Ch 3. 向量代数与几何应用

钟友良

zhongyl@scut.edu.cn

Outline

Outline

Outline

定义

标量 = 大小

向量 = 方向 + 大小

< ≤

定义 (向量)

向量 (又称 矢量) (vector) 是指包含方向和大小的量.

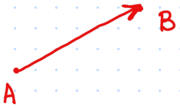
记号 (向量)

向量可以看作一条有向线段. 记 A 和 B 分别为该有向线段的起点和终点, 那么我们记对应的向量为 $\overrightarrow{AB}$.

向量也可使用小写英文黑斜体字母表示, 如 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x}$.

$\overrightarrow{AB}$

起 终



· $\vec{a}$

· a

自由向量

自由向量 是指仅考虑向量的方向和大小, 不考虑具体位置的向量.

自由向量可以看作是一种等价类. $\vec{AB}$

$\vec{AB}$ ⟷ 起点 & 终点

⟷ 大小 & 方向 & 具体位置

$\vec{AB} \sim \vec{CD}$: $\exists$ 平移

s.t A 平移到 C

B - - - D

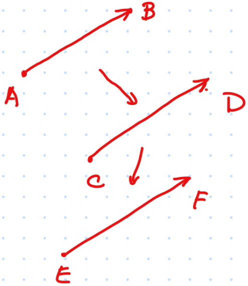
⇓

反身性

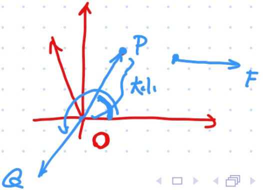
对称性

传递性

{有向线段}/~ = {自由向量}



$\vec{AB} \sim \vec{OC}$



{ vector space = 固定起点 (base point)

vector bundle = 活动 . . . .

方向

自由向量 = 方向 + 大小.

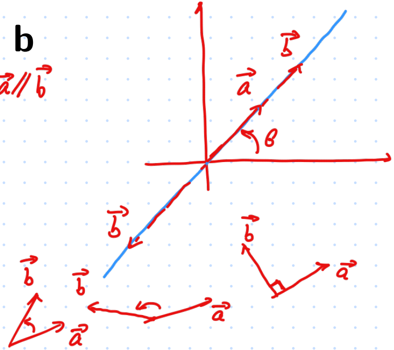
考虑自由向量 **a** 和 **b**

共线或平行 **a** ∥ **b** $\vec{a}/\!/\vec{b}$

- 方向相同
- 方向相反

不平行

- 垂直 **a** ⊥ **b**



大小

大小: $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ $|\vec{a}| := d(P, Q)$

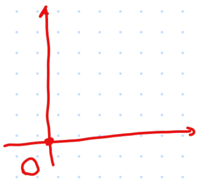
- $|\mathbf{a}|$: 向量 $\mathbf{a}$ 的长度
- 单位向量: $|\mathbf{a}| = 1$
- 零向量: $|\mathbf{a}| = 0$

关系

规定: 零向量的方向是 “所有方向”

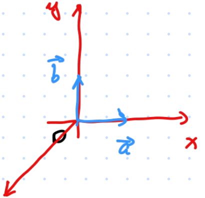
- 与任意向量平行
- 与任意向量垂直 ✓

$\vec{0} = \vec{OO}$



共面

- 弱于共线
- 任意两个向量必共面
- 一般对 ≥ 3 个向量来说



$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面 $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$

$A = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$

$r(A) = \begin{cases} 1 & \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ 共线} \\ 2 & \text{共面} \\ 3 & \cdots \end{cases}$

加法

F: 数域

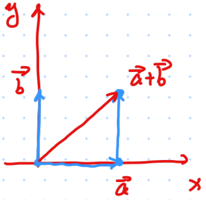
V: {向量}

$+: V\times V \to V$

定义 1.1 (向量加法)

对于两个向量 **a** 和 **b**, 我们通过以下方式定义 **a** 和 **b** 的 和 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$:

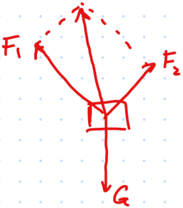
- 三角形法则
- 平行四边形法则



$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$

$\vec{b} = \overrightarrow{OB}$

$\vec{a}+\vec{b} = \overrightarrow{O(A+B)}$



减法

定义 (逆向量)

一个向量称为向量 $\mathbf{a}$ 的 逆向量 (记为 $-\mathbf{a}$) 如果

- $-\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 的方向相反
- $|-\vec{a}| = |\vec{a}|$

定义 (向量减法)

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} := \mathbf{a} + (-\mathbf{b}).$$

数乘

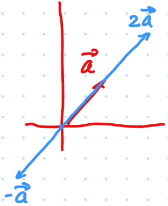
$\cdot : F \times V \to V$

$(\lambda, \vec{a}) \mapsto \lambda\vec{a}$

定义 1.2 (向量数乘)

