向量的坐标 1

定义 (基本向量)

记 $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ 分别为 x 轴, y 轴, z 轴的 基本向量.

定义 (向量的分解式)

对于向量 $\mathbf{p} = \overrightarrow{OP}$, 记

- $p_x = \Pi_{\mathbf{i}}\mathbf{p}$
- $p_y = \Pi_{\mathbf{j}}\mathbf{p}$
- $p_z = \Pi_{\mathbf{k}}\mathbf{p}$

则

$$\mathbf{p} = p_x\mathbf{i} + p_y\mathbf{j} + p_z\mathbf{k}$$

称为 $\mathbf{p}$ 的 分解式.

向量的坐标 2

定义 (向量的分解式)

对于

$$\mathbf{p} = p_x\mathbf{i} + p_y\mathbf{j} + p_z\mathbf{k}$$

我们称

$$\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$$

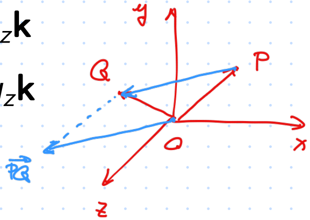
为向量 $\mathbf{p}$ 的 坐标表示 或 代数表示.

取点 P 满足 $\overrightarrow{OP} = \mathbf{p}$, 称 p_x, p_y, p_z 为 $\mathbf{p}$ 的横, 纵, 竖坐标, 可用 $P(p_x, p_y, p_z)$ 来表示 P.

向量的坐标 3

对于 $P(p_x, p_y, p_z)$ 和 $Q(q_x, q_y, q_z)$, 我们有

- $\overrightarrow{OP} = p_x\mathbf{i} + p_y\mathbf{j} + p_z\mathbf{k}$
- $\overrightarrow{OQ} = q_x\mathbf{i} + q_y\mathbf{j} + q_z\mathbf{k}$



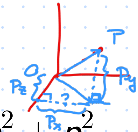
可得 $\overrightarrow{PQ}$ 的分解式

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ &= (q_x - p_x)\mathbf{i} + (q_y - p_y)\mathbf{j} + (q_z - p_z)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

可见, 任意一个向量的坐标是终点与起点的对应坐标的差.

向量长度

勾股定理得 $\vec{P} = P_x\vec{i} + P_y\vec{j} + P_z\cdot\vec{k}$



$|\vec{OP}|^2$

$\parallel$

$$|\mathbf{p}|^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2.$$

$= P_y^2 + ?^2 = P_y^2 + (P_x^2 + P_z^2)$

两点 P 和 Q 之间的距离 $d(P, Q)$ 满足

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= |\overrightarrow{PQ}| \\ &= ((q_x - p_x)^2 + (q_y - p_y)^2 + (q_z - p_z)^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

方向角 1

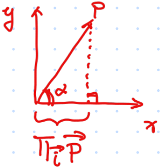
p 的单位向量

$$= \frac{\Pi_{\vec i}\vec p\cdot\vec i}{|\vec p|} + \frac{\Pi_{\vec j}\vec p\cdot\vec j}{|\vec p|} + \frac{\Pi_{\vec k}\vec p\cdot\vec k}{|\vec p|}$$

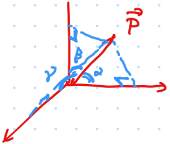
$$\mathbf{e}_{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} = \underbrace{\boxed{\cos\alpha}}_{\langle\vec p,\vec i\rangle}\mathbf{i} + \underbrace{\cos\beta}_{\langle\vec p,\vec j\rangle}\mathbf{j} + \underbrace{\cos\gamma}_{\langle\vec p,\vec k\rangle}\mathbf{k}.$$

称 α, β, γ 为 **p** 的 方向角. 对应的余弦为 **p** 的 方向余弦:

- $\cos\alpha = \dfrac{p_x}{(p_x^2+p_y^2+p_z^2)^{\frac{1}{2}}}$
- $\cos\beta = \dfrac{p_y}{(p_x^2+p_y^2+p_z^2)^{\frac{1}{2}}}$
- $\cos\gamma = \dfrac{p_z}{(p_x^2+p_y^2+p_z^2)^{\frac{1}{2}}}$



$\Pi_{\vec i}\vec P = |\vec P|\cdot\cos\alpha$

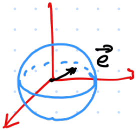


方向角 2

$\mathbb{R}^3$ 中所有向量的单位向量

$$\{\mathbf{e_p} : \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3\}$$

对应与 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球面



$$\{\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{e}| = 1\}.$$

可从以下等式得到

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

例题 1.1

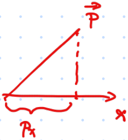
例题 1.1

对于 $P(1,2,0)$ 和 $Q(2,1,\sqrt{2})$，求

- 距离 $d(P,Q)$ $=\sqrt{(2-1)^2+(1-2)^2+(\sqrt{2}-0)^2}=\sqrt{4}=2$
- 向量 $\overrightarrow{PQ}$ 及其
  - 长度
  - 方向余弦
  - 方向角

