一般式方程

任意平面均可通过点法式方程表示. 整理平面的点法式方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

为

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

其中 $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$, 称这个方程为该平面的 一般式方程.

一般式方程确定平面

反过来, 对于不全为零的 A, B, C, 任意方程

取 $A \neq 0 \Rightarrow$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

π 过 $\left(-\frac{D}{A}, 0, 0\right)$

均表示一个平面.

不妨设 $A+B+C \neq 0$.

$$A\left(x-\frac{-D}{A+B+C}\right)+B\left(y-\frac{-D}{A+B+C}\right)+C\left(z-\frac{-D}{A+B+C}\right)=0$$

过 $\left(-\frac{D}{A+B+C}, -\frac{D}{A+B+C}, -\frac{D}{A+B+C}\right)$

法向量 (A, B, C).

特殊情形

考虑 $Ax + By + Cz + D = 0$:

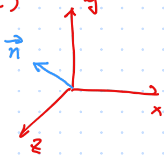
- $D = 0$ 齐次：π 经过 $(0,0,0)$
- $D \neq 0$ 非齐次：· · 不 · – – –
  - A, B, C 均为零 $D=0 \Rightarrow \pi = \emptyset$
  - A, B, C 只有一个零 ✓
  - A, B, C 只有两个零 ✓
  - A, B, C 均不为零：不特殊

不妨设 $A=0$.

$\vec{n} = (0, B, C)$

$\Rightarrow \vec{n} // \vec{i}$

$\Rightarrow$ π 有一个方向平行 $\vec{i}$.



$A=0$ & $B=0$

$\pi // \vec{i}$ & $\pi // \vec{j}$

$\Rightarrow \pi // xoy$

$\Rightarrow \pi : \ z = z_0$

$\Leftrightarrow \pi := \{(x, y, z_0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

例题 3.2

例题 3.2

求平面方程满足

- 过 $P(1,0,0)$ 和 $Q(0,0,1)$
- 平行于 y 轴

解：利用点法式方程.

点 + 法.

(P,Q) $\quad \vec{n}$

已知 平面 $\pi \parallel \vec{k}$

$\pi \parallel \overrightarrow{PQ} = (-1,0,1)$

$\because \vec{n} \perp \vec{k}$ & $\vec{n} \perp \overrightarrow{PQ}$

$\therefore$ 不妨取 $\vec{n} = \vec{k} \times \overrightarrow{PQ}$

$= (0,1,0) \times (-1,0,1)$

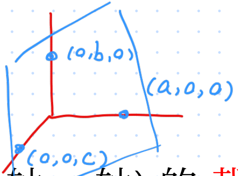
$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$= \vec{i} + \vec{k}$

$1(x-1) + 1(z-0) = 0$

$\Rightarrow x + z - 1 = 0$ #

截距式方程



定义 (截距)

一个平面 π 在 x 轴 (y 轴, z 轴) 的 截距 是指平面 π 与该轴的横 (纵, 竖) 坐标.

定义 (截距式方程)

记平面 π 在 x 轴, y 轴, z 轴的截距分别为 a, b, c. 假设 a, b, c 均不为零. 则平面 π 上的点的坐标满足

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

$Ax+By+Cz+D=0$

$$\begin{cases} A\cdot a + D=0 \\ Bb\cdot + D=0 \\ Cc + D=0 \end{cases}$$

$D=-1$

这称为平面 π 的 截距式方程.

一般 vs 截距

$Ax+By+Cz+D=0$

$\Rightarrow \pi$ 过 $(0,0,0)$

截距 $\Rightarrow$ 一般:

$$
\begin{aligned}
&\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\\
\Rightarrow &(bc)x+(ac)y+(ab)z+(-abc)=0
\end{aligned}
$$

一般 $\Rightarrow$ 截距 (要求 $D \neq 0$):

$$
\begin{aligned}
&Ax+By+Cz+D=0\\
\Rightarrow &\frac{x}{-D/A}+\frac{y}{-D/B}+\frac{z}{-D/C}=1
\end{aligned}
$$

截距为零时

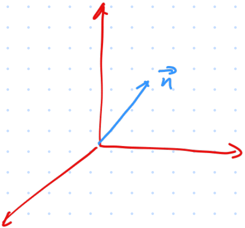
考虑平面 π 的截距 $a=0$. 可见 π 过 $(0,0,0)$. 则截距 $b=c=0$.

