Ch 3. 向量代数与几何应用

钟友良

zhongyl@scut.edu.cn

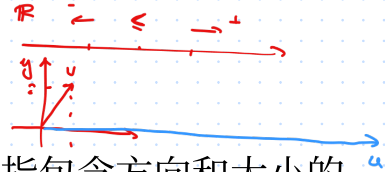
Outline

Outline

Outline

定义

标量 = 大小
向量 = 大小 + 方向



定义 (向量)

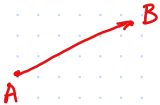
向量 (又称 矢量) (vector) 是指包含方向和大小的量.

记号 (向量)

向量可以看作一条有向线段. 记 A 和 B 分别为该有向线段的起点和终点, 那么我们记对应的向量为 $\overrightarrow{AB}$.

向量也可使用小写英文黑斜体字母表示, 如 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x}$.

$\overrightarrow{AB}$: 有向线段
起点为A
终点为B



$\vec{a}$

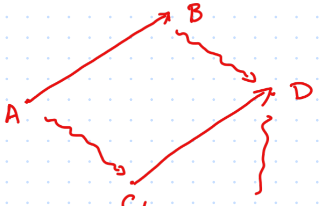
自由向量

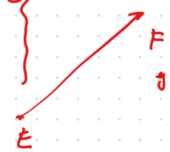
自由向量 是指仅考虑向量的方向和大小, 不考虑具体位置的向量.

自由向量可以看作是一种等价类.

向量 = 方向 + 大小 $\rightsquigarrow$ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

有向线段 = 方向 + 大小 + 位置信息. ··· $\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{CD}$



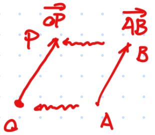


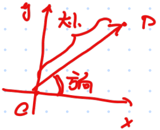
有向线段

$\overrightarrow{AB}\sim\overrightarrow{CD}$: ∃平移 s.t. A 平移到 C

B ··· D

- 反身
- 对称
- 传递





{有向线段}/~ = {自由向量}

= {P}

方向

向量 = 方向 + 大小

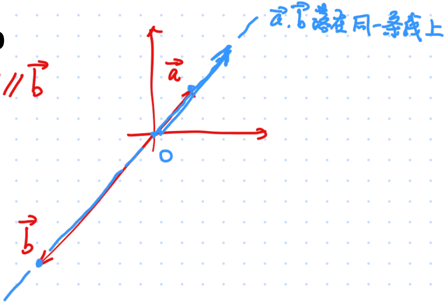
考虑自由向量 **a** 和 **b**

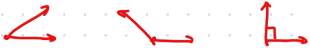
共线或平行 **a** ∥ **b**　　$\vec{a} \parallel \vec{b}$

- 方向相同
- 方向相反

不平行

- 垂直 **a** ⊥ **b**





大小

a $|a|$: a 与 o 的距离

$\vec{a}$ $|\vec{a}|$: $\vec{a}$ 与 $\vec{0}$ 的距离

$\vec{a}$的终点与O点的距离

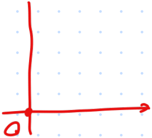
(起点)

大小:

- $|\mathbf{a}|$: 向量 $\mathbf{a}$ 的长度
- 单位向量: $|\mathbf{a}| = 1$
- 零向量: $|\mathbf{a}| = 0$

关系

$\vec{0} = \vec{OO}$

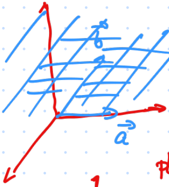


规定: 零向量的方向是 "所有方向"

- 与任意向量平行
- 与任意向量垂直

共面

- 弱于共线
- 任意两个向量同共面 必
- 一般对 ≥ 3 个向量来说



$r(A) \leq n$

$v_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$ $i = 1, \dots, n$

$A = (v_1, \dots, v_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$r(A) = r$

$\Leftrightarrow$ $v_1, \dots, v_n$ 落在 某在 r 维超平面.

