Outline

$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \lambda_2 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}$

$A \overset{\text{相似}}{\sim} B$ ⇝ 矩阵 A 可对角化：$\exists$ 可逆 P s.t. $P^{-1}AP = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$\exists$ 可逆 P s.t. $P^{-1}AP = B$

$\Updownarrow$

A 存在 n 个线性无关特征向量 $\underbrace{\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}}_{}$　　P的列向量

$\alpha_i = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ ← ith

5.0 引言

几何意义：线性映射 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ & $f(0)=0$

取 $\mathbb{R}^n$ 的两组基 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ （简单 $\{e_1, \dots, e_n\}$）

5.1 矩阵的特征值和特征向量

$f: v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \longmapsto f(v) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)\underbrace{\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}}_{=A}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

$= (\beta_1, \dots, \beta_n)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} \longmapsto = (\beta_1, \dots, \beta_n)\underbrace{\begin{pmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}}_{=B}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$

$\alpha A x = \beta B y$

$\Rightarrow \alpha A P y = \alpha P B y$

$\Rightarrow AP = PB$

$\Rightarrow B = P^{-1}AP$

5.2 相似矩阵与矩阵可对角化

$\alpha x = \beta y$

$x = Py$

$(\beta_1, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)\underbrace{\begin{pmatrix}p_{11} & \cdots & p_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ p_{n1} & \cdots & p_{nn}\end{pmatrix}}_{=P}$

$\beta = \alpha \cdot P$

5.3 实对称矩阵的对角化

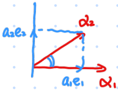
动机

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

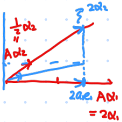
回顾: 不是所有的方阵都可以对角化.
我们将考虑一类方阵 (实对称矩阵), 并指出此类矩阵可对角化.

A 有 特征值 $\lambda_i \neq \lambda_j$

$\Rightarrow$ 特征向量 α_i, α_j 线性无关



$\xrightarrow{A}$



$\alpha_2 = a_1e_1 + a_2e_2$

$$A\alpha_2 = A(a_1e_1 + a_2e_2) = a_1Ae_1 + A(a_2e_2) = 2\underbrace{a_1e_1}_{} + A(a_2e_2)$$

假设 $\langle \underset{e_1}{\alpha_1}, \underset{e_1+e_2}{\alpha_2} \rangle = \frac{\pi}{4}$

$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}$

(目的 $A\alpha_2$ 不与 α_2 共线)

$$A\alpha_2 = A(e_1+e_2) = 2e_1 + \underbrace{Ae_2}_{=2e_2}$$

$\mathbb{R}^n$ 中的内积

回顾: $\mathbb{R}^3$ 中 $\alpha = (x_1, x_2, x_3)$ 和 $\beta = (y_1, y_2, y_3)$ 的内积

$$
\begin{aligned}
\alpha \cdot \beta &= |\alpha||\beta| \cos\langle \alpha, \beta \rangle \\
&= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.
\end{aligned}
$$

定义 3.1

$\mathbb{R}^n$ 中的 内积 为映射

$$
\begin{aligned}
(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\
(\alpha, \beta) &\mapsto (\alpha, \beta),
\end{aligned}
$$

$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$\parallel$

$(x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

对 $\alpha = (x_1, \dots, x_n)$ 和 $\beta = (y_1, \dots, y_n)$, α 和 β 的内积为

n

内积空间

内积空间 = 向量空间 + 内积

e.g. $(\mathbb{R}^n, (\cdot, \cdot))$ (仍简记为 $\mathbb{R}^n$)

内积满足

- $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$
- $(k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta)$
- $(\alpha_1 + \alpha_2, \beta) = (\alpha_1, \beta) + (\alpha_2, \beta)$
- $(\alpha, \alpha) \geq 0$ 当且仅当 $(\alpha, \alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

$$\underset{\displaystyle x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{\overset{\shortparallel}{}}$$

内积诱导长度

定义 3.2

内积空间 $\mathbb{R}^n$ 中的 α 的长度 $|\alpha|$ 定义为

勾股定理

$$|\alpha| := \sqrt{(\alpha, \alpha)}.$$

称 α 为单位向量, 如果 $|\alpha| = 1$.

