ВНИМАНИЕ! Без ответа на контрольный вопрос работа не засчитывается!

ФИО	Группа	1	2	3	4	5	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 1

Контрольный вопрос: Основная теорема вычислительной математики (формулировка)

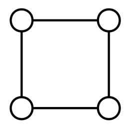
1. (7) Для линейного уравнения теплопроводности решается смешанная задача:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u\left(x,0\right) = 0, \qquad u\left(0,t\right) = t^2, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\left(1,t\right) = 0. \end{cases}$$

Используется метод прямых. Производная по пространству представляется в виде второй разности, затем получившаяся система ОДУ решается методом Рунге-Кутты «3/8». Предложить аппроксимацию второго порядка для правого граничного условия. При каких шагах τ метод устойчив?

2.(4) Дана задача Коши для уравнения переноса:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - 2\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ u(x,0) = \phi(x). \end{cases}$$



Построить разностную схему максимального порядка аппроксимации на предложенном шаблоне (см. Рис.). Исследовать схему на устойчивость по спектральному признаку.

3. (3) Для решения начально-краевой задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \left[0,1\right], \quad t \in \left[0,T\right], \\ u(x,0) = 0, \quad u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = t^2, \end{cases}$$

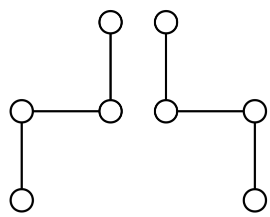
используется разностная схема

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\tau} - 2\frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} - 2\frac{u_{m+1}^{n} - 2u_m^{n} + u_{m-1}^{n}}{h^2} = 0.$$

Исследовать ее на аппроксимацию и устойчивость по спектральному признаку фон Неймана.

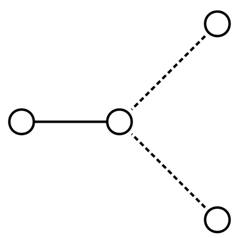
4. (6) Дана система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial v}{\partial x} + 2\frac{\partial w}{\partial x} = 0, & \quad 0 \le t \le 1, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2\frac{\partial v}{\partial x} - 3\frac{\partial w}{\partial x} = 0, & \quad 0 \le x \le 1. \\ \frac{\partial w}{\partial t} - 4\frac{\partial v}{\partial x} - 2\frac{\partial w}{\partial x} = 0. & \end{cases}$$



а) $u(t,1) = \psi_1(t)$, $v(t,1) = \psi_2(t)$, $w(t,1) = \psi_3(t)$;
б) $u(t,1) + v(t,1) = \psi_1(t)$, $w(t,1) = \psi_2(t)$;
в) $u(t,0) = \psi_1(t)$, $w(t,0) = \psi_2(t)$, $v(t,1) = \psi_3(t)$;
г) $u(t,0) = \psi_1(t)$, $u(t,1) - v(t,1) = \psi_2(t)$, $u(t,0) + 2w(t,0) = \psi_3(t)$.

Записать систему в инвариантах Римана, предложить разностную схему на шаблонах «кабаре» (см. рис.). Пусть заданы начальные условия: $u(0,x) = \phi_0(x)$, $v(0,x) = \phi_1(x)$, $w(0,x) = \phi_3(x)$. Какие из приведённых граничных соответствуют корректной постановке смешанной задачи?



5. (3) Уравнения Пуассона $\Delta u = f(x,y)$ решается в области $\Omega = \{-1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}$ с граничными условиями $u\big|_{\partial\Omega} = 0$. Предложить аппроксимирующую уравнение разностную схему на указанном шаблоне. Какой порядок аппроксимации у этой схемы?

ВНИМАНИЕ! Без ответа на контрольный вопрос работа не засчитывается!

ФИО	Группа	1	2	3	4	5	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 2

Контрольный вопрос: Определение аппроксимации разностной схемы.

1. (4) Построить функцию устойчивости для метода Розенброка

$$\begin{aligned}(E-\tau\gamma J)k_1 &= f\left(t_n, y^n\right),\\ (E-\tau\gamma J)k_2 &= f\left(t_n + c\tau, y^n + \tau d k_1\right),\\ y^{n+1} &= y^n + \frac{1}{2}\left(k_1 + k_2\right),\end{aligned}$$

где J-матрица Якоби. Параметры метода:

$$\gamma = \frac{1+\sqrt{2}}{2}, \qquad c = \frac{1-\sqrt{2}}{2}, \qquad d = -\sqrt{2}.$$

2. (6) Для уравнения Хопфа $u'_t + uu'_x = 0$ построить консервативный вариант схемы Лакса-Вендроффа.

3. (3) Для решения начально-краевой задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - 6\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in [0,1], \quad t \in [0,T], \\ u(x,0) = 0, \quad u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = t^2, \end{cases}$$

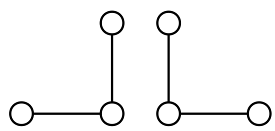
используется разностная схема

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\tau} - 6\frac{u_{m+2}^n + 4u_{m+1}^n - 10u_m^n + 4u_{m-1}^n + u_{m-2}^n}{4h^2} = 0.$$

Исследовать ее на аппроксимацию и устойчивость по спектральному признаку фон Неймана.

