# 对角矩阵

## 定义 (对角矩阵, 单位矩阵, 零矩阵)

- 对角矩阵 $\mathrm{diag}(a_{1,1}, \ldots, a_{n,n})$
- 单位矩阵 $E_n = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1)$
- 零矩阵 $\mathbf{0}$

标量也可看作 $1 \times 1$ 矩阵.

$\mathrm{tr}(\mathrm{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

$\mathrm{tr}(E_n) = n$

# 负矩阵

## 定义 1.3 (负矩阵)

矩阵 $A = (a_{i,j})_{m,n}$ 的 负矩阵 为 $-A = (-a_{i,j})_{m,n}$.

# 矩阵的运算

类似数域 $F$ 上可以定义运算 $+$, $\times$ 以及它们的逆.
我们希望把这些运算推广到 $F^{m\times n}$ 上.
考虑 $A=(a_{i,j})_{m,n}, B=(b_{i,j})_{m,n}\in F^{m\times n}$.

# 矩阵加法的定义

## 定义 1.4 (矩阵加法)

矩阵 $A$ 与 $B$ 的 和 定义为

$$A + B := (a_{i,j} + b_{i,j})_{m,n}.$$

## 定义 (矩阵减法)

$B + (-B) = 0$

$$A - B = A + (-B).$$

# 矩阵加法的性质

- 交换律: $A + B = B + A$
- 结合律: $A + (B + C) = (A + B) + C$
- 加法单位元: $A + 0 = A$
- 加法逆元: $A + (-A) = 0$

# 矩阵数乘的定义

## 定义 1.5 (矩阵数乘)

矩阵 $A$ 与数 $k$ 的 数乘 定义为

$$kA := (ka_{i,j})_{m,n}.$$

称 $kE = \mathrm{diag}(k, \ldots, k)$ 为 数量矩阵.

$$\mathrm{tr}(A+B) = \sum_i (A+B)_{i,i} = \sum_i (a_{i,i}+b_{ii})$$

$$= \sum_i a_i + \sum_i b_i = \mathrm{tr}A + \mathrm{tr}B$$

$$\mathrm{tr}(k \cdot A) = \sum (kA)_{ii} = \sum ka_{ii} = k\sum_i a_{ii}$$

$$= k \cdot \mathrm{tr}A$$

# 矩阵数乘的性质

- 结合律: $k(lA) = (kl)A$
- 分配率
  - $(k+l)A = kA + lA$
  - $k(A+B) = kA + kB$
- 数乘单位元: $1A = A$
- $kA = 0$ 当且仅当 $k = 0$ 或 $A = 0$

# 矩阵乘法的定义 1

## 定义 1.6 (矩阵乘法)

矩阵 $A_{s,n}$ 和 $B_{n,m}$ 的 乘积 定义为 $C = AB$, 其中

$$c_{i,j} = \sum_{k=1,\dots,n} a_{i,k}b_{k,j},\ i = 1,\dots,s,\ j = 1,\dots,m.$$

$$s\underset{\substack{\| \\ A}}{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}} \times \underset{\substack{\| \\ B}}{\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1m} \\ & & \vdots & & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}} = \underset{\substack{\| \\ C_{s,m}}}{\begin{pmatrix} & & \\ & c_{ij} & \\ & \| & \\ & \boxed{a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}} & \end{pmatrix}}$$

# 矩阵乘法的定义 2

$a \cdot b = b \cdot a$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{pmatrix}$$

注意

- 矩阵乘法有意义的条件: $A$ 的列数 $=$ $B$ 的行数
- 矩阵乘法不一定满足交换律
  - e.g. 以下的例题 1.2

# 例题 1.2

对于 $A=(1,4,3)$ 和 $B=(2,3,1)^T$, 有

$A \times B$

$= (1,4,3) \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$AB = 17$$

和

$B \times A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times (1.4.3)$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 3 & 12 & 9 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Q: $A \cdot B$ & $B \cdot A$

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

# 可交换

## 定义 (矩阵可交换)

称矩阵 $A$ 和 $B$ 是 可交换的, 如果 $AB = BA$.

注意到矩阵乘法的交换律不一定成立. 两个矩阵一般是不可交换的.

# 例题 1.3

如果 $A=\operatorname{diag}(a_{1,1},\dots,a_{n,n})$ 满足

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & a_{ii} & \\ & & & \ddots \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$a_{i,i}\neq a_{j,j} \text{ 如果} i\neq j,$$

求证和 $A$ 可交换的矩阵只可以是对角矩阵.

