习题课 Ch5

1 求下列矩阵的特征值与特征向量

(2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$

解: STEP1. 求特征值

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda-3 & -2 & 1 \\ 2 & \lambda+2 & -2 \\ -3 & -6 & \lambda+1 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda E - A| = (\lambda-3)(\lambda+2)(\lambda+1) - 12 - 12 + 3(\lambda+2) + 4(\lambda+1) - 12(\lambda-3)$$
$$= \lambda^3 - 12\lambda + 16$$

计算(猜出?) λ 的方法 (取巧?)

记 $\lambda E-A$ 的行向量 $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$

尝试 $\beta_1 // \beta_2 \iff \dfrac{\lambda-3}{2} = \dfrac{-2}{\lambda+2} = \dfrac{1}{-2}$

$$\iff \lambda = 2$$

$$\Rightarrow \lambda E - A = 2E - A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \lambda = 2$ 的特征子空间维数为 $n - r(2E-A)$
$= 3 - 1 = 2$

$\Rightarrow \lambda = 2$ 至少有 2 重根

$\Rightarrow |\lambda E - A|$ 含有 $(\lambda-2)^2$

则另一特征值 λ' 满足

$$(\lambda-2)^2(\lambda-\lambda') = \lambda^3 - 12\lambda + 16$$

$\Rightarrow \lambda' = -4$

STEP 2. 求特征向量

- $\lambda=2$

  $(\lambda E-A)X=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$

  $\Rightarrow x_1+2x_2-x_3=0$

  可取 x_2, x_3 为自由未知量

  取特征向量 $\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

- $\lambda=-4$

  $(\lambda E-A)=\begin{pmatrix}-7 & -2 & 1\\2 & -2 & -2\\-3 & -6 & -3\end{pmatrix}$

  求 $(\lambda E-A)X=0$ 得. $X=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$

综上所述 $\lambda=2$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\lambda=-4$ . . . . $\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$

#

(4) $\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$

解：STEP1. 求特征值 $\begin{pmatrix} \lambda & & & -1 \\ & \lambda & -1 & \\ & -1 & \lambda & \\ -1 & & & \lambda \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} \lambda & & & -1 \\ & \lambda & -1 & \\ & -1 & \lambda & \\ -1 & & & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & & \\ -1 & \lambda & & \\ & & \lambda & -1 \\ & & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix}^2 = (\lambda^2-1)^2 = (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2$$

得特征值 $\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = -1$

STEP 2. 求特征向量.

$\lambda = 1$：$\lambda E - A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 1 & & \\ & & 1 & -1 \\ & & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & & \\ & & 1 & -1 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$

取自由变量 x_2, x_4

得特征向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = -1$：$\lambda E - A \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & & \\ -1 & -1 & & \\ & & -1 & -1 \\ & & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$

取自由变量 x_2, x_4

得特征向量 $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

综上所述 属于特征值 1 的特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

-1 . - - . $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

#.

2. 求特征值与特征向量

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & & \vdots \\ 1 & 1 & \ddots & & 1 \\ \vdots & & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

解：STEP 1. 求特征值

$$|\lambda E-A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \lambda & & -1 \\ \vdots & & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[i=2,\ldots,n]{r_1+r_i} \begin{vmatrix} \lambda-(n-1) & \lambda-(n-1) & \cdots & \lambda-(n-1) \\ -1 & \lambda & \ddots & -1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\longrightarrow (\lambda-(n-1)) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \lambda & \cdots & -1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[i=2,\ldots,n]{\lambda_i+\lambda_1} (\lambda-(n-1)) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & \lambda+1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-(n-1))(\lambda+1)^{n-1}$$

得特征值 $\lambda = n-1$ （1重根）

$\lambda = -1$ （$(n-1)$重根）

STEP 2. 求特征向量

∘ $\lambda = n-1$：

$$(\lambda E-A)X = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ & & & \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

得解 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

∘ $\lambda = -1$：

$$(\lambda E-A)X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

取自由变量 $x_2, x_3, \ldots, x_n$.

