

ФИО	Группа	1	2	3	4	5	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 1

Контрольный вопрос: Определение жесткой системы ОДУ.

1. (5) Дана модель Дэвиса-Скотче (Davis-Skodje), описывающая пространственно-однородный химический реактор,

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = -y_1(t), \\ \dot{y}_2(t) = -\gamma y_2(t) + \frac{(\gamma-1)y_1(t) - \gamma y_1^2(t)}{(1+y_1(t))^2}, \end{cases}$$

где $\gamma > 1$ определяет коэффициент жесткости системы. Для решения системы уравнений применяется А-устойчивый однократно диагонально-неявный метод Рунге-Кутты 4 порядка аппроксимации, заданный таблицей Бутчера:

$$\begin{array}{c|ccc} \frac{1+\alpha}{2} & \frac{1+\alpha}{2} & & \\ \frac{1}{2} & -\frac{\alpha}{2} & \frac{1+\alpha}{2} & \\ \frac{1-\alpha}{2} & 1+\alpha & -1-2\alpha & \frac{1+\alpha}{2} \\ \hline & \frac{1}{6\alpha^2} & 1-\frac{1}{3\alpha^2} & \frac{1}{6\alpha^2} \end{array}$$

где $\alpha = \frac{2\cos(\pi/18)}{\sqrt{3}}$. Расписать покомпонентно вычисление всех вспомогательных векторов метода и расчетные формулы для каждой компоненты решения.

2. (4) Метод Рунге-Кутты задан таблицей Бутчера:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Известно, что метод является А-устойчивым. Является ли он L-устойчивым? Используя функцию устойчивости, определить порядок аппроксимации метода.

3. (5) Построить общее решение краевой задачи для ОДУ на сетке $\{x_i : x_i = ih, h = 1/2, i = 0 : 2\}$:

$$\begin{aligned} y''(x) &= y'(x) - y(x) - 2e^{-x} \\ y(0) + y'(0) &= -1 \\ y'(1) &= 2 \end{aligned}$$

4. (4) Для решения нелинейной краевой задачи:

$$y'' + 2 \sin y = 0, \quad y(0) = \pi, \quad y(1) = 3\pi/2,$$

предложить разностный метод четвертого порядка аппроксимации. Построить алгоритм решения получившейся системы нелинейных уравнений.

5. (3) Показать, что метод $y_{n+2} - y_{n+1} = 0.25h(f_{n+2} + 2f_{n+1} + f_n)$ имеет область устойчивости, ограниченную параболой.

ФИО	Группа	1	2	3	4	5	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 2

Контрольный вопрос: Определение А-устойчивости численного метода.

1. (5) Для решения жесткой системы уравнений,

$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_2' - \varepsilon y_1(1 - y_1^2 - y_2^2), \\ y_2'(t) = y_1' - 3\varepsilon y_2(1 - y_1^2 - y_2^2), \end{cases}$$

применяется L-устойчивый диагонально-неявный метод Рунге-Кутты, заданный таблицей Бутчера:

1	1		
1/3	-1/12	5/12	
1	0	3/4	1/4
	0	3/4	1/4

Расписать покомпонентно вычисление всех вспомогательных векторов метода и расчетные формулы для каждой компоненты решения.

2. (4) Задача Коши для системы ОДУ

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y \cos^2 t - 5x, & x(0) = x^0, \\ \dot{y} = x - 5y, & y(0) = y^0, \end{cases}$$

решается методом Рунге-Кутты, заданного таблицей Бутчера:

0	
3/4	3/4
	1/3 2/3

При каких значениях шага по времени τ решение разностной задачи будет сходиться к решению дифференциальной?

3. (5) Построить общее решение краевой задачи для ОДУ на сетке $\{x_i : x_i = ih, h = 1/2, i = 0 : 2\}$:

$$\begin{aligned} y''(x) &= 3y'(x) - 2x \\ y(0) &= 1 \\ y(1) + y'(1) &= 2 \end{aligned}$$

4. (4) Для решения нелинейной краевой задачи:

$$y'' - e^{-y} = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2.$$

построить следующее приближение методом квазилинеаризации. В качестве начального приближения взять $y = 1 + x$.

