MT 二维有限元实现

钟乙源 175011071

推导二维地下电磁场的控制方程及边界条件，推导不带地形、矩形网格、双二次插值和双线性插值的有限元方程。最后分别用双线性插值单元和双二次插值单元计算层状模型，与解析解对比；用双二次插值单元计算二维模型，将我的程序的计算结果与 MTNet 社区的标准程序“MT2D”计算的准确结果对比，吻合良好。

一、二维大地电磁的控制方程与边界条件

1.1 控制方程

取时间因子为$-\mathrm{i}\omega\mathrm{t}$，则$\frac{\partial}{\partial t}=-i\omega$。麦克斯韦方程如下：

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=i\omega\mu\vec{H} \tag{1}$$

$$\nabla\times\overrightarrow{H}=\vec{j}+\frac{\partial\overrightarrow{D}}{\partial t}=\left(\sigma-i\omega\varepsilon\right)\vec{E} \tag{2}$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0 \tag{3}$$

$$\nabla\cdot\overrightarrow{D}=\rho \tag{4}$$

式中，$\vec{E}$是电场强度，V/m；ω 是圆频率，单位rad/s；μ 是磁导率，单位H/m；$\vec{j}$是电流密度，单位A/m^2；ε 是介电常数，单位F/m；i是虚数单位，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$；σ 是电导率，S/m。

选取如下坐标系：y 方向平行于二维地质体走向，沿走向地质体无变化，x 方向垂直于地质体走向，z 方向垂直向下。

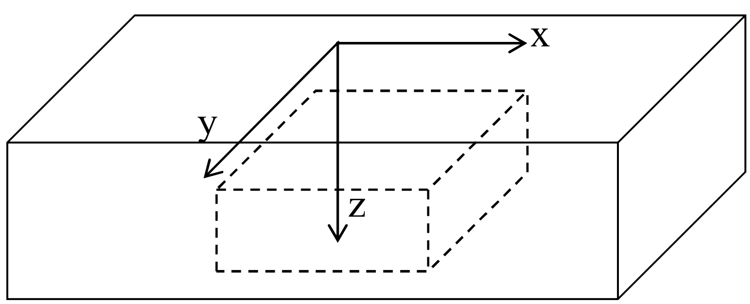

图 1.1 所选坐标系

将(1)在直角坐标下展开得

$$\nabla\times\vec{E}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ E_x & E_y & E_z\end{vmatrix}=\vec{i}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)+\vec{j}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)=i\omega\mu\overrightarrow{H}$$

因为电磁场沿走向无变化，即$\frac{\partial}{\partial y}=0$. 所以有

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial E_y}{\partial z}=i\omega\mu H_x \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z}-\dfrac{\partial E_z}{\partial x}=i\omega\mu H_y \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x}=i\omega\mu H_z \end{cases}$$

同理，将(2)展开得

$$\nabla\times\overrightarrow{H}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}=\vec{i}\left(\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}\right)+\vec{j}\left(\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)=(\sigma-i\omega\varepsilon)\overrightarrow{E}$$

得到

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial H_y}{\partial z}=(\sigma-i\omega\varepsilon)E_x \\ \dfrac{\partial H_x}{\partial z}-\dfrac{\partial H_z}{\partial x}=(\sigma-i\omega\varepsilon)E_y \\ \dfrac{\partial H_y}{\partial x}=(\sigma-i\omega\varepsilon)E_z \end{cases}$$

于是，可以得到一组 TE 波(E_y、H_x、H_z)和一组 TM 波(H_y、E_x、E_z)，如下所示。

TE 波：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H_x}{\partial z}-\dfrac{\partial H_z}{\partial x}=(\sigma-i\omega\varepsilon)E_y \\ -\dfrac{\partial E_y}{\partial z}=i\omega\mu H_x \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x}=i\omega\mu H_z \end{cases} \tag{5}$$

TM 波：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_x}{\partial z}-\dfrac{\partial E_z}{\partial x}=i\omega\mu H_y \\ -\dfrac{\partial H_y}{\partial z}=(\sigma-i\omega\varepsilon)E_x \\ \dfrac{\partial H_y}{\partial x}=(\sigma-i\omega\varepsilon)E_z \end{cases} \tag{6}$$

由（5）（6）变换得

$$\text{TE:}\ \ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial E_y}{\partial x}\right)+(\sigma-i\omega\varepsilon)E_{\mathrm{y}}=0 \tag{7}$$

$$\text{TM:}\quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\sigma-i\omega\varepsilon}\frac{\partial H_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sigma-i\omega\varepsilon}\frac{\partial H_y}{\partial x}\right)+i\omega\mu H_y=0 \tag{8}$$

式（7）、（8）便是大地电磁法二维条件下的控制方程，写成统一格式，

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\tau\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\lambda u=0 \tag{9}$$

或者，

$$\nabla\cdot\left(\tau\nabla u\right)+\lambda u=0 \tag{10}$$

对于 TE 波：$\tau=\dfrac{1}{i\omega\mu}$ ，$\lambda=\sigma-i\omega\varepsilon$；对于 TM 波：$\tau=\dfrac{1}{\sigma-i\omega\varepsilon}$ ，$\lambda=i\omega\mu$。