	1	plane. 2	hyperplane of dim 3
	共线 $\Rightarrow$	共面 $\Rightarrow$	共 " "
1个向量	平凡		
2 × 向量	✓	平凡	
3 × 向量	✓	✓	平凡

加法

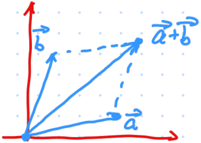
$V := \{(自由)向量\}$

$+ : V \times V \to V$
$(\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{a}+\vec{b}$

定义 1.1 (向量加法)

对于两个向量 **a** 和 **b**, 我们通过以下方式定义 **a** 和 **b** 的 和 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$:

- 三角形法则
- 平行四边形法则

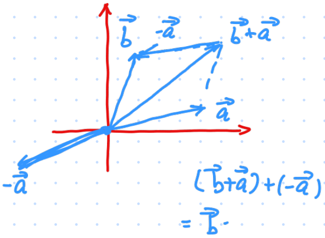


减法

定义 (逆向量)

一个向量称为向量 $\mathbf{a}$ 的 逆向量 (记为 $-\mathbf{a}$) 如果

- $-a$ 与 a 的方向相反
- $|-a| = |a|$



定义 (向量减法)

$$\mathbf{a}-\mathbf{b} := \mathbf{a}+(-\mathbf{b}).$$

数乘

F: 数域

V: {向量}

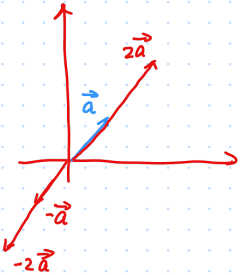
$\cdot : F \times V \longrightarrow V$

$(\lambda, \vec{a}) \longmapsto \lambda \cdot \vec{a}$

定义 1.2 (向量数乘)

对于实数 λ 和向量 $\mathbf{a}$, 它们的数乘 乘积 $\lambda\mathbf{a}$ 定义为向量

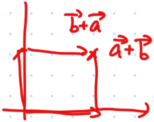
- 大小: $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda||\mathbf{a}|$
- 方向:
  - $\lambda > 0$: 同向
  - $\lambda < 0$: 反向



线性运算

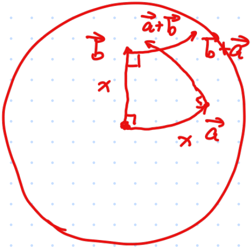
向量空间$(V, F; +, \cdot)$

向量的 线性运算 = 加法 + 数乘. 满足以下性质:



$\vec a$: 东x
$\vec b$: 北x

- $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$
- $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$
- $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$
- $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$
- $\lambda(\mu\mathbf{a})=\mu(\lambda\mathbf{a})=(\lambda\mu)\mathbf{a}$
- $1\mathbf{a}=\mathbf{a}$ & $(-1)\mathbf{a}=-\mathbf{a}$
- $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$
- $(\lambda+\mu)\mathbf{a}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}$



$\vec a+\vec b$: 先东x, 再北x
$\vec b+\vec a$: 先北x, 再东x

夹角

Riemann } Finsler

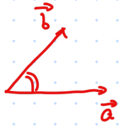
定义 (向量之间的夹角)

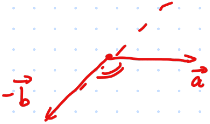
记 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ 为向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 之间 $[0, \pi]$ 的 夹角.

注意, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ 可能是钝角: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ 是锐角, 当且仅当, $\langle \mathbf{a}, -\mathbf{b} \rangle$ 是钝角.

$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \in [0, \pi]$

$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, -\vec{b} \rangle = \pi$





单位向量

$\vec{a}$ $|a| = 1$.