对于实数 λ 和向量 $\mathbf{a}$, 它们的数乘 乘积 $\lambda\mathbf{a}$ 定义为向量

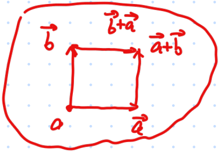
- 大小: $|\lambda\mathbf{a}| = \underline{|\lambda|}\,\underline{|\mathbf{a}|}$
- 方向:
  - $\lambda > 0$: 同向
  - $\lambda < 0$: 反向



线性运算

向量空间 $(V, F; +, \cdot)$

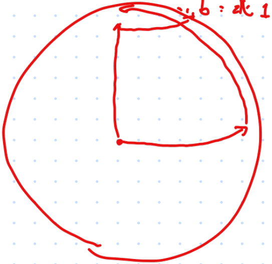
向量的 线性运算 = 加法 + 数乘. 满足以下性质:



- $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$
- $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$
- $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$
- $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$
- $\lambda(\mu\mathbf{a})=\mu(\lambda\mathbf{a})=(\lambda\mu)\mathbf{a}$
- $1\mathbf{a}=\mathbf{a}$ & $(-1)\mathbf{a}=-\mathbf{a}$
- $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$
- $(\lambda+\mu)\mathbf{a}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}$

$\vec{a}$: 东 1km

$\vec{b}$: 北 1km



夹角

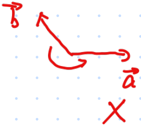
$\boxed{\text{Riemann}}$ Finsler

定义 (向量之间的夹角)

记 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle$ 为向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 之间 $\boxed{[0, \pi]}$ 的 夹角.

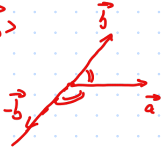
注意, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle$ 可能是钝角: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle$ 是锐角, 当且仅当, $\langle \mathbf{a}, -\mathbf{b}\rangle$ 是钝角.

$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = \langle\vec{b},\vec{a}\rangle$



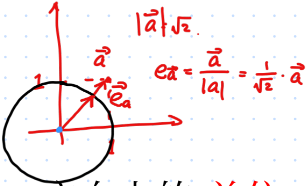
$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$

$\langle\vec{a},-\vec{b}\rangle$



单位向量

回顾: 单位向量 $\mathbf{a}$ 有 $|\mathbf{a}| = 1$



定义 (向量的单位向量)

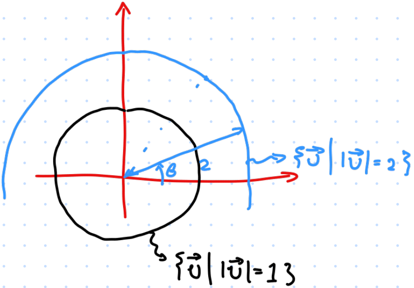
对于向量 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, 称 $\mathbf{e_b} := \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ 为 $\mathbf{a}$ 方向上的 单位向量. 可见

- 方向: $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ 与 $\mathbf{a}$ 同向
- 大小: $\left|\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\right| = 1$

$|e_{\vec{a}}| = \left|\frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}\right|$

$= \left|\frac{1}{|\vec{a}|}\right| \cdot |\vec{a}|$

$= 1$



投影

定义 (向量的投影)

对于向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, 定义 $\mathbf{a}$ 在 $\mathbf{b}$ 方向上的 投影向量 为

$$\underbrace{\boxed{\Pi_{\mathbf{b}}\mathbf{a}}}_{\in F} \cdot \underbrace{\boxed{\mathbf{e}_{\mathbf{b}}}}_{\in V},$$

其中 $\Pi_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$ 为 $\mathbf{a}$ 在 $\mathbf{b}$ 方向上的 投影

$= \Pi_{e_{\vec b}}$

$\to \vec a$ 的"影子"长度

$$\Pi_{\mathbf{b}} : V \to \mathbb{R}$$

$$a \mapsto \boxed{|\mathbf{a}|} \times \boxed{\cos\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle}$$

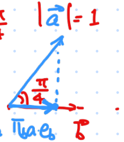
e.g.

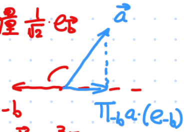
$\langle \vec a, \vec b\rangle = \frac{\pi}{4}$ $\quad |\vec a| = 1$

$\cos\langle \vec a, \vec b\rangle = \frac{1}{\sqrt2}$

$\boxed{\Pi_{\vec b}\vec a = \frac{1}{\sqrt2}} > 0$

投影向量 $\frac{1}{\sqrt2} \cdot e_{\vec b}$



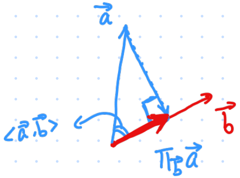


$\langle \vec a, -\vec b\rangle = \frac{3}{4}\pi$

$\cos\langle \vec a, -\vec b\rangle = -\frac{1}{\sqrt2}$

$\boxed{\Pi_{-\vec b}\vec a = -\frac{1}{\sqrt2}} < 0$ $\quad \frac{1}{\sqrt2} e_{\vec b}$