1.2 边界条件

1) TE 模式

对于 TE 模式，仅研究相互关联的E_y、H_x、H_z，取如下所示的研究区域

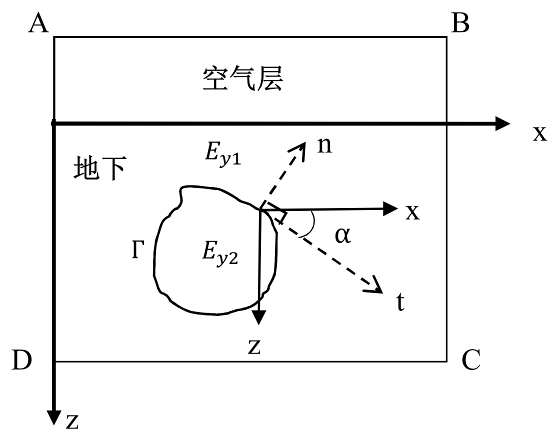

图 1.2.1 TE 波研究区域（t 表示某点切线方向，n 表示法线方向）

上边界 AB：

因为分界面处，电场在空气一侧的变化率与在地下一侧的变化率相差不大，所以地面的电场 E_y 也会受异常场影响，故应取 AB 离地面足够远，使异常场在 AB 上为零，以该处的 u 为 1 单位.

$$E_y|_{AB}=1 \tag{11}$$

下边界 CD:

假设在 CD 一下为均匀电阻率的介质，电磁波在 CD 以下的传播满足：

$$E_y=E_{y_{CD}}e^{-kz}$$

其中，k=$\sqrt{-i\omega\mu\sigma}$, σ 是位于 CD 以下的介质的电阻率. 对 u 求导，$\frac{\partial u}{\partial z}=-ku$, 因此 CD 处的边界条件是

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}E_y + kE_y\right)\bigg|_{CD} = 0 \tag{12}$$

左右边界 AD、BC：

使左右边界离异常体足够远，则

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}\bigg|_{AD、BC} = 0 \tag{13}$$

内边界 Γ：

如图 1.2.1 所示，E_y 平行于介质分界面，由电场切向分量连续可知

$$\left(E_{y1} = E_{y2}\right)\big|_{\Gamma} \tag{14}$$

磁场的切向分量 $H_t = H_x\cos\alpha + H_y\sin\alpha$ ，又由式（4）得

$$\begin{aligned}
H_t &= \left(-\frac{1}{i\omega\mu}\right)\frac{\partial E_y}{\partial z}\cos\alpha + \frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial E_y}{\partial x}\sin\alpha \\
&= \frac{1}{i\omega\mu}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}\sin\alpha - \frac{\partial E_y}{\partial z}\cos\alpha\right) \\
&= \frac{1}{i\omega\mu}\left[\frac{\partial E_y}{\partial x}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\partial E_y}{\partial z}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{i\omega\mu}\nabla E_y\cdot\vec{n} = \frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial E_y}{\partial \mathrm{n}}
\end{aligned} \tag{15}$$

又由磁场的切向分量连续可知$\frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial E_y}{\partial n}$连续，即

$$\tau_1\frac{\partial E_{y1}}{\partial n} = \tau_2\frac{\partial E_{y2}}{\partial n}, \tag{16}$$

n 为如图 1.2.1 所示的外法线方向。

2) TM 模式

对于 TM 波，取如下研究区域

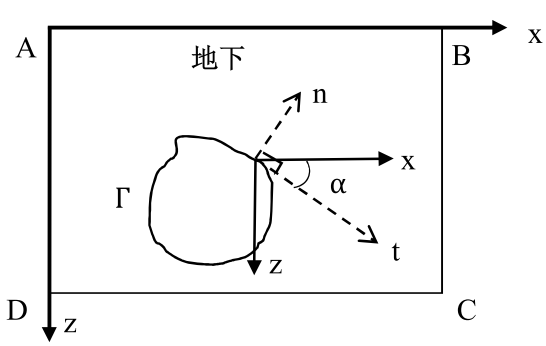

图 1.2.2 TM 波研究区域（t 表示某点切线方向，n 表示法线方向）

AB 边界:

与 TE 模式不同，TM 模式中取地—空界面作为上边界。因为在空气中 σ=0，由（6）式

中 $\frac{\partial H_y}{\partial x}=\left(\sigma-i\omega\varepsilon\right)E_z$ 可知，Hy 随 x 的变化率与 Ez 有关，根据电流的连续性，在地表 Ez=0，所以在地面上 Hy 水平方向变化率为 0，因此地面的 Hy 可视为常数，所以

$$H_y\big|_{AB}=1, \tag{17}$$

AD、BC 边界：

同 TE 波. $\frac{\partial u}{\partial x}=0.$

CD 边界：

同 TE 波. $\frac{\partial u}{\partial z}+ku=0.$

内边界 Γ：

由于磁场切向分量连续，在两种介质分界面上

$$\left(H_{y1}=H_{y2}\right)\big|_{\Gamma} \tag{18}$$

在图 1.2.2 中，电场的切向分量

$$\begin{aligned}E_t=E_x\cos\alpha+E_y\sin\alpha&=\left(-\frac{1}{\sigma-i\omega\varepsilon}\right)\frac{\partial H_y}{\partial z}\cos\alpha+\frac{1}{\sigma-i\omega\varepsilon}\frac{\partial H_y}{\partial x}\sin\alpha\\&=\frac{1}{\sigma-i\omega\varepsilon}\left(\frac{\partial H_y}{\partial x},\frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\cdot\left(\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right),\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right)\\&=\frac{1}{\sigma-i\omega\varepsilon}\frac{\partial H_{\mathrm{y}}}{\partial n}\end{aligned}$$

