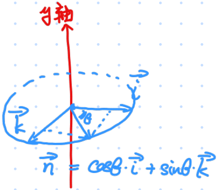
例题 3.4

同轴平面族

- 给定直线 ℓ 过 P_0，切向量 $\vec{v}$
- 过 ℓ 的平面集合



例题 3.4

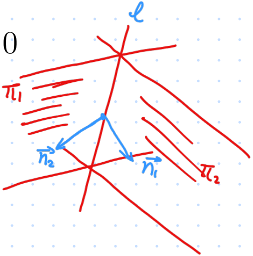
求平面满足

- 过 $P(-1,0,1)$
- 经过线：该线落在以下两个平面上：
  - π_1：$x + 3y - z = 0$
  - π_2：$x - y + z + 1 = 0$

$\{\pi \mid \pi$ 过 P_0 法向量 $\vec{n} \parallel (\cos\theta\cdot\vec{u}_1 + \sin\theta\cdot\vec{u}_2)$，其 $\vec{u}_1 \nparallel \vec{u}_2$ & $\vec{u}_i \perp \vec{v}\}$

$= \{\pi \mid (\cos\theta\vec{u}_1 + \sin\theta\vec{u}_2)\cdot(\overrightarrow{P_0P}) = 0\}$

$= \{\pi \mid (\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2)\cdot(\overrightarrow{PP_0}) = 0\}$



解：直线 ℓ 为 π_1,π_2 的交。

过 ℓ 的平面 π 的法向量可以表示为 $\lambda_1\vec{n}_1 + \lambda_2\vec{n}_2$.

π 过 ℓ 上的点 $(\ell \subseteq \pi)$

↳ 满足 $\begin{cases} \pi_1: x + 3y - z = 0 \\ \pi_2: x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \lambda_1\pi_1 + \lambda_2\pi_2 = \lambda_1(x + 3y - z) + \lambda_2(x - y + z + 1) = 0$

又 平面 π 过 $P(-1,0,1)$

$\therefore -2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \Rightarrow \vec{n} = \ldots\ldots$

$\therefore$ 通过点法式 $\Rightarrow \pi$ 方程

#

设定

考虑一条直线 l 与一个平面 π 之间的关系:

- 直线 l : $\overrightarrow{P_0P} \parallel \mathbf{v}$
  - 经过 $P_0(x_0, y_0, z_0)$
  - 方向向量 $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$

l: 对称式 $\frac{x-x_0}{v_x} = \frac{y-y_0}{v_y} = \frac{z-z_0}{v_z}$.

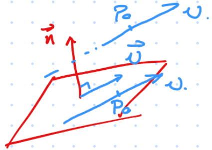
参数式: $P = P_0 + \vec{v}t$.

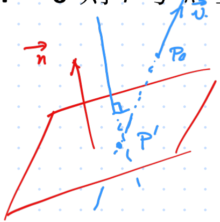
- 平面 π : $\overrightarrow{Q_0Q} \cdot \mathbf{n} = 0$
  - 经过 Q_0
  - 法向量 $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$

关系

直线 l 与平面 π 的关系:

- $\mathbf{v} \perp \mathbf{n}$: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$
  - P_0 在平面 π 上: $\overrightarrow{Q_0P_0} \cdot \mathbf{n} = 0$ 则 l 在 π 上
  - P_0 不在平面 π 上: $\overrightarrow{Q_0P_0} \cdot \mathbf{n} \neq 0$ 则 l 与 π 平行且不在 π 上
- $\mathbf{v}$ 与 $\mathbf{n}$ 不垂直: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \neq 0$ 则 l 与 π 相交
  - 特别地, $\mathbf{v} \parallel \mathbf{n}$: $\mathbf{v} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ 则 l 与 π 垂直





