Outline

4.0 引言

4.1 消元法

4.2 n 维向量空间

4.3 向量组的线性相关性

4.4 $\mathbb{R}^n$ 的基, 向量在基下的坐标

4.5 向量组的秩

方程组 $Ax=b$ $\longleftrightarrow$ $\begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\dots a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$

$\downarrow$

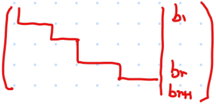
增广矩阵 $\tilde{A}=(A,b)$

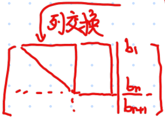
$\downarrow$

初等行变换 保持解集不变

消元法（阶梯化 $\tilde{A}$）

$(r=rk(A))$





① $r(\tilde{A})=r(A)+1 \Leftrightarrow b_{r+1}\neq 0$

$\Leftrightarrow$ 无解.

② $r(\tilde{A})=r(A) \Leftrightarrow b_{r+1}=0$

$\Leftrightarrow$ 存在性

(2.1) $n-r>0 \Rightarrow$ $n-r$ 个自由未知量.

$A^{r\times r}\cdot X^{(r)}=B-A^{r\times(n-r)}X^{(n-r)}$

(2.2) $n-r=0 \Rightarrow$ 唯一.

简单例子

- 共线
$$\mathbf{a} = k_1\mathbf{a}_1.$$
- 共面
$$\mathbf{a} = k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2.$$
- 一般 $(n+1)$ 个向量落在 n 线性子空间

线性表示

$(n+1)$个向量线性相关 $\Longleftrightarrow$ ……落在共同 n 维子空间

$\vec{a}, \vec{a_1}$ $\Updownarrow$ $\vec{a} = k\vec{a_1}$ 1维 $\Updownarrow$ 共线

$\vec{a}, \vec{a_1}, \vec{a_2}$ $\Updownarrow$ 2维 $\vec{a} = k_1\vec{a_1} + k_2\vec{a_2}$ $\Updownarrow$ 共面

定义 3.1

我们称 $\mathbf{a}$ 是 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ 的 线性组合 (等价地, $\mathbf{a}$ 可由 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ 线性表示), 如果存在 $k_1, \ldots, k_m$, s.t.

$$\mathbf{a} = k_1\mathbf{a}_1 + \cdots + k_m\mathbf{a}_m.$$

e.g. 取 n 维单位向量 $\mathbf{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, 则对任意 $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, 有

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n.$$

可见 F^n 中的任意向量均可由 n 维单位向量线性表示.

e.g. 零向量 $\mathbf{0}$ 是任意向量组的线性组合.

例题 3.1

例题 3.1

求证 $a = (-1, 1, 5)$ 是 $a_1 = (1, 2, 3)$, $a_2 = (0, 1, 4)$, $a_3 = (2, 3, 6)$ 的线性组合

“判别能否线性表示” 等价于 “判别方程组是否有解”

线性表出

定义 3.2 (向量组的线性表示)

向量组 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_t\}$ 可由向量组 $\{\beta_1, \ldots, \beta_s\}$ **线性表示**, 如果任一 α_i 均可由 $\{\beta_1, \ldots, \beta_s\}$ 线性表示.

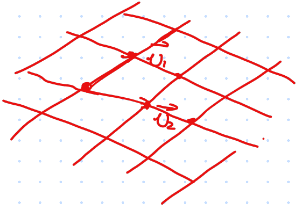
定义 3.2 (向量组的线性表示)

称两个向量组等价, 如果它们可以互相线性表示.

$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$

$\rightsquigarrow \{\alpha \mid \alpha = k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m \quad \forall\, k_1, \ldots, k_m \in F\}$

$(k_1, k_2) \Longleftrightarrow k_1\vec{v_1} + k_2\vec{v_2}$



$\{\vec{u}\} \sim \{\vec{v}\}$

$\Leftrightarrow \{\alpha \mid \alpha = t\vec{u}\} = \{\beta \mid \beta = s\vec{v}\}$

线性表出是等价关系

可验证相互线性表示满足

- 反身性
- 传递性 $\{\alpha_i\} \sim \{\beta_i\} \sim \{\gamma_i\}$
- 对称性

线性相关 vs 线性无关

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关

$\Leftrightarrow$ …… 共 $(3-1)$ 维子空间

(…… 共面)

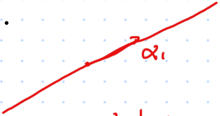
$\Leftrightarrow$ 混合积 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$

$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{13} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{31} & \cdots & a_{33} \end{vmatrix} = 0$

定义 3.4 (线性相关)

我们称向量组 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ 线性相关, 如果存在不全为零 k_1, ..., k_m s.t.

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m = 0.$$



否则, 称该向量组 线性无关.

$\alpha = k_1\alpha_1$

可见, 对于任一向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, 方程 $\Leftrightarrow \alpha + (-k_1)\cdot\alpha_1 = 0$

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$$

只有零解.

线性相关的充要条件

定理 3.1

向量组线性相关，当且仅当，向量组中存在一个向量可由其他向量线性表示.

