MNE-TP5 : Méthode E.F. pour le calcul de barre élastique 1D

ZHONG Ming

22 mars 2019

Table des matières

1 Rappel du problème

le but de ce TP est d'implémenter en Scilab un code pour le calcul des déplacements élastiques d'une barre 1D, qui travaille en régime élastique liéaire de traction-compression, à l'aide de la méthode des éléments finis.

la barre est fixée à ses deux extrémités, 0 et L, elle possède un coefficient de rigidité k(x), et avec un chargement f(x), donc on a l'équation différentielle partielle suivante :

$$\begin{cases} -(k(x)u'(x))' = f(x), 0 < x < L \\ u(0) = 0; u(L) = 0 \end{cases}$$

2 Méthode numérique

2.1 formulation variationnelle

nous utiliserions la formulation variationnelle afin de résoudre mathématiquement ce problème :

$$V = H_0^1(0, L), u \in V$$

tel que :

$$\forall v \in V, a(u, v) = l(v),$$

$$a(u, v) = \int_0^L k(x)u'(x)v'(x)\mathrm{d}x$$

$$l(v) = \int_0^L f(x)v(x)\mathrm{d}x$$

2.2 module de maillage

Nous avons pris un maillage uniforme sur l'intervalle$[0, L]$:

$$[0, L] = \bigcup_{i=1}^{NE}$$

(NE est le nombre total d'éléments, NN est le nombre total de noeuds.)
on a $NN = NE + 1, x_0 = 0, x_{NN} = L$, des éléments : $E_i = [x_i, x_{i+1}]$

2.3 interpolation

on définit la fonction P1 sur des éléments :

$$u_n(x) = u_i N_1(x) + u_{i+1} N_2(x)$$

avec :

$$N_1(x) = 1 - \frac{x - x_i}{x_{i+1} - xi}$$
$$N_2(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - xi}$$

On construit v de la même façon :

$$v_n(x) = v_i N_1(x) + v_{i+1} N_2(x)$$

2.4 tableaux élémentaires

sur chaque élément on a $a(u_h, v_h) = l(v_h)$:

$$a(u_h, v_h) = \int_0^L k(x)u_h'(x)\mathrm{v}_h'(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{NE} \int_{E_i} k(x)u_h'(x)v_h'(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_{E_i} k(x)u_h'(x)v_h'(x)\mathrm{d}x = \int_{E_i} k(x)\left(u_iN_1(x)+u_{i+1}N_2(x)\right)'\left(v_iN_1(x)+v_{i+1}N_2(x)\right)'\mathrm{d}x$$

$$= \int_{E_i} k(x)\left(\frac{u_{i+1}-u_i}{h_i}\right)\left(\frac{v_{i+1}-v_i}{h_i}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \left\langle K^E \begin{pmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} v_i \\ v_{i+1} \end{pmatrix} \right\rangle$$

avec la matrice de rigidité élémentaire : $K^E = \frac{k_i}{h_i}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

ensuite on calcule le second membre élémentaire de la même manière :

$$l\left(v_h\right) = \int_0^L f(x)v(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{NE}\int_{E_i} f(x)v_h(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_{E_i} f(x)v_h(x)\mathrm{d}x = \int_{E_i} f(x)\left(v_iN_1(x)+v_{i+1}N_2(x)\right)\mathrm{d}x$$

$$= v_i\int_{E_i} f(x)N_1(x)\mathrm{d}x + v_{i+1}\int_{E_i} f(x)N_2(x)\mathrm{d}x$$

$$= \left\langle F^E | \begin{pmatrix} v_i \\ v_{i+1} \end{pmatrix} \right\rangle$$

donc on a :

$$F^E \approx \begin{pmatrix} \frac{h_i}{2}f\left(x_i\right) \\ \frac{h_i}{2}f\left(x_{i+1}\right) \end{pmatrix}$$

