转置保持特征值

性质 1.1

对于 $n \times n$ 矩阵 A 与其转置 A^T 有相同的特征值.

性质 1.2

设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 记它的 n 个特征值为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, 我们有

- A 的迹 $\mathrm{tr}(A)$ 等于 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$
- A 的行列式 $|A|$ 等于 $\lambda_1 \ldots \lambda_n$

Q: 特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 的存在性?

性质 1.2 证明

一方面, 由于 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 为 $f(\lambda)$ 的根, 所以

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)\ldots(\lambda - \lambda_n) \\ &= \lambda^n - (\sum_i \lambda_i)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n(\prod_i \lambda_i) \end{aligned}$$

另一方面, 特征多项式

$$\begin{aligned} f(\lambda) = |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{1,1} & -a_{1,2} & \ldots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & \lambda - a_{2,2} & \ldots & -a_{2,n} \\ & & \ddots & \\ -a_{n,1} & -a_{n,2} & \ldots & \lambda - a_{n,n} \end{vmatrix} \\ &= \lambda^n - \mathrm{tr}(A)\cdot\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n|A| \end{aligned}$$

例题 1.3

例题 1.3

$$A\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow A^n\alpha = \lambda^n\alpha.$$

一般地, 对于多项式

$$f(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$$

有

$$f(A) = a_m A^m + \cdots + a_1 A + a_0 E$$

可得

$$f(A)\alpha = a_m \lambda^n \alpha + \cdots + a_1 \lambda\alpha + a_0 \alpha.$$

特征向量线性无关

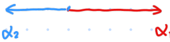
性质 1.3 （不同特征值的特征向量必线性无关）

记

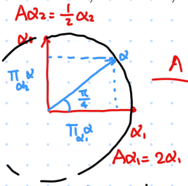
- $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ 为 A 的两两不同的特征值
- $\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,r_i}$ 为属于 λ_i 的线性无关的特征向量

那么所有特征向量 $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{1,2}$, ..., α_{t,r_t} 都线性无关.

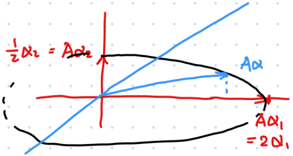
α_2 : $A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2$



α_1 : $A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1$



$\xrightarrow{A}$



A 可对角化

$\mathbb{R}^n = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_m}$

$$
\begin{aligned}
A\alpha_2 &= A(k_1\alpha_1) \\
&= k_1 A\alpha_1 \\
&= k_1\lambda_1\alpha_1 \\
&= \lambda_1(k_1\alpha_1) = \lambda_1\alpha_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A\alpha &= A(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2) \\
&= k_1 A\alpha_1 + k_2 A\alpha_2 \\
&= k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_2\alpha_2 \\
&\neq \lambda(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2)
\end{aligned}
$$

性质 1.3 证明

命题 $P(t)$ 成立 $\Leftarrow$
① $t=1$ $P(t)$ 成立
② $P(t)$ 成立 $\Rightarrow$ $P(t+1)$ 成立.

对特征值个数 t 使用数学归纳法.
当 $t=1$ 时, 由题设可得.
假设命题对 $t=k$ 时成立, 考虑 $t=k+1$ 的情况,
要证以下向量组线性无关:

$$\underbrace{\alpha_{1,1},\dots,\alpha_{1,r_1}}_{\lambda_1},\dots,\underbrace{\alpha_{k+1,1},\dots,\alpha_{k+1,r_{k+1}}}_{\lambda_{k+1}}.$$

考虑方程

$$\sum_i a_{1,i}\alpha_{1,i}+\cdots+\sum_i a_{k,i}\alpha_{k,i}+\sum_i a_{k+1,i}\alpha_{k+1,i}=0.$$

性质 1.3 证明

乘以 A 得

$$\underbrace{\sum_i a_{1,i}\lambda_i\alpha_{1,i}}_{\lambda_1}+\cdots+\underbrace{\sum_i a_{k,i}\lambda_k\alpha_{k,i}}_{\lambda_k}+\underbrace{\sum_i a_{k+1,i}\lambda_{k+1}\alpha_{k+1,i}}_{\lambda_{k+1}}=0.$$

减去 λ_{k+1} 倍原方程, 得

$$\sum_i \underbrace{a_{1,i}}_{=0}\underbrace{(\lambda_i-\lambda_{k+1})}_{\neq 0}\alpha_{1,i}+\cdots+\sum_i \underbrace{a_{k,i}}_{=0}\underbrace{(\lambda_k-\lambda_{k+1})}_{\neq 0}\alpha_{k,i}$$

$$+\underbrace{\boxed{\sum_i a_{k+1,i}(\lambda_{k+1}-\lambda_{k+1})\alpha_{k+1,i}}}_{=0}=0.$$

由 $\alpha_{1,1},\ldots,\alpha_{k,r_k}$ 线性无关得

$$a_{i,j}=0 \qquad \forall i=1,\ldots,k, j=1,\ldots,r_i.$$

所以 $\sum_{i=1,\ldots,r_{k+1}} a_{k+1,i}\alpha_{k+1,i}=0$.

