Contrôle Séries temporelles. Durée : 1H30

Les documents de cours et TD ne sont pas autorisés. Justifier vos reponses d'une façon claire.

Problème 1. Donner la forme générale de la décomposition d'une série temporelle.

- Expliquer en quelques lignes quel est le but de l'analyse des séries temporelles.
- Expliquer, en justifiant votre réponse, quel est l'éffet d'un filtre à moyenne mobile sur les composantes déterministes et aléatoires du processus.

Problème 2.

- Soit le processus MA(1) défini par

$$X_t = Z_t + \theta Z_{t-1},\ Z_t \sim WN(0, \sigma^2),\ t = 0, 1, ... \tag{1}$$

et θ étant une constante. Montrer que la fonction d'auto-covariance de X_t est

$$\gamma_X(h) = \begin{cases} \sigma^2(1+\theta^2), & h = 0, \\ \sigma^2\theta & |h| = 1, \\ 0 & |h| > 1. \end{cases}$$

- Soit le processus AR(1) dont la solution est la série temporelle stationnaire X_t avec $|\phi| < 1$

$$X_t = \phi X_{t-1} + Z_t,\ Z_t \sim WN(0, \sigma^2),\ t = 0, 1, ... \tag{2}$$

et Z_t non corrélé avec X_s pour chaque $s < t$. Montrer que sa fonction d'auto-covariance est

$$\gamma_X(h) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}\phi^|h|.$$

`Indication`: Multiplier l'équation (2) par X_{t-h} pour $h > 0$, prendre la moyenne et ensuite déduire une réccurence sur $\gamma_X(h)$. On calculera ensuite $\gamma_X(0)$ en multipliant (2) par X_h.

Problème 3. Soit $\{X_t\}$ une série temporelle stationnaire. Trouver les coéfficients a et b du prédicteur linéaire

$$l(X_n) = aX_n + b$$

de X_{n+h} qui minimisent l'erreur en moyenne quadratique.

$$\min_{a,b} \mathbb{E}[(X_{n+h} - aX_n - b)^2]$$

Calculer ensuite le minimum de cet erreur.