因为电场切向分量连续，所以

$$\tau_1\frac{\partial}{\partial n}H_{y1}=\tau_2\frac{\partial}{\partial n}H_{y2} \tag{19}$$

综上，边界条件可以写为如下形式

$$\begin{cases}\nabla\cdot\left(\tau\nabla u\right)+\lambda u=0 & \in\Omega\\ u=1 & \in AB\\ \frac{\partial u}{\partial n}=0 & \in AD,\mathrm{BC}\\ \frac{\partial u}{\partial n}+ku=0 & \in CD\\ u_1=u_2 & \in\Gamma\\ \tau_1\frac{\partial u_1}{\partial n}=\tau_2\frac{\partial u_2}{\partial n} & \in\Gamma\end{cases} \tag{20}$$

二、有限元法推导

2.1 伽辽金法

已知$\nabla\cdot(\tau\nabla u)+\lambda u=0$，对方程两边积分有：

$$\int_\Omega\left[\nabla\cdot(\tau\nabla u)+\lambda u\right]\delta u d\Omega=0 \tag{21}$$

其中，u 是对真解的逼近解，δu 是和 u 在同一函数空间的任意函数，即

$u=\sum u_i N_i$ （u_i为待求的离散节点上的场值，N_i为形函数）

$\delta u=\sum a_i N_i$ （a_i是任意的常数）

对区域进行离散后，有

$$\begin{aligned}&\sum_e\int_e \delta u\nabla\cdot(\tau\nabla u)d\Omega_e+\sum_e\int_e\delta u\lambda u d\Omega_e\\&=\sum_e\int_e\tau_e\delta u\nabla^2 u d\Omega_e+\sum_e\int_e\delta u\lambda u d\Omega_e=0\end{aligned} \tag{22}$$

其中，$\sum\limits_{\mathrm{e}}$ 表示对每个单元 e 累加，$\int_{\mathrm{e}}\mathrm{d}\Omega_e$ 表示对单元积分。

对于上式的第一项，由格林公式得

$$\begin{aligned}\sum_e\int_e\tau_e\delta u\nabla^2 u d\Omega_e&=\sum_e\left(\int_e\tau_e\nabla\cdot(\delta u\nabla u)d\Omega_e-\int_e\tau_e\nabla\delta u\cdot\nabla u d\Omega_e\right)\\&=\sum_e\left(\int_e\tau_e\delta u\frac{\partial u}{\partial n}dl-\int_e\tau_e\nabla\delta u\cdot\nabla u d\Omega_e\right)\end{aligned} \tag{23}$$

n 是单元的外法线方向，上式右边第一项线积分仅在下边界 CD 上有值，在其他边界上的积分为零。因为在单元间的边界上$\tau_1\frac{\partial u_1}{\partial n}=\tau_2\frac{\partial u_2}{\partial n}$（这里的 n 是同一方向），而相邻单元的外法线方向相反，因此互相抵消；而在左右边界上$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{n}}=0$,上边界是强制边界，δu=0（我的理解是在强制边界上的点是已知点，没有对应的基函数 N_i），所以上式的线积分相当于在 CD 上进行积分.

将式（23）代入（22），结合 CD 上的边界条件便有

$$\sum_e\left(\int_{CD}-\tau k u\delta u d\Gamma-\tau_e\int_e\nabla\delta u\cdot\nabla u d\Omega_e+\lambda_e\int_e u\delta u d\Omega_e\right)=0 \tag{24}$$

在同一个单元内 λ 和 τ 是常数，不同单元的 λ 和 τ 不同。

用向量形式表示单元插值，$\underset{\sim}{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 表示单元上各节点的值，$\underset{\sim}{N}=(N_1,N_2,\cdots,N_n)$ 表示相应节点的插值函数，则$u=\underset{\sim}{u}^T\underset{\sim}{N}=\underset{\sim}{N}^T\underset{\sim}{u}$.

式（24）的第二项可用插值形函数表示

$$\begin{aligned}\tau_e\int_e\nabla\delta u\cdot\nabla u d\Omega_e&=\tau\int_e\left(\delta\underset{\sim}{u}^{(\mathrm{e})T}\frac{\partial\underset{\sim}{N}^{(\mathrm{e})}}{\partial x}\frac{\partial\underset{\sim}{N}^{(\mathrm{e})T}}{\partial x}\underset{\sim}{u}^{(\mathrm{e})}+\delta\underset{\sim}{u}^{(\mathrm{e})T}\frac{\partial\underset{\sim}{N}^{(\mathrm{e})}}{\partial y}\frac{\partial\underset{\sim}{N}^{(\mathrm{e})T}}{\partial y}\underset{\sim}{u}^{(\mathrm{e})}\right)d\Omega_e\\&=\tau\delta\underset{\sim}{u}^{(\mathrm{e})T}\int_e\left(\frac{\partial\underset{\sim}{N}^{(\mathrm{e})}}{\partial x}\frac{\partial\underset{\sim}{N}^{(\mathrm{e})T}}{\partial x}+\frac{\partial\underset{\sim}{N}^{(\mathrm{e})}}{\partial y}\frac{\partial\underset{\sim}{N}^{(\mathrm{e})T}}{\partial y}\right)d\Omega_e\underset{\sim}{u}^{(\mathrm{e})}\\&=\delta\underset{\sim}{u}^{(\mathrm{e})}K_1^{(\mathrm{e})}\underset{\sim}{u}^{(\mathrm{e})}\end{aligned} \tag{25}$$

