m_t - fonction variant lentement ou de "tendance"

s_t - fonction avec une période donnée d → composant "saisonnière"

Y_t - composante de bruit stationnaire

<u>But</u> : estimer ou extraire les composantes déterministes m_t et s_t en espérant que la composante "bruit" Y_t soit une série temporelle stationnaire.

<u>Exercices</u>

① Soit X et Y 2 variables aléatoires avec $E(Y) = \mu$, $EY^2 < \infty$

a) Montrer que la constante c qui minimise $E(Y-c)^2$ $c = \mu$

b) En déduire que la variable aléatoire $f(X)$ qui minimise $E[(Y-f(X))^2 | X]$ est $f(X) = E[Y|X]$.

<u>Solution</u>

$$E[(Y-c)^2] = E[Y^2 - 2Yc + c^2] = E[Y^2] - 2cE[Y] + c^2$$
$$= E[Y^2] - 2c\mu + c^2$$

en différentiant par rapport à c on a

$$\frac{d}{dc}\left(E[Y^2] - 2c\mu + c^2\right) = -2\mu + 2c = 0 \Rightarrow c = \mu.$$

comme $\frac{d^2}{dc^2}\left(E[Y^2] - 2c\mu + c^2\right) = 2 > 0 \Rightarrow$ point de minimum

b) $E[(Y-f(X))^2 | X] = E[Y^2 - 2Yf(X) + f^2(X) | X]$

$$= E[Y^2|X] - 2f(X)E[Y|X] + f^2(X)$$

Si on note $c = f(X)$ et $\mu = E[Y|X]$ selon le point précédent le minimum et atteint est

$$f(X) = E[Y|X]$$

② Soit $\{Z_t\}$ une suite de variables aléatoires normales indépendants de moyenne 0 et variance σ^2 et soit a, b, c des constantes. Est-ce que les processus suivants sont-ils stationnaires? Spécifier pour chacun la moyenne et la fonction d'auto-covariance

a) $X_t = a + bZ_t + cZ_{t-2}$

b) $X_t = Z_1 \cos(ct) + Z_2 \sin(ct)$

c) $X_t = Z_t \cos(ct) + Z_{t-1} \sin(ct)$

d) $X_t = a + bZ_0$

e) $X_t = Z_0 \cos(ct)$

f) $X_t = Z_t Z_{t-1}$

a) La moyenne $\mu_X(t) = \mathbb{E}[a + bZ_t + cZ_{t-2}] = a$

Auto covariance

$\gamma_X(t+h, t) = \operatorname{Cov}(X_{t+h}, X_t) = \operatorname{Cov}(a + bZ_{t+h} + cZ_{t+h-2}, a + bZ_t$

$= b^2 \operatorname{Cov}(Z_{t+h}, Z_t) + bc \operatorname{Cov}(Z_{t+h}, Z_{t-2}) + cb \operatorname{Cov}(Z_{t+h-2}, Z_t)$

$+ c^2 \operatorname{Cov}(Z_{t+h-2}, Z_{t-2}) = \sigma^2 b^2 \mathbb{1}_{\{0\}}(h) + \sigma^2 bc \mathbb{1}_{\{-2\}}(h) +$

$+ \sigma^2 cb \mathbb{1}_{\{2\}}(h) + \sigma^2 c^2 \mathbb{1}_{\{0\}}(h)$

$$= \begin{cases} (b^2 + c^2)\sigma^2 & \text{si } h = 0 \\ bc\sigma^2 & \text{si } |h| = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\mu_X(t)$ et $\gamma_X(t+h, t)$ ne dépendent pas de t $\Rightarrow$ $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ est (faiblement) stationnaire.

b) $\mu_X(t) = \mathbb{E}[Z_1] \cos(ct) + \mathbb{E}[Z_2] \sin(ct) = 0$

$\gamma_X(t+h, t) = \operatorname{Cov}(X_{t+h}, X_t)$

$= \operatorname{Cov}(Z_1 \cos(c(t+h)) + Z_2 \sin(c(t+h)), Z_1 \cos(ct) + Z_2 \sin$

$= \cos(c(t+h)) \cos(ct) \operatorname{Cov}(Z_1, Z_1) + \cos(c(t+h)) \sin(ct) \operatorname{Cov}$

