ФИО	Группа	1	2	3	4	5	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 1

Контрольный вопрос: Дать определение L-устойчивости (асимптотической устойчивости) численного метода для решения жестких систем ОДУ.

1. (6) Указать область фазового пространства, где задача

$$\begin{cases} y_1' = -100y_1 + y_1y_2 + 101y_2 & y_1(0) = 0.1 \\ y_2' = 99y_1 - 5y_1y_2 - 100y_2 & y_2(0) = -0.01 \end{cases} \tag{1}$$

является жесткой. Оценить показатель жесткости задачи. Для решения использован численный метод Рунге-Кутты с таблицей Бутчера:

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ 1/3 & 1/3 & & & \\ 2/3 & -1/3 & 1 & & \\ 1 & 1 & -1 & 1 & \\ \hline & 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{array}$$

Выписать расчетные формулы метода. Выписать его функцию устойчивости. При каких значениях сеточных параметров метод будет A-устойчивым?

2. (5) Метод Рунге-Кутты задан таблицей Бутчера:

$$\begin{array}{c|ccc} 1/4 & 1/4 & & \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & \\ 3/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ \hline & 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{array}$$

Используя функцию устойчивости, определить порядок аппроксимации метода.

3. (3) Линейный многошаговый численный метод решения задачи Коши для ОДУ задан следующим соотношением:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \frac{3}{2}f_n - \frac{1}{2}f_{n-1} \tag{2}$$

Определить порядок аппроксимации метода. Исследовать метод на L-устойчивость.

4. (4) Краевая задача на отрезке $[0;T]$ задана системой уравнений:

$$\begin{cases} y_1' = -156y_1 + 16y_2 \\ y_2' = -161y_1 + 21y_2 \\ y_3' = 169y_2 + y_3 \end{cases} \tag{3}$$

Определить показатель жесткости задачи. Какие из предложеных краевых условий предпочтительнее с точки зрения устойчивости численного решения:

1. $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 1$, $y_3(0) = 1$;
2. $y_1(T) = 2$, $y_2(0) = 2$, $y_3(0) = 2$;
3. $y_1(T) = 3$, $y_2(T) = 3$, $y_3(0) = 3$;
4. $y_1(T) = 4$, $y_2(T) = 4$, $y_3(T) = 4$.

5. (6) Описать алгоритм решения краевой задачи

$$\begin{aligned} &y'' = 100y(1 - y^2), \quad x \in [-1; 1]; \\ &y(-1) = \sqrt{2}, \quad y(1) = \sqrt{2}. \end{aligned} \tag{4}$$

методом стрельбы. Обосновать выбор метода для решения задачи Коши и для решения уравнений, полученных при разрешении второго граничного условия.

ФИО	Группа	1	2	3	4	5	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 2

Контрольный вопрос: Дать определение A-устойчивости численного метода для решения жестких систем ОДУ.

1. (6) Уравнение Ван-дер-Поля записано в виде системы второго порядка:

$$\begin{cases} y_1' = 1000\left(y_1 - \frac{y_1^3}{3}\right) + y_2 \\ y_2' = -y_1 \end{cases} \tag{1}$$

Определить тип особой точки системы. Найти, в какой части фазового пространства задача является жесткой. Определить показатель жесткости системы. Для решения использован численный метод Рунге-Кутты с таблицей Бутчера:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/2 & 1/2 & & \\ 1 & 0 & 1 & \\ \hline & 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{array}$$

Выписать расчетные формулы метода. Выписать его функцию устойчивости. При каких значениях сеточных параметров метод будет A-устойчивым?

2. (5) Метод Рунге-Кутты задан таблицей Бутчера (метод Радо IA):

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 1/4 & -1/4 \\ 2/3 & 1/4 & 5/12 \\ \hline & 1/4 & 3/4 \end{array}$$

Построить функцию устойчивости метода. Используя функцию устойчивости, определить порядок аппроксимации метода.