得解系 $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

#

3. 记 A 为可逆，有 $A\alpha = \lambda\alpha$

回顾 P.57. 求证： $A^* \cdot \alpha = \dfrac{|A|}{\lambda} \cdot \alpha$

$\mathrm{Rmk}: |A|E = \begin{pmatrix} |A| & & \\ & \ddots & \\ & & |A| \end{pmatrix}$

Rmk: "A可逆" 不能少

Pf. 由 A 可逆得： $A^* = |A|E \cdot A^{-1}$

$$\begin{aligned} \therefore A^*\alpha &= |A|E \cdot A^{-1} \cdot \alpha \\ &= |A|E \cdot \lambda^{-1}\alpha \\ &= \frac{|A|}{\lambda} \cdot \alpha \end{aligned}$$

#

4. 求： A^k where $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ & -3 & 4 \\ & 4 & 3 \end{pmatrix}$

解： STEP 1. 求特征值

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda-1 & -4 & -2 \\ & \lambda+3 & -4 \\ & -4 & \lambda-3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\lambda+3}{-4} = \frac{-4}{\lambda-3}$$

$$\lambda^2 = 25$$

有特征值 $\lambda = \pm 5$（猜 2nd 行向量与 3rd 共线）

$\lambda = 1$ （ 1st - - 2nd ）

STEP 2. 求特征向量

$\lambda_1 = 5 \rightsquigarrow \alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -5 \rightsquigarrow \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = 1 \rightsquigarrow \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & 1/5 & 2/5 \\ & 1 & & & -2/5 & 1/5 \\ & & 1 & 1 & & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2(5^{k-1}+(-5)^{k-1}) & 4\,5^{k-1}-(-5)^{k-1}-1 \\ 0 & 2(5^{k-1}-(-5)^{k-1}) & 2(5^{k-1}+(-5)^{k-1}) \\ 0 & 2(5^{k-1}+(-5)^{k-1}) & 4\,5^{k-1}-(-5)^{k-1} \end{pmatrix}$$

STEP 3: 求 P 与 P^{-1}

$$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} & 1/5 & 2/5 \\ & -2/5 & 1/5 \\ 1 & & -1 \end{pmatrix}$$

STEP 4: 求 A^k

由 $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} 5 & & \\ & -5 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ 得

$$A^k = (P\Lambda P^{-1})^k = P \cdot \Lambda^k \cdot P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & \\ 2 & 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & & \\ & -5 & \\ & & 1 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} & 1/5 & 2/5 \\ & -2/5 & 1/5 \\ 1 & & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot 5^{k-1}(1+(-1)^{k-1}) & 5^{k-1}(4-(-1)^{k-1})-1 \\ & 2 \cdot 5^{k-1}(1-(-1)^{k-1}) & 2\,5^{k-1}(1+(-1)^{k-1}) \\ & 2 \cdot 5^{k-1}(1+(-1)^{k-1}) & 5^{k-1}(4-(-1)^{k-1}) \end{pmatrix}$$

5 设 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为 A 的特征值，对应特征向量为 α_1, α_2
求证 $\alpha_1+\alpha_2$ 不是 A 的特征向量

Pf. 反证，假设 $\alpha_1+\alpha_2$ 是 A 属于 λ 的特征向量.

i.e. $A(\alpha_1+\alpha_2) = \lambda(\alpha_1+\alpha_2)$

又 $A\alpha_1 + A\alpha_2 = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2$

$\therefore (\lambda_1-\lambda)\alpha_1 + (\lambda_2-\lambda)\alpha_2 = 0$

由不同特征值的特征向量线性无关得

$\lambda_1-\lambda = \lambda_2-\lambda = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda = \lambda_2$ 与 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 矛盾 #

9. 判断下列矩阵是否对角化？
若可以，则求 T s.t. $T^{-1}AT$ 对角.