关系: 不共面情形

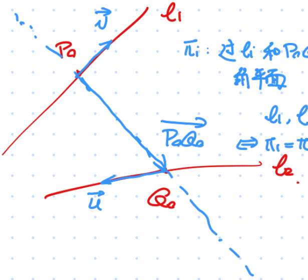
- $l_1 : P = P_0 + \mathbf{v}t$
- $l_2 : Q = Q_0 + \mathbf{u}s$

之间的关系

- $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ 与 $\overrightarrow{Q_0P_0}$ 不共面:

$$|(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \overrightarrow{Q_0P_0})| \neq 0$$

则 l_1 与 l_2 不共面



π_i: 过 l_i 和 P_0Q_0 的平面

l_1, l_2 共面 $\Leftrightarrow \pi_1 = \pi_2$

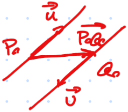
$$\frac{x-P_x}{Q_x-P_x} = \frac{y-P_y}{Q_y-P_y} = \frac{z-P_z}{Q_z-P_z}$$

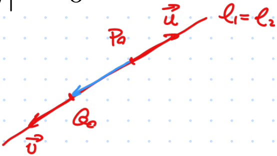
关系: 共面情形

- $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ 与 $\overrightarrow{Q_0P_0}$ 共面:

$$\left|(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \overrightarrow{Q_0P_0})\right| = 0$$

则 l_1 与 l_2 共面





  - 平行 $\Leftrightarrow \mathbf{v} \parallel \mathbf{u}$
    - 重合 $\Leftrightarrow \overrightarrow{Q_0P_0} \parallel \mathbf{v} \parallel \mathbf{u}$
  - 相交 $\Leftrightarrow |\mathbf{v} \times \mathbf{u}| \neq 0$

例题 4.4

例题 4.4

考虑两条直线:

$$l_1: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}$$

$$l_2: \frac{x-r}{2} = \frac{y-2}{t} = \frac{z+1}{-2}$$

通过对 r 和 t 的讨论, 分析 l_1 与 l_2 的相对位置.

可见

$$\begin{cases} P_1(1,-2,1) & \mathbf{v}_1 = (-1,2,1) \\ P_2(r,2,-1) & \mathbf{v}_2 = (2,\overset{-4}{t},-2) \end{cases}$$

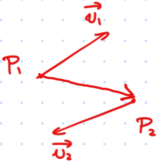
$v_2 = -2 \cdot v_1$

例题 4.4 解

$\overrightarrow{P_1P_2} = (r-1, 4, -2)$.

考虑是否共面, i.e. $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\overrightarrow{P_1P_2}$ 是否共面. 计算

$$(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \overrightarrow{P_1P_2}) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & t & -2 \\ r-1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$



$$= -1(-2t+8) + 2\times(-2(r-1)+4) + 1(2\times 4 - t(r-1)).$$

$$= \pm(r-3)(t+4)$$

例题 4.4 解

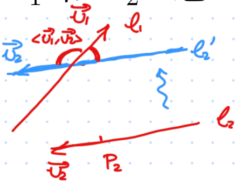
l_1 与 l_2 共面 $\Leftrightarrow r = 3$ 或 $t = -4$.
进一步分析共面的情形

- $t = -4$: 平行但不重合 ✓
- $t \neq -4$: 相交 (共面可得 $r = 3$)
  - $t = 2$: 垂直 $\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = 0$

两直线夹角

定义 (直线与直线的夹角)

设直线 l_1 和 l_2 的方向向量分别为 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$. 记 θ 为 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$ 的夹角. 称



$$\varphi = \min\{\theta, \pi - \theta\}$$

为直线 l_1 和直线 l_2 的夹角.

可见

$$\cos\varphi = \left|\frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1| \cdot |\mathbf{v}_2|}\right|.$$

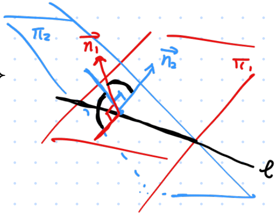
Q: 为什么直线间的夹角要取锐角, 但向量间的夹角不用?

