{f}]$ 的子复形 $\eta_f X$ 为

$$(\eta_f X)^n := \left\{x \in f^n X^n : d_X^n(x) \in f^{n+1} X^{n+1}\right\}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

(i) 证明逐项乘以 f 给出同构 $\eta_f(X[1]) \xrightarrow{\sim} (\eta_f X)[1]$.

(ii) 说明若 $f, g \in R$ 皆非零因子, 每个 X^n 都是 fg-无挠的, 则 $\eta_f \eta_g X = \eta_{fg} X$.

(iii) 给出典范同构 $\mathrm{H}^n(X)/\mathrm{H}^n(X)[f] \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n(\eta_f X)$; 因此 η_f 的效果是矫正 f-挠. 由此推导若 X, Y 是由 f-无挠 R-模构成的复形, $\alpha : X \to Y$ 是拟同构, 则它限制为拟同构 $\eta_f(\alpha) : \eta_f X \to \eta_f Y$.

(iv) 证明 η_f 按此诱导加性函子 $\mathrm{L}\eta_f : \mathsf{D}(R\text{-}\mathsf{Mod}) \to \mathsf{D}(R\text{-}\mathsf{Mod})$, 使得它拉回 $\mathcal{SF}$ (符号如上题) 等于 η_f.

(v) 说明 $\mathrm{L}\eta_f$ 不是三角函子. 因此它并非定义 4.6.1 下的左导出函子, 尽管它仍是一个右 Kan 延拓.

提示 取 $R = \mathbb{Z}$ 和 $f = p$ 为素数. 验证 $\mathrm{L}\eta_p(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$ 而 $\mathrm{L}\eta_p(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

15. 承上题, 给出典范态射 $\mathrm{L}\eta_f X \overset{\mathrm{L}}{\underset{R}{\otimes}} \mathrm{L}\eta_f Y \to \mathrm{L}\eta_f \left(X \overset{\mathrm{L}}{\underset{R}{\otimes}} Y \right)$, 并且说明它在适当意义下对 X 和 Y 是对称的. 实际上, 按照 [25, 注记 3.1.8] 的语言, $\mathrm{L}\eta_f$ 对 $\overset{\mathrm{L}}{\underset{R}{\otimes}}$ 是右松幺半函子.

第五章 谱序列

♣♣♣ 待撰写

阅读提示

♣♣♣ 待撰写

本章除了少部分简单定义, 不依赖 §4 的内容. 两章可以独立地阅读.

5.1 滤过与分次结构

我们在定义 3.1.2 已经和分次对象打过照面: 任意范畴 $\mathcal{A}$ 上的 $\mathbb{Z}$-分次对象简称**分次对象**, 它们按定义即 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 的对象 $(X^p)_{p\in\mathbb{Z}}$; 其上的 $\mathbb{Z}^2$-分次对象简称**双分次对象**, 按定义即 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ 的对象 $(X^{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2}$. 分次 (或双分次) 对象之间的态射照例写作 $(f^p)_p$ (或 $(f^{p,q})_{p,q}$) 的形式. 态射逐项或曰 "逐次" 地作合成.

若 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, 则 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 和 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ 等等亦复如是; 取核, 取余核等种种操作都是逐次的.

范畴 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 带有平移自同构 T, 由 $(TX)^p = X^{p+1}$ 和 $(Tf)^p = f^{p+1}$ 确定. 推而广之, 范畴 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^n}$ 有一族平移自同构 $T_1, \ldots, T_n$, 对应到沿 n 个坐标的平移; 它们满足严格交换律 $T_iT_j = T_jT_i$.

在本章的框架下, 分次结构主要源自滤过结构.

定义 5.1.1 *考虑加性范畴 $\mathcal{A}$ 的对象 X.*

◇ 其**降滤过** $\mathrm{F}^\bullet X$ 意谓一列子对象

$$\cdots \supset \mathrm{F}^p X \supset \mathrm{F}^{p+1} \supset \cdots \quad (p \in \mathbb{Z}).$$

◇ 若存在 $a \leq b$ 使得 $\mathrm{F}^a X = X$ 而 $\mathrm{F}^b X = 0$, 则称此滤过**有限**.

◇ 类似地定义**升滤过** $\mathrm{F}_\bullet X$ 及其有限性.

降滤过和升滤过可以按次数 p 标记的位置来区分, 不致混淆时, 统称为滤过. 按惯例, 在复形及其上同调的研究中习惯使用降滤过, 对于链复形及其同调则习惯用升滤过. 两者当然对偶. 本章考虑降滤过为主.

全体滤过对象 $(X, \mathrm{F}^\bullet X)$ 构成范畴 $\mathrm{Fil}^\bullet(\mathcal{A})$, 其间的态射 $f : (X, \mathrm{F}^\bullet X) \to (Y, \mathrm{F}^\bullet Y)$ 定为保持滤过的态射 $f : X \to Y$, 亦即要求 f 对每个 p 都限制为 $\mathrm{F}^p X \to \mathrm{F}^p Y$. 以类似方法定义范畴 $\mathrm{F}_\bullet(\mathcal{A})$.

对任意 X, 降滤过 $\mathrm{F}^\bullet X$ (或升滤过 $\mathrm{F}_\bullet X$) 给出分次对象 $(\mathrm{F}^p X)_{p\in\mathbb{Z}}$ (或 $(\mathrm{F}_p X)_{p\in\mathbb{Z}}$); 这给出函子 $\mathrm{Fil}^\bullet(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ (或 $\mathrm{Fil}_\bullet(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$), 称为 Rees 构造.

当 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴时, 我们还有另一种从滤过构造分次对象的手法.

定义 5.1.2 设 $\mathcal{A}$ 为 Abel 范畴, 考虑对象 X 的滤过 $\mathrm{F}^\bullet X$ (或 $\mathrm{F}_\bullet X$). 按下述方式定义分次对象 $\mathrm{gr}\, X$:

$$\mathrm{gr}^p X := \mathrm{F}^p X / \mathrm{F}^{p+1} X, \quad 或 \quad \mathrm{gr}_p X := \mathrm{F}_p X / \mathrm{F}_{p-1} X.$$

这给出函子 $\mathrm{gr} : \mathrm{Fil}^\bullet(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ (或 $\mathrm{gr} : \mathrm{Fil}_\bullet(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$).

Rees 构造和 $\mathrm{gr}\, X$ 的关系是 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 中的典范同构

$$\mathrm{gr}\, X \simeq \left(\mathrm{F}^p X\right)_p \big/ \left(\mathrm{F}^{p+1} X\right)_p.$$

对于升滤过 $\mathrm{F}_\bullet X$ 当然也有相应的陈述.

为了从 $(\mathrm{gr}^p X)_p$ 萃取 X 的信息, 起码的要求是 $\bigcup_p \mathrm{F}^p X = X$ 而 $\bigcap_p \mathrm{F}^p X = 0$, 而为了使前一个性质真正有用, 我们还希望 $\varinjlim_{p\to-\infty}$ 在 $\mathcal{A}$ 中正合, 或者索性要求存在 M 使得 $\mathrm{Fil}^M X = X$. 且先引入几个相关概念.

定义 5.1.3 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, 对象 X 带滤过 $\mathrm{F}^\bullet X$.

◇ 若 $\bigcap_p \mathrm{F}^p X = 0$, 则称 $\mathrm{F}^\bullet X$ 是**分离**的.

◇ 若 $\bigcup_p \mathrm{F}^p X = X$, 而且以下任一条件成立时, 称 $\mathrm{F}^\bullet X$ 是**穷竭**的:

(a) $\mathcal{A}$ 有正合的滤过可数 $\varinjlim$, 更确切地说, $\varinjlim : \mathcal{A}^{(\mathbb{Z}_{\geq 0}, \leq)} \to \mathcal{A}$ 存在而且正合[1];
(b) 存在 $M \in \mathbb{Z}$ 使得 $\mathrm{F}^M X = X$.

[1]若 $\mathcal{A}$ 是 Grothendieck 范畴, 则 (a) 自动成立.

◇ 若典范态射族 $X \twoheadrightarrow X/\mathrm{F}^p X$ 诱导同构 $X \xrightarrow{\sim} \varprojlim_p X/\mathrm{F}^p X$, 则称滤过 $\mathrm{F}^\bullet X$ 是**完备**的.

升滤过 $\mathrm{F}_\bullet X$ 的情形类此.

完备性受拓扑群的情形启发, 见 [25, §4.10].

有限滤过自动是分离, 穷竭而完备的, 这也是本章需要的主要情形. 注意到若存在 N 使得 $\mathrm{F}^N X = 0$, 则 $\mathrm{F}^\bullet X$ 分离而完备; 又因为 $X \to \varprojlim_p X/\mathrm{F}^p X$ 以 $\bigcap_p \mathrm{F}^p X$ 为核, 故完备蕴涵分离.

穷竭滤过的像仍是穷竭滤过. 此外, 穷竭滤过还满足

$$\begin{aligned} \varinjlim_{p \to -\infty} \mathrm{F}^p X &\xrightarrow{\sim} \bigcup_p \mathrm{F}^p X = X, \\ K = K \cap \left(\bigcup_p \mathrm{F}^p X \right) &= \bigcup_p \left(K \cap \mathrm{F}^p X \right), \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

其中 K 是 X 的任意子对象. 在穷竭滤过的条件 (a) 之下, 这些是命题 2.10.3 的简单内容, 而在条件 (b) 之下则是平凡的.

命题 5.1.4 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, $f : (X, \mathrm{F}^\bullet X) \to (Y, \mathrm{F}^\bullet Y)$ 是 $\mathrm{Fil}^\bullet(\mathcal{A})$ 的态射.

(i) 设 $\mathrm{F}^\bullet X$ 分离而且穷竭. 若 $\mathrm{gr}(f)$ 单, 则 f 单.

(ii) 设 $\mathrm{F}^\bullet X$ 完备而穷竭, $\mathrm{F}^\bullet Y$ 分离而穷竭, $Y = \bigcup_p \mathrm{F}^p Y$. 若 $\mathrm{gr}(f)$ 是同构, 则 f 亦然, 而此时 $\mathrm{F}^\bullet Y$ 也完备.

对于升滤过同样有相应的陈述.

证明 对每个 $p \in \mathbb{Z}$, 写下行正合交换图表

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{F}^{p+1} X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{F}^p X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \mathrm{gr}^p X \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{gr}^p(f)"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{F}^{p+1} Y \arrow[r] & \mathrm{F}^p Y \arrow[r] & \mathrm{gr}^p Y \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

记 $f : \mathrm{F}^p X \to \mathrm{F}^p Y$ 的核为 K^p, 余核为 C^p.

考虑 (i). 对上图应用定理 2.3.3, 可见 $K^{p+1} \xrightarrow{\sim} K^p$ 为同构. 特别地, $K^p \subset \bigcap_{\ell \geq p} \mathrm{F}^\ell X = 0$, 这说明 f 限制在每个 $\mathrm{F}^p X$ 上皆单. 为了说明 f 单, 需要的只是

$$\ker(f) \xlongequal{\because (5.1.1)} \bigcup_p \left(\ker(f) \cap \mathrm{F}^p X \right) = 0.$$

考虑 (ii), 此时除了 $K^{p+1} \xrightarrow{\sim} K^p$ 还有 $C^{p+1} \xrightarrow{\sim} C^p$. 对所有 $\ell > p$, 由此推得 f 诱导同构

$$\mathrm{F}^p X / \mathrm{F}^\ell X \xrightarrow{\sim} \mathrm{F}^p Y / \mathrm{F}^\ell Y.$$

两边同取 $\varinjlim_{p:p<\ell}$ 并应用 (5.1.1), 得 $X/\mathrm{F}^\ell X \xrightarrow{\sim} Y/\mathrm{F}^\ell Y$. 再同取 $\varprojlim_\ell$, 得交换图表

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "f"'] & \varprojlim_\ell X/\mathrm{F}^\ell X \arrow[d, "\simeq"] \\ Y \arrow[r, hook] & \varprojlim_\ell Y/\mathrm{F}^\ell Y \end{tikzcd}$$

由此见得 f 和 $Y \to \varprojlim_\ell Y/\mathrm{F}^\ell Y$ 都是同构. □

5.2 谱序列的一般定义

我们从微分对象的一般定义入手. 这涉及定义 4.1.1 所述的带平移的加性范畴 $(\mathcal{A}, T)$, 以及定义 4.1.2 所述的带次数的态射.

定义 5.2.1 带平移的加性范畴 $(\mathcal{A}, T)$ 上的**微分对象**意谓资料 (X, d), 其中 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ 而 $d : X \xrightarrow{+1} X$ 满足 $d^2 = 0$.

- ◇ 从 (X, d) 到 (X', d') 的态射是满足 $d'\alpha = \alpha d$ 的态射 $\alpha : X \to X'$.
- ◇ 全体微分对象构成范畴 $(\mathcal{A}, T)_d$; 另记 $\mathcal{A}_d := (\mathcal{A}, \mathrm{id}_{\mathcal{A}})_d$.

若 $\mathcal{A}$ 是 Ab-范畴 (或 $\Bbbk$-Mod-范畴, $\Bbbk$ 是交换环), 则 $(\mathcal{A}, T)_d$ 亦然. 忘却函子 $(\mathcal{A}, T)_d \to \mathcal{A}$ 映 (X, d) 为 X.

命题 5.2.2 忘却函子 $(\mathcal{A}, T)_d \to \mathcal{A}$ 生所有 $\varinjlim$ 和 $\varprojlim$ (定义 1.5.2).

证明 请回放引理 3.1.4 的证明. □

特别地, 若 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, 则 $(\mathcal{A}, T)_d$ 亦然, 而 $(\mathcal{A}, T)_d \to \mathcal{A}$ 正合.

对于 Abel 范畴的情形, 微分对象的特色之一是它具有同调或上同调.

定义 5.2.3 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, 则可定义加性函子

$$\mathrm{H} : (\mathcal{A}, T)_d \to \mathcal{A}, \quad \mathrm{H}(X, d) := \ker(d)/\operatorname{im}(T^{-1}d).$$

我们称 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中的三角图表 $\begin{tikzcd} A \arrow[rr] & & B \arrow[dl] \\ & C \arrow[ul, "+m"] & \end{tikzcd}$ 正合, 如果

$$\cdots T^{k-m}C \to T^k A \to T^k B \to T^k C \to T^{k+m} A \cdots$$

是正合列, 两边无穷延伸. 更一般的带次数的三角图表则依此类推.