(2) $A = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$

Pf. $|\lambda E-A| = \begin{vmatrix} \lambda & & -1 \\ & \lambda-1 & \\ -1 & & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+1)$

$\lambda=1$: $\lambda E-A = \begin{pmatrix} 1 & & -1 \\ & 0 & \\ -1 & & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & -1 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

解系 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda=-1$: $\lambda E-A = \begin{pmatrix} -1 & & -1 \\ & -2 & \\ -1 & & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ & 1 & \\ & & \end{pmatrix}$

解系 $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore$ 取 $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 有 $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

(4) $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & -4\\ 7 & -5 & -10\\ -3 & 2 & 3\end{pmatrix}$

解 $\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda-3 & 2 & 4\\ -7 & \lambda+5 & 10\\ 3 & -2 & \lambda-3\end{pmatrix}$

$\Rightarrow |\lambda E-A| = \lambda^3-\lambda^2+\lambda-1$

$=(\lambda-1)(\lambda^2+1) = (\lambda-1)(\lambda-i)(\lambda+i)$

① $\lambda=1$:

$\lambda E-A = \begin{pmatrix}-2 & 2 & 4\\ -7 & 6 & 10\\ 3 & -2 & -2\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ & 1 & 4\\ & & 0\end{pmatrix}$

得解空间维数为 $n-\mathrm{rank}(\lambda E-A)=3-2=1$，取基础解系 $\begin{pmatrix}-2\\-4\\1\end{pmatrix}$

由 Thm 2.1（可对角化 $\Leftrightarrow \exists\ n$ 个线性无关特征向量）

得 A 不与实对角阵相似

② $\lambda=i$:

$\lambda E-A = \begin{pmatrix}i-3 & 2 & 4\\ -7 & i+5 & 10\\ 3 & -2 & i-3\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}5 & -(i+3) & -2(i+3)\\ & 1 & -2i+3\\ & & 0\end{pmatrix}$

得基础解系 $\begin{pmatrix}i-1\\2i-3\\1\end{pmatrix}$

③ $\lambda=-i$: 略..

13 具有相同特征值的矩阵的可对角性不一定相同.

试判断以下两个矩阵是否可对角化

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 4 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ & 4 & 6 \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

解: 易得 A, B 的特征值为 2(二重), 4.

1). 解 $(\lambda E - A)X = 0$

1.1) $\lambda = 2$ 时

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \\ & -2 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

∴ 解空间维数 $n - \text{rank}(2E-A) = 3-2 = 1$.

i.e. 属于 2 的特征子空间为 1 维.

1.2). $\lambda = 4$ 时

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \\ & 0 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

同理, 属于 4 的特征子空间为 1 维.

∴ A 只有 $1+1=2$ (<3) 个线性无关的特征向量

∴ A 不可对角化

2) 解 $(\lambda E - B)X = 0$

1.1) $\lambda = 2$ 时

$$\lambda E - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ & -2 & -6 \\ & & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

∴ 属于 2 . . . . 维数为 $3-1=2$.

1.2) $\lambda = 4$ 时

$$\lambda E - B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ & & -6 \\ & & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

∴ 属于 4. . . . . . . $3-2=1$.

∴ B 有 $2+1=3$ 个线性无关的特征向量

∴ B 可对角化 #

以下求解特征值的方法由杨助教指出（Ref [李扬高代强化讲义 §1.2)

Claim 1. 若 $f(x)$ 为整系数多项式 $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$

$\frac{p}{q}$ 为 $f(x)$ 的（有理）根

$\Rightarrow \begin{cases} p \mid a_0 & (p\text{是}a_0\text{的因子}) \\ q \mid a_n \end{cases}$

$f(x) = (x - \frac{p}{q}) \cdot g(x)$

$= \frac{1}{q}(qx - p) \cdot g(x)$

$|\lambda E - A| = x^n + \dots + a_0$

Claim 2. 特别地，如果 $a_n = 1$.

