Ch 6. 二次型与二次曲面

钟友良

zhongyl@scut.edu.cn

Outline

Outline

Outline

齐次二次多项式

定义 1.1

含有 n 个变量 $x_1, \ldots, x_n$ 且系数 $a_{i,j} \in F$ 的二次齐次多项式

$$f(x) = \sum_{1 \le i \le n} a_{i,i} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} 2 a_{i,j} x_i x_j$$

称为关于 F 的一个 n 元二次型 (简称 二次型).

- 实二次型: $F = \mathbb{R}$
- 复二次型: $F = \mathbb{C}$

二次型的矩阵表示

令

$$a_{j,i} = a_{i,j}$$

则

$$2a_{i,j}x_ix_j = a_{i,j}x_ix_j + a_{j,i}x_jx_i.$$

二次型 $f(x)$ 可表为

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_i x_i(\sum_j a_{i,j}x_j)$$

$$= (x_1 \ldots x_n) \begin{pmatrix} \sum_j a_{1,j}x_j \\ \vdots \\ \sum_j a_{n,j}x_j \end{pmatrix}$$

二次型的矩阵表示续

$$
\begin{aligned}
\cdots =& (x_1 \ldots x_n) \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
=& X^T A X.
\end{aligned}
$$

其中

- 矩阵 A 为 二次型 $f(x)$ 的矩阵
- 列向量 $X = (x_1 \ldots x_n)^T$

可见

- A 与 f 一一对应
- A 为对称矩阵

例子

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2) &= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \\
&= (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(x_1, \ldots, x_n) &= x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n \\
&= (x_1, \ldots, x_n)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Q: 能否通过替换变量来是的二次型矩阵为对角?

变量的线性替换

定义 1.1

数域 F 上由变量 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 到变量 $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ 的 线性变换 是指以下形式的表达式

$$X = CY,$$

其中 C 为 F 上的 $n \times n$ 矩阵.

非退化线性替换

定义 (非退化线性替换)

称线性替换是 非退化的 (或 可逆的), 如果系数矩阵 C 是可逆的.

对于 X 的一个非退化线性替换

$$X = CY$$

$$\begin{tikzcd} X \times X \arrow[r, "A"] & \mathbb{R} \\ Y \times Y \arrow[u] \arrow[ur, "C^TAC."'] & \end{tikzcd}$$

由 C 的可逆性可得 Y 的一个非退化线性替换

$$Y = C^{-1}X.$$

二次型 + 非线性线性替换

考虑关于变量 $X = (x_1, \ldots, x_n)$ 的二次型

$$f(x_1, \ldots, x_n) = X^T A X.$$

通过线性替换 $X = CY$ 用 Y 替换 X, 那么二次型

$$\begin{aligned} f(X) &= f(CY) \\ &= (CY)^T A (CY) \\ &= Y^T (C^T A C) Y \\ &= g(Y). \end{aligned}$$

标准形

如果线性替换 C s.t. $C^TAC = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ 为对角矩阵, 那么

$$\begin{aligned} g(Y) &= Y^T \Lambda Y \\ &= \sum_i \lambda_i y_i^2. \end{aligned}$$

我们称如何找出上述 C 为 二次型化平方和问题. 称只含平方项的二次型为 标准形.

合同于

定义 1.3

称 $n \times n$ 矩阵 A 合同于 B, 如果存在可逆矩阵 C s.t.

$$B = C^T AC.$$

合同也是一种等价关系. 回顾:

- "等价于": Def 3.2 of Sec 2.3

$$B = PAQ$$

- "相似": Def 2.1 of Sec 5.2

$$B = P^{-1}AP$$

定理 1.1

定理 1.1

如果 A 经过非退化线性替换 C 得到 B, 那么

$$B = C^T AC.$$

得到 A 合同于 B.

回顾

实对称矩阵可对角化: 对于实对称矩阵 A, 存在正交矩阵 T s.t. T^TAT 型为对角矩阵 Λ.
可见实对称矩阵 A 与对角阵 Λ 相似.
由于正交矩阵 T 满足 $T^T = T^{-1}$, 可见

$$\begin{aligned}\Lambda &= T^TAT \\ &= T^{-1}AT.\end{aligned}$$

得 A 合同于 Λ.
如果替换 T 为正交矩阵, 那么 "相似" $\Leftrightarrow$ "合同".