记向量组 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \alpha\}$

不妨设 α 可被 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ 线性表示

i.e. $\exists\ k_i \neq 0$

s.t. $\alpha = k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m$

$\Leftrightarrow$ $(1, -k_1, \ldots, -k_m)$ 为

$\lambda\alpha + \lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_m\alpha_m = 0$

的非零解

$\Leftrightarrow$ $\{\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ 线性相关 #

线性相关

定理 3.2

向量组中的一部分向量线性相关, 则整个向量组线性相关.

逆否: 一个向量组线性无关, 则它的任意非空向量组也是线性无关.

向量组 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$

$\exists$ 子向量组 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ 线性相关

$\Leftrightarrow$ $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ 落在同一个 $(n-1)$ 维.

$\Leftrightarrow$ $\{\underbrace{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}_{(n-1)\text{维}}, \underbrace{\alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_m}_{\text{顶多}(m-n)\text{维}}\}$ 落在 $\underbrace{n-1+m-n}_{=m-1}$ 维

高维嵌入

定理 3.3

对于 n 维空间中的一个线性无关的向量组 $\{\alpha_i\}$，通过对每个向量 α_i 添加一个分量得到 β_i，那么这个 $(n+1)$ 维空间中的向量组 $\{\beta_i\}$ 也线性无关.

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \beta_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \\ a_{n+1,i} \end{pmatrix}$$

要证 $\{\beta_i\}$ 线性无关

$\Leftrightarrow$ $k_1\beta_1 + \dots + k_m\beta_m = \vec{0}$ 只要零解.

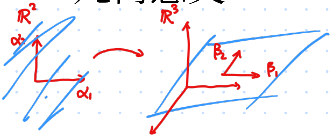
$$\Leftrightarrow (\beta_1, \dots, \beta_m)\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \\ a_{n+1,1} & \cdots & a_{n+1,m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n)\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ 只有零解 #

几何意义



Outline

回顾

基 basis

n 维向量空间 F^n, 可取 n 维单位向量 $e_1, \dots, e_n$. 这组单位向量是 "最大的".

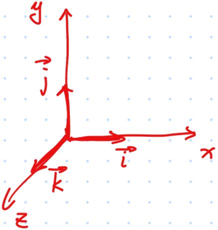
e.g. $\mathbb{R}^3$ 中的 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. 任意向量 $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ 有分解式

$$\mathbf{p} = p_x\mathbf{i} + p_y\mathbf{j} + p_z\mathbf{k}.$$

基

◦ "不大" (没有多余): 线性无关.

◦ "不小": 其他向量均可被线性表示,



基与坐标

定义 4.1

称 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一组 基, 如果

- (不大) $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ 线性无关
- (不小) $\mathbb{R}^n$ 中任意向量 $\mathbf{x}$ 均可由 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ 线性表示.

$\vec{a}$在$\vec{a}_n$的投影 $\Pi_{\vec{a}_n}\vec{a}$

称 $(x_1, \ldots, x_n)$ 为 $\mathbf{x}$ 在基 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ 下的 坐标, 如果

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n.$$

给定一组基, 那么任意向量的坐标是唯一确定.

例题 4.1

例题 4.1

求证向量组 $b_1, \dots, b_n$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

为 $\mathbb{R}^n$ 的一组基.

$(b_1, \dots, b_n)$ 线性无关

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

例题 4.1 解

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0\\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}$$

可见 $\beta_1, \dots, \beta_n$ 可以线性表示 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$:

$$\begin{cases}\alpha_i & = \beta_i - \beta_{i+1} \qquad \forall i = 1, \dots, n-1\\ \alpha_n & = \beta_n\end{cases}$$

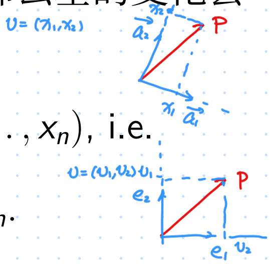
那么, 对于任一向量可由 $\beta_1, \dots, \beta_n$ 线性表示

$$\begin{aligned}\alpha &= a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 \cdots + a_{n-1}\alpha_{n-1} + a_n\alpha_n\\ &= a_1(\beta_1 - \beta_2) + a_2(\beta_2 - \beta_3) + \cdots + a_{n-1}(\beta_{n-1} - \beta_n)\\ &+ a_n\beta_n\\ &= a_1\beta_1 + (a_2 - a_1)\beta_2 + \cdots + (a_n - a_{n-1})\beta_n.\end{aligned}$$

基变化引起坐标变化

$\alpha = (x_1, \ldots, x_n)$
$= x_1 \cdot e_1 + \ldots + x_n e_n$

注意到坐标是依赖于基的选取. 那么基的变化会如何改变坐标?



e.g.

p 在 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ 下的坐标为 $(x_1, \ldots, x_n)$, i.e.

$$\mathbf{p} = x_1\mathbf{a}_1 + \ldots x_n\mathbf{a}_n.$$

p 在 $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ 下的坐标为 $(y_1, \ldots, y_n)$, i.e.

$$\mathbf{p} = y_1\mathbf{b}_1 + \ldots y_n\mathbf{b}_n.$$

Q: $(x_1, \ldots, x_n)$ 如何确定 $(y_1, \ldots, y_n)$?

