Department of Mathematics
University of Utah

一个类 *Signorini* 梯度退化问题的最优正则性

主讲人：**黄忠淦**

合作者：William Feldman

2024 **年** 5 **月**，**于南方科技大学**

邮箱：`zhonggan@math.utah.edu`

目录一

目录二

模型与结果介绍 I

本次报告我们将研究如下形式的方程：

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } B_1^+ := B_1(0) \cap \{x_1 > 0\} \\ \min\{\partial_1 u, |\nabla' u|\} = 0, & \text{on } B_1' := B_1 \cap \{x_1 = 0\}, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\partial_1 = \partial_{x_1}$，$\nabla'$ 代表 B_1' 上的切向梯度。

我们关注函数 u 在 $B_1^+ \sqcup B_1'$ 的紧子区域的正则性 (interior regularity)，因而不预先设定 u 在边界 $B_1(0) \cap \{x_1 \geq 0\}$ 上的值。一般来说，u 是有界函数。

模型与结果介绍 II

我们将证明如下结果。

定理 (二维的最优正则性估计)

在维数 $d=2$ 的时候，如果 u 是上述方程的解，则 $u \in C^{1,1/2}_{\mathrm{loc}}\left(B_1^+ \sqcup B_1'\right)$，并且存在常数 $C>0$ 使得

$$\|u\|_{C^{1,1/2}\left(\overline{B_{1/2}^+}\right)} \leq C\,\|u\|_{L^\infty\left(B_1^+\right)}.$$

这个 $C^{1,1/2}$ 指标是最优的。

模型与结果介绍 III

高维情形下，我们有。

定理 (高维的带条件的最优正则性)

在维数 $d \geq 3$ 的时候，如果 u 是上述方程的解，并且满足一个额外的条件 (A_δ)（之后我们会讨论这个条件；$\delta > 0$ 是该条件中的一个参数），则 $u \in C^{1,1/2}_{\mathrm{loc}}(B_1^+ \sqcup B_1')$，并且存在常数 $C = C(d, \delta) > 0$ 使得

$$\|u\|_{C^{1,1/2}\left(\overline{B_{1/2}^+}\right)} \leq C \|u\|_{L^\infty(B_1^+)}.$$

在条件 (A) 下，这个 $C^{1,1/2}$ 指标是最优的，但是我们没有二维情况下完整的估计。

模型与结果介绍 IV

一般来说，方程(1)不具有比较原理，但是关于它的最小上解，我们有一个额外的**边界极大值原理**来刻画：我们称一个下解 u 满足边界极大值原理如果 u 限制在 B_1' 时满足

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial'\Omega} u,$$

其中 $\Omega \subset B_1'$ 是边界的一个任意子区域，$\partial'\Omega$ 时它的相对边界。

定理 (最小上解的比较原理)

设 u 为问题(1)的下解，v 为上解，并且在 $\partial B_1 \cap \{x_1 \geq 0\}$ 上 $u \leq v$。若是 u 进一步满足上述边界极大值原理，则在整个半球 $\overline{B_1^+}$ 上，$u \leq v$.

背景介绍 I

方程(1)是一个全新的方程，但是它有多个来源，可以从多个角度予以审视。接下来，我们简要地从如下三个方面来阐释它的来源。

1. 它是一个简单的 singular Bernoulli 自由边界问题的渐进展开。这个 singular Bernoulli 问题来自于非均质 Bernoulli 自由边界问题的均质化 [14, 13]；
2. 它是著名的 thin obstacle 问题（也称为 Signorini 问题）的一个自然推广 [3, 4]。Thin obstacle 问题简单来说就是将问题(1)中的边界条件改为

$$\min\{\partial_1 u, \psi - u\} = 0,$$

其中 ψ 称为障碍（obstacle）函数。方程(1)对应于 $\psi = 0$ 的情况的推广；

背景介绍 II

3. 它处在分数阶梯度退化问题的一个临界情况。分数阶退化问题讨论类似于如下方程的问题：

$$|\nabla u|\Delta^s u = f,$$

其中 $\Delta^s = -(-\Delta)^s$ 为分数阶 Laplacian[21, 2]。

Alt-Caffarelli 变分

1981 年, Alt 和 Caffarelli [1] 研究了如下变分问题

$$J(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + Q^2(x) 1_{\{u>0\}} dx, \tag{2}$$

其中 $u \geq 0$ 并且

$$u \in L^1_{loc}(\Omega),\ \nabla u \in L^2(\Omega),\ \text{且} u(x) = h(x),\ x \in \partial\Omega, \tag{3}$$

这里面 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是一个开区域, $h \geq 0$ 是一个固定边界条件，而 $Q^2 > 0$ 是一个有界函数。这个问题被称为**单相** Bernoulli **问题**。

一自由边界问题 I

我们令 $\Omega = B_1$，则若 $u \geq 0$ 为能量极小化子，那么它将满足如下方程：

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in B_1 \cap \{u > 0\} \\ u(x) = h(x), & x \in \partial B_1 \\ |\nabla u|(x) = Q(x), & x \in \partial\{u > 0\} \cap B_1, \end{cases} \tag{4}$$

我们记 $F(u)$ 为自由边界 $\partial\{u > 0\} \cap B_1$。

一自由边界问题 II

函数 u 的图像如下所示。

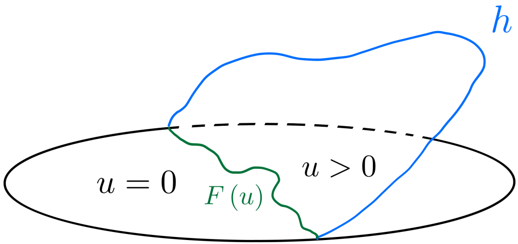


图: u 的图像.

