Outline

回顾

考虑 A 的列向量 α_j, i.e.

$$A = (\alpha_1 \ldots, \alpha_n).$$

那么方程组 $Ax = b$ 可以记为

$$(\alpha_1 \ldots, \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

i.e.

$$x_1\alpha_1 + \ldots x_n\alpha_n = \mathbf{b}.$$

定理 6.1

定理 6.1

方程 $Ax = b$ 有解, 当且仅当, 向量 b 可由 $\alpha_1, \dots,$ α_n 线性表示.

分情况: b 是否为 0?

$$A \cdot x = b$$

$$\overset{\shortparallel}{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b.$$

齐次方程的解

性质 6.1 & 6.2

$(V; +, \cdot)$

↳ 封闭, 单位元, 逆元 ...

齐次方程组 $Ax = 0$ 的解集

Kernel

$$\mathrm{Ker}(A) := \{x | Ax = 0\}$$

关于加法和数乘封闭:

- $x_1 + x_2 \in \mathrm{Ker}(A)$ if $x_1, x_2 \in \mathrm{Ker}(A)$
- $kx \in \mathrm{Ker}(A)$ if $k \in F$ and $x \in \mathrm{Ker}(A)$

可见, 解集 $\mathrm{Ker}(A)$ 是一个向量空间.

基础解系

由上述性质 6.1 & 6.2 可知, 如果解集 $\mathrm{Ker}(A)$ 包含一个非零元 $x \neq 0$, 那么它含有无限个非零元 kx $(k \in F)$.

Q: $\mathrm{Ker}(A)$ 是否有限维? 存在有限 $x_1, \dots, x_n$, s.t.

$$\mathrm{Ker}(A) := \{k_1 x_1 + \dots k_n x_n\}.$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}^n\text{中的线性子空间} & \xleftrightarrow[6.1\,\&\,6.2]{\text{性质}} & \text{齐次方程组解集 } \mathrm{Ker}A = \{x \mid Ax = 0\} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\text{极大线性无关组} & \longleftrightarrow & \text{基础解系}
\end{array}$$

基础解析

定义 6.1

称 $Ax = 0$ 的解 $\eta_1, \ldots, \eta_m$ 为该方程组的一个 基础解系, 如果

- (线性无关) $\eta_1, \ldots, \eta_m$ 线性无关
- (极大) 任一解都可由 $\eta_1, \ldots, \eta_m$ 线性表示

齐次方程的一个基础解系, 其实就是解集 $\mathrm{Ker}(A)$ 的一个极大线性无关组.

定理 6.2

定理 6.2

$Ax=0$ 的解集

$\mathrm{Ker}A = \{x \mid Ax = 0\}$

↳ 线性子空间 → 极大线性无关组.

若 $Ax = 0$ 有非零解, 则 ⇝ 秩(…… 向量个数)

- 方程组有基础解系
- 基础解系所含解的个数为 $n - r(A)$

$A \cdot x = 0$

消元法

$$\xrightarrow{\text{方程}} \left(A^{(r\times r)} \quad A^{(r\times(n-r))}\right)\begin{pmatrix} X^{(r)} \\ X^{(n-r)} \end{pmatrix} = 0$$

$$A^{(r\times r)} \cdot X^{(r)} + A^{(r\times(n-r))} \cdot X^{(n-r)} = 0$$

$$A^{(r\times r)} \times X^{(r)} = -A^{(r\times(n-r))} \times X^{(n-r)}$$

$$X^{(r)} = \left(A^{(r\times r)}\right)^{-1} \cdot \left(-A^{(r\times(n-r))} \cdot X^{(n-r)}\right)$$

定理 6.2 证明

仅考虑阶梯化后的 A, 那么 $Ax = 0$ 可写为

$$\left(A^{(r\times r)} \,\middle|\, A^{(r\times(n-r))}\right)\begin{pmatrix} X^{(r)} \\ \hline x^{(n-r)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \hline x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

或

$$A^{(r\times r)}X^{(r)} = -A^{(r\times(n-r))}X^{(n-r)},$$

其中 $X^{(n-r)}$ 是 $(n-r$ 个$)$ 自由未知量. 对 $i = 1, \ldots, n-r$, 记 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $e_i^{(n-r)}$ 为 $\mathbb{R}^{n-r}$ 的第 i 个单位向量.
- $e_i^{(r)} := -(A^{(r\times r)})^{-1}(A^{r\times(n-r)}e_i^{(n-r)})$.
- $\eta_i = \begin{pmatrix} e_i^{(r)} \\ e_i^{(n-r)} \end{pmatrix}$

定理 6.2 证明

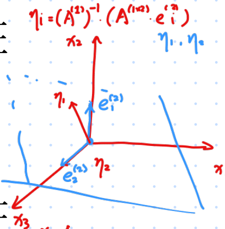
要证 $\eta_1, \ldots, \eta_{n-r}$ 为 $Ax = 0$ 的一个基础解系，仅需证

