例题

例题 (斜边大于直角边)

求证: 任给一对正交的向量 **a**, **b**, 则

$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$$\|\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}\| \geq \|\mathbf{a}\|, \qquad \lambda\in\mathbb{R}.$$

进一步地, 等号成立 $\Leftrightarrow \mathbf{b}=\mathbf{0}$.

Pf. 由 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 正交可得

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$|\vec{a}+\lambda\vec{b}|^2=(\vec{a}+\lambda\vec{b})\cdot(\vec{a}+\lambda\vec{b})$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}+2\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}+\lambda^2\vec{b}\cdot\vec{b}$

$\xlongequal{\vec{a}\cdot\vec{b}=0} |\vec{a}|^2+\lambda^2\cdot|\vec{b}|^2$

$\geq |\vec{a}|^2$

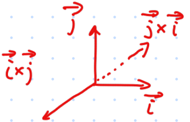
#.

定义

定义 2.2 $\times : V \times V \to V$

向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的 外积 (或 向量积) 定义为向量 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

- 方向: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 均垂直, 且 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 构成右手系
- 大小: $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$



e.g. $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$

$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$.

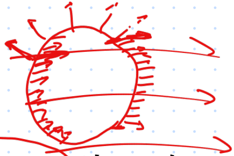
$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}$

general $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{cases} \vec{0} & 共线 \\ & 不共线 \end{cases}$

定义

易证

- $\mathbf{a}$ 或 $\mathbf{b}$ 为零向量, 则 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$
- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ iff $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 共线



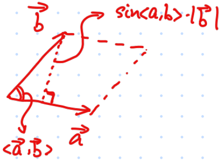
几何意义: $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ 为 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 构成的平行四边形的面积.

$\vec{a} \times \vec{b}$

area = 底 × 高

$= |\vec{a}| \cdot \sin\langle\vec{a},\vec{b}\rangle |\vec{b}|$

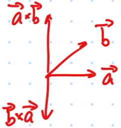
$= |\vec{a} \times \vec{b}|$

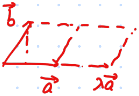


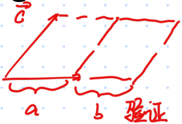
性质

性质 2.2

- $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$
- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
- $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ $\begin{cases} \lambda > 0 & \text{同向} \\ \lambda < 0 & \text{反向} \end{cases}$
- $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$







Q: 结合律呢?

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

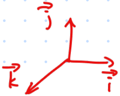
验证 $\vec{a}=\vec{i}, \vec{b}=\vec{j}, \vec{c}=\vec{j}$ 则 $LHS = (\vec{i}\times\vec{j})\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{j} = -\vec{i}$

$RHS = \vec{i}\times(\vec{j}\times\vec{j}) = \vec{i}\times\vec{0} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ 结合律不成立

$\vec{a}=\vec{i}, \vec{b}=\vec{j}, \vec{c}=\vec{k}$

$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{i}\times\vec{j})\times\vec{k} = \vec{k}\times\vec{k} = \vec{0}$



$\vec{a}=\vec{i}, \vec{b}=\vec{j}, \vec{c}=\vec{i}$

$LHS = (\vec{i}\times\vec{j})\times\vec{i} = \vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$

$RHS = \vec{i}\times(\vec{j}\times\vec{i}) = \vec{i}\times(-\vec{k}) = \vec{j}$

基本向量的外积

回顾 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 为 x, y, z 轴的单位向量.
由右手系可得

- $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = -\mathbf{j} \times \mathbf{i} = \mathbf{k}$
- $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = -\mathbf{k} \times \mathbf{j} = \mathbf{i}$
- $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = -\mathbf{i} \times \mathbf{k} = \mathbf{j}$
- $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$

外积的行列式形式

记 $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$ 计算

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \; & (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) \\ & \times (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) \\ = \; & \underline{c_x\mathbf{i}} + c_y\mathbf{j} + c_z\mathbf{k}\end{aligned}$$