π 过 $(a,0,0)$

此时 π 的点法式为

$$\mathbf{n}\cdot(p_x,p_y,p_z)=0.$$

$n_x\cdot x+n_y\cdot y+n_z\cdot z=0$

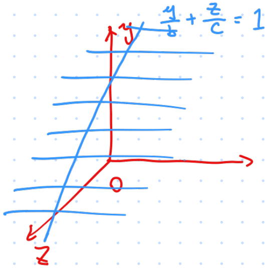


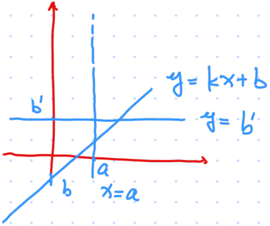
截距为“无穷”时

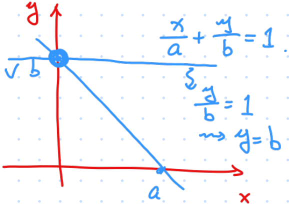
截距 $a=\infty$: 平面 π 平行于 x 轴. 此时的截距式方程为

$$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

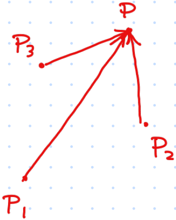






三点式方程

取不共线的三点 $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$.
如果平面 π 经过上述三点, 则平面 π 上的任意一点 $P(x, y, z)$ 均满足: 向量 $\overrightarrow{P_1P}$, $\overrightarrow{P_2P}$, $\overrightarrow{P_3P}$ 共面. 可见, 它们的混合积为零, i.e.



$(\overrightarrow{P_1P}, \overrightarrow{P_2P}, \overrightarrow{P_3P}) = 0$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ x - x_3 & y - y_3 & z - z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

称上述方程为平面 π 的 三点式方程.

截距转三点

平面 π 的截距 a, b, c 当且仅当 π 经过 $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$.

关系

考虑两个平面

- $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$
  - 法向量 $\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$
- $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$
  - 法向量 $\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$

之间的关系:

关系 (续)

- 平行 $\mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2$: 存在 $\lambda \neq 0$ 使得 $\mathbf{n}_1 = \lambda \mathbf{n}_2$. 有

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \lambda.$$

  - 重合: π_1 和 π_2 有相同的解. 注意到平面 π_1 方程可表为

π_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

π_2: $\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0$

$$\lambda(A_2x + B_2y + C_2z) + D_1 = 0.$$

    有

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} = \lambda.$$

- 不平行: 相交

例题 3.3

例题 3.3

求平面 π_1 满足

- 过 $P(1, 1, -1)$
- 平行与 $\pi_2 : 3x + y + 2z = 1$

解: 点法式:

$\vec{n} = \vec{n_2} = (3, 1, 2).$

例题 3.3 解 1

解 1

平面 π_1 与 π_2 平行当且仅当 $\frac{A_1}{A_2}{}_{3} = \frac{B_1}{B_2}{}_{1} = \frac{C_1}{C_2}{}_{2}$.

平面 π_1 满足方程

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$\because \pi_1 \parallel \pi_2$

$\therefore \frac{A_1}{3} = \frac{B_1}{1} = \frac{C_1}{2} = \lambda.$

$\therefore \lambda(3x + y + 2z) + D_1 = 0$

由 π_1 过 $P(1, 1, -1)$ 得

$$\lambda(3\times 1 + 1 + 2\times(-1)) + D_1 = 0$$

i.e. $2\lambda + D_1 = 0$

不妨取 $\lambda = 1$, $D_1 = -2$.

$\Rightarrow \pi_1 : 3x + y + 2z - 2 = 0.$

例题 3.3 解 2

解 2

注意到 π_1 和 π_2 的法向量相同, 再利用点法式.

例题 3.4

例题 3.4

求平面满足

- 过 $P(-1,0,1)$
- 经过线: 该线落在以下两个平面上:
  - π_1 $x+3y-z=0$
  - π_2 $x-y+z+1=0$

解: 直线ℓ为π_1与π_2交线满足 $\Rightarrow (x, -x-\frac{1}{2}, -2x-\frac{3}{2})$.

$$\begin{cases} x+3y-z=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow 2x+2y+1=0$

$\Rightarrow y=-x-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow z=-x+y-1=-2x-\frac{3}{2}$

取ℓ上两点 $(0,-\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$, $(1,-\frac{3}{2},-\frac{7}{2})$

$\Rightarrow$ 三点式方程.

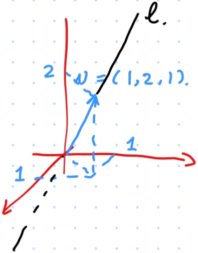
#

Outline

方向向量

定义 (方向向量)

对于直线 l, l 的 方向向量 是指任一与 l 平行的非零向量. 直线 l 的 方向数 是指它的方向向量的三个坐标.