实二次型的标准化

定理 1.2

如果二次型 $f(X) = X^TAX$ 为实二次型, 那么存在非退化线性替换

$$X = CY$$

s.t.

$$C^TAC = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

可得

$$\begin{aligned} f(X) = f(CY) &= (CY)^TA(CY) \\ &= Y^T(C^TAC)Y = Y^T\Lambda Y \\ &= \sum_i \lambda_i y_i^2. \end{aligned}$$

正交变换

由定理 1.2 可得, 只要是实二次型 A, 总能找到可逆 C 化 A 为标准形.
进一步地, 利用定理 3.6 (实对称矩阵的对角化), 还能找到 正交变换

$$X = CY$$

化 A 为标准形.

例题 1.1

例题 1.1

用正交变化将以下二次型化为标准形

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3.$$

$$f(X) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

例题 1.2

例题 1.2

用配方法化以下二次型为标准形

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) = & \; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ & + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3. \end{aligned}$$

定理 1.3 & 1.4

我们可以将定理 1.2 从 $\mathbb{R}$ 推广到一般数域 F.

定理 1.3

数域 F 上的任意一个二次型总能通过非退化线性替换化为标准形.

定理 1.3 可表述为以下定理.

定理 1.4

数域 F 上的任意对称矩阵都合同于一个对角矩阵.

例题 1.3

例题 1.3

化以下二次型为标准形

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3.$$

定理 1.5

如果 $B = C^{-1}AC$ 形如

$$
\begin{pmatrix}
b_1 & & & & & \\
& \ddots & & & & \\
& & b_r & & & \\
& & & 0 & & \\
& & & & \ddots & \\
& & & & & 0
\end{pmatrix}
$$

那么

$$r = r(B) = r(C^{-1}AC) = r(A).$$

定理 1.5

定义

二次型的 秩 是其对应矩阵的秩.

定理 1.5

如果秩为 r 的二次型 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 可化为

$$g(y_1, \ldots, y_n) = b_1 y_1^2 + \cdots + b_r y_r^2.$$

复二次型

考虑 $F=\mathbb{C}$ 上的标准形

$$f(y_1,\ldots,y_n)=d_1y_1^2+\ldots d_ry_r^2,$$

其中, $d_i\neq 0$

对复数 $d_i\neq 0$, $\sqrt{d_i}$ 有意义. 可取线性替换

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \\ z_{r+1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sqrt{d_r} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \\ y_{r+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

复二次型的规范形

用 z 替换 y 得

$$f(z_1, \ldots, z_n) = z_1^2 + \ldots z_r^2.$$

称 $z_1^2 + \cdots + z_r^2$ 为复二次型 f 的 **规范形**, 其中 r 为 f 的秩.

实二次型的规范形

考虑 $F=\mathbb{R}$ 的标准形

$$
\begin{aligned}
f(y_1,\ldots,y_n) = d_1y_1^2 + \ldots d_py_p^2 \\
-(d_{p+1}y_{p+1}^2+\cdots+d_ry_r^2),
\end{aligned}
$$

其他 $d_i>0$.
取形同 $F=\mathbb{C}$ 情况的线性替换, 得实二次型 f 的
规范形

$$
\begin{aligned}
f = z_1^2 + z_p^2 \\
-(z_{p+1}^2+\cdots+z_r^2).
\end{aligned}
$$

惯性定理

定理 1.6

任意实二次型 $f = X^TAX$ 均可经过适当的非退化线性替换化为唯一的规范形.

实对称矩阵 A 总合同于

$$\begin{pmatrix} I_{p_+} & & \\ & -I_{p_-} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

称

- p_+ 和 p_- 分别为 f 的 正惯性指数 和 负惯性指数
- $p_+ - p_-$ 为 符号差

Outline

线性替换 $Y\in\mathbb{R}^n \xrightarrow{C} X\in\mathbb{R}^n$，$X = C\cdot Y$

$+\,C^{-1}$存在

非退化线性替换

A看作一个映射

相似

$$\begin{tikzcd} X\in\mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] & AX\in\mathbb{R}^n \arrow[d, "C^{-1}"] \\ Y\in\mathbb{R}^n \arrow[u, "C"] \arrow[r, "C^{-1}A\cdot C"] & \mathbb{R}^n \ni (C^{-1}AC)Y \end{tikzcd}$$

