习题课 Ch 3

2. 设 M 是 AB 中点
O 是任一点

求证：$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

Pf. 考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的情形（$\mathbb{R}^n$ 类似，略）.

记 $A = (x_A, y_A, z_A)$

$B = (x_B, y_B, z_B)$

$\Rightarrow M = \left(\frac{1}{2}(x_A + x_B), \frac{1}{2}(y_A + y_B), \frac{1}{2}(z_A + z_B)\right)$

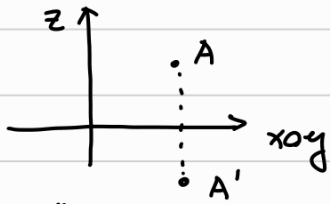
$$\begin{aligned}\Rightarrow \overrightarrow{OM} &= (x_M, y_M, z_M) - (x_0, y_0, z_0) \\ &= \frac{1}{2}\big((x_A - x_0) + (x_B - x_0), \\ &\qquad (y_A - x_0) + (y_B - x_0), \\ &\qquad (z_A - x_0) + (z_B - x_0)\big) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})\end{aligned}$$

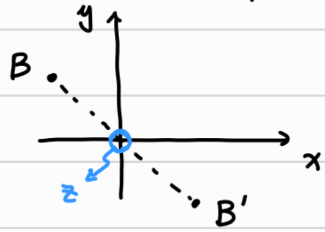
#

3. 记 $A = (2, 4, -1)$，$B = (-2, 4, 1)$

求 A 关于 xOy 平面的对称点

B 关于 y 轴对称点





解：A 关于 xOy 平面的对称点 $A' = (2, 4, 1)$

B 关于 y 轴对称点 $B' = (2, 4, -1)$

#

4. 记 $\vec{a} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + 4\vec{k}$

$b = -6\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$

$c = 4\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$

求 $2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c}$

解：略

5. 记 $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$

求 $\vec{a}$ 的长度和方向余弦.

解: $|\vec{a}| = (\vec{a}\cdot\vec{a})^{\frac{1}{2}}$

$= (1 + 2^2 + (-2)^2)^{\frac{1}{2}} = 3$

$\cos\langle\vec{a},\vec{i}\rangle = \Pi_{\vec{i}}\vec{a}/|\vec{a}| = \frac{1}{3}$

$\cos\langle\vec{a},\vec{j}\rangle = \Pi_{\vec{j}}\vec{a}/|\vec{a}| = \frac{2}{3}$

$\cos\langle\vec{a},\vec{k}\rangle = \Pi_{\vec{k}}\vec{a}/|\vec{a}| = -\frac{2}{3}$ #

8 记 $\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{k}$

$\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$

求 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ & $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$

解: $\vec{a}\cdot\vec{b} = (3\vec{i} - 6\vec{k})\cdot(2\vec{i} - 4\vec{j})$

$= (3\vec{i}, 2\vec{i}) + (3\vec{i}, -4\vec{j}) + (-6\vec{k}, 2\vec{i}) + (-6\vec{k}, -4\vec{j})$

$= 6$

$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-6)^2} = 3\sqrt{5}$

$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{5}$

$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \dfrac{6}{3\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}} = \dfrac{1}{5}$.

$\Rightarrow \langle\vec{a},\vec{b}\rangle = \arccos\frac{1}{5}$. #

10. 记 $\overrightarrow{AB} = \vec{a} - 2\vec{b}$

$\overrightarrow{AD} = \vec{a} - 3\vec{b}$

其中 $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角为 $\frac{\pi}{6}$

求 平行四边形 ABCD 的面积.