引理 5.2.4 选定带平移的 Abel 范畴 $(\mathcal{A}, T)$. 若 $0 \to (X', d') \to (X, d) \to (X'', d'') \to 0$ 是 $(\mathcal{A}, T)_d$ 的短正合列, 则下图在每个顶点皆正合:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \mathrm{H}(X', d') \arrow[rr] & & \mathrm{H}(X, d). \arrow[dl] \\ & \mathrm{H}(X'', d'') \arrow[ul, "+1"] & \end{tikzcd}$$

证明 对复形的正合列

$$0 \to (T^n X', T^n d')_n \to (T^n X, T^n d)_n \to (T^n X'', T^n d'')_n \to 0$$

应用命题 3.6.4. $\square$

例 5.2.5 (复形作为微分对象) 对加性范畴 $\mathcal{A}$ 考虑 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 连同平移函子 $T : (X^n)_n \mapsto (X^{n+1})_n$. 根据 §3.1 的阐述, $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, T)_d$ 的对象又称微分分次对象, 而且有范畴的同构 $\mathsf{C}(\mathcal{A}) \simeq (\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, T)_d$. 当 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴时, 显见

$$\mathrm{H}(X, d) = (\mathrm{H}^p(X))_{p \in \mathbb{Z}}.$$

现在可以给出谱序列的定义. 为了简化论述, 以下先探讨不带平移, 或者说是态射不带次数的情形; 换言之, 取 $T = \mathrm{id}$.

定义 5.2.6 (J. Leray, J.-L. Koszul) 选定 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 和 $a \in \mathbb{Z}$. 从 a 起步的**谱序列**意谓资料 $\mathscr{E} = (E_r, d_r)_{r \in \mathbb{Z}_{\geq a}}$ 连同 $(t_r)_{r \geq a+1}$, 其中
- ⋄ $(E_r, d_r) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}_d)$;
- ⋄ $t_r : \mathrm{H}(E_{r-1}, d_{r-1}) \xrightarrow{\sim} E_r$, 其中 $r \geq a+1$;

符号中常省略资料 a 和 $(t_r)_r$.

谱序列之间的态射 $\mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ 意谓 $\mathcal{A}_d$ 的态射族 $\varphi_r : (E_r, d_r) \to (E'_r, d'_r)$, 使得 $t_r \mathrm{H}(\varphi_{r-1}) t_r^{-1} = \varphi_r$, 其中 $r \geq a+1$.

习惯称 (E_r, d_r) 为谱序列 $\mathscr{E}$ 的第 r 页; 自 E_r 计算 E_{r+1} 便是翻页. 谱序列具体从哪一页开始, 抽象观之无关宏旨, 实用中则要视具体情境而定.

如将谱序列的 d_r 视同态射 $\mathrm{H}(E_{r-1}, d_{r-1}) \to \mathrm{H}(E_{r-1}, d_{r-1})$, 则 $\ker(d_r) \supset \mathrm{im}(d_r)$ 俱对应 $\ker(d_{r-1})$ 的子对象, 俱包含 $\mathrm{im}(d_{r-1})$. 简单起见, 假定谱序列从 $a = 0$ 起步. 命 Z_1 (或 B_1) 为 $\ker(d_0)$ (或 $\mathrm{im}(d_0)$), 再命 Z_2 (或 B_2) 为 $\ker(d_1)$ (或 $\mathrm{im}(d_1)$) 相对于 $E_0 \supset Z_1 \twoheadrightarrow E_1$ 的逆像, 依此类推. 迭代给出

$$\begin{gathered} 0 =: B_0 \subset B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset Z_2 \subset Z_1 \subset Z_0 =: E_0, \\ Z_r \leftrightarrow \ker(d_{r-1}), \quad B_r \leftrightarrow \mathrm{im}(d_{r-1}), \quad Z_r / B_r \simeq E_r. \end{gathered} \tag{5.2.1}$$

- ⋄ 若存在 $Z_\infty := \bigcap_r Z_r$ 和 $B_\infty := \bigcup_r B_r$, 则定义谱序列 $\mathscr{E}$ 的**极限**为 $E_\infty := Z_\infty / B_\infty$.

◇ 若存在 r 使得 $r' \geq r \implies d_{r'} = 0$, 则称 $\mathscr{E}$ 在 E_r 处**退化**; 此时易见 $Z_r = Z_{r+1} = \cdots$ 和 $B_r = B_{r+1} = \cdots$, 故 $Z_r = Z_\infty$, $B_r = B_\infty$; 作为推论, $E_r = E_\infty$.

以后探讨同调分次谱序列时, 将会改用 $(E^r, d^r)_r$ 和 B^r, Z^r 的记法.

命题 5.2.7 设 $\varphi_r : \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ 是谱序列的态射. 若 φ_r 是同构, 则当 $s \geq r$ 时 φ_s 也是同构; 在极限存在的前提下, $\varphi_\infty : E_\infty \to E'_\infty$ 也是同构.

证明 同构 φ_r 诱导同构 $\mathrm{H}(E_r, d_r) \to \mathrm{H}(E'_r, d'_r)$, 后者即 φ_{r+1}. 不妨设谱序列从 r 起步, 如此则 $(\varphi_s)_{s\geq r}$ 是谱序列的同构, 于是关于 φ_∞ 的断言平凡地成立. □

推而广之, 对于带平移的 Abel 范畴 $(\mathcal{A}, T)$, 谱序列的定义可以扩及 $(E_r, d_r) \in \mathrm{Ob}\left((\mathcal{A}, T^{a_r})_d\right)$ 的情形, 其中 $a_1, a_2, \ldots$ 是一列整数. 上述的 $\mathrm{H}(E_r, d_r)$ 和 B_r, Z_r 定义不变.

在往后需要的推广中, 还可以更进一步让 $\mathcal{A}$ 带一族相交换的自同构 $T_1, \ldots, T_n$, 而

$$d_r : E_r \xrightarrow{+\vec{a}_r} E_r, \quad \vec{a}_r = (a_{r,1}, \ldots, a_{r,n}) \in \mathbb{Z}^n.$$

且循此一思路, 介绍最常用的两种版本.

定义 5.2.8 (谱序列: 分次和双分次版本) 选定 Abel 范畴 $\mathcal{A}$. 按下述方式定义上同调分次谱序列和上同调双分次谱序列, 它们都写作 $\mathscr{E} = (E_r, d_r)_r$ 之形.

版本	E_r	d_r	态射次数
分次	$(E_r^p)_{p\in\mathbb{Z}} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$	$(d_r^p)_p$	$d_r^p : E_r^p \xrightarrow{+r} E_r^{p+r}$
双分次	$(E_r^{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}})$	$(d_r^{p,q})_{(p,q)}$	$d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \xrightarrow{+(r,-r+1)} E_r^{p+r,q-r+1}$

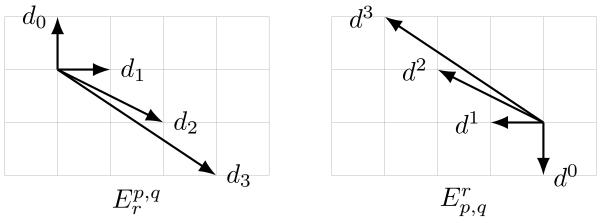
两种情况下都要求 $(d_r)^2 = 0$, 理解为带次数的态射作合成, 并且资料中都带有指定的同构 $\mathrm{H}(E_{r-1}, d_{r-1}) \xrightarrow{\sim} E_r$.

对偶地, 同调分次 (或双分次) 谱序列为定义为如下资料 $(E^r, d^r)_{r\geq 1}$, 依然要求 $(d^r)^2 = 0$ 并指定同构 $\mathrm{H}(E^r, d^r) \simeq E^{r+1}$:

版本	E^r	d^r	态射次数
分次	$(E_p^r)_{p\in\mathbb{Z}} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$	$(d_p^r)_p$	$d_p^r : E_p^r \xrightarrow{-r} E_{p-r}^r$
双分次	$(E_{p,q}^r)_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}})$	$(d_{p,q}^r)_{(p,q)}$	$d_{p,q}^r : E_{p,q}^r \xrightarrow{+(-r,r-1)} E_{p-r,q+r-1}^r$

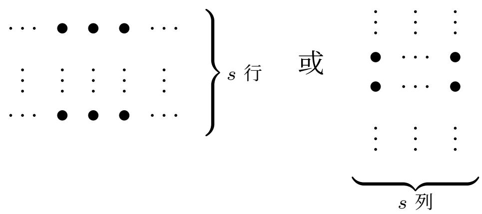
这些谱序列之间的态射按寻常方式定义, 须和指定的同构相容.

以 (p,q) 为坐标来绘图, 双分次谱序列中的 d_r 和 d^r 走向如下.



无论哪种版本, 都可以按照先前的模式来定义 $B_r^p \subset Z_r^p$, $B_r^{p,q} \subset Z_r^{p,q}$, E_∞^p, $E_\infty^{p,q}$ 和 $B^r_p \subset Z^r_p$, $E^r_{p,q} \subset Z^r_{p,q}$, E^∞_p, $E^\infty_{p,q}$ 等等对象.

例 5.2.9 (有限宽的情形) 许多常见场景中, 双分次谱序列的非零项集中在宽度为 s 的水平 (或竖直) 带状区域上, 其中 $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 如下图:



观察箭头走向可见 $r > s$ (或 $r \geq s$) 蕴涵 $d_r^{p,q} = 0$ 对所有 p, q 成立, 此时谱序列在 E_r 处退化. 同调情形类此.

定义 5.2.10 设 $\mathscr{E}$ 是上同调 (或同调) 双分次谱序列, $r \in \mathbb{Z}$. 若对于每个 $n \in \mathbb{Z}$, 至多仅有有限个 $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ 满足 $p+q=n$ 和 $E_r^{p,q} \neq 0$ (或 $E^r_{p,q} \neq 0$), 则称 E_r (或 E^r) **有界**.

从 $E_{r+1} \simeq \mathrm{H}(E_r, d_r)$ 可见 $E_r^{p,q} = 0 \implies E_{r+1}^{p,q} = 0$. 特别地, E_r 有界导致 E_{r+1} 有界. 同调情形类此.

命题 5.2.11 设上同调 (或同调) 双分次谱序列 $\mathscr{E}$ 满足 E_r (或 E^r) 有界, 则对于所有 $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$, 存在 $r(p,q)$ 使得当 $r \geq r(p,q) \implies E_r^{p,q} = E_{r+1}^{p,q}$ (或 $E^r_{p,q} = E^{r+1}_{p,q}$); 作为推论, $\mathscr{E}$ 的极限存在且满足 $E_r^{p,q} = E_\infty^{p,q}$ (或 $E^r_{p,q} = E^\infty_{p,q}$).

证明 讨论 E_r 情形即可. 给定 n. 基于有界性质, 当 r 充分大时, 对所有满足 $p+q=n$ 的 (p,q) 都有 $E_r^{p-r,q+r-1} = 0$, 因此 $B_r^{p,q} = 0$. 同理, r 充分大时 $E_r^{p+r,q-r+1} = 0$, 因此 $Z_r^{p,q} = E_r^{p,q}$. 明所欲证. □

定义 5.2.12 设 $\mathscr{E}$ 是上同调 (或同调) 双分次谱序列, $r \in \mathbb{Z}$. 若 $E_r^{p,q} \neq 0$ (或 $E^r_{p,q} \neq 0$) 蕴涵 $p, q \geq 0$, 则称 E_r (或 E^r) 落在第一象限, 类似方法可以定义其它象限的情形.

落在第一象限或第三象限的 E_r 显然有界. 从 $E_{r+1} \simeq \mathrm{H}(E_r, d_r)$ 可见若 E_r 落在第一象限等等, 则 E_{r+1} 亦然. 同调情形类此.

注记 5.2.13 (边缘计算) 落在第一象限的谱序列特别常见. 以上同调版本为例, 其边缘项 $E_r^{\bullet,0}$ 和 $E_r^{0,\bullet}$ 有特殊的性质. 选定 $p,q \geq 1$. 细心探究 d_r 走向, 并且回忆到 $E_{r+1} \simeq \mathrm{H}(E_r, d_r)$, 可以验证

$$\begin{aligned} E_2^{p,0} \twoheadrightarrow E_3^{p,0} \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow E_{p+1}^{p,0} = E_\infty^{p,0} \qquad & (\because \text{ 映出的 } d \text{ 全为 } 0), \\ E_\infty^{0,q} = E_{q+2}^{0,q} \hookrightarrow E_{q+1}^{0,q} \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow E_2^{0,q} \hookrightarrow E_1^{0,q} \qquad & (\because \text{ 映入的 } d \text{ 全为 } 0). \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

落在第一象限的同调双分次谱序列也有对应的性质: 我们有

$$\begin{aligned} E_{p,0}^\infty = E_{p,0}^{p+1} \hookrightarrow E_{p,0}^p \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow E_{p,0}^3 \hookrightarrow E_{p,0}^2 \qquad & (\because \text{ 映入的 } d \text{ 全为 } 0), \\ E_{0,q}^1 \twoheadrightarrow E_{0,q}^2 \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow E_{0,q}^{q+2} = E_{0,q}^\infty \qquad & (\because \text{ 映出的 } d \text{ 全为 } 0). \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

来自 (5.2.2) 或 (5.2.3) 的态射统称为**边缘态射**. 综上可得正合列

$$\begin{gathered} 0 \to E_\infty^{0,p-1} \to E_p^{0,p-1} \xrightarrow{d} E_p^{p,0} \to E_\infty^{p,0} \to 0, \\ 0 \to E_\infty^{0,q} \to E_{q+1}^{0,q} \xrightarrow{d} E_{q+1}^{q+1,0} \to E_\infty^{q+1,0} \to 0, \end{gathered} \tag{5.2.4}$$

其中除 d 以外的态射都是边缘态射. 正合列也有同调版本

$$\begin{gathered} 0 \to E_{p,0}^\infty \to E_{p,0}^p \xrightarrow{d} E_{0,p-1}^p \to E_{0,p-1}^\infty \to 0, \\ 0 \to E_{q+1,0}^\infty \to E_{q+1,0}^{q+1} \xrightarrow{d} E_{0,q}^{q+1} \to E_{0,q}^\infty \to 0. \end{gathered} \tag{5.2.5}$$

初学者请务必动笔写下这些项所涉及的态射 d 的走势, 了解它们何时为 0, 从而验证上述所有断言.

5.3 正合偶

常用的几种谱序列都来自正合偶, 这是 W. Massey 的发现. 为了把握问题的实质, 我们先退回不带次数的情形.

定义 5.3.1 (正合偶) Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 上的正合偶意谓 $\mathcal{A}$ 中的正合图表

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "i"] & & D \arrow[dl, "j"] \\ & E \arrow[ul, "k"] & \end{tikzcd}$$

资料 $\mathscr{C} := (D, E, i, j, k)$ 之间的态射按自明的方式定义.