直线没有方向
向量有方向

两平面夹角

定义 (平面与平面的夹角)

设平面 π_1 和 π_2 的法向向量分别为 $\mathbf{n}_1$ 和 $\mathbf{n}_2$. 记 θ 为 $\mathbf{n}_1$ 和 $\mathbf{n}_2$ 的夹角. 称



$$\varphi = \min\{\theta, \pi - \theta\}$$

为平面 π_1 和平面 π_2 的夹角.

可见

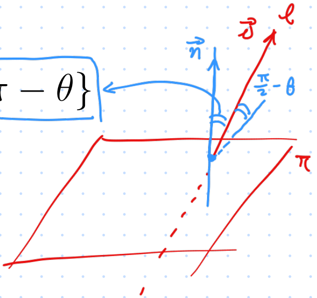
$$\cos\varphi = \left|\frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|}\right|.$$

直线与平面夹角

定义 (直线与平面的夹角)

设直线 l_1 的切向量为 $\mathbf{v}_1$, 平面 π_1 的法向量为 $\mathbf{n}_1$.
记 θ 为 $\mathbf{v}_1$ 与 $\mathbf{n}_1$ 的夹角. 称

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \boxed{\min\{\theta, \pi - \theta\}}$$



为直线 l_1 和平面 π_1 的夹角.
可得

$$\sin\varphi = \cos(\min\{\theta, \pi - \theta\})$$
$$= \left|\frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_1}{|\mathbf{v}_1||\mathbf{n}_1|}\right|.$$

例题 4.5

例题 4.5

记

- 直线 $l: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}$
- 平面 $\pi: x + y + 2z = 3$

求直线 l 与平面 π 的夹角.

解

先求

- l 的方向向量 $\mathbf{v} = (-1, 2, 1)$
- π 的法向量 $\mathbf{n} = (1, 1, 2)$

例题 4.5 解

解 (续)

由 $\mathbf{v} = (-1, 2, 1)$ 和 $\mathbf{n} = (1, 1, 2)$, 得

- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$
- $|\mathbf{v}|$
- $|\mathbf{n}|$

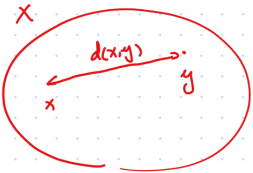
利用

$$\sin\varphi = \left|\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{v}||\mathbf{n}|}\right|$$

求 φ

一般含义

对于度量空间 (X, d) 诱导其上集合之间的距离



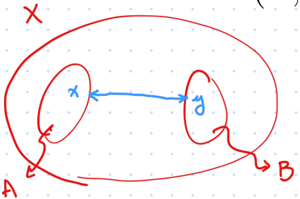
幂集

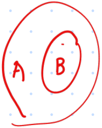
$$d : 2^X \times 2^X \to \mathbb{R}_+$$

$$(A, B) \mapsto d(A, B)$$

其中

$$d(A, B) := \inf_{x \in A, x \in B} d(x, y).$$





点到点的距离

对于两点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 和 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, 那么 P_0 与 P_1 两点之间的距离可以通过 $\overrightarrow{P_0P_1}$ 的大小确定, i.e.

$= \left((x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

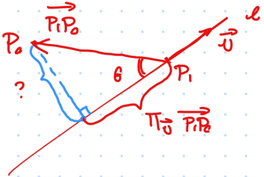
$$d(P_0, P_1) = |\overrightarrow{P_0P_1}|.$$

我们将利用两点之间的距离表示线面之间的距离.

