Outline

回顾

考虑 A 的列向量 α_j, i.e.

$$A = (\alpha_1 \ldots, \alpha_n).$$

那么方程组 $Ax = b$ 可以记为

$$(\alpha_1 \ldots, \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

i.e.

$$x_1\alpha_1 + \ldots x_n\alpha_n = \mathbf{b}.$$

定理 6.1

定理 6.1

方程 $Ax = b$ 有解, 当且仅当, 向量 b 可由 $\alpha_1, \dots,$ α_n 线性表示.

分情况: b 是否为 0?

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b.$$

齐次方程的解

$(V; +, \cdot)$

向量空间：封闭，单位元，逆元，律

✓ ✓ ✓ ✓

性质 6.1 & 6.2

齐次方程组 $Ax = 0$ 的解集

kernel

$$\mathrm{Ker}(A) := \{x | Ax = 0\}$$

关于加法和数乘封闭:

- $x_1 + x_2 \in \mathrm{Ker}(A)$ if $x_1, x_2 \in \mathrm{Ker}(A)$
- $kx \in \mathrm{Ker}(A)$ if $k \in F$ and $x \in \mathrm{Ker}(A)$

可见, 解集 $\mathrm{Ker}(A)$ 是一个向量空间.

基础解系

由上述性质 6.1 & 6.2 可知, 如果解集 Ker(A) 包含一个非零元 $x \neq 0$, 那么它含有无限个非零元 kx ($k \in F$).

Q: Ker(A) 是否有限维? 存在有限 $x_1, \ldots, x_n$, s.t.

$$\mathrm{Ker}(A) := \{k_1 x_1 + \ldots k_n x_n\}.$$

$Ax=0$ 解集 Ker(A) $\longleftrightarrow$ 过零点的线性子空间

基础解系 $\longleftrightarrow$ 极大线性无关组

基础解析

定义 6.1

称 $Ax = 0$ 的解 $\eta_1, \ldots, \eta_m$ 为该方程组的一个 **基础解系**, 如果

- (线性无关) $\eta_1, \ldots, \eta_m$ 线性无关
- (极大) 任一解都可由 $\eta_1, \ldots, \eta_m$ 线性表示

齐次方程的一个基础解系, 其实就是解集 $\mathrm{Ker}(A)$ 的一个极大线性无关组.

定理 6.2

$Ax=0$ 解集

$\mathrm{Ker}A := \{x \mid Ax=0\}$ → 极大线性无关组 ~ 秩

↳ 线性子空间 (过零点)

基础解系 ~ 极大线性无关组

$n-r(A)$ ~ 秩

n: 未知量 $r(A)$: 限制数

定理 6.2

若 $Ax = 0$ 有非零解, 则

- 方程组有基础解系
- 基础解系所含解的个数为 $n - r(A)$

$Ax=0$

⇕ 阶梯化

$$r\left\{\left(\begin{array}{ccc|c} \circ & & & 0 \\ & \circ & & \vdots \\ & & \circ \ \circ & 0 \end{array}\right)\right.$$

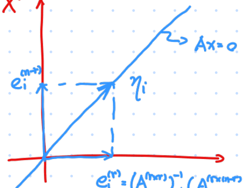
⇕ 列交换

$$r\left\{\left(\begin{array}{cc|c} \underbrace{\square}_{r} & \underbrace{\square}_{n-r} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right)\right. \rightsquigarrow \begin{pmatrix} A^{(r\times r)} & A^{(r\times(n-r))} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{(r)} \\ X^{(n-r)} \end{pmatrix} = 0$$

$$A^{(r\times r)} \cdot X^{(r)} + A^{(r\times(n-r))} \cdot X^{(n-r)} = 0$$

$$A^{(r\times r)} \cdot X^{(r)} = -A^{(r\times(n-r))} \cdot X^{(n-r)}$$

$$X^{(r)} = \left(A^{(r\times r)}\right)^{-1}\left(-A^{(r\times(n-r))} \cdot X^{(n-r)}\right)$$



$$e_i^{(r)} = \left(A^{(r\times r)}\right)^{-1}\left(A^{(r\times(n-r))} \cdot e_i^{(n-r)}\right)$$

$$\eta_i = \begin{pmatrix} 0 \\ e_i^{(n-r)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i^{(r)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

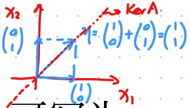
定理 6.2 证明

$A = (1\ -1)$

$n - r(A) = 2 - 1 = 1$

$Ax = (1\ -1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$

$\hookrightarrow x_1 - x_2 = 0$



仅考虑阶梯化后的 A, 那么 $Ax = 0$ 可写为

$$\left(A^{(r\times r)} A^{(r\times(n-r))}\right)\begin{pmatrix} X^{(r)} \\ x^{(n-r)} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

或

$$A^{(r\times r)} X^{(r)} = -A^{(r\times(n-r))} X^{(n-r)},$$

其中 $X^{(n-r)}$ 是 $(n-r$ 个$)$ 自由未知量. 对 $i = 1, \ldots, n-r$, 记 $\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$

