ФИО	Группа	1	2	3	4	Σ

Вариант 1

1. Для решения ЖС ОДУ используется двухстадийный неявный метод, основанный на квадратурной формуле Гаусса с двумя узлами. Для этого метода выполнены условия Кутты. Построить функцию устойчивости метода. Вычислить все значения коэффициентов, при которых метод будет асимптотически устойчивым. Найти все однократно диагональные методы третьего порядка аппроксимации.

2. Таблица Бутчера неявного метода Рунге-Кутты задана не полностью:

$$
\begin{array}{c|cc}
\cdot & \frac{5}{12} & \cdot \\
1 & \frac{3}{4} & \cdot \\
\hline
 & \frac{3}{4} & \cdot
\end{array}
$$

а) Определить недостающие в таблице Бутчера параметры исходя из условия Кутты и условий аппроксимации второго порядка

б) Определить порядок аппроксимации полученного метода

в) Исследовать полученный метод на A-устойчивость.

г) Исследовать полученный метод на L-устойчивость.

3. Может ли дробно-рациональная функция $\frac{1}{1-z}$ являться функцией устойчивости какого-либо численного метода. Если да, то какими свойствами он обладает?

4. Предложить аппроксимацию второго порядка на двух точках правого граничного условия для уравнения второго порядка с использованием самого уравнения:

$$
\begin{cases} -y'' + x^4 y' + (x^3 - 2) \cdot y = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi x}{2} \\ y(0) = 0 \qquad y'(1) = 1 \end{cases} \tag{1}
$$

ФИО	Группа	1	2	3	4	Σ

Вариант 2

1. Рассматривается семейство однократно диагонально неявных методов вида

$$\begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ \frac{2-\gamma}{3} & \frac{2-4\gamma}{3} & \gamma \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}$$

Среди семейства методов найти все асимптотически устойчивые методы и все методы третьего порядка аппроксимации. Будут ли последние $A(0)$-устойчивыми?

2. Численный метод задан таблицей бутчера:

$$\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

а) Выписать расчетные формулы.
б) Определить порядок аппроксимации метода.
в) Построить функцию устойчивости.
г) Исследовать на А-устойчивость.
д) Исследовать на L-устойчивость.

3. Может ли дробно-рациональная функция $\frac{1+z+z^2/2}{1}$ являться функцией устойчивости какого-либо численного метода. Если да, то какими свойствами он обладает?

4. Для численного решения краевой задачи

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \\ y'(a) = y'_a \qquad y(b) = y_b \end{cases} \tag{1}$$

Используется разностная схема:

$$\begin{cases} \frac{y_1 - y_0}{\tau} = y'_a \\ \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\tau^2} + p_n \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + q_n y_n = f_n \\ y_N = y_b, \end{cases} \tag{2}$$

где $p_n = p(x_n)$, $q_n = q(x_n)$ и $f_n = f(x_n)$. Исследовать предложенную разностную схему на аппроксимацию и устойчивость.

ФИО	Группа	1	2	3	4	Σ

Вариант 3

1. Рассматривается семейство диагонально неявных методов вида

$$\begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1-\gamma & 1-\gamma-\delta & \delta \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Среди семейства методов найти все асимптотически устойчивые методы и все методы третьего порядка аппроксимации. Будут ли последние $A(0)$-устойчивыми?

2. Таблица Бутчера диагонально-неявного метода Рунге-Кутты задана не полностью:

$$\begin{array}{c|cc} \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{2}{3} \\ \hline & \frac{1}{4} & \cdot \end{array}$$

а) Определить недостоющие в таблице Бутчера параметры исходя из условия Кутты и условий аппроксимации второго порядка.

б) Определить порядок аппроксимации полученного метода

в) Исследовать полученный метод на A-устойчивость.

г) Исследовать полученный метод на L-устойчивость.

3. Может ли дробно-рациональная функция $\frac{1}{1-z+z^2/2}$ являться функцией устойчивости какого-либо численного метода. Если да, то какими свойствами он обладает?

4. Предложить аппроксимацию второго порядка на двух точках левого граничного условия для уравнения второго порядка с использованием самого уравнения:

$$\begin{cases} -y'' + (x+1)y' + (x-1)\cdot y = 1 \\ y(0) + \frac{1}{2}y'(0) = 1 \qquad y(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

ФИО	Группа	1	2	3	4	Σ

Вариант 4

1. Рассматривается семейство однократно диагонально неявных методов вида

$$
\begin{array}{c|cc}
\gamma & \gamma & 0 \\
2-3\gamma & 2-4\gamma & \gamma \\
\hline
 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}
\end{array}
$$

Среди семейства методов найти все асимптотически устойчивые методы и все методы третьего порядка аппроксимации. Будут ли последние $A(0)$-устойчивыми?