$+ \sin(c(t+h)) \cos(ct) \operatorname{Cov}(Z_1, Z_2) + \sin(c(t+h)) \sin(ct) \operatorname{Cov}$

$= \sigma^2 (\cos(c(t+h)) \cos(ct) + \sin(c(t+h)) \sin(ct)) = \sigma^2 \cos(ch)$

5

c) $\mu_X(t) = \mathbb{E}[Z_t] \cos(ct) + \mathbb{E}[Z_{t-1}] \sin(ct) = 0$

$\gamma_X(t+h, t) = \text{Cov}(X_{t+h}, X_t)$

$= \text{Cov}(Z_{t+h} \cos(c(t+h)) + Z_{t+h-1} \sin(c(t+h)), Z_t \cos(ct) + Z_{t-1} \sin(ct))$

$= \cos(c(t+h))\cos(ct) \,\text{Cov}(Z_{t+h}, Z_t) + \cos(c(t+h))\sin(ct) \cdot \text{Cov}(Z_{t+h}, Z_{t-1}) + \sin(c(t+h))\cos(ct)\,\text{Cov}(Z_{t+h-1}, Z_t)$
$+ \sin(c(t+h))\sin(ct)\,\text{Cov}(Z_{t+h-1}, Z_{t-1})$

$= \sigma^2 \cos^2(ct)\, \mathbb{1}_{\{0\}}(h) + \sigma^2 \cos(c(t-1))\sin(ct)\, \mathbb{1}_{\{-1\}}(h)$
$+ \sigma^2 \sin(c(t+1))\cos(ct)\, \mathbb{1}_{\{1\}}(h) + \sigma^2 \sin^2(ct)\, \mathbb{1}_{\{0\}}(h)$

$= \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } h=0 \\ \sigma^2 \cos(c(t-1))\sin(ct) & \text{si } h=-1 \\ \sigma^2 \cos(ct)\sin(c(t+1)) & \text{si } h=1 \end{cases}$

Donc $\{X_t ; t \in \mathbb{Z}\}$ et faiblement stationnaire pour $c = \pm k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$ comme $\gamma_X(t+h, t) = \sigma^2 \mathbb{1}_{\{0\}}(h)$

Pour $c \neq \pm k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$ $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ n'est pas faiblement stationnaire.

d) $\mu_X(t) = \mathbb{E}[a + bZ_0] = a$

$\gamma_X(t+h, t) = \text{Cov}(X_{t+h}, X_t) = \text{Cov}(a + bZ_0, a + bZ_0)$
$= b^2 \text{Cov}(Z_0, Z_0) = \sigma^2 b^2$

e) $\mu_X(t) = \mathbb{E}[Z_0] \cos(ct) = 0$

$\gamma_X(t+h, t) = \text{Cov}(X_{t+h}, X_t) = \cos((t+h)c)\cos(ct)\,\text{Cov}(Z_0, Z_0)$
$= \cos(c(t+h))\cos(ct)\,\sigma^2$

$\Rightarrow \{X_t ; t \in \mathbb{Z}\}$ faiblement stationnaire quand $c = \pm k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$ et non stationnaire quand $c \neq \pm k\pi$

③ Soit $\{X_t\}$ un processus aléatoire donné par

$$X_t = Z_t + \theta Z_{t-2}$$

ou $\{Z_t\}$ est une suite de variables aléatoires appelé 'bruit blanc' (variables non corelées de moyenne nulle et variance σ^2) $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$.

a) Trouver l'auto covariance et l'auto correlation pour $\theta = 0.8$

b) Calculer la variance de l'échantillon $(X_1+X_2+X_3+X_4)/4$ quand $\theta = 0.8$

c) Répéter b) avec $\theta = -0.8$ et comparer la réponse avec b).

a) $\gamma_X(t+h, t) = Cov(X_{t+h}, X_t) = Cov(Z_{t+h} + \theta Z_{t+h-2}, Z_t + \theta Z_{t-}$

$= Cov(Z_{t+h}, Z_t) + \theta\, Cov(Z_{t+h}, Z_{t-2}) + \theta\, Cov(Z_{t+h-2}, Z_t)$
$+ \theta^2\, Cov(Z_{t+h-2}, Z_{t-2})$

