ФИО	Группа	1	2	3	4	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 1

Контрольный вопрос. Определение машинного ε.

1. (3) Вычислить значение производной функции $f(x)$ заданной таблично в точке $x = 1$ с максимально возможной точностью

x	0.5	1.0	1.5	2.0
$f(x)$	3.2974	2.7183	2.9878	3.6945

(1) Оцените ошибку полученной формулы численного дифференцирования, если $max|f^{IV}(x)| = 24.4645$.

(1) Определите оптимальный шаг численного дифференцирования.

2. Дана матрица:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

(4) Вычислить число обусловленности в первой и второй норме.

(6) В третьей норме.

3. Дана самосопряжённая матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -3 & 16 & 6 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

(7) Найти элементы третьего столбца матрицы, обратной к данной. Составить соответствующую СЛАУ и решить её методом Гаусса.

4. Для решения системы линейных уравнений $A\vec{x} = \vec{f}$ используется метод простой итерации.

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2) Оценить оптимальный итерационный параметр метода.

(5) В качестве начального приближения используется вектор правой части $\vec{f}$. Найти итерационный параметр, для которого сходимость будет максимально быстрой для данной правой части.

ФИО	Группа	1	2	3	4	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 2

Контрольный вопрос. Дать определение нормы матрицы, согласованной с нормой вектора.

1. (5) Вычислить значение второй производной функции $f(x)$ заданной таблично в точке $x = 1$ с максимально возможной точностью, если $f^{IV}(1) = -2.4$

x	0.8	1.0	1.3	1.5
$f(x)$	2.8070	4.9000	9.8024	14.4938

2. Дана матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

(4) Вычислить число обусловленности в первой и второй норме.
(6) В третьей норме.

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = f_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = f_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mm}x_m + a_{mm+1}x_{m+1} = f_m \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn-1}x_{n-1} + a_{nn}x_n = f_n \end{cases}$$

Предполагается, что для решения системы используется метод Гаусса без выбора главных элементов, но с учетом разреженности матрицы (над нулевыми элементами арифметические действия не производятся). Оценить количество элементарных арифметических операций, необходимых для вычисления решения, если исключение элементов производится
(3) «сверху вниз».
(4) «снизу вверх».

4. Для решения системы линейных уравнений $A\vec{x} = \vec{f}$ используется метод простой итерации.

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 5 \\ 0 & 5 & 13 \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(2) Оценить оптимальный итерационный параметр метода.
(5) В качестве начального приближения используется вектор правой части $\vec{f}$. Найти итерационный параметр, для которого сходимость будет максимально быстрой для данной правой части.

ФИО	Группа	1	2	3	4	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 3

Контрольный вопрос. Может ли величина $(A\vec{x}, \vec{x})^{\frac{1}{2}}$ где A – самосопряженная положительная матрица, быть нормой вектора?

1. (3) Вычислить значение производной функции $f(x)$ заданной таблично в точке $x = 0.5$ с максимально возможной точностью

x	-0.5	0.0	0.5	1.0
$f(x)$	-0.8244	0.0	0.3033	0.3679

(1) Оцените ошибку полученной формулы численного дифференцирования, если $max|f^{IV}(x)| = 2.1229$.

(1) Определите оптимальный шаг численного дифференцирования.

2. Дана матрица:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) Вычислить число обусловленности в первой и второй норме.

(6) В третьей норме.

3. Дана матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

(7) Найти элементы второй строки матрицы, обратной к данной. Составить соответствующую СЛАУ и решить её методом Гаусса.

4. Для решения системы линейных уравнений $A\vec{x} = \vec{f}$ используется метод простой итерации.

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 0 & -4 \\ 0 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(2) Оценить оптимальный итерационный параметр метода.

(5) В качестве начального приближения используется вектор правой части $\vec{f}$. Найти итерационный параметр, для которого сходимость будет максимально быстрой для данной правой части.

ФИО	Группа	1	2	3	4	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 4

Контрольный вопрос. Что такое итерационные методы решения СЛАУ?