内积性质

性质 3.1

& $|\alpha| = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

1. $|\alpha| \geq 0 \cancel{\Rightarrow \alpha = 0}$
2. $|k\alpha| = |k||\alpha|$

内积性质

性质 3.1

3. Cauchy-Schwartz 不等式: $|(\alpha,\beta)| \le |\alpha| \cdot |\beta|$

证明 3

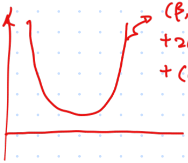
$|\alpha+t\beta|^2 \ge 0$

考察二次多项式 $(\alpha+t\beta,\alpha+t\beta)$.

$= (\alpha, \alpha+t\beta) + (t\beta, \alpha+t\beta)$

$= (\alpha,\alpha) + t(\alpha,\beta) + t(\beta,\alpha) + t^2 \cdot (\beta,\beta)$

$= (\alpha,\alpha) + 2(\alpha,\beta)\cdot t + \underbrace{(\beta,\beta)}_{\ge 0} t^2$



$\Rightarrow (2(\alpha,\beta))^2 - 4(\beta,\beta)\cdot(\alpha,\alpha) \le 0$

$|(\alpha,\beta)| = |\alpha|\cdot|\beta|\,|\cos\langle\alpha,\beta\rangle| \le |\alpha|\cdot|\beta|.$

"=" $\Leftrightarrow |\cos\langle\alpha,\beta\rangle| = 1$

$\Leftrightarrow \langle\alpha,\beta\rangle = k\pi \Leftrightarrow \alpha,\beta$ 共线

Q: 什么情况取等号?

内积性质

性质 3.1

4. 三角不等式: $|\alpha+\beta|^2 \le (|\alpha|+|\beta|)^2$

$|\alpha+\beta|^2 = (\alpha+\beta, \alpha+\beta)$ $= |\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2$

$= (\alpha,\alpha) + 2(\alpha,\beta) + (\beta,\beta)$

Q: 什么情况取等号?

"$=$" $\Leftrightarrow \cos\langle\alpha,\beta\rangle = 1$

$\Leftrightarrow \langle\alpha,\beta\rangle = 0$

$\Leftrightarrow \alpha,\beta$ 共向

(e.g. $\beta = -\alpha$

$\begin{cases} |\alpha+\beta| = 0 \le 2|\alpha| \\ |(\alpha,\beta)| = |-|\alpha||\beta|| \\ \quad = |\alpha||\beta| \end{cases}$)

夹角

对 $\alpha \neq 0$, 称 $\frac{\alpha}{|\alpha|}$ 为 α 的单位化向量.

定义 3.3

内积空间 $\mathbb{R}$ 中的不为零的向量 α 与 β 的夹角

$$\langle \alpha, \beta \rangle := \arccos\left(\frac{(\alpha, \beta)}{|\alpha| \cdot |\beta|}\right) \in [0, \pi]$$

正交

定义 3.4

称 α 和 β 垂直 (或 正交), 如果 $\langle\alpha,\beta\rangle=\frac{\pi}{2}$. 约定零向量 $\mathbf{0}$ 与任意向量正交.

性质 3.2

α,β 正交, 当且仅当, $(\alpha,\beta)=0$.

正交向量组

线性无关组

$+$

正交：两两正交

$=$

正交组.

定义 3.5

一个由非零向量组成向量组被称为 正交向量组，如果它的向量都相互正交.

定理 3.1

正交向量组必线性无关.