3. (3) Линейный многошаговый численный метод решения задачи Коши для ОДУ задан следующим соотношением:

$$\frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{\tau} = 3f_n - f_{n-1} \tag{2}$$

Определить порядок аппроксимации метода. Исследовать метод на асимптотическую устойчивость.

4. (4) Краевая задача на отрезке $[0;T]$ задана системой уравнений:

$$\begin{cases} y_1' = 5y_1 - 61y_3 \\ y_2' = 10y_2 - 200y_3 \\ y_3' = -121y_2 - 100y_3 \end{cases} \tag{3}$$

Определить показатель жесткости задачи. Какие из предложеных краевых условий предпочтительнее с точки зрения устойчивости численного решения:

1. $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 1$, $y_3(0) = 1$;
2. $y_1(T) = 2$, $y_2(0) = 2$, $y_3(0) = 2$;
3. $y_1(T) = 3$, $y_2(T) = 3$, $y_3(0) = 3$;
4. $y_1(T) = 4$, $y_2(T) = 4$, $y_3(T) = 4$.

5. (6) Описать алгоритм решения краевой задачи

$$\begin{aligned} &y'' = 100y(1 - y^2), \quad x \in [-1;1]; \\ &y(-1) = \sqrt{2}, \quad y(1) = \sqrt{2}. \end{aligned} \tag{4}$$

методом квазилинеаризации. Обосновать выбор начального приближения.

ФИО	Группа	1	2	3	4	5	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 3

Контрольный вопрос: Дать определение A(α)-устойчивости численного метода для решения жестких систем ОДУ.

1. (6) Указать область фазового пространства, где задача

$$\begin{cases} y_1' = -100y_1 - 3y_1y_2 - 101y_2 & y_1(0) = 0.5 \\ y_2' = -99y_1 + 5y_1y_2 + 3y_1^2 - 100y_2 & y_2(0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

является жесткой. Оценить показатель жесткости задачи.
Для решения использован численный метод Рунге-Кутты с таблицей Бутчера:

0				
1/2	1/2			
1/2	0	1/2		
1	0	0	1	
	1/6	1/3	1/3	1/6

Выписать расчетные формулы метода. Выписать его функцию устойчивости. При каких значениях сеточных параметров метод будет L-устойчивым?

2. (5) Метод Рунге-Кутты задан таблицей Бутчера (метод Радо IIA):

1/3	5/12	−1/12
1	3/4	1/4
	3/4	1/4

Построить функцию устойчивости метода. Используя функцию устойчивости, определить порядок аппроксимации метода.

3. (3) Линейный многошаговый численный метод решения задачи Коши для ОДУ задан следующим соотношением:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \frac{1}{4} f_{n+1} + \frac{1}{2} f_n + \frac{1}{4} f_{n-1} \tag{2}$$

Определить порядок аппроксимации метода. Исследовать метод на L-устойчивость.

4. (4) Краевая задача на отрезке $[0; T]$ задана системой уравнений:

$$\begin{cases} y_1' = -190y_1 + 138y_2 \\ y_2' = 165y_2 - 91y_3 \\ y_3' = 115y_2 - 61y_3 \end{cases} \tag{3}$$

Определить показатель жесткости задачи. Какие из предложеных краевых условий предпочтительнее с точки зрения устойчивости численного решения:
   1. $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 1$, $y_3(0) = 1$;
   2. $y_1(T) = 2$, $y_2(0) = 2$, $y_3(0) = 2$;
   3. $y_1(T) = 3$, $y_2(T) = 3$, $y_3(0) = 3$;
   4. $y_1(T) = 4$, $y_2(T) = 4$, $y_3(T) = 4$.

5. (6) Описать алгоритм решения краевой задачи

$$\begin{aligned} &y'' = 100y(y^2 - 1), \quad x \in [-1; 1]; \\ &y(-1) = \sqrt{2}, \quad y(1) = \sqrt{2}. \end{aligned} \tag{4}$$

методом стрельбы. Обосновать выбор метода для решения задачи Коши и для решения уравнений, полученных при разрешении второго граничного условия.

