ФИО	Группа	1	2	3	4	5	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 1

Контрольный вопрос: Что такое «шаблон разностной схемы»?

1. (7) Для решения смешанной задачи уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x); u(0,x) = \phi(x), u(t,0) = \psi_0(t), u(t,1) = \psi_1(t);$$
$$k = \text{const}; 0 \le t, x \le 1;$$

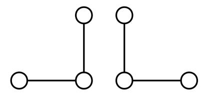
на сетке $x_m = mh$, $hM = 1$, $m = 0, \ldots, M$; $t^n = n\tau$, $\tau N = 1$, $n = 0, \ldots, N$ предложена разностная схема:

$$\begin{cases} \frac{3u_m^{n+1} - 4u_m^n + u_m^{n-1}}{2\tau} = k^2 \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} + f_m^{n+1}; n = 1, \ldots N-1; m = 0, 1, \ldots, M-1; \\ u_m^0 = \phi_m; u_m^1 = \phi_m + k^2 \tau \left(\phi''_{xx}\right)_m + \tau f_m^0, m = 1, \ldots, M-1, u_0^n = \psi_0^n; u_M^n = \psi_1^n, n = 1, \ldots, N. \end{cases}$$

Указать ее шаблон, исследовать на аппроксимацию и устойчивость.

2. (7) Дана система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + 3\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial w}{\partial x} = f(t,x), 0 \le t \le 1, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - 4\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} = g(t,x), 0 \le x \le 1. \\ \frac{\partial w}{\partial t} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial w}{\partial x} = h(t,x). \end{cases}$$



а) $u(t,1) = \psi_1(t)$, $u(t,1) + v(t,1) = \psi_2(t)$, $w(t,1) = \psi_3(t)$;
б) $u(t,1) + v(t,1) = \psi_1(t)$, $w(t,1) = \psi_2(t)$;
в) $u(t,0) = \psi_1(t)$, $w(t,0) = \psi_2(t)$, $v(t,1) = \psi_3(t)$;
г) $u(t,0) = \psi_1(t)$, $u(t,0) - v(t,0) = \psi_2(t)$, $u(t,0) + 2w(t,0) = \psi_3(t)$.

Записать систему в инвариантах Римана, предложить разностную схему на шаблонах «левый уголок» и «правый уголок» (см. рис.). Пусть заданы начальные условия: $u(0,x) = \phi_0(x)$, $v(0,x) = \phi_1(x)$, $w(0,x) = \phi_3(x)$. Какие из приведённых граничных соответствуют корректной постановке смешанной задачи?

3. (11) Для линейного однородного уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0, a = \text{const} > 0$$

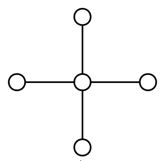
поставлена задача Коши с начальными условиями $u(x,0) = u_0(x)$. На шаблоне «кабаре», включающем в себя точки (t_{n-1}, x_{m-1}), (t_n, x_{m-1}), (t_n, x_m), (t_n, x_{m+1}), (t_{n+1}, x_m) построена разностная схема, названная авторами (А.А. Самарским и В.М. Головизниным) «диссипатор Паниковского». Схема имеет вид:

$$\frac{1}{2}\left((1+\xi)\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + (1-\xi)\frac{u_{m-1}^n - u_{m-1}^{n-1}}{\tau}\right) + a\frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = 0.$$

Исследовать схему на аппроксимацию в зависимости от величины «диссипатора Паниковского» ξ. Построить первое дифференциальное приближение. Вывести условие монотонности (по Фридрихсу) схемы. Указать способ задания дополнительного начального условия в зависимости от величины «диссипатора Паниковского» ξ.

4. (5) Для решения начально-краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(u^{5/2}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0; 0 \le x \le 1, 0 \le t \le T;$$
$$u(x,0) = 0, u(0,t) = 0, u(1,t) = t^{0.4}.$$



построить устойчивую консервативную разностную схему на приведенном шаблоне (см. рис.) интегро-интерполяционным методом.

5. (7) Задача Дирихле для уравнения Лапласа решается в кольце $R_1 < r < R_2$ с граничными условиями $u(R_1, \phi) = f(\phi)$, $u(R_2, \phi) = g(\phi)$. Здесь f и g — произвольные 2π-периодические функции. Построить аналог разностной схемы «крест» для решения этой задачи. Доказать, что для построенной схемы выполняется сеточный принцип максимума. Оператор Лапласа в цилиндрических координатах записывается в виде $\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$.

ФИО	Группа	1	2	3	4	5	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 2

Контрольный вопрос: Для каких разностных уравнений применим признак устойчивости фон Неймана?

1. (8) Для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x,t)$$

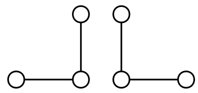
предложен вариант разностной схемы метода переменных направлений:

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{u}^{n+1/2} - \mathbf{u}^n}{\tau} = \mathbf{\Lambda}_{xx}\mathbf{u}^{n+1/2} + \mathbf{\Lambda}_{yy}\mathbf{u}^n + \mathbf{f} \\ \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{n+1/2}}{\tau} = \mathbf{\Lambda}_{xx}\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{\Lambda}_{yy}\mathbf{u}^n \end{cases}$$

Исследовать схему на аппроксимацию. Исследовать спектральную устойчивость схемы.