自由边界 $F(u)$ 的 $C^{1,\alpha}$ 正则性 I

在稍晚些的 80 年代，Caffarelli [6, 7, 8] 通过利用粘性解的办法证明，给定足够光滑的 Q（一般假设 $Q\equiv 1$），以及如下任意一个条件，那么自由边界 $F(u)$ 就具有 $C^{1,\alpha}$ 光滑性。

(AS1) $F(u)$ 是 Lipschitz;

(AS2) or u 满足 δ-平坦性条件：对于任给 $\delta>0$, 存在向量 $p\in\mathbb{R}^d$ 使得

$$(p\cdot x-\delta)_+\le u(x)\le (p\cdot x+\delta)_+.$$

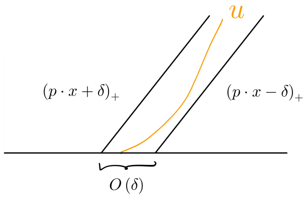


图: u 的图像被两个平坦函数夹住。

De Silva 方法 I

在 2009 年，De Silva [12] 提出了一种不同的方法来研究自由边界问题的正则性。该论文中的一个关键观察是自由边界 $F(u)$ 会“看起来像”是一个 Neumann 问题的解的图像。

形式上，让我们考虑假设(AS2)，其中 $p = e_1$（我们写作 $x_1 = e_1 \cdot x$），并考虑“平坦”解的渐近展开

$$u(x) = (x_1 + \delta w + o(\delta))_+.$$

De Silva 方法 *II*

形式上，让我们考虑假设(AS2)，其中 $p = e_1$（我们写作 $x_1 = e_1 \cdot x$），并考虑“平坦”解的渐近展开

$$u(x) = (x_1 + \delta w + o(\delta))_+.$$

渐近展开中的主导项 w 满足如下 Neumann 问题

$$\begin{cases} \Delta w(x) = 0, & x \in B_1^+ \\ \partial_1 w(x) = 0, & x \in B_1', \end{cases} \tag{5}$$

其中 $\partial_1 = e_1 \cdot \nabla$，$B_1^+ = B_1 \cap \{x_1 > 0\}$，$B_1' = B_1 \cap \{x_1 = 0\}$。

De Silva 方法 III

我们注意到这一步中的主要困难在于建立以下两点：

1. 函数族
$$w_\delta = \frac{u - x_1}{\delta},$$
形式的函数紧致性，提供收敛子列。这一部分是通过建立 w_δ 的 Harnack 不等式来实现的；
2. 证明所有子列的极限都满足上述 Neumann 问题。

单相带障碍的 *Bernoulli* 问题 I

2017 年，Chang-Lara 和 Savin [9] 考虑了一个情景下自由边界与固定障碍物接触的一相 Bernoulli 问题。

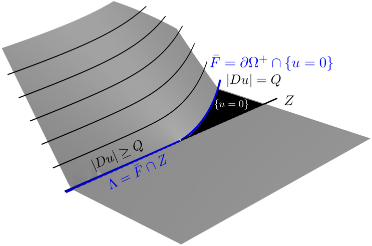


图: u 的图像，其中 $Z = B_1'$ 是障碍物 [9]。

单相带障碍的 *Bernoulli* 问题 *II*

在其最简单的形式中，我们假设 B_1' 是固定障碍物，$u \geq 0$ 满足

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in B_1 \cap \{u > 0\} \\ u(x) = 0, & x \in B_1 \cap \{x_1 < 0\} \\ |\nabla u|(x) = 1, & x \in \partial\{u > 0\} \cap B_1^+ \\ |\nabla u|(x) \geq 1, & x \in \partial\{u > 0\} \cap B_1'. \end{cases} \tag{6}$$

Signorini(Thin Obstacle) 问题 *I*

在进行类似的渐近展开 $u = x_1 + \delta w_\delta \approx x_1 + \delta w$ 后，我们得到极限函数 w 将满足如下 thin obstacle 问题

$$\begin{cases} \Delta w = 0, & 在 B_1^+ \\ w \le 0, & 在 B_1' \\ \partial_1 w \ge 0, & 在 B_1' \\ \partial_1 w = 0, & 在 \{w < \psi\} \cap B_1' \\ w = g, & 在 \partial B_1^+ \cap \{x_1 \ge 0\}, \end{cases} \tag{7}$$

其中 $\max_{\partial' B_1'} g \le 0$。

Signorini(Thin Obstacle) 问题 *II*

B_1' 上的边界条件具有以下等价形式

$$\min\{\partial_1 w(x), \psi(x) - w(x)\} = 0,\ x \in B_1',$$

其中 $\psi \equiv 0$，代表 thin obstacle。

在下一页中，我们将展示新问题 (1)、Signorini 问题和 Neumann 问题在边界条件

$$g(x_1, x_2) = -40x_1^8 + 13x_1 + 3x_2 - 3$$

下的差异。

Signorini(Thin Obstacle) 问题 *III*

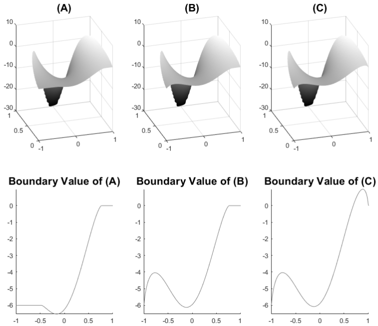


图: 新问题 (1)（的最小上解）、Signorini 问题和 Neumann 问题之间的差异。

Signorini(Thin Obstacle) 问题 *IV*

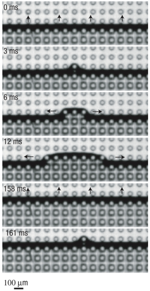
thin obstacle 问题起源于 Signorini 的弹性静力学工作 [23]。它还与在数学金融中应用的分数障碍问题相关 [24]。

Signorini(Thin Obstacle) 问题 *V*

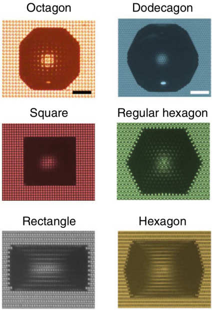
2004 年，Athanasopoulos 和 Caffarelli [3] 开创性地证明了 thin obstacle 问题的解 w 具有 $C^{1,1/2}$ 的最优正则性。利用这一结果，Chang-Lara 和 Savin 能够证明带障碍的单相 Bernoulli 问题的自由边界 $F(u)$ 具有最优正则性 $C^{1,1/2}$。我们关于新问题 (1) 的结果具有和他们相同的指标。

粗糙表面的液滴形状

实验上 [22, 10]，人们关注粗糙表面上的润湿现象，特别是给定特定微结构，液滴边界出现的截面（facet）现象。2019 年，Feldman 和 Smart [14] 通过均匀化方法数学上证明了截面（facet）的存在性。



(a) 润湿动态 [10].



(b) 不同微柱设置下的液体图案 [22].