实对称A 合同 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

标准型 $\begin{pmatrix} +1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & +1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & \ddots \; 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{p_+} & & \\ & -E_{p_-} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

A看作一个"内积"

合同

$$\begin{tikzcd} X\in\mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{R} \ni X^TAX \\ Y\in\mathbb{R}^n \arrow[u, "C"] \arrow[ur, "C^TAC"'] & \end{tikzcd}$$

$X^TAX = (CY)^TA(CY) = Y^T(C^TAC)\cdot Y.$

前言

回顾: 实二次型 f 有唯一规范形

$$\begin{pmatrix} I_{p_+} & & \\ & \boxed{-I_{p_-}} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

本节中, 我们将考虑负惯性指数 $p_- = 0$ 的情形.

正定二次型

定义 2.1

二次型 $f(X)$ 成为 半正定的, 如果任意 $C \in \mathbb{R}^n$ 有

$$f(C) \geq 0.$$

内积, $(\cdot,\cdot)$

○ 正定性:

$(\alpha,\alpha) \geqslant 0$

& $(\alpha,\alpha)=0$

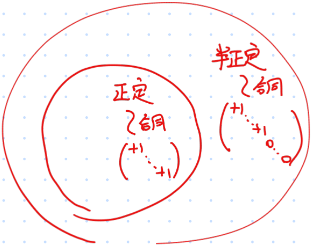
$\Rightarrow \alpha = 0$

进一步地, 如果任意 $C \neq 0$ 有

$$f(C) > 0,$$

那么称 f 为 正定的.

- "正定" $\Rightarrow$ "半正定"
- "正定" $\not\Leftarrow$ "半正定"



$(x_1,x_2)\begin{pmatrix}1 & \\ & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = x_1^2 \geqslant 0 \quad X=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \rightsquigarrow X^TAX=0$

例题 2.1

以下都是正定二次型

- $x_1^2 + \cdots + x_n^2$
- $x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + \cdots + (x_1 + \cdots + x_n)^2$

例题 2.2

- $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ 正定
- $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2$ 半正定

$$A = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & +1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$f(0, \ldots, 0, 1) = 0$

性质 2.1

非退化线性替换保持正定:

性质 2.1

正定实二次型经过非退化线性替换后仍为正定实二次型.

反证: 取二次型 A 是正定.

假设经非退化线性替换 $X=C\cdot Y$

得 C^TAC 不是正定

$\Rightarrow \exists Y_0\neq 0$ s.t. $Y_0^T(C^TAC)Y_0\leq 0$

取 $X_0=C\cdot Y_0$

$\because$ C 可逆

$\therefore$ $Y_0\neq 0\Rightarrow X_0=C\cdot Y_0\neq 0$

$\therefore$ $X_0^T\cdot A\cdot X_0\leq 0$ 与 "A 正定" 矛盾 #

定理 2.1

实对称 $A \xrightarrow{\text{对角化}} \begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{\text{标准型}} \begin{pmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{pmatrix}$

定理 2.1

考虑 $f(X) = X^TAX$. 以下命题等价:

1. f 正定
2. A 的特征值均为正
3. $r(A) = n$ & A 的正惯性指数为 n
4. A 合同于 E
5. 存在可逆 P s.t. $A = P^TP$

定理 2.1 ($1 \Rightarrow 2$)

1. f 正定
2. A 的特征值均为正

定理 2.1 ($2 \Rightarrow 3$)

1. A 的特征值均为正
2. $r(A) = n$ & A 的正惯性指数为 n

定理 2.1 ($3 \Rightarrow 4$)

1. $r(A) = n$ & A 的正惯性指数为 n
2. A 合同于 E

定理 2.1 ($4 \Rightarrow 5$)

1. A 合同于 E
2. 存在可逆 P s.t. $A = P^T P$

定理 2.1 ($5 \Rightarrow 1$)

1. 存在可逆 P s.t. $A = P^T P$
2. f 正定

性质 2.2

定义

实对称矩阵称为 正定矩阵 如果其对应的二次型是正定的.

性质 2.2

正定矩阵 A 的行列式大于 0.

$$|A| = \prod_i \lambda_i > 0.$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

定义 2.2

Q: “矩阵是正定的” 的必要条件?

