

习题课 Ch 3

2. 设 M 是 AB 中点

O 是任一点

$$\text{求证: } \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

Pf. 考虑 \mathbb{R}^3 中的情形 (\mathbb{R}^n 类似, 略).

$$\text{记 } A = (x_A, y_A, z_A)$$

$$B = (x_B, y_B, z_B)$$

$$\Rightarrow M = \left(\frac{1}{2}(x_A + x_B), \frac{1}{2}(y_A + y_B), \frac{1}{2}(z_A + z_B) \right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = (x_M, y_M, z_M) - (x_0, y_0, z_0)$$

$$= \frac{1}{2}((x_A - x_0) + (x_B - x_0),$$

$$(y_A - y_0) + (y_B - y_0),$$

$$(z_A - z_0) + (z_B - z_0))$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

#

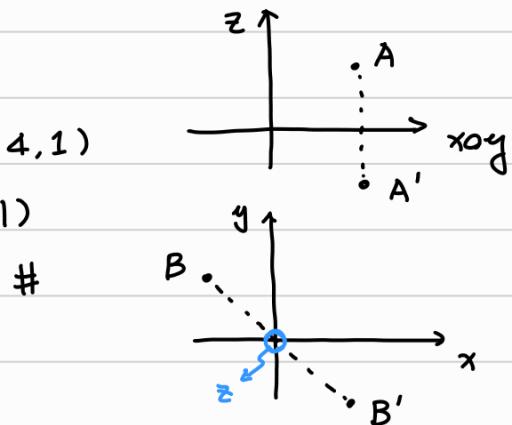
3. 记 $A = (2, 4, -1)$, $B = (-2, 4, 1)$

求 A 关于 xoy 平面的对称点

B 关于 y 轴对称点

解: A 关于 xoy 平面的对称点 $A' = (2, 4, 1)$

B 关于 y 轴对称点 $B' = (2, 4, -1)$



4. 记 $\vec{a} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + 4\vec{k}$

$$\vec{b} = -6\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{c} = 4\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$$

求 $2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c}$

解: 略

✓ 5. 记 $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$
求 \vec{a} 的长度和方向余弦.

解: $|\vec{a}| = (\vec{a} \cdot \vec{a})^{\frac{1}{2}}$
 $= (1 + 2^2 + (-2)^2)^{\frac{1}{2}} = 3$

 $\cos \langle \vec{a}, \vec{i} \rangle = \frac{\vec{i} \cdot \vec{a}}{|\vec{i}| |\vec{a}|} = \frac{1}{3}$
 $\cos \langle \vec{a}, \vec{j} \rangle = \frac{\vec{j} \cdot \vec{a}}{|\vec{j}| |\vec{a}|} = \frac{2}{3}$
 $\cos \langle \vec{a}, \vec{k} \rangle = \frac{\vec{k} \cdot \vec{a}}{|\vec{k}| |\vec{a}|} = -\frac{2}{3}$ #

✓ 8 记 $\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{k}$
 $\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$
求 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ & $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$

解: $\vec{a} \cdot \vec{b} = (3\vec{i} - 6\vec{k}) \cdot (2\vec{i} - 4\vec{j})$
 $= (3\vec{i}, 2\vec{i}) + (3\vec{i}, -4\vec{j}) + (-6\vec{k}, 2\vec{i}) + (-6\vec{k}, -4\vec{j})$
 $= 6$

 $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-6)^2} = 3\sqrt{5}$
 $|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{5}$
 $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{6}{3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}} = \frac{1}{5}$.

不要漏了 $\Rightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \arccos \frac{1}{5}$ #

10. 记 $\vec{AB} = \vec{a} - 2\vec{b}$
 $\vec{AD} = \vec{a} - 3\vec{b}$
其中 $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 3$, \vec{a} 与 \vec{b} 夹角为 $\frac{\pi}{6}$
求 平行四边形 ABCD 的面积.

