Ch 6. 二次型与二次曲面

钟友良

zhongyl@scut.edu.cn

Outline

Outline

Outline

6.0 前言

6.1 二次型及其标准形

6.2 正定二次型

6.3 曲面及其方程

6.4 二次曲面

一般矩阵 A $\xrightarrow{\text{特别地}}$ 实对称矩阵

至多 n 个特征值 $\{\lambda_i\}$

$(\leq n)$ 个线性无关特征向量 $\{\alpha_i\}$

刚好 n 个"线无"… $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$

可逆

取 $P=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$

s.t. $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$

刚好 n 个特征值

n 个……

正交化 + 单位化

n 个正交的特征向量 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$

正交 $A^{-1}=A^T$

取 $T=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$

s.t. $T^{-1}AT=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$

几何：A 理解

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

在某个 $\{e_1,\dots,e_n\}$ 下表示

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \longmapsto & f(\alpha) \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ (e_1,\dots,e_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} & & (e_1,\dots,e_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}\end{array}$$

A 理解

$(\cdot,\cdot)_A : \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

在某个 $\{e_1,\dots,e_n\}$ ……

$$\begin{array}{ccc} (\alpha,\beta) & \longmapsto & (\alpha,\beta)_A \\ \updownarrow & & \uparrow \\ (e_1,\dots,e_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix},\ (e_1,\dots,e_n)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix} & & \\ \longmapsto \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix}y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix} & \longrightarrow & \alpha^TA\beta \end{array}$$

齐次二次多项式

定义 1.1

含有 n 个变量 $x_1, \ldots, x_n$ 且系数 $a_{i,j} \in F$ 的二次齐次多项式

$= a_{11}x_1^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 \ldots$

$$f(x) = \sum_{1 \le i \le n} a_{i,i}x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} 2a_{i,j}x_ix_j$$

称为关于 F 的一个 n 元二次型 (简称 二次型).

- 实二次型: $F = \mathbb{R}$
- 复二次型: $F = \mathbb{C}$

二次型的矩阵表示

令

$$a_{j,i} = a_{i,j}$$

则

$$2a_{i,j}x_ix_j = a_{i,j}x_ix_j + a_{j,i}x_jx_i.$$

二次型 $f(x)$ 可表为

$$\begin{aligned}
f(x_1, \ldots, x_n) &= \sum_i x_i \boxed{\Big(\sum_j a_{i,j}x_j\Big)} \\
&= (x_1 \ldots x_n) \begin{pmatrix} \sum_j a_{1,j}x_j \\ \vdots \\ \sum_j a_{n,j}x_j \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

二次型的矩阵表示续

$$\cdots = (x_1 \ldots x_n) \underline{\begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}$$

$$f(x) = X^T AX.$$

其中

- 矩阵 A 为 二次型 $f(x)$ 的矩阵
- 列向量 $X = (x_1 \ldots x_n)^T$

可见

- A 与 f 一一对应
- A 为对称矩阵

例子

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2) &= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \\
&= (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(x_1, \ldots, x_n) &= x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n \\
&= (x_1, \ldots, x_n)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \frac{1}{2} & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Q: 能否通过替换变量来是的二次型矩阵为对角?

变量的线性替换

定义 1.1

数域 F 上由变量 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 到变量 $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ 的 线性变换 是指以下形式的表达式

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X = CY, \quad = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = c_{11} y_1 + c_{12} y_2 + \cdots + c_{1n} y_n \\ x_2 = c_{21} y_1 + \cdots + c_{2n} y_n \\ \quad \vdots \\ x_n = c_{n1} y_1 + \cdots + c_{nn} y_n \end{cases}$$

其中 C 为 F 上的 $n \times n$ 矩阵.

非退化线性替换

定义 (非退化线性替换)

称线性替换是 非退化的 (或 可逆的), 如果系数矩阵 C 是可逆的.

对于 X 的一个非退化线性替换

$$X = CY$$

由 C 的可逆性可得 Y 的一个非退化线性替换

$$Y = C^{-1}X.$$

二次型 + 非~~线性~~退化线性替换

考虑关于变量 $X = (x_1, \ldots, x_n)$ 的二次型

$$f(x_1, \ldots, x_n) = X^T AX.$$

通过线性替换 $X = CY$ 用 Y 替换 X, 那么二次型

$$\begin{aligned} f(X) &= f(CY) \\ &= (CY)^T A(CY) \\ &= Y^T \underline{(C^T AC)} Y \\ &= g(Y). \end{aligned}$$

标准形

如果线性替换 C s.t. $C^T A C = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ 为对角矩阵, 那么

$$
\begin{aligned}
g(Y) &= Y^T \Lambda Y \\
&= \sum_i \lambda_i y_i^2.
\end{aligned}
$$

我们称如何找出上述 C 为 二次型化平方和问题.
称只含平方项的二次型为 标准形.

