对角矩阵

定义 (对角矩阵, 单位矩阵, 零矩阵)

- 对角矩阵 $\mathrm{diag}(a_{1,1},\ldots,a_{n,n})$
- 单位矩阵 $E_n = \mathrm{diag}(1,\ldots,1)$ $\rightsquigarrow 1$
- 零矩阵 $\mathbf{0}$ $\rightsquigarrow 0$

标量也可看作 1×1 矩阵.

$\mathrm{tr}(\mathrm{diag}(a_{1,1},\ldots,a_{n,n})) = \sum_i a_{ii}$

$\mathrm{tr}(E_n) = n$

负矩阵

定义 1.3 (负矩阵)

矩阵 $A = (a_{i,j})_{m,n}$ 的 负矩阵 为 $-A = (-a_{i,j})_{m,n}$.

矩阵的运算

类似数域 F 上可以定义运算 $+, \times$ 以及它们的逆.
我们希望把这些运算推广到 $F^{m\times n}$ 上.
考虑 $A = (a_{i,j})_{m,n}, B = (b_{i,j})_{m,n} \in F^{m\times n}$.

矩阵加法的定义

定义 1.4 (矩阵加法)

矩阵 A 与 B 的 和 定义为

$$A + B := (a_{i,j} + b_{i,j})_{m,n}.$$

定义 (矩阵减法)

$B+(-B)=0$

$$A - B = A + (-B).$$

矩阵加法的性质

- 交换律: $A+B=B+A$
- 结合律: $A+(B+C)=(A+B)+C$
- 加法单位元: $A+0=A$
- 加法逆元: $A+(-A)=0$

矩阵数乘的定义

定义 1.5 (矩阵数乘)

矩阵 A 与数 k 的 数乘 定义为

$$kA := (ka_{i,j})_{m,n}.$$

称 $kE = \mathrm{diag}(k, \ldots, k)$ 为 数量矩阵.

矩阵数乘的性质

- 结合律: $k(lA) = (kl)A$

  数乘 数乘 F乘 数乘

- 分配率
  - $(k \pm l)A = kA \pm lA$
  - $k(A + B) = kA + kB$
- 数乘单位元: $1A = A$
- $kA = 0$ 当且仅当 $k = 0$ 或 $A = 0$

  $0_{m \times n}$

矩阵乘法的定义 1

定义 1.6 (矩阵乘法)

矩阵 $A_{s,n}$ 和 $B_{n,m}$ 的 乘积 定义为 $C = AB$, 其中

$$c_{i,j} = \sum_{k=1,\dots,n} a_{i,k} b_{k,j} \quad i = 1, \dots, s, j = 1, \dots, m.$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} \; a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ a_{s1} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & a_{kj} & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & c_{ij} & \\ & & \end{pmatrix} = C$$

矩阵乘法的定义 2

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{pmatrix}$$

注意

- 矩阵乘法有意义的条件: A 的列数 $=$ B 的行数
- 矩阵乘法不一定满足交换律
  - e.g. 以下的例题 1.2

例题 1.2

对于 $A=(1,4,3)$ 和 $B=(2,3,1)^T$, 有

A×B

$$(1\ 4\ 3)\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} = (2+12+3)$$

$$AB = 17$$

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ & 1\end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix}1 & \\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

和

B×A

$$\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\times(1\ 4\ 3) = \begin{pmatrix}2 & 8 & 6\\ 3 & 12 & 9\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix}2 & 8 & 6\\ 3 & 12 & 9\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

可交换

定义 (矩阵可交换)

称矩阵 A 和 B 是 可交换的, 如果 $AB = BA$.

注意到矩阵乘法的交换律不一定成立. 两个矩阵一般是不可交换的.

例题 1.3

如果 $A=\operatorname{diag}(a_{1,1},\ldots,a_{n,n})$ 满足

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & a_{ii} & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & b_{ij} & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$a_{i,i}\neq a_{j,j} \text{ 如果} i\neq j, \quad = \begin{pmatrix} c_{ij} \end{pmatrix} \quad \text{where } C=A\cdot B$$

求证和 A 可交换的矩阵只可以是对角矩阵.

