

# 归结原理

---

# 目录

## 1. 理论课内容回顾

1.1 基本概念

1.2 命题逻辑归结算法

1.3 MGU（最一般合一）算法

1.4 一阶逻辑的归结算法

## 2. 实验任务

用归结算法求解逻辑推理问题（如AIpine Club问题）

# 1.1 基本概念

## □ 以Aipine Club问题为例

- Tony, Mike, and John belong to the Alpine Club.
- Every member of the Alpine Club who is not a skier is a mountain climber.
- Mountain climbers do not like rain, and anyone who does not like snow is not a skier.
- Mike dislikes whatever Tony likes, and likes whatever Tony dislikes.
- Tony likes rain and snow.
- Is there a member of the Alpine Club who is a mountain climber but not a skier?

# 1.1 基本概念

## □ Aipine Club问题形式化为

### ■ 已知条件（知识库）

#### □ Facts

■  $A(\text{tony})$

■  $A(\text{mike})$

■  $A(\text{john})$

■  $L(\text{tony}, \text{rain})$

■  $L(\text{tony}, \text{snow})$

#### □ Rules

■  $\forall x(A(x) \wedge \neg S(x)) \rightarrow C(x)$

■  $\forall x(C(x) \rightarrow \neg L(x, \text{rain}))$

■  $\forall x(\neg L(x, \text{snow}) \rightarrow \neg S(x))$

■  $\forall x(L(\text{tony}, x) \rightarrow \neg L(\text{mike}, x))$

■  $\forall x(\neg L(\text{tony}, x) \rightarrow L(\text{mike}, x))$

### ■ 提问

□  $\exists x(A(x) \wedge C(x) \wedge \neg S(x))$ 是否成立

# 1.1 基本概念

## □ 相关概念

- 常量 (constant) : 任何类型的实体
  - 俱乐部成员: tony, mike, john
  - 天气类型: rain, snow
- 变量 (variable) : 如x, y这类未知量
- 项 (term) : 可以理解为谓词/变量的参数项, 由递归定义
  - 变量是项 (可以看成是0元函数)
  - $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ 是项,  $f$ 是 $n$ 元函数, 则 $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 也是项

Tips: 一阶逻辑中谓词不是项, 即不能作为函数/谓词的参数, 也就是不存在 $f(P(x))$ 这种复合方式, 但是二阶逻辑中是可以的

# 1.1 基本概念

## □ 相关概念

- 谓词 (predicate) : 谓词是对其参数 (也叫做项, term) 的
  - 零元谓词: 退化为命题
  - 单元谓词 (unary predicate) : 只有一个参数, 表示参数具备某种属性, 如  $A(x)$  表示  $x$  属于 Aipine 俱乐部
  - 多元谓词: 有多个参数, 表示参数之间的关系, 如  $L(x,y)$  表示  $x$  和  $y$  具有喜欢关系, 即  $x$  喜欢  $y$

# 1.1 基本概念

## □ 相关概念

■ 事实 (fact) : 谓词中变量实例化后得到事实

□  $S(\text{tony})$ : tony是skier

□  $L(\text{tony}, \text{rain})$ : tony喜欢下雨天

■ 规则 (rule) : 也叫做公式, 通过递归定义

□  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ 是项,  $P$ 是 $n$ 元谓词, 则 $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 是原子公式

□  $t_1, t_2$ 是项, 那么 $t_1 = t_2$ 是原子公式

□ 如果 $\alpha$ 和 $\beta$ 是公式, 那么 $\neg\alpha, \alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta, \exists\alpha, \forall\alpha$ 都是公式

Tips: 由于  $(\alpha \rightarrow \beta)$  等价于  $(\neg\alpha \vee \beta)$ ,  $(\alpha \leftrightarrow \beta)$  等价于  $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$ , 所以在递归定义中我们没有加入 $\rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$ , 它们可以被已有符号替代

# 1.1 基本概念

## □ 相关概念

### ■ 可满足性：

- 以Aipine俱乐部为例， $\exists x(A(x) \wedge C(x) \wedge \neg S(x))$ 是否成立就是在问，是否存在一组实例化（一组赋值），使得 $A(x) \wedge C(x) \wedge \neg S(x)$ 成立，这就是一个可满足性问题。对于该可满足性问题，只要能够找到一组赋值（在这里对应 $\{x\}$ 的赋值），使得 $A(x) \wedge C(x) \wedge \neg S(x)$ 成立，那么“ $A(x) \wedge C(x) \wedge \neg S(x)$ ”是可满足的

