

ФИО	Группа	1	2	3	4	5	6	$\Sigma$	Оценка	Подпись

## Вариант 1

**Контрольный вопрос:** Дать определение нормы матрицы, согласованной с нормой вектора.

1. (4) Дана сеточная функция:

$x$	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
$y$	6.0	6.3	6.6	6.9	7.3	7.7	8.0	8.5	8.9	9.4	9.8

Используя формулу с центральной разностью (второго порядка), вычислить производную  $y'(0.25)$  с максимальной возможной точностью. Известно, что относительная ошибка округления  $\varepsilon = 0.01$  и  $M_3 = \max_{x \in [0,5]} |y'''(x)| \leq 10$ .

2. (5) Дана система линейных алгебраических уравнений  $A\vec{u} = f$ :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Произвести две первых итерации метода минимальных невязок. За начальное приближение взять вектор правой части ( $\vec{u}_0 = \vec{f}$ ).

3. (6) Построить функцию Лебега и вычислить константу Лебега для сетки  $\{x_n\}_{n=0}^2 = \{0, \frac{1}{3}, 1\}$ .

4. (5) Функция  $f(x)$  задана таблично:

$x$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Найти численно значение интеграла  $\int_{\pi/4}^{\pi/2} f(x)dx$  с максимально возможной точностью.

5. (4) Дана система уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 25 = 0 \\ y - \frac{x^3}{3} + x - 1 = 0 \end{cases}$$

Предложить метод простой итерации для нахождения корней системы. Доказать его сходимость.

6. (6) Для решения ОДУ  $\dot{y} = ay$  используется линейный многошаговый метод:

$$\frac{3y_{n+1} - 4y_n + y_{n-1}}{2h} = ay_{n+1}$$

Доказать сходимость метода.

ФИО	Группа	1	2	3	4	5	6	$\Sigma$	Оценка	Подпись

## Вариант 2

**Контрольный вопрос:** Формулировка основной теоремы вычислительной математики.

1. (4) Дана сеточная функция:

$x$	0	1/3	1
$y$	1	1.11	2.72

Вычислить  $y'(1/3)$  с максимально возможной точностью.

2. (5) Для решения системы линейных алгебраических уравнений  $A\vec{u} = f$ :

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

построить итерационный процесс поиска решения методом Зейделя. Записать метод в компонентах. Доказать сходимость метода.

3. (6) Дана сеточная функция:

$x$	0	1/2	1
$y$	2	1	$e^{-1} + 1$

Построить интерполяцию обобщенным полиномом по системе функций  $\phi_0 = 1$ ,  $\phi_1 = \sin(\pi x)$  и  $\phi_2 = e^{-x^2}$ .

4. (5) Функция  $f(x)$  задана таблично:

$x$	0	0.1	0.2	0.3	0.4
$f(x)$	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2

Используя формулу Симпсона, найти численно значение интеграла  $\int_0^{0.4} f(x)dx$  с максимально возможной точностью.

5. (4) Нелинейное уравнение  $1 - \ln(1 + x^2) = 0$  решается методом Ньютона. Выписать расчетные формулы метода. При каких начальных приближениях метод сходится?

6. (6) Задача Коши для ОДУ  $\dot{y} = f(t, y)$ ,  $y(0) = y^0$  решается явным методом Рунге-Кутты. Исследовать метод на устойчивость, если его таблица Бутчера:

0			
1/2	1/2		
1	2	-1	
	1/6	2/3	1/6

ФИО	Группа	1	2	3	4	5	6	$\Sigma$	Оценка	Подпись

## Вариант 3

**Контрольный вопрос:** Теорема о существовании решения задачи алгебраической интерполяции.

1. (4) Дана сеточная функция:

$x$	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
$y$	0.00	0.99	1.9	2.9	3.9	4.9	5.9	6.8	7.7	8.6	9.5

Используя формулу первого порядка, вычислить производную  $y'(0.25)$  с максимальной возможной точностью. Известно, что относительная ошибка округления  $\varepsilon = 0.01$  и  $M_2 = \max_{x \in [0,5]} |y''(x)| \leq 10$ .

2. (5) Итерационный процесс метода Якоби задается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} x_{n+1} = -\frac{1}{3}y_n - z_n + \frac{1}{3} \\ y_{n+1} = -\frac{1}{2}x_n - \frac{1}{2}z_n + 1 \\ z_{n+1} = -\frac{1}{2}x_n - \frac{1}{4}y_n + \frac{1}{4} \end{cases}$$

Записать итерационный процесс в каноническом виде и доказать сходимость метода. (Указание: один из корней характеристического уравнения  $\lambda = -1$ ).

3. (6) Дана сеточная функция:

$x$	0	1/3	1
$y$	0	1/3	1

Построить интерполяционный многочлен третьего порядка, если известно что  $f'(1/3) = 0$ .

4. (5) Функция  $f(x)$  задана таблично:

$x$	0	0.1	0.2	0.3	0.4
$f(x)$	0	0.5	2	4.5	8

Найти численно значение интеграла  $\int_0^{0.4} f(x)dx$ . Оценить погрешность интегрирования.

5. (4) Дана система уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 25 = 0 \\ y - \frac{x^3}{3} + x - 1 = 0 \end{cases}$$

Выписать формулы метода Ньютона.

6. (6) Используя условия аппроксимации третьего порядка и условие Кутты, дописать в таблицу Бутчера недостающие коэффициенты:

0		
·		
·		
·	1/3	
·	·	·
<hr/>		
	1/4	· 3/4