过渡矩阵

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 & = a_{1,1}\mathbf{a}_1 + \dots a_{n,1}\mathbf{a}_n \\ \mathbf{b}_2 & = a_{1,2}\mathbf{a}_1 + \dots a_{n,2}\mathbf{a}_n \\ & \vdots \\ \mathbf{b}_n & = a_{1,n}\mathbf{a}_1 + \dots a_{n,n}\mathbf{a}_n \end{cases}$$

也可记

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{n,1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,n} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

或

$$\mathbf{b} = A^T\mathbf{a}.$$

过渡矩阵

$\vec{p} = y_1\vec{b}_1 + \dots + y_n\vec{b}_n = (\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_n)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$

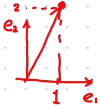
$= x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n = (\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \to x$

$= (\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n) A \begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} \to y$

$\Rightarrow x = A\cdot y$

$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \sim (e_1,\dots,e_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = x_1e_1+\dots+x_ne_n$

$\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} \sim (e_1,e_2)\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} = e_1+2e_2$



过渡矩阵.

考虑 $\vec{b}_i$ 在 $\{\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n\}$ 下的坐标

$\vec{b}_i = a_{1i}\vec{a}_1 + \dots + a_{ni}\vec{a}_n$

$= (\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n)\begin{pmatrix}a_{1i}\\ \vdots\\ a_{ni}\end{pmatrix}$

$\Rightarrow (\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_n)$

$= (\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n)\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$

过渡矩阵 A

$$\mathbf{p} = (y_1 \dots y_n)\begin{pmatrix}\mathbf{b}_1\\ \vdots\\ \mathbf{b}_n\end{pmatrix} = \mathbf{yb}$$

$$= \mathbf{y}(A^T\mathbf{a})$$

与

$$\mathbf{p} = \mathbf{xa}$$

由坐标的唯一性得 坐标变换公式 $\mathbf{x} = \mathbf{y}A^T$ 等价地 $\mathbf{x}^T = A\mathbf{y}^T$, 矩阵 A 称为由基 $\mathbf{a}$ 到基 $\mathbf{b}$ 的 过渡矩阵.

过渡矩阵可逆

记

- A 为 **a** 到 **b** 的过渡矩阵:

$$x^T = Ay^T.$$

- B 为 **b** 到 **a** 的过渡矩阵:

$$y^T = Bx^T.$$

可见, 对任意 x^T 和 y^T 有

$$\begin{cases} x^T & = (AB)x^T \\ y^T & = (BA)y^T \end{cases}$$

得

$$AB = E = BA,$$

即

坐标变换公式

我们称

$$x^T = Ay^T$$

或者

$$\begin{cases} x_1 & = a_{1,1}y_1 + \cdots + a_{1,n}y_n \\ & \vdots \\ x_n & = a_{n,1}y_1 + \cdots + a_{n,n}y_n \end{cases}$$

为从基 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \ldots, \beta_n$ 的 坐标变换公式.

定理 4.1

定理 4.1

记基 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \ldots, \beta_n$ 的过渡矩阵. 那么 A 可逆. 对于任一向量 α, 记其在这两组基下的坐标为 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ 和 $y = (y_1, \ldots, y_n)$. 那么

$$x^T = Ay^T$$

以及

$$y^T = A^{-1}x^T.$$

例题 4.2

例题 4.2

取 $\mathbb{R}^3$ 中的一组基

- $\alpha_1 = (-2, 1, 3)$
- $\alpha_2 = (-1, 0, 1)$
- $\alpha_3 = (-2, -5, -1)$

求向量 $\alpha = (\cancel{-2, -5, -1})$ 的坐标.

$4, 12, 6$

例题 4.2 解

直接解

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$$

$$\Longleftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \alpha$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

例题 4.2 解

利用过渡矩阵

取单位向量 $\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

$\alpha = 4e_1 + 12e_2 + 6e_3$

想法：$\{e\}$ 到 $\{\alpha_i\}$ 的过渡矩阵 A

α 在 $\{\alpha_i\}$ 的坐标 (x_1, x_2, x_3)

$$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha = (e_1, e_2, e_3)\begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$\|$

$$(e_1\, e_2\, e_3)\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

例题 4.3

例题 4.3

求从基 $\alpha_1 = (-3, 1, -2)$, $\alpha_2 = (1, -1, 1)$, $\alpha_3 = (2, 3, -1)$ 到基 $\beta_1 = (1, 1, 1)$, $\beta_2 = (1, 2, 3)$, $\beta_3 = (2, 0, 1)$ 的过渡矩阵.

从基 α 到基 β 的过渡矩阵 C

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cdot \begin{pmatrix} & & \\ & C & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (e_1, e_2, e_3) \cdot B, & B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (e_1, e_2, e_3) \cdot A, & A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (e_1\, e_2\, e_3) \cdot B = (e_1\, e_2\, e_3) \cdot A \cdot C$$

$$\Rightarrow C = A^{-1} B$$