无

- 线性相关：由 $\{e_i^{(n-r)}\}$ 的线性无关可得
- 极大：

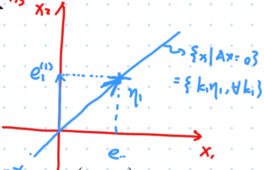
对于任意一个解 $\eta = (c_1, \ldots, c_n)$，要证

$$\eta = c_1\eta_1 + \cdots + c_{n-r}\eta_{n-r}.$$



记 $\eta = (\eta^{(r)}, \eta^{(n-r)})^T$. 显然 $\eta^{(n-r)} = c_1 e_1^{(n-r)} + \ldots c_{n-r} e_{n-r}^{(n-r)}$，剩下证

$$\eta^{(r)} = c_1 e_1^{(r)} + \ldots c_{n-r} e_{n-r}^{(r)}.$$



验证左右都是以下方程的解

$x_1 - x_2 = 0$

$(1 \ {-1})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

$$A^{(r\times r)}X^{(r)} = -A^{(r\times(n-r))}(c_1 e_1^{(n-r)} + \ldots c_{n-r} e_{n-r}^{(n-r)}).$$

求基础解系过程

上述给出了基础解系的求法:

1. 阶梯化 $A = (A^{(r\times r)} A^{(r\times(n-r))})$
2. 取自由未知量中的一组基 $\{e_1^{(n-r)}, \ldots, e_{n-r}^{(n-r)}\}$
3. 求解 $e_i^{(r)} := -(A^{(r\times r)})^{-1}(A^{r\times(n-r)} e_i^{(n-r)})$
4. 组装 $\eta_i = \begin{pmatrix} e_i^{(r)} \\ e_i^{(n-r)} \end{pmatrix}$

通解

定义 6.2 (通解)

对于

- 齐次方程组的一个基础解系 $\eta_1, \dots, \eta_{n-r}$
- 任意 $c_1, \dots, c_{n-r}$

我们称

$$\eta = c_1\eta_1 + \dots c_n\eta_n$$

为方程组的 通解 (或 一般解).

通解 vs 特解

性质 6.3

如果 γ_1, γ_2 为 $Ax = b$ 的解, 那么 $\gamma_1 - \gamma_2$ 为 $Ax = 0$ 的解.

$A(\gamma_1-\gamma_2) = A\gamma_1 - A\gamma_2 = b-b=0$.

性质 6.4

如果

- γ 为 $Ax = b$ 的解
- η 为 $Ax = 0$ 的解

那么 $\gamma + \eta$ 是 $Ax = b$ 的解.

定理 6.3

定理 6.3

取 $Ax = b$ 的一个解 γ_0. 方程的所有解形如

$$\gamma = \gamma_0 + \eta$$

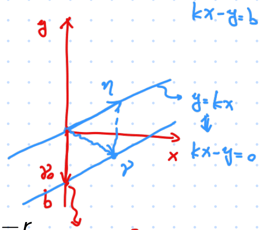
其中 η 为方程组通解.

我们通常称 γ_0 为方程组的 特解.

定理 6.4

结合定理 6.3 与通解的 “分解”, 我们有方程组的解的线性表示:

$Ax=0$



定理 6.4

方程组 $Ax = b$ 的解有线性表示

$$\gamma = \gamma_0 + \underbrace{k_1\eta_1 + \ldots k_{n-r}\eta_{n-r}}_{\eta}$$

$(0,-b)$是 $kx-y=b$ 的特解

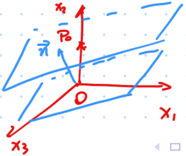
其中

- γ_0 为 $Ax = b$ 的一个特解
- $\eta_1, \ldots, \eta_{n-r}$ 为 $Ax = 0$ 的一个基础解系

$\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{n}=0$

$(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_0})\cdot\vec{n}=0$

$\overrightarrow{OP}\cdot\vec{n}=\underbrace{\overrightarrow{OP_0}\cdot\vec{n}}_{b}$



例题 6.1

旧题 (例题 1.2) 新解

例题 6.1

解下列增广矩阵对应的方程

$$2\left\{\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ & 1 & -1 & -1 & -5 & -4 \end{array}\right)\right.$$

$$\underbrace{\quad\quad}_{2}\qquad\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{3}$$

$$e_1^{(3)}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \rightsquigarrow e_1^{(2)}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix} \rightsquigarrow \eta_1=\begin{pmatrix}4\\-3\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

特解 $\gamma_0=\begin{pmatrix}6\\-4\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$e_2^{(3)}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \rightsquigarrow e_2^{(2)}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix} \rightsquigarrow \eta_2=\begin{pmatrix}4\\-3\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

一般解 $\gamma=\gamma_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2+k_3\eta_3$

$$e_3^{(3)}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \rightsquigarrow e_3^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \eta_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

例题 6.2

例题 6.2

解下列增广矩阵对应的方程

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

① 求基础解系

(i.e. 求 $Ax=0$)

增广矩阵

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ & & 1 & -2 & 0 \\ \hline & & & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\rightsquigarrow r(A)=2,\ n-r(A)=4-2=2.$

$\rightsquigarrow$ 取 $e_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ $e_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

$Ax=0$ 基础解系

$\rightsquigarrow \eta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ \eta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}$

② 求一个特解

$\gamma_0=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \gamma=\gamma_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2.$

以 x_1, x_3 为自由. —

$e_1=\begin{pmatrix}1\\ \\0\\ \end{pmatrix}$