# Ch 5. 特征值与特征向量

钟友良

zhongyl@scut.edu.cn

# Outline

# Outline

# 例子

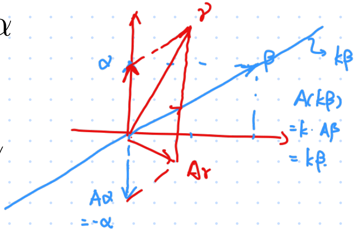
$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix},\ \alpha=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ \beta=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\ \gamma=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

验证

$$A\alpha=-\alpha$$

$$A\beta=\beta$$

$$A\gamma\neq k\gamma$$




注意到 $\gamma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, 可得

$$A\gamma=A(\frac{1}{2}(\alpha+\beta))=\frac{1}{2}(A\alpha+A\beta)$$
$$=\frac{1}{2}(-\alpha+\beta).$$

# Outline

# 特征值与特征向量

## 定义 1.1

对于矩阵 $A \in F^{n\times n}$, 一个数 $\lambda \in F$ 称为 $A$ 的一个特征值, 如果存在列向量 $\alpha \neq \mathbf{0}$, s.t.

eigenvalue

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

eigenvector

我们称 $\alpha$ 为 $A$ 属于 $\lambda$ 的一个特征向量 (简称 特征向量).

# 例子

回顾 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

- $A\alpha = -\alpha \Rightarrow \alpha$ 为 $A$ 属于 $-1$ 的特征向量
- $A\beta = \beta \Rightarrow \beta$ 为 $A$ 属于 $1$ 的特征向量

# 方程组形式

向量 $\alpha \neq 0$ 为 $A$ 属于 $\lambda$ 的特征向量

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

当且仅当方程组

$$(\lambda E - A)\alpha = 0$$

有非零解 $\alpha \neq 0$. 即以下齐次方程组有非零解

$$\begin{pmatrix} \lambda - a_{1,1} & -a_{1,2} & \ldots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & \lambda - a_{2,2} & \ldots & -a_{2,n} \\ & & \ddots & \\ -a_{n,1} & -a_{n,2} & \ldots & \lambda - a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

# 特征矩阵

齐次方程组有非零解, 当且仅当, 行列式为零

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{1,1} & -a_{1,2} & \dots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & \lambda - a_{2,2} & \dots & -a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{n,1} & -a_{n,2} & \dots & \lambda - a_{n,n} \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$|\lambda E - A| = 0.$$

# 特征多项式

## 定义 1.2

矩阵 $A$ 关于 $\lambda$ 的 特征矩阵 定义为

$$\lambda E - A,$$

$(\lambda E - A)\alpha = 0$

其行列式称为 $A$ 关于 $\lambda$ 的 特征多项式

$$f(\lambda) = |\lambda E - A|.$$

$\lambda$ 是 $A$ 的一个特征值

$\Leftrightarrow \exists\ \alpha \neq 0$ s.t. $A\alpha = \lambda\alpha$

$\Leftrightarrow (\lambda E - A)\alpha = 0$ 有非零解. $\Leftrightarrow f(\lambda) = |\lambda E - A| = 0$

代数基本定理 $\Rightarrow \begin{cases} \lambda \in \mathbb{R}: \text{至多有 } n \text{ 个根} \Rightarrow A \text{ 至多有 } n \text{ 个特征值} \\ \lambda \in \mathbb{C}: \text{有 } n \text{ 个根} \Rightarrow A \text{ 有 } n \text{ 个复特征值}. \end{cases}$

# 简述代数基本定理

多项式

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

总能化为

eg.
$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$  $\lambda^2 - (-1) = 0$
$\lambda^3 - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2^{\frac{1}{3}}$  $\Leftrightarrow \lambda^2 = -1 \Rightarrow \lambda = \pm i$

$$(\lambda^{n_1} - b_1) \ldots (\lambda^{n_N} - b_N) = 0,$$

其中

- $n_1 + \cdots + n_N = n$
- $n_i$ 个不同的复数根满足 $\lambda^{n_i} = b_i$
  - $b_i$ 可能等于 $b_j$, 则有重根
  - $b_i$ 可能为负, 则没有对应实根

# 例题 1.1

## 例题 1.1

求下列矩阵的特征值和特征向量

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

## 解

特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda+3 & -4 & 0 \\ 1 & \lambda-1 & 0 \\ -7 & -5 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\underbrace{\lambda-1}_{1})(\underbrace{\lambda+1}_{-1})^2$$

# 例题 1.1 续

解 $\lambda = 1$ 下的方程 $(\lambda E - A)X = 0$ i.e.