$a_y b_z \cdot \vec{j}\times\vec{k} + a_z b_y \vec{k}\times\vec{j}$

$= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{j}\times\vec{k}$

可以记为

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

$$= \underbrace{C_{11}}_{\vec{i}}\cdot\underbrace{|C_{11}|}_{a_y b_z - a_z b_y} + C_{12}\cdot|C_{12}| + C_{13}\cdot|C_{13}|$$

例题 2.1

例题 2.1

设

- $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
- $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

求

- $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$
- $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 构成的平行四边形的面积

解: $\vec{a} = (-1, 1, 1)$

$\vec{b} = (2, -1, 1)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$$

平行四边形 $= |\vec{a} \times \vec{b}|$

$= |(2, 3, -1)|$

$= \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{14}$

#

例题

例题

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2.$$

$$\| $$

$$\left(|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\right)^2$$

$$= (|\vec{a}||\vec{b}|)^2(1-\cos^2\langle\vec{a},\vec{b}\rangle)$$

$$|a|^2|b|^2 \quad - \quad (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$$

例题

例题 (Jacobi 等式)

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0.$$

idea. $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$.

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = a_x(\vec{i} \times (\vec{b} \times \vec{c})) + a_y(\vec{j} \times (\vec{b} \times \vec{c})) + a_z(\vec{k} \times (\vec{b} \times \vec{c}))$

$\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) = a_x(\ldots) + a_y(\ldots) + a_z(\ldots)$

$- - - -$

$a_x \boxed{\{ i \times (\vec{b} \times \vec{c}) + b \times (c \times i) + c \times (i \times b) \}}$

$+ a_y \{ \ldots \}$

$+ a_z \{ \ldots \} = 0$

$(a, b, c) = (i, i, i), (i, i, j), (i, i, k)$

$(i, j, i \ldots)$

$3^3 = 27$

实际上. $(i, i, i), (i, i, j), (i, j, k)$

定义

定义 2.3

混合=内积，复合外积。

向量 a, b, c 的 混合积 是一个数

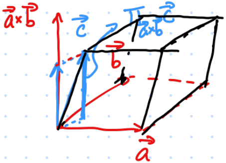
$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) := (\underbrace{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}_{\text{外积}}) \underbrace{\cdot}_{\text{内积}} \mathbf{c}.$$

$$(\cdot,\cdot,\cdot): V \times V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(a,b,c) \longmapsto (a\times b)\cdot c$$

几何意义: 混合积 = 定向体积

考虑 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 张成的平行六面体的体积.

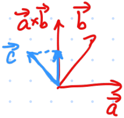
- 体积 (定向体积的大小)

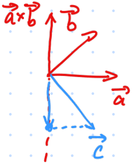


$$
\begin{aligned}
\text{体积} &= \text{底} \cdot \text{高} \\
&= |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cdot \Pi_{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}\mathbf{c} \\
&= |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|.
\end{aligned}
$$

- 定向 (定向体积的正负 vs 右左手系)

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 构成右手系





代数意义: 混合积 = 行列式

通过对 **a**, **b**, **c** 的代数分解式, 我们可得

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

$$A = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$$

$$= (|A_{11}|\cdot\vec{i} + |A_{12}|\vec{j} + |A_{13}|\vec{k})$$

$$\cdot (c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\cdot\vec{k})$$

$$= c_x|A_{11}| + c_y|A_{12}| + c_z|A_{13}|$$

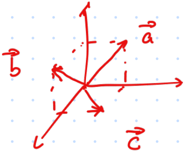
$$= \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

应用：求体积

例题 2.2

设

- $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$
- $\mathbf{b} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$
- $\mathbf{c} = \mathbf{k} + \mathbf{i}$



求 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 构成的平行六面体的体积

$$V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$$

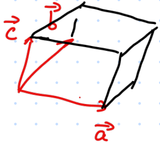
$\vec{a} = (1,1,0)$

$\vec{b} = (0,1,1)$

$\vec{c} = (1,0,1)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \\ 1 & & 1 \end{vmatrix}$$

应用：判断共面



$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\vec{0}$

$\Leftrightarrow$ 平行六面体体积为0

$\Leftrightarrow \begin{cases} 底=0 \Rightarrow \vec{a},\vec{b}共线 \\ \qquad\qquad \Downarrow \\ 高=0 \Rightarrow \vec{c}在\vec{a},\vec{b}所在平面. \end{cases}$

$\Updownarrow$

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面.