解: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| |\sin \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle|$
 $= |5 \times 3 \times \sin \frac{\pi}{6}| = \frac{15}{2}$

 $\vec{AB} \times \vec{AD} = (\vec{a} - 2\vec{b}) \times (\vec{a} - 3\vec{b})$
 $= \vec{a} \times (-3\vec{b}) + (-2\vec{b}) \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$
 $\Rightarrow ABCD \text{ 面积} = |\vec{AB} \times \vec{AD}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{15}{2}$ #

也可用内积求

11 记 $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$
 $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$
 $\vec{c} = 2\vec{i} + 2\vec{k}$

若 $\vec{x} \perp \vec{a}$, $\vec{x} \perp \vec{b}$, $\vec{x} \cdot \vec{c} = -10$
求 \vec{x}

解: $\vec{x} \perp \vec{a}$ & $\vec{x} \perp \vec{b}$

$$\Rightarrow \vec{x} \parallel \vec{a} \times \vec{b}$$

其中 $\vec{a} \times \vec{b} = (2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}) \times (\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k})$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 10\vec{i} - 5\vec{j} - 5\vec{k}$$

$$\Rightarrow \text{不妨记 } \vec{x} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$$

$$= 10\lambda\vec{i} - 5\lambda\vec{j} - 5\lambda\vec{k}$$

由 $\vec{x} \cdot \vec{c} = -10$ 得

$$(10\lambda\vec{i} - 5\lambda\vec{j} - 5\lambda\vec{k}) \cdot (2\vec{i} + 2\vec{k})$$

$$= 20\lambda - 10\lambda = 10\lambda = -10$$

$$\Rightarrow \lambda = -1$$

$$\Rightarrow \vec{x} = -10\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k}$$

#

12 记 $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$
 $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$
 $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

求 $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

解: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$$= 1 + 4 - 2 - (-1) = 4$$

#

13 (1) 判斷 $A(1,2,3)$, $B(0,3,7)$, $C(3,5,11)$ 是否共線

Idea: [注意到] A, B, C 共線

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 0$$

(部分用 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$,

其实也行, 不過得驗算

$$\left| \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} \right| = 1$$

答

$$\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 4)$$

$$\overrightarrow{AC} = (2, 3, 8)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix} \\ = -4\vec{i} + 16\vec{j} - 5\vec{k}$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| \neq 0$$

$\Rightarrow A, B, C$ 不共線

#

14 利用混合积, 求证 $A(1,0,1)$, $B(2,4,6)$, $C(3,-1,2)$, $D(6,2,8)$ 不共面.

Pf. $\overrightarrow{AB} = (1, 4, 5)$

$$\overrightarrow{AC} = (2, -1, 1)$$

$$\overrightarrow{AD} = (5, 2, 7)$$

[注意到] A, B, C, D 不共面

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$$

$$\text{計算 } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= -7 + 20 + 20 - (-25) - 2 - 56$$

$$= 0$$

$\therefore A, B, C, D$ 不共面

#

15 (1) 求 $3x - 2y + 5z - 1 = 0$ 的法向量.

解: 法向量 $\vec{n} = (3, -2, 5)$ #

16. 求平面满足

- 过 $M_0(2, 9, -6)$
- 垂直于 OM_0

解: 取法向量 $\vec{n} = \overrightarrow{OM_0} = (2, 9, -6)$.

平面上任一点 P 满足点法式方程

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0P} = 0.$$

$$\Rightarrow (2, 9, -6) \cdot (x-2, y-9, z-(-6)) = 0$$

$$\Rightarrow 2(x-2) + 9(y-9) - 6(z+6) = 0$$

$$\Rightarrow 2x + 9y - 6z - 121 = 0$$

#

17. 求过 $(1, 1, -1), (-2, -2, 2), (1, -1, 2)$ 的平面方程.