给定正合偶 $\mathscr{C} = (D, E, i, j, k)$, 命 $d := jk : E \to E$, 则 $d^2 = j(kj)k = 0$. 根据正合条件和 d 的定义, 易得如下分解:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "j"] \arrow[d, two heads, "i"'] & \ker(d) \arrow[d, two heads] \\ i(D) \arrow[r, "\exists!\, j'"'] & \mathrm{H}(E,d) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \ker(d) \arrow[r, "k"] \arrow[d, two heads] & i(D) \\ \mathrm{H}(E,d) \arrow[ur, "\exists!\, k'"'] & \end{tikzcd} \tag{5.3.1}$$

另外定义 $E' := \mathrm{H}(E, d)$, $D' := i(D)$ 和 $i' := i|_{i(D)} : D' \to D'$.

引理 5.3.2 给定正合偶 $\mathscr{C} = (D, E, i, j, k)$, 按以上方式构造的资料

$$\mathscr{C}' = (D', E', i', j', k') : \quad \begin{tikzcd} D' \arrow[rr, "i'"] & & D' \arrow[dl, "j'"] \\ & E' \arrow[ul, "k'"] & \end{tikzcd}$$

仍是正合偶.

证明 细观 (5.3.1) 并运用正合条件, 不难验证

$$\begin{aligned} \ker(i') &= i(D) \cap \ker(i) = i(D) \cap k(E) \\ &= \ker(j) \cap k(E) = \mathrm{im}\left[\ker(d) \xrightarrow{k} i(D)\right] = \mathrm{im}(k'), \\ \ker(j') &= i\left(j^{-1}(jk(E))\right) \\ &= i\left(k(E) + \ker(j)\right) = i\left(i(D)\right) = \mathrm{im}(i'), \\ \ker(k') &= \left(\ker(k) \cap \ker(d)\right)/\,\mathrm{im}(d) = \left(j(D) \cap \ker(jk)\right)/\,\mathrm{im}(d) \\ &= j(D)/\,\mathrm{im}(d) = \mathrm{im}(j'). \end{aligned}$$

所以新的三角图表仍然正合. □

此法迭代, 给出一列正合偶 $(\mathscr{C}_{(r)})_{r\geq 1}$, 使得 $\mathscr{C}_{(1)} = \mathscr{C}$ 而 $r \geq 1$ 时 $\mathscr{C}_{(r+1)} = \mathscr{C}'_{(r)}$. 记 $\mathscr{C}_{(r)} = (D_r, E_r, i_r, j_r, k_r)$, 则 $(E_r, d_r := j_r k_r)_{r\geq 1}$ 给出谱序列.

引理 5.3.3 对于正合偶 $\mathscr{C} = (D, E, i, j, k)$ 得出的谱序列 $(E_r, d_r)_{r\geq 1}$, 按 (5.2.1) 定义 $E = E_1$ 的一族子对象 $\overline{B}_r \subset \overline{Z}_r$; 此处用上划线是因为它们从 $r = 1$ 起步, 详见稍后的命题 5.3.4. 当 $r \geq 0$ 时

$$\begin{gathered} \overline{B}_{r+1} = j\left(\ker(i^r)\right) \subset k^{-1}\left(\mathrm{im}(i^r)\right) = \overline{Z}_{r+1}; \\ \overline{B}_\infty = j\left(\bigcup_{r\geq 2} \ker(i^r)\right) \subset k^{-1}\left(\bigcap_{r\geq 2} \mathrm{im}(i^r)\right) = \overline{Z}_\infty, \end{gathered}$$

前提是所论的 $\bigcup_r$ 和 $\bigcap_r$ 存在. 确切地说, 正合偶 $\mathscr{C}_{(r+1)}$ 典范地同构于

$$\begin{tikzcd} i^r D \arrow[rr, "i"] & & i^r D \arrow[dl, "\bar{j}_{r+1}"] \\ & \dfrac{k^{-1}(i^r D)}{j(\ker(i^r))} \arrow[ul, "\bar{k}_{r+1}"] & \end{tikzcd}$$

其中 $\bar{k}_{r+1}$ 由 $k : E \to D$ 诱导, $\bar{j}_{r+1}$ 则由以下交换图表刻画:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "i^r"] \arrow[d, "j"'] & i^r D \arrow[d, "\bar{j}_{r+1}"] \\ k^{-1}(i^r D) \arrow[r, two heads] & \dfrac{k^{-1}(i^r D)}{j(\ker(i^r))}. \end{tikzcd}$$

证明 关于正合偶 $\mathscr{C}_{(r+1)}$ 的描述可以递归地论证, 其 $r = 0$ 情形是平凡的; $\overline{B}_{r+1}$ 和 $\overline{Z}_{r+1}$ 的描述则是其简单推论. 由于细节稍显琐碎, 此处略去. 关于 $\overline{B}_\infty \subset \overline{Z}_\infty$ 的断言是引理 2.6.6 (ii) 的推论. □

接着说明如何从微分对象构造正合偶.

命题 5.3.4 设 $\alpha : (D, d) \to (D, d)$ 是 $\mathcal{A}_d$ 的单态射, 记 d 在 $\operatorname{coker}(\alpha)$ 上诱导的态射为 d_α, 则有正合偶:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}(D,d) \arrow[rr, "i=\mathrm{H}(\alpha)"] & & \mathrm{H}(D,d) \arrow[dl, "j"] \\ & \mathrm{H}(\operatorname{coker}(\alpha), d_\alpha) \arrow[ul, "k"] & \end{tikzcd}$$

取 $\overline{B}_{r+1} \subset \overline{Z}_{r+1}$ 在 $E_0 := \operatorname{coker}(\alpha)$ 中的逆像, 记为

$$0 =: B_0 \subset B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset Z_2 \subset Z_1 \subset Z_0 := \operatorname{coker}(\alpha).$$

对于所有 $r \geq 0$, 我们有:

- ◇ B_{r+1} 是 $(\alpha^r)^{-1}(dD) \subset D$ 在 $\operatorname{coker}(\alpha)$ 中的像;
- ◇ Z_{r+1} 是 $d^{-1}\left(\alpha^{r+1} D\right) \subset D$ 在 $\operatorname{coker}(\alpha)$ 中的像;
- ◇ $d_{r+1} \in \operatorname{End}(Z_{r+1}/B_{r+1})$ 由 $d^{-1}(\alpha^{r+1}D) \xrightarrow{d} \alpha^{r+1} D \xleftarrow[\sim]{\alpha^{r+1}} D$ 诱导.

特别地, 我们有典范同构

$$E_{r+1} \simeq \frac{d^{-1}(\alpha^{r+1}D) + \alpha D}{(\alpha^r)^{-1}(dD) + \alpha D}, \quad r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}.$$

证明 态射 j 由 $D \twoheadrightarrow \mathrm{coker}(\alpha)$ 诱导. 关于 B_{r+1} 的描述无非是引理 5.3.3 提升到 E_0 的版本. 至于 Z_{r+1}, 关键在于描述连接态射 $k : \mathrm{H}(\mathrm{coker}(\alpha), d_\alpha) \to \mathrm{H}(D, d)$: 仔细回顾 (2.3.2) 和 (3.6.2) 的构造, 可知它是由行正合交换图表

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{coker}(d) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d}"'] & \mathrm{coker}(d) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d}"'] & \mathrm{coker}(d_\alpha) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{d_\alpha}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker(d) \arrow[r] & \ker(d) \arrow[r] & \ker(d_\alpha) &
\end{tikzcd}$$

的中路 $\bar{d}$ 诱导的, 而 $\bar{d}$ 又来自 $d : D \to D$. 其余验证繁而不难. □

微分对象给出的谱序列因此可由 0 起步, 方式是令 $E_0 := \mathrm{coker}(\alpha)$, $d_0 := d_\alpha$.

对于带平移的 Abel 范畴 $(\mathcal{A}, T)$, 由于带次数的态射依然能作合成, 也同样具备正合性等概念, 正合偶理论容易扩及态射 i, j, k 带有次数的情形. 以 §5.4 即将探讨的场景为例, 可以考虑正合偶

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
D \arrow[rr, "-1"] & & D \arrow[dl, "+1"] \\
 & E \arrow[ul] &
\end{tikzcd}
\quad\overset{\text{展卷}}{=\!=\!=}\quad
\left[\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdots & TD \arrow[dl] \arrow[rr] & & D \arrow[dl] \arrow[rr] & & T^{-1}D \arrow[dl] \arrow[rr] & & T^{-2}D \arrow[dl] & \cdots \\
\cdots & & TE \arrow[ul] & & E \arrow[ul] & & T^{-1}E \arrow[ul] & & \cdots \arrow[ul]
\end{tikzcd}\right].$$

记此正合偶为 $\mathscr{C}$. 引理 5.3.3 在带次数情形的自然推广表明 $\mathscr{C}_{(r)}$ 形如 $\begin{tikzcd}[column sep=small] \bullet \arrow[rr, "-1"] & & \bullet \arrow[dl, "+r"] \\ & \bullet \arrow[ul] & \end{tikzcd}$. 所以 $d_r = j_r k_r$ 是 r 次态射. 由此得到的谱序列将是分次的.

5.4 滤过微分对象的谱序列

本节伊始, 考虑带平移的 Abel 范畴 $(\mathcal{A}, T)$.

定义 5.4.1 配备滤过 $(\mathrm{F}^\bullet X, d_{\mathrm{F}^\bullet X})$ 的 $(X, d) \in \mathrm{Ob}((\mathcal{A}, T)_d)$ 称为 $(\mathcal{A}, T)$ 上的**滤过微分对象**. 此时 $\mathrm{gr}^p X$ 也带有自然的 $\mathrm{gr}^p d : \mathrm{gr}^p X \to T\,\mathrm{gr}^p X$, 使得 $(\mathrm{gr}^p X, \mathrm{gr}^p d) \in \mathrm{Ob}((\mathcal{A}, T)_d)$.

由于子对象 $\mathrm{F}^p X$ 上的 $d_{\mathrm{F}^p X}$ 宜理解为 $d : X \to TX$ 的限制, 今后仍记之为 d. 类似定义可施于升滤过的情形, 表述完全是对偶的.

回到谱序列的研究. 上节介绍了如何从微分对象构造正合偶. 现在考虑 $\mathcal{A}$ 上的滤过微分对象 $(X, d, \mathrm{F}^\bullet X)$. 记 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 的标准平移函子为 $S : (Y^p)_p \mapsto (Y^{p+1})_p$; 注意到它和对每个 Y^p 作用的 T 当然地交换. 以下探讨的态射因而带两种次数: 一是对应于 S 的 "滤过次数", 二是对应于 T 的 "内次数", 暂且聚焦于前者.

滤过既然递降, 遂有单态射

$$\alpha : \left(\mathrm{F}^{p+1} X, d\right)_{p\in\mathbb{Z}} \hookrightarrow S^{-1}\left(\mathrm{F}^{p+1} X, d\right)_{p\in\mathbb{Z}} = \left(\mathrm{F}^p X, d\right)_{p\in\mathbb{Z}}.$$

于是 $E_0 := \mathrm{coker}(\alpha) = (\mathrm{gr}^p X, \mathrm{gr}^p d)_{p\in\mathbb{Z}}$, 而 $E_1^p = \mathrm{H}(\mathrm{gr}^p X, \mathrm{gr}^p d)$.

将 α 视作 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 的 -1 次态射 (相对于 S), 代入命题 5.3.4 得 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 上带次数的正合偶:

$$\mathscr{C} = \left[\begin{tikzcd} \mathrm{H}\left(\mathrm{F}^{p+1}X, d\right)_p \arrow[rr, "\alpha", "-1"'] & & \mathrm{H}\left(\mathrm{F}^{p+1}X, d\right)_p \arrow[dl, "+1"] \\ & \mathrm{H}\left(\mathrm{gr}^p X, \mathrm{gr}^p d\right)_p \arrow[ul] & \end{tikzcd}\right].$$

相应的 $\mathscr{E} = (E_r^p, d_r^p)_{\substack{r\geq 0\\ p\in\mathbb{Z}}}$ 称为 $\mathrm{F}^\bullet X$ 在 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 中确定的谱序列. 在 §5.3 结尾已说明 d_r 相对于 S 是 r 次态射, 表作

$$d_r = \left(d_r^p : E_r^p \to (S^r E_r)^p = E_r^{p+r}\right)_{p\in\mathbb{Z}}.$$

换言之, 滤过微分对象 $(X, d, \mathrm{F}^\bullet X)$ 给出定义 5.2.8 的上同调分次谱序列. 留意到此处的 d_r^p 也带有内次数 (除非取 $T = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$), 只是略去不标, 细节待 §5.5 梳理.

按 (5.2.1) 的方式定义 $Z_0 = (\mathrm{gr}^p X, \mathrm{gr}^p d)_p$ 的子对象

$$B_r = (B_r^p)_p \subset (Z_r^p)_p = Z_r.$$

为了简化符号, 以下陈述中省略 d 带有的内次数, 相当于考虑 $T = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ 的特例; 推至一般情形是例行公事, 仅须在涉及 $d^{-1}(\cdots)$ 或 $d(\cdots)$ 处适当地插入平移函子, 以使表达式有严格意义.

命题 5.4.2 给定滤过微分对象 $(X, d, \mathrm{F}^\bullet X)$, 相应的谱序列满足

$$Z_r^p = \frac{\left(\mathrm{F}^p X \cap d^{-1}\mathrm{F}^{p+r}X\right) + \mathrm{F}^{p+1}X}{\mathrm{F}^{p+1}X},$$
$$B_r^p = \frac{\left(\mathrm{F}^p X \cap d\mathrm{F}^{p-r+1}X\right) + \mathrm{F}^{p+1}X}{\mathrm{F}^{p+1}X},$$

而 $d_r^p : E_r^p \to E_r^{p+r}$ 由态射 $d^{-1}\mathrm{F}^{p+r}X \xrightarrow{d} \mathrm{F}^{p+r}X \cap \ker(d)$ 诱导.

证明 留意到 α^r 的 p 次部分可视同嵌入 $\mathrm{F}^p X \hookrightarrow \mathrm{F}^{p-r}X$ 或 $\mathrm{F}^{p+r}X \hookrightarrow \mathrm{F}^p X$. 断言归结为命题 5.3.4 的分次版本. □

既然 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 中的 $\varinjlim$ 和 $\varprojlim$ 是逐次取的, $E_\infty = (E_\infty^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ 可以表作

$$E_\infty^p = \frac{Z_\infty^p}{B_\infty^p} = \frac{\bigcap_r \left(\left(\mathrm{F}^p X \cap d^{-1}\mathrm{F}^{p+r}X\right) + \mathrm{F}^{p+1}X\right)}{\bigcup_r \left(\left(\mathrm{F}^p X \cap d\mathrm{F}^{p-r+1}X\right) + \mathrm{F}^{p+1}X\right)}, \tag{5.4.1}$$

前提是所示之 $\bigcap$ 和 $\bigcup$ 对每个 p 皆存在.