4. (6) Дана система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - 2\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = f(t,x), \qquad 0 \le t \le 1, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - 2\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} = g(t,x), \qquad 0 \le x \le 1. \\ \frac{\partial w}{\partial t} - 2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} - 4\frac{\partial w}{\partial x} = h(t,x). \end{cases}$$



а) $u(t,0) = \psi_1(t)$, $v(t,1) = \psi_2(t)$, $w(t,1) = \psi_3(t)$;
б) $u(t,1) = \psi_1(t)$, $v(t,1) = \psi_2(t)$;
в) $v(t,1) = \psi_1(t)$, $u(t,1) = \psi_2(t)$, $w(t,1) = \psi_3(t)$;
г) $u(t,0) = \psi_1(t)$, $v(t,0) = \psi_2(t)$, $w(t,0) = \psi_3(t)$.

Записать систему в инвариантах Римана, предложить разностную схему на шаблонах «левый уголок» и «правый уголок» (см. рис.). Пусть заданы начальные условия: $u(0,x) = \phi_0(x)$, $v(0,x) = \phi_1(x)$, $w(0,x) = \phi_3(x)$. Какие из приведённых граничных соответствуют корректной постановке смешанной задачи?

5. (4) Дана краевая задача для уравнения Лапласа:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 2, \quad u(1,y) = 2y, \quad u(x,1) = 2x - x^2 + 1, \quad u(0,y) = 2y - 1. \end{cases}$$

Для численного решения задачи используется разностная схема, построенная на шаблоне «крест». Найти собственные числа и собственные функции разностного оператора Лапласа. Предложить разностные отношения со вторым порядком аппроксимации для граничных условий.

ВНИМАНИЕ! Без ответа на контрольный вопрос работа не засчитывается!

ФИО	Группа	1	2	3	4	5	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 3

Контрольный вопрос: Спектральный признак устойчивости (формулировка).

1. (4) Построить функцию устойчивости для метода Розенброка

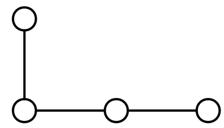
$$(E-\tau\gamma J)k_1 = f\left(t_n, y^n\right),$$
$$(E-\tau\gamma J)k_2 = f\left(t_n + c\tau, y^n + \tau d k_1\right),$$
$$y^{n+1} = y^n + \frac{1}{2}\left(k_1 + k_2\right),$$

где J-матрица Якоби. Параметры метода:

$$\gamma = \frac{3-\sqrt{3}}{6}, \qquad c = \frac{3+\sqrt{3}}{6}, \qquad d = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2. (4) Дана задача Коши для уравнения переноса:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - 2\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ u(x,0) = \phi(x). \end{cases}$$



Построить разностную схему второго порядка аппроксимации на предложенном шаблоне (см. Рис.). Исследовать схему на устойчивость по спектральному признаку.

3. (7) Для решения начально-краевой задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} u^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in [0,1], \quad t \in [0,T], \\ u(x,0) = 0, \quad u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = \sqrt[3]{t}, \end{cases}$$

используется разностная схема

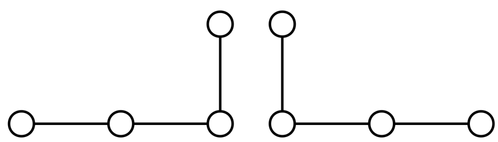
$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\tau} - \frac{1}{h}\left(\left(\frac{u_{m+1}^n + u_m^n}{2}\right)^2 \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} - \left(\frac{u_m^n + u_{m-1}^n}{2}\right)^2 \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h}\right) = 0.$$

Исследовать ее на устойчивость по принципу замороженных коэффициентов.

4. (6) Дана система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial w}{\partial x} = 0, & 0 \le t \le 1, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - 3\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} + 3\frac{\partial w}{\partial x} = 0, & 0 \le x \le 1. \\ \frac{\partial w}{\partial t} + 3\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

а) $u(t,1) = \psi_1(t)$, $v(t,1) = \psi_2(t)$, $w(t,1) = \psi_3(t)$;
б) $u(t,0) = \psi_1(t)$, $v(t,1) = \psi_2(t)$, $w(t,1) = \psi_3(t)$;
в) $u(t,0) = \psi_1(t)$, $v(t,0) = \psi_2(t)$, $w(t,1) = \psi_3(t)$;
г) $v(t,0) = \psi_1(t)$, $w(t,1) = \psi_2(t)$.



Записать систему в инвариантах Римана, предложить разностную схему на шаблонах, показанных на рисунке. Пусть заданы начальные условия: $u(0,x) = \phi_0(x)$, $v(0,x) = \phi_1(x)$, $w(0,x) = \phi_3(x)$. Какие из приведённых граничных соответствуют корректной постановке смешанной задачи?

5. (4) Дана краевая задача для уравнения Лапласа:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1, \\ u(x,0) = x, \quad u(x,1) = \frac{x^2}{2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 1 - y, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1,y) = 1. \end{cases}$$

Для численного решения задачи используется разностная схема, построенная на шаблоне «крест». Найти собственные числа и собственные функции разностного оператора Лапласа. Предложить разностные отношения со вторым порядком для аппроксимации граничных условий.