解

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & b_{ij} & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & a_{jj} & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{ij} \end{pmatrix}$$

直接写出

- $AB=(a_{i,i}b_{i,j})$
- $BA=(b_{i,j}a_{j,j})$

$a_{ii}\cdot b_{ij}=b_{ij}\,a_{jj}$

$i\neq j$: $b_{ij}=0$

$i=j$

可见 $b_{i,j}$ 只能等于零, 如果 $i\neq j$.

矩阵方幂

$\underbrace{x \cdot x \cdots x}_{k} = x^k$

定义 (矩阵方幂)

n 阶矩阵 A 的 k 次方幂, 记为 A^k, 表示 k 个 A 乘.

- $A^0 = E_n$
- $A^k A^l = A^{k+l}$
- $(A^k)^l = A^{kl}$

$A^0 = E$

$A^1 = A$

$\vdots$

$A^{n+1} = A \cdot A^n$

矩阵乘法的性质

- 结合律: $A(BC)=(AB)C$
- 分配率:
  - $(A+B)C=AC+BC$
  - $A(B+C)=AB+AC$
- 数乘与矩阵乘法:

$$k(AB)=(kA)B=A(kB)$$

矩阵多项式

设 $f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 为一 m 次的复系数多项式. 我们可以把 $f(x)$ 推广为 n 阶矩阵 A 的 m 阶行列式

矩阵加法

$$f(A) = a_m \boxed{A^m} + a_{m-1}A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E.$$

数乘　　矩阵乘法

矩阵的转置

定义 1.7 (矩阵转置)

矩阵 A 的转置矩阵为矩阵 A 的行列互换得到的矩阵, 并记作 A^T.

$A^T = (a^T_{ij})$, $a^T_{ij} = a_{ji}$

记 $A = (a_{i,j})_{m,n}$, 则

- A^T 为 $n \times m$
- $a^T_{i,j} = a_{j,i}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$(a_{11}\ a_{12}\ \cdots\ a_{1n}) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}$$

A^T 有时也记作 A'.

$A : n \times m$
$\rightsquigarrow$
$A^T : m \times n$

对称矩阵与反称矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

定义 (对称矩阵与反称矩阵)

- 称 A 为 对称矩阵 如果 $A^T = A$
- 称 A 为 反称矩阵 如果 $A^T = -A$

$f = f_{odd} + f_{even}$

$f(x)+f(-x) \qquad f(x)-f(-x)$

$$f(x) = \underbrace{\tfrac{1}{2}(f(x)+f(-x))}_{even} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(f(x)-f(-x))}_{odd}$$

求证：对于任意 A 都可写成

$$A = \underbrace{A_{sym}}_{对称} + \underbrace{A_{asy}}_{反称}$$

$$\tfrac{1}{2}(A+A^T) + \tfrac{1}{2}(A-A^T)$$

矩阵转置的性质

- $(A^T)^T = A$ ✓
- $(A+B)^T = A^T + B^T$ ✓
- $(kA)^T = kA^T$ ✓
- $(AB)^T = B^T A^T$

前三个性质易证, 这里仅证明最后一个性质.

$A \cdot B = (\sum_k a_{ik} b_{kj})$

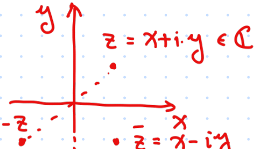
$(A \cdot B)^T = (\sum_k a_{jk} b_{ki})$

$B^T \cdot A^T = (\sum_k b^T_{ik} a^T_{kj})$

$= (\sum_k b_{ki} a_{jk})$

$= (\sum_k a_{jk} b_{ki})$

矩阵共轭



定义 (共轭)

对于 $c = a + bi \in \mathbb{C}$, 它的共轭定义为

$$\bar{c} := a - bi.$$

定义 1.8 (矩阵共轭)

对于复数矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 称 $\bar{A}$ 为 A 的共轭矩阵如果

$$\bar{a}_{i,j} = \overline{a_{i,j}}.$$

矩阵共轭的性质

$C = A + i \cdot B \quad (\bar{C})^T = (\overline{(A+iB)})^T$

- $\bar{A} = A$ 当且仅当 A 是实矩阵
- $(\bar{A})^T = \overline{A^T}$
- $\overline{A+B} = \bar{A} + \bar{B}$
- $\overline{kA} = \bar{k}\bar{A}$
- $\overline{AB} = \bar{A} \cdot \bar{B}$

$= (A - iB)^T$

$= A^T - i \cdot B^T$

$= \overline{C^T}$

$k = x_k + i y_k$

$a_{ij} = x_{ij} + i \cdot y_{ij}$

$i: \; i^2 = -1$

$i:$ row index.