则根 $\frac{p}{q}$ 中的 $q = \pm 1$. ($\Rightarrow$ 根是整数)

Claim 3. $\frac{p}{q}$ 为 $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ 的有理根

$\Rightarrow \begin{cases} p+q \mid f(-1) \\ p-q \mid f(1) \end{cases}$

例 1.7 of Ref 求 $f(x) = 4x^4 - 7x^2 - 5x - 1$ 的所有有理根.

解：由 Claim 1：$\begin{cases} p \mid (-1) \Rightarrow p = (\pm) 1 \\ q \mid 4 \Rightarrow q = (\pm)\ 1, 2, 4. \end{cases}$

$\therefore$ 有理根 $\frac{p}{q}$ 可能为 ± 1, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{4}$.

由 Claim 3：$\begin{cases} p+q \mid f(-1) = 1 \\ p-q \mid f(1) = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \pm 1\ (\times), +\frac{1}{2}\ (\times) \\ -\frac{1}{2}\ (\checkmark), \pm\frac{1}{4}\ (\times) \end{matrix}$

$-\frac{1}{2}$ 满足必要条件

再验证 $x = -\frac{1}{2}$ 确为 $f(x) = 0$ 的有理根即可 #

14 求使下列矩阵可角化的正交矩阵 T

1)
$$A=\begin{pmatrix}6&2&4\\2&3&2\\4&2&6\end{pmatrix}$$

解：STEP 1. 求特征值.

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-6&-2&-4\\-2&\lambda-3&-2\\-4&-2&\lambda-6\end{vmatrix}=\lambda^3-15\lambda^2+48\lambda-44$$

$\lambda=\frac{p}{q}$ 为 $|\lambda E-A|=0$ 的根的必要条件

① $\overset{\text{claim1}}{p\,|\,(-44)}$ $\Rightarrow$ p 可 $\pm1,\pm2,\pm4,\pm11,\pm22,\pm44$.

② $\overset{\text{claim2}}{q\,|\,1}$ $\Rightarrow$ q 可为 ±1

③ claim3 $\begin{cases}p+q\,|\,f(-1)=-108=-2^2\cdot3^3 & \Rightarrow \text{排除 } -1,4,-11,\pm22,\pm44\\ p-q\,|\,f(1)=-10=-2\cdot5 & \text{排除 } -2,\end{cases}$

可见,可能的根有 $1,2,-4,11$

代入验证，只有 $2,11$

待定系数法求 λ'

$$(\lambda-\lambda')(\lambda-2)(\lambda-11)=\lambda^3-15\lambda^2+48\lambda-44$$

$\Rightarrow \lambda'=2$

综上所述，特征值 2(二重)，11

STEP 2. 求特征向量.

① $\lambda=2$：

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}-4&-2&-4\\-2&-1&-2\\-4&-2&-4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&1&2\\&&0\\&&\end{pmatrix}$$

取 x_2,x_3 为自由自变量

取基础解系 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

② $\lambda=11$

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}5&-2&-4\\-2&8&-2\\-4&-2&5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-4&1\\&-2&1\\&&0\end{pmatrix}$$

取 x_3 为自由自变量

取基础解系 $\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$

STEP 3：特征向量的正交化

1). $\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

单位化 β_1 得 $\gamma_1 = \frac{\beta_1}{|\beta_1|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{2}{\sqrt5} \\ 0 \end{pmatrix}$

2) $\beta_2 = \alpha_2 - (\alpha_2, \gamma_1)\cdot\gamma_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt5}\cdot\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{2}{\sqrt5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$

单位化 $\gamma_2 = \frac{\beta_2}{|\beta_2|} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt5} \\ -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{\sqrt5}{3} \end{pmatrix}$

3) $\beta_3 = \alpha_3 - (\alpha_3, \gamma_1)\cdot\gamma_1 - (\alpha_3, \gamma_2)\cdot\gamma_2$

$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 0\cdot\gamma_1 - 0\cdot\gamma_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\gamma_3 = \frac{\beta_3}{|\beta_3|} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