定义 5.4.3 (诱导滤过) 给定 $(\mathcal{A}, T)$ 上的滤过微分对象 $(X, d, \mathrm{F}^\bullet X)$, 则 $\mathrm{H}(X, d)$ 带有诱导滤过如下

$$\mathrm{F}^p\,\mathrm{H}(X, d) := \mathrm{im}\left[\mathrm{F}^p X \cap \ker(d) \to \mathrm{H}(X, d)\right], \quad p \in \mathbb{Z};$$

引理 5.4.4 如果存在 N 使得 $\mathrm{F}^N X=0$, 则 $\mathrm{F}^N \mathrm{H}(X,d)=0$. 如果 $\mathrm{F}^\bullet X$ 是定义 5.1.3 所谓的穷竭滤过, 则 $\mathrm{F}^\bullet \mathrm{H}(X,d)$ 亦然.

证明 第一部分是平凡的, 以下处理第二部分. 根据引理 2.6.6 (ii), $\bigcup_p \mathrm{F}^p \mathrm{H}(X,d)$ 是 $\bigcup_p (\mathrm{F}^p X\cap \ker(d))$ 的像, 而由 (5.1.1) 可知

$$\bigcup_p (\mathrm{F}^p X\cap \ker(d)) = \left(\bigcup_p \mathrm{F}^p X\right)\cap \ker(d) = \ker(d).$$

此外, 若存在 M 使得 $\mathrm{F}^M X=X$, 自然也有 $\mathrm{F}^M \mathrm{H}(X,d)=\mathrm{H}(X,d)$. □

我们将在 §5.5 应用这些观察的分次版本.

引理 5.4.5 给定滤过微分对象 $(X,d,\mathrm{F}^\bullet X)$, 对每个 $p\in\mathbb{Z}$ 皆有典范同构

$$\mathrm{gr}^p \mathrm{H}(X,d) \simeq \frac{\mathrm{F}^p X\cap \ker(d)}{(\mathrm{F}^{p+1}X\cap \ker(d)) + (\mathrm{F}^p X\cap \mathrm{im}(T^{-1}d))}.$$

证明 展开 $\mathrm{F}^p \mathrm{H}(X,d)/\mathrm{F}^{p+1}\mathrm{H}(X,d)$ 的定义, 并且运用 Abel 范畴中标准的同构定理 2.6.8 来推导

$$\begin{aligned}
\mathrm{gr}^p \mathrm{H}(X,d) &= \frac{(\mathrm{F}^p X\cap \ker(d)) + \mathrm{im}(T^{-1}d)}{(\mathrm{F}^{p+1}X\cap \ker(d)) + \mathrm{im}(T^{-1}d)} \\
&= \frac{(\mathrm{F}^p X\cap \ker(d)) + (\mathrm{F}^{p+1}X\cap \ker(d)) + \mathrm{im}(T^{-1}d)}{(\mathrm{F}^{p+1}X\cap \ker(d)) + \mathrm{im}(T^{-1}d)} \\
&\simeq \frac{\mathrm{F}^p X\cap \ker(d)}{(\mathrm{F}^{p+1}X\cap \ker(d) + \mathrm{im}(T^{-1}d))\cap(\mathrm{F}^p X\cap \ker(d))} \\
&= \frac{\mathrm{F}^p X\cap \ker(d)}{(\mathrm{F}^{p+1}X\cap \ker(d)) + (\mathrm{F}^p X\cap \mathrm{im}(T^{-1}d))};
\end{aligned}$$

最后一步用到 Sub_X 是模格 (定理 2.6.10) 和 $\mathrm{im}(T^{-1}d)\subset\ker(d)$. □

定义–命题 5.4.6 给定滤过微分对象 $(X,d,\mathrm{F}^\bullet X)$, 构造相应的上同调分次谱序列 $(E_r,d_r)_r$, 则在 (5.4.1) 中的 $\bigcap_r$ 和 $\bigcup_r$ 存在的前提下, 极限 E_∞ 存在, 而诱导滤过确定的 $\mathrm{gr}\,\mathrm{H}(X,d)$ 可以典范地实现为 E_∞ 的子商.

- ◇ 若 $\mathrm{gr}\,\mathrm{H}(X,d)=E_\infty$, 则称谱序列 $(E_r,d_r)_r$ **弱收敛**.
- ◇ 若谱序列 $(E_r,d_r)_r$ 弱收敛, $\mathrm{F}^\bullet \mathrm{H}(X,d)$ 穷竭而完备, 则称谱序列 $(E_r,d_r)_r$ **强收敛**.

证明 固定 $p\in\mathbb{Z}$. 端详 E_∞^p 的表达式 (5.4.1), 其分子含 $(\mathrm{F}^p X\cap\ker(d))+\mathrm{F}^{p+1}X$, 分母则包含于 $(\mathrm{F}^p X\cap \mathrm{im}(T^{-1}d))+\mathrm{F}^{p+1}X$ (回忆到 d 是态射 $X\to TX$). 这就给出 E_∞^p

的子商

$$\begin{aligned}
&\frac{(\mathrm{F}^p X \cap \ker(d)) + \mathrm{F}^{p+1} X}{(\mathrm{F}^p X \cap \operatorname{im}(T^{-1}d)) + \mathrm{F}^{p+1} X} \\
&\qquad\qquad \simeq \frac{\mathrm{F}^p X \cap \ker(d)}{((\mathrm{F}^p X \cap \operatorname{im}(T^{-1}d)) + \mathrm{F}^{p+1} X) \cap (\mathrm{F}^p X \cap \ker(d))} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \simeq \frac{\mathrm{F}^p X \cap \ker(d)}{(\mathrm{F}^{p+1} X \cap \ker(d)) + (\mathrm{F}^p X \cap \operatorname{im}(T^{-1}d))};
\end{aligned}$$

第二个同构用到 Sub_X 是模格和 $\mathrm{F}^{p+1} X \subset \mathrm{F}^p X$. 将此代入引理 5.4.5. □

不同文献对收敛的定义略有出入. 一切陈述对于带有升滤过 $(X, d, \mathrm{F}_\bullet X)$ 的微分对象和对应的同调分次谱序列都有对应版本.

5.5 滤过复形的谱序列

延续 §5.4 的思路, 仍选定 Abel 范畴 $\mathcal{A}$. 命题 5.4.2 关于滤过微分对象的结论可以进一步推广, 容许态射 d 带有次数. 特别地, 这套理论可以用于滤过复形.

具体言之, 以 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 代替原先的 $\mathcal{A}$, 其上的平移函子记为 T. 根据例 5.2.5, $\left(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, T\right)_d$ 的对象 (X, d) 可以视同复形 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}(\mathcal{A}))$; 进一步考虑降滤过 $(X, d, \mathrm{F}^\bullet X)$, 则

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}(X, d) &= (\mathrm{H}^n(X))_{n \in \mathbb{Z}}, \\
\mathrm{H}(\mathrm{F}^p X, d) &= (\mathrm{H}^n(\mathrm{F}^p X))_{n \in \mathbb{Z}}, \\
\mathrm{F}^p \mathrm{H}^n(X) &:= \operatorname{im}\left[\mathrm{F}^p X^n \cap \ker(d_X^n) \to \mathrm{H}^n(X)\right] \quad (\text{定义 } 5.4.3).
\end{aligned}$$

综之, 先前构造的谱序列 $\mathscr{E}$ 中的 E_r 实则取值在 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$, 它是双分次对象: 除了滤过次数 p, 另有关乎复形结构的内次数 n, 对应的平移函子 S 和 T 严格交换. 兹断言在正合偶 $\mathscr{C}_{(r)}$ 中, 态射 $\nwarrow$ 相对于 T 是 1 次的, 其余皆零次: 诚然, $r = 1$ 情形 $\nwarrow$ 来自上同调的连接态射, 故对 T 是 1 次态射, 而运用引理 5.3.3 的描述可递归推得任意 r 的情形.

基于应用考量, 惯例是改用 p 和 $q := n - p$ 来标号, 于是

$$\begin{gathered}
E_r = (E_r^{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2} = (Z_r^{p,q} / B_r^{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2}, \\
E_0^{p,q} = (\operatorname{gr}^p X)^{p+q}, \\
E_1^{p,q} = \mathrm{H}^{p+q}(\operatorname{gr}^p X, \operatorname{gr}^p d), \\
d_r = \left(d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r, q-r+1}\right)_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2} : E_r \xrightarrow{(r, -r+1)} E_r.
\end{gathered}$$

换言之, 滤过复形给出定义 5.2.8 的上同调双分次谱序列. 对偶地, 带有升滤过的链复形给出同调双分次谱序列.

例 5.5.1 考虑滤过复形 $(X, d, \mathrm{F}^\bullet X)$. 若对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 都有 $\mathrm{F}^0 X^n = X^n$ 和 $\mathrm{F}^{n+1} X^n = 0$, 则 E_0 落在第一象限 (定义 5.2.12): 这是 $E_0^{p,q} = (\operatorname{gr}^p X)^{p+q}$ 的直接结论.

命题 5.5.2 给定带有降滤过 $\mathrm{F}^\bullet X$ 的复形 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}(\mathcal{A}))$, 相应的谱序列满足

$$Z_r^{p,q} = \frac{\left(\mathrm{F}^p X^{p+q} \cap d^{-1}\mathrm{F}^{p+r} X^{p+q+1}\right) + \mathrm{F}^{p+1} X^{p+q}}{\mathrm{F}^{p+1} X^{p+q}},$$
$$B_r^{p,q} = \frac{\left(\mathrm{F}^p X^{p+q} \cap d\mathrm{F}^{p-r+1} X^{p+q-1}\right) + \mathrm{F}^{p+1} X^{p+q}}{\mathrm{F}^{p+1} X^{p+q}},$$

而 $d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$ 由 $d^{-1}\mathrm{F}^{p+r} X^{p+q+1} \xrightarrow{d} \mathrm{F}^{p+r} X^{p+q+1} \cap \ker(d)$ 诱导.

证明 在命题 5.4.2 中计入复形的次数 $n = p + q$, 并留意 d 对 n 是 1 次态射. □

同理, (5.4.1) 有双分次版本

$$E_\infty^{p,q} = \frac{Z_\infty^{p,q}}{B_\infty^{p,q}} = \frac{\bigcap_r \left(\left(\mathrm{F}^p X^{p+q} \cap d^{-1}\mathrm{F}^{p+r} X^{p+q+1}\right) + \mathrm{F}^{p+1} X^{p+q}\right)}{\bigcup_r \left(\left(\mathrm{F}^p X^{p+q} \cap d\mathrm{F}^{p-r+1} X^{p+q-1}\right) + \mathrm{F}^{p+1} X^{p,q}\right)}, \tag{5.5.1}$$

前提是所示的 $\bigcup$ 和 $\bigcap$ 存在; 此时 $E_\infty = (E_\infty^{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2}$.

定义–命题 5.4.6 在此化为双分次版本: $\mathrm{gr}^p\, \mathrm{H}^{p+q}(X)$ 对所有 p, q 皆典范地实现为 $E_\infty^{p,q}$ 的子商. 谱序列的收敛性质也相应地细化.

定义 5.5.3 给定 $\mathcal{A}$ 上的滤过复形 $(X, d, \mathrm{F}^\bullet X)$, 构造相应的上同调分次谱序列 $(E_r, d_r)_r$, 则在 (5.5.1) 中的 $\bigcap_r$ 和 $\bigcup_r$ 存在的前提下, $\mathrm{gr}^p\, \mathrm{H}^{p+q}(X)$ 可以典范地实现为 $E_\infty^{p,q}$ 的子商.

- ◇ 若对所有 $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ 皆有 $\mathrm{gr}^p\, \mathrm{H}^{p+q}(X) = E_\infty^{p,q}$, 则称谱序列 $(E_r, d_r)_r$ **弱收敛**.
- ◇ 在弱收敛的前提下, 若对所有 $n \in \mathbb{Z}$, 滤过 $\mathrm{F}^\bullet\, \mathrm{H}^n(X)$ 穷竭而完备, 则称谱序列 $(E_r, d_r)_r$ **强收敛**.

约定 5.5.4 谱序列的强收敛也记为 $E_r^{p,q} \Rightarrow \mathrm{H}^{p+q}(X)$; 此处的下标 r 常具体写作 1, 2 等等, 取决于我们着重描述谱序列的哪一页.

推而广之, 若有上同调双分次谱序列 $\mathscr{E}$, 滤过分次对象 $(H, \mathrm{F}^\bullet H)$ 连同同构 $E_\infty^{p,q} \simeq \mathrm{gr}^p\, H^{p+q}$, 而且 $\mathrm{F}^\bullet H$ 穷竭而完备, 则我们也将此情境标记为 $E_r^{p,q} \Rightarrow H^{p+q}$. 同调双分次谱序列的情形依此类推, 特别地, $E_{p,q}^r \Rightarrow H_{p+q}$ 蕴涵 $E_{p,q}^\infty \simeq \mathrm{gr}_p\, H_{p+q}$.

以下的经典收敛定理对于初步应用已经足够. 更广的收敛条件可参见 [3].

定理 5.5.5 (经典收敛定理) 考虑滤过复形 $(X, d, \mathrm{F}^\bullet X)$. 假定对于每个 $n \in \mathbb{Z}$,

- ◇ 滤过 $\mathrm{F}^\bullet X^n$ 是穷竭的 (定义 5.1.3),
- ◇ 存在 $N = N(n)$ 使得 $\mathrm{F}^N X^n = 0$,

则相应的谱序列强收敛 (定义–命题 5.4.6).

如果将条件强化为每个 X^n 的滤过皆有限 (定义 5.1.1), 则 $\mathrm{H}^n(X)$ 上的诱导滤过也有限. 此时相应的谱序列有界 (定义 5.2.10).

证明　基于引理 5.4.4, 确切地说是其分次版本, 诱导滤过 $\mathrm{F}^\bullet \mathrm{H}^n(X)$ 穷竭而完备. 问题归结为证弱收敛.

有必要回顾定义–命题 5.4.6 的证明, 它说明如何对每个 $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ 将 $\mathrm{gr}^p \mathrm{H}^{p+q}(X)$ 实现为 $\mathrm{gr}^p E_\infty^{p,q}$ 的子商: 关键是

$$\begin{aligned} &\bigcap_r \left(\left(\mathrm{F}^p X^{p+q} \cap d^{-1} \mathrm{F}^{p+r} X^{p+q+1} \right) + \mathrm{F}^{p+1} X^{p+q} \right) \\ &\quad \supset \left(\mathrm{F}^p X^{p+q} \cap \ker(d) \right) + \mathrm{F}^{p+1} X^{p+q}, \\ &\bigcup_r \left(\left(\mathrm{F}^p X^{p+q} \cap d\mathrm{F}^{p-r+1} X^{p+q-1} \right) + \mathrm{F}^{p+1} X^{p+q} \right) \\ &\quad \subset \left(\mathrm{F}^p X^{p+q} \cap \mathrm{im}(d) \right) + \mathrm{F}^{p+1} X^{p+q}. \end{aligned}$$

证明谱序列弱收敛相当于将这些包含关系改进为等号. 然而, 当 $r \gg 0$ (相对于 p,q) 时, 第一式的 $\bigcap_r$ 内部无非是 $(\mathrm{F}^p X^{p+q} \cap \ker(d)) + \mathrm{F}^{p+1} X^{p+q}$, 故等号成立.