$k a_{ij} = x_k \cdot x_{ij} - y_k y_{ij}$

$\pm i (x_k y_{ij} + y_k x_{ij})$

Outline

分块矩阵

矩阵

$(F, \oplus, \otimes)$

$\wr$

$(F^{m\times n}, +, \times)$

§2.1 $F=\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

§2.2 $F=$矩阵

定义 (分块矩阵)

将矩阵 A 用若干条水平线和垂直线划分成一些子矩阵 (称为 A 的一个 子块), 以子块为元素的形式上的矩阵称为 分块矩阵.

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{12} \\ A_{2,1} & A_{22} \end{pmatrix}$$

分块矩阵记号

$m=(3,2)$

$n=(3,2)$

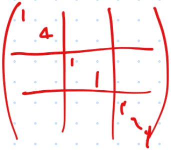
$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} E_3 & X_{3,2} \\ 0_{2,3} & E_2 \end{pmatrix}$$

一般地, 分别取 m, n 的划分 $(m_1, \ldots, m_i, \ldots, m_M)$ 和 $(n_1, \ldots, n_j, \ldots, n_N)$, 矩阵 A 可表示为分块矩阵

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \ldots & A_{1,N} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{M,1} & \ldots & A_{M,N} \end{pmatrix}$$

其中 $A_{i,j}$ 为 $m_i \times n_j$ 矩阵.

准对角线矩阵



定义 (准对角矩阵)

如果分块矩阵 $(A_{i,j})_{M,N}$ 有

- $M = N$
- $A_{i,j} = 0$ 如果 $i \neq j$

那么称 A 为 准对角矩阵, 并可记为

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & & \\ & \ddots & \\ & & A_{M,M} \end{pmatrix}$$

分块矩阵的加法

定义 (分块矩阵的加法)

如果分块矩阵 $A = (A_{i,j})_{M,N}$ 和 $B = (B_{i,j})_{M,N}$ 有相同的分块 $(m_i)_i \times (n_j)_j$, 那么它们的和也可表示为分块矩阵

$$A + B = (A_{i,j} + B_{i,j})_{M,N}.$$

分块矩阵的乘法

回顾矩阵的乘法, 如果 $n_A = m_B$

$$
\begin{pmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n_A-1} & a_{1,n_A} \\
\vdots & & & & \vdots \\
a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n_A-1} & a_{i,n_A} \\
\vdots & & & & \vdots \\
a_{m_A,1} & a_{m_A,2} & \cdots & a_{m_A,n_A-1} & a_{m_A,n_A}
\end{pmatrix}
\times
\begin{pmatrix}
b_{1,1} & \cdots & b_{1,j} & \cdots & b_{1,n_B} \\
b_{2,1} & \cdots & b_{2,j} & \cdots & b_{2,n_B} \\
\vdots & & & & \vdots \\
b_{m_B-1,1} & \cdots & b_{m_B-1,j} & \cdots & b_{m_B-1,n_B} \\
b_{m_B,1} & \cdots & b_{m_B,j} & \cdots & b_{m_B,n_B}
\end{pmatrix}
$$