$e_{\vec{a}} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$

回顾: 单位向量 $\mathbf{a}$ 有 $|\mathbf{a}| = 1$

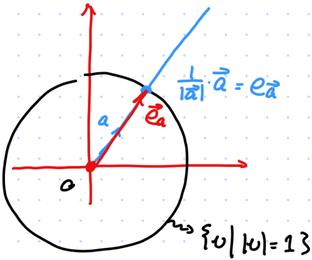
定义 (向量的单位向量)

对于向量 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, 称 $\mathbf{e_b} := \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ 为 $\mathbf{a}$ 方向上的 单位向量. 可见

- 方向: $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ 与 $\mathbf{a}$ 同向 ✓
- 大小: $\left|\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\right| = 1$

$= \left|\frac{1}{|\vec{a}|}\right| \cdot |\vec{a}|$

$= \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = 1$



投影

定义 (向量的投影)

对于向量 **a** 与 $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, 定义 **a** 在 **b** 方向上的 **投影向量** 为

$$\Pi_{\mathbf{b}}\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{b}},$$

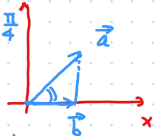
其中 $\Pi_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$ 为 **a** 在 **b** 方向上的 **投影**

$$\Pi_{\mathbf{b}} : V \to \mathbb{R}$$

$$a \mapsto \boxed{|\mathbf{a}|} \times \boxed{\cos\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle}$$

e.g. $\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle = \frac{\pi}{4}$

$|\vec{a}| = \sqrt{2}$



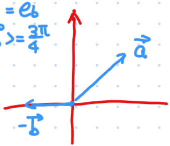
$\Pi_b a = |a| \cdot \cos\langle a, b\rangle$

$= \sqrt{2} \cdot \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= 1$

$\Pi_b a \cdot e_b = e_b$

$\langle \vec{a}, -\vec{b}\rangle = \frac{3\pi}{4}$

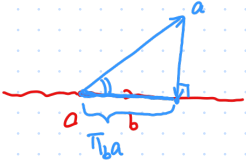


b 的方向

- 改变 $\Pi_b a$
- 不改变 $\Pi_b a \cdot e_b$

$\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 的投影

"影子"的"大小"



$$\frac{\Pi_b a}{|a|} = \cos\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle$$

$$e_{-b} = \frac{-b}{|-b|} = -\frac{b}{|b|} = -e_b$$

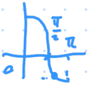
计算 $\Pi_{-b} a$

$= \sqrt{2} \cdot \cos(\frac{3}{4}\pi)$

$= \sqrt{2} \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -1$

$\Pi_{-b} a \cdot (e_{-b})$

$= -1 \cdot (-e_b) = e_b$

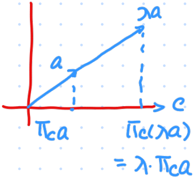


投影的性质

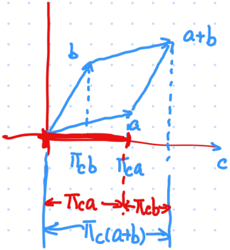
投影与线性运算可交换:

- $\Pi_{\mathbf{c}}(\lambda \mathbf{a}) = \lambda \Pi_{\mathbf{c}} \mathbf{a}$
- $\Pi_{\mathbf{c}}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \Pi_{\mathbf{c}} \mathbf{a} + \Pi_{\mathbf{c}} \mathbf{b}$

$\Pi_c(\lambda a) = \lambda \cdot \Pi_c a$



$\Pi_c(a+b) = \Pi_c a + \Pi_c b$



定义

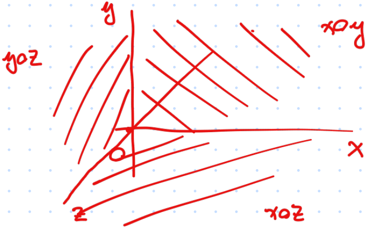
定义 ($\mathbb{R}^3$ 的直角坐标系)

在三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中选取 直角坐标系:

1. 选定原点 O
2. 选定两两垂直的三个数轴: x 轴, y 轴, z 轴

两个数轴所在的平面称为 坐标平面 (xOy, yOz, xOz).

