Outline

4.0 引言

4.1 消元法

4.2 n 维向量空间

4.3 向量组的线性相关性

4.4 $\mathbb{R}^n$ 的基，向量在基下的坐标

4.5 向量组的秩

方程组 $Ax=b$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$\updownarrow$

增广矩阵：$\tilde{A}=(A,b)$

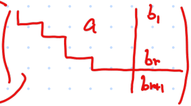
$\Updownarrow$

初等行变换保持解集不变

$\Updownarrow$

消元法（阶梯化 $\tilde{A}$）

$r=rk(A)$



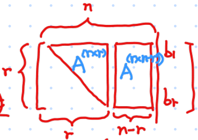
列交换

① $rk(\tilde{A})=rk(A)+1$

$\Leftrightarrow b_{r+1}\neq 0 \Leftrightarrow$ 无解.

② $rk(\tilde{A})=rk(A) \Leftrightarrow b_{r+1}=0$

$\Leftrightarrow$ 解的存在性



(2.1) $n-r>0$

$A^{(r\times r)}X^{(r)}$

$=b-A^{r\times(n-r)}X^{(n-r)}$

$\Rightarrow n-r$ 个自由未知量

$$\Updownarrow$$

$$\left(A^{(r\times r)}\ A^{(r\times(n-r))}\right)\begin{pmatrix} X^{(r)} \\ X^{(n-r)} \end{pmatrix}=b$$

(2.2) $n-r=0$

$\Rightarrow$ 解的唯一性

简单例子

- 共线
$$\mathbf{a} = k_1\mathbf{a}_1.$$
- 共面
$$\mathbf{a} = k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2.$$
- 一般 $(n+1)$ 个向量落在 n 线性子空间

线性表示

定义 3.1

我们称 $\mathbf{a}$ 是 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ 的 线性组合 (等价地, $\mathbf{a}$ 可由 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ 线性表示), 如果存在 $k_1, \ldots, k_m$, s.t.

$$\mathbf{a} = k_1\mathbf{a}_1 + \cdots + k_m\mathbf{a}_m.$$

e.g. 取 n 维单位向量 $\mathbf{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, 则对任意 $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, 有

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n.$$

可见 F^n 中的任意向量均可由 n 维单位向量线性表示.

e.g. 零向量 $\mathbf{0}$ 是任意向量组的线性组合.

例题 3.1

例题 3.1

求证 $a = (-1, 1, 5)$ 是 $a_1 = (1, 2, 3)$, $a_2 = (0, 1, 4)$, $a_3 = (2, 3, 6)$ 的线性组合

“判别能否线性表示” 等价于 “判别方程组是否有解”

线性表出

定义 3.2 (向量组的线性表示)

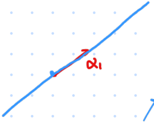
向量组 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_t\}$ 可由向量组 $\{\beta_1, \ldots, \beta_s\}$ **线性表示**, 如果任一 α_i 均可由 $\{\beta_1, \ldots, \beta_s\}$ 线性表示.

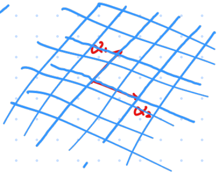
定义 3.2 (向量组的线性表示)

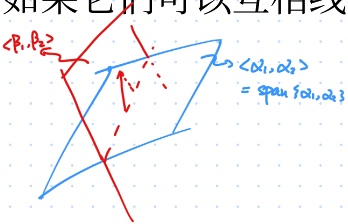
称两个向量组等价, 如果它们可以互相线性表示.

$\{\alpha_1\}$ $\alpha = k_1\alpha_1$

$\{\alpha_1, \alpha_2\}$ $\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$







线性表出是等价关系

可验证相互线性表示满足

- 反身性
- 传递性
- 对称性

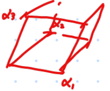
线性相关 vs 线性无关

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

$(n+1)$个向量线性相关

$\Leftrightarrow$ 落在共同n维子空间

$\Leftrightarrow \alpha_1 = k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + \cdots + k_n\alpha_n$



$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$共面

$\Leftrightarrow V(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$

$\Leftrightarrow$ 混合积, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$

定义 3.4 (线性相关)

我们称向量组 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ 线性相关, 如果存在不全为零 $k_1, \ldots, k_m$ s.t.

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m = 0.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\updownarrow$

$$(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{0}$$

否则, 称该向量组 线性无关.

可见, 对于任一向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, 方程

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$$

只有零解.

线性相关的充要条件

定理 3.1

向量组线性相关，当且仅当，向量组中存在一个向量可由其他向量线性表示.

不妨取 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n,\alpha\}$

$\alpha = k_1\alpha_1+\dots+k_n\alpha_n \quad ((k_1,\dots,k_n)\neq\vec{0})$

$\iff \alpha - k_1\alpha_1-\dots-k_n\alpha_n=\vec{0}$

$\iff (1,-k_1,\dots,-k_n)$ 是

$\lambda\alpha+\lambda_1\alpha_1+\dots+\lambda_n\alpha_n=\vec{0}$

的非零解.

$\iff \dots$

线性相关

定理 3.2

向量组中的一部分向量线性相关, 则整个向量组线性相关.