$= \sigma^2\left(\mathbb{1}_{\{0\}}(h) + \theta\, \mathbb{1}_{\{-2\}}(h) + \theta\, \mathbb{1}_{\{2\}}(h) + \theta^2\, \mathbb{1}_{\{0\}}(h)\right)$

$$= \begin{cases} \sigma^2(1+\theta^2) & \text{si } h=0 \\ \sigma^2\theta & \text{si } |h|=2 \end{cases} = \begin{cases} 1.64, & h=0 \\ 0.8, & h=2. \end{cases}$$

$\gamma_X(h) = \gamma_X(t+h, h)$ processus stationnaire

$$\rho(h) = \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)} = \begin{cases} 1 & \text{si } h=0 \\ 0.8/1.64 \approx 0.49, & |h|=2 \end{cases}$$

b) $Var\left(\frac{1}{4}(X_1+X_2+X_3+X_4)\right) = \frac{1}{16} Var(X_1+X_2+X_3+X_4)$

$= \frac{1}{16}\Big(Var(X_1) + Var(X_2) + Var(X_3) + Var(X_4)$
$+ 2Cov(X_1, X_3) + 2cov(X_2, X_4)\Big)$

$= \frac{1}{16}\left(4\gamma_X(0) + 4\gamma_X(2)\right) = \frac{1.64+0.8}{4} = 0.61$

c) $\theta = -0.8 \Rightarrow \gamma_X(h) = -0.8$ si $|h|=2 \Rightarrow Var(\quad) = 0.$

1.8 $\{Z_t\}$ variables IID (indépendants, identiquement distribuées de moyenne nule) $N(0,1)$

$$X_t = \begin{cases} Z_t & , t \text{ pair} \\ (Z_{t-1}^2 - 1)\sqrt{2} & , t \text{ impair} \end{cases}$$

a) Montrer que $\{X_t\}$ est un bruit blanc $(0,1)$ mais pas iid.

b) Trouver $E(X_{n+1} | X_1 \ldots X_n)$ pour n pair et impair.

a) t pair $\quad E[X_t] = E[Z_t] = 0$

t impair $\quad E[X_t] = E\left[\frac{Z_{t-1}^2 - 1}{\sqrt{2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}} E[Z_{t-1}^2 - 1] = 0$

Si t pair $\quad \gamma_X(t,t) = E[Z_t^2] = 1$

t impair $\quad \gamma_X(t,t) = E\left[\left(\frac{Z_{t-1}^2 - 1}{\sqrt{2}}\right)^2\right] = \frac{1}{2} E[Z_{t-1}^4 - 2Z_t^2 + 1]$

$$= \frac{1}{2}(3 - 2 + 1) = 1$$

t pair $\quad \gamma_X(t+1,t) = E\left[\frac{Z_t^2 - 1}{\sqrt{2}} Z_t\right] = \frac{1}{\sqrt{2}} E[Z_t^3 - Z_t] = 0$

t impair $\quad \gamma_X(t+1,t) = E\left[Z_{t+1} \frac{Z_{t-1}^2 - 1}{\sqrt{2}}\right] = E[Z_{t+1}] \cdot E\left[\frac{Z_{t-1}^2 - 1}{\sqrt{2}}\right]$

$\gamma_X(t+h,t) = 0$ pour $|h| \geq 2$

$$\gamma_X(t+h,h) = \begin{cases} 1 & , h = 0 \\ 0 & , \text{sinon} \end{cases}$$

$\{X_t ; t \in \mathbb{Z}\}$ est un bruit blanc

Si t impair alors X_t and X_{t-1} son dépendants

$\Rightarrow$ donc pas IID.

b) n impair $\quad E[X_{n+1} | X_1, \ldots X_n] = E[Z_{n+1} | Z_0, Z_2, Z_4, \ldots Z_{n-1}]$

$$= E[Z_{n+1}] = 0$$

n pair $\quad = E\left[\frac{Z_n^2 - 1}{\sqrt{2}} \Big| Z_0, Z_2, Z_4, \ldots Z_n\right] = \frac{Z_n^2 - 1}{\sqrt{2}} = \frac{X_n^2 - 1}{\sqrt{2}}$