定义 2.2

矩阵 $A=(a_{i,j})_{n\times n}$ 的 k 阶顺序主子式 是指

$$k\left\{\begin{pmatrix} \overbrace{\boxed{\begin{matrix} a_{11} & a_{1k} \\ a_{k1} & a_{kk} \end{matrix}}}^{k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\right.$$

$$P_k := \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} \end{vmatrix}$$

定理 2.2

定理 2.2

是

实对称矩阵实正定的, 当且仅当, 其各阶顺序主子式都大于零, i.e.

$$P_k > 0, \qquad \forall k = 1, \ldots, n.$$

略证

$$A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

例题 2.3

例题 2.3

判断下列二次型是否为正定的

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

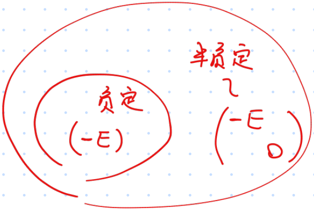
$P_1 = 3 > 0$

$P_2 = 6 - 1 = 5 > 0$

$P_3 = 24 + 4 + 4 - 4 - 12 - 8 = 8 > 0$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

负定



定义 2.3

称 $f(X)$ 是 半负定的 如果

$$f(X) \leq 0 \qquad \forall X \in \mathbb{R}^n.$$

进一步地, 称 $f(X)$ 是 负定的 如果

$$f(X) < 0 \qquad \forall X \neq 0 \in \mathbb{R}^n.$$

对负定 (或半负定) f 的讨论可转化为正定 (或半正定) $-f$ 的讨论.

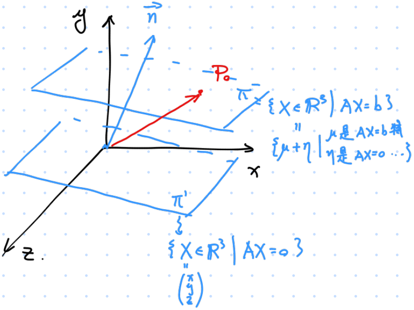
Outline

曲面方程

回顾

- ▶ 直线 : 平面与平面的交.
- ▶ 平面 $\pi := \{ P \in \mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0 \}$

曲面的方程



取 $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$

$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

点法式方程 $\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$

的坐标表示 $n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) + n_z(z - z_0) = 0$

$$n_x \cdot x + n_y \cdot y + n_z \cdot z = \underbrace{n_x x_0 + n_y y_0 + n_z z_0}_{= b}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} n_x & & \\ & n_y & \\ & & n_z \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = b.$$

$AX=0$ 的基础解系

$A \cdot P_0 = b$

球面方程

球面 $= \{P \in \mathbb{R}^3 | d(P, P_0) = r\}$

- 球心 $P_0 \in \mathbb{R}^3$
- 半径 $r \geq 0$

$\mathbb{R}^3$ 中的球面方程

$$|\overrightarrow{P_0P}| = d(P_0, P) = r$$

或

$$|\overrightarrow{P_0P}|^2 = r^2.$$

球面方程的坐标表示

球面方程的坐标可表示为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2.$$

展开得

$$x^2+y^2+z^2-2x_0x-2y_0y-2z_0z+(x_0^2+y_0^2+z_0^2-r^2)=0.$$

(3, 0) 方程表球面

$A \sim \begin{pmatrix} +1 & & \\ & +1 & \\ & & +1 \end{pmatrix}$

反过来, 对于三元二次方程

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

可写为

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \; xy + yz + zx = 0 \xrightarrow[y = x_1 - y_1]{x = x_1 + y_1} x_1^2 - y_1^2 + (\ldots)z + \ldots$

$$(x - (-\frac{a}{2}))^2 + (y - (-\frac{b}{2}))^2 + (z - (-\frac{c}{2}))^2 = \boxed{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} - d}.$$

记

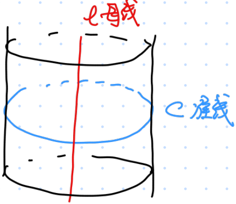
- $(x_0, y_0, z_0) = (-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2})$
- $t = \frac{a^2+b^2+c^2}{4} - d$

可得

1. $t > 0$: 圆心 (x_0, y_0, z_0), 半径 $\sqrt{t}$ 的球面
2. $t = 0$: 点 (x_0, y_0, z_0)
3. $t < 0$: $\mathbb{R}^3$ 中无解 (Q: $\mathbb{C}^3$ 呢?)