式（9）第 3 项

$$\lambda_e \int_e u\delta u d\Omega_e = \delta \underset{\sim}{u}^{(e)\mathrm{T}} \left(\lambda_e \int_e \underset{\sim}{N} \underset{\sim}{N}^T d\Omega_e \right) u^{(e)} = \delta \underset{\sim}{u}^{(e)\mathrm{T}} K_2^{(e)} u^{(e)} \tag{26}$$

式（9）第 1 项

$$\int_{CD} \tau k u \delta u d\Gamma = \delta \underset{\sim}{u}^{(e)T} \left(\int_e k\tau \underset{\sim}{N} \underset{\sim}{N}^T dl \right) \underset{\sim}{u}^{(e)} \Big|_{CD} = \delta \underset{\sim}{u}^{(e)} K_3^{(e)} \underset{\sim}{u}^{(e)} \tag{27}$$

总体合成，得

$$\delta u \left(K_1 - K_2 + K_3 \right) u = 0$$

因为 δu 是任意的，所以必有

$$\left(K_1 - K_2 + K_3 \right) u = 0 \tag{28}$$

2.2 单元插值

（1）双线性插值

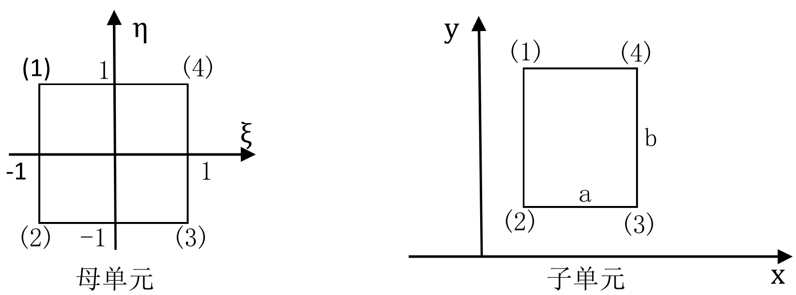

图 2.2.1 等参单元双线性插值

双线性插值等参单元示意图如图 2.2.1。

形函数：

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta), N_2 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta), N_4 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \end{aligned} \tag{29}$$

子单元上四个节点的函数值分别是u_1, u_2, u_3, u_4. 子单元上的 u, x, y 可表示成：

$$\left. \begin{aligned} u &= N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4 \\ x &= N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4 \\ y &= N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4 \end{aligned} \right\} \tag{30}$$

在这里子单元是矩形，可以得到两个单元间的坐标变换关系为

$$x = x_0 + \frac{a}{2}\xi, \; y = y_0 + \frac{b}{2}\eta,$$

$$dx = \frac{a}{2}d\xi, \; dy = \frac{b}{2}d\eta, \; dxdy = \frac{ab}{4}\xi\eta$$

由式（25）可得

$$K_1^{(e)}=\int_e \tau\left(\frac{\partial \underset{\sim}{N}}{\partial x}\frac{\partial \underset{\sim}{N}^T}{\partial x}+\frac{\partial \underset{\sim}{N}}{\partial x}\frac{\partial \underset{\sim}{N}^T}{\partial y}\right)d\Omega_e \tag{31}$$

其中第 i 行、第 j 列的元素为

$$\begin{aligned}k_{ij}&=\int_e \tau\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)d\Omega_e\\&=\int_e \tau\left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dx}\frac{\partial N_j}{\partial x}\frac{d\xi}{dx}+\frac{\partial N_i}{\partial \eta}\frac{d\eta}{dy}\frac{\partial N_j}{\partial \eta}\frac{d\eta}{dy}\right)\frac{ab}{4}d\xi d\eta\end{aligned}$$

所以，

$$K_1^{(e)}=\begin{bmatrix}2\alpha+2\beta & \alpha-2\beta & -\alpha-\beta & -2\alpha+\beta\\ \alpha-2\beta & 2\alpha+2\beta & -2\alpha+\beta & -\alpha-\beta\\ -\alpha-\beta & -2\alpha+\beta & 2\alpha+2\beta & \alpha-2\beta\\ -2\alpha+\beta & -\alpha-\beta & \alpha-2\beta & 2\alpha+2\beta\end{bmatrix} \tag{32}$$

其中，$\alpha=\dfrac{b\tau}{6a}$，$\beta=\dfrac{a\tau}{6b}$　(a、b 为单元边长)

由（26）式可得

$$K_2^{(e)}=\int_e \lambda \underset{\sim}{N}\underset{\sim}{N}^T d\Omega_e\,,$$

其中的元素 $k_{ij}=\int_e \lambda N_i N_j dxdy$.

