Ch 5. 特征值与特征向量

钟友良

zhongyl@scut.edu.cn

Outline

Outline

例子

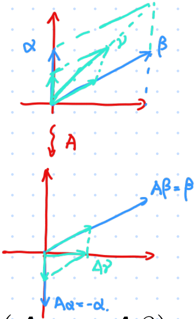
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ \alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

验证

$$A\alpha = -\alpha$$

$$A\beta = \beta$$

$$A\gamma \neq k\gamma$$



注意到 $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, 可得

$$A\gamma = A(\frac{1}{2}(\alpha + \beta)) = \frac{1}{2}(A\alpha + A\beta)$$
$$= \frac{1}{2}(-\alpha + \beta).$$

Outline

特征值与特征向量

定义 1.1

对于矩阵 $A \in F^{n\times n}$, 一个数 $\lambda \in F$ 称为 A 的一个特征值, 如果存在列向量 $\alpha \neq \mathbf{0}$, s.t.

eigenvalue

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

eigenvector

我们称 α 为 A 属于 λ 的一个特征向量 (简称 特征向量).

例子

回顾 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

- $A\alpha = -\alpha \Rightarrow \alpha$ 为 A 属于 -1 的特征向量
- $A\beta = \beta \Rightarrow \beta$ 为 A 属于 1 的特征向量

方程组形式

向量 $\alpha \neq 0$ 为 A 属于 λ 的特征向量

$$A\alpha = \underset{\substack{\shortparallel \\ \lambda E\cdot\alpha}}{\lambda\alpha}$$

当且仅当方程组

$$(\lambda E - A)\alpha = 0$$

有非零解 $\alpha \neq 0$. 即以下齐次方程组有非零解

$$\begin{pmatrix} \lambda - a_{1,1} & -a_{1,2} & \ldots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & \lambda - a_{2,2} & \ldots & -a_{2,n} \\ & & \ddots & \\ -a_{n,1} & -a_{n,2} & \ldots & \lambda - a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

特征矩阵

齐次方程组有非零解, 当且仅当, 行列式为零

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{1,1} & -a_{1,2} & \dots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & \lambda - a_{2,2} & \dots & -a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{n,1} & -a_{n,2} & \dots & \lambda - a_{n,n} \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$|\lambda E - A| = 0.$$

特征多项式

定义 1.2

矩阵 A 关于 λ 的 特征矩阵 定义为

$$\lambda E - A,$$

其行列式称为 A 关于 λ 的 特征多项式

$$f(\lambda) = |\lambda E - A|.$$

λ 是 A 的一个特征值.

$\Leftrightarrow \exists\, \alpha \neq 0$ s.t. $A\alpha = \lambda\alpha$

$\Leftrightarrow (\lambda E - A)\alpha = 0$ 有非零解

$\Leftrightarrow |\lambda E - A| = 0$

$\Rightarrow$ 实：至多有 n 个(实)解 $\Rightarrow$ A 至多有 n 个实特征值

复：有 n 个复数解 $\Rightarrow$ A 有 n 个复特征解.

简述代数基本定理

多项式

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

总能化为

$\lambda^{n_i} = b_i$

$\lambda^2 = b^{>0} \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{b}$

$\lambda^2 = -1 \Rightarrow \lambda = \pm i$

$$(\lambda^{n_1} - b_1)\times\ldots\times(\lambda^{n_N} - b_N) = 0,$$

其中

- $n_1 + \cdots + n_N = n$
- n_i 个不同的复数根满足 $\lambda^{n_i} = b_i$
  - b_i 可能等于 b_j, 则有重根
  - b_i 可能为负, 则没有对应实根

例题 1.1

例题 1.1

求下列矩阵的特征值和特征向量

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

解

特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 3 & -4 & 0 \\ 1 & \lambda - 1 & 0 \\ -7 & -5 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2$$

1 -1

例题 1.1 续

解 $\lambda = 1$ 下的方程 $(\lambda E - A)X = 0$ i.e.

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -7 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

得一个基础解系 $(0, 0, 1)^T$.
解 $\lambda = -1$ 下的方程 $(\lambda E - A)X = 0$ i.e.

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -7 & -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} = 2 \\ = 1 \\ = \frac{19}{2} \end{array} = 0.$$

得一个基础解系 $(2, 1, \frac{19}{2})^T$.

例题 1.2

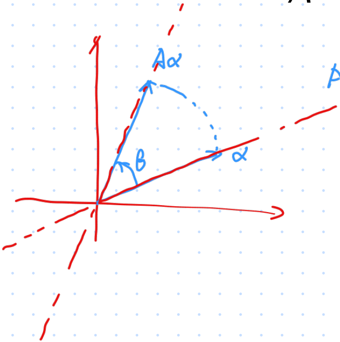
回顾习题 Ch2 1 (5).

$A\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow A\alpha$ 与 α 共线

例题 1.2

求下列矩阵的特征值和特征向量

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



$$A^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$$

例题 1.2 解 1

特征多项式

$$|\lambda E - A| = (\lambda - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta. \ = 0$$

如果 $\theta \neq k\pi$, 那么 $\sin^2\theta > 0$, 特征多项式无实根.
仅考虑 $\theta = k\pi$ 的情况.

例题 1.2 解 2

考虑 $\theta = 2k\pi$, 则

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

可得特征值为 1 (特征多项式的二重根), 可取特征向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

例题 1.2 解 3

考虑 $\theta = \pi + 2k\pi$, 则

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

可得特征值为 -1 (特征多项式的二重根), 可取特征向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

转置保持特征值

性质 1.1

对于 $n \times n$ 矩阵 A 与其转置 A^T 有相同的特征值.

性质 1.2

设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 记它的 n 个特征值为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, 我们有

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- A 的迹 $\mathrm{tr}(A)$ 等于 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$
- A 的行列式 $|A|$ 等于 $\lambda_1 \ldots \lambda_n$

Q: 特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 的存在性?

性质 1.2 证明

一方面, 由于 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 为 $f(\lambda)$ 的根, 所以

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)\ldots(\lambda - \lambda_n) \\ &= \lambda^n - (\sum_i \lambda_i)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n (\prod_i \lambda_i) \end{aligned}$$

另一方面, 特征多项式

$$f(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{1,1} & -a_{1,2} & \ldots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & \lambda - a_{2,2} & \ldots & -a_{2,n} \\ & & \ddots & \\ -a_{n,1} & -a_{n,2} & \ldots & \lambda - a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^n - (\sum_i a_{i,i})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n (\prod_i a_{i,i})$$

例题 1.3

例题 1.3

$$A\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow A^n\alpha = \lambda^n\alpha.$$

一般地, 对于多项式

$$f(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$$

有

$$f(A) = a_m A^m + \cdots + a_1 A + a_0 E$$

可得

$$f(A)\alpha = a_m \lambda^n \alpha + \cdots + a_1 \lambda\alpha + a_0\alpha.$$

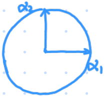
特征向量线性无关 $\mathbb{R}^2$

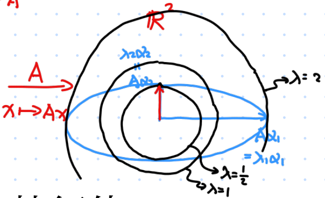
$\lambda E - A$

性质 1.3

A有 $\lambda_1 \neq \lambda_2$

s.t. $A\alpha_i = \lambda_i \alpha_i$





记

- $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ 为 A 的两两不同的特征值
- $\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,r_i}$ 为属于 λ_i 的线性无关的特征向量

那么所有特征向量 $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{1,2}$, ..., α_{t,r_t} 都线性无关.