柱面

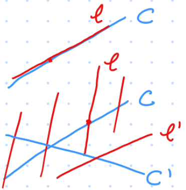
柱面 = 一条直线 l 沿空间曲线 C 平行移动所得的曲面



- l 母线
- C 准线

给定柱面, 母线与准线并不唯一.

e.g.



- 直线: 母线和准线唯一确定
- 平面: 母线和准线不唯一
- "柱面"

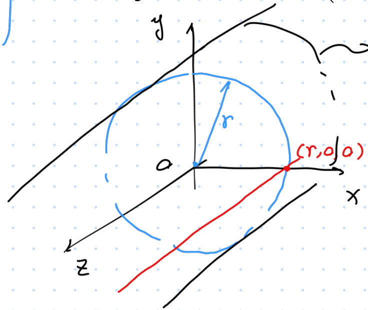
  - 准线不唯一 (取一平面割柱面) 更一般地, 与每条母线相交的曲线均可作准线
  - 母线: 不唯一, 但不同的选择相互平行

例题 3.1

例题 3.1

画出下列方程的曲面

$$\begin{pmatrix} +1 & & \\ & +1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \qquad x^2 + y^2 = r^2 \qquad (r > 0).$$



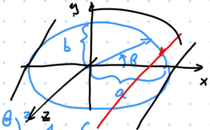
$$\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

例题 3.2

$$\begin{pmatrix} +1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

三类 二次柱面

- 椭圆柱面



$$\left(\frac{a\cdot\cos\theta}{a}\right)^2+\left(\frac{b\cdot\sin\theta}{b}\right)^2=1 \quad (\cos^2\theta+\sin^2\theta=1)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

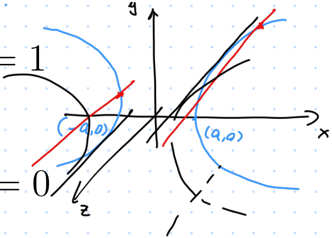
hyperbolic

$$\begin{cases} \cosh\theta = \frac{1}{2}(e^{\theta}+e^{-\theta}) \\ \sinh\theta = \frac{1}{2}(e^{\theta}-e^{-\theta}) \end{cases}$$

- 双曲柱面

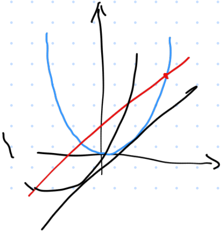
$$\left(\frac{a\cdot\cosh\theta}{a}\right)^2+\left(\frac{b\cdot\sinh\theta}{b}\right)^2=1. \quad \Rightarrow \cosh^2\theta-\sinh^2\theta=1.$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



- 抛物柱面

$$x^2-2py=0$$



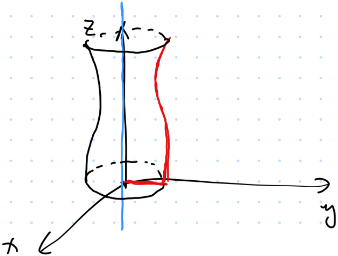
旋转面

旋转面 = 一条曲线 C 绕一条直线 l 旋转所得的曲面

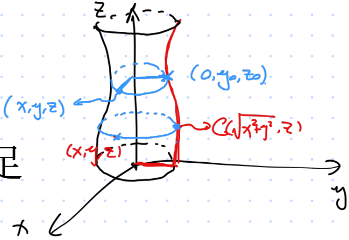
- l: ~~母线~~ 旋转轴
- C: ~~准线~~ 母线

考虑旋转轴 l 为坐标轴的情况: 不妨取

- l 为 z 轴.
- C 为平面 yOz 上的曲线 $f(y, z) = 0$



旋转面的曲面方程



记旋转面为 $M(x, y, z)$.
对 C 上的一点 $(0, y_0, z_0) \in M$ 满足

$$f(y_0, z_0) = 0.$$

绕 z 轴旋转一圈, 得 $z = z_0$ 面上的圆周:

$$x^2 + y^2 = 0^2 + y_0^2 = y_0^2.$$

可见, (x, y, z) 在 M 上, 如果 (x, y, z) “旋转” 到 yOz 平面上的点 (一般有两点) 落在母线 C 上.

