Ch 1. 行列式

钟友良

zhongyl0430@gmail.com

Sec 1.0 引言

Sec 1.1 2 阶与 3 阶行列式

Sec 1.2 n 阶排列

Sec 1.3 n 阶行列式的定义

Sec 1.4 n 阶行列式的性质及计算

Sec 1.0 引言

Sec 1.1 2 阶与 3 阶行列式

Sec 1.2 n 阶排列

Sec 1.3 n 阶行列式的定义

Sec 1.4 n 阶行列式的性质及计算

回顾

- ▶ 线性方程组
 - ▶ 方程组表示

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ & \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n &= b_m \end{cases}$$

- ▶ 矩阵表示: 系数矩阵, 增强矩阵
- ▶ 线性方程组的解
 - ▶ 1x1, 2x2 情形求解
 - ▶ 解的存在性
 - ▶ 解的唯一性

动机 1×1

求解 1×1 线性方程组 ax = b

- ▶ a ≠ 0 则有存在性
 - ▶ 进一步,有唯一性

动机 2×2

求解方程组

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 &= b_2 \end{cases}$$

消元法可得

$$\begin{cases} (a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1})x_1 &= (b_1a_{2,2} - b_2a_{1,2}) \\ (a_{2,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1})x_2 &= (b_2a_{1,1} - b_1a_{2,1}) \end{cases}$$

由 1×1 的情况可得 $(a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \neq 0)$ 有解的存在性.

Sec 1.0 引言

Sec 1.1 2 阶与 3 阶行列式

Sec 1.2 n 阶排列

Sec 1.3 n 阶行列式的定义

Sec 1.4 n 阶行列式的性质及计算

定义

定义 1.1 (行列式)

对于 2×2 矩阵

$$A := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

它的 行列式 (determinant) 定义为

$$\det(A) := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

也记作

$$|A| := \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}$$
 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

例子

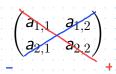
鸡兔同笼 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

对角线法则

我们可以在矩阵上通过画斜线进行记忆

$$+ Q_{1,1} Q_{2,2} - Q_{1,2} Q_{2,1}$$



定义

定义 1.2 (3x3 行列式) 对于 3 × 3 矩阵

$$A := egin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

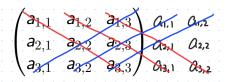
它的 行列式 (determinant) 为

$$\det(A) := a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} + a_{1,2} a_{2,3} a_{3,1} + a_{1,3} a_{2,1} a_{3,2} - a_{1,1} a_{2,3} a_{3,2} - a_{1,2} a_{2,1} a_{3,3} - a_{1,3} a_{2,2} a_{3,1}.$$



对角线法则

类似 2×2 , 我们可以在矩阵上通过画斜线进行记忆.



Sec 1.0 引言

Sec 1.1 2 阶与 3 阶行列式

Sec 1.2 n 阶排列

Sec 1.3 n 阶行列式的定义

Sec 1.4 n 阶行列式的性质及计算

n 阶排列

定义 2.1 (n 阶排列)

一个 n <mark>阶排列</mark> 是一个由自然数 1, ..., n 组成的一个 n 元有序数组 $i_1, i_2, ..., i_n$.

- ▶ 自然排序: 1,2,...,n
- ▶ 所有 n 阶排列的总数为 $n! = n \cdot (n-1) \dots 2 \cdot 1$

排列作为一个双射

▶ 排序可以看作一个双射

$$p: \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$$
$$j \mapsto i_j.$$

▶ 也看理解

定义 2.2 (逆序)

- ▶ 排序 $i_1, ..., i_n$ 中的一个 <mark>逆序</mark> (inversion) 是排 序中的一对数字 i_j, i_k 如果 $i_j > i_k$.
 - ▶ 该排列的 <mark>逆序数</mark> 是其逆序的总数, 记为 $\tau(i_1,\ldots,i_n)$
 - ▶ 一个排列称为 奇的 (odd) 如果它的逆序数为奇的, 否则称为 偶的 (even).

Ch1

双靴?

- 1 (4) (5,
- 2. (1) (2)