ФИО	Группа	1	2	3	4	5	6	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 1

Контрольный вопрос: Основная теорема вычислительной математики.

1. (2) Для поиска корня нелинейного уравнения
$$x^3 + 2x^2 - x + 0.1 = 0,$$
принадлежащего отрезку [0.2, 0.8], предложить сходящийся метод простой итерации. Оценить его скорость сходимости.

2. (3) Функция задана таблицей:

x	1	2	3	4
$f(x)$	e	$2e$	$2e$	e

Известно, что $f'(2) = -e$ и $f'(3) = e$. Построить для $f(x)$ интерполяционный полином в форме Ньютона.

3. (2) Выписать формулы для вычисления несобственного интеграла и указать шаг интегрирования по формуле трапеций с погрешностью $\epsilon = 10^{-3}$: $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{x}} dx.$

4. (2) В таблице даны значения функции $y = \sqrt{1-x^2}$, задающей часть окружности радиуса 1, находящуюся в первой четверти декартовой системы координат. Используя формулу Симпсона, вычислить число π. Оценить погрешность метода при помощи правила Рунге. Какова ошибка округления, если значения функции даны с абсолютной погрешностью 0.005?

x	0.000	0.125	0.250	0.375	0.500	0.625	0.750	0.875	1.000
$f(x)$	1.00	0.99	0.97	0.93	0.87	0.78	0.66	0.48	0.00

5. (5) Линейная система ОДУ:
$$\begin{cases} \dot{x} = 2y, \\ \dot{y} = -2x, \end{cases}$$
с начальными условиями $x(0) = 1$, $y(0) = 1$ решается методом «предиктор-корректор»:
$$\widetilde{u} = u^n + \frac{\tau}{2} f(u^n, t_n), \qquad u^{n+1} = u^n + \tau f(\widetilde{u}, t_n + \frac{\tau}{2}),$$
с начальными условиями $x^0 = 1$, $y^0 = 1$. Доказать, что решение разностной задачи сходится к решению дифференциальной задачи.

6. (3) Система уравнений «Брюсселятор»: $\begin{cases} \dot{u} = A + u^2 v - (B+1)v, \quad u(0) = 1, \\ \dot{v} = Bu - u^2 v, \quad v(0) = 1, \end{cases}$

Решается с помощью следующего численного метода:
$$k_{21} = A + \left(u^n + \frac{3-\sqrt{3}}{6}\tau\left(A + (u^n)^2 v^n - (B+1)v^n\right)\right)^2 \cdot \left(v^n + \frac{3-\sqrt{3}}{6}\tau\left(Bu^n - (u^n)^2 v^n\right)\right) -$$
$$- (B+1)\left(v^n + \frac{3-\sqrt{3}}{6}\tau\left(Bu^n - (u^n)^2 v^n\right)\right),$$
$$k_{22} = B\left(u^n + \frac{3-\sqrt{3}}{6}\tau\left(A + (u^n)^2 v^n - (B+1)v^n\right)\right) -$$
$$- \left(u^n + \frac{3-\sqrt{3}}{6}\tau\left(A + (u^n)^2 v^n - (B+1)v^n\right)\right)^2 \cdot \left(v^n + \frac{3-\sqrt{3}}{6}\tau\left(Bu^n - (u^n)^2 v^n\right)\right),$$
$$k_{31} = A + \left(u^n + \frac{3+\sqrt{3}}{6}\tau k_{21}\right)^2 \cdot \left(v^n + \frac{3+\sqrt{3}}{6}\tau k_{22}\right) - (B+1)\left(v^n + \frac{3+\sqrt{3}}{6}\tau k_{22}\right),$$
$$k_{32} = B\left(u^n + \frac{3+\sqrt{3}}{6}\tau k_{21}\right) - \left(u^n + \frac{3+\sqrt{3}}{6}\tau k_{21}\right)^2 \cdot \left(v^n + \frac{3+\sqrt{3}}{6}\tau k_{22}\right),$$
$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \frac{k_{21} + k_{31}}{2}, \qquad \frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} = \frac{k_{22} + k_{32}}{2}.$$

Показать, что метод относится к классу явных методов Рунге-Кутты. Записать его таблицу Бутчера. Исследовать метод на аппроксимацию.

ФИО	Группа	1	2	3	4	5	6	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 2

Контрольный вопрос: Определение устойчивости разностной схемы.

1. (2) Для поиска корня нелинейного уравнения

$$x = 4e^{2x} - \ln(2e),$$

такого, что $x < -1$, предложить сходящийся метод простой итерации и оценить его скорость сходимости.

