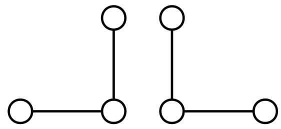
ФИО	Группа	1	2	3	4	5	Σ

Вариант 1

Контрольный вопрос: Устойчивость разностной схемы. Определение для линейной разностной схемы.

1. (7) Дана система уравнений:

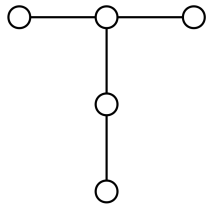


$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + 4\frac{\partial v}{\partial x} = f(t,x), 0 \le t \le 1, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial v}{\partial x} = g(t,x), 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

а) $u(0,x) = \phi_0(x)$, $v(0,x) = \phi_1(x)$, $u(t,1) = \psi_1(t)$, $u(t,1) + v(t,1) = \psi_2(t)$.
б) $u(0,x) = \phi_0(x)$, $v(0,x) = \phi_1(x)$, $u(t,1) + v(t,1) = \psi(t)$.
в) $u(0,x) = \phi_0(x)$, $v(0,x) = \phi_1(x)$, $u(t,0) = \psi(t)$.
г) $u(0,x) = \phi_0(x)$, $v(0,x) = \phi_1(x)$, $u(t,0) = \psi_1(t)$, $u(t,0) + v(t,0) = \psi_2(t)$.

Записать систему в инвариантах Римана, предложить разностную схему на шаблонах «левый уголок» и «правый уголок» (см. рис.). Какие из приведённых граничных и начальных условий соответствуют корректной постановке смешанной задачи?

2. (5) Используя предложенный шаблон, построить разностную схему для решения задачи Коши для волнового уравнения.



$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,x) = \psi_0(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \psi_1(x). \end{cases}$$

Исследовать полученную разностную схему на аппроксимацию и устойчивость.

3. (8) Предложить консервативную разностную схему второго порядка аппроксимации по пространству и первого по времени для решения краевой задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + e^u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^u \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = 0, u(0,x) = x, \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 1, u(t,1) = 1.$$

Исследовать предложенную схему на устойчивость используя принцип замороженных коэффициентов.

4. (6) Уравнение Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = f$ решается в области $\Omega = \{-1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}$ с граничным условием $u\big|_{\partial\Omega} = 0$. Найти собственные числа и собственные функции дифференциального оператора, соответствующего схеме «крест».

5. (6) Задача Коши для линейного уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ решается с помощью разностной схемы:

$$\frac{u_{k\,m}^{n+1} - u_{k\,m}^{n-1}}{2\tau} = D\left(\frac{u_{k+1\,m}^{n} - u_{k\,m}^{n+1} - u_{k\,m}^{n-1} + u_{k-1\,m}^{n}}{h_x^2} + \frac{u_{k\,m+1}^{n} - u_{k\,m}^{n+1} - u_{k\,m}^{n-1} + u_{k\,m-1}^{n}}{h_y^2}\right).$$

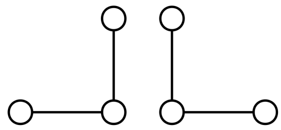
Исследовать разностную схему на сходимость.

ФИО	Группа	1	2	3	4	5	Σ

Вариант 2

Контрольный вопрос: Формулировка спектрального признака устойчивости.

1. (7) Дана система уравнений:

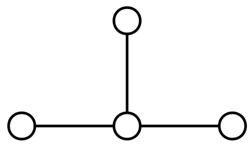


$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} - 6\frac{\partial v}{\partial x} = f(t,x), 0 \le t \le 1, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + 6\frac{\partial v}{\partial x} = g(t,x), 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

а) $u(0,x) = \phi_0(x)$, $v(0,x) = \phi_1(x)$, $u(t,0) = \psi_1(t)$, $v(t,0) = \psi_2(t)$.
б) $u(0,x) = \phi_0(x)$, $v(0,x) = \phi_1(x)$, $u(t,0) = \psi_1(t)$, $u(t,1) - v(t,1) = \psi_2(t)$.
в) $u(0,x) = \phi_0(x)$, $v(0,x) = \phi_1(x)$, $u(t,1) + v(t,1) = \psi_1(t)$, $v(t,1) = \psi_2(t)$.
г) $u(0,x) = \phi_0(x)$, $v(0,x) = \phi_1(x)$, $u(t,0) = \psi_1(t)$.

Записать систему в инвариантах Римана, предложить разностную схему на шаблонах «левый уголок» и «правый уголок» (см. рис.). Какие из приведённых граничных и начальных условий соответствуют корректной постановке смешанной задачи?

2. (5) Используя предложенный шаблон, построить разностную схему максимального возможного порядка аппроксимации для решения задачи Коши для уравнения переноса.



$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a^2\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ u(0,x) = \psi_0(x). \end{cases}$$

Исследовать полученную разностную схему на аппроксимацию и устойчивость.