2. Численный метод задан таблицей бутчера:

$$
\begin{array}{c|cc}
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
\hline
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{array}
$$

а) Выписать расчетные формулы.
б) Определить порядок аппроксимации метода.
в) Построить функцию устойчивости.
г) Исследовать на А-устойчивость.
д) Исследовать на L-устойчивость.

3. Может ли дробно-рациональная функция $\frac{1+z/2}{1-z/2}$ являться функцией устойчивости какого-либо численного метода. Если да, то какими свойствами он обладает?

4. Для численного решения краевой задачи

$$
\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \\ y(a) = y_a \qquad y(b) = y_b \end{cases} \tag{1}
$$

Используется разностная схема:

$$
\begin{cases} y_0 = y_a \\ \frac{y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}}{\tau^2} + p_{n+1}\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau} + q_{n+1}y_{n+1} = f_{n+1} \\ y_N = y_b, \end{cases} \tag{2}
$$

где $p_n = p(x_n)$, $q_n = q(x_n)$ и $f_n = f(x_n)$. Исследовать предложенную разностную схему на аппроксимацию и устойчивость.

ФИО	Группа	1	2	3	4	Σ

Вариант 5

1. Упрощение методов Рунге-Кутты. Рассмотрим диагонально-неявный метод Рунге-Кутты.

$$\boldsymbol{y}^{n+1} = \boldsymbol{y}^n + \tau \sum_{k=1}^{s} b_k \boldsymbol{k}_k, \boldsymbol{k}_i = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}^n + \tau \sum_{j=1}^{i} a_{ij} \boldsymbol{k}_j). \tag{1}$$

Если считать, что шаг дискретизации задачи – малый, то можно написать приближенное равенство $\boldsymbol{k}_i = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}^n + \tau \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\boldsymbol{k}_j) + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \mathbf{y}}(\boldsymbol{y}^n + \tau \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\boldsymbol{k}_j) \cdot \tau a_{ii} \boldsymbol{k}_i$, или:

$$(\boldsymbol{E} - \tau d_{ii} \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{y}^n + \tau \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\boldsymbol{k}_j))\boldsymbol{k}_i = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}^n + \tau \sum_{j=1}^{i-1} d_{ij}\boldsymbol{k}_j). \tag{2}$$

Следующее упрощение – считать матрицу Якоби только один раз, линеаризуя систему в окрестности значения на текущем временном шаге, то есть в окрестности $\boldsymbol{f}(t_n, \boldsymbol{y}^n)$. Введём ещё один набор аппроксимационных коэффициентов. Формулы метода будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{y}^{n+1} = \boldsymbol{y}^n + \tau \sum_{k=1}^{s} b_k \boldsymbol{k}_k, \\ &(\boldsymbol{E} - \tau d_{ii} \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{y}^n))\boldsymbol{k}_i = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}^n + \tau \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\boldsymbol{k}_j) + \tau \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{y}^n) \sum_{j=1}^{i-1} d_{ij}\boldsymbol{k}_j \end{aligned} \tag{3}$$

Такая конструкция называется методом Розенброка.
Пусть набор коэффициентов метода Розенброка совпадает с набором коэффициентов метода:

$$\begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & \\ 1-\gamma & 1-2\gamma & \gamma \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

То есть $(\boldsymbol{E} - \tau\gamma \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{y}^n))\boldsymbol{k}_i = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}^n + \tau \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\boldsymbol{k}_j)$. Построить функцию устойчивости метода.
(*) Сравнить устойчивость метода Рунге-Кутты и метода Розенброка.

2. Таблица Бутчера неявного метода Рунге-Кутты задана не полностью:

$$
\begin{array}{c|cc}
\cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{3+\sqrt{3}}{6} \\
\hline
 & \cdot & \cdot
\end{array}
$$

а) Определить недостающие в таблице Бутчера параметры исходя из условия Кутты и условий аппроксимации второго порядка

б) Определить порядок аппроксимации полученного метода

в) Исследовать полученный метод на A-устойчивость.

г) Исследовать полученный метод на L-устойчивость.

