一般式方程

任意平面均可通过点法式方程表示. 整理平面的点法式方程

记 $\vec{n}=(A,B,C)=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$

$P_0=(x_0,y_0,z_0)$, $P=(x,y,z)$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}=(A,B,C)\cdot(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0$

为

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

其中 $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$, 称这个方程为该平面的 一般式方程.

一般式方程确定平面

反过来, 对于不全为零的 A, B, C, 任意方程

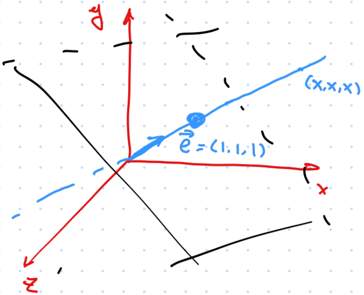
$$Ax + By + Cz + D = 0$$

均表示一个平面.

$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0.$

$x_0 = \frac{-D}{A+B+C}$, $y_0 = \frac{-D}{A+B+C}$, $z_0 = \frac{-D}{A+B+C}$

- 法向量 $\vec{n} = (A, B, C)$
- 过点 $P_0 = \left(-\frac{D}{A+B+C}, -\frac{D}{A+B+C}, -\frac{D}{A+B+C}\right)$



特殊情形

考虑 $Ax + By + Cz + D = 0$:

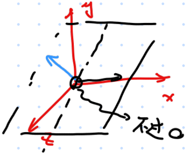
- $D = 0$ 称为. π过$(0,0,0)$.
- $D \neq 0$ ······不过.
  - A, B, C 均为零 ϕ
  - A, B, C 只有一个零
  - A, B, C 只有两个零
  - A, B, C 均不为零: 不特殊

若 $A=0$

$\Rightarrow \vec{n}=(0,B,C)$

$\Rightarrow \vec{n} \perp \vec{i}$

$\Rightarrow$ π有一个方向平行于 $\vec{i}$



若 $A=0$. $B=0$

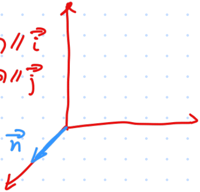
$\Rightarrow \vec{n}=(0,0,C)$.

$\Rightarrow \vec{n} // \vec{k}$

$\Rightarrow$ π有一方向 $// \vec{i}$

另一方向 $// \vec{j}$

$\Rightarrow$ π // xOy



例题 3.2

例题 3.2

求平面方程满足

- 过 $P(1,0,0)$ 和 $Q(0,0,1)$
- 平行于 y 轴

解: 点法式 = 点 + 法
$\quad (P,Q) \quad (\vec{n}=?)$

利用点法式，π 上的点 P' 满足

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{PP'}=0$$

平面包含方向 $\overrightarrow{PQ}$，$\vec{j}$

记法向量 $\vec{n}=\vec{j}\times\overrightarrow{PQ}$

$$=(0,1,0)\times(-1,0,1)$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

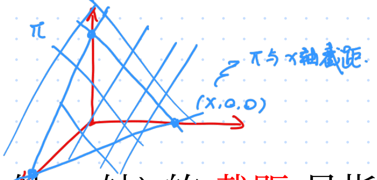
$$=\vec{i}+\vec{k}=(1,0,1).$$

i.e. $(1,0,1)\cdot(x-1,y,z)=0$

$\Rightarrow x+z-1=0$

#.

截距式方程



定义 (截距)

一个平面 π 在 x 轴 (y 轴, z 轴) 的 截距 是指平面 π 与该轴的横 (纵, 竖) 坐标.

定义 (截距式方程)

记平面 π 在 x 轴, y 轴, z 轴的截距分别为 a, b, c. 假设 a, b, c 均不为零. 则平面 π 上的点的坐标满足

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.}$$

这称为平面 π 的 截距式方程.

$f(x,y,z)=0$. 满足

∘ f 是线性的

∘ 过

$$\begin{cases}(a,0,0)\\(0,b,0)\\(0,0,c)\end{cases}$$

一般 vs 截距

截距 $\Rightarrow$ 一般:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$
$$\Rightarrow (bc)x+(ac)y+(ab)z+(-abc)=0$$

一般 $\Rightarrow$ 截距 (要求 $D\neq 0$): $D=0 \Rightarrow \pi$ 过 $(0,0,0)$

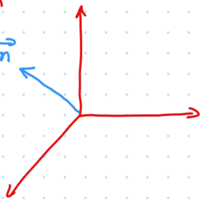
$$Ax+By+Cz+D=0$$
$$\Rightarrow \frac{x}{-D/A}+\frac{y}{-D/B}+\frac{z}{-D/C}=1$$

截距为零时

考虑平面 π 的截距 $a = 0$. 可见 π 过 $(0,0,0)$. 则截距 $b = c = 0$.

