ФИО	Группа	1	2	3	4	5	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 1

Контрольный вопрос: Норма вектора в R^N. Аксиомы нормы.

1. (2) Величина x задана с абсолютной погрешностью 0.1. Вычислить относительную погрешность в определении значения функции e^x в точке $x = 1$.

2. (4) Функция f определена на равномерной сетке с шагом $h = 0.01$ для любых значений x_i. Значения функции имеют тип double (число с двойной точностью в стандарте IEEE). Известно, что $M_0 = \max\limits_{[a,b]} |f| = 2 \cdot 10^{20}$, $M_4 = \max\limits_{[a,b]} |f^{IV}| = 48$. Какую формулу лучше использовать для вычисления второй производной функции f в точке x_i:

1. $\dfrac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2}$,
2. $\dfrac{f_{i-2} - 2f_i + f_{i+2}}{4h^2}$,
3. $\dfrac{f_{i-999} - 2f_i + f_{i+999}}{(999h)^2}$?

3. Дана матрица:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

(2) Вычислить число обусловленности в первой и второй норме.
(3) В третьей норме.

4. (4) Для системы с матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ и правой частью $f = \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix}$ матрица A задана точно, а в правой части содержится погрешность δf. Найти такое s, чтобы выполнялась оценка $\frac{||\delta x||}{||x||} \leq \frac{||\delta f||}{||f||}$

5. (5) Для решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Предложить сходящийся метод простых итераций. Вычислить скорость сходимости метода при оптимальном выборе итерационного параметра.

ФИО	Группа	1	2	3	4	5	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 2

Контрольный вопрос: Норма матрицы, подчиненная норме вектора.

1. (2) Величина x задана с относительной погрешностью 0.1. Вычислить абсолютную погрешность в определении значения функции $\sqrt{10x}$ в точке $x = 10$.

2. (4) Функция f определена на отрезке [0,1], а ее значения известны на равномерной сетке с шагом $h = 0.1$. Значения функции имеют тип float (число с одинарной точностью в стандарте IEEE). Известно, что $M_0 = \max\limits_{[a,b]} |f| = 2$, $M_3 = \max\limits_{[a,b]} |f'''| = 36 \cdot 10^{-11}$. Какую формулу лучше использовать для вычисления первой производной функции f в точке $x_i = 0.5$:

1. $\dfrac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$,
2. $f(1) - f(0)$,
3. $\dfrac{f_{i+10} - f_{i-10}}{20h}$?

3. Дана матрица:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) Вычислить число обусловленности в первой и второй норме.
(3) В третьей норме.

4. (4) Для системы с матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ и правой частью $f = \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix}$ матрица A задана точно, а в правой части содержится погрешность δf. Найти такое s, чтобы выполнялась оценка $\frac{||\delta x||}{||x||} \leq \frac{||\delta f||}{||f||}$

5. (5) Для решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Предложить сходящийся метод простых итераций. Вычислить скорость сходимости метода при оптимальном выборе итерационного параметра.

ФИО	Группа	1	2	3	4	5	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 3

Контрольный вопрос: Число обусловленности матрицы.

1. (2) Величина x задана с абсолютной погрешностью 0.1. Вычислить относительную погрешность в определении значения функции $\log_{10} x$ и $\log_{0.1} x$ в точке $x = 10$.

2. (4) Функция f определена на равномерной сетке с шагом $h = 2$ для любых значений x_i. Значения функции имеют тип double (число с двойной точностью в стандарте IEEE). Известно, что $M_0 = \max\limits_{[a,b]} |f| = 27$, $M_4 = \max\limits_{[a,b]} |f^{IV}| = 8 \cdot 10^{-16}$. Какую формулу лучше использовать для вычисления второй производной функции f в точке x_i:

1. $\dfrac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2}$,
2. $\dfrac{f_{i-2} - 2f_i + f_{i+2}}{4h^2}$,
3. $\dfrac{f_{i-3} - 2f_i + f_{i+3}}{9h^2}$?

3. Дана матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Вычислить число обусловленности в первой и второй норме.
(3) В третьей норме.