一个均质化问题 I

现在让我们回顾一下带有 $Q(x)=Q_\varepsilon(x)=Q_1(x/\varepsilon)$ 振荡摩擦系数的单相 Bernoulli 问题。

$$\begin{cases} \Delta u^\varepsilon(x)=0, & x\in B_1\cap\{u>0\} \\ u^\varepsilon(x)\geq 0, & x\in B_1 \\ |\nabla u^\varepsilon|(x)=Q_\varepsilon(x), & x\in\partial\{u>0\}\cap B_1. \end{cases} \tag{8}$$

我们将假设 $Q_1(x+e_i)=Q_1(x)$ 对于任意 $i=1,\cdots,d$ 成立（这个周期性假设是在数学均匀化中的）。

2007 年，Caffarelli-Lee [5] 和 2008 年，Kim [20] 分别在稳态和动态设置中发现了随着 $\varepsilon\to 0^+$ 的均匀化结果。以下定理来自 [13]。

一个均质化问题 II

Theorem

u^ε 有一致的 Lipschitz 估计。且当 $\varepsilon \to 0$ 时，任何收敛子序列 u^ε 的极限 u 满足如下微分包含（differential inclusion）：

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{在} B_1 \cap \{u > 0\} \\ |\nabla u|(x) \in [Q_*(\vec{n}_x), Q^*(\vec{n}_x)] =: I(p), & \text{在} \partial\{u > 0\} \cap B_1, \end{cases} \tag{9}$$

其中 $\vec{n}_x$ 是单位内法线向量场，Q_*, Q^* 分别是 $\partial B_1(0)$ 上的上半连续函数和下半连续函数。

凝滞区间

在每个方向 $p \in \partial B_1(0)$ 中，区间 $[Q_*(p), Q^*(p)]$ 被称为一个**凝滞区间**（pinning interval）。凝滞区间表示液体表面与地面的接触角 θ 的范围，如下图所示。

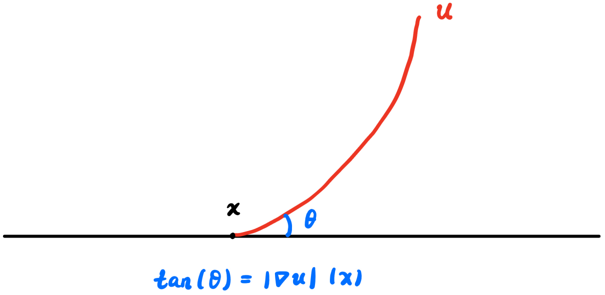


图: 接触角和 u 的梯度之间的关系。

层形微结构 I

Q_*, Q^* 的性质已在 [13] 中得到深入研究。在同一篇论文中，证明了在层状介质 $Q_1 = Q_1(x_1)$ 中，凝滞区间可以明确计算为：

$$I(p) = \begin{cases} \left(\fint_{[0,1)^d} Q^2(x)dx \right)^{1/2}, & p \neq \pm e_1 \\ [\min Q, \max Q], & p = \pm e_1. \end{cases}$$

层形微结构 II

这里左侧是微结构 $Q = Q_1(x_1)$ 的简单情形，右侧是最小和最大的 “摩擦系数” Q_*, Q^* 的函数图。

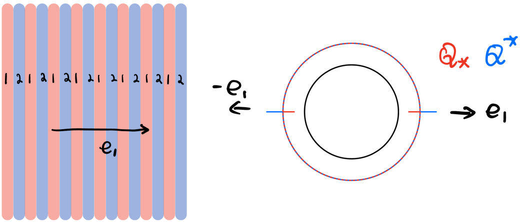


图: 层形结构；Q_*, Q^* 的函数图像。

层形微结构 III

在凸情况下，自由边界基本上与 Chang-Lara 和 Savin 的问题相同 [9]。但在非凸情况下，问题变得更加困难，因为会出现具有任意位置的多个截面（facet）。

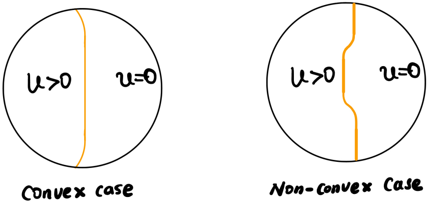


图: 凸或非凸情况下 u 的自由边界。

一个奇异的各向异性的 *Bernoulli* 问题

为了捕捉非凸情况下自由边界的定性特性，我们现在考虑一个略微简化的各向异性问题 $u \geq 0$

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in B_1 \cap \{u > 0\} \\ u(x) = h(x), & x \in \partial B_1 \\ |\nabla u|(x) = Q(\vec{n}_x), & x \in \partial\{u > 0\} \cap B_1, \end{cases} \tag{10}$$

其中对于 $|p| = 1$，我们定义

$$Q(p) = \begin{cases} 1, & p \neq e_1 \\ 2, & p = e_1. \end{cases}$$

奇异 *Bernoulli* 问题的渐进展开 *I*

为了理解非凸情况下 $F(u)$ 的正则性，我们需要考虑

$$w_\delta = \frac{u - p \cdot x}{\delta},$$

的极限，假设 u 满足 δ_0-flatness 假设（事实上我们还需要假设 u 的自由边界是一个函数图像）。

奇异 *Bernoulli* 问题的渐进展开 *II*

（**以下是新结果**）我们证明 w_δ 将收敛到以下形式的问题

$$
\begin{cases}
\Delta w = 0, & \text{在} B_1^+ \\
w = g, & \text{在} \partial B_1 \cap \{x_1 \geq 0\} \\
\min\{\partial_1 w, |\nabla' w|\} = 0, & \text{在} B_1',
\end{cases}
\tag{11}
$$

其中 g 是连续的，$\nabla' = (Id - e_1 \otimes e_1)\nabla$ 是边界 B_1' 上的切向梯度。

各个问题之间的联系

$Q \equiv 1$ 情况下的 Bernoulli 问题 $\xrightarrow{\text{边界附近的渐进展开}}$ Neumann 问题

带障碍的 Bernoulli 问题 $\xrightarrow{\text{边界附近的渐进展开}}$ Signorini 问题

由层状均匀化产生的奇异 Bernoulli 问题 $\xrightarrow{\text{边界附近的渐进展开}}$ 新问题(1)

图: 通过边界附近的平坦渐进展开，Bernoulli 类型的自由边界问题可以和 Signorini 类型的自由边界问题联系在一起。

分数障碍问题

分数障碍问题的形式为

$$\min\{\Delta^s u, \psi - u\} = 0,$$

其中 ψ 是障碍函数。如果我们考虑全局 thin obstacle 问题，那么我们知道

$$\partial_1 u = \Delta^{1/2} u \text{ on } B_1'$$

这等价于在 $s = 1/2$ 的情况下的分数障碍问题。

分数形式的新问题

类似于 thin obstacle 问题，新问题 (1) 可以看作以下形式的分数问题

$$\min\{\Delta^{1/2}u, |\nabla u|\} = 0.$$

这在粘性解意义上包含在所谓的“分数梯度退化问题”类别中

$$|\nabla u|^{\gamma}\Delta^{s}u = f.$$

分数梯度退化问题

当 $s=1$ 时，分数梯度退化问题具有内部 $C^{1,\alpha}$ 正则性结果，这实际上是一个局部问题 [17]。当 $1/2<s<1$ 时，我们也有 $C^{1,\frac{2s-1}{1+\gamma}}$ 正则性 [21, 2]。观察到当我们将 $s\to 1/2^{+}$ 时，这个结果会退化为 Lipschitz 估计。这意味着新问题 (1) 处于这种非局部微扰方法的**临界**情况。

