Outline

Sec 1.0 引言

Sec 1.1 2 阶与 3 阶行列式

Sec 1.2 n 阶排列

Sec 1.3 n 阶行列式的定义

Sec 1.4 n 阶行列式的性质及计算

Sec 1.5 行列式按一行展开及克拉默法则

n 阶排列

定义 2.1 (n 阶排列)

一个 n 阶排列 是一个由自然数 $1, \ldots, n$ 组成的一个 n 元有序数组 $i_1, i_2, \ldots, i_n$.

- 自然排序: $1, 2, \ldots, n$
- 所有 n 阶排列的总数为 $n! = n \cdot (n-1) \ldots 2 \cdot 1$

排列作为一个双射

单: $\forall x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

满: $\forall y\ \exists x$ s.t. $f(x) = y$

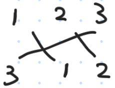
- ▶ 排序可以看作一个双射

$$p:\{1,\ldots,n\}\to\{1,\ldots,n\}$$
$$j\mapsto i_j.$$

2 3 1

- ▶ 也看理解

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{array}$$



逆序

2, 3, 1

(2, 1) (3, 1)

定义 2.2 (逆序)

- 排序 $i_1, \ldots, i_n$ 中的一个 逆序 (inversion) 是排序中的一对数字 i_j, i_k 如果 $i_j > i_k$.
  - 该排列的 逆序数 是其逆序的总数, 记为 $\tau(i_1, \ldots, i_n)$
  - 一个排列称为 奇的 (odd) 如果它的逆序数为奇的, 否则称为 偶的 (even).

逆序数的计算方法

求 $\tau(5,7,8,6,4,3,1,2)$.
不妨记 τ_i 为数字 i 与它前面的数所构成的逆序.

τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6	τ_7	τ_8
6	6	5	4	0	2	0	0

那么逆序数的定义可知

$$\tau(i_1,\ldots,i_n)=\sum_{i=1}^{n}\tau_i.$$

Q: 其他计算方法?

逆序数的其他计算方法

从逆序数的定义可知，我们只需找到一种方法，取遍所有数对，并保证仅取一遍即可.
例如，记 τ_i' 为第 i 个数字与它后面的数字所构成的逆序.
仍以 $\tau(5,7,8,6,\underline{4,3,1,2})$ 为例

τ_i'' ith 前后 ... 逆序

$\sum_i \tau_i'' = 2\cdot\tau.$

习题 5

习题 5

假定 $\tau(i_1, \ldots, i_n) = m$, 那么 $\tau(i_n, i_{n-1}, \ldots, i_2, i_1)$ 等于多少?

提示

逆序数的定义需要取遍所有数字对, 每对数字只有顺逆两种情况.

习题 5 解

习题 5 解

记 I 为 $i_1, \ldots, i_n$, I' 为 $i_n, \ldots, i_1$. 对于 $1 \leq k < l \leq n$, 定义

$$\tau_I(k,l) := \begin{cases} 0, & \text{在 } I \text{ 中, } k \text{ 在 } l \text{ 前面} \\ 1, & \text{否则} \end{cases}$$

则逆序数 $\tau(I) := \sum_{1 \leq k < l \leq n} \tau_I(k,l)$. 由于 $\tau_I(k,l) + \tau_{I'}(k,l) = 1$, 所以

$$\tau(I) + \tau(I') = C_n^2.$$

对换

定义 2.3 (对换)

一个 对换 (i, j) 是排列上的一个操作: 仅交换第 i 个数和第 j 个数的位置.

- 对换也可看作一个排序

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ 1 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \\ & & i & & j & & \end{array}$$

- 如果 i, j 相邻, 那么称 (i, j) 为 相邻对换, 否则称为 一般对换.

定理 2.1

定理 2.1 (对换改奇偶)

对换改变排列的奇偶性.

证明

记 (i, j) 为排列 $i_1, \ldots, i_n$ 的一个对换.
先考虑 (i, j) 为相邻对换的情况
(待续)

$\cdots\cdots, i, j, \cdots\cdots$

$\cdots\cdots, j, i, \cdots\cdots$

定理 2.1 证明

证明 (续)

当 (i,j) 为一般对换时, 记 s 为排列中 i 与 j 之间数字的个数. 不妨记排列为

j : s+1

i : s

$$\ldots, i, k_1, \ldots, k_s, j, \ldots.$$

j, k1, . . ks, i

我们希望将一般对换 (i,j) 分解为相邻对换, 并算出这些相邻对换个数. (冒泡法)

定理 2.1 推论

推论 2.1

奇数次对换改变排列奇偶性, 偶数次则不变.

