习题课 Ch6

3 用配方法把下列二次型化为标准形

(1) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

先消去含 x_1 的交叉项

解: 原二次型 $= x_1^2 + 2\cdot x_1\cdot(2x_2+x_3) + (2x_2+x_3)^2 - (2x_2+x_3)^2$
$+ x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3$
$= (x_1 + 2x_2+x_3)^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3$

替换 $y_1 = x_1+2x_2+x_3$，得

原二次型 $= y_1^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3$

再消去含 x_2 的.

$= y_1^2 - 3(x_2 + \frac{1}{3}x_3)^2 + \frac{1}{3}x_3^2 + 2x_3^2$
$= y_1^2 - 3(x_2 + \frac{1}{3}x_3)^2 + \frac{7}{3}x_3^2$

可见，令 $\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + \frac{1}{3}x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$

得 原二次型 $= y_1^2 - 3y_2^2 + \frac{7}{3}y_3^2$ #

(3). $f = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_4$

解: 观察 $f = x_1(x_2+x_3+x_4) + x_2x_4$.

令 $\begin{cases} x_2 = y_2+y_4 \\ x_4 = y_2 - y_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2 = \frac{1}{2}(x_2+x_4) \\ y_4 = \frac{1}{2}(x_2-x_4) \end{cases}$

$f = x_1(y_2+y_4+x_3+y_2-y_4) + (y_2+y_4)(y_2-y_4)$
$= x_1(2y_2+x_3) + y_2^2 - y_4^2$

令 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_3 \\ 2y_2 + x_3 = y_1 - y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}(x_1+x_2+x_3+x_4) \\ y_3 = \frac{1}{2}(x_1-x_2-x_3-x_4) \end{cases}$

得 $f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$ #

4 用正交变换化下列二次型化成标准形

(1) $f = 2x_1x_3 + x_2^2$

解：记 f 对应的对称矩阵为 $A = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$

特征值为 1，对应特征向量为 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

可见 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 R^3 的一组基

替换为一组单位正交基 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\beta_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$，$\beta_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

得 $(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3) = (e_1\ e_2\ e_3) \cdot T$

其中 $T = \begin{pmatrix} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & & \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

则 $T^TAT = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

#

(3) $f = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_3x_4 - 2x_4^2$

解：二次型 f 对应的对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 1 & & \\ & & 1 & -2 \\ & & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}$

- A_1 的特征向量 $\alpha_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\lambda_1^{(1)} = 0$

  $\alpha_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\lambda_2^{(1)} = 2$

- A_2 的特征向量 $\alpha_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\lambda_1^{(2)} = -3$

  $\alpha_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\lambda_2^{(2)} = 2$

对 $\alpha_i^{(j)}$ 进行单位正交化 $\beta_1^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$，$\beta_2^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$\beta_1^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$，$\beta_2^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

取单位正交基

$(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4) = (e_1\ e_2\ e_3\ e_4) \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & & \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ & & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}}_{T}$

得 T^TAT

$= \cdots = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 2 & & \\ & & -3 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}$

得 f 标准形为 $2y_2^2 - 3y_3^2 + 2y_4^2$

#

6 判断下列实二次型是不是正定二次型, or 是正定二次型的条件.

(2) $f = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_3 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$

解: 记 f 对应的对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & & \lambda-1 \\ & 1 & 2 \\ \lambda-1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

recall Thm 2.2 in P.179

A正定 $\Leftrightarrow$ 各顺序子式 $P_k > 0 \quad k = 1,2,3$

由于 $\begin{cases} P_1 = P_2 = 1 > 0 \\ P_3 = 1 - (\lambda-1)^2 \end{cases}$ $\qquad 5 - 4 - (\lambda-1)^2 > 0$

$-1 < \lambda - 1 < 1$

得 A 正定 $\Leftrightarrow 1 - (\lambda-1)^2 > 0$

$\Leftrightarrow 0 < \lambda < 2$ #

(4) $f = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} x_ix_j$

解: f 对应的对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac12 & \cdots & \frac12 \\ \frac12 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \frac12 \\ \frac12 & \cdots & \frac12 & 1 \end{pmatrix}$

考虑 $B = 2E \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$

显然 B 的正定性与 A 相同.

考察 B 的 k 阶顺序子式 P_k

$P_k = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[i=2,\dots,k]{r_1 + r_i} \begin{vmatrix} k+1 & k+1 & \cdots & k+1 \\ 1 & 2 & & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$

$= (k+1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$

$\rightarrow (k+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{vmatrix} = k+1 > 0$

$\therefore$ 对 $k = 1, \dots, n$, $P_k > 0$

$\Rightarrow$ A 正定 i.e. f 正定 #

9 设二次型 $f = a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$，问：

(1) 当 a 取何值时，$f(x_1,x_2,x_3)$ 正定？

解：f 对应的对称矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$

k阶顺序子式 $P_1 = a$

$P_2 = a^2-1$

$P_3 = a^3-3a-2$

要使A正定，当且仅当

$$\begin{cases} P_1 > 0 \Rightarrow a>0 \\ P_2 > 0 \Rightarrow a<-1 \text{ 或 } a>1 \\ P_3 > 0 \Rightarrow a>2 \end{cases}$$

可见 $a>2 \Leftrightarrow f$ 正定 #

(2) 当 a 取何值时，$f(x_1,x_2,x_3)$ 负定？

解：f 负定 $\Leftrightarrow -f$ 正定

记 $-f$ 对应的对称矩阵 $B=-A=\begin{pmatrix} -a & -1 & -1 \\ -1 & -a & 1 \\ -1 & 1 & -a \end{pmatrix}$

