Задача Коши для ОДУ

Вариант 1

Модель Лотки – Вольтерры описывает межвидовую конкуренцию при помощи следующих уравнений:

$$\begin{cases} \dot{y_1} &= (\alpha - \beta y_2) y_1 \\ \dot{y_2} &= (-\gamma + \delta y_1) y_2, \end{cases} \tag{1}$$

где y_1 – популяция жертв, y_2 – популяция хищников; α – коэффициент рождаемости жертв, γ – коэффициент смертности хищников. При встрече хищников с жертвами, вероятность которой пропорциональна $y_1 \cdot y_2$, происходит убийство жертв с коэффициентом β и рождение новых хищников с коэффициентом δ.

Решением системы (1) являются коллебания популяций относительно стационарной точки $\bar{y_1} = \gamma/\delta$, $\bar{y_2} = \alpha/\beta$. Рассмотрим задачу Коши для данной системы с начальными данными $y_1(0) = 1$ и $y_2(0) = 0.05$ и зададим коэффициенты: $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$ и $\delta = 1.5$.

Для численного решения данной системы уравнений предлагается использовать методы Рунге-Кутты, которые записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} &\vec{k}_1 = \vec{f}(t_n + a_1, \vec{u}_n + \tau \sum_{j=1}^{S} b_{j1} \vec{k}_j), \\ &\vec{k}_2 = \vec{f}(t_n + a_2, \vec{u}_n + \tau \sum_{j=1}^{S} b_{j2} \vec{k}_j), \\ &\dots \\ &\vec{k}_S = \vec{f}(t_n + a_S, \vec{u}_n + \tau \sum_{j=1}^{S} b_{jS} \vec{k}_j), \\ &\vec{u}_{n+1} = \vec{u}_n + \tau (\sum_{j=1}^{S} c_j \vec{k}_j); \end{aligned} \tag{2}$$

где $\vec{f}$ – вектор функция правой части системы, a_i, b_{ij} и c_i - параметры метода, S – число стадий в методе.

Для явного метода, когда $b_{ij} = 0$ для всех $j \geq i$, вспомогательные векторы $\vec{k}_i$ вычисляются напрямую. В случае неявного метода, для вычисления векторов $\vec{k}_i$ предлагается использовать итерационный процесс:

$$\vec{k}_i^{n+1} = \vec{f}(t_n + a_1, \vec{u}_n + \tau \sum_{j=1}^{S} b_{j1} \vec{k}_j^{n}), \tag{3}$$

где n - номер итерации. В качестве начального приближения для итерационного процесса использовать вектора $\vec{k}_i$, посчитанные на предидущем шаге интегрирования по времени.

В качестве первого приближения – использовать вектора $\vec{k}_i = \vec{f}(t_0, \vec{u}_0)$. Итерационный процесс завершается, когда $max_{i=1...S}(|\vec{k}_i^{n+1} - \vec{k}_i^n|) \leq \varepsilon$

Написать программу, которая будет находить численное решение предложенной задачи Коши на интервале $t \in [0, 100]$ методом Рунге-Кутты. Метод задаётся в специальном файле следующего формата:

```
S
a1  b11  b12  ... b1S
a2  b21  b22  ... b2S
...
aS  bS1  bS2  ... bSS
0.0 c1   c2   ... cS
[tolerance]
```

Где `S` - количество стадий в методе, `a1-aS`, `b11-bSS` и `c1-cS` – таблица Бутчера. Если метод неявный, также задаётся толерантность (ε) итерационного метода для нахождения вспомогательных векторов $\vec{k}_i$.

Решение системы должно записываться в файл, который для каждого временного шага содержит строку формата:

```
t   f1   f2
```

где `t` – время, `f1` и `f2` – компоненты решения.

Построить фазовые диаграммы решения системы явными методами Эйлера первого и второго порядков, а также неявным методом Эйлера первого порядка и методом Лобатто IIIA 2-го порядка точности. Для каждого метода использовать три значения шага по времени: $\tau = 0.001$, 0.01 и 0.1.

Экспериментально оценить максимальный шаг по времени, при котором явный метод Эйлера для данной задачи Коши устойчив (получаемое решение не покидает предельного цикла). Убедиться, что неявный метод Эйлера устойчив при гораздо больших шагах по времени.