$\overrightarrow{PQ}=(1,-1,\sqrt{2})$

$|\overrightarrow{PQ}|=d(P,Q)=2.$



方向余弦

$$\begin{cases} x: \cos\alpha=\frac{1}{2} \\ y: \cos\beta=\frac{-1}{2} \\ z: \cos\gamma=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

方向角

$$\begin{cases} \alpha=\frac{\pi}{3} \\ \beta=\frac{2\pi}{3} \\ \gamma=\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Outline

定义

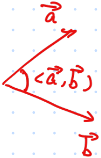
$\cdot : V\times V \to \mathbb{R}$

$(\cdot,\cdot)$

定义 2.1 (内积)

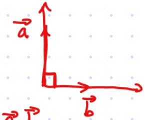
向量 **a** 和 **b** 的 内积 (或 数量积) 定义为数量

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} := |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle.$$

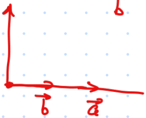


易得

- $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{b}|\cdot\overbrace{\Pi_{\mathbf{b}}\mathbf{a}}^{|\vec{a}|\cdot\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle}$
- $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$
  $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}$
- $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}\perp\mathbf{b}$ 这时, 我们称 **a** 与 **b** 正交.



$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$



$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

Q: $\vec{a}\cdot\vec{b} = (\Pi_{\vec{b}}\vec{a}\cdot e_{\vec{b}})\cdot\vec{b}$

$= \Pi_{\vec{b}}\vec{a}\cdot\underbrace{(e_{\vec{b}}\cdot\vec{b})}_{|\vec{b}|}$

$1\cdot 1^2 = (\cdot,\cdot)$

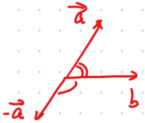
$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = \cos^{-1}\left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\right)$

性质

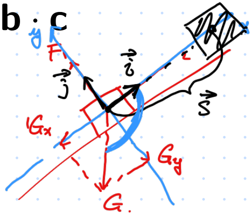
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cdot\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$

性质 2.1

- $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} \overset{=|a|^2}{>} 0$ if $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$
- $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$ (def ✓)
- $(\lambda\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot(\lambda\mathbf{b})=\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$ (def ✓)
- $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$



物理意义 $W \overset{\text{做功}}{=} \mathbf{F}\cdot\mathbf{s}$



$W_1=\vec{F_1}\cdot\vec{S}=0$

$W_2=\vec{F_2}\cdot\vec{S}=|\vec{F_2}|\cdot|\vec{S}|$

$W_G=\vec{G}\cdot\vec{S}=(G_x\cdot\vec{i}+G_y\cdot\vec{j})\cdot|\vec{S}|\vec{i}=\underset{<0}{G_x}\cdot|\vec{S}|$

记 $\vec{S}=|\vec{S}|\cdot\vec{i}$

$\vec{G}=G_x\cdot\vec{i}+G_y\cdot\vec{j}$

理解矩阵乘法

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = (v_1, \ldots, v_n)$$

$$\begin{array}{l} C = A \cdot B = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \cdot (v_1, \ldots, v_n) \\ \parallel \\ (C_{ij}) \end{array} \rightsquigarrow C_{ij} = u_i \cdot v_j^T$$

$$= (a_{i1}, \ldots, a_{in}) \cdot (b_{1j}, \ldots, b_{nj})$$

$$\overset{?}{=} a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

$$\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$$

$$= p_x \vec{i} + p_y \vec{j} + p_z \vec{k}$$

$$\vec{q} = (q_x, q_y, q_z)$$

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = (p_x, p_y, p_z) \cdot (q_x, q_y, q_z)$$

$$= (p_x \vec{i} + p_y \vec{j} + p_z \vec{k}) \cdot (q_x \vec{i} + q_y \vec{j} + q_z \vec{k})$$

$$= p_x q_x + p_y q_y + p_z q_z$$

例题

例题 (Schwarz 不等式)

norm

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 \le \|\mathbf{a}\|^2 \cdot \|\mathbf{b}\|^2.$$

$\shortparallel$

$(|a|\cdot|b|\cdot\cos\langle a,b\rangle)^2$

$= |a|^2\cdot|b|^2\cdot \underbrace{\cos\langle a,b\rangle^2}_{\le 1}$

例题

例题 (斜边大于直角边)

求证: 任给一对正交的向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, 则

$$||\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}|| \leq ||\mathbf{a}||, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

进一步地, 等号成立 $\Leftrightarrow \mathbf{b} = \mathbf{0}$.