其k阶顺序子式

$$\begin{cases} P_1 = -a \\ P_2 = a^2-1 \\ P_3 = -(a^3-3a-2) \end{cases}$$

要使B正定，当且仅当

$$\begin{cases} P_1 > 0 \Leftrightarrow a<0 \\ P_2 > 0 \Leftrightarrow a<-1 \text{ 或 } a>1 \\ P_3 > 0 \Leftrightarrow a<-1 \text{ 或 } -1<a<2 \end{cases}$$

可见 $a<-1 \Leftrightarrow f$ 负定 #

10 求证：若实二次型 $f = X^TAX$ 正定，

则 $g = X^TA^{-1}X$ 也正定

Pf. 反证，若 g 不为正定，则

$\exists\ X_0 \neq 0$ 有 $X_0^TA^{-1}X_0 < 0$.

$$\Rightarrow (A^{-1}X_0)^TA(A^{-1}X_0) = X_0^T(A^{-1})^TX_0$$

$$= (X_0^TA^{-1}X_0)^T = X_0^TA^{-1}X_0 < 0$$

注意到 $A^{-1}X_0 \neq 0$

有 f 不是正定 与题设矛盾 #

11. 设 A, B 为两个 n 阶正定矩阵.

求证：$A+B$ 也正定

Pf：对任意 $X \neq 0 \in \mathbb{R}^n$，由 $A.B$ 正定性得

$X^TAX > 0$ & $X^TBX > 0$

$$\Rightarrow X^T(A+B)X = X^TAX + X^TBX > 0$$

$\therefore\ A+B$ 正定 #

12 设 A 为正定矩阵. 求证

(1) A^T 也正定

Pf：任意 $X \neq 0$ 有

$$X^TA^TX = (X^TAX)^T = X^TAX > 0$$ #

(2) A^* 也正定

Pf：由 A 正定得 A 可逆

$\therefore\ A^* = |A|E \cdot A^{-1}$

$\therefore\ \forall X \neq 0$，$X^TA^*X = X^T(|A|E \cdot A^{-1})X$

$$= \underbrace{|A|}_{\substack{>0 \\ (\because A正定)}} \cdot \underbrace{X^TA^{-1}X}_{\substack{>0 \\ (\because Ex10)}} > 0$$ #

16 设 A, B 为正定矩阵，k, l 为正数

求证：$kA + lB$ 也正定

Pf：仅证 kA 正定

$\forall X \neq 0$ 有

$$X^T(kA)X = \underbrace{k}_{>0} \cdot \underbrace{X^TAX}_{>0\ (\because A\text{正定})} > 0$$

由 Ex 11 得 $kA + lB$ 也正定 #

17 设 A 为正定矩阵，m 为正整数

求证 A^m 也正定

Pf：A 为正定，则 $\exists$ 可逆 P s.t. $P^TP = A$

则 $\forall X \neq 0$

$$X^TA^mX = X^T(P^TP)^mX$$

$$= X^T P^TP \cdots\cdots P^TP X$$

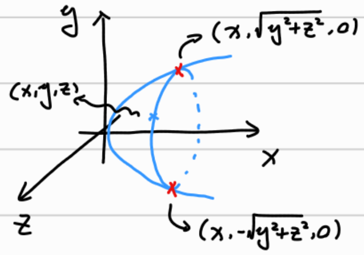
$$= X^T P_m^T \cdot P_m X \quad \left(P_m = \begin{cases} \overbrace{P^T \cdot P \cdots P^T \cdot P}^{m\text{个}} & m\text{为偶} \\ \underbrace{P \cdot P^T \cdots P \cdot P^T P}_{m\text{个}} & m\text{为奇} \end{cases} \right)$$

$$= (P_mX)^T \cdot (P_mX) > 0$$

$\therefore$ A^m 正定 #

21 求下列旋转面方程：

(1) $y^2 = 2x$，绕 x 轴



解：注意到题设给出的是 xoy 平面上的方程

(i.e. 旋转面 M 与 xoy 的交线)

考虑 M 上的点 (x,y,z) "旋转"到 xoy 上的点

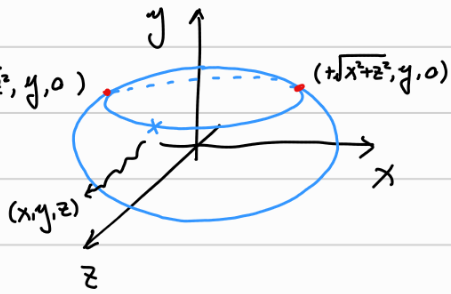
(共两点 $(x, \sqrt{y^2+z^2}, 0)$ 与 $(x, -\sqrt{y^2+z^2}, 0)$)

代入 M 与 xoy 的交线方程 $y^2 = 2x$

得 $(\sqrt{y^2+z^2})^2 = 2x$

$\therefore$ M 的方程为 $y^2 + x^2 = 2x$ #

(2) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$，绕 y 轴



解：旋转面 M 上任一点 (x,y,z) 绕

y 轴旋转轨道与 xoy 的交点

为 $(\pm\sqrt{x^2+z^2}, y, 0)$

代入 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

得 M 上的点满足方程

$$\frac{1}{9}(\pm\sqrt{x^2+z^2})^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$$

i.e. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ #