ФИО	Группа	1	2	3	4	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 1

Контрольный вопрос: Определение нормы матрицы, согласованной с нормой вектора.

1. (3) С какой относительной погрешностью можно вычислить корни уравнения

$$x^2 - \sin(uv^2) = 0,$$

если приближенные значения $u^* = \pi$, $v^* = 1/\sqrt{2}$, а их абсолютные погрешности $\Delta u = 10^{-2}$, $\Delta v = 10^{-3}$?

2. (3) Функция задана таблично:

x	1.1	1.2	1.4
$f(x)$	3.00	3.32	4.06

Значения функции известны с абсолютной погрешностью 0.01. Методом конечных разностей, посчитать производную функции в точке $x = 1.2$ с максимально возможной точностью. Оценить полную погрешность, если известно, что $M_3 = \max\limits_{1 \le x \le 1.5} f'''(x) = 6$.

3. (8) Некоторая величина определяется как решение СЛАУ с треугольной матрицей, элементы которой, в свою очередь, получены численно. Матрица системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0.100 & 10.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.100 & 10.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.100 \end{pmatrix}$$

С какой точностью будет вычисляться решение системы прямым методом с произвольной правой частью, если известно, что правая часть задана точно?

4. (7) Используя метод вращений, найти собственные числа матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

ФИО	Группа	1	2	3	4	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 2

Контрольный вопрос: Определение прямых методов решения СЛАУ.

1. (3) В результате измерений получены следующие значения

x_1	x_2	x_3	x_4
0.45	-0.38	-0.14	-0.86

С какой точностью можно вычислить $x_1x_2^2$ и $\exp(x_3 + x_4)$?

2. (4) Функция задана таблично:

x	0.0	0.3	0.4
$f(x)$	f_0	f_3	f_4

Вывести формулу для рассчета производной функции в точке $x = 0.1$ с максимально возможной точностью. Оценить погрешность полученного Вами метода.

3. (6) Решается СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Выписать расчетные формулы метода Зейделя в компонентах. Выполнить две итерации. Записать метод в канонической форме. Оценить скорость сходимости метода Зейделя.

4. (8) Предложить итерационный метод для поиска минимального собственного числа матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Выполнить две итерации от начального приближения (8, 0, 2).

ФИО	Группа	1	2	3	4	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 3

Контрольный вопрос: Дать определение итерационных методов решения СЛАУ.

1. (3) С какой относительной погрешностью можно вычислить корни уравнения

$$x^2 - \frac{u}{v}x = 0,$$

если приближенные значения $u^* = 1$, $v^* = 16$, а их абсолютные погрешности $\Delta u = 10^{-2}$, $\Delta v = 10^{-3}$?

2. (3) Функция задана таблично:

x	0.1	0.3	0.5
$f(x)$	1.11	1.35	1.65

Значения функции заданы с абсолютной погрешностью 0.01. Методом конечных разностей, посчитать производную функции в точке $x = 0.3$ с максимально возможной точностью. Оценить полную погрешность, если известно, что $M_3 = \max\limits_{0 \le x \le 1.0} f'''(x) = 3$.

3. (8) При определении констант скоростей системы некоторых реакций получена СЛАУ:

$$\begin{cases} 1.73k_1 + 0.50k_2 + 1.00k_3 = 1000.0 \\ 0.50k_1 + 0.75k_2 + 0.50k_3 = 2000.0 \\ 1.00k_1 + 0.50k_2 + 1.73k_3 = 3000.0 \end{cases}$$

Коэффициенты и правые части системы — некоторые концентрации, измеренные экспериментально. С какой точностью можно определить константы реакции при решении системы методом Гаусса?

4. (7) Используя метод вращений, найти собственные числа матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2\sqrt{3} \\ 0 & -2\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

ФИО	Группа	1	2	3	4	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 4

Контрольный вопрос: Необходимое и достаточное условие сходимости метода простых итераций.

1. (4) Пусть в представлении IEEE-арифметики двойной точности значение полиноме в точке $x = 20$ вычисляется двумя способами:

$$\begin{aligned} &1)\quad 10x^3 + 6x^2 + 5x + 2 \\ &2)\quad 10(x(x(x + 0.6) + 0.5) + 0.2) \end{aligned}$$

Найти погрешности, с которыми вычисляется значение полинома в этих двух случаях. В каком случае погрешность меньше?

2. (4) Функция задана таблично:

x	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
$f(x)$	3.3	3.6	4.0	4.6	5.0	5.4	6.0	6.6	7.3	8.1	9.0

Используя конечную разность второго порядка:

$$f'(x_n) = \frac{f(x_{n+1}) - f(x_{n-1})}{2h}$$

Вычислить производную в точке $x = 1.0$ с максимально возможной точностью, если известно, что $M_3 = \max\limits_{0.5 \le x \le 1.5} f'''(x) = 10$. Оценить погрешность вычисления производной.

