Polytech'Nice Sophia-Antipolis
Méthodes Numériques pour les EDP - MAM4 - Année 2018-2019

TP 8 : Eléments finis P1 pour le Laplacien 2D : implémentation.

On considère l'équation de Laplace :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u & = & f & \text{dans } \Omega \\ u & = & 0 & \text{sur le bord } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{1}$$

d'inconnue $u \in H_0^1(\Omega)$, où $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est donné par son maillage et $f \in L^2(\Omega)$.

On se propose d'implémenter en scilab la méthode des éléments finis triangles P1 pour la résolution numérique de ce problème.

Etape 1.
Lecture du maillage.
Ecrire un module scilab qui lit un fichier .msh (ASCII) selon le format suivant :

NN NE NA
Pour i=1 :NN (noeuds)
$x_i \quad y_i \quad refn_i$
Pour i=1 :NE (triangles)
$n1 \quad n2 \quad n3 \quad refe_i$
Pour i=1 :NA (arêtes du bord)
$n1 \quad n2 \quad refa_i$

Valider ce module en le testant sur le fichier `MAM4_MNE_TP10_carre5.msh`.

Etape 2.
Tables élémentaires.
On se place sur un triangle courant T, et on note $x_{ij} = x_i - x_j$ et $y_{ij} = y_i - y_j$.
On rappelle que l'aire a_T de T est donnée par la formule : $2\,a_T = |x_{21}y_{31} - y_{21}x_{31}|$. On a alors la formule suivante pour la matrice de rigidité élémentaire K^e :

$$K^e = \frac{1}{4a_T} B^T B \qquad ; \; B = \begin{pmatrix} y_{23} & y_{31} & y_{12} \\ x_{32} & x_{13} & x_{21} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Le second membre élémentaire F^e est obtenu en approchant l'intégrale sur T par une formule de moyenne :

$$\int_T f(x,y)v(x,y)dxdy \approx \frac{1}{3} a_T \left(f_1 v_1 + f_2 v_2 + f_3 v_3 \right)$$

Etape 3.
Assemblage.

Cette étape est strictement identique sur le principe à celles vues pour le cas 1D de barre et de poutre. Elle nécessite d'avoir créé, lors de la lecture du fichier de maillage, un tableau d'entiers `loc(NE,3)` tel que `loc(ie,j)` soit le numéro du `j`ème noeud quand on parcourt l'élément `ie`.

Etape 4.
Pénalisation des DDL de ref. Dirichlet (ref=1).
Dans cette étape, on fait une boucle avec test sur tous les noeuds du maillage dont la référence est non nulle : si le noeud i est tel que $refn_i = 1$, alors on pénalise le terme diagonal de la matrice assemblée K : par exemple $K_{ii} = 10^9 K_{ii}$.

Etape 5.
Résolution et visualisation.
La résolution du système linéaire final sera effectuée par l'implémentation d'une méthode de Gauss-Seidel.
En général, la visualisation en éléments finis se fait à l'aide d'outils dédiés (à cause notamment de géométries et maillages non structurés).
Dans ce TP, et pour le cas d'un carré $[0,1] \times [0,1]$ (fichiers de maillage fournis) on peut valider les calculs E.F. avec un bon choix de la fonction f (on *fabrique* des solutions exactes). La visualisation du maillage et de la solution peut se faire à l'aide du module `fec` de scilab.