3. (8) Предложить консервативную разностную схему второго порядка аппроксимации по пространству и первого по времени для решения краевой задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{ch} u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{sh} u \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = 0, u(0,x) = x^2, \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = t, u(t,1) = 1.$$

Исследовать предложенную схему на устойчивость используя принцип замороженных коэффициентов.

4. (6) Уравнение Пуассона $\Delta u = f$ решается в области $\Omega = \{-1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}$ с граничными условиями $u(-1,y) = 0$, $u(1,y) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x,-1) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x,1) = 0$. Найти собственные числа и собственные функции дифференциального оператора, соответствующего схеме «крест».

5. (6) Задача Коши для линейного уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$ решается с помощью локально-одномерной схемы:

$$\frac{u^{n+1}_{k\,m\,l} - u^{n}_{k\,m\,l}}{\tau} = D\left(\Lambda_{h_x,\bar h_x} u^{n+1}_{k\,m\,l} + \Lambda_{h_y,\bar h_y} u^{n}_{k\,m\,l} + \Lambda_{h_z,\bar h_z} u^{n}_{k\,m\,l}\right),$$
$$\frac{u^{n+2}_{k\,m\,l} - u^{n+1}_{k\,m\,l}}{\tau} = D\left(\Lambda_{h_x,\bar h_x} u^{n+1}_{k\,m\,l} + \Lambda_{h_y,\bar h_y} u^{n+2}_{k\,m\,l} + \Lambda_{h_z,\bar h_z} u^{n+1}_{k\,m\,l}\right),$$
$$\frac{u^{n+3}_{k\,m\,l} - u^{n+2}_{k\,m\,l}}{\tau} = D\left(\Lambda_{h_x,\bar h_x} u^{n+2}_{k\,m\,l} + \Lambda_{h_y,\bar h_y} u^{n+2}_{k\,m\,l} + \Lambda_{h_z,\bar h_z} u^{n+3}_{k\,m\,l}\right).$$

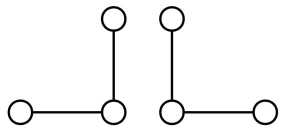
Устойчива ли такая схема?

ФИО	Группа	1	2	3	4	5	Σ

Вариант 3

Контрольный вопрос: Основная теорема вычислительной математики (формулировка).

1. (7) Дана система уравнений:

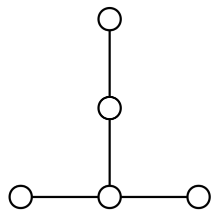


$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + 7\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} = f(t,x), 0 \le t \le 1, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - 4\frac{\partial u}{\partial x} + 7\frac{\partial v}{\partial x} = g(t,x), 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

а) $u(0,x) = \phi_0(x)$, $v(0,x) = \phi_1(x)$, $u(t,0) = \psi_1(t)$, $v(t,0) = \psi_2(t)$.
б) $u(0,x) = \phi_0(x)$, $v(0,x) = \phi_1(x)$, $u(t,0) + 2v(t,0) = \psi_1(t)$, $v(t,1) = \psi_2(t)$.
в) $u(0,x) = \phi_0(x)$, $v(0,x) = \phi_1(x)$, $u(t,0) = \psi_1(t)$, $u(t,0) - 2v(t,0) = \psi_2(t)$.
г) $u(0,x) = \phi_0(x)$, $v(0,x) = \phi_1(x)$, $v(t,1) = \psi_1(t)$.

Записать систему в инвариантах Римана, предложить разностную схему на шаблонах «левый уголок» и «правый уголок» (см. рис.). Какие из приведённых граничных и начальных условий соответствуют корректной постановке смешанной задачи?

2. (5) Используя предложенный шаблон, построить разностную схему для решения задачи Коши для волнового уравнения.



$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,x) = \psi_0(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \psi_1(x). \end{cases}$$

Исследовать полученную разностную схему на аппроксимацию и устойчивость.

3. (8) Предложить консервативную разностную схему второго порядка аппроксимации по пространству и первого по времени для решения краевой задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(u \operatorname{sh} u \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, u(0,x) = 2 + x, u(t,1) = t^2 + 3, \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0.$$

Исследовать предложенную схему на устойчивость используя принцип замороженных коэффициентов.

4. (6) Уравнение Пуассона $\Delta u = f$ решается в области $\Omega = \{-1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}$ с граничными условиями $u(-1,y) = f_1(y)$, $u(1,y) = f_2(y)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x,-1) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x,1) = 0$. Используется простейшая разностная схема «крест». Полученная система сеточных уравнений решается с помощью метода простых итераций. Вычислить скорость убывания невязки на итерациях.