1. (5) Вычислить значение второй производной функции $f(x)$ заданной таблично в точке $x = -1$ с максимально возможной точностью, если $f^{IV}(-1) = 0.7884$

x	-1.0	-0.5	0.1	0.5
$f(x)$	1.5403	1.2194	1.0100	1.2194

2. Дана матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(4) Вычислить число обусловленности в первой и второй норме.
(6) В третьей норме.

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} 18 & -6 & -7 \\ -6 & 6 & 0 \\ -7 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(7) Задана относительная погрешность правой части $\frac{\|\Delta f\|_2}{\|f\|_2} = 0.01$ ($\|x\|_2 = \sum_i |x_i|$). Найти границы для относительной погрешности решения $\frac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2}$ для данной системы при решении её методом Гаусса.

4. Для решения системы линейных уравнений $A\vec{x} = \vec{f}$ используется метод простой итерации.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2) Оценить оптимальный итерационный параметр метода.
(5) В качестве начального приближения используется вектор правой части $\vec{f}$. Найти итерационный параметр, для которого сходимость будет максимально быстрой для данной правой части.

ФИО	Группа	1	2	3	4	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 5

Контрольный вопрос. Какова абсолютная погрешность суммы и разности двух величин, заданных с погрешностями?

1. (3) Вычислить значение производной функции $f(x)$ заданной таблично в точке $x = 1.1$ с максимально возможной точностью, если $f^{IV}(1.1) = -0.9653$.

x	1.0	1.1	1.2	1.3
$f(x)$	0.3679	0.3662	0.3614	0.3543

(2) Определите оптимальный шаг численного дифференцирования для формулы третьего порядка точности, если ошибка этого метода $\Delta_M = 0.01h^3$

2. Дана матрица:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(4) Вычислить число обусловленности в первой и второй норме.
(6) В третьей норме.

3. Дана самосопряжённая матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 18 & -6 & -7 \\ -6 & 6 & 0 \\ -7 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

(7) Найти элементы второго столбца матрицы, обратной к данной. Составить соответствующую СЛАУ и решить её методом Гаусса.

4. Дана система линейных уравнений $A\vec{x} = \vec{f}$ и начальное приближение $\vec{u}_0$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(3) Определить значение итерационного параметра метода градиентного спуска на первой итерации.

(4) Оценить необходимое число итераций для достижения точности $\varepsilon = 10^{-4}$, если решение $\vec{u} = (1, 0, 1)^T$.

ФИО	Группа	1	2	3	4	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 6

Контрольный вопрос. Что такое прямые методы решения СЛАУ?

1. (5) Вычислить значение производной функции $f(x)$ заданной таблично в точке $x = 1$ с максимально возможной точностью, если $f^{IV}(1) = -22.9679$

x	-0.3	0.0	0.4	1.0
$f(x)$	1.0080	1.0	1.0249	1.8415

2. Дана матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(4) Вычислить число обусловленности в первой и второй норме.
(6) В третьей норме.

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = f_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = f_2 \\ \ldots \\ a_{mm-1}x_{m-1} + a_{mm}x_m + \ldots + a_{mn}x_n = f_m \\ \ldots \\ a_{nn-1}x_{n-1} + a_{nn}x_n = f_n \end{cases}$$

Предполагается, что для решения системы используется метод Гаусса без выбора главных элементов, но с учетом разреженности матрицы (над нулевыми элементами арифметические действия не производятся). Оценить количество элементарных арифметических операций, необходимых для вычисления решения, если исключение элементов производится
(3) «сверху вниз».
(4) «снизу вверх».

4. Дана система линейных уравнений $A\vec{x} = \vec{f}$ и начальное приближение $\vec{u}_0$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(3) Определить значение итерационного параметра метода минимальных невязок на первой итерации.

(4) Оценить необходимое число итераций для достижения точности $\varepsilon = 10^{-4}$, если решение $\vec{u} = (1, 1, 0)^T$.

ФИО	Группа	1	2	3	4	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 7

Контрольный вопрос. Какова абсолютная погрешность частного двух величин, заданных с погрешностями?