例题 2.2

求 k 的值使得四个点 $P(2,0,1)$, $A(1,2,3)$, $B(2,3,1)$, $C(3,1,k)$ 共面?

解：P, A, B, C 共面

$\Leftrightarrow \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}$ 共面

$\overrightarrow{PA}=(-1,2,2)$, $\overrightarrow{PB}=(0,3,0)$, $\overrightarrow{PC}=(1,1,k-1)$

$\Leftrightarrow |(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC})|$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ & 3 & \\ 1 & 1 & k-1 \end{vmatrix} = 0$$

$k = \ldots$

Outline

法向量

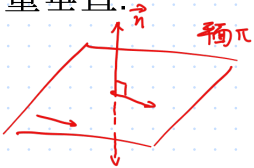
平面 $\subseteq \mathbb{R}^3$

normal vector

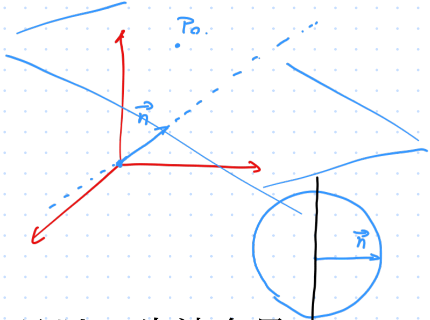
定义 (法向量)

对于一个平面, 一个非零向量称为该平面的 法向量 如果它与平面垂直.

- 法向量与平面上的任意向量垂直.
- 一般用 **n** 记法向量



点法确定平面



点法确定平面

给定

- 一个点 P_0
- 一个非零向量 $\mathbf{n}$

存在唯一一个曲面过 P_0 且以 $\mathbf{n}$ 为法向量

记平面 π 过 P_0 & 法向量为 $\vec{n}$

对 $\forall P \in \pi$，由法向量的定义得

$$\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n}$$

$$\iff \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$$

记 $P = (P_x, P_y, P_z)$

$\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\iff \left[(P_x - P_x^0)\vec{i} + (P_y - P_y^0)\vec{j} + (P_z - P_z^0)\vec{k}\right] \cdot (n_x\vec{i} + n_y\vec{j} + n_z\vec{k}) = 0$$

$$\iff (P_x - P_x^0)\cdot n_x + (P_y - P_y^0)\cdot n_y + (P_z - P_z^0)\cdot n_z = 0.$$

点法式方程

给定

- 一个点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$
- 一个非零向量 $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$

记 P_0 与 $\mathbf{n}$ 所确定的平面 π 为 $\{P(x, y, z)\}$, 可得

$$
\begin{aligned}
& P(x, y, z) \text{ 在 } \pi \text{ 上} \\
\Leftrightarrow & \overrightarrow{P_0P} \perp \mathbf{n} \\
\Leftrightarrow & \overrightarrow{P_0P} \cdot \mathbf{n} = 0 \\
\Leftrightarrow & A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0
\end{aligned}
$$

平面$\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y,z)$ 满足点法式方程$\}$

最后一个方程称为平面 π 的 点法式方程.

例题 3.1

例题 3.1

如果平面 π

- 过 $P_0(x_0, y_0, z_0)$
- 平行于不共线的向量 $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$

求平面 π 的方程.

利用点法式方程.

可需知道法向量 $\vec{n}$.

$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$

方程 $\overrightarrow{PP_0} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$

解

对 $P \in \pi$, 有 $\overrightarrow{P_0P}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 共面.

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{PP_0}, \vec{a}, \vec{b}) = 0$