目录一

目录二

上解和下解 I

定义 (上解)

我们称一个下半连续函数 v 为上解，如果对于任意光滑函数 ϕ，使得 $v-\phi$ 在 $x \in B_1^+ \cup B_1'$ 处取得局部极大值（从下方接触 (touching)），我们要么有

$$\Delta\phi(x) \le 0,$$

或者 $x \in B_1'$ 且 $\min\{\partial_1\phi(x), |\nabla'\phi(x)|\} \le 0$。这是条件 "$\min\{\partial_1 v(x), |\nabla' v(x)|\} \le 0$" 的弱形式。

上解和下解 II

定义 (下解)

如果对于任意光滑函数 ϕ，使得 $v-\phi$ 在 $x \in B_1^+ \cup B_1'$ 处取得局部极小值（从上方接触（touching）），我们要么有

$$\Delta\phi(x) \geq 0,$$

或者 $x \in B_1'$ 且 $\min\{\partial_1\phi(x), |\nabla'\phi(x)|\} \geq 0$。注意，这等价于 Neumann 下解条件 “$\partial_1\phi(x) \geq 0$”。

上解和下解 III

定义 (强下解，版本一)

强下解 w 是一个满足如下**边界极大值原理**的下解：

$$\max_{\overline{U}} w = \max_{\partial' U} w, \; U \subset B_1',$$

其中 $\partial' U$ 是 B_1' 中 U 的相对边界。

上解和下解 IV

注意，在下解的情况下，条件 $\min\{\partial_1 w, |\nabla' w|\} \geq 0$ 形式上等价于 $\partial_1 w \geq 0$，这是 Neumann 下解条件。

强下解条件所具有的额外的极大值原理条件，事实上来自于 "$|\nabla' w| \geq 0$" 这个平凡的条件。事实上，对任意小的 $c > 0$，不等式 $|\nabla' \tilde{w}_c| \geq c > 0$ 都将给出 Eikonal 方程的下解，这就自动给出极大值原理。我们所讨论的 "$|\nabla' w| \geq 0$" 正对应于 $c \to 0^+$ 时，极大值原理的保留。

上解和下解 V

定义

如果一个连续函数既是上解又是下解，我们将其称为**粘性解**。

引理

设 v 是一个上解，则 $B_1' = \mathcal{C}_v \sqcup \mathcal{N}_v \sqcup \Gamma_v$，其中 $\mathcal{C}_v$ 和 $\mathcal{N}_v$ 是开集，Γ_v 是两个开集的边界。在 $\mathcal{C}_v$ 的每个分量上，v 是常数。在 $\mathcal{N}_v$ 上，v 是一个 Neumann 上解。

上解和下解 VI

我们已经证明了以下比较原理：

定理

设 v 是一个上解，w 是一个**强**下解，使得 $v \geq w$ 在圆顶形边界 $\partial B_1 \cap \{x_1 \geq 0\}$ 上成立，则我们有 $v \geq w$ 在整个 $\overline{B_1^+}$ 上成立。

例子 I

我们列出如下粘性解的例子。

1. Signorini 问题

$$\begin{cases} \Delta w = 0, & \text{在} B_1^+ \\ w \leq c, & \text{在} B_1' \\ \partial_1 w = 0, & \text{在} \{w < c\} \cap B_1' \\ \partial_1 w \geq 0, & \text{在} B_1', \end{cases} \tag{12}$$

其中 c 是某个常数。$c = 0$ 时，一个简单的例子是 $w(x, y) = -\text{Re}\left((x + iy)^{3/2}\right)$。

例子 II

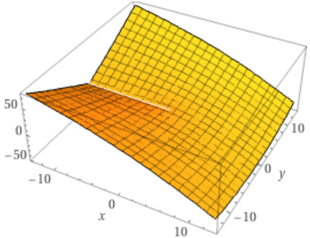


图: $w(x,y) = -\mathrm{Re}\left((x+iy)^{3/2}\right)$ 的函数图像;

例子 III

2. 反符 Signorini 问题

$$\begin{cases} \Delta w^- = 0, & 在 B_1^+ \\ w^- \geq \tilde{c}, & 在 B_1' \\ \partial_1 w^- = 0, & 在 \{w^- > \tilde{c}\} \cap B_1' \\ \partial_1 w^- \geq 0, & 在 B_1', \end{cases} \tag{13}$$

其中 $\tilde{c}$ 是某个常数。一个例子是 $w^-(x,y) = \mathrm{Re}\left((x+iy)^{5/2}\right)$。

例子 IV

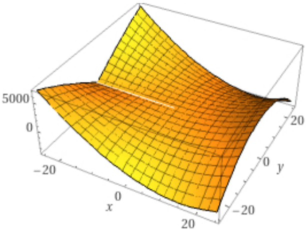


图: $w^{-}(x,y) = \mathrm{Re}\left((x+iy)^{5/2}\right)$ 的函数图像。

Lipschitz 正则性 I

引理

设 v 是 (1) 的粘性解，其边界条件替换为

$$\min\{\partial_1 v, |\nabla v + p'|\} = 0,$$

其中 $p' \cdot e_1 = 0$，那么 v 在 $B_1^+ \cup B_1'$ 中是局部 Lipschitz 的，并且存在一个与 v 和 p' 无关的常数 C，使得

$$\|v\|_{C^{0,1}(B_{1/2}^+)} \le C \|v\|_{L^\infty(B_1^+)} . \tag{14}$$

Lipschitz 正则性 *II*

证明概要.

