Séance 5-6

Processus linéaires

La classe des modèles de séries temporelles linéaires, qui comprend la classe des modèles de moyenne mobile autorégressive (ARMA), fournit un cadre général pour l'étude des processus stationnaires.

Définition 1 (Processus linéaire) *La série temporelle* $\{X_t\}$ *est un processus linéaire si elle peut s'écrire comme*

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{t-j},\ Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

où ψ_j *sont une suite de constates t.q.* $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$.

En terme d'opérateur de shift régressif, ceci s'écrit sous une forme plus compacte

$$X_t = \Psi(B) Z_t,\ \Psi(B) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j B^j.$$

Un processus linéaire s'appelle à moyenne mobile ou $MA(\infty)$ si $\psi_j = 0\, \forall j < 0$, c.a.d.

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}.$$

L'opérateur $\Psi(B)$ peut être considéré comme un filtre linéaire qui, lorsqu'il est appliqué à la série "entrante" de bruit blanc $\{Z_t\}$, produit la "sortie" $\{X_t\}$. Comme établi dans la proposition suivante, un filtre linéaire, lorsqu'il est appliqué à n'importe quelle série entrante stationnaire, produit une série de sortie stationnaire.

Proposition 1 *Soit* $\{Y_t\}$ *une série stationnaire de moyenne* 0 *et fonction d'auto-covariance* γ_Y. *Si* $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$ *alors la série temporelle suivante*

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Y_{t-j} = \Psi(B) Y_t$$

est stationnaire de moyenne nulle et fonction d'auto-covariance

$$\gamma_X(h) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_k \gamma_Y(h + k - j). \tag{1}$$

Dans le cas particulier où X_t *est linéaire on a que*

$$\gamma_X(h) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_{j+h} \sigma^2. \tag{2}$$

Preuve. La moyenne nulle de X_t est une conséquence directe de la linéarité de la moyenne. Pour la fonction d'auto-covariance on a:

$$\begin{aligned}
\gamma_X(h) &= \mathbb{E}[X_{t+h}X_t] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Y_{t+h-j}\right)\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Y_{t-j}\right)\right] \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_k \mathbb{E}[Y_{t+h-j} Y_{t-k}] \qquad (3) \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_k \gamma_Y(h+k-j).
\end{aligned}$$

ce qui montre la stationnarité de X_t la relation (1). Si $\{Y_t\}$ est le bruit blanc $\{Z_t\}$ alors $\gamma_Y(h+k-j) = \sigma^2$ si $j = k+h$ et 0 sinon ce qui conduit à l'expression (2).

Exemple 1 (Un processus AR(1)) *On a défini auparavant le processus AR(1) par la formule*

$$X_t - \phi X_{t-1} = Z_t,\ Z_t \sim WN(0, \sigma^2). \qquad (4)$$

et Z_t non corrélé avec X_s pour tout $s < t$. En utilisant (4) *on obtient*

$$\begin{aligned}
X_t &= \phi X_{t-1} + Z_t \\
&= Z_t + \phi Z_{t-1} + \phi^2 X_{t-2} \\
&= \ldots \\
&= Z_t + \phi Z_{t-1} + \ldots + \phi^k Z_{t-k} + \phi^{k+1} X_{t-k-1}.
\end{aligned}$$

En utilisant la stationnarité de X_t et en prenant la moyenne quadratique

$$\mathbb{E}\left[\left(X_t - \sum_{j=0}^{k} \phi^j Z_{t-j}\right)^2\right] = \phi^{2(k+1)} \mathbb{E}\left[X_{t-k-1}^2\right] \to 0\, k \to \infty.$$

ce qui veut dire qu'en moyenne on a

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j Z_{t-j}.$$

On va calculer maintenant la fonction d'auto-covariance en appliquant le résultat de la proposition précédente. On devra normalement obtenir le résultat connu.

$$\gamma_X(h) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi^j \phi^{j+h} \sigma^2 = \frac{\sigma^2 \phi^h}{1-\phi^2},\ h \geq 0.$$

Comme la fonction $\gamma_X(h)$ est paire on obtient le résultat connu.