ФИО	Группа	1	2	3	4	5	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 4

Контрольный вопрос: Что такое функция устойчивости численного методо решения жестких систем ОДУ.

1. (6) Уравнение Ван-дер-Поля записано в виде системы второго порядка:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -600\left(y_2\left(y_1^2 - 1\right) + y_1\right) \end{cases} \tag{1}$$

Определить тип особой точки системы. Найти, в какой части фазового пространства задача является жесткой. Определить показатель жесткости системы.
Для решения использован численный метод Рунге-Кутты с таблицей Бутчера:

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ 1/3 & 1/3 & & & \\ 2/3 & -1/3 & 1 & & \\ 1 & 1 & -1 & 1 & \\ \hline & 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{array}$$

Выписать расчетные формулы метода. Выписать его функцию устойчивости. При каких значениях сеточных параметров метод будет L-устойчивым?

2. (5) Метод Рунге-Кутты задан таблицей Бутчера (метод Лобатто IIIB):

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Построить функцию устойчивости метода. Используя функцию устойчивости, определить порядок аппроксимации метода.

3. (3) Линейный многошаговый численный метод решения задачи Коши для ОДУ задан следующим соотношением:

$$\frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{\tau} = \frac{1}{2} f_{n+1} + f_n + \frac{1}{2} f_{n-1} \tag{2}$$

Определить порядок аппроксимации метода. Исследовать метод на асимптотическую устойчивость.

4. (4) Краевая задача на отрезке $[0; T]$ задана системой уравнений:

$$\begin{cases} y_1' = 190y_1 + 197y_2 \\ y_2' = 88y_2 - 68y_3 \\ y_3' = -165y_2 + 135y_3 \end{cases} \tag{3}$$

Определить показатель жесткости задачи. Какие из предложеных краевых условий предпочтительнее с точки зрения устойчивости численного решения:

1. $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 1$, $y_3(0) = 1$;
2. $y_1(T) = 2$, $y_2(0) = 2$, $y_3(0) = 2$;
3. $y_1(T) = 3$, $y_2(T) = 3$, $y_3(0) = 3$;
4. $y_1(T) = 4$, $y_2(T) = 4$, $y_3(T) = 4$.

5. (6) Описать алгоритм решения краевой задачи

$$\begin{aligned} &y'' = 100y(y^2 - 1), \quad x \in [-1; 1]; \\ &y(-1) = \sqrt{2}, \quad y(1) = \sqrt{2}. \end{aligned} \tag{4}$$

методом квазилинеаризации. Обосновать выбор начального приближения.

ФИО	Группа	1	2	3	4	5	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 5

Контрольный вопрос: Что такое «жесткая система ОДУ»?

1. (6) Указать область фазового пространства, где задача

$$\begin{cases} y_1' = -20y_1 + y_1y_2 - 21y_2 & y_1(0) = 0.5 \\ y_2' = -19y_1 - y_1y_2 - 3y_2^2 - 20y_2 & y_2(0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

является жесткой. Оценить показатель жесткости задачи.
Для решения использован численный метод Рунге-Кутты с таблицей Бутчера:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/3 & 1/3 & & \\ 2/3 & 0 & 2/3 & \\ \hline & 1/4 & 0 & 3/4 \end{array}$$

Выписать расчетные формулы метода. Выписать его функцию устойчивости. При каких значениях сеточных параметров метод будет A($\pi/6$)-устойчивым?

2. (5) Метод Рунге-Кутты задан таблицей Бутчера (метод Лобатто IIIC):

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Построить функцию устойчивости метода. Используя функцию устойчивости, определить порядок аппроксимации метода.

