练习题

1 选择题 (18 分)

1. 设 A 和 B 为 n 阶方阵, A^* 和 B^* 分别为 A 和 B 的伴随矩阵, 那么分块矩阵

$$C = \begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}$$

的伴随矩阵为 ( ).

(A) $\begin{pmatrix} |A|A^* & \\ & |B|B^* \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} |B|B^* & \\ & |A|A^* \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} |A|B^* & \\ & |B|A^* \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} |B|A^* & \\ & |A|B^* \end{pmatrix}$

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 和 $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A 和 B 是 ( ).

(A) 合同且相似 (B) 合同且不相似

(C) 不合同且相似 (D) 不合同且不相似

3. 设 A, B, C 均为 n 阶矩阵, 若 $AB = C$ 且 B 可逆, 则 ( )

(A) C 的行向量组与 A 的行向量组等价

(B) C 的列向量组与 A 的列向量组等价

(C) C 的行向量组与 B 的行向量组等价

(D) C 的列向量组与 B 的列向量组等价

4. 设 λ_1 和 λ_2 为矩阵 A 的两个不同的特征值, 对应的特征向量分别为 α_1 和 α_2, 则 α_1 与 $A(\alpha_1+\alpha_2)$ 线性无关的充要条件是 ( ).

   (A) $\lambda_1 = 0$ (B) $\lambda_1 \neq 0$ (C) $\lambda_2 = 0$ (D) $\lambda_2 \neq 0$

5. n 阶实对称矩阵 A 为正定矩阵的充要条件为 ( ).

   (A) A 的秩为 n

   (B) A^{-1} 为正定矩阵

   (C) A 的所有特征值非负

   (D) 对任意 $k = 1, \ldots, n$, 其 k 阶子式为正

6. 设齐次线性方程组 $AX = 0$, 其中 A 为 $m \times n$ 矩阵, 且 A 的秩为 $n-3$. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 $AX = 0$ 的三个线性无关的解向量, 则 ( ) 不是 $AX = 0$ 的基础解系.

   (A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (B) $\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_2 + 3\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_3$

   (C) $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3$ (D) $\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_2 + 3\alpha_3, \alpha_1 - 3\alpha_3$

2 填空题 (15 分)

1. 当 λ 满足 ____ 时, 使得二次曲面是一个椭球面

$$x^2 + (\lambda+2)y^2 + \lambda z^2 + 2xy = 5.$$

2. 行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & & & & \\ a_2 & x & -1 & & & \\ a_3 & & x & -1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ a_{n-1} & & & & x & -1 \\ a_n & & & & & x \end{vmatrix} = \underline{\qquad}.$$

3. 设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}.$$

当 $a =$ ____ 时, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的秩为 2.

4. 基

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

到基

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

的过渡矩阵为 ____.

5. xOy 面上的曲线

$$\begin{cases} y^2 & = 5x \\ y & \geq 0 \end{cases}$$

绕直线

$$\begin{cases} x & = y \\ z & = 0 \end{cases}$$

所得的旋转面方程为 ____.

3 (7 分)

设矩阵 A 的伴随矩阵为

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ 1 & & 1 & \\ & -3 & & 8 \end{pmatrix}$$

且 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$, 其中 E 为 4 阶单位矩阵, 求矩阵 B.

4 (12 分)

设二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3,$$

问:

1. 求 f 对应的对称矩阵 A
2. 求正交矩阵 T, 使得在正交变换 $X = TY$ 下, 将二次型 f 化为标准形
3. 对 $t \in \mathbb{R}$ 分情况讨论, 判别二次曲面 $f(x_1, x_2, x_3) = t$ 的类型.

5 (12 分)

设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 & = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 & = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 & = 0 \end{cases}$$

与方程

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1$$

有公共解, 问:

1. a 的值
2. 所有公共解

6 (15 分)

设 $\mathbb{R}^3$ 中, 直线 l:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-3}{a}$$

和平面 π:

$$x + z + 1 = 0.$$

问:

1. 求 a 满足什么条件, 使得直线 l 与平面 π 平行. 并求出 l 与 π 的距离.
2. 求 a 满足什么条件, 使得直线 l 与平面 π 相交. 并求出 l 与 π 的交点和夹角.
3. 当 $a = 2$ 时, 设平面 π' 过 l, 且垂直于 π, 求平面 π' 的点法式方程.

7 (15 分)

设 A 为 3 阶实对称矩阵, 满足:

- 各行元素之和均为 3
- 方程 $AX = 0$ 有解

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{和} \qquad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

问:

1. 求 A 的特征值与特征向量
2. 求正交矩阵 T 和对角矩阵 Λ, 使得 $T^T AT = \Lambda$
3. 求 A 及 $(A - \frac{2}{3}E)^6$ 其中 E 为 3 阶单位矩阵

8 (6 分)

设 n 阶矩阵 A 的特征值为 λ_1, ..., λ_n, 求证: 伴随矩阵 A^* 的特征值为 $\Pi_{i\neq 1}\lambda_i$, ..., $\Pi_{i\neq n}\lambda_i$.