3. Функция устойчивости численного метода задаётся выражением:

$$R(z) = \frac{1}{1-z}. \tag{4}$$

а) Построить область устойчивости метода.

б) Исследовать метод на А-устойчивость.

в) Исследовать метод на L-устойчивость.

4. Предложить аппроксимацию второго порядка на двух точках левого граничного условия для уравнения второго порядка с использованием самого уравнения:

$$\begin{cases} -y'' + (x^2+1)y' + (x^3-2)\cdot y = \cos x + 1 \\ y'(0) = 1 \qquad y(1) = 1 \end{cases} \tag{5}$$

ФИО	Группа	1	2	3	4	Σ

Вариант 6

1. Упрощение методов Рунге-Кутты. Рассмотрим диагонально-неявный метод Рунге-Кутты.

$$\boldsymbol{y}^{n+1} = \boldsymbol{y}^n + \tau \sum_{k=1}^{s} b_k \boldsymbol{k}_k, \boldsymbol{k}_i = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}^n + \tau \sum_{j=1}^{i} a_{ij} \boldsymbol{k}_j). \quad (1)$$

Если считать, что шаг дискретизации задачи – малый, то можно написать приближенное равенство $\boldsymbol{k}_i = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}^n + \tau \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\boldsymbol{k}_j) + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \mathbf{y}}(\boldsymbol{y}^n + \tau \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\boldsymbol{k}_j) \cdot \tau a_{ii} \boldsymbol{k}_i$, или:

$$(\boldsymbol{E} - \tau d_{ii} \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{y}^n + \tau \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\boldsymbol{k}_j))\boldsymbol{k}_i = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}^n + \tau \sum_{j=1}^{i-1} d_{ij}\boldsymbol{k}_j). \quad (2)$$

Следующее упрощение – считать матрицу Якоби только один раз, линеаризуя систему в окрестности значения на текущем временном шаге, то есть в окрестности $\boldsymbol{f}(t_n, \boldsymbol{y}^n)$. Введём ещё один набор аппроксимационных коэффициентов. Формулы метода будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{y}^{n+1} = \boldsymbol{y}^n + \tau \sum_{k=1}^{s} b_k \boldsymbol{k}_k, \\ &(\boldsymbol{E} - \tau d_{ii} \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{y}^n))\boldsymbol{k}_i = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}^n + \tau \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\boldsymbol{k}_j) + \tau \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{y}^n) \sum_{j=1}^{i-1} d_{ij}\boldsymbol{k}_j \end{aligned} \quad (3)$$

Так как новые коэффициенты d не входят в вычисление аргумента функции правой части, то они могут быть и комплексными. Тогда $\boldsymbol{y}^{n+1} = \boldsymbol{y}^n + \tau Re \sum_{k=1}^{s} b_k \boldsymbol{k}_k$. Такая конструкция называется методом Розенброка.
Пусть набор коэффициентов метода Розенброка совпадает с набором коэффициентов метода трапеций:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Рассмотреть семейство методов с комплексным коэффициентом. Построить функцию устойчивости метода. (*) Сравнить сходимость полученного метода со сходимостью метода трапеций. (*) Для системы ОДУ с действительным спектром матрицы Якоби найти значение параметра, при котором сходимости метода наилучшая.

2. Численный метод задан таблицей Бутчера:

$$
\begin{array}{c|cc}
1 & 1 & \\
0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
\hline
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{array}
$$

а) Выписать расчетные формулы.
б) Определить порядок аппроксимации метода.
в) Построить функцию устойчивости.
г) Исследовать на A-устойчивость.
д) Исследовать на L-устойчивость.

3. Функция устойчивости численного метода задаётся выражением:

$$R(z) = \frac{1+\frac{z}{2}}{1-\frac{z}{2}}. \tag{4}$$

а) Построить область устойчивости метода.
б) Исследовать метод на A-устойчивость.
в) Исследовать метод на L-устойчивость.

4. Для численного решения краевой задачи

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \\ y'(a) = y'_a \qquad y(b) = y_b \end{cases} \tag{5}$$

Используется разностная схема:

$$\begin{cases} y_0 = y_a \\ \frac{y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}}{\tau^2} + p_n\frac{y_{n+1}-y_{n-1}}{2\tau} + q_n y_n = f_n \\ y_N = y_b, \end{cases} \tag{6}$$

где $p_n = p(x_n)$, $q_n = q(x_n)$ и $f_n = f(x_n)$. Исследовать предложенную разностную схему на аппроксимацию и устойчивость.