Ch 6. 二次型与二次曲面

钟友良

zhongyl@scut.edu.cn

Outline

Outline

Outline

一般矩阵 A $\xrightarrow{\text{特别地}}$ 实对称矩阵 A

$\lambda_i \in \mathbb{R}$

$(\leq n)$个特征值 λ_i $\quad$ n个实特征值 λ_i

$\updownarrow$

$(\leq n)$个线性无关特征向量 α_i $\quad$ n个 …………… α_i

$\downarrow$ 单位正交化

刚好 n个"线无" $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ $\quad$ n个 正交 … $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$

$\updownarrow$

P^{-1}存在 $\quad$ $P^{-1}=P^T$

可逆 $P=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ $\quad$ 正交 $T=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$

s.t. $P^{-1}AP=\Lambda = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$ $\quad$ s.t. $\underset{\displaystyle T^TAT}{\underset{\parallel}{T^{-1}AT}} = \underset{\displaystyle \begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}}{\underset{\parallel}{\Lambda}}$

几何：一般 A

"齐次"线性在$\{e_1,\dots,e_n\}$表示

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

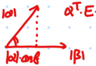
$\alpha \longmapsto f(\alpha)$

$\overset{\displaystyle \alpha}{\parallel}$

$(e_1,\dots,e_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \longmapsto (e_1,\dots,e_n)\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

实对称 A

"内积,"



$\alpha^T\cdot E\cdot\beta$

$(\cdot,\cdot)_A: \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$(\alpha,\beta) \longmapsto (\alpha,\beta)_A$

$(e_1,\dots,e_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ $\quad$ $(e_1,\dots,e_n)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$

$(\alpha,\beta)_A := (x_1,\dots,x_n)\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$

$= \alpha^TA\beta$

$A=A^T \Leftrightarrow (\alpha,\beta)_A=(\beta,\alpha)_A$

齐次二次多项式

定义 1.1

含有 n 个变量 $x_1, \ldots, x_n$ 且系数 $a_{i,j} \in F$ 的二次齐次多项式

常数项 $b=0$
一次项 $a_i=0$

$$f(x) = \sum_{1 \le i \le n} a_{i,i} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} \boxed{2} a_{i,j} x_i x_j$$

称为关于 F 的一个 n 元二次型 (简称 二次型).

- 实二次型: $F = \mathbb{R}$
- 复二次型: $F = \mathbb{C}$

二次型的矩阵表示

令

$$a_{j,i} = a_{i,j}$$

则

$$2a_{i,j}x_ix_j = a_{i,j}x_ix_j + a_{j,i}x_jx_i.$$

二次型 $f(x)$ 可表为

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) &= \sum_i \boxed{x_i(\sum_j a_{i,j}x_j)} \\ &= (x_1 \ldots x_n) \begin{pmatrix} \sum_j a_{1,j}x_j \\ \vdots \\ \sum_j a_{n,j}x_j \end{pmatrix} \end{aligned}$$

二次型的矩阵表示续

$$
\begin{aligned}
\cdots =& (x_1 \ldots x_n) \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
=& X^T A X.
\end{aligned}
$$

其中

- 矩阵 A 为 二次型 $f(x)$ 的矩阵
- 列向量 $X = (x_1 \ldots x_n)^T$

可见

- A 与 f 一一对应
- A 为对称矩阵

例子

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \\ &= (x_1, x_2)\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ & \frac{1}{2} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} \\ & & & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} g(x_1, \ldots, x_n) &= x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n \\ &= (x_1, \ldots, x_n)\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & \ldots & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & \ldots & 0 & 0\\ \vdots & & & & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Q: 能否通过替换变量来是的二次型矩阵为对角?

变量的线性替换

定义 1.1

数域 F 上由变量 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 到变量 $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ 的 线性变换 是指以下形式的表达式

$$\underline{X = CY},\qquad \begin{cases} x_1 = g_1(y_1,\dots,y_n) \\ x_2 = g_2(y_1,\dots,y_n) \\ \vdots \\ x_n = g_n(y_1,\dots,y_n) \end{cases}$$

其中 C 为 F 上的 $n \times n$ 矩阵.

$\downarrow$ g_i 线性

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + \cdots + c_{1n}y_n \\ \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

非退化线性替换

定义 (非退化线性替换)

称线性替换是 非退化的 (或 可逆的), 如果系数矩阵 C 是可逆的.