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -7 & -5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

得一个基础解系 $(0, 0, 1)^T$.

$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

解 $\lambda = -1$ 下的方程 $(\lambda E - A)X = 0$ i.e.

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & \\ & -19 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -7 & -5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

得一个基础解系 $(2, 1, \frac{19}{2})^T$.

$A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \frac{19}{2} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \frac{19}{2} \end{pmatrix}$

# 例题 1.2

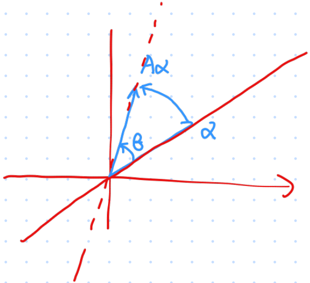
回顾习题 Ch2 1 (5).

## 例题 1.2

求下列矩阵的特征值和特征向量

$A\alpha = \lambda\alpha.$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



# 例题 1.2 解 1

特征多项式

$$|\lambda E - A| = (\lambda - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta. \overset{?}{=} 0$$

如果 $\theta \neq k\pi$, 那么 $\sin^2\theta > 0$, 特征多项式无实根.
仅考虑 $\theta = k\pi$ 的情况.

# 例题 1.2 解 2

考虑 $\theta = 2k\pi$, 则

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

可得特征值为 1 (特征多项式的二重根), 可取特征向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

# 例题 1.2 解 3

考虑 $\theta = \pi + 2k\pi$, 则

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

可得特征值为 $-1$ (特征多项式的二重根), 可取特征向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

# 转置保持特征值

## 性质 1.1

对于 $n \times n$ 矩阵 $A$ 与其转置 $A^T$ 有相同的特征值.

## 性质 1.2

设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 记它的 $n$ 个特征值为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, 我们有

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- $A$ 的迹 $\mathrm{tr}(A)$ 等于 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$
- $A$ 的行列式 $|A|$ 等于 $\lambda_1 \ldots \lambda_n$

Q: 特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 的存在性?

# 性质 1.2 证明

一方面, 由于 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 为 $f(\lambda)$ 的根, 所以

$$
\begin{aligned}
f(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n) \\
&= \lambda^n - (\sum_i \lambda_i)\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n (\prod_i \lambda_i)
\end{aligned}
$$

另一方面, 特征多项式

$$
f(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{1,1} & -a_{1,2} & \dots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & \lambda - a_{2,2} & \dots & -a_{2,n} \\ & & \ddots & \\ -a_{n,1} & -a_{n,2} & \dots & \lambda - a_{n,n} \end{vmatrix}
$$

$$
= \lambda^n - (\sum_i a_{i,i})\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n (\prod_i a_{i,i})
$$

↳ trace of A ↳ $|A|$

# 例题 1.3

## 例题 1.3

$$A\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow A^n\alpha = \lambda^n\alpha.$$

一般地, 对于多项式

$$f(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$$

有

$$f(A) = a_m A^m + \cdots + a_1 A + a_0 E$$

可得

$$f(A)\alpha = a_m \lambda^n \alpha + \cdots + a_1 \lambda\alpha + a_0\alpha.$$

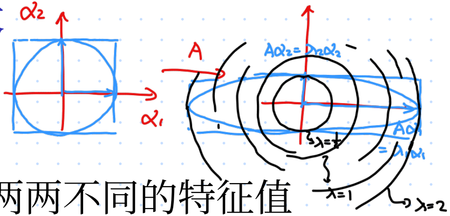
# 特征向量线性无关

$\lambda E - A$

## 性质 1.3

$A\alpha_i = \lambda_i \alpha_i$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$




记

- $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ 为 $A$ 的两两不同的特征值
- $\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,r_i}$ 为属于 $\lambda_i$ 的线性无关的特征向量

那么所有特征向量 $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{1,2}$, …, $\alpha_{t,r_t}$ 都线性无关.