所以，

$$K_2^{(e)}=\frac{ab\lambda}{36}\begin{bmatrix}4&2&1&1\\2&4&2&1\\1&2&4&2\\2&1&2&4\end{bmatrix} \tag{33}$$

假定单元的$\overline{23}$落在 CD 上，则在 CD 上$\eta=-1$，则$N_1=N_4=0$，$N_2=\frac{1}{2}(1-\xi)$，$N_3=\frac{1}{2}(1+\xi)$。

由式（27）可得，

$$K_3^{(e)}=\int_e k\tau\underset{\sim}{N}\underset{\sim}{N}^T dx=\int_e k\tau\begin{bmatrix}0\\(1-\xi)/2\\(1+\xi)/2\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & (1-\xi)/2 & (1+\xi)/2 & 0\end{bmatrix}\frac{a}{2}d\xi$$

$$K_3^{(e)}=\frac{k\tau a}{6}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&2&1&0\\0&1&2&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} \tag{34}$$

（2）双二次插值

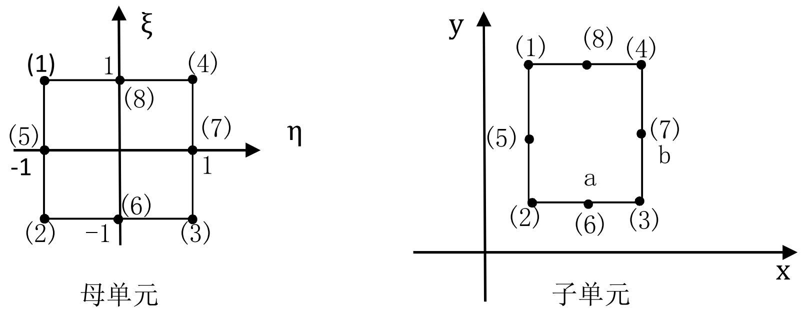

图 2.2.1 等参单元双线性插值

双二次插值每个单元使用用八个节点，如图 2.2.1。形函数如下，

$$
\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1) & N_5 &= \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi) \\
N_2 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1) & N_6 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \\
N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1) & N_7 &= \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi) \\
N_4 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) & N_8 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)
\end{aligned}
\tag{35}
$$

当子单元为矩形同样可以计算得到 x、y 与 ξ、η 的关系，可以发现其关系与双线性单元一样。

$$
\begin{cases}
x = x_0 + \dfrac{a}{2}\xi, dx = \dfrac{a}{2}d\xi \\
y = y_0 + \dfrac{b}{2}\eta, dy = \dfrac{a}{2}d\eta
\end{cases}
$$

与双线性单元相似，利用式（25）（26）（27）计算刚度矩阵。得到，

$$
K_1^{(e)}=\begin{bmatrix}
52(\alpha+\beta) & & & & & & & \\
17\alpha+28\beta & 52(\alpha+\beta) & & & & \text{对} & & \\
23(\alpha+\beta) & 28\alpha+17\beta & 52(\alpha+\beta) & & & & \text{称} & \\
28\alpha+17\beta & 23(\alpha+\beta) & 17\alpha+28\beta & 52(\alpha+\beta) & & & & \\
6\alpha-80\beta & 6\alpha-80\beta & -6\alpha-40\beta & -6\alpha-40\beta & 48\alpha+160\beta & & & \\
-40\alpha-6\beta & -80\alpha+6\beta & -80\alpha+6\beta & -40\alpha-6\beta & 0 & 160\alpha+48\beta & & \\
-6\alpha-40\beta & -6\alpha-40\beta & 6\alpha-80\beta & 6\alpha-80\beta & -48\alpha+80\beta & 0 & 48\alpha+160\beta & \\
-80\alpha+6\beta & -6\alpha-40\beta & -40\alpha-6\beta & -80\alpha+6\beta & 0 & 80\alpha-48\beta & 0 & 160\alpha+48\beta
\end{bmatrix}
\tag{36}
$$

其中$\alpha=\dfrac{\tau}{90}\dfrac{b}{a}$，$\beta=\dfrac{\tau}{90}\dfrac{a}{b}$ 。

$$K_2^{(e)}=\frac{ab\lambda}{180}\begin{bmatrix} 6 & & & & & & & \\ 2 & 6 & & & & \text{对} & & \\ 3 & 2 & 6 & & & & \text{称} & \\ 2 & 3 & 2 & 6 & & & & \\ -6 & -6 & -8 & -8 & 32 & & & \\ -8 & -6 & -6 & -8 & 20 & 32 & & \\ -8 & -8 & -6 & -6 & 16 & 20 & 32 & \\ -6 & -8 & -8 & -6 & 20 & 16 & 20 & 32 \end{bmatrix} \tag{37}$$

$$K_3^{(e)}=\frac{k\tau a}{30}\begin{bmatrix} 0 & & & & & & & \\ 0 & 4 & & & & \text{对} & & \\ 0 & -1 & 4 & & & & \text{称} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 16 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{38}$$

将所有单元刚度矩阵相加，得到总体刚度矩阵，然后将顶面边界条件添加到方程中，变换得到方程右端项，求解方程组（式 28）便可以得到地面的场值。

三、模型计算

使用 Matlab 实现上述的算法，其中方程组求解采用 Bicgstab 迭代法求解器进行求解。计算层状介质模型，将结果与解析解对比。然后用双二次插值的程序计算两个 2 维模型，用国际大地电磁社区 MTNet 社区上的“MT2D”开源程序[1] (贡献者 Zhengyong Ren)进行验证。

3.1 层状模型

分别用有限元法和有限差分法对层状模型进行计算，结果与解析解对比。

$\rho_1=1000\Omega\cdot m$, $\rho_2=20\Omega\cdot m, \rho_3=800\Omega\cdot m$，$h_1=3000m, h_2=1600\mathrm{m}$. 空气中电阻率令其为 $10^{10}\Omega\cdot\mathrm{m}$。

有限元计算的参数如下：

（1）空气层数：10

（2）地下横向单元数：40

（3）地下纵向单元数：30

（4）空气层各单元高度（由上至下）：

DYair=12800,6400,3200,1600,800,600,400,200,50,50.