Introduction aux processus ARMA

Définition 2 *Le processus stationnaire $\{X_t\}$ est un processus ARMA(1,1) si pour chaque t on a*

$$X_t - \varphi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1}, \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2),\ \phi + \theta \neq 0. \tag{5}$$

En utilisant les opérateurs de shift ceci peut s'écrire d'une façon plus compacte

$$\varphi(B)X_t = \theta(B)Z_t \tag{6}$$

où $\varphi(z) = 1 - \varphi z$, $\theta(z) = 1 + \theta z$.
Si $|\varphi| < 1$ considérons la série suivante

$$\chi(z) = \frac{1}{\varphi(z)} = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^j z^j$$

dont les coéfficients sont absolument sommables. En multipliant (6) par $\chi(B)$ on obtient

$$\begin{aligned} X_t &= \chi(B)\theta(B)Z_t =: \psi(B)Z_t, \\ \psi(B) &= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \varphi^j B^j\right)(1 + \theta B). \end{aligned}$$

En développant on obtient $\psi_0 = 1$ et $\psi_j = (\varphi + \theta)\varphi^{j-1}$, $j \geq 1$ et donc

$$X_t = Z_t + (\varphi + \theta) \sum_{j=1}^{\infty} \varphi^{j-1} Z_{t-j}. \tag{7}$$

Dans le cas où $|\varphi| > 1$, on écrit $\chi(z) = \frac{1}{\varphi(z)} = -\sum_{j=0}^{\infty} \varphi^{-j} z^{-j}$ et on obtient

$$X_t = -\theta\varphi^{-1} Z_t - (\varphi + \theta) \sum_{j=1}^{\infty} \varphi^{-j-1} Z_{t+j}. \tag{8}$$

Si $|\varphi| = 1$, il n'existe pas de solution stationnaire. Pour résumer:

- Une solution stationnaire des équations ARMA(1,1) existe ssi $|\varphi| \neq 1$.
- Si $|\varphi| < 1$, l'unique solution est (7) et on dit que le processus $\{X_t\}$ est *causal* car il s'exprime uniquement en fonctions des valeurs passées de $\{Z_t\}$.
- Si $|\varphi| > 1$, l'unique solution est (8) et on dit que le processus $\{X_t\}$ est *non-causal* car il s'exprime uniquement en fonctions des valeurs futures de $\{Z_t\}$.

Le concept dual de la causalité est l'inversibilité (Z_t peut s'exprimer en fonction de Z_t). On procédant d'une manière similaire on a:

- Si $|\theta| < 1$, on dit que le processus $\{X_t\}$ est *inversible* car $\{Z_t\}$ s'exprime uniquement en fonctions des valeurs passées de $\{X_t\}$:

$$Z_t = X_t - (\varphi + \theta) \sum_{j=1}^{\infty} (-\theta)^{j-1} X_{t-j}. \tag{9}$$

- Si $|\theta| > 1$, on dit que le processus $\{X_t\}$ est *non-inversible* car $\{Z_t\}$ s'exprime uniquement en fonctions des valeurs futures de $\{X_t\}$:

$$Z_t = -\theta^{-1}\varphi X_t + (\varphi + \theta) \sum_{j=1}^{\infty} (-\theta)^{-j-1} X_{t+j}. \tag{10}$$

Propriétés de la moyenne de l'échantillon et de la fonction d'auto-corrélation

Un processus stationnaire est caractérisé par sa moyenne et sa fonction d'autocovariance. L'estimation de deux et de la fonction d'autocorrélation à partir des observations joue donc un rôle crucial dans les problèmes d'inférence et en particulier dans les problème de construction d'un modèle approprié pour les données.
Estimation de la moyenne. La moyenne de léchantillon d'une série stationnaire

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

est un bon estimateur pour sa moyenne μ car

$$\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \mu,\ \mathbb{E}[(\bar{X}_n - \mu)^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=-n}^{n}\left(1 - \frac{|h|}{n}\right)\gamma(h).$$