5. (3) Найти общее решение уравнения $9y_{n-1} + 3y_n + y_{n+1} = 0$.

ФИО	Группа	1	2	3	4	5	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 3

Контрольный вопрос: Показатель жесткости системы.

1. (5) Дана модель Семенова для термического взрыва:

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{dx}{dt} = y \exp \left[\frac{x}{1+0.31x} \right] - x, \\ \frac{dy}{dt} = -y \exp \left[\frac{x}{1+0.31x} \right], \end{cases}$$

где $\varepsilon < 1$. Для решения системы уравнений применяется метод Лобатто ПС 2 порядка аппроксимации, заданный таблицей Бутчера:

0	1/2	-1/2
1	1/2	1/2
	1/2	1/2

Расписать покомпонентно вычисление всех вспомогательных векторов метода и расчетные формулы для каждой компоненты решения.

2. (4) Метод Рунге-Кутты задан таблицей Бутчера:

0	0	0	0
1/2	1/4	1/4	0
1	0	1	0
	1/6	2/3	1/6

Показать, что метод не является А-устойчивым.

3. (5) Получить разностную схему для аппроксимации краевой задачи в области $0 \leq x \leq 1$ со вторым порядком точности:

$$\begin{aligned} y''(x) &= -2y(x) + 2(1 - x^3) \\ y'(0) &= 0 \\ y'(1) - 2y(1) &= 2 \end{aligned}$$

Найти решение задачи на сетке $\{x_i : x_i = ih, h = 1/2, i = 0 : 2\}$.

4. (4) Для решения нелинейной краевой задачи:

$$y'' - e^y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0.$$

предложить разностный метод четвертого порядка аппроксимации.

5. (3) Описать алгоритм численного построения общего решения для следующего дифференциального уравнения:

$$y'' + (10 + x)y = xe^{-x}, \quad 0 < x < 10.$$

ФИО	Группа	1	2	3	4	5	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 4

Контрольный вопрос: Что такое функция устойчивости метода?

1. (5) Дана модель Дэвиса-Скотче (Davis-Skodje), описывающая пространственно-однородный химический реактор,

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = -y_1(t), \\ \dot{y}_2(t) = -\gamma y_2(t) + \frac{(\gamma-1)y_1(t) - \gamma y_1^2(t)}{(1+y_1(t))^2}, \end{cases}$$

где $\gamma > 1$ определяет коэффициент жесткости системы. Для решения системы уравнений применяется метод Радо ПА 3 порядка аппроксимации, заданный таблицей Бутчера:

1/3	5/12	-5/12
1	3/4	1/4
	3/4	1/4

Расписать покомпонентно вычисление всех вспомогательных векторов метода и расчетные формулы для каждой компоненты решения.

2. (4) Метод Рунге-Кутты задана таблица Бутчера:

1/2	1/2	0
1/2	0	1/2
	1/2	1/2

Является ли данный метод А-устойчивым? L-устойчивым?

3. (5) Получить разностную схему для аппроксимации краевой задачи в области $0 \leq x \leq 1$ со вторым порядком точности:

$$\begin{aligned} y''(x) &= (1+x)y'(x) - \frac{1}{x} \\ y(0) + 5y'(0) &= 0 \\ y(1) &= 1 \end{aligned}$$

Найти решение задачи на сетке $\{x_i : x_i = ih, h = 1/2, i = 0 : 2\}$.

4. (4) Для решения нелинейной краевой задачи:

$$y'' - e^y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2.$$

построить следующее приближение методом квазилинеаризации. В качестве начального приближения взять $y = 1 + x$.

5. (3) Найти общее решение уравнения $y_{n-1} - 5y_n + 6y_{n+1} = 0$.