- (x, y, z) “旋转” 到 yOz 上的点为

$$(0, \pm\sqrt{x^2 + y^2}, z)$$

- 落在母线 C 上:

$$\boxed{f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0}$$

圆锥面

一个旋转面称为 圆锥面, 如果

- 母线 C 为直线
- 母线 C 与旋转轴 l 相交

记

- C 与 l 交点为圆锥面的 顶点
- C 与 l 的夹角 α $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$ 为圆锥面的 半顶角

例题 3.3

例题 3.1

求以下圆锥面的方程:

- 顶点为原点 $(0,0,0)$
- 旋转轴为 z 轴
- 半顶角为 α,

例题 3.4

例题 3.4

称曲面 $x^2 + y^2 = a^2 z$ 为 旋转抛物面, 求其旋转轴与母线.

一般式方程

回顾: 一条直线可以表示为两个 (不重合的) 平面的交.

一条曲线 C 也可以表示为两个 (不重合的) 曲面 S_1 和 S_2 的交. 记曲面 S_i 满足方程 $F_i(x, y, z) = 0$. 那么曲线 C 的方程为

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) & = 0 \\ F_2(x, y, z) & = 0 \end{cases}$$

称为曲线 C 的 一般式方程.

例子

画出下列方程的曲线

$$\begin{cases} x^2 + y^2 & = 1 \\ z & = 0 \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 & = 1 \\ z & = 0 \end{cases}$$

Q: 可以不用 xOy 平面吗?

参数方程

把曲线看作是一个点 $(x(t), y(t), z(t))$ 关于时间 t 的运动轨迹, 得到曲线 C 的 参数方程

$$\begin{cases} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{cases}$$

投影

曲线 C 关于 xOy 的 投影柱面 是一个柱面:

- 准线为 C
- 母线方向垂直于 xOy

曲线 C 在 xOy 上的 投影曲线 (简称 投影) 为 C 关于 xOy 的投影柱面与 xOy 的交. e.g. 设曲线 C 为

$$\begin{cases} F(x,y,z) & = 0 \\ G(x,y,z) & = 0 \end{cases}$$

消去 z 得投影柱面

$$\begin{cases} H(x,y) & = 0 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

C 在 xOy 的投影为

例题 3.5

例题 3.5

求曲线 C

$$\begin{cases} z & = \sqrt{x^2+y^2} \\ x^2+y^2+z^2 & = 2 \end{cases}$$

在 xOy 上的投影曲线.

Outline

引言

由三元二次方程表示的曲面为 二次曲面. 本节将介绍:

1. 常见的二次曲面
    - 标准方程
    - 通过截痕法研究曲面几何性质
2. 二次曲面的分类

椭球面

定义

设 $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, 由方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

表示的曲面被称为 椭球面, 其中 a, b, c 称为椭球面的 半轴.

椭球面的截痕

椭球面与 xOy 的交线为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} & = 1 \\ z & = 0 \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} & = 1 \\ z & = 0 \end{cases}$$

是 xOy 上的一个椭圆.
类似地, 考虑椭圆面与平面 $z = h$ 的交线 (称为截痕)

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} & = 1 - \frac{h^2}{c^2} \\ z & = h \end{cases}$$

二次锥面

二次锥面 为曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

与 yOz 的截痕

考虑二次锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ 与 yOz 的交

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} & =0\\ x & =0\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} & =0\\ x & =0\end{cases}$$

即 $\begin{cases}\frac{y}{b}+\frac{z}{c} & =0\\ x & =0\end{cases}$ 和 $\begin{cases}\frac{y}{b}-\frac{z}{c} & =0\\ x & =0\end{cases}$

与 xOz 的截痕

注意到二次曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

中变量 x 和 y 的 “对称性”, 类似可得, 其与 xOz 的截痕为 $\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{z}{c} & =0\\ y & =0\end{cases}$ 和 $\begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{z}{c} & =0\\ y & =0\end{cases}$

一般地, 可以考虑与平面

$$n_x x+n_y y=0$$

的截痕

与 xOy 的截痕

二次曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

与平面 $z = h$ 的交为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= \frac{h^2}{c^2} \\ z &= h \end{cases}$$