2. (3) Функция $f(x)$ задана таблицей:

x	0	1	2
$f(x)$	0	1	4

Известно, что $f'(0) = +\infty$. С помощью интерполяции, найти значение x, при котором $f(x) = \sqrt{\frac{24}{7}}$.

3. (2) Выписать формулы для вычисления несобственного интеграла и указать шаг интегрирования по формуле трапеций с погрешностью $\epsilon = 10^{-3}$: $\displaystyle\int_0^{10} \frac{\ln(11-x)}{(10-x)^{3/2}}dx.$

4. (2) В таблице даны значения функции $f(x) = xe^x/(x+1)^2$ на отрезке $[0,1]$. Используя формулу Симпсона, вычислить число e, если известно, что $\int_0^1 f(x)dx = e/2 - 1$. Уточнить результат при помощи экстраполяции Ричардсона. Какова ошибка округления, если значения функции даны с абсолютной погрешностью 0.0005?

x	0.000	0.125	0.250	0.375	0.500	0.625	0.750	0.875	1.000
$f(x)$	0.000	0.112	0.205	0.289	0.366	0.442	0.518	0.597	0.680

5. (5) Линейная система ОДУ:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -4x \end{cases}$$

с начальными условиями $x(0) = 1$, $y(0) = 1$ решается неявным методом Эйлера

$$u^{n+1} = u^n + \tau f(u^{n+1}, t_n + \frac{\tau}{2})$$

с начальными условиями $x^0 = 1$, $y^0 = 1$. Доказать, что решение разностной задачи сходится к решению дифференциальной задачи.

6. (3) Уравнение Ван-дер-Поля в представлении Льенара записывается как система двух ОДУ:

$$\begin{cases} \dot{z} = -y, \\ \dot{y} = z - e\left(\frac{y^3}{3} - y\right); \quad e > 0, \end{cases}$$

с начальными условиями $y(0) = 2$, $z(0) = 0$. Для ее решения использован метод Рунге-Кутты:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \\ \hline & \frac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{array}$$

Выписать расчетные формулы для решения задачи. Исследовать метод на аппроксимацию.

ФИО	Группа	1	2	3	4	5	6	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 3

Контрольный вопрос: Определение аппроксимации разностной схемы.

1. (2) Для нахождения корня нелинейного уравнения

$$x = 5x^2 e^{-x},$$

лежащего на отрезке [0.2, 0.4], предложить сходящийся метод простой итерации и оценить его скорость сходимости.

2. (3) Функция $f(x)$ задана таблицей:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$f(x)$	0	$\frac{1}{3}$	1	3

Найти значение x_0, при котором $f(x) = 2$. *Указание:* Использовать интерполяционный полином в форме Лагранжа.

3. (2) Выписать формулы для вычисления несобственного интеграла и указать шаг интегрирования по формуле прямоугольников с погрешностью $\epsilon = 10^{-3}$: $\displaystyle\int_0^{10} \frac{\sin x \ln(1+x)}{x^2\sqrt{x}} dx.$

4. (2) Используя формулу трапеции, оценить интеграл под кривой распределения Гаусса, заданной таблично. Распределение симметрично и задается формулой $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$, математическое ожидание $\mu = 1$, дисперсия $\sigma = 1$. Какова ошибка округления, если значения функции даны с абсолютной погрешностью 0.0005?

x	0.0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	3.0	4.0
$f(x)$	0.399	0.368	0.290	0.194	0.111	0.054	0.004	0.000

5. (5) Линейная система ОДУ:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 4x \end{cases}$$

с начальными условиями $x(0) = 1$, $y(0) = 1$ решается методом трапеций

$$\frac{u^{n+1} + u^n}{\tau} = \frac{f(u^n, t_n) + f(u^{n+1}, t_{n+1})}{2}$$

с начальными условиями $x^0 = 1$, $y^0 = 1$. Доказать, что решение разностной задачи сходится к решению дифференциальной задачи.

6. (3) Для неавтономного уравнения второго порядка ставится задача Коши:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{10}{t}\frac{dx}{dt} - \frac{100x}{t^2} = 0, \\ x(1) = 1, \;\; \dot{x}(1) = 0. \end{cases}$$

Для численного решения используется метод Рунге-Кутты:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 2/3 & 2/3 & \\ \hline & 1/4 & 3/4 \end{array}$$

Выписать расчетные формулы метода для решения задачи. Исследовать метод на аппроксимацию.