## 解

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} \cdots a_{11}b_{1j} & \cdots & a_{11}b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{ii}b_{i1} \quad a_{ii}b_{ij} & \cdots & a_{ii}b_{in} \\ \vdots \qquad \vdots & & \\ a_{nn}b_{n1} \cdots a_{nn}b_{nj} & \cdots & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

直接写出

- $AB=(a_{i,i}b_{i,j})$
- $BA=(b_{i,j}a_{j,j})$

$$\begin{array}{c} \\ i \end{array}\begin{pmatrix} & & \\ & b_{ij} & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & j & \\ & a_{jj} & \\ & & \end{pmatrix}$$
$$\quad B \qquad\qquad A$$

可见 $b_{i,j}$ 只能等于零, 如果 $i\neq j$.

$$a_{ii}b_{ij}=b_{ij}a_{jj} \begin{cases} i=j & b_{ij} \text{ 任意} \\ i\neq j & b_{ij}=\underbrace{\frac{a_{jj}}{a_{ii}}}_{\neq 1} b_{ij} \end{cases}$$

# 矩阵方幂

## 定义 (矩阵方幂)

$n$ 阶矩阵 $A$ 的 $k$ 次方幂, 记为 $A^k$, 表示 $k$ 个 $A$ 香乘.

- $A^0 = E_n$
- $A^k A^l = A^{k+l}$
- $(A^k)^l = A^{kl}$

$x^0 = 1$

$x^k \cdot x^l = x^{(k+l)}$

$x^0 \quad x^1$

$x^2 = x^{(1+1)} = x \cdot x$

# 矩阵乘法的性质

- 结合律: $A(BC) = (AB)C$
- 分配率:
  - $(A+B)C = AC + BC$
  - $A(B+C) = AB + AC$
- 数乘与矩阵乘法:

$$k(AB) = (kA)B = A(kB)$$

# 矩阵多项式

设 $f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 为一 $m$ 次的复系数多项式. 我们可以把 $f(x)$ 推广为 $n$ 阶矩阵 $A$ 的 $m$ 阶行列式

$$f(A) = a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E.$$

# 矩阵的转置

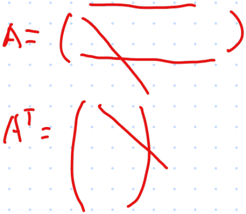
## 定义 1.7 (矩阵转置)

矩阵 $A$ 的转置矩阵为矩阵 $A$ 的行列互换得到的矩阵, 并记作 $A^T$.

记 $A = (a_{i,j})_{m,n}$, 则

- $A^T$ 为 $n \times m$
- $a^T_{i,j} = a_{j,i}$

$A^T$ 有时也记作 $A'$.

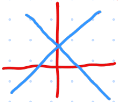


# 对称矩阵与反称矩阵 $A^T=(a^T_{ij})$ $a^T_{ij}=a_{ji}$

## 定义 (对称矩阵与反称矩阵)

- 称 $A$ 为 对称矩阵 如果 $A^T = A$
- 称 $A$ 为 反称矩阵 如果 $A^T = -A$

$f = f_{odd} + f_{even}$



$f(-x)$

求证：任何矩阵 A 均可写为

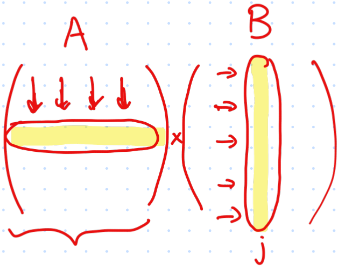
$$A = \underbrace{A_{sym}}_{对称} + \underbrace{A_{asym}}_{反对称}$$

$\frac{1}{2}(A+A^T) \rightsquigarrow A_{sym}$

$\frac{1}{2}(A-A^T) \rightsquigarrow A_{asym}$

# 矩阵转置的性质

- $(A^T)^T = A$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(kA)^T = kA^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$




前三个性质易证, 这里仅证明最后一个性质.

