Ch 1. 行列式

钟友良

zhongyl0430@gmail.com

Outline

Outline

回顾

- 线性方程组
  - 方程组表示

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n & = b_1 \\ & \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n & = b_m \end{cases}$$

  - 矩阵表示：系数矩阵，增强矩阵
- 线性方程组的解
  - 1x1, 2x2 情形求解
  - 解的存在性
  - 解的唯一性

动机 1x1

求解 1x1 线性方程组 $ax = b$

- $a \neq 0$ 则有存在性
  - 进一步，有唯一性

动机 2x2

求解方程组

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 & = b_2 \end{cases}$$

消元法可得

$$\begin{cases} (a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1})x_1 & = (b_1a_{2,2} - b_2a_{1,2}) \\ (a_{2,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1})x_2 & = (b_2a_{1,1} - b_1a_{2,1}) \end{cases}$$

由 1×1 的情况可得, $a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \neq 0$ 有解的存在性.

Outline

定义

定义 1.1 (行列式)

对于 2×2 矩阵

$$A := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

它的 行列式 (determinant) 定义为

$$\det(A) := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

也记作

$$|A| := \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

例子

鸡兔同笼

计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \text{ 和 } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

$= 1\times 4 - 1\times 2$ $\quad = 0$

$= 2$

对角线法则

我们可以在矩阵上通过画斜线进行记忆.

$$\underline{+\, a_{1,1} \cdot a_{2,2} \quad -\, a_{1,2} \cdot a_{2,1}}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

$-$ $\qquad$ $+$

定义

定义 1.2 (3x3 行列式)

对于 3×3 矩阵

$$A := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

它的 行列式 (determinant) 为

$$\det(A) := a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}.$$

对角线法则

类似 2×2, 我们可以在矩阵上通过画斜线进行记忆.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{matrix}$$

Outline

n 阶排列

定义 2.1 (n 阶排列)

一个 n 阶排列 是一个由自然数 $1, \ldots, n$ 组成的一个 n 元有序数组 $i_1, i_2, \ldots, i_n$.

- 自然排序: $1, 2, \ldots, n$
- 所有 n 阶排列的总数为
  $n! = n \cdot (n-1) \ldots 2 \cdot 1$

排列作为一个双射

- 排序可以看作一个双射

$$\begin{aligned} p : \{1, \ldots, n\} &\to \{1, \ldots, n\} \\ j &\mapsto i_j. \end{aligned}$$

- 也看理解

$$\begin{matrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{matrix}$$

1, 3, 2

2 3 1

1 2 3

2 3 1

逆序

1, 3, 2   2 3 1

定义 2.2 (逆序)

- 排序 $i_1, \ldots, i_n$ 中的一个 逆序 (inversion) 是排序中的一对数字 i_j, i_k 如果 $i_j > i_k$.
  - 该排列的 逆序数 是其逆序的总数, 记为 $\tau(i_1, \ldots, i_n)$
  - 一个排列称为 奇的 (odd) 如果它的逆序数为奇的, 否则称为 偶的 (even).

双射？

Ch1.

1 (4) (5)

2. (1) (2)