3. (7) Решается СЛАУ с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 10 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Оценить скорость сходимости метода простой итерации с оптимальным значением итерационного параметра. Предложить вариант итерационного метода, явно использующего строгое диагональное преобладание. Записать предложенный метод в канонической форме. Оценить скорость сходимости предложенного метода.

4. (6) Для поиска максимального собственного числа матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

степенной метод. Выполнить две итерации от начального приближения (1, 1, 1). Показать, что для данной задачи степенной метод сходится.

ФИО	Группа	1	2	3	4	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 5

Контрольный вопрос: Что такое число обусловленности матрицы?

1. (2) Найти машинное эпсилон ε, если на хранения числа отводится 10 бит, из которых $f = 5$ — для хранения мантиссы, $e = 4$ — для хранения порядка.

2. (4) Функция задана таблично:

x	0.1	0.2	0.4
$f(x)$	f_1	f_2	f_4

Вывести формулу для рассчета производной функции в точке $x = 0.3$ с максимально возможной точностью. Оценить погрешность Вашего метода.

3. (8) При численном решении задачи диффузии с конвекцией для аппроксимации поля концентраций была получена СЛАУ, причем коэффициенты этой системы также считались численно. Для тестового расчета система имела вид:

$$\begin{cases} -2.00x_1 + 0.00x_2 = 0.00 \\ 0.00x_1 - 2.00x_2 + 1.50x_3 = 3.00 \\ 1.50x_2 - 2.00x_3 = -3.00 \end{cases}$$

Обратите внимание на запись системы! Некоторые переменные не могут входить в математическую модель, коэффициенты при них в точности равны нулю. Для некоторых переменных коэффициенты вычислены, и они получились нолями в пределах точности расчета. С какой точностью можно определить решение системы при использовании прямых методов?

4. (7) Используя метод вращений, найти собственные числа матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

ФИО	Группа	1	2	3	4	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 6

Контрольный вопрос: Что такое машинное ε?

1. (3) В результате измерений получены следующие значения

x_1	x_2	x_3	x_4
-0.27	-0.27	0.50	1.07

С какой точностью можно вычислить $(x_1 - x_2)x_3$ и $\cos(x_3 + x_4)$?

2. (4) Функция задана таблично:

x	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
$f(x)$	0.878	0.825	0.765	0.697	0.622	0.540	0.435	0.362	0.267	0.170	0.071

Используя конечную разность:

$$f''(x_n) = \frac{f(x_{n+1}) - 2f(x_n) + f(x_{n-1})}{h^2}$$

Вычислить вторую производную в точке $x = 1.0$ с максимально возможной точностью, если известно, что $M_3 = \max\limits_{0 \le x \le 1.0} f^{IV}(x) = 1$. Оценить погрешность вычисления производной.

3. (7) Система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 10 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

решается методом минимальных невязок. Выполнить две итерации данным методом, начальное приближение к решению — нулевой вектор. Выписать функционал энергии для данной задачи (заметим, что функционал энергии порождается самосопряженной положительной матрицей). Обосновать сходимость метода для Вашей задачи.

4. (7) Используя метод вращений, найти собственные числа матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

ФИО	Группа	1	2	3	4	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 7

Контрольный вопрос: В чем заключается некорректность задачи численного дифференцирования?

1. (4) Пусть в представлении IEEE-арифметики двойной точности значение полиноме в точке $x = 10$ вычисляется двумя способами:

$$\begin{aligned} &1) \;\; 10x^3 + 6x^2 + 5x + 2 \\ &2) \;\; x(2x(5x+3)+5)+2 \end{aligned}$$

Найти погрешности, с которыми вычисляется значение полинома в этих двух случаях. В каком случае погрешность меньше?

2. (4) Функция задана таблично:

x	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
$f(x)$	0.96	0.94	0.92	0.90	0.87	0.84	0.81	0.78	0.74	0.70	0.66

Используя конечную разность второго порядка:

$$f'(x_n) = \frac{f(x_{n+1}) - f(x_{n-1})}{2h}$$

Вычислить производную в точке $x = 1.0$ с максимально возможной точностью, если известно, что $M_3 = \max\limits_{0.5 \le x \le 1.5} f'''(x) = 1$, а у значений в таблице указанны лишь верные значимые цифры. Оценить погрешность вычисления производной.

3. (6) Решается СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Выполнить две итерации методом наискорейшего спуска.

4. (7) Используя метод вращений, найти собственные числа и собственные векторы следующей матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}$$

ФИО	Группа	1	2	3	4	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 8

Контрольный вопрос: Норма вектора. Аксиомы нормы.

1. (3) В ЭВМ «Сетунь-70» использовалась троичная система счисления. Найти машинное эпсилон ε, если число представляется в троичном представлении и на его хранение отводится 81 трит (аналог бита), из которых $f = 70$ — для хранения мантиссы, $e = 10$ — для хранения порядка.