解: 代入三点式方程.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-(-1) \\ x-(-2) & y-(-2) & z-2 \\ x-1 & y-(-1) & z-2 \end{vmatrix} = 0$$
$$\xrightarrow[\frac{r_3-r_1}{r_2-r_1}]{} \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ 3 & 1 & \\ 2 & -3 & \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow x - 3y - 2z = 0$$

#

例 1 设向量 $\vec{b} \in V$ 满足

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \forall \vec{a} \in V$$

求证 $\vec{b} = 0$

(Q: 若把条件 " $\forall \vec{a} \in V$ "

换为

" V 极大线性无关组 $\{\vec{a}\} \subseteq V$ ")

Pf. $|\vec{b}|^2 = \vec{b} \cdot \vec{b} = 0$
 $\Rightarrow |\vec{b}| = 0 \Rightarrow \vec{b} = 0 \quad \#$

例 2. 求证：平行四边形的两对角线的平方和
等于四边的平方和

$$\text{i.e. } |\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2)$$

Pf. LHS $= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$
 $= \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}$
 $= 2\vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{b} \cdot \vec{b}$
 $= \text{RHS} \quad \#$

19. 求过点 $(1, 0, -1)$

平行于 $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$
 $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$

的平面方程

解：取平面法向量 $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$

$$\begin{aligned} &= (2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \times (\vec{i} - \vec{j}) \\ &= \vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k} \end{aligned}$$

由点法式方程得平面 $P(x, y, z)$ 满足

$$(1, 1, -3) \cdot (x-1, y, z-(-1)) = 0$$

$$\Rightarrow x-1 + y - 3(z+1) = 0$$

$$\Rightarrow x + y - 3z - 4 = 0 \quad \#$$

22. 记平面

$$-2x + 4y - 6z + 6$$

$$\pi_1: x - 2y + 3z + D = 0$$

$$\pi_2: -2x + 4y + Cz + 6 = 0$$

求 C, D 的值

s.t. π_1 与 π_2 平行？重合？

解： π_1 与 π_2 的法向量分别为

$$\vec{n}_1 = (1, -2, 3)$$

$$\vec{n}_2 = (-2, 4, C)$$

要使 $\pi_1 \parallel \pi_2$, 只需 $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$

$$\text{i.e. } \frac{1}{-2} = \frac{-2}{4} = \frac{3}{C}$$

$$\Rightarrow C = -6$$

即 $C = -6$ 时, π_1 与 π_2 平行

进一步, 要使 π_1 与 π_2 重合, 只需 π_2 上的一点满足 π_1 方程

验证 π_2 上的一点 $(3, 0, 0)$

代入 π_1 得 $3 + D = 0$ i.e. $D = -3$

即 $D = -3$ 时 π_1 与 π_2 重合 $\#$

23 求平面 π

• 过 $P_0(1, 1, 1)$

• 垂直于 π_1 : $x - y + z = 7$

$$\pi_2: 3x + 2y - 12z + 5 = 0$$

解: 记 π_1 和 π_2 分别为 $\vec{n}_1 = (1, -1, 1)$ 和 $\vec{n}_2 = (3, 2, -12)$
 平面的法向量为 \vec{n}

由 π 上 π_1 得 $\vec{n} \perp \vec{n}_1$
 不妨取 $\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -12 \end{vmatrix}$

$$= 10\vec{i} + 15\vec{j} + 5\vec{k}$$

由点法式方程 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$

$$\text{i.e. } (10, 15, 5)(x-1, y-1, z-1) = 0$$

$$\Rightarrow 2x + 3y + z - 6 = 0$$

#

24. 求证: 过不共线的三点 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$

的平面方程为

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

Pf.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ x_1-x & y_1-y & z_1-z \\ x_2-x & y_2-y & z_2-z \\ x_3-x & y_3-y & z_3-z \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1-x & y_1-y & z_1-z \\ x_2-x & y_2-y & z_2-z \\ x_3-x & y_3-y & z_3-z \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow P(x, y, z), P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3) \text{ 共面}$$

#

25 求下列直线的对称式方程

(1) 平行 $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, 过点 $P(1, 0, -2)$

解: 点向式方程 $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{2}$. #

(2) 过点 $A(1, 0, -1)$ 和 $B(1, 1, 3)$

解: 两点式方程 $\frac{x-1}{1-1} = \frac{y-0}{1-0} = \frac{z-(-1)}{3-(-1)}$

得对称式方程 $\frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{4}$. #

(3) 过 $A(2, 3, -5)$, 且 $\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{4}$ 平行