On a le résultat suivant:

Proposition 2 *Si $\{X_t\}$ est une série stationnaire de moyenne μ et fonction d'autocovariance $\gamma(\cdot)$ alors pour $n \to \infty$ on a*

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[(\bar{X}_n - \mu)^2] \to 0, \ \ si\ \gamma(n) \to 0,\\ &n\mathbb{E}[(\bar{X}_n - \mu)^2] \to \sum_{|h|<\infty}\gamma(h), \ \ si \sum_{|h|<\infty}\gamma(h) < \infty.\end{aligned}$$

Pour beaucoup de séries temporelles y compris les processus ARMA(1,1) si n est grand, $\bar{X}_n$ suit la loi normale suivante:

$$\bar{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{1}{n}\sum_{|h|<\infty}\gamma(h)\right)$$

Donc un intervalle de confiance à 95% pour μ est

$$\left(\bar{X}_n - 1.96\frac{1}{\sqrt{n}}v^{1/2}, \bar{X}_n + 1.96\frac{1}{\sqrt{n}}v^{1/2}\right),\ v = \sum_{|h|<\infty}\gamma(h).$$

Estimation de l'autocovariance et l'autocorrélation. Les estimateurs

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{n-h}\sum_{t=1}^{n-|h|}(X_{t+|h|} - \bar{X}_n)(X_t - \bar{X}_n)$$

et $\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)}$ de la fonction d'autocovariance et d'autocorrélation ne sont en général pas trop fiables. On devrait avoir au moins $n \geq 50$ (selon certains chercheurs) et $h \leq n/4$ pour que ça soit le cas. En plus, il n'existent pas d'estimations fiable pour $h \geq n$ sans hypothèse supplémentaire sur les données $X_1, X_2, ..., X_n$.

D'une manière générale, pour des échantillons très larges on peut montrer que $\hat{\rho}(h)$ suit une loi normale. Plus précisément pour des modèles linéaires on a

$$\hat{\rho}_k = (\hat{\rho}(1), ..., \hat{\rho}(k)) \sim N\left(\rho_k, \frac{1}{n}W\right),\ \rho_k = (\rho(1), ..., \rho(k))$$

où W est la matrice de covariance ayant les éléments

$$w_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty}(\rho(k+i) + \rho(k-i) - 2\rho(i)\rho(k))(\rho(k+j) + \rho(k-j) - 2\rho(j)\rho(k)). \tag{11}$$

Exemple 2 (Processus AR(1)) *Soit $\{X_t\}$ un processus AR(1) de moyenne μ défini par*

$$X_t - \mu = \varphi(X_{t-1} - \mu) + Z_t,\ Z_t \sim WN(0, \sigma^2),\ |\varphi| < 1.$$

On a que la fonction d'autocovariance est:

$$\gamma(h) = \frac{\varphi^{|h|}\sigma^2}{1-\varphi^2}.$$

et par conséquent

$$v = \sum_{|h|<\infty} \gamma(h) = \left(1 + 2\sum_{h=1}^{\infty} \varphi^h\right) \frac{\sigma^2}{1-\varphi^2} = \frac{\sigma^2}{(1-\varphi)^2}.$$

L'intervalle de confiance à 95% pour la moyenne est donné par

$$\bar{x}_n \pm 1.96 \frac{\sigma}{n^{1/2}(1-\varphi)}.$$

Généralement σ et φ ne sont pas connus en pratique donc il faut les remplacer par les valeurs estimées.

Exemple 3 *Si $\{X_t\} \sim IID(0, \sigma^2)$ alors $\rho(h) = 0$ si $|h| > 0$ donc*

$$w_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \textit{sinon} \end{cases}$$

donc si n est grand $\hat{\rho}(1), ..., \hat{\rho}(h)$ sont des variables normales, indépendantes et identiquement distribuées de moyenne nulle et variance $1/n$.