Для удобства, в архив также добавлены файлы с несколькими методами и программа, написанная на языке C++, которая может быть использована как пример реализации чтения входных данных и вывода результатов.

Задача Коши для ОДУ

Вариант 2

Реакция Белоусова-Жаботинского – обобщающее название для класса химических реакций, протекающих в коллебательном режиме. Один из способов математического описания подобных реакций, модель «Брюсселятор» задается следующей системой ОДУ:

$$\begin{cases} \dot{y_1} &= \alpha + y_1^2 y_2 - (\beta + 1) y_1 \\ \dot{y_2} &= \beta y_1 - y_1^2 y_2, \end{cases} \tag{1}$$

где y_1 и y_2 – концентрации веществ, участвующих в реакции; $\alpha = 1$ и $\beta = 3$ – параметры модели.

Решением системы (1) являются коллебания концентраций веществ по некоторому предельному циклу вокруг равновесного значения $\bar{y_1} = \alpha$, $\bar{y_2} = \beta/\alpha$. Рассмотрим задачу Коши для данной системы с начальными данными $y_1(0) = 2$ и $y_2(0) = 3$ на отрезке $t \in [0; 20]$.

Для численного решения данной системы уравнений предлагается использовать методы Рунге-Кутты, которые записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} &\vec{k}_1 = \vec{f}(t_n + a_1, \vec{u}_n + \tau \sum_{j=1}^{S} b_{j1} \vec{k}_j), \\ &\vec{k}_2 = \vec{f}(t_n + a_2, \vec{u}_n + \tau \sum_{j=1}^{S} b_{j2} \vec{k}_j), \\ &\dots \\ &\vec{k}_S = \vec{f}(t_n + a_S, \vec{u}_n + \tau \sum_{j=1}^{S} b_{jS} \vec{k}_j), \\ &\vec{u}_{n+1} = \vec{u}_n + \tau (\sum_{j=1}^{S} c_j \vec{k}_j); \end{aligned} \tag{2}$$

где $\vec{f}$ – вектор функция правой части системы, a_i, b_{ij} и c_i - параметры метода, S – число стадий в методе.

Для явного метода, когда $b_{ij} = 0$ для всех $j \geq i$, вспомогательные векторы $\vec{k}_i$ вычисляются напрямую. В случае неявного метода, для вычисления векторов $\vec{k}_i$ предлагается использовать итерационный процесс:

$$\vec{k}_i^{n+1} = \vec{f}(t_n + a_1, \vec{u}_n + \tau \sum_{j=1}^{S} b_{j1} \vec{k}_j^n), \tag{3}$$

где n - номер итерации. В качестве начального приближения для итерационного процесса использовать вектора $\vec{k}_i$, посчитанные на предидущем шаге интегрирования по времени.

В качестве первого приближения – использовать вектора $\vec{k}_i = \vec{f}(t_0, \vec{u}_0)$. Итерационный процесс завершается, когда $max_{i=1...S}(|\vec{k}_i^{n+1} - \vec{k}_i^n|) \leq \varepsilon$

Написать программу, которая будет находить численное решение предложенной задачи Коши на интервале $t \in [0, 20]$ методом Рунге-Кутты. Метод задаётся в специальном файле следующего формата:

```
S
a1  b11  b12  ... b1S
a2  b21  b22  ... b2S
...
aS  bS1  bS2  ... bSS
0.0 c1   c2   ... cS
[tolerance]
```

Где `S` - количество стадий в методе, `a1-aS`, `b11-bSS` и `c1-cS` – таблица Бутчера. Если метод неявный, также задаётся толерантность (ε) итерационного метода для нахождения вспомогательных векторов $\vec{k}_i$.

Решение системы должно записываться в файл, который для каждого временного шага содержит строку формата:

```
t   f1   f2
```

где `t` – время, `f1` и `f2` – компоненты решения.

Построить фазовые диаграммы решения системы явными методами Эйлера первого и второго порядков, а также неявным методом Эйлера первого порядка и методом Лобатто IIIA 2-го порядка точности. Для каждого метода использовать три значения шага по времени: $\tau = 0.001$, 0.01 и 0.1.