1. (3) Вычислить значение производной функции $f(x)$ заданной таблично в точке $x = 1.4$ с максимально возможной точностью, если $f^{IV}(1.4) = 5.1164$.

x	1.0	1.2	1.4	1.6
$f(x)$	3.2974	2.7668	2.8966	3.0956

(2) Определите оптимальный шаг численного дифференцирования для формулы третьего порядка точности, если ошибка этого метода $\Delta_M = 0.01h^3$

2. Дана матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(4) Вычислить число обусловленности в первой и второй норме.
(6) В третьей норме.

3. Дана матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -8 & 5 & 0 \\ 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

(7) Найти элементы третьей строки матрицы, обратной к данной. Составить соответствующую СЛАУ и решить её методом Гаусса.

4. Дана система линейных уравнений $A\vec{x} = \vec{f}$ и начальное приближение $\vec{u}_0$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(3) Определить значение итерационного параметра метода градиентного спуска на первой итерации.
(4) Оценить необходимое число итераций для достижения точности $\varepsilon = 10^{-4}$, если решение $\vec{u} = (1, 1, 1)^T$.

ФИО	Группа	1	2	3	4	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 8

Контрольный вопрос. Какова относительная погрешность произведения двух величин, заданных с погрешностями?

1. (5) Вычислить значение второй производной функции $f(x)$ заданной таблично в точке $x = 1$ с максимально возможной точностью, если $f^{IV}(1) = -9.1494$

x	1.0	1.5	2.0	2.5
$f(x)$	3.2874	5.4705	7.7188	8.2909

2. Дана матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(4) Вычислить число обусловленности в первой и второй норме.
(6) В третьей норме.

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -3 & 16 & 6 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(7) Задана относительная погрешность правой части $\frac{\|\Delta f\|_1}{\|f\|_1} = 0.01$ ($\|x\|_1 = \max_i |x_i|$). Найти границы для относительной погрешности решения $\frac{\|\Delta x\|_1}{\|x\|_1}$ для данной системы при решении её методом Гаусса.

4. Дана система линейных уравнений $A\vec{x} = \vec{f}$ и начальное приближение $\vec{u}_0$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(3) Определить значение итерационного параметра метода минимальных невязок на первой итерации.

(4) Оценить необходимое число итераций для достижения точности $\varepsilon = 10^{-4}$, если решение $\vec{u} = (1, 0, 2)^T$.

Ответы

Вариант 1

1. $f'(1) = 0$; $f(x) = \frac{\exp x}{x}$
2.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ -6 & -8 & -6 \end{pmatrix}, \quad A^* \times A = \begin{pmatrix} 17 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 18, \lambda_2 = 8, \lambda_3 = 1$$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Вариант 2

1. $f''(1) = 12.6$; $f(x) = x + 4x^3 - \frac{1}{10}x^4$
2.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^* \times A = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 5 \\ 0 & 5 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 18, \lambda_2 = 16, \lambda_3 = 8$$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Вариант 3

1. $f'(0.5) = 0.3033$; $f(x) = x \exp x$
2.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 6 & -8 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^* \times A = \begin{pmatrix} 17 & 0 & -4 \\ 0 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 18, \lambda_2 = 8, \lambda_3 = 1$$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Вариант 4

1. $f''(-1) = -2.8256$; $f(x) = x^2 \cos(x) + 1$
2.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ -4 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^* \times A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 12, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1$$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Вариант 5

1. $f'(1.1) = -0.0333$; $f(x) = x \exp x$
2.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -6 & 0 & -6 \\ -1 & -4 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^* \times A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -3 \\ 0 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 12, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 2$$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Вариант 6

1. $f'(1) = 3.0647$; $f(x) = x^3 \sin(x) + 1$
2.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -9 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^* \times A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 6 \\ 0 & 9 & 0 \\ 6 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 16, \lambda_2 = 9, \lambda_3 = 4$$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Вариант 7

1. $f'(1.4) = 0.8276$; $f(x) = \frac{\exp x}{x}$
2.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -10 \\ 12 & -3 & 0 \\ -6 & -6 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^* \times A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 6 \\ 0 & 6 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 20, \lambda_2 = 9, \lambda_3 = 5$$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Вариант 8

1. $f''(1) = 2.9374$; $f(x) = \sin(x)\exp x + 1$
2.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^* \times A = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 0 \\ -3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 12, \lambda_2 = 8, \lambda_3 = 6$$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$