分块矩阵的乘法

尝试把矩阵乘法推广至分块矩阵, 如果 $N_A = M_B$

$$
\begin{pmatrix}
A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,N_A-1} & A_{1,N_A} \\
\vdots & & & & \vdots \\
A_{i,1} & A_{i,2} & \cdots & A_{i,N_A-1} & A_{i,N_A} \\
\vdots & & & & \vdots \\
A_{M_A,1} & A_{M_A,2} & \cdots & A_{M_A,N_A-1} & A_{M_A,N_A}
\end{pmatrix}
\times
\begin{pmatrix}
B_{1,1} & \cdots & B_{1,j} & \cdots & B_{1,N_B} \\
B_{2,1} & \cdots & B_{2,j} & \cdots & B_{2,N_B} \\
\vdots & & & & \vdots \\
B_{M_B-1,1} & \cdots & B_{M_B-1,j} & \cdots & B_{M_B-1,N_B} \\
B_{M_B,1} & \cdots & B_{M_B,j} & \cdots & B_{M_B,N_B}
\end{pmatrix}
$$

分块矩阵的乘法

定义 (分块矩阵的加法)

分块矩阵 A 和 B 的乘积 $C = AB$ 有

$C_{i,j} = A_{i,1}B_{1,j} + \dots A_{i,k}B_{k,j} + \cdots + A_{i,N_A}B_{N_A,j}$

为使得矩阵乘积 $A_{i,k}B_{k,j}$ 有意义, 我们需要

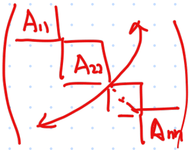
$$\boxed{n_{A_{i,k}}} = \boxed{m_{B_{k,j}}}$$

即

$$\underline{n_k = m_k,} \quad \forall k = 1, \dots, N_A$$

分块矩阵的转置

回顾矩阵 A 的转置 $A^T = (a^T_{i,j})_{n,m}$ 满足 $a^T_{i,j} = a_{j,i}$.



$A^T_{ij} = (A_{ji})^T$

定义 (分块矩阵的转置)

分块矩阵 $A = (A_{i,j})_{M,N}$ 的转置 $A^T = (A^T_{i,j})_{N,M}$ 有

$$\underline{A^T_{i,j} = (A_{j,i})^T.}$$

方阵行列式

定义 (方阵行列式)

方阵 A 的行列式记为 $|A|$ 或 $\det(A)$.

行列式可以看作一个映射

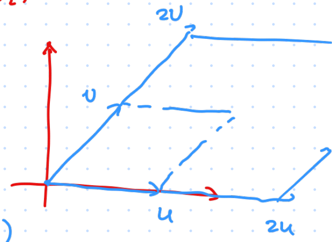
$$
\begin{aligned}
|\cdot| : \overset{A}{\mathbb{R}^{n\times n}} &\to \overset{|A|}{\mathbb{R}} \\
(a_{i,j})_{m,n} &\mapsto |a_{i,j}|_{m,n}
\end{aligned}
$$

性质

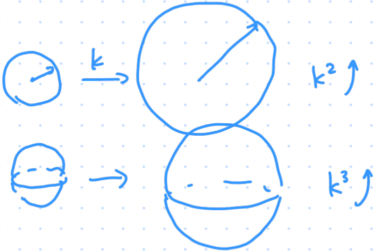
- $|A^T| = |A|$ ✓
- $|kA| = k^n|A|$ ✓
- $|\bar{A}| = \overline{|A|}$

$A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = (u \ \ v)$

$|A| = \text{area}$



$kA = (ku \ \ kv)$



定理 2.1

Q: $|A+B| = |A|+|B|$

$$C = A+B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}}$$

定理 2.1 (乘积的行列式)

行列式的乘积 = 乘积的行列式. 即

$$|AB| = |A||B|.$$

定理 2.1 证明 1

我们记 $C = AB$, 其中 $c_{i,j} = \sum_k a_{i,k} b_{k,j}$. 考虑分块矩阵

$$D = \left(\begin{array}{c|c} A & -E \\ \hline & B \end{array}\right)$$

由行列式的拉普拉斯展开得

$$|D| = |A||B|.$$

定理 2.1 证明 2

希望通过初等变化凑出乘积 C.

$$D' = \begin{pmatrix} E & 0 \\ B & E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & -E \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -E \\ \underset{BA}{\cancel{AB}} & 0 \end{pmatrix}$$

再次由行列式的拉普拉斯展开得

$$|D'| = \overset{(-1)^{1+2}}{-}|-E||AB| = |AB|.$$