推论 2.2

对 $n \geq 2$, n 阶排列中的奇偶排列数相等 (即为 $\frac{n!}{2}$).

证明

通过任一对换 (i, j), 所有奇排列均变为偶, 偶排列均变为奇.

$\{奇排列\} \xrightarrow{(i,j)} \{偶排列\}$

定理 2.2

定理 2.2 (排列空间是连通的)

任一 n 阶排列 $i_1, i_2, \ldots, i_n$ 均可通过有限次对换化为自然排列 $1, 2, \ldots, n$, 对换的次数与排列的奇偶性相同.

Outline

定义

参考 2 阶与 3 阶行列式, 我们定义:

定义 3.1 (n 阶行列式)

n 阶行列式 det(A) (也记作 det$(a_{i,j})$, $|a_{i,j}|$) 定义为

1 2 3 4

$$\sum_{j_1,\dots,j_n} (-1)^{\tau(j_1,\dots,j_n)} a_{1,j_1} \cdots a_{1,j_n}.$$

取遍所有的 n 阶排列 $j_1,\dots,j_n$

Q: 行列式的按列展开?

行	1	2	3	4
列	2	4	1	3

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{matrix}$$

行列式的按列展开

$$\sum_{j_1\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1,\dots,j_n)} a_{j_1,1} \cdots a_{j_n,n}$$

例题 3.1

例题 3.1

确定 4 阶行列式 $\det(a_{i,j})$ 的展开式中乘积项 $a_{3,1}a_{1,4}a_{4,3}a_{2,2}$ 所带的符号.

$$\begin{array}{ccccc} 行 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 列 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{array}$$

1 2 4 3 T

解

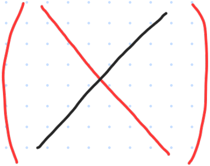
我们不妨先调整乘积项次序为 $a_{1,4}a_{2,2}a_{3,1}a_{4,3}$. 考察 $\tau(4,2,1,3)$ 的奇偶性. 能否不计算具体数值, 直接给出奇偶性?

对角线矩阵

- 主对角线：由左上角到右下角形成的斜线
- 副对角线：由右上角到左下角形成的斜线
- 对角矩阵：除了主对角线之外的元素全为零的矩阵

$a_{i,i} \quad i=1,\ldots,n$

$a_{i,n-i+1}$



$$\mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

例题 3.2

例题 3.2

计算以下矩阵的行列式

已知 $\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n \end{vmatrix} = n!$

想把 A 通过对换化为 $\mathrm{diag}(1, \dots, n)$

$|A| = (-1)^{n-1} \cdot |\mathrm{diag}(1, \dots, n)|$

$= (-1)^{n-1} \cdot n!$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$C_1 \leftrightarrow C_2$ $\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & & \\ \hline & & \begin{matrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & \ddots \; n-1 \end{matrix} \\ & n & \end{array}\right)$

$C_2 \leftrightarrow C_3$ $\left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & & & \\ & 2 & & \\ \hline & & & \begin{matrix} 3 & & \\ & \ddots & \\ & & n-1 \end{matrix} \\ & & n & \end{array}\right)$

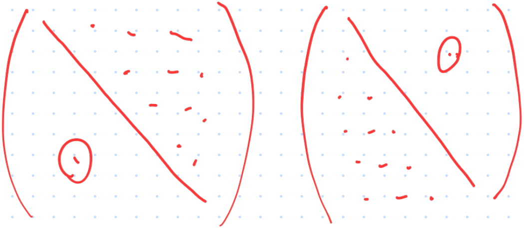
例题 3.2 解

行列式仅含一个非零项 $a_{1,2}, a_{2,3}, \ldots, a_{n-1,n}, a_{n,1}$.
由 $\tau(2,3,\ldots,n,1) = n-1$ 得,

$$D = -1^{\tau(2,3,\ldots,n,1)} \prod_{i=1}^{n-1} a_{i,i+1} \cdot a_{n,1}$$
$$= (-1)^{n-1} \cdot n!$$

三角矩阵

- 上三角矩阵：主对角下方的元素全为零
- 下三角矩阵：…… 上方 ……



Q: 下三角矩阵的行列式 = ?

例题 3.3

例题 3.3

计算上三角矩阵的行列式

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

例题 3.3 解

例题 3.2 解

要证行列式只含有 $a_{1,1} \ldots a_{n,n}$ 项.

例题

计算副对角线以下为零的矩阵的行列式.

提示：① $\tau(i_1,\dots,i_n)+\tau(i_n,\dots,i_1)=C_n^2$

② 下三角的行列式 = ?