### ■ 逻辑蕴含和逻辑推论：

- 逻辑蕴含 $S \models \alpha$ 指对于任意变量赋值，如果 $S$ 正确，则 $\alpha$ 也正确
- 逻辑推论 $S \vdash \alpha$ 指存在一条推理路径，从 $S$ 出发，推导证明 $\alpha$



# 1.2 命题逻辑归结算法

## □ 定理:

- $S \models ()$  当且仅当  $S \models ()$ ,  $S \models ()$  当且仅当  $S$  是不可满足的
- 通过该定理, 我们可得  $KB \models \alpha$  当且仅当  $KB \wedge \neg \alpha$  不可满足, 于是可以通过反证法证明  $KB \models \alpha$

## □ 归结算法:

- 将 $\alpha$ 取否定, 加入到KB当中
- 将更新的KB转换为clausal form得到S
- 反复调用单步归结
  - 如果得到空子句, 即 $S \models ()$ , 说明 $KB \wedge \neg \alpha$  不可满足, 算法终止, 可得 $KB \models \alpha$
  - 如果一直归结直到不产生新的子句, 在这个过程中没有得到空子句, 则 $KB \models \alpha$ 不成立

# 1.2 命题逻辑归结算法

## □ 归结算法：

### ■ Clausal form (便于计算机处理的形式)

- 每一个子句对应一个元组，元组每一个元素是一个原子公式/原子公式的否定，元素之间的关系是析取关系，表示只要一个原子成立，该子句成立

- 如子句  $\neg \text{child} \vee \neg \text{male} \vee \text{boy}$  对应数据结构  $(\neg \text{child}, \neg \text{male}, \text{boy})$ ，空子句  $()$  对应 False

- 元组的集合组成子句集S，子句集中每个句子之间是合取关系，表示每一个子句都应该被满足

- 由于本次实验重点是归结算法，所以问题输入是已经转换过的clausal form，关于具体转换方式感兴趣的同学可以参考课件

### ■ 单步归结

- 从两个子句中分别寻找相同的原子，及其对应的原子否定
- 去掉该原子并将两个子句合为一个，加入到S子句集合中
- 例如  $(\neg \text{child}, \neg \text{female}, \text{girl})$  和  $(\text{child})$  合并为  $(\neg \text{female}, \text{girl})$