合同于

定义 1.3

称 $n \times n$ 矩阵 A 合同于 B, 如果存在可逆矩阵 C s.t.

二次型

$$B = C^T AC.$$

合同是一种等价关系

1. 反身: $C=E$.
2. 对称: $A=(C^T)^{-1}BC^{-1}=(C^{-1})^T A C^{-1}$
3. 传递: $\left.\begin{array}{l} B=C_1^T A C_1 \\ C=C_2^T B C_2 \end{array}\right\} \Rightarrow C=C_2^T(C_1^T A C_1)C_2 = (C_1C_2)^T A (C_1C_2)$.

合同也是一种等价关系. 回顾:

- "等价于": Def 3.2 of Sec 2.3

  解方程

  矩阵不变量 rank.

  初等矩阵 $\left\{\begin{array}{l}\text{交换} \\ \text{数乘} \\ \text{加}\end{array}\right.$

  $$B = PAQ$$

  A → $AX=b$

  PA → $PA \cdot X = Pb$

  列交换 $(Q \cdot Q = E)$

  PAQ → $PAQ \cdot \underbrace{QX}_{} = Pb$

  $PAQ \cdot Y$

- "相似": Def 2.1 of Sec 5.2

  对角化.

  可逆

  $$B = P^{-1}AP$$

定理 1.1

定理 1.1

如果 A 经过非退化线性替换 C 得到 B, 那么

$$B = C^T AC.$$

得到 A 合同于 B.

回顾

实对称矩阵可对角化: 对于实对称矩阵 A, 存在正交矩阵 T s.t. T^TAT 型为对角矩阵 Λ.
可见实对称矩阵 A 与对角阵 Λ 相似.
由于正交矩阵 T 满足 $T^T = T^{-1}$, 可见

$$\begin{aligned} \Lambda &= T^TAT \\ &= T^{-1}AT. \end{aligned}$$

得 A 合同于 Λ.
如果替换 T 为正交矩阵, 那么 "相似" $\Leftrightarrow$ "合同".

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longrightarrow X = TY = T \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$(e_1, \dots, e_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\qquad \boxed{(e_1, \dots, e_n)T}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

新的单位正交基 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$

实二次型的标准化

定理 1.2

如果二次型 $f(X) = X^TAX$ 为实二次型, 那么存在非退化线性替换

对称

$$X = CY$$

n个正交特征向量

s.t.

$$C^TAC = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n). = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

可得

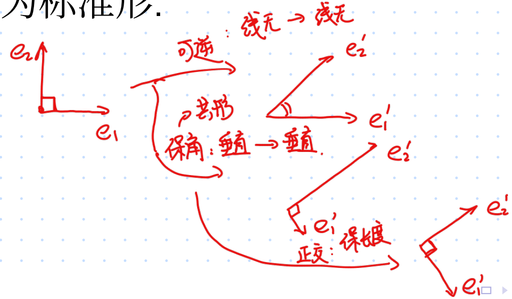
$$\begin{aligned} f(X) = f(CY) &= (CY)^TA(CY) \\ &= Y^T(C^TAC)Y = Y^T\Lambda Y \\ &= \sum_i \lambda_i y_i^2. \end{aligned}$$

正交变换

由定理 1.2 可得, 只要是实二次型 A, 总能找到可逆 C 化 A 为标准形.
进一步地, 利用定理 3.6 (实对称矩阵的对角化), 还能找到 正交变换

$$X = CY$$

化 A 为标准形.



例题 1.1

例题 1.1

用正交变化将以下二次型化为标准形

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3.$$

$$f(X) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

① 求特征值

$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)(\lambda-1) - 4(\lambda-2) - 4\lambda$

$\lambda(\lambda^2-3\lambda+2) - 8\lambda + 8 = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 6\lambda + 8$

$= \boxed{(\lambda-1)}(\lambda^2 + a\lambda + b)$

$= \lambda^3 + (a-1)\lambda^2 + (b-a)\lambda - b$

$a = -2$, $b - a = -6$, $-b = -8$, $-8-(-2)$

$\lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda-1)^2 - 9$, $\lambda = 1 \pm 3$

① $\lambda = 1$

② $\lambda = 4$

③ $\lambda = -2$

② 求特征向量

(求解齐次方程 $(\lambda E - A)X = 0$)

$\lambda_i \rightsquigarrow \alpha_i$

③ 单位正交化 $\{\alpha_i\}$

$\beta_1 = \alpha_1 \rightsquigarrow \gamma_1 = \frac{\beta_1}{|\beta_1|}$

$\beta_2 = \alpha_2 - (\alpha_2, \gamma_1)\gamma_1 \rightsquigarrow \gamma_2 = \frac{\beta_2}{|\beta_2|}$

