ФИО	Группа	1	2	3	4	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 1

1. (5) Найти общее решение неоднородной системы разностных уравнений:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - y_n + 3n^2 - 4n - 2, \\ y_{n+1} = 2x_n + 4y_n - 5n^2 + 6n + 1. \end{cases}$$

2. (6) Метод Рунге-Кутты задан таблицей Бутчера (метод Лобатто IIIB):

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Построить функцию устойчивости метода. Используя функцию устойчивости, определить порядок аппроксимации метода.

3. (4) Среди всех явных двухшаговых методов решения уравнения $y' = f(x, u)$ вида

$$y_{n+2} + \alpha_1 y_{n+1} + \alpha_0 y_n = h\left(\beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n\right)$$

найти метод наибольшего порядка аппроксимации и исследовать его на устойчивость.

4. (5) Используя метод Ньютона, найти следующее приближение к решению краевой задачи:

$$y'' + 2\sqrt{2\left(y'\right)^2 - 1} - 4\left(1 + y - x\right)^2 + 5 = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

В качестве начального приближения взять $y^0(x) = x$.

ФИО	Группа	1	2	3	4	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 2

1. (5) Найти все решения задачи на собственные значения:

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = -\lambda y_k, \quad y_0 = y_1, \quad y_N = 0, \quad h = \frac{1}{N}.$$

2. (6) Рассматривается семейство однократно диагонально неявных методов вида:

$$\begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 2-3\gamma & 2-4\gamma & \gamma \\ \hline & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array}$$

Среди семейства методов найти все асимптотически устойчивые методы и все методы третьего порядка аппроксимации. Будут ли последние $A(0)$-устойчивыми?

3. (3) Линейный многошаговый численный метод решения задачи Коши для ОДУ задан следующим соотношением:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \frac{1}{4} f_{n+1} + \frac{1}{2} f_n + \frac{1}{4} f_{n-1}$$

Определить порядок аппроксимации метода. Исследовать метод на L-устойчивость.

4. (4) Предложить аппроксимацию второго порядка на двух точках левого граничного условия для уравнения второго порядка с использованием самого уравнения:

$$\begin{cases} -y'' + (x^2+1)y' + (x^3-2)y = \cos x + 1 \\ y'(0) = 1 \qquad y(1) = 1 \end{cases}$$

ФИО	Группа	1	2	3	4	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 3

1. (3) Найти общее решение неоднородной системы разностных уравнений

$$\begin{cases} x_{n+1} = 5x_n - 3y_n + 2^n, \\ y_{n+1} = 6x_n - 4y_n + 2^{n+1}. \end{cases}$$

2. (6) Метод Рунге-Кутты задан таблицей Бутчера (метод Лобатто IIIB):

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Построить функцию устойчивости метода. Используя функцию устойчивости, определить порядок аппроксимации метода.

3. (4) Среди всех явных трехшаговых методов решения уравнения $y' = f(x, u)$ вида

$$\alpha_1 y_{n+1} + \alpha_0 y_n = h\left(\beta_0 f_n + \beta_{-1} f_{n-1} + \beta_{-2} f_{n-2}\right)$$

найти метод наибольшего порядка аппроксимации.

4. (5) Предложить схему второго порядка аппроксимации для решения краевой задачи на отрезке [0,1]:

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{du}{dx}\right] - q(x)u = -f(x), \quad k(0)u'(0) = 0, \quad -k(1)u'(1) = u(1),$$

где $k(x) = e^x$, $q(x) = e^x$, $f(x) = \sin(x)$.

ФИО	Группа	1	2	3	4	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 4

1. (5) Найти все решения задачи на собственные значения:

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = -\lambda y_k, \quad \frac{2}{h^2}(y_1 - y_0) = -\lambda y_0, \quad y_N = 0, \quad h = \frac{1}{N}.$$

2. (6) Дополнить таблицу Бутчера диагонально-неявного метода Рунге-Кутты, исходя из условий Кутты и условий аппроксимации второго порядка:

$$\begin{array}{c|cc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2}-1 & \cdot \\ \hline & \frac{1}{2} & \cdot \end{array}$$

Определить порядок аппроксимации метода, исследовать на $A(0)$-устойчивость и L-устойчивость.

3. (4) Линейный многошаговый численный метод решения задачи Коши для ОДУ задан следующим соотношением:

$$\frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{\tau} = \frac{1}{2} f_{n+1} + f_n + \frac{1}{2} f_{n-1}$$

Определить порядок аппроксимации метода. Исследовать метод на асимптотическую устойчивость.

4. (3) Для корректной постановки краевой задачи для системы трех дифференциальных уравнений на отрезке [0,100] указать, сколько краевых условий должно быть задано слева, а сколько — справа:

$$\begin{cases} x' = x + y + 3z, \\ y' = x + 5y + z \\ z' = 3x + y + z \end{cases}$$

ФИО	Группа	1	2	3	4	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 5

1. (3) Найти общее решение уравнения:

$$y_{n-1} - 5y_n + 6y_{n+1} = 0$$

2. (6) Рассматривается семейство диагонально неявных методов Рунге-Кутты:

$$\begin{array}{c|cc} 1-\gamma & 1-\gamma & 0 \\ \gamma & \gamma-\delta & \delta \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Среди семейства методов найти все асимптотически устойчивые методы и все методы третьего порядка аппроксимации. Будут ли последние $A(0)$-устойчивыми?

3. (4) Линейный многошаговый численный метод решения задачи Коши для ОДУ задан следующим соотношением:

$$\frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{\tau} = \frac{2}{3}f_{n+1} + \frac{2}{3}f_n + \frac{2}{3}f_{n-1}$$

Определить порядок аппроксимации метода. Исследовать метод на асимптотическую устойчивость.

4. (5) Используя метод Ньютона, найти следующее приближение к решению краевой задачи

$$y'' - \frac{1}{2}\left(-1 + y'\right)^2 - 3\exp\left(y - x\right) + 4 = 0, \quad , y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

В качестве начального приближения взять $y^0(x) = x$.

ФИО	Группа	1	2	3	4	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 6

1. (5) Найти все решения задачи на собственные значения:

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = -\lambda y_k, \quad y_0 = 0, \quad y_N = y_{N-1}, \quad h = \frac{1}{N}.$$

2. (6) Таблица Бутчера диагонально-неявного метода Рунге-Кутты задана не полностью:

$$\begin{array}{c|cc} \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{2}{3} \\ \hline & \cdot & \frac{3}{4} \end{array}$$

а) Определить недостоющие в таблице Бутчера параметры исходя из условия Кутты и условий аппроксимации второго порядка.
б) Определить порядок аппроксимации полученного метода
в) Исследовать полученный метод на A-устойчивость.
г) Исследовать полученный метод на L-устойчивость.

3. (4) Среди всех явных трехшаговых методов решения уравнения $y' = f(x, u)$ вида

$$\alpha_1 y_{n+1} + \alpha_{-1} y_{n-1} = h\left(\beta_1 f_{n+1} + \beta_{-1} f_{n-1} + \beta_{-2} f_{n-2}\right)$$

найти метод наибольшего порядка аппроксимации.

4. (3) Для корректной постановки краевой задачи для системы трех дифференциальных уравнений на отрезке [0,100] указать, сколько краевых условий должно быть задано слева, а сколько — справа:

$$\begin{cases} x' = 2x - 2y + 3z, \\ y' = x + y + z \\ z' = x + 3y - z \end{cases}$$