对于 X 的一个非退化线性替换

$$X = CY$$

由 C 的可逆性可得 Y 的一个非退化线性替换

$$Y = C^{-1}X.$$

二次型 + 非~~线性~~退化线性替换

考虑关于变量 $X = (x_1, \ldots, x_n)$ 的二次型

$$f(x_1, \ldots, x_n) = X^T A X.$$

通过线性替换 $X = CY$ 用 Y 替换 X, 那么二次型

$$\begin{aligned} f(X) &= f(CY) \\ &= (CY)^T A (CY) \\ &= Y^T (C^T A C) Y \\ &= g(Y). \end{aligned}$$

标准形

如果线性替换 C s.t. $C^TAC = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ 为对角矩阵, 那么

$$\begin{aligned} g(Y) &= Y^T \Lambda Y \\ &= \sum_i \lambda_i y_i^2. \end{aligned}$$

我们称如何找出上述 C 为 二次型化平方和问题.
称只含平方项的二次型为 标准形.

合同于

定义 1.3

二次型标准化.

称 $n \times n$ 矩阵 A **合同于** B, 如果存在可逆矩阵 C s.t.

$$B = C^T AC.$$

验证"合同"是等价关系

- 反身: $C=E$
- 对称 $A=(C^T)^{-1}B\cdot C^{-1}=(C^{-1})^T\cdot B\cdot C^{-1}$
- 传递 $\left.\begin{aligned} B &= C_1^TAC_1 \\ C &= C_2^TBC_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C = C_2^TBC_2 = C_2^T(C_1^TAC_1)C_2 = (C_1C_2)^TA(C_1C_2)$

合同也是一种等价关系. 回顾:

- "等价于": Def 3.2 of Sec 2.3

  求矩形 rank

  求解方程

  $$B = PAQ$$

  初等矩阵 $\left\{\begin{array}{l} 交换 \\ 数乘 \\ 加 \end{array}\right.$

  A

  阶梯化

  $P\cdot A=$

  列交换 $(Q\cdot Q=E)$

  $PAQ=$

  $AX=b$

  $PA\cdot X=Pb$

  $PAQ\cdot QX=Pb$

  $PAQ\cdot y=Pb$

- "相似": Def 2.1 of Sec 5.2

  对角化 $\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$

  特征值 $\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_n & \\ & & & 0\end{pmatrix}$

  $$B = P^{-1}AP$$

  可逆

定理 1.1

定理 1.1

如果 A 经过非退化线性替换 C 得到 B, 那么

$$B = C^T A C.$$

得到 A 合同于 B.

回顾

实对称矩阵可对角化: 对于实对称矩阵 A, 存在正交矩阵 T s.t. T^TAT 型为对角矩阵 Λ.

可见实对称矩阵 A 与对角阵 Λ 相似.

由于正交矩阵 T 满足 $T^T = T^{-1}$, 可见

$$
\begin{aligned}
\Lambda &\overset{\text{合同}}{=} T^TAT \\
&\underset{\text{相似}}{=} T^{-1}AT.
\end{aligned}
$$

得 A 合同于 Λ.

如果替换 T 为正交矩阵, 那么 “相似” $\Leftrightarrow$ “合同”.

实二次型的标准化

定理 1.2

如果二次型 $f(X) = X^TAX$ 为实二次型, 那么存在非退化线性替换

对称

$(e_1, \dots, e_n)$

$$X = \boxed{C}Y$$

$(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

s.t.

$$C^TAC = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

可得

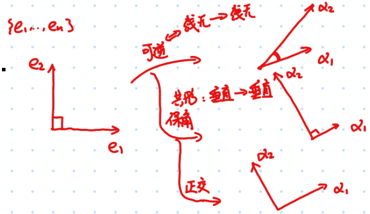
$$\begin{aligned} f(X) = f(CY) &= (CY)^TA(CY) \\ &= Y^T(C^TAC)Y = Y^T\Lambda Y \\ &= \sum_i \lambda_i y_i^2. \end{aligned}$$

正交变换

由定理 1.2 可得, 只要是实二次型 A, 总能找到可逆 C 化 A 为标准形.
进一步地, 利用定理 3.6 (实对称矩阵的对角化), 还能找到 正交变换

$$X = CY$$

化 A 为标准形.



例题 1.1

例题 1.1

用正交~~变化~~变换将以下二次型化为标准形

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3.$$

STEP 1. 求特征值.

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda-2 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & -2 & \lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{matrix}$$

$$|\lambda E - A| = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - 4\lambda - 4(\lambda-2)$$

$$= \lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 2) - 4\lambda - 4\lambda + 8$$

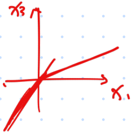
$$= \lambda^3 - 3\lambda^2 - 6\lambda + 8$$

$\underline{\lambda = 1}$: $= (\lambda-1)(\lambda^2 + a\lambda + b)$, $a = -2$, $b = -8$

$\beta_1 - \beta_3 = (\lambda-2, 0, -\lambda)$

$\beta_1 - \beta_3 \parallel \beta_2 \Leftrightarrow \frac{\lambda-2}{-2} = \boxed{\frac{0}{\lambda-1}} = \frac{-\lambda}{-2} = \frac{0}{0}$