点向式方程

给定

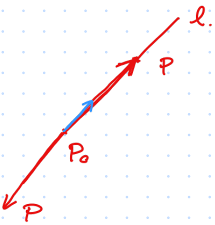
- 一个点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$
- 一个向量 $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$

存在唯一一条直线 l

- 经过 P_0
- 以 v 为方向向量

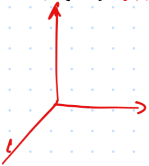
特殊点向式

如果 v_x, v_y, v_z 均不为零, 那么



$$
\begin{aligned}
& P(x, y, z) \text{ 在直线 } l \text{ 上} \\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{P_0P} \parallel \mathbf{v} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y} = \frac{z - z_0}{v_z}.
\end{aligned}
$$

称这为直线的 点向式方程 (或 对称式方程).



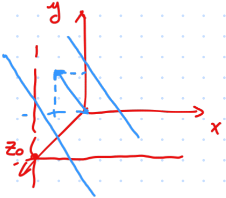
(x,y,z) 满足 0 个方程 自由度 $=3$ $\mathbb{R}^3$

1 $3-1=2$ 面

2 $3-2=1$ 线

一般点向式

考虑 v_x, v_y, v_z 存在零的情况.
假设 $v_z = 0$, 则



$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{v_x} = \dfrac{y-y_0}{v_y} \\ z = z_0 \end{cases}$$

$v = (v_x, v_y, 0)$

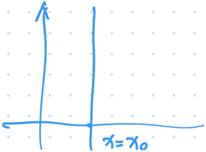
$\Rightarrow$ v 落在 xoy 平面.

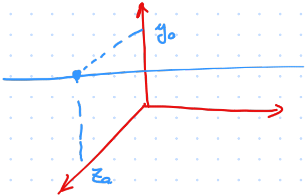
$$\frac{x-x_0}{v_x} = \frac{y-y_0}{0} = \frac{z-z_0}{0}$$

假设 $v_y = 0$ 且 $v_z = 0$, 则

$\vec{v} = (v_x, 0, 0)$

$$\begin{cases} y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}$$

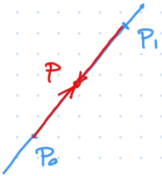




两点式方程

给定两个点 $P_0(x_0, y_0, z_0) \neq P_1(x_1, y_1, z_1)$, 存在唯一一条直线 l 经过 P_o 和 P_1.

将 $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_0P_1}$ 代入点向式方程, 得



$$
\begin{aligned}
& P(x, y, z) \text{ 在直线 } l \text{ 上} \\
\Leftrightarrow & \overrightarrow{P_0P_1} \parallel \overrightarrow{P_0P} \\
\Leftrightarrow & \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.
\end{aligned}
$$

称这为直线的 两点式方程.

参数方程

给定

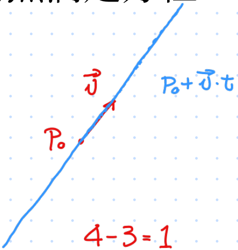
- 一个点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$
- 一个向量 $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$

利用时间参数 $t \in \mathbb{R}$, 直线 l 上的点满足方程

$$P = P_0 + \mathbf{v}t,$$

即

$$\begin{cases} x = x_0 + v_x t \\ y = y_0 + v_y t \\ z = z_0 + v_z t \end{cases}$$



称这为直线的 参数方程.

例题 4.2

~~定义 (方向向量)~~

求以下直线与平面的交点

- 直线 $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-3}$
- 平面 $2x - y + z = 4$

解：交点满足

$$\begin{cases} \pi: & 2x - y + z = 4 \\ \ell: & -3x \quad -2z = -9 \\ & y = 2 \end{cases}$$

交点 $(3, 2, 0)$ #

一般式方程

任意一条直线 l, 选择不重合的两个平面 π_1 和 π_2 经过 l:

- $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$
- $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

其中, $A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$ (因为相交且不重合). 即 l 上的点 $P(x, y, z)$ 满足

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

称为直线的 一般式方程.

例题 4.3

例题 4.3

将以下直线的一般式方程化为对称式 (~~点法式~~ 点向式):

$$\begin{cases} x - y + z = 0 & (\pi_1) \\ x + y - 2z = 0 & (\pi_2) \end{cases}$$

解: $\vec{n}_1 = (1, -1, 1)$

$\vec{n}_2 = (1, 1, -2)$

直线的方向向量 $\vec{s}$