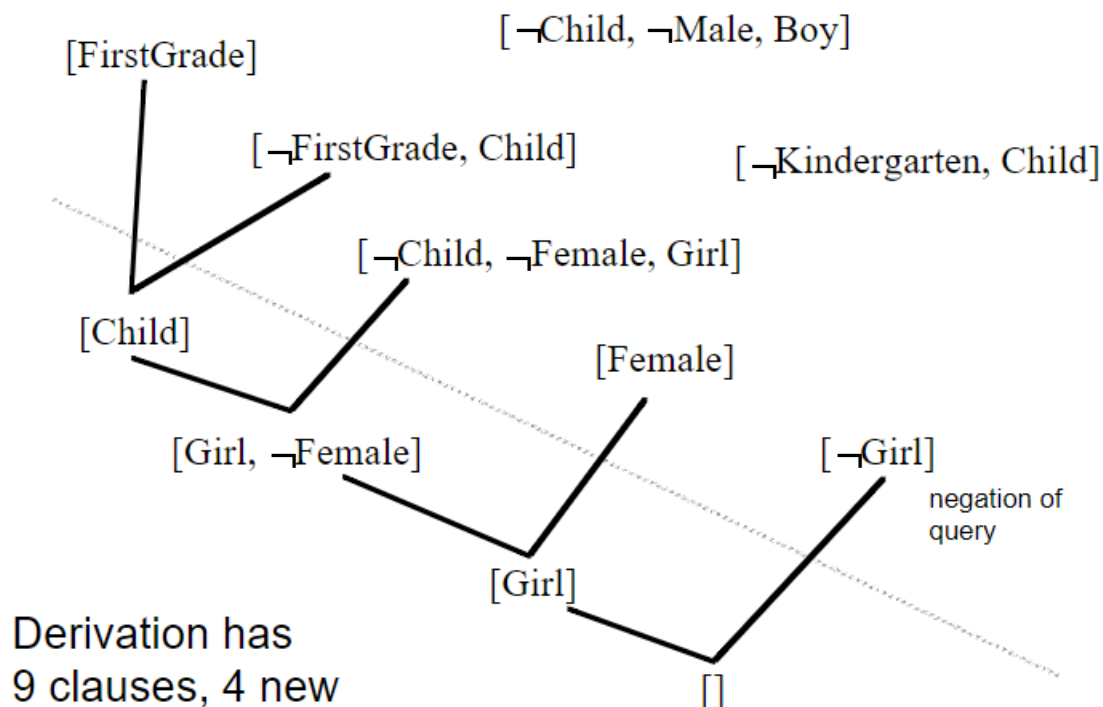
# 1.2 命题逻辑归结算法

## □ 例子

### Clausal form

FirstGrade	
$\neg$ FirstGrade	Child
$\neg$ Child	$\neg$ Male Boy
$\neg$ Kindergarten	Child
$\neg$ Child	$\neg$ Female Girl
Female	

Show that  $KB \models \text{Girl}$



# 1.3 Most general unifier算法

## □ 最一般合一算法：

### ■ 合一（unifier）：

- 通过变量替换使得两个子句能够被归结（有相同的原子），所以合一也被定义为使得两个原子公式等价的一组变量替换/赋值
- 由于一阶逻辑中存在变量，所以归结之前需要进行合一，如  $(P(\text{john}), Q(\text{fred}), R(x))$  和  $(\neg P(y), R(\text{susan}), R(y))$  两个子句中，我们无法找到一样的原子及其对应的否定，但是不代表它们不能够归结
- 通过将  $y$  替换为  $\text{john}$ ，我们得到了  $(P(\text{john}), Q(\text{fred}), R(x))$  和  $(\neg P(\text{john}), R(\text{susan}), R(\text{john}))$ ，此时我们两个子句分别存在原子  $P(\text{john})$  和它的否定  $\neg P(\text{john})$ ，可以进行归结

### ■ 最一般合一：指使得两个原子公式等价，最简单的一组变量替换

# 1.3 Most general unifier算法

## ☐ 最一般合一算法:

- 输入：两个原子公式，它们具有相同的谓词，不同的参数项和 “ $\neg$ ”
- 输出：一组变量替换/赋值
- 算法流程：
  - ☐  $k = 0; \sigma_0 = \{\}; S_0 = \{f, g\}$
  - ☐ 如果  $S_k$  中的公式等价，返回  $\sigma_k$  作为最一般合一的结果
    - 否则找出  $S_k$  中的不匹配项  $D_k = \{e_1, e_2\}$
  - ☐ 如果  $e_1 = V$  是变量， $e_2 = t$  是一个不包含变量  $V$  的项，将 “ $V = t$ ” 添加到赋值集合  $\sigma_{k+1} = \sigma_k \cup \{V = t\}$ ；并将  $S_k$  中的其它  $V$  变量也赋值为  $t$ ，得到  $S_{k+1}$ ；  
 $k = k + 1$ ，转到第二步
  - 否则合一失败

Tips: 变量替换是从两个原子公式中找到的，但是最后要施加给整个子句的

# 1.3 Most general unifier 算法

□ 例子：

- $P(f(a), g(x))$  和  $P(y, y)$  无法合一
- $P(a, x, h(g(z)))$  和  $P(z, h(y), h(y))$  最一般合一为  $\{z=a, x=h(g(a)), y=g(a)\}$
- $P(x, x)$  和  $P(y, f(y))$  无法合一

# 1.4 一阶逻辑归结算法

## □ 归结算法：

- 将 $\alpha$ 取否定，加入到KB当中
- 将更新的KB转换为clausal form得到S
- 反复调用单步归结
  - 如果得到空子句，即 $S|-()$ ，说明 $KB \wedge \neg\alpha$ 不可满足，算法终止，可得 $KB \models \alpha$
  - 如果一直归结直到不产生新的子句，在这个过程中没有得到空子句，则 $KB \models \alpha$ 不成立
- 单步归结
  - 使用MGU算法从两个子句中得到相同的原子，及其对应的原子否定
  - 去掉该原子并将两个子句合为一个，加入到S子句集合中
  - 例如 $(\neg\text{Student}(x), \text{HardWorker}(x))$ 和 $(\text{HardWorker}(\text{sue}))$ 合并为 $(\neg\text{Student}(\text{sue}))$

## 2. 实验任务

□ 编写程序，实现一阶逻辑归结算法，并用于求解给出的三个逻辑推理问题，要求输出按照如下格式：

1.  $(P(x), Q(g(x)))$

2.  $(R(a), Q(z), \neg P(a))$

3.  $R[1a, 2c]\{X=a\} (Q(g(a)), R(a), Q(z))$

... ..