对于第二式, 可以先将 $+\mathrm{F}^{p+1} X^{p+q}$ 移出 $\bigcup_r$. 鉴于引理 2.6.6 (ii), 由于 $d\mathrm{F}^\bullet X^n$ 对所有 n 都是 $d(X^n)$ 的穷竭滤过, 易得

$$\begin{aligned} &\bigcup_r \left(\mathrm{F}^p X^{p+q} \cap d\mathrm{F}^{p-r+1} X^{p+q-1} \right) \\ &\qquad \xlongequal{\because (5.1.1)} \mathrm{F}^p X^{p+q} \cap \bigcup_r d\mathrm{F}^{p-r+1} X^{p+q-1} \\ &\qquad\qquad = \mathrm{F}^p X^{p+q} \cap d \bigcup_r \mathrm{F}^{p-r+1} X^{p+q-1} = \mathrm{F}^p X^{p+q} \cap \mathrm{im}(d). \end{aligned}$$

最后假定每个 X^n 的滤过皆有限, 这时 $\mathrm{F}^\bullet \mathrm{H}^n(X)$ 自然有界. 以下说明谱序列有界. 选定 r 和 n, 设 $p+q=n$. 根据命题 5.5.2 的描述, $p \gg 0$ 时 $Z_r^{p,q}$ 的分子为 0, 而 $p \ll 0$ 时分母为 X^n. 由此可见至多仅有有限个 (p,q) 使得 $E_{r+1}^{p,q} \neq 0$. □

对偶版本不言自明, 此处不再重复.

推论 5.5.6 (低次项的正合列)　设滤过复形 $(X, d, \mathrm{F}^\bullet X)$ 满足

$$\mathrm{F}^0 X^n = X^n, \quad \mathrm{F}^{n+1} X^n = 0, \quad n \in \mathbb{Z},$$

如例 5.5.1. 对应的谱序列给出典范正合列

$$0 \to E_2^{1,0} \to \mathrm{H}^1(X) \to E_2^{0,1} \xrightarrow{d} E_2^{2,0} \to \mathrm{H}^2(X).$$

对于带升滤过的链复形 X, 若 $\mathrm{F}_{-1} X = 0$ 而 $\mathrm{F}^n X = X$, 则对偶地有典范正合列

$$\mathrm{H}_2(X) \to E_{2,0}^2 \xrightarrow{d} E_{0,1}^2 \to \mathrm{H}_1(X) \to E_{1,0}^2 \to 0.$$

证明 在 (5.2.4) 代入 $p=2$, 得到正合列

$$0 \to E_\infty^{0,1} \to E_2^{0,1} \xrightarrow{d} E_2^{2,0} \to E_\infty^{2,0} \to 0.$$

基于经典收敛定理 5.5.5, 我们有 $E_\infty^{0,1} \simeq \mathrm{gr}^0\,\mathrm{H}^1(X)$ 和 $E_\infty^{2,0} \simeq \mathrm{gr}^2\,\mathrm{H}^2(X)$. 根据条件,

$$\mathrm{gr}^2\,\mathrm{H}^2(X) = \mathrm{F}^2\,\mathrm{H}^2(X), \quad \mathrm{gr}^0\,\mathrm{H}^1(X) = \mathrm{H}^1(X)/\mathrm{F}^1\,\mathrm{H}^1(X) = \mathrm{H}^1(X)/E_\infty^{1,0}.$$

此外, (5.2.2) 给出 $E_2^{1,0} = E_\infty^{1,0}$. 这些等式拼接为所求的正合列[2]. 同调版本不赘. □

一旦 $E_r^{p,q}$ 强收敛, 只要能掌握足够多个 (E_r, d_r), 原则上便能从 E_∞ 读出 $\left(\mathrm{gr}^p\,\mathrm{H}^{p+q}(X)\right)_{p,q\in\mathbb{Z}}$. 然而从 $(\mathrm{gr}^p\,\mathrm{H}^n(X))_p$ 过渡到 $\mathrm{H}^n(X)$ 相当于在 $\mathcal{A}$ 中确定一系列扩张; 除非 $\mathrm{H}^n(X)$ 分裂, 一般不易处理. 如果我们仅考量较粗糙的性质, 则谱序列有时能提供简洁的答案. 以下阐释的例子本质上是 Euler–Poincaré 原理的应用.

引理 5.5.7 设 $\mathscr{E} = (E_r, d_r)_{r\geq 1}$ 是上同调双分次谱序列, 而且存在 r 使得

$$\left\{(p,q) \in \mathbb{Z}^2 : E_r^{p,q} \neq 0\right\} \quad \text{是有限集,}$$

则当 $r \gg 0$ 时 $\mathscr{E}$ 在 E_r 处退化.

证明 注意到 $E_{r+1}^{p,q}$ 是 $E_r^{p,q}$ 的子商. 由此可知若 $E_r^{p,q} = 0$, 则对所有 $s \geq r$ 都有 $E_s^{p,q} = 0$. 考虑到 $d_r^{p,q}$ 的走向, 这就说明当 $r \gg 0$ 时对所有 (p,q) 皆有 $d_r^{p,q} = 0$. □

命题 5.5.8 设上同调双分次谱序列 $(E_r, d_r)_r$ 满足以下条件:

- ◇ 存在 r 使得 $\left\{(p,q) \in \mathbb{Z}^2 : E_r^{p,q} \neq 0\right\}$ 是有限集,
- ◇ 强收敛性 $E_r^{p,q} \Rightarrow H$, 涵义如约定 5.5.4,

则在定义 2.9.8 的群 $\mathrm{K}_0(\mathcal{A})$ 中, 当 $r \gg 0$ 时等式

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n \left[H^n\right] = \sum_{p,q\in\mathbb{Z}} (-1)^{p+q} \left[E_r^{p,q}\right]$$

成立, 两边都是有限和.

证明 当 $r \gg 0$ 时, 右式的和仅有有限项非零. 此外,

$$E_{r+1}^{p,q} \simeq \mathrm{H}\left[E_r^{p-r,q+r-1} \xrightarrow{d} E_r^{p,q} \xrightarrow{d} E_r^{p+r,q-r+1}\right]$$

按 $n := p+q$ 来统计次数, 则 d 是次数为 1 的态射. 在 $\mathrm{K}_0(\mathcal{A})$ 当中对 n 取交错和, 然后应用定理 2.9.11 得到

$$\sum_{p,q\in\mathbb{Z}} (-1)^{p+q} \left[E_r^{p,q}\right] = \sum_{p,q\in\mathbb{Z}} (-1)^{p+q} \left[E_{r+1}^{p,q}\right].$$

[2]如在 (5.2.4) 中取 $q=1$, 结果殊途同归.

引理 5.5.7 说明谱序列退化, 因此当 $r \gg 0$ 时 $E_r^{p,q} = E_\infty^{p,q}$ 对所有 (p,q) 成立. 于是 $r \gg 0$ 时

$$\sum_{p,q} (-1)^{p+q} \left[E_r^{p,q}\right] = \sum_{p,q} (-1)^{p+q} \left[\operatorname{gr}^p \mathrm{H}^{p+q}(X)\right] = \sum_n (-1)^n \sum_p \left[\operatorname{gr}^p H^n\right],$$

条件确保求和皆有限. 而按引理 2.9.9 (v) 和 $\mathrm{F}^\bullet H$ 的条件, 我们又有 $\sum_p [\operatorname{gr}^p H^n(X)] = [\mathrm{H}^n(X)]$; □

若 $(E_r, d_r)_r$ 来自滤过复形 $(X, d, \mathrm{F}^\bullet)$, 而且每个 X^n 的滤过 $\mathrm{F}^\bullet X^n$ 皆有限, 则定理 5.5.5 确保命题 5.5.8 的强收敛条件 $E_r^{p,q} \Rightarrow \mathrm{H}^{p+q}(X)$ 自动成立.

滤过复形已经足以产出一些简单而有用的谱序列, 见本章习题. 本书的主题是代数学, 其中最广为人知的几种谱序列都来自双复形, 是以我们先转向双复形的情形.

5.6 双复形的谱序列及其应用

以下总默认 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 具备所论的可数直和或可数积. 设 X 是 $\mathcal{A}$ 上的双复形, 写作 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^2(\mathcal{A}))$. 在全复形 $\operatorname{tot}_\oplus X$ 上定义两种降滤过

$$\mathrm{F}_{\mathrm{I}}^p (\operatorname{tot}_\oplus X)^n = \bigoplus_{\substack{i+j=n \\ i \geq p}} X^{i,j},$$

$$\mathrm{F}_{\mathrm{II}}^q (\operatorname{tot}_\oplus X)^n = \bigoplus_{\substack{i+j=n \\ j \geq q}} X^{i,j}.$$

它们自然地嵌入为 $\operatorname{tot}_\oplus X$ 的子对象. 对每个 (i,j) 个别地考察, 可见

$$\bigcap_p \mathrm{F}_{\mathrm{I}}^p = 0 = \bigcap_q \mathrm{F}_{\mathrm{II}}^q, \quad \bigcup_p \mathrm{F}_{\mathrm{I}}^p = \operatorname{tot}_\oplus X = \bigcup_q \mathrm{F}_{\mathrm{II}}^q.$$

由此得到滤过复形, 对应的谱序列分别记为 $\mathscr{E}_{\mathrm{I}} = \mathscr{E}_{\mathrm{I}}(X)$ 和 $\mathscr{E}_{\mathrm{II}} = \mathscr{E}_{\mathrm{II}}(X)$, 或更具体地记为 $E_{\mathrm{I},r}^{p,q}$ 和 $E_{\mathrm{II},r}^{p,q}$, 其中 $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. 假如 $X^{p,q} \neq 0 \implies p, q \geq 0$, 这时我们称 X 落在第一象限, 则对于 $\star \in \{\mathrm{I}, \mathrm{II}\}$, 我们有

$$\mathrm{F}_\star^0 (\operatorname{tot}_\oplus X)^n = (\operatorname{tot}_\oplus X)^n, \quad \mathrm{F}_\star^{n+1} (\operatorname{tot}_\oplus X)^n = 0,$$

相应的谱序列因而也落在第一象限.

对于链双复形 X, 同样可定义两种升滤过

$$\mathrm{F}_{\mathrm{I},p} (\operatorname{tot}_\oplus X)_n = \bigoplus_{\substack{i+j=n \\ i \leq p}} X_{i,j},$$

$$\mathrm{F}_{\mathrm{II},q} (\operatorname{tot}_\oplus X)_n = \bigoplus_{\substack{i+j=n \\ j \leq q}} X_{i,j},$$

以及对应的同调双分次谱序列.

命题 5.6.1 对于 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^2(\mathcal{A}))$, 其谱序列的前几页和相应的态射 d 有如下描述

	$E_0^{p,q}$	$d_0^{p,q}$	$E_1^{p,q}$	$d_1^{p,q}$	$E_2^{p,q}$
$\mathscr{E}_{\mathrm{I}}$	$X^{p,q}$	$(-1)^p\,{}^{\vartriangle}d^{p,q}$	$\mathrm{H}^q(X^{p,\bullet}, {}^{\vartriangle}d)$	$\mathrm{H}^q({}^{\triangleright}d^{p,\bullet})$	$\mathrm{H_I\,H_{II}}(X)^{p,q}$
$\mathscr{E}_{\mathrm{II}}$	$X^{q,p}$	${}^{\triangleright}d^{q,p}$	$\mathrm{H}^q(X^{\bullet,p}, {}^{\triangleright}d)$	$(-1)^q\,\mathrm{H}^q({}^{\vartriangle}d^{\bullet,p})$	$\mathrm{H_{II}\,H_I}(X)^{q,p}$

函子 $\mathrm{H_I}, \mathrm{H_{II}} : \mathsf{C}^2(\mathcal{A}) \to \mathsf{C}^2(\mathcal{A})$ 的定义见诸 §3.10, 特别是 (3.10.1).

对于链复形及其同调, 类似方法可得下表.

	$E^0_{p,q}$	$d^0_{p,q}$	$E^1_{p,q}$	$d^1_{p,q}$	$E^2_{p,q}$
$\mathscr{E}_{\mathrm{I}}$	$X_{p,q}$	$(-1)^p\,{}^{\vartriangle}d_{p,q}$	$\mathrm{H}_q(X_{p,\bullet}, {}^{\vartriangle}d)$	$\mathrm{H}_q({}^{\triangleright}d_{p,\bullet})$	$\mathrm{H_I\,H_{II}}(X)_{p,q}$
$\mathscr{E}_{\mathrm{II}}$	$X_{q,p}$	${}^{\triangleright}d_{q,p}$	$\mathrm{H}_q(X_{\bullet,p}, {}^{\triangleright}d)$	$(-1)^q\,\mathrm{H}_q({}^{\vartriangle}d_{\bullet,p})$	$\mathrm{H_{II}\,H_I}(X)_{q,p}$

证明 这是按命题 5.5.2 的描述循规蹈矩地验证的结果, ${}^{\vartriangle}d$ 所带正负号来自全复形的定义. 细节不赘. □

这些定义和结果对 $\mathrm{tot}_{\mathrm{II}}\,X$ 也可以如法炮制, 性质完全类似.

对于 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^2_f(\mathcal{A}))$ (定义 3.10.1), 其全复形仅涉及有限直和, 不必区分 $\oplus$ 和 Π 两种版本, 统一记为 $\mathrm{tot}\,X$.

定理 5.6.2 设 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^2_f(\mathcal{A}))$, 则相应的两个谱序列 $\mathscr{E}_{\mathrm{I}}$ 和 $\mathscr{E}_{\mathrm{II}}$ 皆有界, 强收敛, 而 $\mathrm{H}^n(\mathrm{tot}\,X)$ 上对应的两个诱导滤过对每个 $n \in \mathbb{Z}$ 皆有限.

证明 从 $\mathsf{C}^2_f(\mathcal{A})$ 的定义可见 $\mathrm{F}^\bullet_{\mathrm{I}}(\mathrm{tot}\,X)^n$ 和 $\mathrm{F}^\bullet_{\mathrm{II}}(\mathrm{tot}\,X)^n$ 对每个 n 都是有限滤过. 代入定理 5.5.5. □

以下介绍具有代表性的几个应用. 由于涉及的滤过和谱序列总是有限, 这些结果适用于一切 Abel 范畴[3].