2. (7) Дана система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - 3\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial w}{\partial x} = f(t,x), 0 \le t \le 1, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - 3\frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial v}{\partial x} + 2\frac{\partial w}{\partial x} = g(t,x), 0 \le x \le 1. \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = h(t,x). \end{cases}$$



а) $u(t,0) = \psi_1(t)$, $v(t,1) = \psi_2(t)$, $w(t,1) = \psi_3(t)$;
б) $u(t,1) = \psi_1(t)$, $v(t,1) = \psi_2(t)$;
в) $v(t,1) = \psi_1(t)$, $u(t,1) = \psi_2(t)$, $w(t,1) = \psi_3(t)$;
г) $u(t,0) = \psi_1(t)$, $v(t,0) = \psi_2(t)$, $w(t,0) = \psi_3(t)$.

Записать систему в инвариантах Римана, предложить разностную схему на шаблонах «левый уголок» и «правый уголок» (см. рис.). Пусть заданы начальные условия: $u(0,x) = \phi_0(x)$, $v(0,x) = \phi_1(x)$, $w(0,x) = \phi_3(x)$. Какие из приведённых граничных соответствуют корректной постановке смешанной задачи?

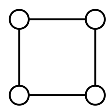
3. (5) Для линейного однородного уравнения «диффузия-конвекция»

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, a = \mathrm{const} > 0$$

поставлена задача Коши с начальными условиями $u(x,0) = u_0(x)$. На шаблоне, включающем в себя три точки (t_n, x_{m-1}), (t_n, x_m), (t_{n+1}, x_m), построить разностную схему и выбрать значения сеточных параметров для решения поставленной задачи Коши.

4. (11) Для решения начально-краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} - u^3\frac{\partial u}{\partial x} = 0; 0 \le x \le 1, 0 \le t \le T;$$
$$u(x,0) = 0, u(0,t) = 0, u(1,t) = \frac{1}{1+t^2}.$$



построить консервативную разностную схему на приведенном шаблоне (см. рис.) интегро-инторполяционным методом. Описать алгоритм решения задачи на верхнем временном слое. Исследовать схему на устойчивость по принципу замороженных коэффициентов.

5. (6) Построить разностную схему для решения задачи

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

в прямоугольной области $0 \le x \le X$, $0 \le y \le Y$ с граничными условиями $u(0,y) = 1$, $u(x,Y) = 1 + x^2$, $u(X,y) = 1 + X^2 y/Y$, $u(x,0) = 1$.

ФИО	Группа	1	2	3	4	5	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 3

Контрольный вопрос: Как связаны между собой аппроксимация, сходимость и устойчивость (для линейных разностных уравнений)?

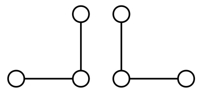
1. (6) Определить порядок аппроксимации схемы

$$\frac{1}{12}\frac{u_{m+1}^{n+1}-u_{m+1}^{n}}{\tau}+\frac{5}{6}\frac{u_{m}^{n+1}-u_{m}^{n}}{\tau}+\frac{1}{12}\frac{u_{m-1}^{n+1}-u_{m-1}^{n}}{\tau}=\frac{u_{m+1}^{n}-2u_{m}^{n}+u_{m-1}^{n}}{h^2}$$

для решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и исследовать ее на устойчивость.

2. (7) Дана система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}+3\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial v}{\partial x}=f(t,x), 0\le t\le 1,\\ \frac{\partial v}{\partial t}-3\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial v}{\partial x}=g(t,x), 0\le x\le 1.\\ \frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+3\frac{\partial v}{\partial x}+3\frac{\partial w}{\partial x}=h(t,x). \end{cases}$$



а) $u(t,1)=\psi_1(t)$, $v(t,1)=\psi_2(t)$, $w(t,1)=\psi_3(t)$;
б) $v(t,1)=\psi_1(t)$, $w(t,1)=\psi_2(t)$;
в) $u(t,0)=\psi_1(t)$, $v(t,1)=\psi_2(t)$, $w(t,1)=\psi_3(t)$;
г) $v(t,0)=\psi_1(t)$, $w(t,1)=\psi_2(t)$.
Записать систему в инвариантах Римана, предложить разностную схему на шабло нах «левый уголок» и «правый уголок» (см. рис.). Пусть заданы начальные условия: $u(0,x)=\phi_0(x)$, $v(0,x)=\phi_1(x)$, $w(0,x)=\phi_3(x)$. Какие из приведённых граничных соответствуют корректной постановке смешанной задачи?

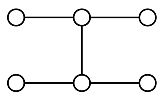
3. (11) Для линейного однородного уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0, a=\text{const}>0$$

поставлена задача Коши с начальными условиями $u(x,0)=u_0(x)$. На шаблоне «кабаре», включающем в себя точки (t_{n-1},x_{m-1}), (t_n,x_{m-1}), (t_n,x_m), (t_n,x_{m+1}), (t_{n+1},x_m) методом неопределенных коэффициентов построить разностную схему максимального порядка аппроксимации. Исследовать получившуюся схему на устойчивость. Монотонна ли схема? Указать способ задания дополнительного начального условия.

4. (5) Для решения начально-краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{1/2}\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0; 0\le x\le 1, 0\le t\le T;$$
$$u(x,0)=0, u(0,t)=t^2, u(1,t)=0.$$



построить консервативную разностную схему на приведенном шаблоне (см. рис.) интегро-инторполяционным методом.

5. (8) Построить аппроксимацию уравнения Пуассона на пятиточечном шаблоне:

$$\text{Ш} =\{(m+1,l+1),(m-1,l+1),(m+1,l-1),(m-1,l-1),(m,l)\}$$

на сетке с равными шагами по обоим направлениям. Каков порядок аппроксимации построеной схемы? Показать, что для решения уравнения Лапласа в квадрате выполняется сеточный принцип максимума.