解: $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\cdot|\sin\langle\vec{a},\vec{b}\rangle|$

$= |5\times 3\times \sin\frac{\pi}{6}| = \frac{15}{2}$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD} = (\vec{a} - 2\vec{b})\times(\vec{a} - 3\vec{b})$

$= \vec{a}\times(-3\vec{b}) + (-2\vec{b})\times\vec{a} = -\vec{a}\times\vec{b}$

$\Rightarrow$ ABCD 面积 $= |\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}| = |-\vec{a}\times\vec{b}| = \frac{15}{2}$. #

11 记 $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$

$\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$

$\vec{c} = 2\vec{i} + 2\vec{k}$

若 $\vec{x} \perp \vec{a}$，$\vec{x} \perp \vec{b}$，$\vec{x} \cdot \vec{c} = -10$

求 $\vec{x}$

解：$\vec{x} \perp \vec{a}$ & $\vec{x} \perp \vec{b}$

$\Rightarrow \vec{x} \parallel \vec{a} \times \vec{b}$

其中 $\vec{a} \times \vec{b} = (2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}) \times (\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k})$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 10\vec{i} - 5\vec{j} - 5\vec{k}$$

$\Rightarrow$ 不妨记 $\vec{x} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$

$$= 10\lambda \cdot \vec{i} - 5\lambda\vec{j} - 5\lambda\vec{k}$$

由 $\vec{x} \cdot \vec{c} = -10$ 得

$(10\lambda\vec{i} - 5\lambda\vec{j} - 5\lambda\vec{k}) \cdot (2\vec{i} + 2\vec{k})$

$= 20\lambda - 10\lambda = 10\lambda = -10$

$\Rightarrow \lambda = -1$

$\Rightarrow \vec{x} = -10\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k}$ #

12 记 $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$

$\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$

$\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

求 $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

解：$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1 + 4 - 2 - (-1) = 4$ #

13 (1) 判断 $A(1,2,3)$, $B(0,3,7)$, $C(3,5,11)$ 是否共线

Idea: 注意到 A, B, C 共线

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 0$

答 $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 4)$

$\overrightarrow{AC} = (2, 3, 8)$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= -4\vec{i} + 16\vec{j} - 5\vec{k}$$

$\Rightarrow |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| \neq 0$

$\Rightarrow A, B, C$ 不共线 #

14 利用混合积, 求证 $A(1,0,1)$, $B(2,4,6)$, $C(3,-1,2)$, $D(6,2,8)$ 共面.

Pf. $\overrightarrow{AB} = (1, 4, 5)$

$\overrightarrow{AC} = (2, -1, 1)$

$\overrightarrow{AD} = (5, 2, 7)$

注意到 A, B, C, D 共面

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$

$$\text{计算 } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= -7 + 20 + 20 - (-25) - 2 - 56$$

$$= 0$$

$\therefore A, B, C, D$ 共面 #

15 (1) 求 $3x-2y+5z-1=0$ 的法向量.

解: 法向量 $\vec{n}=(3,-2,5)$ #

16. 求平面满足

- 过 $M_0(2,9,-6)$
- 垂直于 OM_0

解: 取法向量 $\vec{n}=\overrightarrow{OM_0}=(2,9,-6)$.

平面上任一点 P 满足点法式方程.

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0P}=0.$$

$$\Rightarrow (2,9,-6)\cdot(x-2,y-9,z-(-6))=0$$

$$\Rightarrow 2(x-2)+9(y-9)-6(z+6)=0$$

$$\Rightarrow 2x+9y-6z-121=0$$ #

附 1　设向量 $\vec{b} \in V$ 满足

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \forall \vec{a} \in V$$

求证 $\vec{b} = 0$

Pf. $|\vec{b}|^2 = \vec{b} \cdot \vec{b} = 0$

$\Rightarrow |\vec{b}| = 0 \Rightarrow \vec{b} = 0$ #

附 2. 求证：平行四边形的两对角线的平方和

等于四边的平方和

i.e. $|\vec{a}+\vec{b}|^2 + |\vec{a}-\vec{b}|^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2)$

Pf. $LHS = (\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}+\vec{b}) + (\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})$

$= \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$

$= 2\,\vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{b} \cdot \vec{b}$

$= RHS$ #