（5）地下各单元纵向高度：

DY=50, 50, 50, 50, 50, 20, 500, 1100, 500, 200, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 150, 250, 350, 350, 250, 150, 50, 50, 150, 250, 500, 1000, 1500, 2000.

（6）地下各单元横向宽度：

DX=10000, 8000, 6000, 4000, 2000, 1200, 1200, 1200, 1200, 1200, 1000, 1000, 1000, 1000, 1000, 500, 500, 500, 500, 500, 500, 500, 500, 500, 500, 1000, 1000, 1000, 1000, 1000, 1200, 1200, 1200, 1200, 1200, 2000, 4000, 6000, 8000, 10000.

$\rho_1 = 1000\Omega \cdot m,\ \ h_1 = 3000m$

$\rho_2 = 30\Omega \cdot m,\ \ h_2 = 1600m$

$\rho_2 = 800\Omega \cdot m$

图 3.1　3 层模型示意图

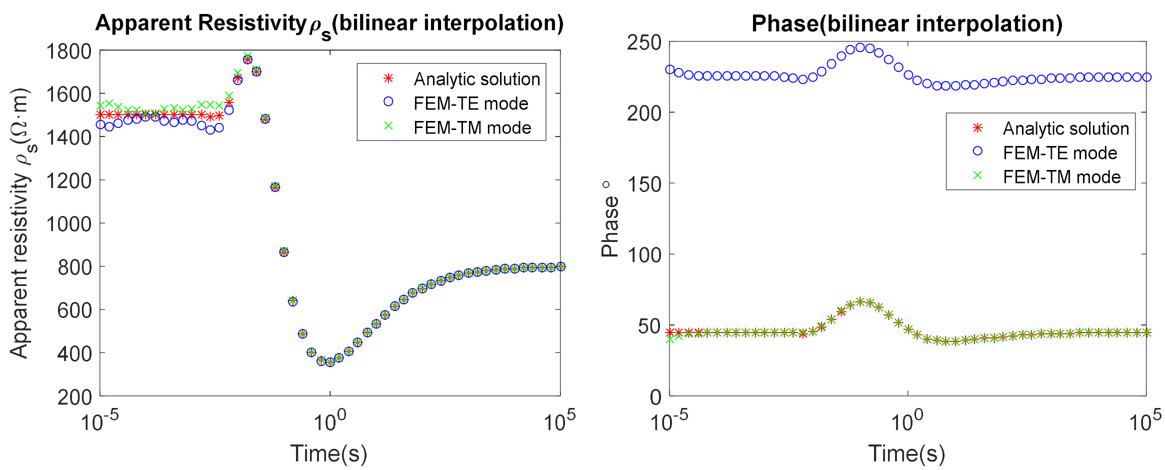

图 3.2 三层模型，双线性插值有限元计算

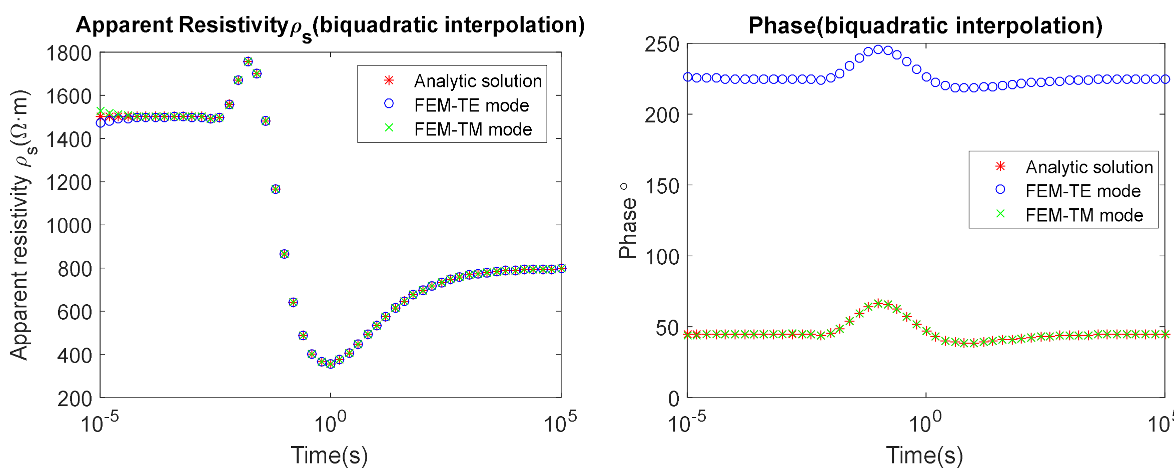

图 3.3 三层模型，双二次插值有限元计算

图 3.3 为双二次插值单元计算结果。对比两种插值方式，显然，双二次插值具有更高的精度，但同样的单元划分时双线性插值的计算量较大。

3.2 二维模型

模型示意图如图 3.4，背景为两层介质，第一层中包裹两个低阻异常体。用矩形网格的双二次插值的有限单元法计算 0.1Hz 的响应，用 MTNet 社区的 Ren[1]的开源程序“MT2D”的计算结果作为参考，验证我的程序的正确性。其中，Ren 的程序“MT2D”采用的是三角形非结构化网格的基于二次场的矢量有限元法，具有较高精度。