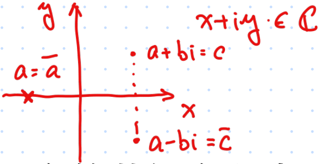
$A \cdot B = \left(\sum_k a_{ik} b_{kj}\right)$

$B^T A^T = \left(\sum_k b^T_{ik} \cdot a^T_{kj}\right)$

$(A \cdot B)^T = \left(\sum_k a_{jk} b_{ki}\right)$

$= \left(\sum_k b_{ki} \cdot a_{jk}\right)$

# 矩阵共轭




## 定义 (共轭)

对于 $c = a + bi \in \mathbb{C}$, 它的共轭定义为

$$\bar{c} := a - bi.$$

## 定义 1.8 (矩阵共轭)

对于复数矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 称 $\bar{A}$ 为 $A$ 的共轭矩阵如果

$$\bar{a}_{i,j} = \overline{a_{i,j}}.$$

# 矩阵共轭的性质

- $\bar{A} = A$ 当且仅当 $A$ 是实矩阵
- $(\bar{A})^T = \overline{A^T}$
- $\overline{A+B} = \bar{A} + \bar{B}$
- $\overline{kA} = \bar{k}\bar{A}$
- $\overline{AB} = \bar{A} \cdot \bar{B}$

$i^2 = -1$

$k = x_k + i y_k \quad a_{ij} = x_{ij} + i y_{ij}$

$k \cdot a_{ij} = x_k x_{ij} - y_k y_{ij}$

$+ i (x_k y_{ij} + y_k x_{ij})$

$-$

# Outline

Sec 2.0 引言

Sec 2.1 矩阵与其运算

Sec 2.2 矩阵的分块

Sec 2.3 矩阵的秩

Sec 2.4 矩阵的逆

Sec 2.5 初等矩阵

# 分块矩阵

$$\left(\begin{array}{c|c} a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \end{array}\right) \in F^{2\times 2}$$

$\leadsto F = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, 矩阵

## 定义 (分块矩阵)

将矩阵 $A$ 用若干条水平线和垂直线划分成一些子矩阵 (称为 $A$ 的一个 子块), 以子块为元素的形式上的矩阵称为 分块矩阵.

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

# 分块矩阵记号

$m:5=(2,1,2)$

$n:5=(3,2)$

$(3,2)\times(3,2)$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{pmatrix}
\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} & 3 & & & 2 \end{array} \\ 3 & \\ 2 & \end{array}
\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} E_3 & X_{3,2} \\ \hline 0_{2,3} & E_2 \end{array}\right)$$

一般地, 分别取 $m, n$ 的划分 $(m_1, \dots, m_i, \dots, m_M)$ 和 $(n_1, \dots, n_j, \dots, n_N)$, 矩阵 $A$ 可表示为分块矩阵

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,N} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{M,1} & \dots & A_{M,N} \end{pmatrix}$$

其中 $A_{i,j}$ 为 $m_i \times n_j$ 矩阵.

# 准对角线矩阵

## 定义 (准对角矩阵)

如果分块矩阵 $(A_{i,j})_{M,N}$ 有

- $M = N$
- $A_{i,j} = 0$ 如果 $i \neq j$

那么称 $A$ 为 准对角矩阵, 并可记为

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & & \\ & \ddots & \\ & & A_{M,M} \end{pmatrix}$$

# 分块矩阵的加法

$(F, +, \times)$

$\Rightarrow (F^{m\times n}, +, \times)$

$F = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$F = \mathbb{R}^{m\times n}$

## 定义 (分块矩阵的加法)

如果分块矩阵 $A = (A_{i,j})_{M,N}$ 和 $B = (B_{i,j})_{M,N}$ 有相同的分块 $(m_i)_i \times (n_j)_j$, 那么它们的和也可表示为分块矩阵

$$A + B = (A_{i,j} + B_{i,j})_{M,N}.$$

# 分块矩阵的乘法

回顾矩阵的乘法, 如果 $n_A = m_B$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n_A-1} & a_{1,n_A} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n_A-1} & a_{i,n_A} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m_A,1} & a_{m_A,2} & \cdots & a_{m_A,n_A-1} & a_{m_A,n_A} \end{pmatrix} \times$$

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,j} & \cdots & b_{1,n_B} \\ b_{2,1} & \cdots & b_{2,j} & \cdots & b_{2,n_B} \\ \vdots & & & & \vdots \\ b_{m_B-1,1} & \cdots & b_{m_B-1,j} & \cdots & b_{m_B-1,n_B} \\ b_{m_B,1} & \cdots & b_{m_B,j} & \cdots & b_{m_B,n_B} \end{pmatrix}$$