性质 1.3 证明

再有题设 $\alpha_{k+1,1}, \ldots, \alpha_{k+1,r_{k+1}}$ 线性无关得 $a_{k+1,i} = 0$.

性质 1.4

性质 1.4

属于不同特征值的特征向量线性无关, i.e. $\alpha_{i,\cdot}$ 与 $\alpha_{j,\cdot}$ 线性无关, 如果 $i \neq j$.

Outline

矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n} \longleftrightarrow$ 映射 $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

特征： $\alpha \mapsto \lambda\alpha$

特征值 特征向量

α 是 A 属于 λ 的特征向量

存在性： $A\alpha = \lambda\alpha$

$\Leftrightarrow (\lambda E - A)\alpha = 0 \rightsquigarrow$ 特征矩阵 $\lambda E - A$

$\Leftrightarrow |\lambda E - A| = 0 \rightsquigarrow$ 特征多项式 $|\lambda E - A|$

$$\begin{cases} \lambda^n - (\sum_i \lambda_i)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)(\prod_i \lambda_i) = 0 \\ \lambda^n - (\sum_i a_{ii})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)|A| = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_i \lambda_i = \sum_i a_{ii} = tr(A) \\ \prod_i \lambda_i = |A| \end{cases}$$

$\Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow \alpha_i$ 与 α_j 线性无关

$\Rightarrow \lambda_i$ 取 $\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,r_i}$ 线性无关

$\rightsquigarrow (\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,r_i})_i$ 也线性无关.

幂的计算

$A^n = A \cdot A \cdots A$

考虑计算 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ 的幂 A^n 的 “复杂度”.

对于 2×2 的矩阵, 一次矩阵乘法需要 2^3 次乘法.
那么 A^n 需要进行 $2^3(n-1)$ 次乘法.
一般地, 对 $m \times m$ 的矩阵的 n 次幂计算复杂度为 $O(m^3 n)$.

$m \times m^2 = m^3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A^n : O(m^3 \cdot n)$

$m = 100$

$m^3 = 10^6$

幂的计算 (改)

取 $P = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ 对 A 进行对角化:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & \\ & 3 \end{pmatrix} = B.$$

那么

$P^{-1}AP = B \Rightarrow A = PBP^{-1}$

$= (PBP^{-1}) \cdot (PBP^{-1}) \cdots (PBP^{-1})$ $\begin{pmatrix} \circ & & & \\ & \circ & & \\ & & \ddots & \\ & & & \circ \end{pmatrix}$

$$A^n = PB^nP^{-1}$$

$= P \cdot \begin{pmatrix} 2^n & \\ & 3^n \end{pmatrix} P^{-1}$

$O(mn)$ $m = 10^2$

通过类似的对角化, 对 $m \times m$ 的矩阵的 n 次幂计算复杂度为 $O(mn)$.

相似矩阵

定义 2.1

称方阵 A 相似于 B (记作 $A \sim B$), 如果存在可逆矩阵 P, s.t.

$$B = P^{-1}AP.$$

相似关系是一类等价关系:

- 反身性: 取 $P=E$　$E^{-1}AE=A$
- 对称性　$B=P^{-1}AP \Rightarrow A=PBP^{-1} \overset{?}{=} Q^{-1}BQ$　$Q=P^{-1}$
- 传递性　$\begin{cases} B=P^{-1}AP \\ C=Q^{-1}BQ \end{cases} \Rightarrow C=Q^{-1}(P^{-1}AP)Q$
  $=(PQ)^{-1}A(PQ)$

性质 2.1

性质 2.1

如果 $A \sim B$, 那么 $|\lambda E - B| = |\underbrace{P^{-1}P}_{\lambda E} - P^{-1}AP| = |P^{-1}\lambda E P - P^{-1}AP|$

- A 与 B 有相同的特征多项式 $= |P^{-1}(\lambda E - A)P|$
  $= |P^{-1}||\lambda E - A||P|$
  $= |\lambda E - A||P^{-1}|\cdot|P|$
  $= |\lambda E - A|\cdot|P^{-1}P| = |\lambda E - A|$
  - 有相同的特征值 (特征值是…的根)
  - 行列式, 秩也相同 $\begin{cases} |A| = \prod_i \lambda_i \\ trA = \sum_i \lambda_i \end{cases}$
- $f(B) = P^{-1}f(A)P$ 对任一多项式 $f(x)$
- $A^T \sim B^T$ $\left(B^T = (P^{-1}AP)^T = P^T A^T (P^{-1})^T \overset{Q=(P^{-1})^T}{=} Q^{-1}A^TQ \right.$
  - 如果 A 可逆, 那么 $A^{-1} \sim B^{-1}$
    - 从而有 $A^* \sim B^*$

$B^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1}$
$= P^{-1}A^{-1}P$

伴随矩阵 A^*
if A 可逆
then $A^* = |A|E \cdot A^{-1}$

$B^* = |B|E \cdot B^{-1}$
$= |A|E \cdot P^{-1}A^{-1}P$
$= P^{-1}(|A|E \cdot A^{-1})P = P^{-1}A^*P$

$A \sim B$
$\Rightarrow f(A) \sim f(B)$
$(B^n = (P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)$
$= P^{-1}A^nP$
$\Rightarrow f(B) = \sum a_i B^i$
$= \sum a_i P^{-1}A^iP$
$= P^{-1}(\sum_i a_i A^i)P$
$= P^{-1}\cdot f(A)\cdot P \quad)$

对角化

Q: 任一矩阵是否都相似于某个对角矩阵?