例 5.6.3 今以谱序列重证定理 3.10.6: 若 $\mathsf{C}^2_f(\mathcal{A})$ 的态射 $f: X \to Y$ 诱导 $\mathrm{H_{II}\,H_I}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H_{II}\,H_I}(Y)$ (或 $\mathrm{H_I\,H_{II}}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H_I\,H_{II}}(Y)$), 则 $\mathrm{tot}(f) : \mathrm{tot}(X) \to \mathrm{tot}(Y)$ 是拟同构.

首先设 $\mathrm{H_{II}\,H_I}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H_{II}\,H_I}(Y)$; 由 f 诱导谱序列的态射 $\mathscr{E}_{\mathrm{II}}(X) \to \mathscr{E}_{\mathrm{II}}(Y)$. 它在 E_2 页已经是同构, 于是在极限页 E_∞ 也给出同构 (命题 5.2.7).

基于定理 5.6.2 确保的收敛性, $\mathrm{tot}(f)$ 给出的 $\mathrm{gr}^p\,(\mathrm{H}^n\,\mathrm{tot}(X)) \to \mathrm{gr}^p\,(\mathrm{H}^n\,\mathrm{tot}(Y))$ 对所有 $p, n \in \mathbb{Z}$ 都是同构. 已知 H^n 上的诱导滤过有限, 故 $\mathrm{H}^n\,\mathrm{tot}(f) : \mathrm{H}^n\,\mathrm{tot}(X) \to \mathrm{H}^n\,\mathrm{tot}(Y)$ 也是同构 (命题 5.1.4).

若考虑谱序列 $\mathscr{E}_{\mathrm{I}}$, 则可相应地从 $\mathrm{H_I\,H_{II}}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H_I\,H_{II}}(Y)$ 推导 $\mathrm{tot}(f)$ 是拟同构.

例 5.6.4 (双函子求导) 设 Abel 范畴 $\mathcal{A}_1$ 和 $\mathcal{A}_2$ 有足够的内射对象 (或投射对象), 而双函子 $F: \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \to \mathcal{B}$ 对每个变元都左正合 (或右正合). 以下举左正合情形为例.

[3] 稍加精确地说, 极限项 $Z_\infty^{p,q}$, $B_\infty^{p,q}$, $E_\infty^{p,q}$ 的存在性和定义 5.1.3 关于穷竭滤过的条件都不成问题.

设 $X_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}_i)$ 并选定内射解消 $0 \to X_i \to I_i^0 \to \cdots$; 当 $n < 0$ 时命 $I_i^n := 0$ (其中 $i = 1, 2$). 以此构造落在第一象限的双复形

$$Y^{p,q} := F\left(I_1^p, I_2^q\right).$$

对应的第一象限谱序列 $\mathscr{E} := \mathscr{E}_{\mathrm{I}}$ 因而满足

$$E_1^{p,q} = \mathrm{H}^q\left(F(I_1^p, I_2^\bullet)\right) \Rightarrow \mathrm{H}^{p+q}(\mathrm{tot}(Y)), \quad p, q \in \mathbb{Z}.$$

右式的 $\mathrm{H}^{p+q}(\mathrm{tot}\, Y)$ 定为右导出双函子的取值 $\mathrm{R}^{p+q}F(X_1, X_2)$, 如定义 4.7.6.

现在进一步要求 F 是平衡的 (定义 3.14.1); 因此 $F(I_1^p, \cdot)$ 是正合函子. 这说明 $q \neq 0 \implies E_1^{p,q} = 0$ 而 $E_1^{p,0} = F(I_1^p, X_2)$. 由此可见 $q \neq 0 \implies E_2^{p,q} = 0$, 而

$$\begin{aligned} E_2^{p,0} &= \mathrm{H}^p\left[\cdots \to F(I_1^p, X_2) \to F(I_1^{p+1}, X_2) \to \cdots\right] \\ &= (\mathrm{R}_{\mathrm{I}}^p F)(X_1, X_2), \quad \text{符号如定理 3.14.2.} \end{aligned}$$

特别地, 谱序列在 E_2 页退化, 导致

$$\begin{aligned} &E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}, \\ &E_\infty^{p,q} = \mathrm{gr}^p\, \mathrm{H}^{p+q}\left(\mathrm{tot}(Y)\right) = 0, \quad \text{如果 } q \neq 0, \\ &E_\infty^{p,0} = \mathrm{H}^p\left(\mathrm{tot}(Y)\right) = \mathrm{R}^p F(X_1, X_2). \end{aligned}$$

这就给出了 $\mathrm{R}^n F(X_1, X_2) \simeq (\mathrm{R}_{\mathrm{I}}^n F)(X_1, X_2)$. 若改用 $\mathscr{E}_{\mathrm{II}}$, 同理可得 $\mathrm{R}^n F(X_1, X_2) \simeq (\mathrm{R}_{\mathrm{II}}^n F)(X_1, X_2)$. 于是 $\mathrm{R}_{\mathrm{I}} F \simeq \mathrm{R}_{\mathrm{II}} F$; 这无非是定理 3.14.2 的内容.

例 5.6.5 (超导出函子的谱序列) 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是 Abel 范畴, $\mathcal{A}$ 有足够的内射对象 (或投射对象), 而 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是左正合 (或右正合) 加性函子. 我们在 §3.12 的前半部对复形 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^+(\mathcal{A}))$ (或 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^-(\mathcal{A}))$) 定义了右导出函子 $\mathrm{R}^n F(X)$ (或左导出函子 $\mathrm{L}_n F(X)$), 其中 $n \in \mathbb{Z}$. 当 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ 时, 它们是经典意义下的导出函子; 与此相对, 一般复形的情形则习惯称为超导出函子. 两者可由谱序列相连系. 以下阐述右导出函子的情形, 上下标对调可得左导出函子的版本.

设 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^+(\mathcal{A}))$. 将 X 视同集中在第 0 行的双复形, 再取定理 3.11.9 提供的 Cartan–Eilenberg 解消 $\epsilon : X \to I$; 这是 $\mathsf{C}_f^2(\mathcal{A})$ 的态射. 根据注记 3.11.11, $\mathrm{tot}(\epsilon) : X = \mathrm{tot}(X) \to \mathrm{tot}(I)$ 是 $\mathsf{C}^+(\mathcal{A})$ 中的拟同构[4], 因而是 X 的内射解消.

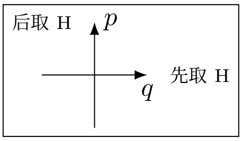
从双复形 $(\mathsf{C}^2 F)(I) \in \mathrm{Ob}\left(\mathsf{C}_f^2(\mathcal{B})\right)$ 构造收敛谱序列 $\mathscr{E}_{\mathrm{I}}$ 和 $\mathscr{E}_{\mathrm{II}}$, 它们收敛到同一个目标 $\mathrm{H}^{p+q}\,\mathrm{tot}\left((\mathsf{C}^2 F) I\right) = \mathrm{H}^{p+q}\,\mathsf{C}F(\mathrm{tot}\, I)$, 亦即超导出函子 $\mathrm{R}^{p+q}F(X)$.

先看 $\mathscr{E}_{\mathrm{I}}$. 因为 $I^{p,\bullet}$ 是 X^p 的内射解消, 故 $E_{\mathrm{I},1}^{p,q} = \mathrm{H}^q\left(F I^{p,\bullet}\right) \simeq \mathrm{R}^q F(X^p)$, 右式是经典导出函子 $\mathrm{R}^p F$ 在 X^p 的取值. 类似道理,

$$E_{\mathrm{I},2}^{p,q} = \mathrm{H}^p\left[\cdots \to \mathrm{R}^q F(X^p) \to \mathrm{R}^q F(X^{p+1}) \to \cdots\right].$$

[4]这点也可以用例 5.6.3 的结果来验证.

更有趣的兴许是 $\mathscr{E}_{\mathrm{II}}$ 的 E_2 页. 基于 Cartan–Eilenberg 解消的性质, 取横向上同调的产物 $\mathrm{H}_{\mathrm{I}}(I)^{q,\bullet}$ 给出 $\mathrm{H}^q(X)$ 的内射解消, 而注记 3.11.10 说明 F 保持横向上同调: $\mathrm{H}_{\mathrm{I}}(\mathsf{C}^2F(I))^{q,\bullet} \simeq \mathsf{C}F\left(\mathrm{H}_{\mathrm{I}}(I)^{q,\bullet}\right)$. 于是

$E_{\mathrm{II},2}^{p,q} =$ 

$= (\mathrm{R}^pF)\left(\mathrm{H}^q(X)\right)$

$$\Rightarrow \mathrm{R}^{p+q}F(X), \quad p,q \in \mathbb{Z}.$$

以下介绍的 Grothendieck 谱序列涉及合成函子的求导, 它足以涵摄几何与代数学中的一大类谱序列, 其论证和例 5.6.5 同样基于 Cartan–Eilenberg 解消.

定理 5.6.6 (Grothendieck 谱序列) 考虑 Abel 范畴之间的加性函子

$$\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{A}' \xrightarrow{F'} \mathcal{A}''.$$

设它们都是左正合 (或右正合) 函子, $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}'$ 有足够的内射对象 (或投射对象), 而且 F 映内射 (或投射) 对象为 F'-零调对象, 则对所有 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ 皆存在典范的第一象限上同调 (或同调) 双分次谱序列

$$E_2^{p,q} = (\mathrm{R}^pF')(\mathrm{R}^qF)(X) \Rightarrow \mathrm{R}^{p+q}(F'F)(X),$$
$$\text{或} \quad E^2_{p,q} = (\mathrm{L}_pF')(\mathrm{L}_qF)(X) \Rightarrow \mathrm{L}_{p+q}(F'F)(X).$$

与此对应的低次项正合列 (推论 5.5.6) 可以分别表为

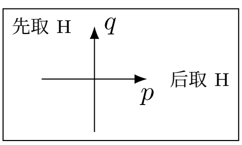
$$\begin{aligned} 0 \to (\mathrm{R}^1F')(FX) &\to \mathrm{R}^1(F'F)(X) \\ &\to F'\left((\mathrm{R}^1F)X\right) \to (\mathrm{R}^2F')(FX) \to \mathrm{R}^2(F'F)(X), \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} \mathrm{L}_2(F'F)(X) \to (\mathrm{L}_2F')(FX) &\to F'\left((\mathrm{L}_1F)X\right) \\ &\to \mathrm{L}_1(F'F)(X) \to (\mathrm{L}_1F')(FX) \to 0; \end{aligned}$$

涉及的态射都是典范的.

证明 基于对偶性, 我们只论上同调情形. 取 X 的内射解消 $0 \to X \to I^0 \to I^1 \to \cdots$; 当 $n < 0$ 时命 $I^n := 0$. 在 $\mathcal{A}'$ 中对 $\mathsf{C}F(I) := (FI^p)_p$ 取 Cartan–Eilenberg 解消 $\mathsf{C}F(I) \to J$ (定理 3.11.9), 然后考虑第一象限双复形 $\mathsf{C}^2F'(J) = (F'(J^{p,q}))_{p,q}$ 和相应的收敛谱序列 $\mathscr{E}_{\mathrm{I}}, \mathscr{E}_{\mathrm{II}}$. 首先,

$E_{\mathrm{I},2}^{p,q} =$ 

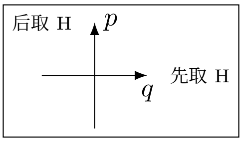
$$= \mathrm{H}^p\left[\cdots \to (\mathrm{R}^qF')(FI^p) \to (\mathrm{R}^qF')(FI^{p+1}) \to \cdots\right]$$
$$\Rightarrow \mathrm{H}^{p+q}\,\mathrm{tot}\left(\mathsf{C}^2F'(J)\right).$$

既然 $F(I^p)$ 按条件是 F'-零调的, 当 $q \neq 0$ 时 $E_{\mathrm{I},2}^{p,q} = 0$. 于是和例 5.6.4 全同的论证表明 $\mathscr{E}_{\mathrm{I}}$ 在 E_2 页退化, 而

$$E_{\mathrm{I},\infty}^{p,q} = E_{\mathrm{I},2}^{p,q} = \begin{cases} \mathrm{H}^p\left(F'F(I^\bullet)\right) = \mathrm{R}^p(F'F)(X), & q = 0 \\ 0, & q \neq 0 \end{cases}$$

而且 $\mathrm{H}^p \operatorname{tot}\left(\mathsf{C}^2 F'(J)\right) = E_{\mathrm{I},\infty}^{p,0} = \mathrm{R}^p(F'F)(X)$.

转向 $\mathscr{E}_{\mathrm{II}}$. 技巧和例 5.6.5 类似, 横向上同调的第 q 列 $\mathrm{H}_{\mathrm{I}}(J)^{q,\bullet}$ 给出 $\mathrm{H}^q(\mathsf{C}F(I)) = (\mathrm{R}^q F)(X)$ 的内射解消, 再回忆到 F' 保持横向上同调, 由此推导出

$$E_{\mathrm{II},2}^{p,q} =$$


$$= (\mathrm{R}^p F')(\mathrm{R}^q F)\,(X)$$

$$\Rightarrow \mathrm{H}^{p+q} \operatorname{tot}\left(\mathsf{C}^2 F'(J)\right) = \mathrm{R}^{p+q}(F'F)(X).$$

将 $E_{\mathrm{II},2}^{p,q}$ 的描述代入 $\mathscr{E}_{\mathrm{II}}$ 的低次项正合列 (推论 5.5.6), 立得后半部分的断言. $\square$

Grothendieck 谱序列可视为定理 4.8.8 的一种具体版本; 它有时能提供更多的信息, 低次项正合列便是一例.

例 5.6.7 (环变换) 设 $R \to S$ 为环同态. 取 X 为右 S-模, Y 为左 R-模. 以 S_R (或 X_R) 代表将 S (或 X) 视作右 R-模. 兹断言存在典范的第一象限同调双分次谱序列

$$E_{p,q}^2 = \mathrm{Tor}_p^S\left(X, \mathrm{Tor}_q^R(S_R, Y)\right) \Rightarrow \mathrm{Tor}_{p+q}^R(X_R, Y);$$

此处赋予 $\mathrm{Tor}_q^R(S_R, Y)$ 左 S-模结构, 如注记 3.14.8. 这是定理 5.6.6 的直接应用, 源于同构

$$X \underset{S}{\otimes} \left(S \underset{R}{\otimes} (\cdot)\right) \simeq X \underset{R}{\otimes} (\cdot) : R\text{-}\mathsf{Mod} \to \mathsf{Ab},$$

其内层 $S \underset{R}{\otimes} (\cdot) : R\text{-}\mathsf{Mod} \to S\text{-}\mathsf{Mod}$ 以 $\mathrm{Tor}_\bullet^R(S_R, \cdot)$ 为左导出函子, 取值在 S-Mod; 基于上述同构, 它映平坦模为平坦模, 因此 Grothendieck 谱序列的同调版本确实适用.