可见

- $h = 0$: 截痕为点 $(0, 0, 0)$
- $h \neq 0$: 截痕为椭圆

单叶双曲面

单叶双曲面 形如

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

单叶双曲面的 yOz 截痕

单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

与 $x = 0$ 的交为

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} & = 1 \\ x & = 0 \end{cases}$$

双曲函数

- $\cosh(\theta) := \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}$
- $\sinh(\theta) := \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}$
- $\cosh^2(\theta) - \sinh^2(\theta) = 1$

单叶双曲面与 xOy 的截痕

单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

与 $z=h$ 的交为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} & =1+\frac{h^2}{c^2} \\ z & =h \end{cases}$$

得在 $z=h$ 平面上的椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}$$

且当 $h=0$ 时，截痕最小

双叶双曲面

双叶双曲面 形如

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

双叶双曲面与 xOz 的截痕

双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ 与 xOz 平面的交为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} & =-1y \\ =0 \end{cases}$$

有

$$\begin{cases} \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2} & =1 \\ y & =0 \end{cases}$$

双叶双曲面与 xOy 的截痕

双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ 与 $z=h$ 的交为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} & = -1 \\ z & = h \end{cases}$$

有

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} & = \frac{h^2}{c^2}-1 \\ z & = h \end{cases}$$

得

- $|h|>c$: 截痕为椭圆
- $|h|=c$: 截痕为点 $(0,0,\pm h)$
- $|h|<c$: 截痕为空集

锥面是特殊的双曲面

对 $d \in \mathbb{R}$, 考虑曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = d.$$

椭圆抛物面

椭圆抛物面 的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \pm z.$$

椭圆抛物面与 yOz 截痕

考虑 椭圆抛物面 与 yOz 的交

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} & = \pm z \\ x & = 0 \end{cases}$$

得 yOz 上的抛物线

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} & = \pm z \\ x & = 0 \end{cases}$$

- $+z$: 开口向上
- $-z$: 开口向下

椭圆抛物面与 xOy 截痕

考虑 椭圆抛物面 与 $z=h$ 的交

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} & = \pm z \\ z & = h \end{cases}$$

得 $z=h$ 上的

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\pm h.$$

仅考虑 $+$ 的情况, 截痕为

- $h>0$: 椭圆
- $h=0$: 点 $(0,0,0)$
- $h<0$: 空集

双曲抛物面

双曲抛物面 (或 马鞍面) 形如

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z.$$

Q: What if

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -z.$$

双曲抛物面与 xOz 的截痕

双曲抛物面与 $x = g$ 的交

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} & = z \\ x & = g \end{cases}$$

得 $x = g$ 上的

$$\frac{y^2}{b^2} = -z + \frac{g^2}{a^2}.$$

双曲抛物面与 $y = h$ 的交

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} & = z \\ y & = h \end{cases}$$

得 $y = h$ 上的

$$x^2 \quad h^2$$

双曲抛物面与 xOy 的截痕

双曲抛物面与 $z=h$ 的交

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} & = z \\ y & = h \end{cases}$$

得 $z=h$ 上的截痕为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=h.$$

- $h>0$: $\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}+h$
- $h=0$: $\frac{x}{y}=\pm\frac{a}{b}$
- $h<0$: $\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-h$

三元二次多项式

对于一般的三元二次多项式

$$a_{1,1}x^2 + a_{2,2}y^2 + a_{3,3}z^2 + 2a_{1,2}xy + 2a_{2,3}yz + 2a_{1,3}xz$$
$$+b_1x + b_2y + b_3z$$
$$+c$$

取 $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A = (a_{i,j})$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ 得

$$u^T Au + b^T u + c$$

三元二次多项式的标准形

由于 A 为实对称矩阵, 存在正交矩阵 Q, s.t.

$$Q^TAQ = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

正交变换 $u = Qv$ 其中 $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, 得

$$\begin{aligned} u^TAu + b^Tu + c =& v^TQ^TAQv + b^TQv + c \\ =& v^T\Lambda v + d^Tv + c \end{aligned}$$

其中, $d = (b^TQ)^T = Q^Tb$, 得

$$\begin{aligned} &\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 + d_1 x_1 + d_2 y_1 + d_3 z_1 + c \\ =&\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 z_2^2 + c_1 \end{aligned}$$

例题 4.1

将以下方程化为标准形, 并指出其曲面类型

$$2xy + 2xz + 2yz - \sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 1 = 0.$$