我们只需证明，存在 $L_1 > 0$ 和 $L_2 > 0$，对于所有 $x_0 \in B^+_{1/2}$，满足

$$\sup_{x,y \in \overline{B^+_1}} v(x) - v(y) - L_1\omega(|x-y|) - L_2|x-x_0|^2 - L_2|y-x_0|^2 \leq 0, \tag{15}$$

其中 $\omega(x) = s - \frac{2}{3}s^{3/2}$ 如果 $s \leq 1$，且 $\omega(s) = \omega(1)$ 如果 $s \geq 1$。剩余的证明依赖于著名的 Jensen-Ishii 引理 [19, 18, 11] □

目录一

目录二

非切收敛 I

从经典的调和分析中，我们可以推导出有界调和函数的边界行为。特别地，我们有以下定理 [16, 15]

定理

假设 h 是在 Lipschitz 和星形域 Ω 中的有界调和函数，则存在 $\partial\Omega$ 上的有界函数 f，使得 h 几乎处处**非切向地**收敛于 f，并且 h 可以从 f 在 $\partial\Omega$ 上的 Poisson 积分中复原。

非切收敛 II

对于问题 (1) 中的有界 Lipschitz 解 u，我们知道 ∇u 是 B_1^+ 上的有界调和函数。我们可以使用非切收敛结果得到

$$\nabla u(x) \to P(y), x \in B_1^+ \to y, \text{对于几乎所有的} y \in B_1'.$$

在 B_1' 上的几乎处处可微性 I

引理

对于问题 (1) 的任意有界粘性解 u，存在全测度子集 $E_u \subset B_1'$，使得 u 在 E_u 中可微（包括非切向方向）。梯度为 $\nabla u(y) = P(y), y \in E_u$，并且

$$\min\{P_1(y), |P'|(y)\} = 0, \forall y \in E = E_u$$

此外，u 在 B_1' 上满足分布意义上的 Neumann 边界条件 $\partial_1 u = P_1$。

在 B_1' 上的几乎处处可微性 II

证明概要.

根据 Lipschitz 估计，以下爆破过程会产生一个解 u_∞:

$$u_r(x) = \frac{u(y+rx)-u(y)}{r} \to u_\infty(x).$$

根据非切收敛性，我们有，对于 x 使得 $x_1 > 0$

$$\begin{aligned}
u_\infty(x) &= \lim_{k\to\infty} \frac{u(y+r_k x)-u(y)}{r_k} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{\int_0^{r_k} \nabla u(y+tx)\cdot x dt}{r_k} \\
&= P(y)\cdot x
\end{aligned}$$

几乎处处可微性的一些推论 I

推论

存在一个全测度集 $E_u \subset B_1'$，使得对于所有 $y \in E_u \cap (\mathcal{N}_u \sqcup \Gamma_u)$，均有 $P_1(y) = 0$。

几乎处处可微性的一些推论 II

推论

对于任意 $p' \in \mathbb{R}^d$，使得 $p' \cdot e_1 = 0$，我们考虑一个粘性解 $w_{p'}$，其中边界条件被替换为

$$\min\{\partial_1 w_{p'}, |\nabla' w_{p'} + p'|\} = 0$$

那么存在一个常数 $L = L\left(d, \|w_{p'}\|_{L^\infty(B_1^+)}\right) > 0$，使得如果 $|p'| > L$，则 $w_{p'}$ 在经典意义上满足 $B'_{1/2}$ 上的零 Neumann 边界条件。

维数为 $d=2$ 的最优正则性 I

考虑 B_1^+ 上的复解析函数

$$F = \partial_2 u + i\partial_1 u,$$

及其平方

$$G := F^2 = |\partial_2 u|^2 - |\partial_1 u|^2 + 2i\partial_1 u \partial_2 u =: U + iV$$

我们首先关注虚部

$$V = 2\partial_1 u \partial_2 u$$

维数为 $d=2$ 的最优正则性 II

由于它是复解析函数的虚部，所以 V 也是调和函数，在 B_1^+ 中也是有界的，这是由于 Lipschitz 估计导致的。此外，通过非切收敛结果，我们知道对于几乎所有的 $y \in B_1'$，

$$V(x) \to 0 \quad \text{as} \quad x \in B_1^+ \to y \tag{16}$$

换句话说，在非切收敛的意义下 $V=0$ 在 B_1' 上。通过应用非切向极限的唯一性，V 在经典意义上满足零 Dirichlet 边界条件，在整个圆盘 B_1 上可以奇扩展为调和函数，我们仍然用 V 表示。

维数为 $d = 2$ 的最优正则性 III

然后，根据经典复分析，V 在整个 B_1 上有一个唯一的调和共轭函数。它必须与上半球中的 U 保持一致，因此我们将其表示为 $\mathcal{U}$，$\mathcal{U}$ 是 U 到 B_1 的调和扩展。注意，V 的奇对称性意味着 $\mathcal{U}$ 关于 $x_1 \mapsto -x_1$ 是偶对称的。另一方面，在 B_1' 上我们有

$$U = |\partial_2 u|^2 - |\partial_1 u|^2, \text{ 且} \partial_2 u \partial_1 u = 0, a.e.$$

这意味着如果我们将 $U = U_+ - U_-$ 分解为正部和负部，那么 $\partial_1 u = \sqrt{U_-}$。通过使用 Neumann 问题的经典正则性理论完成了证明。

目录一

目录二

4 带条件的 Almgren 单调性与平坦性提升

条件 (A_δ)

Almgren 单调性公式

处处可微性

平坦性提升

5 带条件的 $C^{1,1/2}_{\mathrm{loc}}$ 最优估计

爆破

从 L^2 到 L^∞ 的估计

齐次解的分类

6 最小上解与比较原理

边界极大值原理

极小解的比较原理

条件 (A_δ)

在更高维度 $d \geq 3$ 中，为了获得比只是 Lipschitz 正则性更进一步的条件，我们要求 $u(\mathcal{C}_u)$ 满足以下有限性限制。

$u(\mathcal{C}_u)$ 是一个有限集，使得对于任意的 $\mathcal{C}_u$ 的连通分量 I 和 J，满足 $u(I) \neq u(J)$ 的分离条件 $\mathrm{dist}(I, J) \geq \delta$。 (A_δ)

常数 δ 只是在假设 $u(\mathcal{C}_u)$ 有限后的一个量化参数。

还要注意，Signorini 问题对应于 $u(\mathcal{C}_u) = \{0\}$ 且 $u \leq 0$ 的情况。

Almgren 单调性公式 I

通过条件 (A_δ)，我们实际上可以专注于特殊情况 $u(\mathcal{C}_u)=\{0\}$。这是因为我们基本上考虑以下函数族

$$u_t(x)=\frac{u(tx+z)-u(z)}{t},\ t\to 0^+.$$

设 u 是一个粘滞解 (1) 的偶扩展，使得 $u(0)=0$。考虑频率函数

$$N(r)=\frac{r\int_{B_r}|\nabla u|^2}{\int_{\partial B_r}u^2}=\frac{rD(r)}{H(r)}. \tag{17}$$