正交向量组 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$

观察 $k_1\alpha_1 + \dots + k_n\alpha_n = 0$

$$(k_1\alpha_1 + \dots + k_n\alpha_n, \alpha_i) =$$

$$= k_1\underbrace{(\alpha_1,\alpha_i)}_{=0} + \dots + k_i\underbrace{(\alpha_i,\alpha_i)}_{=|\alpha_i|^2>0} + \dots + k_n\underbrace{(\alpha_n,\alpha_i)}_{=0}$$

$$\Rightarrow k_i = 0$$

标准正交基

$$
\begin{tikzcd}
\text{线性无关组} \arrow[r, "+\text{极大}"] \arrow[d, "+\text{正交}"] & \text{基} \arrow[r, "+\text{单位化}"] \arrow[d, "+\text{正交}"] & \text{单位基}\ (\text{单位}\sim\text{标准}) \arrow[d, "+\text{正交}"] \\
\text{正交组} \arrow[r, "+\text{极大}"] & \text{正交基} \arrow[r, "+\text{单位化}"] & \text{单位正交基}
\end{tikzcd}
$$

定义 3.6

- 正交基 = 基 + 正交
- 标准正交基 = 正交基 + 单位化

一个向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 为标准正交基, 当且仅当,

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \delta_{i,j}. = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

e.g. R^n 中的单位向量 $e_1, \ldots, e_n$ 构成一组标准正交基.

例题 3.1

例题 3.1

取 R^n 的一组标准正交基 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.
求证: 如果 $\alpha = k_1\alpha_1 + \ldots k_n\alpha_n$, 那么 $k_i = (\alpha_i, \alpha)$.

$$(\alpha, \alpha_i) = (k_1\alpha_1 + \ldots + k_n\alpha_n, \alpha_i)$$
$$= \sum_j k_j (\alpha_j, \alpha_i)$$
$$= \sum_j k_j \cdot \delta_{ji}$$
$$= k_i$$

可见, α 在标准正交基 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 下的坐标

$$\alpha = (\alpha, \alpha_1)\alpha_1 + \cdots + (\alpha, \alpha_n)\alpha_n.$$

性质 3.3

标准正交基下, 可以简化向量的运算.

性质 3.3

取 $\mathbb{R}^n$ 下的一组标准正交基 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. 记 α 和 β 在这组基下的坐标分别为 $x_1, \ldots, x_n$ 和 $y_1, \ldots, y_n$. 那么

- $(\alpha, \beta) = x_1 y_1 + \ldots x_n y_n$
- $|\alpha|^2 = (\alpha, \alpha) = x_1^2 + \ldots x_n^2$

$\alpha = x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n$

$\beta = y_1\alpha_1 + \ldots + y_n\alpha_n$

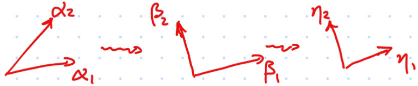
$(\alpha, \beta) = (x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n, y_1\alpha_1 + \ldots + y_n\alpha_n)$

$= \sum_{i,j} x_i y_j (\alpha_i, \alpha_j)$

$= \sum_{i,j} x_i y_j \delta_{ij} = \sum_i x_i y_i$

构造标准正交基

Q: 如何得到一组标准正交基? 特别地, 能否通过一组已知的基 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 构造一组标准正交基 $\eta_1, \ldots, \eta_n$?



这等价于以下两个问题:

1. (正交化) $\{\alpha_i\}$ 化为正交基 $\{\beta_i\}$
2. (标准化 / 单位化) $\{\beta_i\}$ 化为标准正交基 $\{\eta_i\}$

Schmidt 正交化

定理 3.2

给定 $\mathbb{R}^n$ 上的一组基 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, 取

- $\beta_1 = \alpha_1$
- $\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1$
- $\vdots$
- $\beta_n = \alpha_n - \frac{(\alpha_n, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 \cdots - \frac{(\alpha_n, \beta_{n-1})}{(\beta_{n-1}, \beta_{n-1})} \beta_{n-1}$

那么 $\beta_1, \ldots, \beta_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 一组正交基.

Schmidt 正交化证明

对维数 n 进行数学归纳法.

