

Ch4 附加题

Youliang Zhong

2021 年 11 月 4 日

目录

1 W7	1
------	---

1 W7

1.1 题 1

已知 $\alpha_1 = (1, 4, 0, 2)$, $\alpha_2 = (2, 7, 1, 3)$, $\alpha_3 = (0, 1, -1, a)$, $\beta = (3, 10, b, 4)$.
求:

1. a, b 的值 s.t. β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.
2. a, b 的值 s.t. β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示; 并写出此时, β 在 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的线性表达式.

1.2 题 2

设矩阵 B 通过有限次行变换矩阵 A 得到. 求证: A 与 B 的列向量有完全相同的线性关系.

Hint: 记 $A = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$ 和 $B = (\beta_1 \dots \beta_n)$. “ A 与 B 的列向量有完全相同的线性关系” 是指: 对任意 k_1, \dots, k_n ,

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_n\alpha_n = 0$$

当且仅当

$$k_1\beta_1 + \dots + k_n\beta_n = 0.$$

1.3 题 3

设 A 为 $n \times n$ 矩阵, 满足: 存在 $k \in \mathbb{N}_+$ s.t. $A^k x = 0$ 有解 $x = \alpha$ 并且 $A^{k-1}\alpha \neq 0$. 求证: 向量组 $\alpha, A\alpha, \dots, A^{k-1}\alpha$ 线性无关.

1.4 题 4

取矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 与 $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, 其中 $m < n$. 求证: 如果 $AB = E$ 其中 E 为 $m \times m$ 单位矩阵, 那么 B 的列向量组线性无关.

Hint: 直接用定义证; 或者考察矩阵的秩.