Almgren 单调性公式 *II*

定理 (Almgren 单调性公式)

对于 $d \geq 2$ 和 u 是 (1) 在 B_1^+ 中的粘性解，在 B_1 中均匀扩展，使得 $u(\mathcal{C}_u \cap B_1) = \{0\}$，且 $0 \in \Gamma_u$。那么

$$N(r) = N(r,u) = \frac{r\int_{B_r} |\nabla u|^2}{\int_{\partial B_r} u^2}$$

在 $0 < r < 1$ 中单调递增。此外，如果对所有 $0 < r < 1$ 有 $N(r) \equiv \kappa$，那么 u 是 B_1 中的 κ-齐次函数。

注意我们有等式 $N(r,u_t) = N(rt,u)$。

处处可微性 I

由于在 $\mathcal{N}_u$ 附近（Neumann 情况）和 $\mathcal{C}_u$ 附近（Dirichlet 情况）的内部正则性，我们只需证明 u 在薄自由边界 Γ_u 处可微。事实上，使用 Almgren 单调性公式，我们有以下引理。

引理 (在薄自由边界处的爆破)

如果 $0 \in \Gamma_u$ 并且 $u(0) = 0$，那么

$$u_t(x) := \frac{u(tx)}{t} \to 0 \quad \text{当 } t \to 0 \text{ 时在 } \overline{B_1^+} \text{ 上一致收敛。}$$

处处可微性 II

证明概述.

我们首先假设存在一个非零的爆破极限 u_0，使得 $u_{t_k} \to u_0$ 一致收敛。根据 Almgren 单调性公式，我们知道 u_0 是齐次的，并且通过 Lipschitz 正则性，它具有形式

$$u_0(r,\theta) = rh(\theta).$$

通过在单位球面上使用特征值分析，我们可以将问题简化为线性函数。通过对线性函数进行分析，结合假设，我们可以将问题进一步简化为 $u_0 = 0$ 的情况。 □

平坦性提升 I

定义" 容许梯度" 的集合

$$\mathcal{T} = \{(q_1, q') \in \mathbb{R}^d \,;\, \min\{q_1, |q'|\} = 0\},$$

对于 $R > 0$，我们定义它的加厚集合

$$\mathcal{T}_R = \{(q_1, q') \in \mathbb{R}^d \,;\, |\min\{q_1, |q'|\}| \le R\}.$$

平坦性提升 II

引理 (平坦性的提升)

假设 u 在 B_1^+ 中是调和的，并且在 B_1' 上满足

$$\min\{\partial_1 u + q_1, |\nabla' u + q'|\} = 0\ ,$$

对于某个 $q = (q_1, q') \in \mathcal{T}_R$ 以及 $\operatorname{osc}_{B_1^+}(u) \le 1$。如果 $v(\mathcal{C}_v \cap B_1)$ 最多只有一个元素，其中 $v := q \cdot x + u$，那么存在一个 $1/2 > \nu = \nu(u) > 0$ 和 $\kappa = \kappa(d, R) > 0$，使得 $\nu \ge \kappa$ 并且

$$\inf_{p \in \mathbb{R}^d} \operatorname{osc}_{B_\nu^+}(u - p \cdot x) \le \frac{1}{2}\nu.$$

平坦性提升 III

引理 (梯度的二分性)

假设 $\operatorname{osc}_{B_1^+}(u) \le 1$ 满足在粘性解意义下

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{在} B_1^+ \\ \min\{\partial_1 u + m_1, |\nabla' u + m'|\} = 0 & \text{在} B_1' \end{cases} \tag{18}$$

其中 $m = (m_1, m') \in \mathbb{R}^d$。那么存在一个常数 $K = K(d) > 0$，使得

$$|\min\{m_1, |m'|\}| \le K.$$

$C^{1,\alpha}$-迭代 I

要证明 u 在 $C^{1,\alpha}_{\mathrm{loc}}(B_1^+ \sqcup B_1')$ 中，我们只需要证明 u 在 0 处是 $C^{1,\alpha}$ 的，即存在 $C = C(d) > 0$ 和 $p \in \mathbb{R}^d$，使得

$$\operatorname{osc}_{B_r^+}(u - p \cdot x) \le Cr^{1+\alpha}, \; r \in (0,1). \tag{19}$$

要证明 (19)，只需要找到一个序列 (q_k, r_k) 使得 $q_k \in \mathbb{R}^d$，并且

$$\operatorname{osc}_{B_{r_k}^+}(u - q_k \cdot x) \le r_k^{1+\alpha} \text{ 对所有 } k \in \mathbb{N} \text{ 成立} \tag{20}$$

其中 $r_k \to 0$ 当 $k \to \infty$，且对于所有 k，$\frac{1}{2} \ge \frac{r_{k+1}}{r_k} \ge \kappa(d) > 0$，其中 $\kappa(d) > 0$。如果这样做了，那么 (19) 中的常数 C 将取形为 $\kappa^{-(1+\alpha)}$。

$C^{1,\alpha}$-迭代 II

我们从 $u_0 = u$ 开始，使得 $\operatorname{osc}_{B_1^+}(u_0) \leq 1$ 和 $q_0 = 0$。我们将 $R = K(d)$ 固定为引理 18 中的常数。通过将引理 17 应用于 u_0，我们得到 $1/2 > \nu_1 \geq \kappa(d, K(d)) =: \kappa(d) > 0$ 和 $p_1 \in \mathbb{R}^d$，使得

$$\operatorname{osc}_{B_{\nu_1}^+}(u - p_1 \cdot x) \leq \frac{1}{2}\nu_1.$$

$C^{1,\alpha}$-迭代 III

我们现在选择一个足够小的 $\alpha > 0$，使得 $\kappa^\alpha > 1/2$。假设对于 $k \geq 1$，我们已经构造了 $q_k \in \mathbb{R}^d$（注意我们已经有 $q_1 = p_1$ 和 $r_1 = v_1$）使得 (20) 成立。然后我们考虑对于 $x \in B_1^+ \sqcup B_1'$

$$u_k(x) = r_k^{-1-\alpha}\left(u(r_k x) - q_k \cdot (r_k x)\right).$$

注意到 $\operatorname{osc}_{B_1^+}(u_k) \leq 1$，并且 u_k 满足 (1)，边界条件被替换为

$$\min\{\partial_1 u_k + r_k^{-\alpha} q_{k,1}, |\nabla' u_k + r_k^{-\alpha} q_k'|\} = 0.$$