点到直线距离

考虑

- 点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$
- 线 $l(P_1, \mathbf{v})$: 过点 P_1 & 方向向量为 $\mathbf{v}$



记 P_0 到 l 的距离为 $d(P_0, l)$. 验证

$$d(P_0, l) = \frac{|\mathbf{v} \times \overrightarrow{P_1P_0}|}{|\mathbf{v}|}.$$

$$= \sin\theta \times |\overrightarrow{P_1P_0}|$$

$$= \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{P_1P_0}|}{|\vec{v}| \cdot |\overrightarrow{P_1P_0}|} \times |\overrightarrow{P_1P_0}|$$

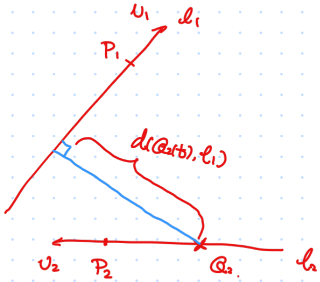
例题 4.6

例题 4.6

设

- $l_1 : \frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{2}$
- $l_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-2}{4}$

求 l_1 与 l_2 之间的距离.



记 $Q_2(t) = P_2 + \vec{u}_2 \cdot t$. $t \in \mathbb{R}$.

计算 $d(Q_2(t), l_1) = \dfrac{|\vec{u}_1 \times \overrightarrow{P_1 Q_2(t)}|}{|\vec{u}_1|}$

$= f(t)$

求 $t_0 := \arg\min_{t \in \mathbb{R}} f(t)$

$\Rightarrow d(l_1, l_2) = d(Q_2(t_0), l_2) = f(t_2)$

$\vec{u}_1 = (1, 2, 2)$

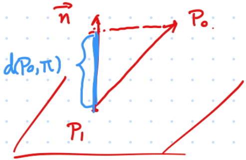
$\vec{u}_2 = (2, 4, 4)$

$\Rightarrow \vec{u}_1 // \vec{u}_2$

$\Rightarrow l_1 // l_2$

$\Rightarrow d(l_1, l_2) = d(l_1, P_2)$

点到平面距离



考虑

- $P_0(x_0, y_0, z_0)$
- 平面 $\pi(P_1, \mathbf{n})$: 过点 P_1 & 法向量为 $\mathbf{n}$

记 P_0 到 π 的距离为 $d(P_0, \pi)$. 验证

$$d(P_0, \pi) = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_1P_0}|}{|\mathbf{n}|}, = \frac{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{P_1P_0}| \cdot \cos\langle \vec{n}, \overrightarrow{P_1P_0} \rangle}{|\vec{n}|}.$$

其中 P_1 为 π 上的一点.

例题 4.7

例题 4.7

设

- $\pi_1 : x + 2y - 2z + 3 = 0$
- $\pi_2 : 2x + 4y - 4z - 3 = 0$

求 $d(\pi_1, \pi_2)$

$P_2 = (\frac{3}{2}, 1, 1)$

$d(\pi_1, \pi_2) = d(\pi_1, P_2)$.

π_1 过 $P_1 = (-3, 1, 1)$

$\vec{n_1} = (1, 2, -2)$

$d(\pi_1, P_2) = \frac{|\vec{n_1} \cdot \overrightarrow{P_1P_2}|}{|\vec{n_1}|}$

线到线的距离

我们定义直线 l_1 与 l_2 之间的距离为

$$d(l_1, l_2) := \inf_{p_1 \in l_1, p_2 \in l_2} d(p_1, p_2).$$

e.g.

- $l_1 \parallel l_2$: $d(l_1, l_2) = d(p_1, l_2)$ for all $p_1 \in l_1$.
- l_1 与 l_2 相交或重合: $d(l_1, l_2) = 0$
- 其他情形: $d(l_1, l_2)$ 为公垂线段长度

面到面的距离

定义平面 π_1 与 π_2 之间的距离为

$$d(\pi_1, \pi_2) := \inf_{p_1 \in \pi_1, p_2 \in \pi_2} d(p_1, p_2).$$

e.g.

- $\pi_1 \parallel \pi_2$: $d(\pi_1, \pi_2)$ 为公垂线段长度
- 相交或重合: 距离为零