# 分块矩阵的乘法

尝试把矩阵乘法推广至分块矩阵，如果 $N_A = M_B$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} \phantom{A_{M_A,1}} & k & \phantom{\cdots} & \phantom{A_{M_A,N_A-1}} & \phantom{A_{M_A,N_A}} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,N_A-1} & A_{1,N_A} \\
\vdots & & & & \vdots \\
A_{i,1} & A_{i,2} & \cdots & A_{i,N_A-1} & A_{i,N_A} \\
\vdots & & & & \vdots \\
A_{M_A,1} & A_{M_A,2} & \cdots & A_{M_A,N_A-1} & A_{M_A,N_A}
\end{pmatrix} \times
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} \\ k \\ \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
B_{1,1} & \cdots & B_{1,j} & \cdots & B_{1,N_B} \\
B_{2,1} & \cdots & B_{2,j} & \cdots & B_{2,N_B} \\
\vdots & & & & \vdots \\
B_{M_B-1,1} & \cdots & B_{M_B-1,j} & \cdots & B_{M_B-1,N_B} \\
B_{M_B,1} & \cdots & B_{M_B,j} & \cdots & B_{M_B,N_B}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

# 分块矩阵的乘法

## 定义 (分块矩阵的加法)

分块矩阵 $A$ 和 $B$ 的乘积 $C = AB$ 有

$$C_{i,j} = A_{i,1}B_{1,j} + \ldots A_{i,k}B_{k,j} + \cdots + A_{i,N_A}B_{N_A,j}$$

为使得矩阵乘积 $A_{i,k}B_{k,j}$ 有意义, 我们需要

$$n_{A_{i,k}} = m_{B_{k,j}}$$

即

$$\boxed{n_k = m_k,} \quad \forall k = 1, \ldots, N_A$$

# 分块矩阵的转置

回顾矩阵 $A$ 的转置 $A^T = (a^T_{i,j})_{n,m}$ 满足 $a^T_{i,j} = a_{j,i}$.

$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \end{pmatrix}$ $A^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T \\ A_{12}^T \\ \vdots \\ A_{1n}^T \end{pmatrix}$

## 定义 (分块矩阵的转置)

分块矩阵 $A = (A_{i,j})_{M,N}$ 的转置 $A^T = (A^T_{i,j})_{N,M}$ 有

$$A^T_{i,j} = (A_{j,i})^T.$$

# 方阵行列式

## 定义 (方阵行列式)

方阵 $A$ 的行列式记为 $|A|$ 或 $\det(A)$.

行列式可以看作一个映射

$$
\begin{aligned}
|\cdot| : \mathbb{R}^{n\times n} &\to \mathbb{R} \\
(a_{i,j})_{m,n} &\mapsto |a_{i,j}|_{m,n}
\end{aligned}
$$

# 性质

- $|A^T| = |A|$
- $|kA| = k^n|A|$
- $|\bar{A}| = \overline{|A|}$

$\sum_{i_1 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 \cdots i_n)} \cdot a_{1i_1} \cdots a_{ni_n}$

$k^n ( a_{1i_1} \; a_{\cdot\cdot} \cdots a_{ni_n} )$

$A = (u, v)$

$k = 2$

# 定理 2.1

## 定理 2.1 (乘积的行列式)

行列式的乘积 = 乘积的行列式. 即

$$|AB| = |A||B|.$$

# 定理 2.1 证明 1

我们记 $C = AB$, 其中 $c_{i,j} = \sum_k a_{i,k} b_{k,j}$. 考虑分块矩阵

$$D = \begin{pmatrix} A & -E \\ & B \end{pmatrix}$$

由行列式的拉普拉斯展开得

$$|D| = |A||B|.$$

# 定理 2.1 证明 2

$\left(\begin{array}{c|c} \ddots & \\ \hline b_{ij} & \ddots \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & -E \\ \hline & B \end{array}\right)$ 改 127.

希望通过初等变化凑出乘积 $C$.

$$D' = \boxed{\begin{pmatrix} E & 0 \\ B & E \end{pmatrix}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} A & -E \\ 0 & B \end{pmatrix}}_{=D} = \begin{pmatrix} A & -E \\ AB & 0 \end{pmatrix}$$

再次由行列式的拉普拉斯展开得

$$|D'| = -|-E||AB| = |AB|.$$