Séance 4

Propriétés basiques des processus stationnaires

Les fonctions d'auto-covariance et auto-corrélation pour un processus stationnaire

$$\gamma(h) = \mathrm{Cov}(X_{t+h}, X_t),\ \rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$$

fournissent une mesure utile du degré de dépendance des valeurs d'une série temporelle et par conséquent elles jouent un rôle important dans la prédiction des valeurs futures de la série en terme de valeurs passées et présentes.

Exemple 1 *Chercher la meilleure prédiction linéaire* $\ell(X_n) = aX_n + b$ *de* X_{n+h} *qui minimise* $\mathbb{E}[(X_{n+h} - \ell(X_n))^2]$. *On obtient (voir l'exercice* 1 *du TD)*

$$\ell(X_n) = \mu + \rho(h)(X_n - \mu),\ \mathbb{E}[(X_{n+h} - \ell(X_n))^2] = \sigma^2(1 - \rho(h)^2).$$

On voit que le prédicteur linéaire dépend uniquement de la moyenne μ et de la fonction d'auto-corrélation d'où l'importance de l'étude de cette dernière.

Lemme 1 (Propriétés de γ) *La fonction d'auto-covariance vérifie les propriétés suivantes:*

(i) $\gamma(0) \geq 0$

(ii) $|\gamma(h)| \leq \gamma(0)$

(iii) $\gamma(h) = \gamma(-h)$ *(fonction paire).*

(iv) est définie non-négative $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_i \gamma(i-j) a_j \geq 0,\ \forall n \geq 0,\ \forall \mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n).$

On peut montrer que toute fonction paire non-négative est la fonction d'auto-covariance d'une série temporelle stationnaire.

Exemple 2 *Montrer que la fonction suivante*

$$\kappa(h) = \begin{cases} 1,\ h = 0 \\ \rho,\ |h| = 1, \\ 0,\ sinon \end{cases}$$

est la fonction d'autocorrelation d'un processus stationnaire ssi $\rho \leq 1/2$.

Exemple 3 *Montrer que le processus*

$$X_t = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

est stationnaire où A, B *sont des variables aléatoires de moyenne* 0 *et variance* 1 *non corrélées. En déduire que la fonction* $\kappa(h) = \cos(\omega h)$ *et définie non-négative.*

Exercices

1. Supposons que $\{X_t\}$ est une série temporelle stationnaire de moyenne μ et fonction d'auto-corrélation ρ. Montrer que la meilleure prediction linéaire $aX_n + b$ de X_{n+h} en moyenne quandratique est obtenue en choisissant
$$a = \rho(h),\ b = \mu(1 - \rho(h)).$$

2. En identifiant des suites appropriées de variables aléatoires, montrer que les fonctions suivantes sont des fonctions d'auto-covariance:

   (i) $\kappa(h) = (-1)^{|h|}$.

   (ii) $\kappa(h) = 1 + \cos(\pi h/2) + \cos(\pi h/4)$.

   (iii) $\kappa(h) = \begin{cases} 1,\ h = 0, \\ 0.4,\ h = \pm 1, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

   `Indication`. (i) On choisira $X_t = (-1)^t Z$ où Z est une variable aléatoire de moyenne nule et on calculera la fonction d'auto-covariance.
   (ii) et (iii) On tiendra compte des résultats des exercices du TD1 où on a obtenu des fonctions d'auto-covariance sous une forme similaire.

3. Montrer que les équations auto-régressives (AR) définies par:
$$X_t = \varphi X_{t-1} + Z_t,\ \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2),\ |\varphi| = 1$$
   n'ont pas de solution stationnaire.

   `Indication`. On supposera qu'une solution stationnaire existe et on estimera la variance de $X_t - \varphi^{n+1} X_{t-n-1}$ ce qui conduira à une contradiction.