2. (4) Функция задана таблично:

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$f(x)$	1.00	1.01	1.04	1.09	1.17	1.28	1.28	1.43	1.63	1.90	1.25

Используя конечную разность:

$$f''(x_n) = \frac{f(x_{n+1}) - 2f(x_n) + f(x_{n-1})}{h^2}$$

Вычислить вторую производную в точке $x = 0.5$ с максимально возможной точностью, если известно, что $M_3 = \max\limits_{0 \le x \le 1.0} f^{IV}(x) = 150$. Оценить погрешность вычисления производной.

3. (6) Решается СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 10 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Выписать расчетные формулы метода Якоби в компонентах. Выполнить две итерации. Записать метод в канонической форме. Оценить скорость сходимости метода Якоби.

4. (8) Предложить итерационный метод вычисления расстояния от π до ближайшего собственного числа матрицы:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & -6 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

и сделать одну итерацию для оценки этого расстояния.

Ответы и решения

Вариант 4

2. Исходная функция $f(x) = 2\exp(x)$; значение производной, посчитанное аналитически: $f'(x) \approx 5.44$. Ошибка:

$$\Delta = \Delta_M + \Delta_O = M_3 * \frac{h^2}{6} + \frac{2(\varepsilon \cdot M_0)}{2h}, \tag{1}$$

где $\varepsilon \cdot M_0 = 0.1$ (или 0.05) берется из таблицы. Оптимальный шаг:

$$h_{opt} = \sqrt[3]{3\frac{\varepsilon \cdot M_0}{M_3}}. \tag{2}$$

Если считать ошибку округления $\varepsilon \cdot M_0 = 0.1$, то получается $h_{opt} = 0.3$. При $\varepsilon \cdot M_0 = 0.05$ получается $h_{opt} = 0.2$. В первом случае получается $f'_{0.3}(1.0) = 5.5$, во втором — $f'_{0.2}(1.0) = 5.25$. Ошибка $\Delta_{0.3} = 0.5$ и $\Delta_{0.2} = 0.3$ соответственно.

Вариант 6

2. Исходная функция $f(x) = \cos(x)$; значение производной, посчитанное аналитически: $f''(x) \approx -0.540$. Ошибка:

$$\Delta = \Delta_M + \Delta_O = M_4 * \frac{h^2}{12} + \frac{4(\varepsilon \cdot M_0)}{h^2}. \tag{3}$$

Оптимальный шаг:

$$h_{opt} = \sqrt[4]{48\frac{\varepsilon \cdot M_0}{M_4}}. \tag{4}$$

Ошибку округления по таблице можно считать равной $\varepsilon \cdot M_0 = 0.001$ или $\varepsilon \cdot M_0 = 0.0005$. Соответствующие оптималтные шаги $h_{opt,0.001} = 0.5$ и $h_{opt,0.0005} = 0.4$; $f''_{0.5}(1.0) = -0.528$, $f''_{0.4}(1.0) = -0.531$. Ошибка $\Delta_{0.001} = 0.04$, $\Delta_{0.0005} = 0.03$.

Вариант 7

2. Исходная функция $f(x) = \frac{sin(x)}{x}$; значение производной, посчитанное аналитически: $f'(x) \approx -0.30$. Ошибка:

$$\Delta = \Delta_M + \Delta_O = M_3 * \frac{h^2}{6} + \frac{2(\varepsilon \cdot M_0)}{2h}, \tag{5}$$

где $\varepsilon \cdot M_0 = 0.01$ (или 0.005) берется из таблицы. Оптимальный шаг:

$$h_{opt} = \sqrt[3]{3\frac{\varepsilon \cdot M_0}{M_3}}. \tag{6}$$

Если считать ошибку округления $\varepsilon \cdot M_0 = 0.01$, то получается $h_{opt} = 0.3$. При $\varepsilon \cdot M_0 = 0.005$ получается $h_{opt} = 0.2$. В обоих случаях должно получиться $f'(1.0) = -0.3$. Ошибка в обоих случаях $\Delta = 0.05$.

Вариант 8

2. Исходная функция $f(x) = \exp(x^2)$; значение производной, посчитанное аналитически: $f''(x) \approx 3.85$. Ошибка:

$$\Delta = \Delta_M + \Delta_O = M_4 * \frac{h^2}{12} + \frac{4(\varepsilon \cdot M_0)}{h^2}. \tag{7}$$

Оптимальный шаг:

$$h_{opt} = \sqrt[4]{48\frac{\varepsilon \cdot M_0}{M_4}}. \tag{8}$$

Ошибку округления по таблице можно считать равной $\varepsilon \cdot M_0 = 0.01$ или $\varepsilon \cdot M_0 = 0.005$. В обоих случаях получается $h_{opt} = 0.2$, $f''(0.5) = 4.00$. Ошибка $\Delta_{0.01} = 1.5$, $\Delta_{0.005} = 1.0$.