

ФИО	Группа	1	2	3	4	5	6	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 1

Контрольный вопрос: Определение аппроксимации разностной схемы.

1. (7) Оценить, с какой максимальной точностью можно вычислить решение системы $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}, \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

если правая часть системы известна с относительной погрешностью $\delta = 10^{-3}$.

2. (12) Привести систему линейных алгебраических уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$ к виду, удобному для итераций. Выписать расчетные формулы метода Зейделя для решения системы.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 6 \\ -3 & 6 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{f} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Выполнить 1 итерацию методом Зейделя. Доказать сходимость метода.

3. (6) Дана функция, заданная таблично. Найти значение интеграла на отрезке с точностью до $O(h^5)$

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
y	0.1	0.5	0.7	0.8	0.5	0.3	0.4

4. (6) Построить метод простых итераций для вычисления полуширины функции $x^2 e^{-4x}$ на ее полувывоте.

5. (8) Интеграл функции на малом отрезке $[a, b]$ можно приблизить, как:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{6}f(a) + \frac{1}{3}f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + \frac{1}{3}f\left(a + 2\frac{b-a}{3}\right) + \frac{1}{6}f(b).$$

Используя это соотношение, построить метод Рунге-Кутты для численного решения задачи Коши для ОДУ. Выписать расчётные формулы и составить таблицу Бутчера. Какой порядок аппроксимации у полученного метода?

6. (6) Уравнение $\dot{y} = 3y$ решается методом Рунге-Кутты, для которого дана таблица Бутчера:

0			
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
1	0	1	
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Найти порядок сходимости метода, используя определение сходимости.

ФИО	Группа	1	2	3	4	5	6	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 2

Контрольный вопрос: Основная теорема вычислительной математики (формулировка).

1. (7) Оценить, с какой максимальной точностью можно вычислить решение системы $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}, \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

если правая часть системы известна с относительной погрешностью $\delta = 10^{-2}$.

2. (12) Привести систему линейных алгебраических уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$ к виду, удобному для итераций. Выписать расчетные формулы метода Якоби для решения системы.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 8 \end{pmatrix}, \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Выполнить 1 итерацию методом Якоби. Доказать сходимость метода.

3. (6) Методом неопределенных коэффициентов найти узлы и веса квадратурной формулы, точной для всех полиномов степени 5 на $[-1, 1]$.

4. (6) Построить сходящийся метод простых итераций для поиска точек пересечения кривых

$$x^4 + y^4 - 2 = 0, x - \operatorname{tg} y = 0$$

5. (8) Интеграл функции на малом отрезке $[a, b]$ можно приблизить, как:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{6}f(a) + \frac{2}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6}f(b).$$

Используя это соотношение, построить метод Рунге-Кутты для численного решения задачи Коши для ОДУ. Выписать расчётные формулы и составить таблицу Бутчера. Какой порядок аппроксимации у полученного метода?

6. (6) Уравнение $\dot{y} = 2y$ решается методом Рунге-Кутты, для которого дана таблица Бутчера:

0			
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Найти порядок сходимости метода, используя определение сходимости.

ФИО	Группа	1	2	3	4	5	6	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 3

Контрольный вопрос: Определение устойчивости разностной схемы.

1. (7) Оценить, с какой максимальной точностью можно вычислить решение системы $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{f} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

если правая часть системы известна с относительной погрешностью $\delta = 10^{-4}$.

2. (12) Привести систему линейных алгебраических уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$ к виду, удобному для итераций. Выписать расчетные формулы метода последовательной верхней релаксации для решения системы.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 \\ -3 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Выполнить 1 итерацию методом последовательной верхней релаксации. Оценить значение параметра релаксации, при котором метод сходится быстрее всего.

3. (6) Дана функция, заданная таблично. Найти значение интеграла на отрезке с точностью до $O(h^4)$ и оценить реальную погрешность вычисления интеграла.

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4
y	0.1	0.5	0.7	0.8	0.6

4. (6) Построить формулы метода Ньютона для поиска точек пересечения кривых

$$x^6 + y^6 - 8 = 0, y - \tanh x = 0$$

Что можно сказать о сходимости такого метода?

5. (8) Интеграл функции на малом отрезке $[a, b]$ можно приблизить, как:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{4}f(a) + \frac{1}{2}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{4}f(b).$$

Используя это соотношение, построить метод Рунге-Кутты для численного решения задачи Коши для ОДУ. Выписать расчётные формулы и составить таблицу Бутчера. Какой порядок аппроксимации у полученного метода?

6. (6) Уравнение $\dot{y} = -y$ решается методом Рунге-Кутты, для которого дана таблица Бутчера:

0			
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
1	0	1	
<hr/>			
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

Найти порядок сходимости метода, используя определение сходимости.