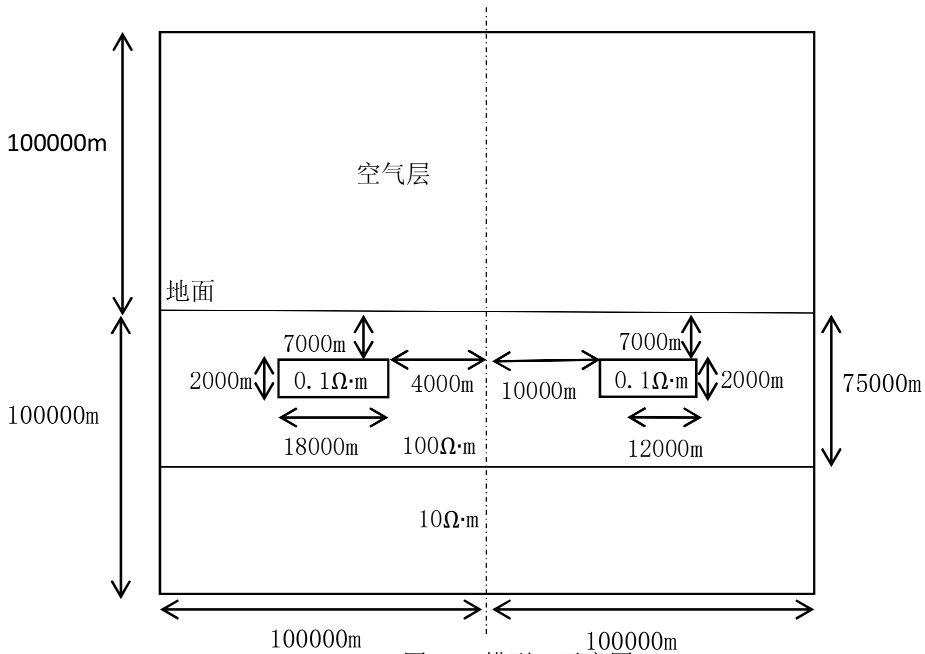

图 3. 4 模型二示意图

计算结果如图 3.5 所示。误差如图 3.6 所示。相对误差小于 0.5%，说明我的程序的计算结果与 Ren 的计算结果吻合良好，验证了我们程序的正确性。

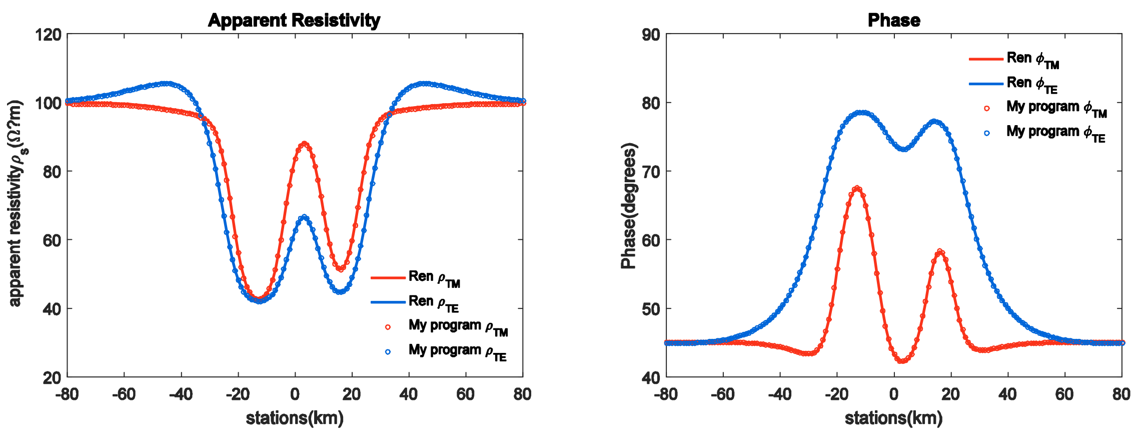

图 3.5 计算结果，左图为视电阻率，右图为相位

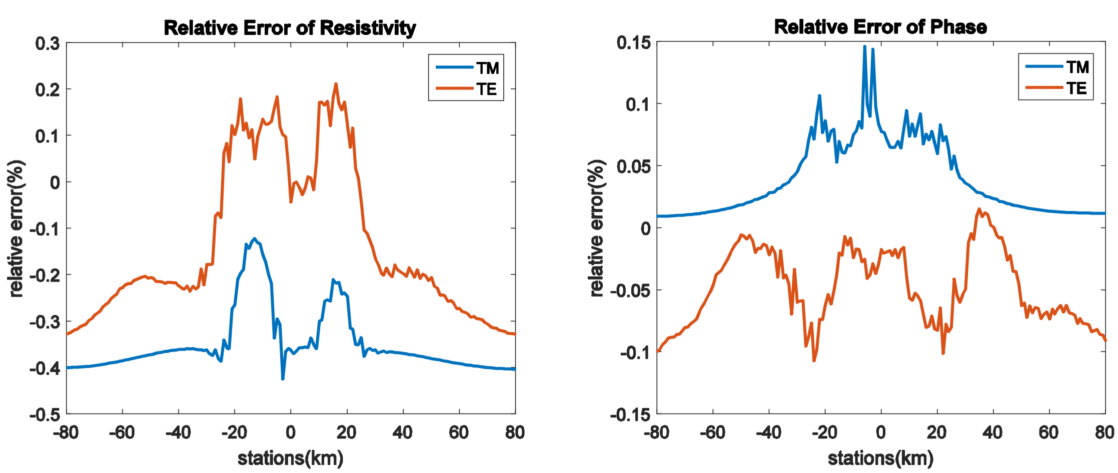

图 3.6 与 Ren 的程序计算结果相比的相对误差

随后用我的程序计算 10^{-3} 到 10^{3}Hz 的 60 个等对数间隔的频率，绘制视电阻率拟断面体如图 3.7 所示，阻抗相位的拟断面图如图 3.8 所示。从 TM 模式计算结果上，可以大致判断出低阻异常体位置，但是存在一定的静态效应的“挂面条”现象；从 TE 模式的拟断面图中，由于受到第二层的影响，图 3.4 的第一层介质的两个异常体虽然有一定的反映，但是不能从图中明显地反映出来。另外，从图中可以看出，TE 模式和 TM 模式的结果对于模型（图 3.4）中的层状构造都可以很好地识别。