π过(a,0,0)

此时 π 的点法式为



$$\mathbf{n} \cdot (p_x, p_y, p_z) = 0.$$

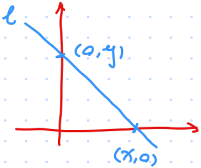
π 的向量 $\overrightarrow{P_0P} = (x-0, y-0, z-0)$
$= (x, y, z)$

点法式方程 $Ax + By + Cz = 0.$

截距为“无穷”时

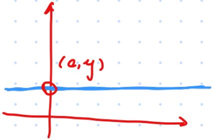
截距 $a=\infty$: 平面 π 平行于 x 轴. 此时的截距式方程为

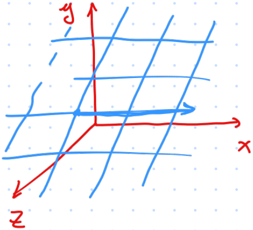
$$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$



$\pi_n: \quad \frac{x}{a_n}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$

“$\rightsquigarrow$” $\pi: \quad 0+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$



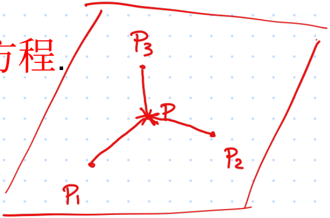


三点式方程

取不共线的三点 $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$.
如果平面 π 经过上述三点, 则平面 π 上的任意一点 $P(x, y, z)$ 均满足: 向量 $\overrightarrow{P_1P}$, $\overrightarrow{P_2P}$, $\overrightarrow{P_3P}$ 共面. 可见, 它们的混合积为零, i.e. $(\overrightarrow{P_1P}, \overrightarrow{P_2P}, \overrightarrow{P_3P}) = 0$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ x - x_3 & y - y_3 & z - z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

称上述方程为平面 π 的 三点式方程.



截距转三点

平面 π 的截距 a, b, c 当且仅当 π 经过 $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$.

关系

考虑两个平面

- $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$
  - 法向量 $\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$
- $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$
  - 法向量 $\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$

之间的关系:

关系 (续)

- 平行 $\mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2$: 存在 $\lambda \neq 0$ 使得 $\mathbf{n}_1 = \lambda \mathbf{n}_2$. 有

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \lambda.$$

  - 重合: π_1 和 π_2 有相同的解. 注意到平面 π_1 方程可表为

$Ax+By+Cz+D=0$

$$\lambda(A_2x + B_2y + C_2z) + D_1 = 0.$$

    有

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} = \lambda.$$

- 不平行: 相交

例题 3.3

例题 3.3

求平面 π_1 满足

- 过 $P(1,1,-1)$
- 平行与 $\pi_2 : 3x + y + 2z = 1$

解：点法式 = 点 + 法

(P) $\vec{n} = \vec{n_2} = (3, 1, 2)$

π 上点满足.

$3\times(x-1) + 1\times(x-1) + 2\times(x-(-1)) = 0.$

#

例题 3.3 解 1

解 1

平面 π_1 与 π_2 平行当且仅当 $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

例题 3.3 解 2

解 2

注意到 π_1 和 π_2 的法向量相同, 再利用点法式.

例题 3.4

例题 3.4

求平面满足

- 过 $P(-1,0,1)$
- 经过线 ℓ: 该线落在以下两个平面上:
  - π_1 $x+3y-z=0$
  - π_2 $x-y+z+1=0$

解

线 ℓ 上点满足

$$\begin{cases} x+3y-z=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow 2x+2y+1=0$

① 三点式:

线 ℓ 过 $(0,-\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$

$(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$

$+ P=(-1,0,1)$

⋯

② 点法式

记 $\vec{n_i}$ 为 π_i 的法向量

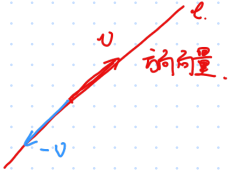
$\Rightarrow \vec{n_1}\times\vec{n_2}$ 是 ℓ 的切向量

Outline

方向向量

定义 (方向向量)

对于直线 l, l 的 方向向量 是指任一与 l 平行的非零向量. 直线 l 的 方向数 是指它的方向向量的三个坐标.



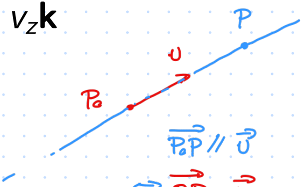
点向式方程

给定

- 一个点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$
- 一个向量 $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$

存在唯一一条直线 l

- 经过 P_0
- 以 v 为方向向量



$\overrightarrow{P_0P} \parallel \vec{v}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \times \vec{v} = 0$

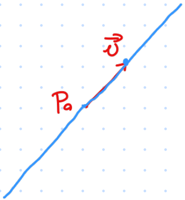
特殊点向式

如果 v_x, v_y, v_z 均不为零, 那么

$$\begin{aligned} & P(x,y,z) \text{ 在直线 } l \text{ 上} \\ \Leftrightarrow & \overrightarrow{P_0P} \parallel \mathbf{v} \\ \Leftrightarrow & \frac{x-x_0}{v_x} = \frac{y-y_0}{v_y} = \frac{z-z_0}{v_z}. \end{aligned}$$

称这为直线的 点向式方程 (或 对称式方程).

