Exercices

1) (i) $x_t = a + bt$

$$\gamma(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-|h|} (x_{t+|h|} - \bar{x})(x_t - \bar{x})$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (a + bi) = a + \frac{n+1}{2} b$$

$$\gamma(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-|h|} \left(\cancel{a} + b(t+|h|) - \cancel{a} - \frac{n+1}{2} b\right)\left(\cancel{a} + bt - \cancel{a} - \frac{n+1}{2} b\right)$$

$$= \frac{1}{n} b^2 \sum_{t=1}^{n-|h|} \left(t + \frac{|h|}{2} - \frac{n+1}{2}\right)\left(t - \frac{n+1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{n} b^2 \left[\sum_{t=1}^{n-|h|} t^2 + (|h| - (n+1)) \sum_{t=1}^{n-|h|} t + \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \cdot (n - |h|) \right]$$

$$= \frac{1}{n} b^2 \left(\frac{(n-|h|)(n-|h|+1)(2(n-|h|)+1)}{6} + \frac{(n-|h|)(n-|h|+1)}{2} \cdot (|h| - (n+1)) \right.$$

$$\left. + \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \cdot (n - |h|) \right]$$

$$\gamma(0) = \frac{1}{n} b^2 \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - (n+1) \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \cdot n \right)$$

Donc $\hat{\rho}(h) = \dfrac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$ pour h fixé.

(ii) $x_t = c \cos(\omega t)$

$$\gamma(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-|h|} (c \cos(\omega(t+|h|)) - \bar{x})(c \cos(\omega t) - \bar{x})$$

$$\bar{x} = \frac{c}{n} \sum_{t=1}^{n} \cos(\omega t)$$

0

$$\sum_{t=1}^{n} \cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left(\sum_{t=0}^{n} e^{i\omega t} - 1\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{i\omega(n+1)}}{1-e^{i\omega}} - 1\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1-\cos(\omega(n+1)) - i\sin(\omega(n+1))}{1-\cos\omega - i\sin\omega} - 1\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{2\sin^2\frac{\omega(n+1)}{2} - 2i\sin\frac{\omega(n+1)}{2}\cos\frac{\omega(n+1)}{2}}{2\sin^2\frac{\omega}{2} - 2i\sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2}} - 1\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{\sin\frac{\omega(n+1)}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}} \cdot e^{\frac{i\omega n}{2}} - 1\right) = \frac{\sin\frac{\omega(n+1)}{2}\cos\frac{\omega n}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}} - 1$$

$$= \frac{\cos\frac{\omega(n+1)}{2}\sin\frac{\omega n}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}$$

On en déduit que $\bar{x} = \frac{c}{n} \cdot \underbrace{\frac{\cos\frac{\omega(n+1)}{2}\sin\frac{\omega n}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}}_{\text{borné pour } \omega \text{ fixé}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\gamma(h) = \frac{(n-|h|)\bar{x}^2}{n} - c\frac{\bar{x}}{n}\sum_{t=1}^{n-|h|}\left(\cos(\omega t) + \cos(\omega(t+|h|))\right)$$

$$+ \frac{c^2}{n}\sum_{t=1}^{n-|h|} \underbrace{\cos(\omega(t+|h|))\cos(\omega t)}_{\frac{1}{2}\left(\cos\omega|h| + \cos(\omega(2t+|h|))\right)}$$

$$= \frac{(n-|h|)\bar{x}^2}{n} - c\frac{\bar{x}}{n}\sum_{t=1}^{n-|h|}\left(\cos(\omega t) + \cos(\omega(t+|h|))\right)$$

$$+ \frac{c^2}{2}\frac{n-|h|}{n}\cos(\omega|h|) + \frac{c^2}{2n}\sum_{t=1}^{n-|h|}\cos(\omega(2t+|h|))$$

Comme toutes les sommes sont bornées $\gamma(h) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{c^2}{2}\cos(\omega|h|)$

$\Rightarrow \hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \cos(\omega|h|) = \cos(\omega h)$

2) $m_t = a_0 + a_1 t + \dots + a_p t^p$

$\nabla m_t = m_t - m_{t-1}$

$= a_0 + a_1(t + \dots + a_p t^p$

$- a_0 - a_1(t-1) - \dots - a_p(t-1)^p$

On voit que dans le terme $t^p - (t-1)^p$ le terme t^p disparait

$\Rightarrow$ ∇m_t est un polynôme de degré $p-1$

$\Rightarrow$ $\nabla^2 m_t$ est un pol de degré $p-2$ ...

$\nabla^p m_t$ est constant $\Rightarrow$ $\nabla^{p+1} m_t = 0$.

3). (i) $\sum_{j=-q}^{q} a_j m_{t-j} = \frac{1}{2q+1} \sum_{j=-q}^{q} (c_0 + c_1(t-j))$

$= c_0 + c_1 t - \underbrace{\frac{c_1}{2q+1} \sum_{j=-q}^{q} j}_{=0} = c_0 + c_1 t = m_t$

(ii) $\text{Var}(A_t) = \text{cov}(A_t, A_t) = \frac{1}{(2q+1)^2} \sum_{j=-q}^{q} \text{Var}(Z_{t-j})$

comme Z_t sont indépendantes

$\Rightarrow$ $\text{Var}(A_t) = \frac{\sigma^2}{2q+1}$.

Il est évident que $E(A_t) = 0$.

4). Soit $m_t = c_0 + c_1 t + \dots + c_k t^k$ un polynôme de degré k. On a que

$c_0 + c_1 t + \dots + c_k t^k = \sum_{j=-q}^{q} a_j [c_0 + c_1(t-j) + \dots + c_k(t-j)^k$