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \\ \vdots & & & 0 \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

奇排列 $\xrightarrow{(i,j)}$ 偶排列

单

取 $(i,j)=(1,2)$

$1,2,3$ 偶排列

$\exists!$ 奇排列 $(2,1,3)$

s.t. $(1,2)(\cdots)=1,2,3$

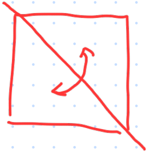
$$(1,2)(a_1,a_2,a_3)=(1,2,3)$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{ccc} a_2, & a_1, & a_3 \\ \| & \| & \| \\ 1 & 2 & 3 \end{array}$$

Outline

转置矩阵



定义 (转置矩阵)

矩阵 $A = [a_{i,j}]$ 的 转置 (transpose) A^T 是这样一个矩阵, 它的第 i 行第 j 列元素是 $a_{j,i}$.

- A 是 $m \times n$ 矩阵, 那么 A^T 是 $n \times m$ 矩阵

定义 (转置行列式)

若 $D = |A|$, 则记 $D^T = |A^T|$ 为 D 的 转置行列式.

转置行列式

性质 4.1 (转置保持行列式不变)

对于任意方阵 A, 有

$$\det(A^T) = \det(A).$$

转置行列式证明

证明

设 $b_{i,j} = a_{j,i}$, 则

$$
\begin{aligned}
|A^T| &= |B| \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_n} (-1)^{\tau(i_1,\ldots,i_n)} b_{i_1,1} \ldots b_{i_n,n} \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_n} (-1)^{\tau(i_1,\ldots,i_n)} a_{1,i_1} \ldots b_{n,i_n} \\
&= |A|.
\end{aligned}
$$

行列式退化 1

性质 4.2

如果矩阵存在一行或者一列的元素全为零, 那么该矩阵的行列式为零

证明

行列式中的任一乘积项均含有 0.

对换奇偶与行列式符号

性质 4.3

如果矩阵 B 是通过矩阵 A 对换行或者列所得, 那么

$= \sum (-1)^{\tau(i_1,\dots,i_n)} b_{1i_1}\cdots b_{ni_n}$

$$\det(B) = -\det(A).$$

证明

对换改变排序奇偶性.

推论

奇数次行 (列) 对换改变行列式符号.

行列式退化 2

推论 4.1

如果矩阵含有两行 (列) 相同, 那么其行列式为零.

证明

对换相同的两行, 并由性质 4.3 可得.

行列式是线性的 1

回顾: 对 $n \geq 1$, 一个映射 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 称为线性的, 如果它满足:

- 可加性: $f(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) = f(x_1, \ldots, x_n) + f(y_1, \ldots, y_n)$
- 齐次性: $f(kx_1, \ldots, kx_n) = kf(x_1, \ldots, x_n)$

对于 $m \times n$ 矩阵 $A = [a_{i,j}]$, 我们将某行替换为 n 个变量 $x_1, \ldots, x_n$ 得到新的矩阵 $A(x_1, \ldots, x_n)$, 那么新的矩阵的行列式可以看作一个 n 元映射

$$f(x_1, \ldots, x_n) := \det(A(x_1, \ldots, x_n)).$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = A(x_1, \ldots, x_n)$$

$(n-1)\times n$ 常

n 变

$\det(A(x_1, \ldots, x_n))$

行列性是线性的 2

性质 4.4 (行列式是线性的)

上述函数 $\det(A(x_1, \dots, x_n))$ 是关于 $x_1, \dots, x_n$ 是线性的, 即

$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \det A(x_1, \dots, x_n)$
$= f(x_1, \dots, x_n)$

可加性:

$$\begin{aligned} &\det(A(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)) \\ &= \det(A(x_1, \dots, x_n)) + \det(A(y_1, \dots, y_n)) \end{aligned}$$

齐次性:

$$\det(A(kx_1, \dots, kx_n)) = k \cdot \det(A(x_1, \dots, x_n)).$$

行列式退化 3

推论 4.2

如果矩阵存在两行 (列) 成比例, 那么行列式为零.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 0$$

初等变换保持行列式

- 初等变换

[推论 4.3]

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} \\ a & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_1+ka_{i,1} & \cdots & x_n+ka_{i,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \end{pmatrix}$$

$$\det(A(x_1+ka_{i,1},\ldots,x_n+ka_{i,n})) = \det(A(x_1,\ldots,x_n)).$$

例题 4.1

例题 4.1

计算行列式

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & \frac{1}{2} & 0 & -3 \\ 1 & \frac{1}{6} & 2 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 12 & 2 \end{pmatrix}$$

作业

4 (1)

6 (3)

8

$$-\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$