简记对角矩阵 $\Lambda = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$. $= \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$

定义 2.2

称矩阵 A 为 可对角化, 如果存在对角阵 Λ 相似于 A. i.e. 存在可逆矩阵 P 和对角矩阵 Λ, s.t.

$$P^{-1}AP = \Lambda.$$

定理 2.1

定理 2.1

$n \times n$ 矩阵 A 可对角化，当且仅当，A 存在 n 个线性无关的特征向量.

Rmk: $A \sim \Lambda \iff$ 线性无关特征向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

$\underset{\Leftarrow}{\not\Rightarrow}$ n个不同的特征值

定理 2.1 充分性

假设 A 有 n 个线性无关的特征向量 $v_1, \ldots, v_n$. 取矩阵

$$P = (v_1, \ldots, v_n)$$

那么

$$\begin{aligned} AP &= A(v_1, \ldots, v_n) = (Av_1, \ldots, Av_n) \\ &= (\lambda_1 v_1, \ldots, \lambda_n v_n) \\ &= (v_1, \ldots, v_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= P\Lambda. \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 v_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \lambda_n v_n \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} v_n \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

所以

$$P^{-1}AP = \Lambda.$$

定理 2.1 必要性

由 A 可对角化, 存在对角矩阵 Λ 与可逆矩阵 P s.t.

$$P^{-1}AP = \Lambda. \Leftrightarrow AP = P\Lambda$$

$$A(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \quad (\alpha_1,\dots\alpha_n)\cdot\Lambda$$

$$(A\alpha_1,\dots,A\alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1,\dots,\lambda_n\alpha_n)$$

记 α_i 为 P 的列向量, 得

$$A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i.$$

由 P 可逆得 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ 线性无关. 取 P s.t.

$$(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = (e_1,\dots,e_n)\cdot P$$

$$\vec{\alpha}\cdot P^{-1} = \vec{e}$$

$\mathbb{R}^n$: $e_1,\dots,e_n$

$$\alpha = x_1e_1+\dots+x_ne_n = (e_1,\dots,e_n)\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$$

$$A:\ \alpha \longrightarrow A\alpha$$

$$(e_1,\dots,e_n)\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} \longmapsto (e_1,\dots,e_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$$

特征向量

几何意义: 坐标变换 $\underbrace{\vec{\alpha}\cdot P^{-1}\cdot P\cdot x}_{\vec{\alpha}\cdot x} \longmapsto \underbrace{\vec{\alpha}\cdot P^{-1}\cdot A\cdot P\, x}_{\vec{\alpha}\cdot B\cdot x}.$

推论 2.1 & 2.2

推论 2.1

如果 $n \times n$ 矩阵有 n 个不同的特征值, 那么它可对角化.

证明: 属于不同特征值的特征向量线性无关.

推论 2.2

$f(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda-\lambda_r)^{k_r}$

如果 $n \times n$ 复数矩阵的特征多项式无重根, 那么它可对角化.

证明: 复特征多项式中的重根 $\Rightarrow$ 相同的特征值

注意

推论中的条件是充分而非必要.

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} \quad \underline{\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\end{pmatrix}}$$

例题 1.1

回顾例题 1.1 中, 矩阵 $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ 只有 2 个线性无关的特征向量:

- 属于特征值 1 的特征向量 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 属于特征值 -1 的特征向量 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -\frac{19}{2} \end{pmatrix}$

所以 A 不能对角化.

例题 2.1

例题 2.1

矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 能否对角化? 如果可以, 求 $P^{-1}AP$ 中的 P.

解

A 的特征方程为

$$|\lambda E - A| = (\lambda - 5)(\lambda + 1)^2 = 0$$

有根 $\lambda = 5$ 和 $\lambda = -1$.

例题 2.1

$(\lambda E - A)X = 0$

- $\lambda = 5$ 代入 $\lambda E - A$ 得

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \text{有非零解} \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = -1$ 代入 $\lambda E - A$ 得

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \ldots \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$1 \quad \underbrace{1 \quad 1}$

例题 2.1

$(P \mid E) \longrightarrow (E \mid P^{-1})$

取

$$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

得

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & & \\ & \frac{1}{3} & \\ & & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

有

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

例题 2.2

例题 2.2

矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

- 能否对角化?
- 考虑复数特征值的情况?

解

A 的特征方程为

$$|\lambda E - A| = \lambda(\lambda^2 + 19) = 0.$$