Экспериментально оценить максимальный шаг по времени, при котором явный метод Эйлера для данной задачи Коши устойчив (получаемое решение не покидает предельного цикла). Убедиться, что неявный метод Эйлера устойчив при гораздо больших шагах по времени.

Для удобства, в архив также добавлены файлы с несколькими методами и программа, написанная на языке C++, которая может быть использована как пример реализации чтения входных данных и вывода результатов.

Задача Коши для ОДУ

Вариант 3

Простейшая модель гликолиза описывается предложенными Дж. Хиггинсом уравнениями следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{y_1} & = 1 - y_1 y_2 \\ \dot{y_2} & = \alpha y_2 \left(y_1 - \frac{1+\beta}{y_2+\beta} \right), \end{cases} \tag{1}$$

где $\alpha = 1000$ и $\beta = 10$ – параметры модели. Начальные условия для системы: $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0.001$. Решение системы – релаксационные автоколебания (жесткий предельный цикл).

Для численного решения данной системы уравнений предлагается использовать методы Рунге-Кутты, которые записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\vec{k}_1 = \vec{f}(t_n + a_1, \vec{u}_n + \tau \sum_{j=1}^{S} b_{j1} \vec{k}_j), \\
&\vec{k}_2 = \vec{f}(t_n + a_2, \vec{u}_n + \tau \sum_{j=1}^{S} b_{j2} \vec{k}_j), \\
&\dots \\
&\vec{k}_S = \vec{f}(t_n + a_S, \vec{u}_n + \tau \sum_{j=1}^{S} b_{jS} \vec{k}_j), \\
&\vec{u}_{n+1} = \vec{u}_n + \tau (\sum_{j=1}^{S} c_j \vec{k}_j);
\end{aligned} \tag{2}$$

где $\vec{f}$ – вектор функция правой части системы, a_i, b_{ij} и c_i - параметры метода, S – число стадий в методе.

Для явного метода, когда $b_{ij} = 0$ для всех $j \geq i$, вспомогательные векторы $\vec{k}_i$ вычисляются напрямую. В случае неявного метода, для вычисления векторов $\vec{k}_i$ предлагается использовать итерационный процесс:

$$\vec{k}_i^{n+1} = \vec{f}(t_n + a_1, \vec{u}_n + \tau \sum_{j=1}^{S} b_{j1} \vec{k}_j^{n}), \tag{3}$$

где n - номер итерации. В качестве начального приближения для итерационного процесса использовать вектора $\vec{k}_i$, посчитанные на предидущем шаге интегрирования по времени. В качестве первого приближения – использовать вектора $\vec{k}_i = \vec{f}(t_0, \vec{u}_0)$. Итерационный процесс завершается, когда $max_{i=1...S}(|\vec{k}_i^{n+1} - \vec{k}_i^{n}|) \leq \varepsilon$

Написать программу, которая будет находить численное решение предложенной задачи Коши на интервале $t \in [0, 200]$ методом Рунге-Кутты. Метод задаётся в специальном файле следующего формата:

```
S
a1  b11  b12  ... b1S
a2  b21  b22  ... b2S
...
aS  bS1  bS2  ... bSS
0.0 c1   c2   ... cS
[tolerance]
```

Где `S` - количество стадий в методе, `a1-aS`, `b11-bSS` и `c1-cS` – таблица Бутчера. Если метод неявный, также задаётся толерантность (ε) итерационного метода для нахождения вспомогательных векторов $\vec{k}_i$.

Решение системы должно записываться в файл, который для каждого временного шага содержит строку формата:

```
t   f1   f2
```

где `t` – время, `f1` и `f2` – компоненты решения.

Построить фазовые диаграммы решения системы явными методами Эйлера первого и второго порядков, а также неявным методом Эйлера первого порядка и методом Лобатто IIIA 2-го порядка точности. Для каждого метода подобрать (максимальный) шаг по времени, при котором решение не покидает предельного цикла. Что происходит с решением при увеличении шага в случае использования явного и неявного методов?

Экспериментально оценить максимальный шаг по времени, при котором явный метод Эйлера для данной задачи Коши устойчив (получаемое решение не покидает предельного цикла). Убедиться, что неявный метод Эйлера устойчив при гораздо больших шагах по времени.