STEP 4. 求正交矩阵

$T = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt5} & -\frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt5} & -\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt5} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

s.t. $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 11 \end{pmatrix}$

#

(3) $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

解: STEP 1. 求特征值

$$|\lambda E-A| = \begin{vmatrix} \lambda-4 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda-4 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda-4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{r_4+r_3}} \begin{vmatrix} \cdot & & \cdot & \\ & & & \\ & - & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \lambda-3 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{c_3-c_4}} \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & 2 & \vdots \\ & & -2 & \\ \cdot & \cdot & \lambda-5 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{r_3-r_2}} \begin{vmatrix} \vdots & - & - & \\ & - & & \cdot \\ 0 & 3-\lambda & \lambda-3 & 0 \\ & & & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{c_2+c_3}} \begin{vmatrix} \lambda-4 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & \lambda-6 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-3 & \\ & & & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-4 & 3 \\ 1 & \lambda-6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda-3 & \\ & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$= \left((\lambda-4)(\lambda-6)-3\right)(\lambda-3)^2$$

$$= (\lambda-3)^3(\lambda-7)$$

$|\lambda E-A|=0$ 有根 3(三重), 7

STEP 2. 特征向量

1) $\lambda=3$

$$\lambda E-A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ & & & 0 \\ & & & \end{pmatrix}$$

得 $\lambda E-A=0$ 的基础解系

$$\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) $\lambda=7$

$$\lambda E-A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

得 $\lambda E-A=0$ 的基础解系

$$\alpha_4=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

STEP 3. 单位正交化 $\{\alpha_i\}$

1) $\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$

单位化 $\gamma_1 = \frac{\beta_1}{|\beta_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$

2) 正交化 $\beta_2 = \alpha_2 - (\alpha_2, \gamma_1)\cdot\gamma_1$

$-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}$

单位化 $\gamma_2 = \beta_2/|\beta_2| = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$

3) 正交化 $\beta_3 = \alpha_3 - (\alpha_3, \gamma_1)\cdot\gamma_1 - (\alpha_3, \gamma_2)\cdot\gamma_2$

$= \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix} - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} - \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}$

单位化 $\gamma_3 = \frac{\beta_3}{|\beta_3|} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\3\end{pmatrix}$

4) 正交化 $\beta_4 = \alpha_4$ （$\because$ 不同特征值的特征向量正交）

单位化 $\gamma_4 = \frac{\beta_4}{|\beta_4|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$

STEP 4. 求正交矩阵 T

$T = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{2\sqrt{3}} & \frac{-1}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{3}{2\sqrt{3}} & \frac{-1}{2}\end{pmatrix}$

s.t. $T^{-1}AT = \begin{pmatrix}3 & & & \\ & 3 & & \\ & & 3 & \\ & & & 7\end{pmatrix}$

#

15. 求证：如果实对称 A 满足 $A^2=A$

那么 $\exists$ 正交 T s.t. $T^{-1}AT=\begin{pmatrix} E_r & \\ & 0 \end{pmatrix}$

Pf. $\because$ A 是实对称，

$\therefore$ $\exists$ 正交 T_1 s.t. $T_1^{-1}AT_1=\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

得 $A=T_1\Lambda T_1^{-1}$

$\therefore$ $T_1\Lambda T_1^{-1}=A=A^2=(T_1\Lambda T_1^{-1})^2=T_1\Lambda^2T_1^{-1}$

$\therefore$ $\Lambda=\Lambda^2$ 得 $\lambda_i=\lambda_i^2$ $i=1,\dots,n$.

$\therefore$ $\lambda_i=0$ 或 1.