- $e_i^{(n-r)}$ 为 $\mathbb{R}^{n-r}$ 的第 i 个单位向量.
- $e_i^{(r)} := -(A^{(r\times r)})^{-1}(A^{r\times(n-r)} e_i^{(n-r)})$.
- $\eta_i = \begin{pmatrix} e_i^{(r)} \\ e_i^{(n-r)} \end{pmatrix}$

定理 6.2 证明

要证 $\eta_1, \dots, \eta_{n-r}$ 为 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 仅需证

- 线性~~相~~无关: 由 $\{e_i^{(n-r)}\}$ 的线性无关可得
- 极大:

对于任意一个解 $\eta = (c_1, \dots, c_n)$, 要证

$$\eta = c_1\eta_1 + \cdots + c_{n-r}\eta_{n-r}.$$

记 $\eta = (\eta^{(r)}, \eta^{(n-r)})^T$. 显然 $\eta^{(n-r)} = c_1 e_1^{(n-r)} + \dots c_{n-r} e_{n-r}^{(n-r)}$, 剩下证

$$\eta^{(r)} = c_1 e_1^{(r)} + \dots c_{n-r} e_{n-r}^{(r)}.$$

验证左右都是以下方程的解

$$A^{(r\times r)} X^{(r)} = -A^{(r\times(n-r))}(c_1 e_1^{(n-r)} + \dots c_{n-r} e_{n-r}^{(n-r)}).$$

求基础解系过程

上述给出了基础解系的求法:

1. 阶梯化 $A = (A^{(r\times r)} A^{(r\times(n-r))})$
2. 取自由未知量中的一组基 $\{e_1^{(n-r)}, \ldots, e_{n-r}^{(n-r)}\}$
3. 求解 $e_i^{(r)} := -(A^{(r\times r)})^{-1}(A^{r\times(n-r)} e_i^{(n-r)})$
4. 组装 $\eta_i = \begin{pmatrix} e_i^{(r)} \\ e_i^{(n-r)} \end{pmatrix}$

通解

定义 6.2 (通解)

对于

- 齐次方程组的一个基础解系 $\eta_1, \ldots, \eta_{n-r}$
- 任意 $c_1, \ldots, c_{n-r}$

我们称

$$\eta = c_1\eta_1 + \ldots c_n\eta_n$$

为方程组的 通解 (或 一般解).

通解 vs 特解

性质 6.3

如果 γ_1, γ_2 为 $Ax = b$ 的解, 那么 $\gamma_1 - \gamma_2$ 为 $Ax = 0$ 的解.

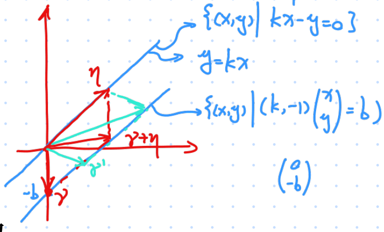
$A(\gamma_1-\gamma_2) = A\gamma_1 - A\gamma_2 = b - b = 0$

性质 6.4

如果

- γ 为 $Ax = b$ 的解
- η 为 $Ax = 0$ 的解

那么 $\gamma + \eta$ 是 $Ax = b$ 的解.



定理 6.3

取 $Ax = b$ 的一个解 γ_0. 方程的所有解形如

$$\gamma = \gamma_0 + \eta$$

其中 η 为方程组通解.

我们通常称 γ_0 为方程组的 特解.

定理 6.4

结合定理 6.3 与通解的 “分解”, 我们有方程组的解的线性表示:

定理 6.4

方程组 $Ax = b$ 的解有线性表示

$= \gamma_0 + \eta$

$$\gamma = \gamma_0 + \underbrace{k_1\eta_1 + \dots k_{n-r}\eta_{n-r}}$$

其中

- γ_0 为 $Ax = b$ 的一个特解
- $\eta_1, \dots, \eta_{n-r}$ 为 $Ax = 0$ 的一个基础解系

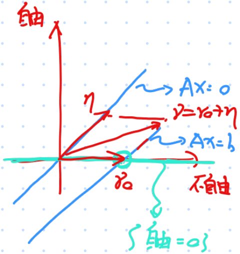
例题 6.1

旧题 (例题 1.2) 新解

例题 6.1

解下列增广矩阵对应的方程

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ & 1 & -1 & -1 & -5 & -4 \end{array}\right)$$



① 齐次方程组

$$\left(\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & -1 & -1 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

$$e_1^{(3)} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \rightsquigarrow e_1^{(2)} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \eta_1 = \begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$e_2^{(3)} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \rightsquigarrow e_2^{(2)} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \eta_2 = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$e_3^{(3)} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \rightsquigarrow e_3^{(2)} = \begin{pmatrix}-6\\5\end{pmatrix} \rightsquigarrow \eta_3 = \begin{pmatrix}-6\\5\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

② 求特解 $\gamma_0 = \begin{pmatrix}6\\-4\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

③ $Ax=b$ 的解

$$\gamma = \gamma_0 + \eta$$
$$= \gamma_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + k_3\eta_3$$

例题 6.2

例题 6.2

解下列增广矩阵对应的方程

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$