$\frac{1}{2}$



$$f(X) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

STEP 2: 求特征向量 α_i

STEP 3: α_i 单位正交化 γ_i

$\beta_1 = \alpha_1 \rightsquigarrow \gamma_1 = \frac{\beta_1}{|\beta_1|}$

$\beta_2 = \alpha_2 - (\alpha_2, \gamma_1)\gamma_1 \rightsquigarrow \gamma_2 = \frac{\beta_2}{|\beta_2|}$

$\beta_3 = \alpha_3 - (\alpha_3, \gamma_1)\gamma_1 - (\alpha_3, \gamma_2)\gamma_2 \rightsquigarrow \gamma_3 = \frac{\beta_3}{|\beta_3|}$

$\Rightarrow T = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$

$T^TAT = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$

例题 1.2

例题 1.2

用配方法化以下二次型为标准形

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2 + 4x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3.$$

$$\underbrace{(x_1+2x_2+x_3)^2}_{y_1}-4x_1x_2-2x_1x_3-4x_2x_3-3x_2^2+4x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$$

$$-3x_2^2+2x_2x_3$$

$$=\underbrace{-3\left(x_2^2-\frac{2}{3}x_2x_3+\frac{1}{9}x_3^2\right)}_{y_2=x_2-\frac{1}{3}x_3}+\underbrace{\frac{1}{3}x_3^2}_{y_3}$$

取 $\begin{cases} y_1 = x_1+2x_2+x_3 \\ y_2 = x_2-\frac{1}{3}x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$ $\quad Y=\begin{pmatrix}1&2&1\\ &1&-\frac{1}{3}\\ & &1\end{pmatrix}X$

有 ……

$=y_1^2-3y_2^2+\frac{1}{3}y_3$ 线性替换 $X=\begin{pmatrix}1&2&1\\ &1&-\frac{1}{3}\\ & &1\end{pmatrix}^{-1}Y$

定理 1.3 & 1.4

我们可以将定理 1.2 从 $\mathbb{R}$ 推广到一般数域 F.

定理 1.3

数域 F 上的任意一个二次型总能通过非退化线性替换化为标准形.

定理 1.3 可表述为以下定理.

定理 1.4

数域 F 上的任意对称矩阵都合同于一个对角矩阵.

例题 1.3

例题 1.3

化以下二次型为标准形

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

y_1+y_2 $\quad$ y_1-y_2

定理 1.5

如果 $B = C^{-1}AC$ 形如

$$\begin{pmatrix} b_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & b_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

那么

$$r = r(B) = r(C^{-1}AC) = r(A).$$

定理 1.5

定义

二次型的 秩 是其对应矩阵的秩.

定理 1.5

如果秩为 r 的二次型 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 可化为

$$g(y_1, \ldots, y_n) = b_1 y_1^2 + \cdots + b_r y_r^2.$$

$r = r(A)$

$d_1 y_1^2$

$= (\sqrt{d_1} y_1)^2$

复二次型

考虑 $F=\mathbb{C}$ 上的标准形

$$f(y_1,\dots,y_n)=d_1y_1^2+\dots d_ry_r^2,$$

其中, $d_i\neq 0$ 取 $\sqrt{d_i}=\sqrt{|d_i|}\times i$ if $d_i<0$

对复数 $d_i\neq 0$, $\sqrt{d_i}$ 有意义. 可取线性替换

$$\begin{pmatrix} z_1\\ \vdots\\ z_r\\ z_{r+1}\\ \vdots\\ z_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sqrt{d_r} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_r\\ y_{r+1}\\ \vdots\\ y_n \end{pmatrix}$$

复二次型的规范形

用 z 替换 y 得

$$f(z_1, \ldots, z_n) = z_1^2 + \ldots z_r^2.$$

称 $z_1^2 + \cdots + z_r^2$ 为复二次型 f 的 规范形, 其中 r 为 f 的秩.

实二次型的规范形

考虑 $F=\mathbb{R}$ 的标准形

$$\begin{aligned} f(y_1,\ldots,y_n) = d_1 y_1^2 + \ldots d_p y_p^2 \\ -(d_{p+1}y_{p+1}^2+\cdots+d_r y_r^2), \end{aligned}$$

其他 $d_i > 0$.
取形同 $F=\mathbb{C}$ 情况的线性替换, 得实二次型 f 的规范形

$$\begin{aligned} f = z_1^2 + z_p^2 \cdots + z_p^2 \\ -(z_{p+1}^2+\cdots+z_r^2). \end{aligned}$$

$+0\cdot z_{r+1}^2$

惯性定理

定理 1.6

任意实二次型 $f = X^TAX$ 均可经过适当的非退化线性替换化为唯一的规范形.

实对称矩阵 A 总合同于

$$\begin{pmatrix} I_{p_+} & & \\ & -I_{p_-} & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

称

- p_+ 和 p_- 分别为 f 的 正惯性指数 和 负惯性指数
- $p_+ - p_-$ 为 符号差