记 $T_1=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ 则

恰有 $r=\mathrm{rank}(A)$ 个 α_i s.t. $A\alpha_i=\alpha_i$

恰当重排 α_i 的顺序得 α_i'

s.t. $\begin{cases} A\cdot\alpha_i'=\alpha_i' & i=1,\dots,r \\ A\cdot\alpha_i'=0. & i=r+1,\dots,n \end{cases}$

则 $T=(\alpha_1',\dots,\alpha_n')$

满足 $T^{-1}AT=\begin{pmatrix} E_r & \\ & 0 \end{pmatrix}$ #

17 求证：若 n 阶方阵 A 满足 $A^2=A$.

则 A 的任一特征值 λ 有 $\lambda=0$ 或 1.

Pf. 记 α 为 A 属于 λ 的特征向量

i.e. $A\alpha=\lambda\alpha$.

$A\alpha=A^2\alpha=A(\lambda\alpha)=\lambda\cdot A\alpha=\lambda^2\alpha$.

$\therefore$ $\lambda^2\alpha=\lambda\alpha$

由 $\alpha\neq0$ 得 $\lambda^2=\lambda$. $\Rightarrow$ $\lambda=0$ 或 1 #

19. 设 2×2 的 A 有 $\mathrm{tr}A=8$ & $|A|=12$

求 A 的特征值

解：A 的特征值 λ_1,λ_2 满足

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2=\mathrm{tr}A=8 \\ \lambda_1\cdot\lambda_2=|A|=12 \end{cases}$$

得 A 的特征值为 2 和 6 #

21 设 A, B 为 n 阶方阵

(1) 求证：若 λ 为 AB 的一个非零特征值，

则 λ 也是 BA 的一个特征值。

Pf. 记 α 为 AB 属于 λ 的特征向量

i.e. $AB\cdot\alpha = \lambda\alpha$

记 $\beta = B\alpha$，则 $\lambda \neq 0 \Rightarrow \beta \neq 0$

$\therefore BA\cdot\beta = B\cdot\lambda\alpha = \lambda B\alpha = \lambda\beta$

由 $\beta \neq 0$ 得 λ 为 BA 的特征值 #

(2) 求证：若 $\lambda=0$ 为 AB 的一个特征值

则 $\lambda=0$ 也是 BA 的特征值。

Pf. ① A 退化时。

$\exists\ \alpha \neq 0$ s.t. $A\alpha = 0$

则 $BA\cdot\alpha = B\cdot 0 = 0$ 得 0 为 BA 特征值。

② A 非退化时

由 0 为 AB 特征值得

$\exists\ \alpha \neq 0$ s.t. $AB\cdot\alpha = 0$。

由 A 非退化得 $B\alpha = 0$

取 $\beta = A^{-1}\alpha \neq 0$

$\therefore BA\cdot\beta = BA\cdot A^{-1}\alpha = B\alpha = 0$

$\Rightarrow 0$ 为 BA 特征值 #

23. 求证：若方阵 A, B 能被同一可逆 P 对角化

则 $AB = BA$

$P^{-1}AP = \Lambda_A \quad P^{-1}BP = \Lambda_B$

Pf. 记对角矩阵 Λ_A, Λ_B 满足

$$\begin{cases} P^{-1}AP = \Lambda_A \\ P^{-1}BP = \Lambda_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = P\Lambda_A P^{-1} \\ B = P\Lambda_B P^{-1} \end{cases}$$

则 $AB = P\Lambda_A P^{-1} P\Lambda_B P^{-1} = P\Lambda_A\Lambda_B P^{-1}$

$= P\Lambda_B\Lambda_A P^{-1}$ （对角矩阵间的乘法可交换）

$= P\Lambda_B P^{-1} \cdot P\Lambda_A P^{-1}$

$= B \cdot A$ #

24. 求证：n 阶方阵 A 有 n 重特征值

则 A 可对角化 $\Leftrightarrow A = a \cdot E$.

Pf: $\Rightarrow$ A 可对角化 则 $\exists$ 可逆 P

s.t. $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{pmatrix}$

$\therefore A = P \cdot aE \cdot P^{-1}$

$= aE \cdot PP^{-1} = aE$.

$\Leftarrow$ 显然 #