逆否: 一个向量组线性无关, 则它的任意非空向量组也是线性无关.

设 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$

存在 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ 线性相交 $(m<n)$

考察 $\{\underbrace{\alpha_1, \ldots, \alpha_m}_{(m-1)\text{维子空间}}, \underbrace{\alpha_{m+1}, \ldots \alpha_n}_{\text{顶多 span } (n-m)\text{维空间}}\}$ 顶多 span $m-1+n-m$

$= n-1$ 维子空间

高维嵌入

定理 3.3

对于 n 维空间中的一个线性无关的向量组 $\{\alpha_i\}$, 通过对每个向量 α_i 添加一个分量得到 β_i, 那么这个 $(n+1)$ 维空间中的向量组 $\{\beta_i\}$ 也线性无关.

$\mathbb{R}^n$: $\alpha_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \longrightarrow$ $\mathbb{R}^{n+1}$: $\beta_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \\ a_{n+1,i} \end{pmatrix}$

$\{\alpha_i\}$线无 $\Rightarrow$ $\{\beta_i\}$线无

Pf: 考察 $k_1\beta_1 + \cdots + k_m\beta_m = 0$ 是否有非零解.

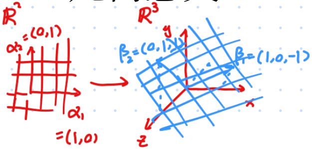
$(\beta_1, \ldots, \beta_m)\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} = \vec{0}$

$\iff \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \\ a_{n+1,1} & \cdots & a_{n+1,m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\xRightarrow{\{\alpha_i\}线无} (k_1, \ldots, k_m) = \vec{0}$

$\Rightarrow \{\beta_i\}$线无 #

几何意义



Outline

回顾

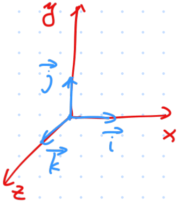
基 basis

n 维向量空间 F^n, 可取 n 维单位向量 $e_1, \ldots, e_n$. 这组单位向量是 "最大的".

e.g. $\mathbb{R}^3$ 中的 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. 任意向量 $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ 有分解式

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, (1,1,1)

$$\mathbf{p} = p_x\mathbf{i} + p_y\mathbf{j} + p_z\mathbf{k}.$$



基:

- 不大 (没有多余): 线性无关.
- 不小: ∀向量均可被基线性表示.

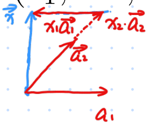
基与坐标

定义 4.1

称 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一组 基, 如果

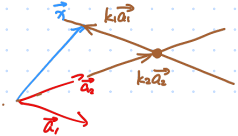
- 不大 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ 线性无关
- 不小 $\mathbb{R}^n$ 中任意向量 $\mathbf{x}$ 均可由 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ 线性表示.

称 $(x_1, \ldots, x_n)$ 为 $\mathbf{x}$ 在基 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ 下的 坐标, 如果



$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n.$$

给定一组基, 那么任意向量的坐标是唯一确定.



例题 4.1

例题 4.1

求证向量组 $b_1, \ldots, b_n$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

为 $\mathbb{R}^n$ 的一组基.

① $\{b_1, \ldots, b_n\}$ 线性无关.

$k_1 b_1 + \ldots + k_n b_n = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (k_1, \ldots k_n) = \vec{0}$$

$\Rightarrow \{b_i\}$ 线无

例题 4.1 解

$\{\beta_i\} \xrightarrow{\text{线性表示}} \{e_i\} \xrightarrow{\text{线性表示}} R^n$中的任意向量

可见 $\beta_1, \ldots, \beta_n$ 可以线性表示 $\overset{''\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}}{\alpha_1}, \ldots, \overset{''\begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\end{pmatrix}}{\alpha_n}$:

$$\begin{cases} \alpha_i & = \beta_i - \beta_{i+1} \qquad \forall i = 1, \ldots, n-1 \\ \alpha_n & = \beta_n \end{cases}$$

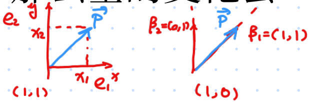
那么, 对于任一向量可由 $\beta_1, \ldots, \beta_n$ 线性表示

$$\begin{aligned} \alpha &= a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 \cdots + a_{n-1}\alpha_{n-1} + a_n\alpha_n \\ &= a_1(\beta_1 - \beta_2) + a_2(\beta_2 - \beta_3) + \cdots + a_{n-1}(\beta_{n-1} - \beta_n) \\ &+ a_n\beta_n \\ &= a_1\beta_1 + (a_2 - a_1)\beta_2 + \cdots + (a_n - a_{n-1})\beta_n. \end{aligned}$$

基变化引起坐标变化

$\vec{P} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n$

注意到坐标是依赖于基的选取. 那么基的变化会如何改变坐标?



e.g.