“R”表示归结步骤.

“1a”表示第一个子句(1-th)中的第一个 (a-th)个原子公式，即 $P(x)$ .

“2c”表示第二个子句(1-th)中的第三个 (c-th)个原子公式，即 $\neg P(a)$ .

“1a”和“2c”是冲突的，所以应用最小合一 $\{X = a\}$ .



## 2. 实验任务

### □ Aipine Club

- $A(\text{tony})$
- $A(\text{mike})$
- $A(\text{john})$
- $L(\text{tony}, \text{rain})$
- $L(\text{tony}, \text{snow})$
- $(\neg A(x), S(x), C(x))$
- $(\neg C(y), \neg L(y, \text{rain}))$
- $(L(z, \text{snow}), \neg S(z))$
- $(\neg L(\text{tony}, u), \neg L(\text{mike}, u))$
- $(L(\text{tony}, v), L(\text{mike}, v))$
- $(\neg A(w), \neg C(w), S(w))$

```
[sysu_hpcedu_302@cpn238 ~/scc22/lsr/mp_linpack/resolution]$ python main.py
11
A(tony)
A(mike)
A(john)
L(tony, rain)
L(tony, snow)
( $\neg A(x)$ ,  $S(x)$ ,  $C(x)$ )
( $\neg C(y)$ ,  $\neg L(y, \text{rain})$ )
( $L(z, \text{snow})$ ,  $\neg S(z)$ )
( $\neg L(\text{tony}, u)$ ,  $\neg L(\text{mike}, u)$ )
( $L(\text{tony}, v)$ ,  $L(\text{mike}, v)$ )
( $\neg A(w)$ ,  $\neg C(w)$ ,  $S(w)$ )
R[2,11a](w=mike) =  $\neg C(\text{mike})$ ,  $S(\text{mike})$ 
R[2,6a](x=mike) =  $S(\text{mike})$ ,  $C(\text{mike})$ 
R[5,9a](u=snow) =  $\neg L(\text{mike}, \text{snow})$ 
R[12b,13a] =  $S(\text{mike})$ 
R[8a,14](z=mike) =  $\neg S(\text{mike})$ 
R[15,16] = []
```

## 2. 实验任务

### □ Graduate Student

- GradStudent(sue)
- ( $\neg$ GradStudent(x), Student(x))
- ( $\neg$ Student(x), HardWorker(x))
- $\neg$ HardWorker(sue)

```
[sysu_hpcedu_302@cpn238 ~/scc22/lsr/mp_linpack/resolution]$ python main.py
4
GradStudent(sue)
( $\neg$ GradStudent(x), Student(x))
( $\neg$ Student(x), HardWorker(x))
 $\neg$ HardWorker(sue)
R[3b,4](x=sue) =  $\neg$ Student(sue)
R[1,2a](x=sue) = Student(sue)
R[5,6] = []
```

## 2. 实验任务

### □ Block World

- On(aa,bb)
- On(bb,cc)
- Green(aa)
- $\neg$ Green(cc)
- $(\neg$ On(x,y),  $\neg$ Green(x), Green(y))

```
[sysu_hpcedu_302@cpn238 ~/scc22/lsr/mp_linpack/resolution]$ python main.py
5
On(aa,bb)
On(bb,cc)
Green(aa)
¬Green(cc)
(¬On(x,y), ¬Green(x), Green(y))
R[4,5c](y=cc) = ¬On(x,cc),¬Green(x)
R[3,5b](x=aa) = ¬On(aa,y),Green(y)
R[2,6a](x=bb) = ¬Green(bb)
R[1,7a](y=bb) = Green(bb)
R[8,9] = []
```

# 报告提交要求

- 提交一个压缩包。压缩包命名为：“学号\_姓名\_作业编号”，例：20212021\_张四\_实验2。
- 压缩包包含三部分：code文件夹和实验报告pdf文件。
  - code文件夹：存放实验代码，一般有多个代码文件的话需要有readme；
  - Pdf文件格式参考发的模板。
- 如果需要更新提交的版本，则在后面加\_v1，\_v2。如第一版是”学号\_姓名\_作业编号.zip”，第二版是”学号\_姓名\_作业编号\_v1.zip”，依此类推。
- 截至日期：3月23日晚24点之前。
- 提交邮箱：[zhangyc8@mail2.sysu.edu.cn](mailto:zhangyc8@mail2.sysu.edu.cn)。