解: 点向式方程 $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+5}{4}$ #

(4) 过点 $P_0(3, 1, 2)$, 平行于 $\pi_1: x+y+z+3=0$

$\pi_2: y-z+1=0$

解: 直线 l 平行于 π_1 与 π_2

其切向量 \vec{v} 垂直于法向量 \vec{n}_1 与 \vec{n}_2

取 $\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

由点向式方程得 $\frac{x-3}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$. #

26 判断直线与平面的位置关系，若有交点求出交点坐标。

(1) $\ell: \frac{x-5}{2} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-1}{3}$; $\pi: x + 2y - 5z - 11 = 0$

解：切向量 $\vec{v} = (2, -2, 3)$, 法向量 $\vec{n} = (1, 2, -5)$

得 $\vec{v} \cdot \vec{n} = 2 \times 1 + (-2) \times 2 + 3 \times (-5) = -17 \neq 0$

\therefore 直线 ℓ 与平面 π 相交，其交点满足

$$\begin{cases} x + 2y - 5z - 11 = 0 \\ \frac{x-5}{2} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-1}{3} \\ 3x - 15 = -3y - 9 = 2z - 2 \\ 3x + 6y - 15z - 33 = 0 \\ \Rightarrow (x, y, z) = (3, -1, -2) \\ \text{即 } \ell \text{ 与 } \pi \text{ 交点为 } (3, -1, -2) \end{cases}$$

#

(2) $\ell: \frac{x-13}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{3}$; $\pi: x + 2y - 4z + 1 = 0$

解：切向量 $\vec{v} = (8, 2, 3)$, 法向量 $\vec{n} = (1, 2, -4)$

得 $\vec{v} \cdot \vec{n} = 8 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times (-4) = 0$

可见 ℓ 与 π 平行

再考察 ℓ 与 π 是否有公共点

ℓ 过 $P_0(13, 1, 4)$ 满足 π

$$13 + 2 \times 1 - 4 \times 4 + 1 = 0$$

i.e. ℓ 与 π 有公共点 P_0

$\therefore \ell$ 在 π 上

#

27. 求下列平面的方程

(1) 过直线 $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ 和 $P_1(1, 2, -1)$

解: ℓ 过 $P_0(2, 2, 1)$, 切向量 $\vec{v} = (3, 1, 2)$

π 过 ℓ 和 P_0

\Rightarrow 向量 $\overrightarrow{P_0P_1}$ 与 \vec{v} 平行于 π

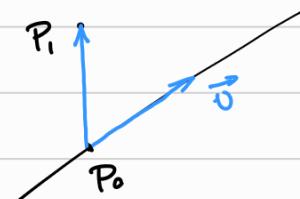
\Rightarrow 可取法向量

$$\vec{n} = \overrightarrow{P_0P_1} \times \vec{v}$$

$$= (-1, 0, -2) \times (3, 1, 2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}$$

$$= (2, -4, -1)$$



平面的点法式方程: π 上的 P 满足

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Rightarrow 2(x-1) - 4(y-2) - (z-(-1)) = 0$$

$$\text{i.e. } 2x - 4y - z + 5 = 0$$

#

(2) 过 $P_0(1, 1, 1)$

垂直于 ℓ_1 $\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$

解: 平面垂直于 ℓ_1 ,

\Rightarrow 可取法向量 \vec{n} 为 ℓ_1 的切向量 \vec{v}_1

现求 \vec{v}_1 如下:

$$\text{i.e. } \pi_1: 2x + y + z = 3$$

$$\pi_2: 2x + 3y - z = 1$$

它们的法向量 $\vec{n}_1 = (2, 1, 1)$, $\vec{n}_2 = (2, 3, -1)$

则计算 $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-4, 4, 4)$

$$\text{可取 } \vec{v}_1 = (-1, 1, 1)$$

$$\text{由点法式方程 } -(x-1) + (y-1) + (z-1) = 0$$

$$\text{i.e. } -x + y + z - 1 = 0$$

#

$$(3) \text{ 过直线 } l_0 \begin{cases} x+3y-z=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$$

