例题

例题 (斜边大于直角边)

求证: 任给一对正交的向量 **a**, **b**, 则

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

$$\|\mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}\| \geq \|\mathbf{a}\|, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

进一步地, 等号成立 $\Leftrightarrow \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Pf: $|\vec{a} + \lambda \vec{b}|^2 = (a+\lambda b)\cdot(a+\lambda b)$

$= a\cdot a + 2\lambda a\cdot b + \lambda^2 b\cdot b$

$\overset{a\perp b}{=\!=} a\cdot a + \lambda^2 \cdot b\cdot b$

$= |a|^2 + \lambda^2 \cdot |b|^2$

$\geqslant |a|^2$

#.

定义

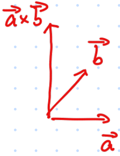
定义 2.2

$\times : V \times V \longrightarrow V$

$(\vec{a}, \vec{b}) \longmapsto \vec{a} \times \vec{b}$.

向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的 外积 (或 向量积) 定义为向量 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

- 方向: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 均垂直, 且 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 构成右手系
- 大小: $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$

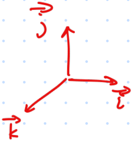


e.g. $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 单位向量

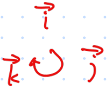
$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}$

($\vec{a}, \vec{b}$ 共线 $\Rightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$ or π

$\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$).



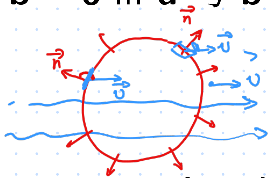
$$\begin{cases} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \end{cases}$$

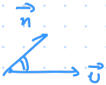


定义

易证

- a 或 b 为零向量, 则 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$
- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ iff a 与 b 共线



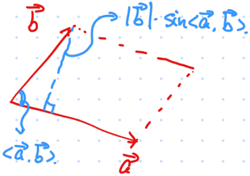


几何意义: $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ 为 a 与 b 构成的平行四边形的面积.

面积 = 底 × 高

$= |\vec{a}| \times |\vec{b}| \times \sin\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle$

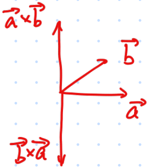
$= |\vec{a} \times \vec{b}|$



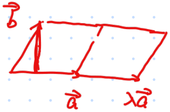
性质

性质 2.2

- $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \vec{0}$
- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
- $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$
- $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$



$(\lambda>0)$



取$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{i},\vec{j},\vec{j})$

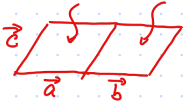
$LHS=(\vec{i}\times\vec{j})\times\vec{j}$

$=\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$

$RHS=\vec{i}\times(\vec{j}\times\vec{j})$

$=\vec{i}\times\vec{0}=\vec{0}$

Q: 结合律呢?



$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

$\vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\cdot\vec{k}$

$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$

$=a_x(\vec{i}\times\vec{b})\times\vec{c}$

$+a_y(\vec{j}\times\vec{b})\times\vec{c}$

$+a_z(\vec{k}\times\vec{b})\times\vec{c}$

对于$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(i,i,i)\ (i,i,j)\ (i,i,k)$

$(i,j,i)\ (i,j,j)$

$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\underline{(i,i,i)},\ \underline{(i,i,j)},\ \underline{(i,j,k)}$

?

基本向量的外积

回顾 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 为 x, y, z 轴的单位向量.
由右手系可得

- $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = -\mathbf{j} \times \mathbf{i} = \mathbf{k}$
- $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = -\mathbf{k} \times \mathbf{j} = \mathbf{i}$
- $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = -\mathbf{i} \times \mathbf{k} = \mathbf{j}$
- $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$

外积的行列式形式

记 $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$ 计算

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} = &\quad (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) \\ &\times (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) \\ = &\quad c_x\mathbf{i} + c_y\mathbf{j} + c_z\mathbf{k}\end{aligned}$$

$a_y b_z \cdot \vec{j} \times \vec{k} + a_z b_y \vec{k} \times \vec{j}$

$= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i}$

可以记为

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

例题 2.1

例题 2.1

设

- $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
- $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

求

- $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$
- $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 构成的平行四边形的面积

解: $\vec{a} = (-1, 1, 1)$

$\vec{b} = (2, -1, 1)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$$

面积 $= |\vec{a} \times \vec{b}|$

$= |(2, 3, -1)|$

$= \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$

#.

例题

例题

求证.

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = \underline{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2.$$

$\|$

$\big| |a||b| \cdot \sin\langle\vec{a},\vec{b}\rangle \big|^2$

$= |a|^2|b|^2(\sin\langle\vec{a},\vec{b}\rangle)^2$

$= |a|^2|b|^2(1-(\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle)^2)$

例题

例题 (Jacobi 等式)

$\vec{a}$

$\vec{c}$ $\vec{b}$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0.$$

$(a, b, c) = (i, i, i)$

$= (i, i, j)$

$= (i, j, k).$

定义

定义 2.3

内积"复合"外积

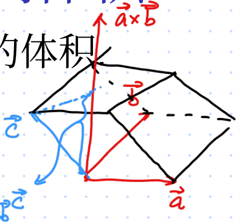
向量 a, b, c 的 混合积 是一个数

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) := (\mathbf{a} \underset{\text{外积}}{\times} \mathbf{b}) \underset{\text{内积}}{\cdot} \mathbf{c}.$$

$(\cdot,\cdot,\cdot): V \times V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

几何意义：混合积 = 定向体积

考虑 **a**, **b**, **c** 张成的平行六面体的体积



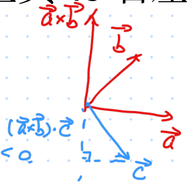
- 体积 (定向体积的大小)