3. (3) Линейный многошаговый численный метод решения задачи Коши для ОДУ задан следующим соотношением:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \frac{1}{3}f_{n+1} + \frac{1}{3}f_n + \frac{1}{3}f_{n-1} \tag{2}$$

Определить порядок аппроксимации метода. Исследовать метод на L-устойчивость.

4. (4) Краевая задача на отрезке $[0; T]$ задана системой уравнений:

$$\begin{cases} y_1' = 52y_1 - 51y_3 \\ y_2' = -120y_2 + 96y_3 \\ y_3' = -168y_1 + 169y_3 \end{cases} \tag{3}$$

Определить показатель жесткости задачи. Какие из предложеных краевых условий предпочтительнее с точки зрения устойчивости численного решения:
  1. $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 1$, $y_3(0) = 1$;
  2. $y_1(T) = 2$, $y_2(0) = 2$, $y_3(0) = 2$;
  3. $y_1(T) = 3$, $y_2(T) = 3$, $y_3(0) = 3$;
  4. $y_1(T) = 4$, $y_2(T) = 4$, $y_3(T) = 4$.

5. (6) Описать алгоритм решения краевой задачи

$$\begin{gathered} y'' = e^{-y}, \quad x \in [0; 1]; \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 1. \end{gathered} \tag{4}$$

методом стрельбы. Обосновать выбор метода для решения задачи Коши и для решения уравнений, полученных при разрешении второго граничного условия.

ФИО	Группа	1	2	3	4	5	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 6

Контрольный вопрос: Что такое показатель жесткости системы ОДУ?

1. (6) Модель гликолиза Дж. Хиггинса включает в себы два уравнения:

$$\begin{cases} y_1' = 1 - y_1 y_2 & y_1(0) = 0.01 \\ y_2' = 400 y_2 \left(y_1 - \frac{11}{10+y_2}\right) & y_2(0) = 0.5 \end{cases} \tag{1}$$

Указать область фазового пространства, где задача является жесткой. Оценить показатель жесткости задачи.
Для решения использован численный метод Рунге-Кутты с таблицей Бутчера:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/3 & 1/3 & & \\ 2/3 & 0 & 2/3 & \\ \hline & 1/4 & 0 & 3/4 \end{array}$$

Выписать расчетные формулы метода. Выписать его функцию устойчивости. При каких значениях сеточных параметров метод будет L-устойчивым?

2. (5) Метод Рунге-Кутты задан таблицей Бутчера (метод Гаусса):

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Построить функцию устойчивости метода. Используя функцию устойчивости, определить порядок аппроксимации метода.

3. (3) Линейный многошаговый численный метод решения задачи Коши для ОДУ задан следующим соотношением:

$$\frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{\tau} = \frac{2}{3} f_{n+1} + \frac{2}{3} f_n + \frac{2}{3} f_{n-1} \tag{2}$$

Определить порядок аппроксимации метода. Исследовать метод на асимптотическую устойчивость.

4. (4) Краевая задача на отрезке $[0; T]$ задана системой уравнений:

$$\begin{cases} y_1' = 6y_1 - 34y_2 \\ y_2' = 4y_1 - 131y_2 \\ y_3' = -6y_2 + 170y_3 \end{cases} \tag{3}$$

Определить показатель жесткости задачи. Какие из предложеных краевых условий предпочтительнее с точки зрения устойчивости численного решения:

1. $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 1$, $y_3(0) = 1$;
2. $y_1(T) = 2$, $y_2(0) = 2$, $y_3(0) = 2$;
3. $y_1(T) = 3$, $y_2(T) = 3$, $y_3(0) = 3$;
4. $y_1(T) = 4$, $y_2(T) = 4$, $y_3(T) = 4$.

5. (6) Описать алгоритм решения краевой задачи

$$\begin{aligned} & y'' = e^{-y}, \quad x \in [0; 1]; \\ & y(0) = 0, \quad y(1) = 1. \end{aligned} \tag{4}$$

методом квазилинеаризации. Обосновать выбор начального приближения.