$n = 2$ 情况:

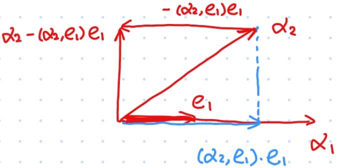
$$(\beta_2,\beta_1) = \left(\alpha_2 - \frac{(\alpha_2,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1,\ \alpha_1\right) = (\alpha_2,\alpha_1) - \frac{(\alpha_2,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}(\alpha_1,\alpha_1) = 0$$

假设 $n = k$ 时成立, 验证 $n = k + 1$ 情况:

验证 $(\beta_{n+1},\beta_i) = 0 \quad i = 1,\dots,n.$

$$\begin{aligned}
&\ \| \\
&\left(\alpha_{n+1} - \sum_{j=1}^{n}\frac{(\alpha_{n+1},\beta_j)}{(\beta_j,\beta_j)}\cdot\beta_j,\ \beta_i\right) \\
&= (\alpha_{n+1},\beta_i) - \sum_j \frac{(\alpha_{n+1},\beta_j)}{(\beta_j,\beta_j)}\underline{(\beta_j,\beta_i)} \\
&= (\alpha_{n+1},\beta_i) - \frac{(\alpha_{n+1},\beta_i)}{(\beta_i,\beta_i)}(\beta_i,\beta_i) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Schmidt 正交化的几何意义



$e_1 = \frac{\alpha_1}{|\alpha_1|}$

$\alpha_2 - (\alpha_2, e_1)e_1$

$$\alpha_2 - \left(\alpha_2, \frac{\alpha_1}{|\alpha_1|}\right)\cdot\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|}$$

$$= \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \alpha_1)}{|\alpha_1||\alpha_1|}\cdot\alpha_1$$

$$= \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \alpha_1)}{(\alpha_1, \alpha_1)}\cdot\alpha_1$$

例题 3.2

例题 3.2

对以下的基进行标准正交化

- $\alpha_1 = (1, 1, 1, 1)$
- $\alpha_2 = (3, 3, 1, 1)$
- $\alpha_3 = (1, 9, 1, 9)$
- $\alpha_4 = (4, 0, 0, 0)$

$\beta_1 = \alpha_1 \rightsquigarrow \gamma_1 = \frac{\beta_1}{|\beta_1|} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$\beta_2 = \alpha_2 - (\alpha_2, \gamma_1)\gamma_1 \rightsquigarrow \gamma_2 = \frac{\beta_2}{|\beta_2|} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

$= (3,3,1,1) - (2,2,2,2)$

$= (1,1,-1,-1)$

$\beta_3 = \alpha_3 - (\alpha_3, \gamma_1)\gamma_1 - (\alpha_3, \gamma_2)\gamma_2 \rightsquigarrow \gamma_3 = \frac{\beta_3}{|\beta_3|} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$= (1,9,1,9) - (5,5,5,5) - 0$

$= (-4,4,-4,4)$

$\beta_4 = \alpha_4 - (\alpha_4, \gamma_1)\gamma_1 - (\alpha_4, \gamma_2)\gamma_2 - \overset{-2}{\overset{\shortparallel}{(\alpha_4, \gamma_3)}}\gamma_3$

$= (4,0,0,0) - (1,1,1,1) - (1,1,-1,-1) - (1,-1,1,-1)$

$= (1,-1,-1,1)$

$\gamma_4 = \frac{\beta_4}{|\beta_4|} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

正交矩阵

定义 3.7

$n \times n$ 实矩阵 A 被称为 正交矩阵 如果

$$A^T A = E.$$

$\Longleftrightarrow (\alpha_i, \alpha_j) = \delta_{ij}$

$A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$= \left[\begin{pmatrix} \\ \alpha_1 \\ \\ \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \\ \alpha_n \\ \\ \end{pmatrix} \right]$

$A^T = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (& \alpha_1 &) \\ & \vdots & \\ (& \alpha_n &) \end{bmatrix}$

$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix} (\alpha_1 \cdots \alpha_n)$

$\Rightarrow (A^T A)_{ij} = \alpha_i^T \cdot \alpha_j$

$= (\alpha_i, \alpha_j)$

正交矩阵 A 满足以下性质:

- $A^{-1} = A^T$
- A^{-1} 和 A^T 也是正交矩阵
- $|A| = \pm 1$
- 正交矩阵的乘积也是正交