$\mathbf{p}$ 在 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ 下的坐标为 $(x_1, \dots, x_n)$, i.e.

$$\mathbf{p} = x_1\mathbf{a}_1 + \dots x_n\mathbf{a}_n. = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$\mathbf{p}$ 在 $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ 下的坐标为 $(y_1, \dots, y_n)$, i.e.

$$\mathbf{p} = y_1\mathbf{b}_1 + \dots y_n\mathbf{b}_n. = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Q: $(x_1, \dots, x_n)$ 如何确定 $(y_1, \dots, y_n)$?

过渡矩阵

记 $\vec{b}_i = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$

$(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n) = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

过渡矩阵 A.

$\vec{P} = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$(\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n) \cdot x = (\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n) \cdot Ay$

$\Updownarrow$

$(\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n) \cdot (x - Ay) = 0$

$\{a_i\}$线无 $\Longrightarrow x - Ay = 0$

$\Leftrightarrow x = Ay$

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 & = a_{1,1}\mathbf{a}_1 + \dots a_{n,1}\mathbf{a}_n \\ \mathbf{b}_2 & = a_{1,2}\mathbf{a}_1 + \dots a_{n,2}\mathbf{a}_n \\ & \vdots \\ \mathbf{b}_n & = a_{1,n}\mathbf{a}_1 + \dots a_{n,n}\mathbf{a}_n \end{cases}$$

也可记

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{n,1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,n} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

或

$$\mathbf{b} = A^T \mathbf{a}.$$

过渡矩阵

$$\mathbf{p} = (y_1 \dots y_n) \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{pmatrix} = \mathbf{y}\mathbf{b}$$
$$= \mathbf{y}(A^T\mathbf{a})$$

与

$$\mathbf{p} = \mathbf{x}\mathbf{a}$$

由坐标的唯一性得 坐标变换公式 $\mathbf{x} = \mathbf{y}A^T$ 等价地 $\mathbf{x}^T = A\mathbf{y}^T$, 矩阵 A 称为由基 $\mathbf{a}$ 到基 $\mathbf{b}$ 的 过渡矩阵.

过渡矩阵可逆

记

- A 为 **a** 到 **b** 的过渡矩阵:

$$x^T = Ay^T.$$

- B 为 **b** 到 **a** 的过渡矩阵:

$$y^T = Bx^T.$$

可见, 对任意 x^T 和 y^T 有

$$\begin{cases} x^{\cancel{T}} & = (AB)x^{\cancel{T}} \\ y^{\cancel{T}} & = (BA)y^{\cancel{T}} \end{cases}$$

得

$$AB = E = BA,$$

即

坐标变换公式

我们称

$$x^T = Ay^T$$

或者

$$\begin{cases} x_1 & = a_{1,1}y_1 + \cdots + a_{1,n}y_n \\ & \vdots \\ x_n & = a_{n,1}y_1 + \cdots + a_{n,n}y_n \end{cases}$$

为从基 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \ldots, \beta_n$ 的 坐标变换公式.

定理 4.1

定理 4.1

记基 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\ldots,\beta_n$ 的过渡矩阵. 那么 A 可逆. 对于任一向量 α, 记其在这两组基下的坐标为 $x=(x_1,\ldots,x_n)$ 和 $y=(y_1,\ldots,y_n)$. 那么

$$x^T = Ay^T$$

以及

$$y^T = A^{-1}x^T.$$

$$\beta_i = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\begin{pmatrix}a_{1i}\\ \vdots \\ a_{ni}\end{pmatrix} = \alpha\cdot\vec{a_i}$$

$$\begin{aligned}(\beta_1,\ldots,\beta_n) &= (\alpha\cdot\vec{a_1},\ldots\ldots,\alpha\cdot\vec{a_n}) \\ &= \alpha\cdot(\vec{a_1},\ldots\ldots,\vec{a_n}) \\ &= (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix} = (\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)\end{aligned}$$

$$(\beta_1,\ldots,\beta_n) \overset{?}{=} (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\cdot A \quad (A=?)$$

$$\vec{p} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = (\beta_1,\ldots,\beta_n)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix}$$

$$(\beta_1,\ldots,\beta_n)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix} = (\alpha_1\ldots\alpha_n)\cdot A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = A\cdot\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$$

例题 4.2

例题 4.2

取 $\mathbb{R}^3$ 中的一组基

- $\alpha_1 = (-2, 1, 3)$
- $\alpha_2 = (-1, 0, 1)$
- $\alpha_3 = (-2, -5, -1)$

求向量 $\alpha = (-2, -5, -1)$ 的坐标.

例题 4.2 解

直接解

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

例题 4.2 解

利用过渡矩阵

$$\vec{\alpha} = k_1\vec{\alpha_1} + k_2\vec{\alpha_2} + k_3\vec{\alpha_3} = (\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, \vec{\alpha_3})\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$$

$$= 4\vec{e_1} + 12\vec{e_2} + 6\vec{e_3} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})\begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, \vec{\alpha_3}) = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

例题 4.3

例题 4.3

求从基 $\alpha_1 = (-3, 1, -2)$, $\alpha_2 = (1, -1, 1)$, $\alpha_3 = (2, 3, -1)$ 到基 $\beta_1 = (1, 1, 1)$, $\beta_2 = (1, 2, 3)$, $\beta_3 = (2, 0, 1)$ 的过渡矩阵.