坐标平面将空间分为八个 卦限.

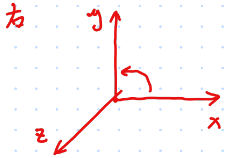


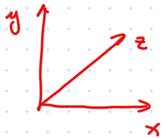
$2^3=8$

定向

右手系 与 左手系

以后, 我们默认坐标系的定向都是右手系的.





刚性变换不改变定向

(平移, 旋转)

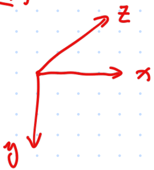
给定 x轴和 y轴定向

+ 右手系

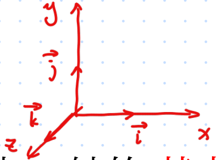
⇝ z轴定向

以x轴为轴

旋转π



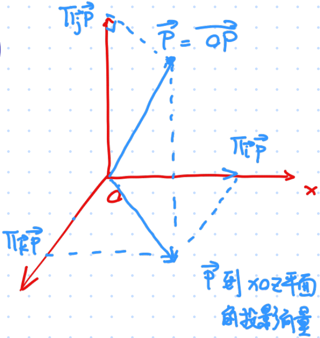
向量的坐标 1



定义 (基本向量)

记 $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ 分别为 x 轴, y 轴, z 轴的 基本向量.

定义 (向量的分解式)



对于向量 $\mathbf{p} = \overrightarrow{OP}$, 记

- $p_x = \Pi_{\mathbf{i}}\mathbf{p}$
- $p_y = \Pi_{\mathbf{j}}\mathbf{p}$
- $p_z = \Pi_{\mathbf{k}}\mathbf{p}$

则

$$\mathbf{p} = p_x\mathbf{i} + p_y\mathbf{j} + p_z\mathbf{k}$$

称为 $\mathbf{p}$ 的 分解式.

向量的坐标 2

定义 (向量的分解式)

对于

$$\mathbf{p} = p_x\mathbf{i} + p_y\mathbf{j} + p_z\mathbf{k}$$

我们称

$$= (p_x \; p_y \; p_z)\begin{pmatrix}\vec{i}\\ \vec{j}\\ \vec{k}\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$$

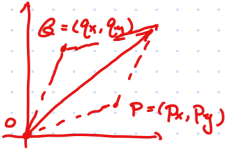
为向量 $\mathbf{p}$ 的 坐标表示 或 代数表示.

取点 P 满足 $\overrightarrow{OP} = \mathbf{p}$, 称 p_x, p_y, p_z 为 $\mathbf{p}$ 的横, 纵, 竖坐标, 可用 $P(p_x, p_y, p_z)$ 来表示 P.

向量的坐标 3

对于 $P(p_x, p_y, p_z)$ 和 $Q(q_x, q_y, q_z)$, 我们有

- $\overrightarrow{OP} = p_x\mathbf{i} + p_y\mathbf{j} + p_z\mathbf{k}$
- $\overrightarrow{OQ} = q_x\mathbf{i} + q_y\mathbf{j} + q_z\mathbf{k}$



可得 $\overrightarrow{PQ}$ 的分解式

$\Pi_{\vec{i}}(\vec{p}+\vec{q}) = \Pi_{\vec{i}}\vec{p} + \Pi_{\vec{i}}\vec{q}$

$(\vec{p}+\vec{q})_x = p_x + q_x$

$\vec{p}+\vec{q} = (p_x+q_x, p_y+q_y)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ &= (q_x - p_x)\mathbf{i} + (q_y - p_y)\mathbf{j} + (q_z - p_z)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

可见, 任意一个向量的坐标是终点与起点的对应坐标的差.

$\vec{p}-\vec{q} = (p_x, p_y, p_z) + (-q_x, -q_y, q_z) = (p_x-q_x, p_y-q_y, p_z-q_z)$

$= \vec{p}+(-\vec{q})$