$C^{1,\alpha}$-迭代 IV

通过引理 18，我们得到 $r_k^{-\alpha} q_k \in \mathcal{T}_K$，然后我们可以将引理 17 应用于 u_k，并得到 $1/2 > \nu_{k+1} \geq \kappa$，$p_{k+1} \in \mathbb{R}^d$，使得

$$\operatorname{osc}_{B_{\nu_{k+1}}} (u_k - p_{k+1} \cdot x) \leq \frac{1}{2} \nu_{k+1}.$$

设置 $r_{k+1} = r_k \nu_{k+1}$ 和 $q_{k+1} = q_k + r_k^\alpha p_{k+1}$，我们将得到

$$\operatorname{osc}_{B^+_{r_{k+1}}} (u - q_{k+1} \cdot x) \leq r_k^{1+\alpha} \frac{1}{2} \nu_{k+1} \leq r_{k+1}^{1+\alpha}.$$

目录一

目录二

爆破序列

为了获得最优的正则性，我们希望考虑以下形式的函数

$$w_t(x) = \frac{u(tx)}{\left(\frac{1}{t^{d-1}}\int_{\partial B_t} u^2\right)^{1/2}},$$

其中 u 均匀地延伸到整个球 B_1，$u(0)=0$，$tx \in B_1$。

从 L^2 到 L^∞ 估计 I

利用 $u(\mathcal{C}_u)$ 是有限集的假设，我们知道当 $0 < t < \delta$ 时，w_t 会满足 $w_t(\mathcal{C}_{w_t}) = \{0\}$。在这种情况下，$w_t$ 不仅是方程 (1) 的解，还满足边界条件

$$\min\{\partial_1 w, |w|\} = 0. \tag{21}$$

注意，这是 thin obstacle 问题的无符号推广

$$\min\{\partial_1 w, -w\} = 0.$$

从 L^2 到 L^∞ 估计 II

引理

设 w 是方程 (1) 的连续粘性解，同时满足边界条件 (21)，那么存在常数 $C = C(d) > 0$ 使得

$$\|w\|_{L^\infty(B^+_{1/2})} \leq C \|w\|_{L^2(\partial B_1 \cap \{x_1 \geq 0\})} . \tag{22}$$

证明这个引理，只需要考虑在边界 $\partial B_1 \cap \{x_1 \geq 0\}$ 上的分解 $w = w_+ - w_-$，并解出满足 Neumann 边界条件的调和函数 v_+, v_-，以及满足在 $\partial B_1 \cap \{x_1 \geq 0\}$ 上 Dirichlet 边界条件为 $v_+ = w_+, v_- = w_-$ 的调和函数。利用经典的比较原理，我们有

$$-v_- \leq w \leq v_+.$$

从 L^2 到 L^∞ 估计 III

使用相同的证明方法，我们知道对于某个常数 $C > 0$ 和所有 $r > 0$，

$$\|w\|_{L^\infty(B^+_{r/2})} \le Cr^{-d/2} \|w\|_{L^2(B^+_r)},$$

其中 C 与 r 无关。

Almgren 单调性

利用 L^2 到 L^∞ 估计，我们知道 w_t 在 $B_{1/2}$ 中是一致有界的，因此在 $C^1(\overline{B_{1/4}})$ 中是紧的。

我们可以使用 Almgren 单调性公式对 w_t 进行分析，从而得到

$$N(r, w_t) = N(tr, w_1).$$

分析这个量，我们知道 $w_{t_k} \to w_0$（通过取子序列），其中 w_0 是某个 κ-齐次解，$\kappa = N(0^+, u)$。

2-D 齐次解的分类

κ	$w_\kappa(x_1, x_2)$	$\mathcal{C}_{w_\kappa}$	Γ_{w_κ}	$\mathcal{N}_{w_\kappa}$
1	$\lvert x_1\rvert$	B_1'	$\emptyset$	$\emptyset$
$2k+1$	$\mathrm{Im}\left((x_2 + i\lvert x_1\rvert)^\kappa\right)$	$B_1' \setminus \{0\}$	$\{0\}$	$\emptyset$
$\frac{2k-1}{2}$	$\mathrm{Im}\left((x_2 + i\lvert x_1\rvert)^\kappa\right)$	$\{0\} \times (0,1)$	$\{0\}$	$\{0\} \times (-1,0)$
k	$\pm\mathrm{Re}\left((x_2 + i\lvert x_1\rvert)^\kappa\right)$	$\emptyset$	$\emptyset$	B_1'

表: 维度 $d = 2$ 中方程 (21) 的 κ-齐次解的分类。

目录一

目录二

边界极大值原理 I

定义 (强下解，版本二)

如果一个上半连续函数 u 是 (1) 的下解，并且没有形式为 $\varphi(x_1, x') \equiv \psi(x_1)$ 的 C^1 边界函数，它在某个 $x_0 \in B_1'$ 处从上方接触 u，且在 $\overline{\Omega_h \setminus \Omega} \cap \overline{B_1^+}$ 中 $\varphi > u$，其中 Ω 是包含 x_0 的任意开区域，$\Omega_h = \bigcup_{y \in \Omega} B_h(y)$ 对某个小 $h > 0$ 成立，使得 $\overline{\Omega_h} \cap \overline{B_1^+} \subset\subset B_1^+ \cup B_1'$，那么 u 被称为 (1) 的强下解。

边界极大值原理 II

引理 (边界极大值原理)

设 u 是如上定义的强下解，那么对于任意子域 $\Omega \subset\subset B_1'$，我们有

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = \max_{x\in\partial'\Omega} u(x), \tag{23}$$

其中 $\partial'\Omega$ 定义为在 $\{x_1 = 0\}$ 中的 B_1' 的相对边界。

比较原理 I

定理

设 v 是一个上解，u 是一个满足边界极大值原理的下解（强下解）。如果在边界 $\partial B_1 \cap \{x_1 \geq 0\}$ 上 $v \geq u$，那么我们有 $v \geq u$ 在整个 $\overline{B_1^+}$ 上成立。

比较原理 II

如果在 $\partial B_1 \cap \{x_1 \geq 0\}$ 上它们具有相同的边界值，那么以下三种类型的解是等价的：

1. 奇异伯努利问题最小上解在自由边界附近的渐近展开，它将满足额外的强下解条件，如定义 20 中所述（也即是版本二的强下解条件）；
2. (1) 的粘性解，满足额外的边界极大值原理（也即是版本一的强下解），如引理 23 中所述;
3. (1) 的最小上解。

致谢

谢谢！

参考文献 I

[1] H. W. Alt and L. A. Caffarelli. “Existence and regularity for a minimum problem with free boundary”. In: Journal für die reine und angewandte Mathematik 325 (1981), pp. 105–144. URL: http://eudml.org/doc/152360.