采用完全类似的符号和技巧, 对右 R-模 X 和左 S-模 Y 也有

$$E_{p,q}^2 = \mathrm{Tor}_p^S\left(\mathrm{Tor}_q^R(X, {}_R S), Y\right) \Rightarrow \mathrm{Tor}_{p+q}^R(X, {}_R Y).$$

接着考虑 Ext 函子. 取 X 为左 S-模, Y 为左 R-模, 以 ${}_R X$ 代表将 X 视作左 R-模, 按注记 3.14.8 赋予 $\mathrm{Ext}_R^q({}_R S, Y)$ 左 S-模结构, 则有第一象限上同调双分次谱序列

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}_S^p\left(X, \mathrm{Ext}_R^q({}_R S, Y)\right) \Rightarrow \mathrm{Ext}_R^{p+q}({}_R X, Y),$$
$$E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}_S^p\left(\mathrm{Tor}_q^R(S_R, Y), X\right) \Rightarrow \mathrm{Ext}_R^{p+q}(Y, {}_R X).$$

它们分别对应到函子合成的同构

$$\mathrm{Hom}_S\left(X, \mathrm{Hom}_R({}_RS, \cdot)\right) \simeq \mathrm{Hom}_R({}_RX, \cdot),$$
$$\mathrm{Hom}_S\left(S \underset{R}{\otimes} (\cdot), X\right) \simeq \mathrm{Hom}_R(\cdot, {}_RX),$$

此即 [25, 推论 6.6.8] 介绍的伴随关系. 左导出函子 Ext 和右导出函子 Tor 在第二式中的混搭不致问题, 因为 Hom_S 的第一个变元取在相反范畴 $S\text{-}\mathsf{Mod}^{\mathrm{op}}$.

上述谱序列宜和 §4.12 的导出范畴版本对照.

5.7 谈谈乘法结构

为了简单和具体起见, 本节取交换环 $\Bbbk$ 和 $\mathcal{A} = \Bbbk\text{-}\mathsf{Mod}$, 这对于经典应用已经足够. 我们将 $\Bbbk$-模简称为模, $\Bbbk$-代数简称为代数, 并且记 $\otimes := \otimes_{\Bbbk}$.

选定交换幺半群 I, 二元运算记为加法. 简述 [25, §7.4] 的定义:

◇ I-分次模是带有直和分解的模 $M = \bigoplus_{i \in I} M^i$, 属于 M^i 的元素称作次数 i 的齐次元;

◇ I-分次代数是带有同态 $\mu : A \otimes A \to A$ 的分次模, 也写作乘法 $xy := \mu(x \otimes y)$, 使 A 成环, 而且

$$1_A \in A^0, \quad A^i \cdot A^j \subset A^{i+j}, \quad i, j \in I,$$

因此乘法 μ 完全由资料 $\mu^{i,j} : A^i \otimes A^j \to A^{i+j}$ 确定;

◇ I-分次模或分次代数之间的同态和同构按寻常方式定义, 同样地可以定义 I-分次版本的子代数和理想.

对于 $k \in I$, 另外定义 I-分次模之间的 k 次同态如下: 这是对所有 i 都满足 $\varphi(M^i) \subset M^{i+k}$ 的模同态 $\varphi : M \to N$, 由资料 $\left(\varphi^i : M^i \to M^{i+k}\right)_{i \in I}$ 确定. 取 $k = 0$ 回到寻常意义的同态. 同态合成后的次数相加.

定义 5.7.1 选定交换幺半群 I 连同同态 $\epsilon : I \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. 所谓微分次数为 k 的微分 I-分次代数, 意指一个 I-分次代数 $A = \bigoplus_{p \in I} A^p$, 连同次数 $k \in I$ 的自同态 $d = (d^p)_p : A \to A$, 满足 $d^2 = 0$ 和 Leibniz 律:

$$d(xy) = (dx) \cdot y + (-1)^{\epsilon(p)} x \cdot dy, \quad x \in A^p,\ y \in A^{p'}, \quad p, p' \in I.$$

简单地观察到 $d(1_A) = d(1_A \cdot 1_A) = d(1_A) + d(1_A)$, 故 $d(1_A) = 0$. 由此易见 $\ker(d)$ 是 A 的 I-分次子代数, 而 $\mathrm{im}(d)$ 是 $\ker(d)$ 的 I-分次双边理想. 由此可见

$$\mathrm{H}(A, d) := \ker(d) / \mathrm{im}(d)$$

仍然是 I-分次代数.

例 5.7.2 取 $I=\mathbb{Z}$ 和 $\epsilon(p)=p \mod 2$. 对于任意 $\Bbbk$-线性范畴 $\mathcal{B}$ 上的复形 X, 定义 3.2.1 的 Hom 复形 $\mathrm{Hom}^\bullet(X,X)$ 对 $d=d_{\mathrm{Hom}^\bullet(X,X)}$ 成为微分 $\mathbb{Z}$-分次代数, 微分的次数为 1. 这些断言基本是引理 3.2.4 的内容. 我们有 $\mathrm{H}(\mathrm{Hom}^\bullet(X,X),d)=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{B})}(X,X[n])$.

例 5.7.3 取 $\Bbbk=\mathbb{C}$, $I=\mathbb{Z}$ 和 $\epsilon(p)=p \mod 2$. 光滑流形 $\mathfrak{X}$ 上的 p 次 $\mathbb{C}$-值微分形式构成向量空间 $A^p(\mathfrak{X})$. 命 $A(\mathfrak{X}):=\bigoplus_{p=0}^{\dim X}A^p(\mathfrak{X})$, 它对乘法 $\mu(\omega\otimes\eta):=\omega\wedge\eta$ 和外微分运算 d 构成微分 $\mathbb{Z}$-分次代数, 微分的次数为 1. 对应的 $\mathrm{H}(A(\mathfrak{X}),\mathrm{d})=\bigoplus_p \mathrm{H}^p_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{X})$ 无非 $\mathfrak{X}$ 的 de Rham 上同调, 来自 $\wedge$ 的乘法给出其上的分次代数结构. 这是拓扑学的基本对象, 它和 $\mathfrak{X}$ 的奇异上同调环分次地同构.

留意到 $\mathrm{H}(A(\mathfrak{X}),\mathrm{d})$ 的乘法还满足 $xy=(-1)^{pq}yx$, 其中 $x\in A^p(\mathfrak{X})$, $y\in A^q(\mathfrak{X})$, 这是因为 $A(\mathfrak{X})$ 的乘法已有此性质. 举个简单美好的例子: 复射影空间 $\mathfrak{X}:=\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 给出分次代数 $\mathrm{H}(A(\mathfrak{X}),\mathrm{d})\simeq\mathbb{C}[t]/(t^{n+1})$, 变元 t 对应到次数 2 的齐次元.

言归正传, 本节考虑的情形是:

简称	I	$\epsilon: I\to\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
单分次	$\mathbb{Z}$	$\epsilon(p)=p \mod 2$
双分次	$\mathbb{Z}^2$	$\epsilon(p,q)=p+q \mod 2$

相关理论和定义 5.2.1 有所重叠, 但本节的重心在于先前未提及的乘法.

为了减省符号, 以下经常将种种情况统称为 "分次", 主要倚靠上标 p 或 (p,q) 来区分, 并且相应地将微分 I-分次代数统称为微分分次代数.

约定 5.7.4 对于 $\mathcal{A}=\Bbbk\text{-}\mathsf{Mod}$ 情形的上同调双分次谱序列 $\mathscr{E}$, 我们将每一页 E_r 视同分次模 $\bigoplus_{p,q}E_r^{p,q}$, 将 $d_r=(d_r^{p,q})_{p,q}$ 看作分次模 E_r 的自同态, 次数为 $(r,-r+1)$. 同调情形以及单分次的情形依此类推.

简言之, 带有乘法结构的谱序列是由微分分次代数构成的谱序列.

定义 5.7.5 上同调双分次谱序列 $\mathscr{E}$ 上的**乘法结构**是一族同态 $\mu_r: E_r\otimes E_r\to E_r$, 使得

- ◇ 每个 (E_r,μ_r,d_r) 都成为微分分次代数, 微分次数为 $(r,-r+1)$;
- ◇ 谱序列资料中的 $t_{r+1}:\mathrm{H}(E_r,d_r)\xrightarrow{\sim}E_{r+1}$ 是分次代数的同构.

对于单分次或同调谱序列, 也能类似地定义乘法结构.

之前的讨论蕴涵 $Z_r=\ker(d_r)$ 是 E_r 的分次子代数, 而 $B_r=\mathrm{im}(d_r)$ 是 Z_r 的双边分次理想, 故 $\mathrm{H}(E_r,d_r)$ 成为分次代数, 这是定义 5.7.5 的严谨解释.

进一步, 在极限存在的前提下, $Z_\infty=\bigoplus_{p,q}Z_\infty^{p,q}$ 也是分次子代数, 以 $B_\infty=\bigoplus_{p,q}B_\infty^{p,q}$ 为其分次理想, 因而 E_∞ 也是分次代数.

作为实例, 以下考虑微分次数为 1 的微分分次代数. 展开定义可见这相当于由 $\Bbbk$-模构成的复形 $X = (X^n, d_X^n)_{n\in\mathbb{Z}}$, 使得 $X \xlongequal{\text{等同}} \bigoplus_n X^n$ 带有乘法 $\mu : X \otimes X \to X$, 满足于 $X^p \cdot X^{p'} \subset X^{p+p'}$ 和 Leibniz 律

$$d(xy) = dx \cdot y + (-1)^p x \cdot dy, \quad x \in X^p,\ y \in X^{p'}.$$

现将资料 (X, d) 扩充为滤过复形 $(X, d, \mathrm{F}^\bullet X)$, 回忆到这已蕴涵 $d(\mathrm{F}^p X) \subset \mathrm{F}^p X$; 我们进一步要求 X 的乘法与滤过相容:

$$\mathrm{F}^p X^n \cdot \mathrm{F}^{p'} X^{n'} \subset \mathrm{F}^{p+p'} X^{n+n'}.$$

此时称 $(X, d, \mu, \mathrm{F}^\bullet X)$ 为滤过微分分次代数. 对于 $\mathrm{H}(X, d)$ 上的诱导滤过, 上述条件确保

$$\mathrm{gr}\,\mathrm{H}(X, d) \xlongequal{\text{等同}} \bigoplus_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2} \mathrm{gr}^p\,\mathrm{H}^{p+q}(X, d)$$

自然地成为分次代数.

命题 5.7.6 设 $(X, d, \mu, \mathrm{F}^\bullet X)$ 为滤过微分分次代数, 微分次数为 1.

(i) 滤过复形 $(X, d, \mathrm{F}^\bullet X)$ 的谱序列 $\mathscr{E}$ 具有典范的乘法结构.

(ii) 经典收敛定理 5.5.5 包含的 $E_\infty^{p,q} \simeq \mathrm{gr}^p\,\mathrm{H}^{p+q}(X, d)$ 实际还给出分次代数的同构 $E_\infty \simeq \mathrm{gr}\,\mathrm{H}(X, d)$.

证明 设 $x \in E_r^{p,q}$, $y \in E_r^{p',q'}$, 基于命题 5.5.2 的描述, 取它们的原像

$$\tilde{x} \in \mathrm{F}^p X^{p+q} \cap d^{-1}\left(\mathrm{F}^{p+r} X^{p+q+1}\right), \quad \tilde{y} \in \mathrm{F}^{p'} X^{p'+q'} \cap d^{-1}\left(\mathrm{F}^{p'+r} X^{p'+q'+1}\right).$$

按定义可得

$$\begin{gathered} \tilde{x}\tilde{y} \in \mathrm{F}^{p+p'} X^{p+q+p'+q'}, \\ d(\tilde{x}\tilde{y}) = d\tilde{x} \cdot \tilde{y} + (-1)^{p+q} \tilde{x} \cdot d\tilde{y} \ \in \mathrm{F}^{p+p'+r} X^{p+q+p'+q'+1}. \end{gathered}$$

于是 $\tilde{x}\tilde{y}$ 确定元素 $xy \in E_r^{p+p',q+q'}$; 例行计算 (请验证!) 表明 xy 仅依赖 x 和 y.

其次, $d_r : E_r \xrightarrow{(r,-r+1)} E_r$ 是由 X 上的微分 d 诱导的, 这就给出 E_r 的微分分次代数结构, 所需的结合律, Leibniz 律等性质全部化到 (X, d) 上去检验; 同理可见 $\mathrm{H}(E_r, d_r) \simeq E_{r+1}$ 也是分次代数的同构.

关于经典收敛定理中的典范同构 $E_\infty^{p,q} \simeq \mathrm{gr}^p\,\mathrm{H}^{p+q}(X, d)$ 保乘法的断言同样是化约到 X 上来检验, 不必赘述. □

注记 5.7.7 乘法结构是拓扑学所倚重的工具. 脱离乘法的代数拓扑学几乎不可思议, 或至少是味同嚼蜡的. 历史上, Leray 初逢谱序列时就已考虑了乘法结构, 称之为 “谱

环". 拓扑学中关于谱序列的计算经常可借此大大地简化. 这也是本节简介乘法结构的考量, 尽管仅及皮毛.

在套用乘法结构的定义 5.7.5 时有一个显而易见的麻烦. 定义中所有 E_r 的微分分次代数结构必须全体给定, 因为单从定义看, 上一页毫无理由能诱导下一页的乘法. 这在一些场合确实可以办到, 例如命题 5.7.6.

对于一般的或者难以手算的情形, 鉴于谱序列的构造往往是从简单的资料起步, 例如 §5.3 的正合偶, 我们自然要问: 能否提炼出关于正合偶的简单条件, 使得对应的谱序列带有乘法结构?

答案似乎是否定的. 我们需要正合偶之外的信息. 对此, 一个有用的构造来自同样经典的 **Cartan–Eilenberg 系**及其上的谱积, 详阅 [5, II.A]. 作为应用, 拓扑学中至关重要的 Serre–Atiyah–Hirzebruch 谱序列对于任何满足乘性的广义上同调理论都具有乘法结构. 由于相关内容已经偏离主线, 这边点到为止.

习题

1. 对于 Abel 范畴 $\mathcal{A}$, 针对滤过对象构成的范畴 $\mathrm{Fil}^\bullet(\mathcal{A})$ 验证以下性质.

(i) 它是加性范畴, 所有态射都有核, 余核, 像, 余像; 尽量具体地描述.

(ii) 对于 $\mathrm{Fil}^\bullet(\mathcal{A})$ 的态射 $f: X \to Y$, 若 $f(\mathrm{F}^n X) \to f(X) \cap \mathrm{F}^n Y$ 对所有 n 都是同构, 则称 f 是严格态射; 证明此概念和定义 1.2.4 等价.

提示 这相当于说 $f(X)$ 上的两个自然滤过相等: 一者是 $\mathrm{F}^\bullet X$ 的像, 一者是 $\mathrm{F}^\bullet Y$ 的限制. 前者对应 $\mathrm{Fil}^\bullet(\mathcal{A})$ 中的 $\mathrm{coim}(f)$, 后者则对应 $\mathrm{im}(f)$.