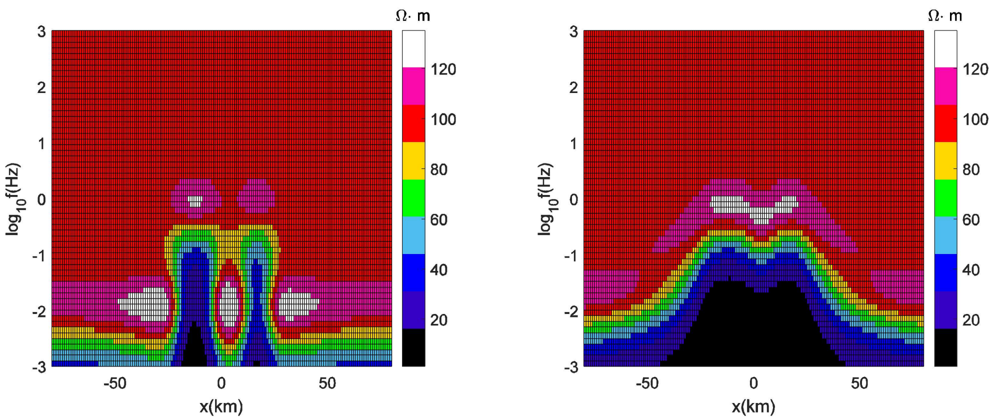

图 3.7 二维模型的卡尼亚视电阻率拟断面图。左图：TM 模式，右图 TE 模式。

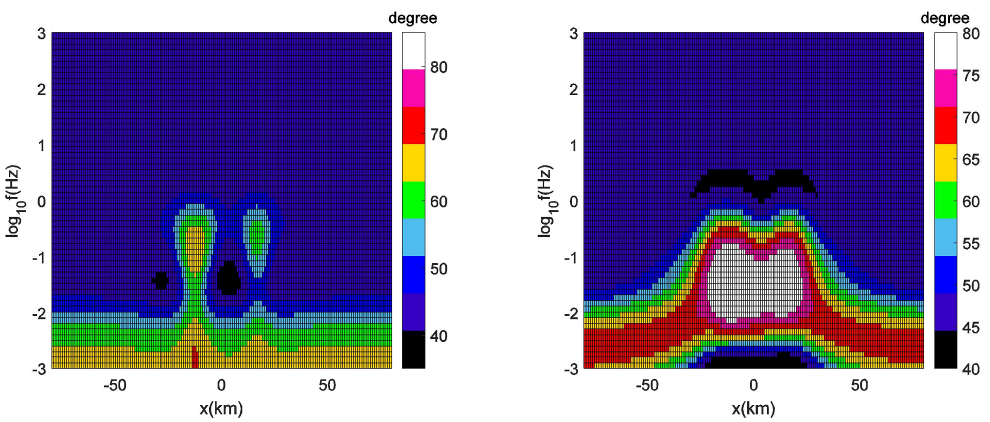

图 3.8 二维模型的阻抗相位拟断面图。左图：TM 模式，右图 TE 模式。

四 算法实现过程的经验与总结

1)二维情况下，电磁波可以解耦为一组 TE 波和一组 TM 波。

2)有限元实现的基本流程为：单元插值→单元积分得到单元刚度矩阵→总体合成，得到总体刚度矩阵→求解方程组。

3)利用双二次插值单元比双线性插值单元精度高。

4)计算结果与网格划分有关，网格划分不合理会造成较大误差。

5)在电阻率变化的地方应加密网格，相邻网格的大小差距不能太大。

6)目标区域使用细网格，周围区域使用粗网格。

7)矩形网格只适用于平坦的边界，对于复杂边界比较难处理。

[1] http://www.complete-mt-solutions.com/mtnet/main/source.html#2d_codes.