直线 $= \{ P_0 + \vec{v} \cdot t \mid t \in R \}$



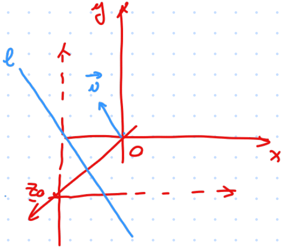
一般点向式

考虑 v_x, v_y, v_z 存在零的情况.
假设 $v_z = 0$, 则

⇒ $\vec{v}$ 落在 xoy 平面

⇒ $\vec{v} \perp \vec{k}$

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{v_x} = \dfrac{y-y_0}{v_y} \\ z = z_0 \end{cases}$$

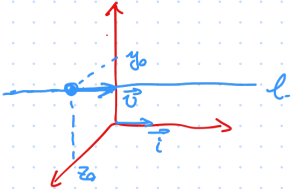


假设 $v_y = 0$ 且 $v_z = 0$, 则

⇒ $\vec{v} = (x, 0, 0)$

⇒ $\vec{v} \parallel \vec{i}$

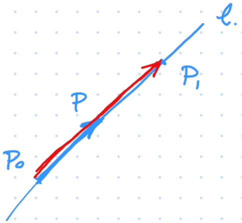
$$\begin{cases} y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}$$



两点式方程

给定两个点 $P_0(x_0, y_0, z_0) \neq P_1(x_1, y_1, z_1)$, 存在唯一一条直线 l 经过 P_o 和 P_1.

将 $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_0P_1}$ 代入点向式方程, 得



$$
\begin{aligned}
& P(x, y, z) \text{ 在直线 } l \text{ 上} \\
\Leftrightarrow & \overrightarrow{P_0P_1} \parallel \overrightarrow{P_0P} \\
\Leftrightarrow & \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.
\end{aligned}
$$

称这为直线的 两点式方程.

参数方程

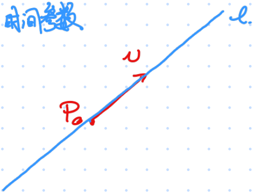
给定

- 一个点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$
- 一个向量 $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$

利用时间参数 $t \in \mathbb{R}$, 直线 l 上的点满足方程

时间参数

$$P = P_0 + \mathbf{v}t,$$



即

$$\begin{cases} x = x_0 + v_x t \\ y = y_0 + v_y t \\ z = z_0 + v_z t \end{cases}$$

称这为直线的 参数方程.

例题 4.2

~~定义 (方向向量)~~

求以下直线与平面的交点

- 直线 $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-3}$ $\rightsquigarrow$ 方向向量 $= (2,0,-3)$
  过点 $(1,2,3)$
  直线 $(1,2,3) + (2,0,-3)\times t$
- 平面 $2x - y + z = 4$

解：P为直线 ℓ 与平面 π 的交点

$$\begin{cases} P \in \ell \Leftrightarrow P \text{ 满足 } \ell \text{ 的方程} \\ \pi \Leftrightarrow \pi \end{cases}$$

P同时满足

$$\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x = 1 + 2t \\ y = 2 \\ z = 3 - 3t \end{cases}$$

$\Rightarrow 2(1+2t) - 2 + (3 - 3t) = 4.$

$\Rightarrow t = ?$

$\Rightarrow (x, y, z) = ?$

#

一般式方程

任意一条直线 l, 选择不重合的两个平面 π_1 和 π_2 经过 l:

- $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$
- $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

其中, $A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$ (因为相交且不重合). 即 l 上的点 $P(x, y, z)$ 满足

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

称为直线的 一般式方程.

例题 4.3

例题 4.3

将以下直线的一般式方程化为对称式 (点法式):

$$\begin{cases} x - y + z = 0 & (\pi_1) \\ x + y - 2z = 0 & (\pi_2) \end{cases}$$

解：直线 l 过 P_0，切向量 $\vec{v}$

$\vec{v} \perp \vec{n}_1$，$\vec{v} \perp \vec{n}_2$

$\Rightarrow \vec{v} \parallel \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

不妨取 $\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$

$= (1,-1,1) \times (1,1,-2)$

$=$

不妨取 P_0 满足

$\pi_1 + \pi_2$: $2x - z = 0$

$P_0 = (1, 3, 2)$

$\Rightarrow$ 点法式可得

#