(iii) 举例说明 $\mathrm{Fil}^\bullet(\mathcal{A})$ 一般不是 Abel 范畴.

尽管滤过对象不成 Abel 范畴, 对于有限滤过的情形, 几何学中依然有必要引进滤过导出范畴 $\mathsf{DF}(\mathcal{A})$, 其定义需要比较深入的技巧, 见 [22, Tag 05RX].

2. 给定 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 上的滤过微分对象 $(X, d, \mathrm{F}^\bullet X)$, 证明谱序列中的 $d_1^p : E_1^p \to E_1^{p+1}$ 是微分对象的短正合列

$$0 \to \mathrm{gr}^{p+1} X \to \mathrm{F}^p X / \mathrm{F}^{p+2} X \to \mathrm{gr}^p X \to 0$$

所诱导的连接态射.

3. (Bockstein 谱序列) 设 f 为交换环 R 的非零因子, 对任意 R-模 M 定义 $M[f] := \{m \in M : fm = 0\}$; 满足 $M[f] = \{0\}$ 的 M 称为是 f-无挠的. 设 C 为链复形, 每个 C_n 都是 f-无挠的. 于是乘以 f 给出链复形的单态射 $\alpha: C \to C$. 对于资料 (C, α), 命题 5.3.4 给出正合偶

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}_\bullet(C) \arrow[rr, "\mathrm{H}_\bullet(\alpha)"] & & \mathrm{H}_\bullet(C) \arrow[dl] \\
& \mathrm{H}_\bullet\left(C \underset{R}{\otimes} R/(f)\right) \arrow[ul, "-1"] &
\end{tikzcd}$$

和相应的同调分次谱序列 $(E_q^r)_{\substack{r\geq 0\\ q\in\mathbb{Z}}}$. 敬请尽量明确地描述每一页 (E^r, d^r) 以及 E^∞.

4. 承上题, 取 $R=\mathbb{Z}$ 和素数 $f=p$, 并且设每个 C_n 都是有限秩自由 $\mathbb{Z}$-模. 对任意 $\mathbb{Z}$-模 M, 其挠元构成的子模记为 M_{tor}; 定义 M 的无挠商 $M_{\mathrm{tf}} := M/M_{\mathrm{tor}}$. 证明

$$E_q^\infty \simeq \mathrm{H}_q(C)_{\mathrm{tf}} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{F}_p, \quad q\in\mathbb{Z}.$$

由此推导

$$\dim_{\mathbb{F}_p} \mathrm{H}_q\left(C \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{F}_p\right) \geq \dim_{\mathbb{F}_p}\left(\mathrm{H}_q(C)_{\mathrm{tf}} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{F}_p\right).$$

举例说明不等式可以严格成立.

5. (两列和两行的谱序列) 设有强收敛谱序列 $E_2^{p,q} \Rightarrow H^{p+q}$, 按约定 5.5.4 理解.

(i) 证明若 $E_2^{p,q}$ 仅在 $p\in\{0,1\}$ 时非零, 则对所有 $q\in\mathbb{Z}$ 皆有典范短正合列

$$0 \to E_2^{1,q-1} \to H^q \to E_2^{0,q} \to 0.$$

(ii) 证明若 $E_2^{p,q}$ 仅在 $q\in\{0,1\}$ 时非零, 则对所有 $p\in\mathbb{Z}$ 皆有典范正合列

$$\cdots \to H^{p-1} \to E_2^{p-2,1} \xrightarrow{d_2} E_2^{p,0} \to H^p \to E_2^{p-1,1} \xrightarrow{d_2} E_2^{p+1,0} \to H^{p+1} \to \cdots.$$

(iii) 试处理 $E^2_{p,q} \Rightarrow H_{p+q}$ 的版本. 提示 上下对调, 箭头反转, 其余不变.

6. 考虑满足定理 5.6.6 前提的左正合函子 F' 和 F, 进一步要求 $\mathrm{R}F'$ 和 $\mathrm{R}F$ 都是有限维的.

(i) 证明 $F'F$ 也是有限维的, 并给出维数的一个上界.

(ii) 考虑由三角函子 $\mathrm{R}F$, $\mathrm{R}F'$ 和 $\mathrm{R}(F'F)$ 确定的同态 $\chi_F : \mathrm{K}_0(\mathcal{A}) \to \mathrm{K}_0(\mathcal{A}')$ 和 $\chi_{F'}$, $\chi_{F'F}$; 请参考 §3 习题. 证明 $\chi_{F'F} = \chi_{F'} \circ \chi_F$.

这些性质也可以用导出范畴来论证. 右正合函子和 $\mathrm{L}F'$, $\mathrm{L}F$ 的情形当然是对偶的.

7. 考虑有足够内射对象的 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 和 $X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, 带有限滤过 $X=\mathrm{F}^0X\supset\cdots\supset\mathrm{F}^{N+1}X=0$. 设 $G:\mathcal{A}\to\mathcal{A}'$ 是左正合加性函子. 证明存在强收敛谱序列

$$E_1^{p,q} = \mathrm{R}^{p+q}G\left(\mathrm{gr}^p X\right) \Rightarrow \mathrm{R}^{p+q}G(X).$$

提示 仿照 Cartan–Eilenberg 解消的构造 (定理 3.11.9, 倚靠命题 3.11.8), 从 $\mathrm{F}^N X$ 起步, 取适当的一列内射解消

$$\begin{array}{ccccc}
\vdots & & & & \vdots \\
\uparrow & & & & \uparrow \\
\mathrm{F}^0 I^1 & \supset & \cdots & \supset & \mathrm{F}^N I^1 \\
\uparrow & & & & \uparrow \\
\mathrm{F}^0 I^0 & \supset & \cdots & \supset & \mathrm{F}^N I^0 \\
\uparrow & & & & \uparrow \\
\mathrm{F}^0 X & \supset & \cdots & \supset & \mathrm{F}^N X \\
\uparrow & & & & \uparrow \\
0 & & & & 0
\end{array}$$

使得对 $\mathrm{F}^\bullet(I)$ 取 $\mathsf{C}G$ 后依然得到滤过复形, 并且使 §5.5 给出的谱序列满足所求.

8. 设 R 为环, $C = \left(C_n, d_n^C\right)_n$ 是右 R-模构成的链复形, D 是左 R-模. 设每个 C_n 都是平坦模, 而且 $n \ll 0 \implies C_n = 0$. 取投射解消 $\cdots \to P_1 \to P_0 \to D \to 0$ 并构造双复形 $C_\bullet \underset{R}{\otimes} P_\bullet$.

(i) 说明对应的同调双分次谱序列 $\mathscr{E}_{\mathrm{I}}$ 在 E_{I}^1 处退化.

(ii) 说明 $(E_{\mathrm{II}}^2)_{p,q} = \mathrm{Tor}_p^R\left(\mathrm{H}_q(C), D\right) \Rightarrow \mathrm{H}_{p+q}\left(C_\bullet \underset{R}{\otimes} D\right)$.

(iii) 证明当所有 $\mathrm{im}\left(d_n^C\right)$ 都平坦时, 这给出同调 Künneth 定理 3.14.12 的短正合列. 提示 平坦解消 $0 \to \mathrm{im}\left(d_C^{n+1}\right) \to \ker\left(d_C^n\right) \to \mathrm{H}_n(C) \to 0$ 导致 E_{II}^2 的非零项集中在 $p \in \{0, 1\}$.

9. 设 R, S 为环, X 为右 R-模, Y 为 (R, S)-双模, Z 为左 S-模. 构造双复形使得相应的谱序列满足

$$(E_{\mathrm{I}}^2)_{p,q} = \mathrm{Tor}_p^R\left(X, \mathrm{Tor}_q^S(Y_S, Z)\right), \quad (E_{\mathrm{II}}^2)_{p,q} = \mathrm{Tor}_p^S\left(\mathrm{Tor}_q^R(X, {}_RY), Z\right).$$

提示 取 X 和 Z 的投射解消. 宜对照命题 4.12.12 (取 $A = \Bbbk = B$).

参考文献

[1] Jiří Adámek and Jiří Rosický. *Locally presentable and accessible categories*. Vol. 189. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge, 1994, pp. xiv+316. ISBN: 0-521-42261-2. DOI: 10.1017/CBO9780511600579 (引用于 pp. 61–64, 117).

[2] George M. Bergman. "On diagram-chasing in double complexes". 刊于: *Theory Appl. Categ.* 26 (2012), No. 3, 60–96 (引用于 p. 80).

[3] J. Michael Boardman. "Conditionally convergent spectral sequences". 刊于: *Homotopy invariant algebraic structures (Baltimore, MD, 1998)*. Vol. 239. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, pp. 49–84. DOI: 10.1090/conm/239/03597 (引用于 p. 289).

[4] Marcel Bökstedt and Amnon Neeman. "Homotopy limits in triangulated categories". 刊于: *Compositio Math.* 86.2 (1993), pp. 209–234. ISSN: 0010-437X. URL: http://www.numdam.org/item?id=CM_1993__86_2_209_0 (引用于 pp. 192, 257).

[5] Adrien Douady. "La suite spectrale d'Adams : structure multiplicative". 刊于: *Séminaire Henri Cartan* 11.2 (1958-1959). Exposé no. 19. URL: www.numdam.org/item/SHC_1958-1959__11_2_A10_0/ (引用于 p. 300).

[6] P. Gabriel and M. Zisman. *Calculus of fractions and homotopy theory*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 35. Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1967, pp. x+168 (引用于 pp. 43, 44, 65).

[7] Peter Gabriel and Friedrich Ulmer. *Lokal präsentierbare Kategorien*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 221. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971, pp. v+200 (引用于 p. 63).

[8] Robin Hartshorne. *Residues and duality*. Lecture notes of a seminar on the work of A. Grothendieck, given at Harvard 1963/64. With an appendix by P. Deligne. Lecture Notes in Mathematics, No. 20. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1966, pp. vii+423 (引用于 p. 232).

[9] Thomas Jech. *Set theory*. Springer Monographs in Mathematics. The third millennium edition, revised and expanded. Berlin: Springer-Verlag, 2003, pp. xiv+769. ISBN: 3-540-44085-2 (引用于 pp. 3, 63).

[10] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Categories and sheaves*. Vol. 332. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Berlin: Springer-Verlag, 2006, pp. x+497. ISBN: 978-3-540-27949-5; 3-540-27949-0 (引用于 pp. 43, 74, 149, 162, 192, 248).

[11] Henning Krause. “Krull-Schmidt categories and projective covers”. 刊于: *Expo. Math.* 33.4 (2015), pp. 535–549. ISSN: 0723-0869. DOI: `10.1016/j.exmath.2015.10.001` (引用于 p. 87).

[12] Nicholas J. Kuhn. “Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. I”. 刊于: *Amer. J. Math.* 116.2 (1994), pp. 327–360. ISSN: 0002-9327. DOI: `10.2307/2374932` (引用于 p. 115).

[13] T. Y. Lam. *Lectures on modules and rings*. Vol. 189. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1999, pp. xxiv+557. ISBN: 0-387-98428-3. DOI: `10.1007/978-1-4612-0525-8` (引用于 p. 50).

[14] Jean-Louis Loday. *Cyclic homology*. Second. Vol. 301. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Appendix E by María O. Ronco, Chapter 13 by the author in collaboration with Teimuraz Pirashvili. Springer-Verlag, Berlin, 1998, pp. xx+513. ISBN: 3-540-63074-0. DOI: `10.1007/978-3-662-11389-9` (引用于 p. 156).

[15] Jacob Lurie. *Higher topos theory*. Vol. 170. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009, pp. xviii+925. ISBN: 978-0-691-14049-0; 0-691-14049-9. DOI: `10.1515/9781400830558` (引用于 p. 63).

[16] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*. Second edition. Vol. 5. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1998, pp. xii+314. ISBN: 0-387-98403-8 (引用于 pp. 34, 57).

[17] Georges Maltsiniotis. “Le théorème de Quillen, d’adjonction des foncteurs dérivés, revisité”. 刊于: *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 344.9 (2007), pp. 549–552. ISSN: 1631-073X. DOI: 10.1016/j.crma.2007.03.011 (引用于 p. 38).

[18] Nitin Nitsure. “Sign (di)lemma for dimension shifting”. 刊于: *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.* 119.2 (2009), pp. 179–186. ISSN: 0253-4142. DOI: 10.1007/s12044-009-0018-z (引用于 p. 203).

[19] Jan-Erik Roos. “Derived functors of inverse limits revisited”. 刊于: *J. London Math. Soc. (2)* 73.1 (2006), pp. 65–83. ISSN: 0024-6107. DOI: 10.1112/S0024610705022416 (引用于 p. 185).

[20] C. Serpé. “Resolution of unbounded complexes in Grothendieck categories”. 刊于: *J. Pure Appl. Algebra* 177.1 (2003), pp. 103–112. ISSN: 0022-4049. DOI: 10.1016/S0022-4049(02)00075-0 (引用于 p. 198).

[21] N. Spaltenstein. “Resolutions of unbounded complexes”. 刊于: *Compositio Math.* 65.2 (1988), pp. 121–154. ISSN: 0010-437X. URL: http://www.numdam.org/item?id=CM_1988__65_2_121_0 (引用于 pp. 192, 263).

[22] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. https://stacks.math.columbia.edu. 2020 (引用于 pp. 74, 192, 198, 218, 261, 300).

[23] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 3*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 305. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J. L. Verdier. Avec la collaboration de P. Deligne et B. Saint-Donat. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973, pp. vi+640 (引用于 p. 242).

[24] Sarah J. Witherspoon. *Hochschild cohomology for algebras*. Vol. 204. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, [2019] ©2019, pp. xi+250. ISBN: 978-1-4704-4931-5. DOI: 10.1090/gsm/204 (引用于 p. 156).

[25] 李文威. *代数学方法 (第一卷)*. Vol. 67.1. 现代数学基础丛书. 北京: 高等教育出版社, 2019. ISBN: 978-7-04-050725-6 (引用于 pp. 2–5, 7–9, 17, 18, 20, 24–30, 32, 33, 36, 38, 40, 50, 58, 60, 62, 63, 65, 67, 74, 79, 82, 83, 85–88, 91, 92, 96, 97, 99, 100, 104, 106, 108, 111, 114, 116, 138, 149, 153, 188, 190, 192, 205, 211, 213, 214, 234, 263, 264, 266, 268–270, 273, 277, 297).

[26] 熊金城. 点集拓扑讲义. 第四版. 北京: 高等教育出版社, 2011 (引用于 pp. 58, 60).

[27] 黎景辉. 代数 K 理论. 北京: 科学出版社, 2019. ISBN: 978-7-03-058102-0 (引用于 p. 110).

符号索引

名词索引暨英译

中文术语按汉语拼音排序.