Для удобства, в архив также добавлены файлы с несколькими методами и программа, написанная на языке C++, которая может быть использована как пример реализации чтения входных данных и вывода результатов.

Задача Коши для ОДУ

Вариант 4

Типичным примером жесткой задачи является уравнение Ван-дер-Поля. Его можно записать в виде системы ОДУ:

$$\begin{cases} \dot{y_1} & = y_2 \\ \dot{y_2} & = -\alpha\left(y_2\left(y_1^2 - 1\right) + y_1\right), \end{cases} \tag{1}$$

Считаем, что параметр $\alpha = 1000$ – большой. Начальные условия для системы: $y_1(0) = 2$, $y_2(0) = 0$.

Для численного решения данной системы уравнений предлагается использовать методы Рунге-Кутты, которые записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} &\vec{k}_1 = \vec{f}(t_n + a_1, \vec{u}_n + \tau \sum_{j=1}^{S} b_{j1}\vec{k}_j), \\ &\vec{k}_2 = \vec{f}(t_n + a_2, \vec{u}_n + \tau \sum_{j=1}^{S} b_{j2}\vec{k}_j), \\ &\dots \\ &\vec{k}_S = \vec{f}(t_n + a_S, \vec{u}_n + \tau \sum_{j=1}^{S} b_{jS}\vec{k}_j), \\ &\vec{u}_{n+1} = \vec{u}_n + \tau(\sum_{j=1}^{S} c_j\vec{k}_j); \end{aligned} \tag{2}$$

где $\vec{f}$ – вектор функция правой части системы, a_i, b_{ij} и c_i - параметры метода, S – число стадий в методе.

Для явного метода, когда $b_{ij} = 0$ для всех $j \geq i$, вспомогательные векторы $\vec{k}_i$ вычисляются напрямую. В случае неявного метода, для вычисления векторов $\vec{k}_i$ предлагается использовать итерационный процесс:

$$\vec{k}_i^{n+1} = \vec{f}(t_n + a_1, \vec{u}_n + \tau \sum_{j=1}^{S} b_{j1}\vec{k}_j^n), \tag{3}$$

где n - номер итерации. В качестве начального приближения для итерационного процесса использовать вектора $\vec{k}_i$, посчитанные на предидущем шаге интегрирования по времени. В качестве первого приближения – использовать вектора $\vec{k}_i = \vec{f}(t_0, \vec{u}_0)$. Итерационный процесс завершается, когда $max_{i=1...S}(|\vec{k}_i^{n+1} - \vec{k}_i^n|) \leq \varepsilon$

Написать программу, которая будет находить численное решение предложенной задачи Коши на интервале $t \in [0, 100]$ методом Рунге-Кутты. Метод задаётся в специальном файле следующего формата:

```
S
a1  b11  b12  ... b1S
a2  b21  b22  ... b2S
...
aS  bS1  bS2  ... bSS
0.0 c1   c2   ... cS
[tolerance]
```

Где `S` - количество стадий в методе, `a1-aS`, `b11-bSS` и `c1-cS` – таблица Бутчера. Если метод неявный, также задаётся толерантность (ε) итерационного метода для нахождения вспомогательных векторов $\vec{k}_i$.

Решение системы должно записываться в файл, который для каждого временного шага содержит строку формата:

```
t   f1   f2
```

где `t` – время, `f1` и `f2` – компоненты решения.

Построить фазовые диаграммы решения системы явными методами Эйлера первого и второго порядков, а также неявным методом Эйлера первого порядка и методом Лобатто IIIA 2-го порядка точности. Для каждого метода подобрать (максимальный) шаг по времени, при котором решение не покидает предельного цикла. Что происходит с решением при увеличении шага в случае использования явного и неявного методов?

Экспериментально оценить максимальный шаг по времени, при котором явный метод Эйлера для данной задачи Коши устойчив (получаемое решение не покидает предельного цикла). Убедиться, что неявный метод Эйлера устойчив при гораздо больших шагах по времени.

Для удобства, в архив также добавлены файлы с несколькими методами и программа, написанная на языке C++, которая может быть использована как пример реализации чтения входных данных и вывода результатов.