Séance 2

Analyse des séries temporelles

Dans les problèmes pratiques on ne commence jamais avec un modèle mais avec des données observées $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Pour quantifier le degré de dépendance des données et choisir un modèle qui reflète cela on a besoin des définitions suivantes:

Définition 1 (Autocovariance et auto-corrélation d'un échantillon) *Soit* $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ *des observations d'une série temporelle. La moyenne de l'échantillon est donnée par*

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

La fonction d'autocovariance de l'échantillon est:

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-|h|} (x_{t+|h|} - \bar{x})(x_t - \bar{x}),\ -n < h < n.$$

La fonction d'autocorrélation de l'échantillon est

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)}.$$

Le premier pas dans l'analyse de toute série temporelle suppose traçer les données. L'analyse du graphique d'une série suggère souvent la décomposition suivante

$$X_t = m_t + s_t + Y_t,$$

où m_t est la composante de *trend* ou tendance, s_t est la composante saisonnière (périodique) et Y_t est la composante de bruit aléatoire qui est une série temporelle stationnaire. Il y a différentes facçons de détecter la composante de trend en l'absence de composante saisonnière c.a.d. quand la série sécrit comme

$$X_t = m_t + Y_t.$$

La façon la plus simple est la suivante:

- *Lissage par un filtre à moyenne mobile.* Soit q un entier non-négatif et considérons la moyenne mobile suivante

  $$W_t = \frac{1}{2q+1} \sum_{j=-q}^{q} X_{t-j}$$

  du processus $\{X_t\}$. Alors on peut prouver (voir TD) que $W_t \sim m_t$ si m_t est à peu près linéaire sur l'intervalle $[t-q, t+q]$. Par cette méthode on élimine la composante "bruit" en faveur du trend.

Exercices

1. Soit $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ les observations d'une série temporelle et $\hat{\rho}(h)$ la fonction d'autocorrélation de l'échantillon.

   (i) Si $x_t = a + bt$, où a et b sont des constantes avec $b \neq 0$ montrer que pour un h fixé on a
   $$\hat{\rho}(h) \to 1,\ n \to \infty.$$

   (ii) Si $x_t = c\cos(\omega t)$ où c, ω sont des constantes ($c \neq 0$ et $\omega \in (-\pi, \pi]$), montrer que pour un h fixé on a
   $$\hat{\rho}(h) \to \cos(\omega h),\ n \to \infty.$$

2. Si $m_t = c_0 + c_1 t + ... + c_p t^p$, montrer que $\nabla m_t = m_t - m_{t-1}$ est un polynôme de degré $p-1$ et par conséquent
   $$\nabla^{p+1} m_t = 0.$$

3. Considérons le filtre à moyenne mobile avec les poids $a_j = \frac{1}{2q+1}$, $-q \leq j \leq q$.

   (i) Si $m_t = c_0 + c_1 t$ montrer que
   $$\sum_{j=-q}^{q} a_j m_{t-j} = m_t.$$

   (ii) Si Z_t sont des variables indépendantes de moyenne nulle et variance σ^2 montrer que la moyenne mobile $A_t = \displaystyle\sum_{j=-q}^{q} a_j Z_{t-j}$ est "petite" pour des grands q dans le sens que $\mathbb{E}A_t = 0$ et $Var(A_t) = \dfrac{\sigma^2}{2q+1}$.