ФИО	Группа	1	2	3	4	5	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 5

Контрольный вопрос: Определение L-устойчивости численного метода.

1. (5) Дана модель Семенова для термического взрыва:

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{dx}{dt} = y \exp \left[\frac{x}{1+0.31x} \right] - x, \\ \frac{dy}{dt} = -y \exp \left[\frac{x}{1+0.31x} \right], \end{cases}$$

где $\varepsilon < 1$. Для решения системы уравнений применяется однократно диагонально-неявный метод Рунге-Кутты 3 порядка аппроксимации, заданный таблицей Бутчера:

$$\begin{array}{c|ccc} \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} & & \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} & \\ \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} & \frac{2-10\sqrt{5}}{5\sqrt{15}} & \frac{-17-10\sqrt{5}}{5\sqrt{15}} & \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} \\ \hline & \frac{5}{18} & \frac{4}{9} & \frac{5}{18} \end{array}$$

Расписать покомпонентно вычисление всех вспомогательных векторов метода и расчетные формулы для каждой компоненты решения.

2. (4) Задача Коши для системы ОДУ

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \cos t + y (1 - \sin t), & x(0) = x^0, \\ \dot{y} = x (1 + \sin t) - y \cos t, & y(0) = y^0, \end{cases}$$

на отрезке $[0, \pi/2]$ решается методом Рунге-Кутты, заданного таблицей Бутчера:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 2/3 & 0 \\ \hline & 1/4 & 3/4 \end{array}$$

При каких значениях шага по времени τ решение разностной задачи будет сходиться к решению дифференциальной?

3. (5) Построить общее решение краевой задачи для ОДУ на сетке $\{x_i : x_i = ih, h = 1/2, i = 0 : 2\}$:

$$\begin{aligned} y''(x) &= -\frac{1}{2}y(x) - x \\ y(0) &= 1 \\ y'(1) - y(1) &= -1 \end{aligned}$$

4. (4) Для решения нелинейной краевой задачи:

$$y'' + 2 \sin y = 0, \quad y(0) = \pi, \quad y'(1) = 0.$$

5. (3) Исследовать на устойчивость неявный метод Милна-Симпсона:

$$3(y_{n+1} - y_{n-1}) = h(f_{n+1} + 2f_n + f_{n-1}).$$

ФИО	Группа	1	2	3	4	5	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 6

Контрольный вопрос: Асимптотический смысл устойчивости.

1. (5) Для решения жесткой системы уравнений,

$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_2' - \varepsilon y_1(1 - y_1^2 - y_2^2), \\ y_2'(t) = y_1' - 3\varepsilon y_2(1 - y_1^2 - y_2^2), \end{cases}$$

применяется метод Радо IA 3 порядка аппроксимации, заданный таблицей Бутчера:

0	1/4	-1/4
2/3	1/4	5/12
	1/4	3/4

Расписать покомпонентно вычисление всех вспомогательных векторов метода и расчетные формулы для каждой компоненты решения.

2. (4) Метод Рунге-Кутты задан таблицей Бутчера:

0	0	0	0
1/2	0	1/2	0
1	1/2	1/2	0
	1/3	1/3	1/3

Показать, что метод не является А-устойчивым.

3. (5) Получить разностную схему для аппроксимации краевой задачи в области $0 \leq x \leq 1$ со вторым порядком точности:

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{1}{1+x} y'(x) + \frac{1}{1+x^2} \\ 2y(0) + y'(0) &= 1 \\ y'(1) &= 3 \end{aligned}$$

Найти решение задачи на сетке $\{x_i : x_i = ih, h = 1/2, i = 0 : 2\}$.

4. (4) Для решения нелинейной краевой задачи

$$y'' - e^y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2.$$

построить численный метод, основанный на методе стрельбы.

5. (3) Описать алгоритм численного построения общего решения для следующего дифференциального уравнения:

$$y'' - (10 + x)y = xe^{-x}, \quad 0 < x < 10.$$