& 垂直于平面 $\pi_1: x+2z=1$

解：过 l_0 的平面形如

$$\lambda_1(x+3y-z) + \lambda_2(x-y+z+1) = 0$$

$$\text{i.e. } (\lambda_1+\lambda_2)x + (3\lambda_1-\lambda_2)y + (-\lambda_1+\lambda_2)z + \lambda_2 = 0$$

$$\text{其法向量 } \vec{n} = (\lambda_1+\lambda_2, 3\lambda_1-\lambda_2, -\lambda_1+\lambda_2)$$

由于该平面垂直于平面 π_1

所以 $\vec{n} \perp \vec{\pi}_1$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1+\lambda_2, 3\lambda_1-\lambda_2, -\lambda_1+\lambda_2) \cdot (1, 0, 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1+\lambda_2 - 2\lambda_1+2\lambda_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 3\lambda_2$$

$$\text{不妨取 } \lambda_2 = 1 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \text{ 代入得}$$

$$(3+1)x + (3 \times 3 - 1)y + (-3+1)z + 1 = 0$$

$$\text{i.e. } 4x + 8y - 2z + 1 = 0$$

#

$$28 \text{ 设 } l_1: \frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-2} \text{ 和 } l_2: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2-3t \\ z = 5+4t \end{cases}$$

• 试证： l_1 与 l_2 共面

• 试求 l_1 与 l_2 所在的平面

Pf. l_1 与 l_2 的切向量 \vec{v}_1 与 \vec{v}_2 为

$$\vec{v}_1 = (3, 2, -2), \quad \vec{v}_2 = (2, -3, 4)$$

$\Rightarrow l_1$ 与 l_2 不平行

要证 l_1 与 l_2 共面，只需证 l_1 与 l_2 相交。

假设 l_1 与 l_2 相交，则交点满足

$$\frac{1+2t-7}{3} = \frac{-2-3t-2}{2} = \frac{5+4t-1}{-2}$$

$$\text{可得 } t=0 \Rightarrow (1, -2, 5) \text{ 为 } l_1 \text{ 与 } l_2 \text{ 交点}$$

$\therefore l_1$ 与 l_2 共面

#

解：可取法向量 $\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (3, 2, -2) \times (2, -3, 4)$

$$= (2, -16, -13)$$

已求得 l_1 与 l_2 交点 $(1, -2, 5)$

$$\text{点法式方程 } 2(x-1) - 16(y+2) - 13(z-5) = 0$$

$$\text{i.e. } 2x - 16y - 13z + 31 = 0$$

#

29. 求直线 $\ell: \begin{cases} x+y+3z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ 与平面 $\pi: x-y-z+1=0$ 的夹角.

解: 可取 ℓ 的切向量 $\vec{v} = (1, 1, 3) \times (1, -1, -1)$
 $= (2, 4, -2)$

可取 π 的法向量 $\vec{n} = (1, -1, -1)$

计算 $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$

$\Rightarrow \vec{v} \perp \vec{n}$

$\therefore \ell$ 与 π 平行 \Rightarrow 夹角为 0. #

31. 求下列平面间的距离.

(1) $\pi_1: x-2y-2z=12$; $\pi_2: x-2y-2z=6$.

解: 取 π_i 上的一点 P_i , $i=1, 2$:

$P_1(12, 0, 0)$, $P_2(6, 0, 0)$

取 π_1 与 π_2 的公共法向量 $\vec{n} = (1, -2, -2)$.

π_1 与 π_2 的距离为 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 在 \vec{n} 上的投影的长度.

$$\frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|(6, 0, 0) \cdot (1, -2, -2)|}{|(1, -2, -2)|} = \frac{6}{3} = 2$$

#

32. 求平面 π 满足

- $\pi \parallel \pi'$: $x+2y-2z=1$

- π 与 π' 距离为 2.

解: 平面 π' 过点 $P'(1, 0, 0)$.

法向量 $\vec{n}' = (1, 2, -2)$.

则平面 π 上的点 P 到平面 π' 的距离为

$$\frac{|\overrightarrow{P'P} \cdot \vec{n}'|}{|\vec{n}'|} = \frac{|x-1+2y-2z|}{3} = 2.$$

$\Leftrightarrow x+2y-2z-1 = \pm 6$

\therefore 满足条件的平面 π 有两个

$x+2y-2z = 1 \pm 6$

#