$\beta_3 = \alpha_3 - (\alpha_3, \gamma_1)\gamma_1 - (\alpha_3, \gamma_2)\gamma_2 \rightsquigarrow \gamma_3 = \frac{\beta_3}{|\beta_3|}$

$\Rightarrow T = (\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3) \to T^T A T = \Lambda$

$= \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 4 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$

例题 1.2

例题 1.2

用配方法化以下二次型为标准形

$$f(x_1, x_2, x_3) = \cancel{x_1^2} + x_2^2 + x_3^2 + \cancel{4x_1x_2} + \cancel{2x_1x_3} + 6x_2x_3.$$

$$\Big[\underbrace{(x_1 + 2x_2 + x_3)^2}_{y_1^2} \underbrace{- 4x_2^2 - x_3^2 - 4x_2x_3 \Big] + x_2^2 + x_3^2 + 6x_2x_3}_{}$$

$$-3x_2^2 + 2x_2x_3$$

$$-3\underbrace{\left(x_2^2 - \tfrac{2}{3}x_2x_3 + \tfrac{1}{9}x_3^2\right)}_{-3(\underbrace{x_2 - \frac{1}{3}x_3}_{y_2^2})^2} + \underbrace{\tfrac{1}{3}x_3^2}_{y_3^2}$$

$$= y_1^2 - 3y_2^2 + \tfrac{1}{3}y_3^2$$

where
$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ y_2 = x_1 - \frac{1}{3}x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & & -\frac{1}{3} \\ & & 1 \end{pmatrix} \cdot X$$

定理 1.3 & 1.4

我们可以将定理 1.2 从 $\mathbb{R}$ 推广到一般数域 F.

定理 1.3

数域 F 上的任意一个二次型总能通过非退化线性替换化为标准形.

定理 1.3 可表述为以下定理.

定理 1.4

数域 F 上的任意对称矩阵都合同于一个对角矩阵.

例题 1.3

例题 1.3

化以下二次型为标准形

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Let. $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$ ...

$= (y_1+y_2)(y_1-y_2) + 2(y_1+y_2)y_3 + 4(y_1-y_2)y_3$

$= y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3 + 2y_2y_3 + 4y_1y_3 - 4y_2y_3$

$= y_1^2 - y_2^2 + 2(3y_1y_3 - y_2y_3)$

$= y_1^2 - y_2^2 + 2(\underline{\underline{3y_1}} - \underline{\underline{y_2}})\cdot \underline{\underline{y_3}}$

$(a - b)\cdot(a + b)$

定理 1.5

如果 $B = C^{-1}AC$ 形如

$$\begin{pmatrix} b_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & b_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

那么

$$r = r(B) = r(C^{-1}AC) = r(A).$$

定理 1.5

定义

二次型的 秩 是其对应矩阵的秩.

定理 1.5

如果秩为 r 的二次型 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 可化为

$$g(y_1, \ldots, y_n) = b_1 y_1^2 + \cdots + b_r y_r^2.$$

复二次型

考虑 $F = \mathbb{C}$ 上的标准形

$$f(y_1, \dots, y_n) = d_1 y_1^2 + \dots d_r y_r^2,$$

其中, $d_i \neq 0$
对复数 $d_i \neq 0$, $\sqrt{d_i}$ 有意义. 可取线性替换

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \\ z_{r+1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sqrt{d_r} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \\ y_{r+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

复二次型的规范形

标准形

$f(X) = \underline{a_{11}} x_1^2 + \dots + \underline{a_{nn}} x_n^2$

用 z 替换 y 得

$$f(z_1, \dots, z_n) = z_1^2 + \dots + z_r^2.$$

称 $z_1^2 + \cdots + z_r^2$ 为复二次型 f 的 规范形, 其中 r 为 f 的秩.

实二次型的规范形

考虑 $F=\mathbb{R}$ 的标准形

$$
\begin{aligned}
f(y_1,\dots,y_n) = & \sqrt{d_1} y_1^2 + \dots \sqrt{d_p} y_p^2 \\
& - (\sqrt{d_{p+1}} y_{p+1}^2 + \cdots + d_r y_r^2),
\end{aligned}
$$

其他 $d_i > 0$.
取形同 $F=\mathbb{C}$ 情况的线性替换, 得实二次型 f 的规范形

$$
\begin{aligned}
f = & z_1^2 + z_p^2 \\
& - (z_{p+1}^2 + \cdots + z_r^2).
\end{aligned}
$$

惯性定理

定理 1.6

任意实二次型 $f = X^TAX$ 均可经过适当的非退化线性替换化为唯一的规范形.

实对称矩阵 A 总合同于

$$\begin{pmatrix} I_{p_+} & & \\ & -I_{p_-} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

称

- p_+ 和 p_- 分别为 f 的 正惯性指数 和 负惯性指数
- $p_+ - p_-$ 为 符号差