3.

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ 1 & & 1 & \\ & -3 & & 8 \end{pmatrix}$$

分析：考虑使用 $A^*A = |A|E$

$\Rightarrow A^* = |A|A^{-1}$

且 $|A^*| = |A|^{n-1}$

且 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$，求 B

解：$|A^*| = |A|^3 \Rightarrow |A| = 2$

先进行化简

$(A-E)BA^{-1} = 3E$

两边左乘 A^{-1}，右乘 A，有

$(E-A^{-1})B = 3E$

$\Rightarrow B = 3(E-A^{-1})^{-1}$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 6 & & & \\ & 6 & & \\ 6 & & 6 & \\ & 3 & & -1 \end{pmatrix}$$

其中 $A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & & \\ & \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & \\ & -\frac{3}{2} & & 4 \end{pmatrix}$

$E - A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & & \\ & \frac{1}{2} & & \\ -\frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & \\ & \frac{3}{2} & & -3 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} \frac{1}{2} & & & & 1 & & & \\ & \frac{1}{2} & & & & 1 & & \\ -\frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & & 1 & \\ & \frac{3}{2} & & -3 & & & & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} \frac{1}{2} & & & & 1 & & & \\ & \frac{1}{2} & & & & 1 & & \\ 0 & & \frac{1}{2} & & 1 & & 1 & \\ & 0 & & -3 & & -3 & & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & 2 & & & \\ & 1 & & & & 2 & & \\ & & 1 & & 2 & & 2 & \\ & & & 1 & & 1 & & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

故 $(E-A^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ 2 & & 2 & \\ & 1 & & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

5.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases}$$

与方程 $x_1 + 2x_2 + x_3 = a-1$ 有公共解

分析：公共解的意思是指两个方程有相同解

那方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \\ x_1+2x_2+x_3=a-1 \end{cases}$ 有解

写出增广矩阵，利用增广矩阵判断解的存在性得到a的值
再求该方程组的解就是求公共解

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 3 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-3a+2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix}$$

① 当 $a=1$ 有 $r(A)=r(\bar{A})=2$

方程组变为

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_2=0 \end{cases} \Rightarrow (x_1,x_2,x_3)=k(1,0,-1)$$ k为任意值

为方程组的所有公共解

② 当 $a=2$ 时，$r(A)=r(\bar{A})=3$

方程组化为

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_2+x_3=0 \\ -x_3=1 \end{cases} \Rightarrow (x_1,x_2,x_3)=(0,1,-1)$$ 为方程组的公共解

6、直线 l：

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-3}{a}$$

和平面 π：

$$x+z+1=0$$

解：

1、

分析：直线与平面平行，可以得知平面的垂线也垂直于直线，所以法向量与直线的方向向量点乘为0，直线到平面距离可套公式

平面 π 的法向量为 $\vec{n}=(1,0,1)$

直线 l 的方向向量为 $\vec{l}=(1,0,a)$

$$\Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{l}=1+a=0 \Rightarrow a=-1$$

显然，点 $(1,-2,3)$ 在直线 l 上

利用点到平面的距离公式 $d=\dfrac{|1+3+1|}{\sqrt{1^2+0+1^2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

2、分析：直线与平面相交，两方程联立即可得出交点坐标，夹角可利用法向量与直线方向向量的夹角。

由1可知 当 $a\neq-1$ 时 即可相交

解

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-3}{a}\\ x+z+1=0\end{cases} \Rightarrow \text{交点坐标为}\left(\frac{a-4}{a+1},0,\frac{3-2a}{a+1}\right)$$

直线 l 的方向向量为 $\vec{l}=(1,0,a)$　平面法向量为 $\vec{n}=(1,0,1)$

$$\cos\theta=\frac{\vec{l}\cdot\vec{n}}{|\vec{l}||\vec{n}|}=\frac{1+a}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+a^2}}$$

$$\theta=\arccos\frac{1+a}{\sqrt{2}\sqrt{1+a^2}}$$　故夹角 $\gamma=\begin{cases}\theta-\frac{\pi}{2} & (a<-1)\\ \frac{\pi}{2}-\theta & (a\geq-1)\end{cases}$

3、当 $a=2$ 时

$$l: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-3}{2}$$

分析：π' 与 π 垂直可知法向量也相互垂直，π' 过 l 即 l 在平面 π' 上。
且 π' 的法向量也垂直于 l 的方向向量

由此可知，设平面 π' 的法向量为 $\vec{m} = (x_0, y_0, z_0)$

且平面 π 的法向量 $\vec{n} = (1, 0, 1)$ 与 $(1,0,2)$ 不平行

有 $\begin{cases} \vec{m}\cdot\vec{n} = 0 \\ \vec{m}\cdot\vec{\tau} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 + z_0 = 0 \\ x_0 + 2z_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases}$

7. 分析：先注意到 A 为实对称矩阵（可对角化），各行元素之和为3

说明了 $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

方程 $Ax=0$ 有两个线性无关的解 说明了 α_1, α_2 为 A 的特征值 0 的特征向量

1、由此可知，A 的特征值为 0 和 3，特征向量为 $\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

2、由 1 可知，令 $P = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$　有 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix}3 & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{pmatrix}$

正交化：$\beta_1 = \begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$

$$\beta_2 = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

单位化 $\gamma_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$ $\gamma_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ $\gamma_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$

令 $T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ 则 T 为正交矩阵

且 $T'AT = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} = \Lambda$

3、分析、利用2的正交对角化可以进行化简

$$A = T\Lambda T' = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - \tfrac{2}{3}E)^6 = (T\Lambda T' - \tfrac{2}{3}E)^6 = T(\Lambda - \tfrac{2}{3}E)^6 T' = T\begin{pmatrix} (\frac{7}{3})^6 & & \\ & (-\frac{2}{3})^6 & \\ & & (-\frac{2}{3})^6 \end{pmatrix} T'$$

$=$ 有点复杂就没有算

8、分析：利用任意一个矩阵都可相似于一个上(下)三角矩阵，

求上(下)三角化矩阵的特征值即可

存在可逆矩阵 P, s.t.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

有

$$(P^{-1}AP)^* = P^* A^* (P^*)^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \prod_{i\neq 1}\lambda_i & & & * \\ & \prod_{i\neq 2}\lambda_i & & \\ & & \ddots & \\ & & & \prod_{i\neq n}\lambda_i \end{pmatrix}$$

可知 A^* 的特征值为 $\prod_{i\neq 1}\lambda_i, \cdots, \prod_{i\neq n}\lambda_i$