Exemple 4 *Si $\{X_t\}$ est un processus MA(1) donné par*

$$X_t = Z_t + \theta Z_{t-1},\ Z_t \sim WN(0, \sigma^2) \tag{12}$$

alors en utilisant la formule (11) on obtient

$$w_{ii} = \begin{cases} 1 - 3\rho^2(1) + 4\rho^4(1), & i = 1 \\ 1 + 2\rho^2(1), & i > 1 \end{cases} \tag{13}$$

qui est la variance approchée de $n^{-1/2}(\hat{\rho}(i) - \rho(i))$ pour des grands n. Par conséquent, l'intervalle de confiance pour $\rho(1)$ à 95% sera donc $\hat{\rho}(1) \pm 1.96 n^{-1/2}(1 - 3\hat{\rho}^2(1) + 4\hat{\rho}^4(1))^{1/2}$ ce qui nous permettera de décider de la validité du modèle (12) avec un θ donné.

Exemple 5 *Si $\{X_t\}$ est un processus AR(1) donné par*

$$X_t - \varphi X_{t-1} = Z_t,\ Z_t \sim WN(0, \sigma^2),\ |\varphi| < 1 \tag{14}$$

on a que $\rho(h) = \varphi^{|h|}$ et donc

$$w_{ii} = (1 - \varphi^{2i})(1 + \varphi^2)(1 - \varphi^2)^{-1} - 2i\varphi^{2i}. \tag{15}$$

L'intervalle de confiance pour $\rho(i)$ à à 95% sera donc $\hat{\rho}(i) \pm 1.96 n^{-1/2} w_{ii}^{1/2}$ ce qui nous permettera de décider de la validité du modèle (14) avec un φ donné.

Exercices

1. Soit $\{Y_t\}$ la série temporelle suivante:

$$Y_t = X_t + W_t,\ W_t \sim WN(0, \sigma_w^2),$$

où $\{X_t\}$ est le processus AR(1) suivant:

$$X_t - \varphi X_{t-1} = Z_t,\ Z_t \sim WN(0, \sigma_z^2).$$

et $\mathbb{E}(W_s Z_t) = 0,\ \forall s, t.$
(a) Montrer que Y_t est stationnaire et trouver sa fonction d'autocovariance.
(b) Montrer que la série temporelle $U_t = Y_t - \varphi Y_{t-1}$ est un processus MA(1).
(c) Conclure que Y_t est un processus ARMA(1,1) et exprimer les paramètres du modèle en fonction de $\varphi, \sigma_w^2, \sigma_w^2$.

2. Supposons que dans un échantillon de taille 100 issu d'un processus AR(1) de moyenne μ, $\varphi = 0.6$ et $\sigma^2 = 2$, on obtient $\bar{x}_{100} = 0.271$. Construire un intervalle de confiance à 95% pour μ. Les données sont-elles compatibles avec l'hypothèse que $\mu = 0$?

3. Supposons que dans un échantillon de taille 100 issu d'un processus MA(1) de moyenne μ, $\theta = -0.6$ et $\sigma^2 = 1$, on obtient $\bar{x}_{100} = 0.157$. Construire un intervalle de confiance à 95% pour μ. Les données sont-elles compatibles avec l'hypothèse que $\mu = 0$?

4. Supposons que dans un échantillon de taille 100, on obtient $\hat{\rho}(1) = 0.438$ et $\hat{\rho}(2) = 0.145$.
(a) En supposant que les données ont été générées à partir d'un modèle AR(1), construire des intervalles de confiance à 95% pour $\rho(1)$ et $\rho(2)$. Sur la base de ces deux intervalles de confiance, les données sont-elles cohérentes avec un modèle AR(1) avec $\varphi = 0.8$?
(b) En supposant que les données ont été générées à partir d'un modèle MA(1), construire des intervalles de confiance à 95% pour $\rho(1)$ et $\rho(2)$. Sur la base de ces deux intervalles de confiance, les données sont-elles cohérentes avec un modèle MA(1) avec $\theta = 0.6$?