4. (4) Для системы с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ и правой частью $f = \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix}$ матрица A задана точно, а в правой части содержится погрешность δf. Найти такое s, чтобы выполнялась оценка $\frac{||\delta x||}{||x||} \le \frac{||\delta f||}{||f||}$

5. (5) Для решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Предложить сходящийся метод простых итераций. Вычислить скорость сходимости метода при оптимальном выборе итерационного параметра.

ФИО	Группа	1	2	3	4	5	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 4

Контрольный вопрос: Теорема об эквивалентности норм.

1. (2) Величина x задана с относительной погрешностью 0.1. Вычислить абсолютную погрешность в определении значения функции $\frac{1}{x}$ в точке $x = 0.001$.

2. (4) Функция f определена на отрезке [0,10], а ее значения известны на равномерной сетке с шагом $h = 0.1$. Значения функции имеют тип float (число с одинарной точностью в стандарте IEEE). Известно, что $M_0 = \max\limits_{[a,b]} |f| = 6^3$, $M_3 = \max\limits_{[a,b]} |f'''| = 3 \cdot 10^{-16}$. Какую формулу лучше использовать для вычисления первой производной функции f в точке $x_i = 5$:

1. $\dfrac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$,
2. $\dfrac{f(10) - f(0)}{10}$,
3. $\dfrac{f_{i+10} - f_{i-10}}{20h}$?

3. Дана матрица:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) Вычислить число обусловленности в первой и второй норме.
(3) В третьей норме.

4. (4) Для системы с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ и правой частью $f = \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix}$ матрица A задана точно, а в правой части содержится погрешность δf. Найти такое s, чтобы выполнялась оценка $\frac{||\delta x||}{||x||} \leq \frac{||\delta f||}{||f||}$

5. (5) Для решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Предложить сходящийся метод простых итераций. Вычислить скорость сходимости метода при оптимальном выборе итерационного параметра.

Ответы и решения

Вариант 1

3. (A1)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad A^* \times A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 12 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 12, \lambda_2 = 9, \lambda_3 = 3$$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_1 = 5, \quad \left\|A^{-1}\right\|_1 = \frac{2}{3}, \;\; \mu_1 = \frac{10}{3};$$

$$\|A\|_2 = 5, \quad \left\|A^{-1}\right\|_2 = \frac{5}{6}, \;\; \mu_2 = 5;$$

$$\|A\|_3 = 2\sqrt{3}, \quad \left\|A^{-1}\right\|_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \;\; \mu_3 = 2.$$

Вариант 2

3. (A6)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^* \times A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 4 \\ 0 & 4 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 20, \lambda_2 = 10, \lambda_3 = 2$$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_1 = 6, \quad \left\|A^{-1}\right\|_1 = 1, \;\; \mu_1 = 6;$$

$$\|A\|_2 = 6, \quad \left\|A^{-1}\right\|_2 = \frac{4}{5}, \;\; \mu_2 = \frac{24}{5};$$

$$\|A\|_3 = 2\sqrt{5}, \quad \left\|A^{-1}\right\|_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \;\; \mu_3 = \sqrt{10}.$$

Вариант 3

3. (A8)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ -4 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad A^* \times A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 12, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 2$$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_1 = 5, \quad \left\|A^{-1}\right\|_1 = 1, \quad \mu_1 = 5;$$
$$\|A\|_2 = 5, \quad \left\|A^{-1}\right\|_2 = 1, \quad \mu_2 = 5;$$
$$\|A\|_3 = 2\sqrt{3}, \quad \left\|A^{-1}\right\|_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \mu_3 = \sqrt{6}.$$

Вариант 4

3. (A10)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad A^* \times A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 10, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 2$$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_1 = 4, \quad \left\|A^{-1}\right\|_1 = 1, \quad \mu_1 = 4;$$
$$\|A\|_2 = 5, \quad \left\|A^{-1}\right\|_2 = \frac{4}{5}, \quad \mu_2 = 4;$$
$$\|A\|_3 = \sqrt{10}, \quad \left\|A^{-1}\right\|_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \mu_3 = \sqrt{5}.$$