[2] Damião J. Araújo, Disson dos Prazeres, and Erwin Topp. On fractional quasilinear equations with elliptic degeneracy. 2023. arXiv: 2306.15452 [math.AP].

[3] I. Athanasopoulos and L. A. Caffarelli. “Optimal Regularity of Lower-Dimensional Obstacle Problems”. In: Journal of Mathematical Sciences 132 (2006), pp. 274–284. DOI: 10.1007/s10958-005-0496-1. URL: https://doi.org/10.1007/s10958-005-0496-1.

参考文献 II

[4] Ioannis Athanasopoulos, Luis A. Caffarelli, and Sandro Salsa. "The Structure of the Free Boundary for Lower Dimensional Obstacle Problems". In: American Journal of Mathematics 130.2 (2008), pp. 485–498. URL: http://www.jstor.org/stable/40068136.

[5] L. Caffarelli and K. Lee. "Homogenization of Oscillating Free Boundaries: The Elliptic Case". In: Communications in Partial Differential Equations 32.1 (2007), pp. 149–162. DOI: 10.1080/03605300600635038.

[6] Luis Caffarelli. "A Harnack Inequality Approach to the Regularity of Free Boundaries. Part I: Lipschitz Free Boundaries are $C^{1,\alpha}$". In: Revista Matemática Iberoamericana 3.2 (1987), pp. 139–162. ISSN: 0213-2230. DOI: 10.4171/RMI/47.

参考文献 III

[7] Luis A. Caffarelli. “A Harnack inequality approach to the regularity of free boundaries. II: Flat free boundaries are Lipschitz”. English. In: Commun. Pure Appl. Math. 42.1 (1989), pp. 55–78. ISSN: 0010-3640. DOI: 10.1002/cpa.3160420105.

[8] Luis A. Caffarelli. “A Harnack inequality approach to the regularity of free boundaries. Part III: Existence theory, compactness, and dependence on X”. In: Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze 15.4 (1988), pp. 583–602. URL: http://eudml.org/doc/84044.

[9] Hector Chang-Lara and Ovidiu Savin. Boundary Regularity for the Free Boundary in the One-phase Problem. 2017. arXiv: 1709.03371 [math.AP].

参考文献 *IV*

[10] Laurent Courbin et al. “Imbibition by polygonal spreading on microdecorated surfaces”. In: Nature Materials 6.9 (2007), pp. 661–664. ISSN: 1476-4660. DOI: 10.1038/nmat1978. URL: https://doi.org/10.1038/nmat1978.

[11] Michael G. Crandall, Hitoshi Ishii, and Pierre-Louis Lions. “User’s guide to viscosity solutions of second order partial differential equations”. In: Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 27.1 (1992), pp. 1–67. ISSN: 0273-0979,1088-9485. DOI: 10.1090/S0273-0979-1992-00266-5. URL: https://doi.org/10.1090/S0273-0979-1992-00266-5.

[12] Daniela De Silva. “Free boundary regularity for a problem with right hand side”. In: Interfaces and Free Boundaries 13.2 (2011), pp. 223–238.

参考文献 V

[13] W. M. Feldman. "Limit Shapes of Local Minimizers for the Alt–Caffarelli Energy Functional in Inhomogeneous Media". In: Archive for Rational Mechanics and Analysis 240 (2021), pp. 1255–1322. DOI: 10.1007/s00205-021-01635-6. URL: https://doi.org/10.1007/s00205-021-01635-6.

[14] W. M. Feldman and C. K. Smart. "A Free Boundary Problem with Facets". In: Archive for Rational Mechanics and Analysis 232 (2019), pp. 389–435. DOI: 10.1007/s00205-018-1323-4. URL: https://doi.org/10.1007/s00205-018-1323-4.

[15] John B. Garnett and Donald E. Marshall. Harmonic Measure. Cambridge University Press, 2005.

参考文献 VI

[16] Richard A. Hunt and Richard L. Wheeden. "On the Boundary Values of Harmonic Functions". In: Transactions of the American Mathematical Society 132.2 (1968), pp. 307–322. DOI: 10.2307/1994842. URL: https://www.jstor.org/stable/1994842.

[17] C. Imbert and L. Silvestre. "$C^{1,\alpha}$ regularity of solutions of some degenerate fully non-linear elliptic equations". In: Advances in Mathematics 233.1 (2013), pp. 196–206. ISSN: 0001-8708. DOI: 10.1016/j.aim.2012.07.033. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S000187081200374X.

参考文献 VII

[18] H Ishii and P.L Lions. “Viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic partial differential equations”. In: Journal of Differential Equations 83.1 (1990), pp. 26–78. ISSN: 0022-0396. DOI: 10.1016/0022-0396(90)90068-Z. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002203969090068Z.

[19] Ronald Jensen. “The maximum principle for viscosity solutions of fully nonlinear second order partial differential equations”. In: Archive for Rational Mechanics and Analysis 101 (1988), pp. 1–27. DOI: 10.1007/BF00281780. URL: https://doi.org/10.1007/BF00281780.

[20] Inwon C. Kim. “Homogenization of a Model Problem on Contact Angle Dynamics”. In: Communications in Partial Differential Equations 33.7 (2008), pp. 1235–1271. DOI: 10.1080/03605300701518273.

参考文献 VIII

[21] Disson dos Prazeres and Erwin Topp. "Interior regularity results for fractional elliptic equations that degenerate with the gradient". In: Journal of Differential Equations 300 (2021), pp. 814–829. ISSN: 0022-0396. DOI: 10.1016/j.jde.2021.08.013. URL: https://doi.org/10.1016/j.jde.2021.08.013.

[22] R. Raj et al. "High-resolution liquid patterns via three-dimensional droplet shape control". In: Nature Communications 5 (2014), p. 4975. DOI: 10.1038/ncomms5975. URL: https://doi.org/10.1038/ncomms5975.

[23] Antonio Signorini. "Questioni di elasticità non linearizzata e semilinearizzata". Italian. In: Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni 18.5 (1959), pp. 95–139.

参考文献 IX

[24] Luis Silvestre. “Regularity of the obstacle problem for a fractional power of the Laplace operator”. In: Communications on Pure and Applied Mathematics 60 (2007), pp. 67–112. DOI: 10.1002/cpa.20153.