5. (6) Задача Коши для линейного уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ решается с помощью разностной схемы:

$$\frac{u^{n+1}_{k\,m} - u^n_{k\,m}}{\tau} = D\left(\frac{u^n_{k+1\,m} - 2u^{n+1}_{k\,m} + u^n_{k-1\,m}}{h_x^2} + \frac{u^n_{k\,m+1} - 2u^{n+1}_{k\,m} + u^n_{k\,m-1}}{h_y^2}\right), n+k+m = 2l,$$

$$\frac{u^{n+1}_{k\,m} - u^n_{k\,m}}{\tau} = D\left(\frac{u^{n+1}_{k+1\,m} - 2u^{n+1}_{k\,m} + u^{n+1}_{k-1\,m}}{h_x^2} + \frac{u^{n+1}_{k\,m+1} - 2u^{n+1}_{k\,m} + u^{n+1}_{k\,m-1}}{h_y^2}\right), n+k+m = 2l+1.$$

Эта схема явная или неявная? Исследовать ее на устойчивость.

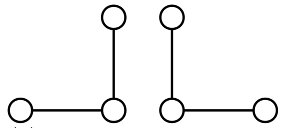
ФИО	Группа	1	2	3	4	5	Σ

Вариант 4

Контрольный вопрос: Аппроксимация разностной задачи дифференциальной. Сходимость (определения).

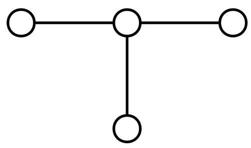
1. (7) Дана система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + 2\frac{\partial v}{\partial x} = f(t,x), 0 \le t \le 1, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 3\frac{\partial u}{\partial x} + 5\frac{\partial v}{\partial x} = g(t,x), 0 \le x \le 1. \end{cases}$$



а) $u(0,x) = \phi_0(x)$, $v(0,x) = \phi_1(x)$, $u(t,0) + v(t,0) = \psi_1(t)$, $u(t,0) - v(t,0) = \psi_2(t)$.
б) $u(0,x) = \phi_0(x)$, $v(0,x) = \phi_1(x)$, $u(t,1) + v(t,1) = \psi(t)$.
в) $u(0,x) = \phi_0(x)$, $v(0,x) = \phi_1(x)$, $u(t,0) = \psi(t)$, $v(t,1) = \psi_2(t)$
г) $u(0,x) = \phi_0(x)$, $v(0,x) = \phi_1(x)$, $u(t,0) = \psi_1(t)$, $u(t,1) = \psi_2(t)$.
Записать систему в инвариантах Римана, предложить разностную схему на шаблонах «левый уголок» и «правый уголок» (см. рис.). Какие из приведённых граничных и начальных условий соответствуют корректной постановке смешанной задачи?

2. (5) Используя предложенный шаблон, построить разностную схему максимального возможного порядка аппроксимации для решения задачи Коши для уравнения переноса.



$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ u(0,x) = \psi_0(x). \end{cases}$$

Исследовать полученную разностную схему на аппроксимацию и устойчивость.

3. (8) Предложить консервативную разностную схему второго порядка аппроксимации по пространству и первого по времени для решения краевой задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = 0, u(0,x) = 5x, u(t,1) = t^2 + 2t + 5, \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = t^2.$$

Исследовать предложенную схему на устойчивость используя принцип замороженных коэффициентов.

4. (6) Уравнение эллиптического типа $\Delta u - k^2 u = f$ решается в области $\Omega = \{-1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}$ с граничными условиями первого рода. Доказать, что система сеточных уравнений, соответствующая схеме «крест», однозначно разрешима при любых граничных условиях и при любой функции в правой части уравнения. Может ли соответствующий разностный оператор иметь положительные собственные числа?

5. (6) Задача Коши для линейного уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$ решается с помощью локально-одномерной схемы:

$$\frac{u_{k\,m\,l}^{n+1} - u_{k\,m\,l}^{n}}{\tau} = D\left(\Lambda_{h_x,\bar{h}_x}\frac{u_{k\,m\,l}^{n+1} + u_{k\,m\,l}^{n}}{2} + \Lambda_{h_y,\bar{h}_y}u_{k\,m\,l}^{n} + \Lambda_{h_z,\bar{h}_z}u_{k\,m\,l}^{n}\right),$$

$$\frac{u_{k\,m\,l}^{n+2} - u_{k\,m\,l}^{n+1}}{\tau} = D\left(\Lambda_{h_x,\bar{h}_x}u_{k\,m\,l}^{n+1} + \Lambda_{h_y,\bar{h}_y}\frac{u_{k\,m\,l}^{n+2} + u_{k\,m\,l}^{n+1}}{2} + \Lambda_{h_z,\bar{h}_z}u_{k\,m\,l}^{n+1}\right),$$

$$\frac{u_{k\,m\,l}^{n+3} - u_{k\,m\,l}^{n+2}}{\tau} = D\left(\Lambda_{h_x,\bar{h}_x}u_{k\,m\,l}^{n+2} + \Lambda_{h_y,\bar{h}_y}u_{k\,m\,l}^{n+2} + \Lambda_{h_z,\bar{h}_z}\frac{u_{k\,m\,l}^{n+3} + u_{k\,m\,l}^{n+2}}{2}\right).$$

Устойчива ли такая схема?