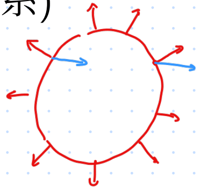
$$
\begin{aligned}
\text{体积} &= \text{底}\cdot\text{高}\\
&= |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|\cdot\Pi_{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}\mathbf{c}\\
&= |(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}|.
\end{aligned}
$$

$\vec p\cdot\vec q = |\vec p|\cdot\underbrace{|\vec q|\cdot\cos\langle\vec p,\vec q\rangle}$

$= |\vec p|\cdot\Pi_{\vec p}\vec q$

- 定向 (定向体积的正负 vs 右左手系)





代数意义: 混合积 = 行列式

通过对 **a**, **b**, **c** 的代数分解式, 我们可得

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

$$(a,b,c) = (a\times b)\cdot c = \left(|A_{11}|\cdot\vec{i} + |A_{12}|\vec{j} + |A_{13}|\cdot\vec{k}\right)\cdot\left(C_x\vec{i} + C_y\vec{j} + C_z\cdot\vec{k}\right)$$

$$A = a\times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = |A_{11}|\cdot\vec{i} + |A_{12}|\vec{j} + |A_{13}|\vec{k}$$

$$= C_x|A_{11}| + C_y|A_{12}| + C_z|A_{13}|$$

$$= \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

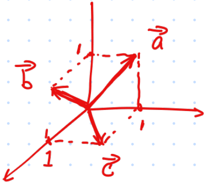
$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

应用: 求体积

例题 2.2

设

- $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$
- $\mathbf{b} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$
- $\mathbf{c} = \mathbf{k} + \mathbf{i}$



求 **a**, **b**, **c** 构成的平行六面体的体积

$\vec{a} = (1,1,0)$

$\vec{b} = (0,1,1)$

$\vec{c} = (1,0,1)$

体积 $= |(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|$

$$= \left|\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right|$$

#

应用：判断共面

例题 2.2

求 k 的值使得四个点 $P(2,0,1)$, $A(1,2,3)$, $B(2,3,1)$, $C(3,1,k)$ 共面?

$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0$

$\Leftrightarrow$ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 张成平行六面体体积为 0. $\Leftrightarrow$ 高 $=0 \Rightarrow$ $\vec{c}$ 在 $\vec{a},\vec{b}$ 平面

or

底 $=0 \Rightarrow$ $\vec{a},\vec{b}$ 共线 $\Rightarrow$ $\vec{c}$ 与 $\vec{a},\vec{b}$ 共面

$\Leftrightarrow$ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面.

P A C B

P, A, B, C 共面

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC}$ 共面

$\Leftrightarrow$ $(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC})=0$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ & 3 & \\ 1 & 1 & k-1 \end{vmatrix}$$

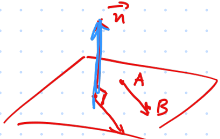
$\overrightarrow{PA}=(-1,2,2)$

$\overrightarrow{PB}=(0,3,0)$

$\overrightarrow{PC}=(1,1,k-1)$

Outline

法向量



定义 (法向量)

对于一个平面, 一个非零向量称为该平面的 法向量 如果它与平面垂直.

- 法向量与平面上的任意向量垂直.
- 一般用 **n** 记法向量

normal vector

$\vec{n} \perp \pi$

$\Leftrightarrow \lambda\vec{n} \perp \pi \quad (\lambda \neq 0)$

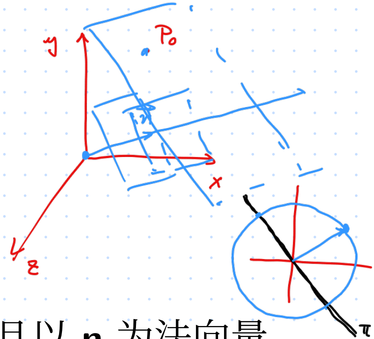
点法确定平面

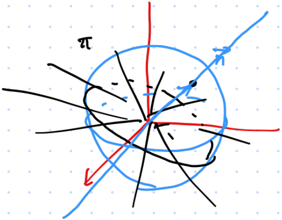
点法确定平面

给定

- 一个点 P_0
- 一个非零向量 $\mathbf{n}$

存在唯一一个曲面过 P_0 且以 $\mathbf{n}$ 为法向量





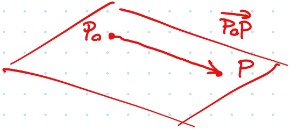
点法式方程

给定

- 一个点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$
- 一个非零向量 $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$

记 P_0 与 $\mathbf{n}$ 所确定的平面 π 为 $\{P(x, y, z)\}$, 可得

$$
\begin{aligned}
& P(x, y, z) \text{ 在 } \pi \text{ 上} \\
\Leftrightarrow & \overrightarrow{P_0P} \perp \mathbf{n} \quad (\vec{n}\text{ 定义}). \\
\Leftrightarrow & \overrightarrow{P_0P} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\perp\text{定义}). \\
\Leftrightarrow & A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0
\end{aligned}
$$



平面 $\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z)$ 满足 ....方程 $\}$

最后一个方程称为平面 π 的 点法式方程.

例题 3.1

例题 3.1

如果平面 π

- 过 $P_0(x_0, y_0, z_0)$
- 平行于不共线的向量 $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$

求平面 π 的方程.

解

对 $P \in \pi$, 有 $\overrightarrow{P_0P}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 共面.

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{P_0P}, \vec{a}, \vec{b}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0 \qquad \#$$

解：利用点法式方程.

只需找到法向量 $\vec{n}$.

不妨取 $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$.

由点法式方程

$\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$

$$\Leftrightarrow (x-x_0, y-y_0, z-z_0) \cdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0 \quad \cdots\cdots \#$$