

# Ch4 附加题

Youliang Zhong

2021 年 11 月 8 日

## 目录

1 W7	1
------	---

## 1 W7

### 1.1 题 1

已知  $\alpha_1 = (1, 4, 0, 2)$ ,  $\alpha_2 = (2, 7, 1, 3)$ ,  $\alpha_3 = (0, 1, -1, a)$ ,  $\beta = (3, 10, b, 4)$ .  
求:

1.  $a, b$  的值 s.t.  $\beta$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示.
2.  $a, b$  的值 s.t.  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示; 并写出此时,  $\beta$  在  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  下的线性表达式.

### 1.2 题 2

设矩阵  $B$  通过有限次行变换矩阵  $A$  得到. 求证:  $A$  与  $B$  的列向量有完全相同的线性关系.

Hint: 记  $A = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$  和  $B = (\beta_1 \dots \beta_n)$ . “ $A$  与  $B$  的列向量有完全相同的线性关系” 是指: 对任意  $k_1, \dots, k_n$ ,

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_n\alpha_n = 0$$

当且仅当

$$k_1\beta_1 + \dots + k_n\beta_n = 0.$$

### 1.3 题 3

设  $A$  为  $n \times n$  矩阵, 满足: 存在  $k \in \mathbb{N}_+$  s.t.

- $A^k x = 0$  有解  $x = \alpha$
- $A^{k-1} \alpha \neq 0$

求证: 向量组  $\alpha, A\alpha, \dots, A^{k-1}\alpha$  线性无关.

### 1.4 题 4

取矩阵  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  与  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , 其中  $m < n$ . 求证: 如果  $AB = E$  其中  $E$  为  $m \times m$  单位矩阵, 那么  $B$  的列向量组线性无关.

Hint: 直接用定义证; 或者考察矩阵的秩.