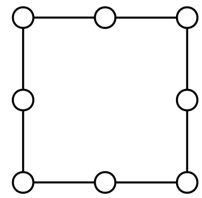
ФИО	Группа	1	2	3	4	5	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 1

Контрольный вопрос: Для каких разностных схем применим спектральный признак фон Неймана.

1. (5) На предложенном шаблоне придумать разностную схему с максимальным порядком аппроксимации для уравнения



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

2. (4) Какую дифференциальную задачу аппроксимирует данная разностная схема?

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + 2\frac{u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1}}{h} = 0$$
$$u_m^0 = \phi(x_m); \quad u_0^n = \psi(t_n)$$

Исследовать схему на устойчивость по спектральному признаку.

3. (5) Задана система уравнений в частных производных:

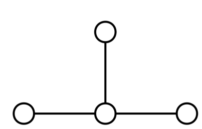
$$\frac{\partial U}{\partial t} + A\frac{\partial U}{\partial x} = F(t,x),$$
$$U = U(0,x),$$

$U = (u,v)^T$ с матрицей $A = \begin{pmatrix} -25 & 35 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$. Проверить, что тип системы - гиперболический.

Выбрать корректную постановку граничных условий (объяснить выбор):

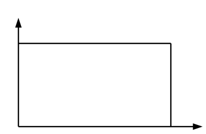
1. $3v(t,0) = \alpha(t)$
2. $v(t,1) = \beta(t)$
3. $u(t,0) = \alpha(t), v(t,0) = \beta(t)$
4. $u(t,1) = \alpha(t), v(t,0) = \beta(t)$

4. (4) На предложенном шаблоне, построить консервативную схему для уравнения Бюргерса:



$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

5. (3) Решить задачу на собственные значения для оператора уравнения Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$ с граничными условиями $u|_r = 0$ в заданной области.

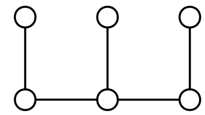


ФИО	Группа	1	2	3	4	5	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 2

Контрольный вопрос: Корректная постановка граничных условий для систем уравнений в частных производных гиперболического типа.

1. (5) На предложенном шаблоне придумать разностную схему с максимальным порядком аппроксимации для уравнения



$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u)$$

2. (4) Для решения уравнения теплопроводности используется схема Ричардсона:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\tau} = D\frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} + f_m^{n+1}$$

Явная это схема или неявная? Выписать первое дифференциальной приближение. Исследовать на устойчивость по спектральному признаку.

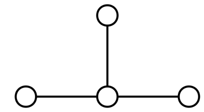
3. (5) Задана система уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + A\frac{\partial U}{\partial x} &= F(t,x), \\ U &= U(0,x), \end{aligned}$$

$U = (u,v)^T$ с матрицей $A = \begin{pmatrix} 32 & 8 \\ 48 & 12 \end{pmatrix}$. Проверить, что тип системы - гиперболический. Выбрать корректную постановку граничных условий (объяснить выбор):

1. $5u(t,0) = \alpha(t)$
2. $u(t,1) = \beta(t)$
3. $8u(t,0) + 2v(t,0) = \beta(t)$
4. $9u(t,1) + 6v(t,1) = \beta(t)$

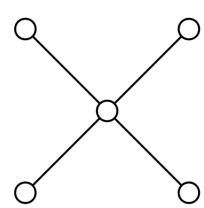
4. (4) Построить устойчивую разностную схему для решения задачи Коши для уравнения Хопфа:



$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$u(o,x) = 1 - \frac{\tanh(x)}{2}$$

5. (3) Для уравнения Лапласа придумать аппроксимирующую схему на предложеном шаблоне. Считать, что шаги сетки по обоим координатам одинаковы ($h_x = h_y = h$). Дла полученной схемы доказать сеточный принцип максимума.

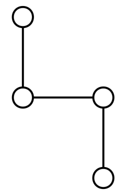


ФИО	Группа	1	2	3	4	5	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 3

Контрольный вопрос: Критерий Куранта – Фридрихса – Леви.

1. (5) На предложенном шаблоне придумать разностную схему с максимальным порядком аппроксимации для уравнения



$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$
$$a = \text{const} > 0$$

2. (4) Для решения уравнения теплопроводности используется схема Алена-Чена:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = D\frac{u_{m+1}^n - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^n}{h^2} + f_m^n$$

Явная это схема или неявная? Выписать первое дифференциальной приближение. Исследовать на устойчивость по спектральному признаку.

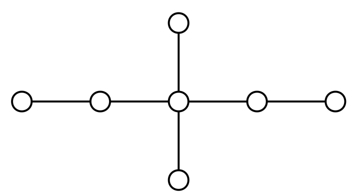
3. (5) Задана система уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A\frac{\partial U}{\partial x} = F(t, x),$$
$$U = U(0,x),$$

$U = (u, v)^T$ с матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 8 & -12 \end{pmatrix}$. Проверить, что тип системы - гиперболический. Выбрать корректную постановку граничных условий (объяснить выбор):

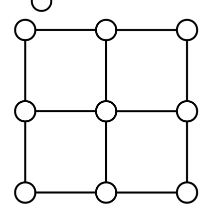
1. $u(t,0) = \alpha(t)$
2. $2u(t,1) = \beta(t)$
3. $u(t,1) = \alpha(t), v(t,1) = \beta(t)$
4. $6u(t,1) - 8v(t,1) = \beta(t)$

4. (4) Построить консервативную разностную схему для уравнения Кортевега – де Фриза



$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

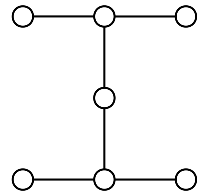
5. (3) Для уравнения Лапласа придумать схему с порядком аппроксимации $O(h^4)$ на предложеном шаблоне ($h_x = h_y = h$). Для полученной схемы доказать сеточный принцип максимума.



ФИО	Группа	1	2	3	4	5	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 4

Контрольный вопрос: Инварианты Римана.



1. (5) На предложенном шаблоне придумать разностную схему с максимальным порядком аппроксимации для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

2. (4) Какую дифференциальную задачу аппроксимирует данная разностная схема?

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{h} + \frac{\tau}{2} \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h} = 0$$

Исследовать схему на устойчивость по спектральному признаку.

3. (5) Задана система уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = F(t, x),$$
$$U = U(0,x),$$

$U = (u, v)^T$ с матрицей $A = \begin{pmatrix} -12 & -24 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$. Проверить, что тип системы - гиперболический.

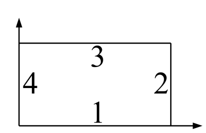
Выбрать корректную постановку граничных условий (объяснить выбор):

1. $5u(t,0) = \alpha(t), v(t,1) = \beta(t)$
2. $u(t,1) = \beta(t), u(t,1) + v(t,1) = \alpha(t)$
3. $u(t,1) + v(t,1) = \alpha(t)$
4. $9u(t,0) = \beta(t)$

4. (4) Построить разностную схему для уравнения теплопроводности с разрывным коэфициентом:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} k(x) \frac{\partial u}{\partial x} + f(x,t); \quad t \in [0; T]; \quad x \in [0,1]$$
$$k(x) = \begin{cases} 1, \text{если} & x \leq 1/2 \\ 6, \text{если} & x > 1/2 \end{cases}$$

5. (3) Найти собственные числа и собственные функции оператора Лапласа с граничными условиями:



$$u\big|_{1,2,3} = \psi$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_4 = 0$$