投影向量 $-\frac{1}{\sqrt2}(e_{-\vec b}) = -\frac{1}{\sqrt2}(-e_{\vec b})$



$$\frac{\Pi_{\vec b}\vec a}{|\vec a|} = \cos\langle \vec a, \vec b\rangle$$

$$e_{-\vec b} = \frac{-\vec b}{|-\vec b|} = -\frac{\vec b}{|\vec b|} = -e_{\vec b}$$

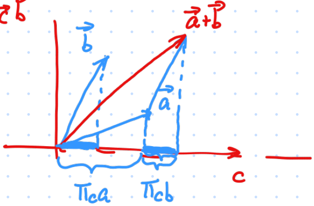
投影的性质

投影与线性运算可交换:

- $\Pi_{\mathbf{c}}(\lambda\mathbf{a}) = \lambda\Pi_{\mathbf{c}}\mathbf{a}$
- $\Pi_{\mathbf{c}}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \Pi_{\mathbf{c}}\mathbf{a} + \Pi_{\mathbf{c}}\mathbf{b}$

$\Pi_c(\lambda a) = \lambda \Pi_c a$

$\Pi_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b}) = \Pi_{\vec{c}}\vec{a} + \Pi_{\vec{c}}\vec{b}$



定义

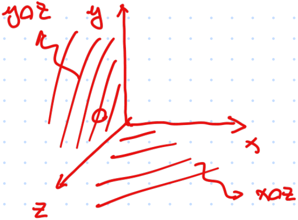
定义 ($\mathbb{R}^3$ 的直角坐标系)

在三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中选取 直角坐标系:

1. 选定原点 O
2. 选定两两垂直的三个数轴: x 轴, y 轴, z 轴

两个数轴所在的平面称为 坐标平面 (xOy, yOz, xOz).

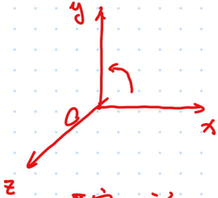
坐标平面将空间分为八个 卦限.

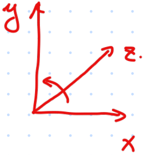


定向

右手系 与 左手系

以后，我们默认坐标系的定向都是右手系的.



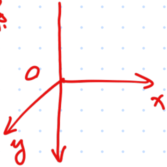


确定 x方向, y方向

\+ 坐标系定向

⇝ z方向

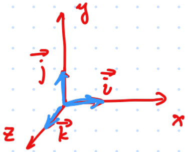
右手系



刚性变换 (平移, 旋转)

保持定向.

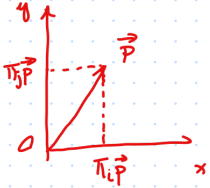
向量的坐标 1



定义 (基本向量)

记 **i**, **j**, **k** 分别为 x 轴, y 轴, z 轴的 基本向量.

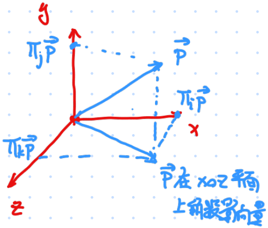
定义 (向量的分解式)



对于向量 $\mathbf{p} = \overrightarrow{OP}$, 记

- $p_x = \Pi_{\mathbf{i}}\mathbf{p}$
- $p_y = \Pi_{\mathbf{j}}\mathbf{p}$
- $p_z = \Pi_{\mathbf{k}}\mathbf{p}$

则



$$\mathbf{p} = p_x\mathbf{i} + p_y\mathbf{j} + p_z\mathbf{k}$$

称为 **p** 的 分解式. $P = (p_x, p_y, p_z)$

向量的坐标 2

定义 (向量的分解式)

对于

$$\mathbf{p} = p_x\mathbf{i} + p_y\mathbf{j} + p_z\mathbf{k}$$

我们称

$$\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$$

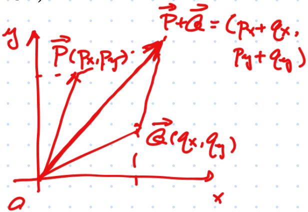
为向量 $\mathbf{p}$ 的 坐标表示 或 代数表示.

取点 P 满足 $\overrightarrow{OP} = \mathbf{p}$, 称 p_x, p_y, p_z 为 $\mathbf{p}$ 的横, 纵, 竖坐标, 可用 $P(p_x, p_y, p_z)$ 来表示 P.

向量的坐标 3

对于 $P(p_x, p_y, p_z)$ 和 $Q(q_x, q_y, q_z)$, 我们有

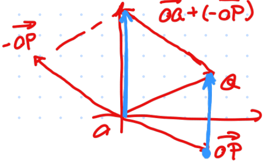
- $\overrightarrow{OP} = p_x\mathbf{i} + p_y\mathbf{j} + p_z\mathbf{k}$
- $\overrightarrow{OQ} = q_x\mathbf{i} + q_y\mathbf{j} + q_z\mathbf{k}$



可得 $\overrightarrow{PQ}$ 的分解式

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\
&= (q_x - p_x)\mathbf{i} + (q_y - p_y)\mathbf{j} + (q_z - p_z)\mathbf{k}.
\end{aligned}
$$

可见, 任意一个向量的坐标是终点与起点的对应坐标的差.



$\vec{OQ} - \vec{OP}$

$=$