2.5 module d'assemblage

On veut construire le module d'assemblage K^G et F^G, voici la boucle pour avoir les matrices :

```
for i = 1 : n
    [Ke, Fe] = table(i, n, L)
   KG(i, i) = KG(i, i) + Ke(1,1);
   KG(i, i+1) = KG(i, i+1) + Ke(1,2);
   KG(i+1, i) = KG(i+1, i) + Ke(2,1);
   KG(i+1, i+1) = KG(i+1, i+1) + Ke(2,2);
end

for j = 1 : n
    [Ke, Fe] = table(j, n, L)
   FG(j, 1) = FG(j, 1) + Fe(1,1);
   FG(j+1, 1) = FG(j+1, 1) + Fe(2,1);
end
```

2.6 conditions limites

voici les conditions limites :

$$\begin{aligned} &K^G(1,1) = 1, K^G(n+1,n+1) = 1 \\ &F^G(1,1) = 0, K^G(n+1,1) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

3 Résultats

on va tester cette méthode avec deux fonctions :

3.1 1eme cas-test de validation

coefficient de rigidité k(x) = 1, chargement f(x) = sin(pi*x)-2*cos(pi*x/2)

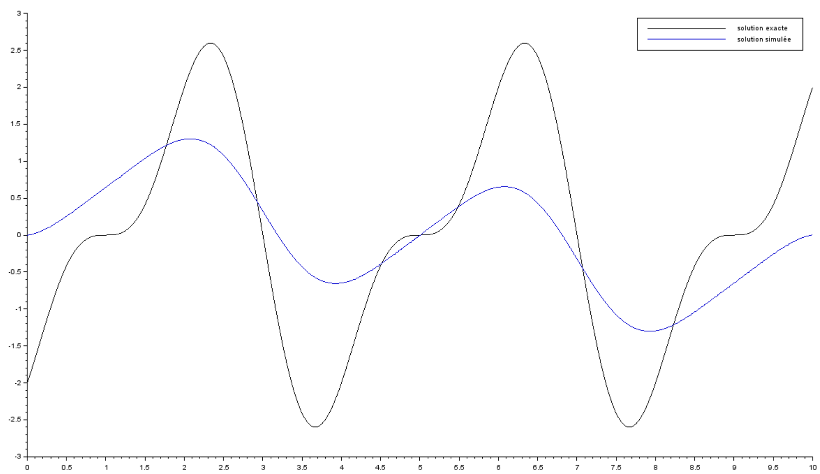

FIG. 1: solution exacte et simulée dans 1eme cas-test

3.2 2eme cas-test de validation

coefficient de rigidité k(x) = 1, chargement f(x) = exp(-(x-1)**2)

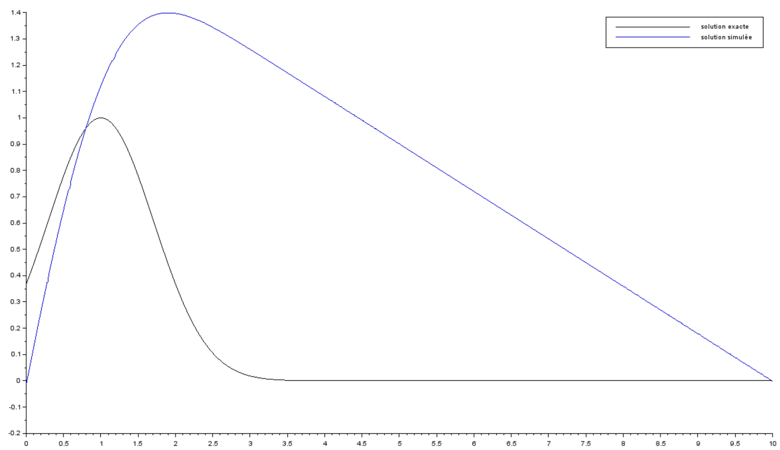

FIG. 2: solution exacte et simulée dans 2eme cas-test

dans ces deux graphiques, on constate que les solutions simulées correspondent pas mal aux solutions exactes.Mais il y a encore des erreurs, on peut l'améliorer.