Outline

4.0 引言

4.1 消元法

4.2 n 维向量空间

4.3 向量组的线性相关性

4.4 $\mathbb{R}^n$ 的基, 向量在基下的坐标

4.5 向量组的秩

向量组 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$

线性相关

$\exists$ 不全为零 $k_1,\dots,k_n$

s.t. $k_1\alpha_1+\dots+k_n\alpha_n=0$

几何: $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ 落在某一个 $(n-1)$ 维线性子空间.

代数: 齐次方程组

$$A\cdot k = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}=0$$

有非零解.

$|A|=0 \Leftrightarrow$ 解不唯一 $\Leftarrow$

$\mathrm{rank}(A)<n \Leftrightarrow$

e.g. $\mathbb{R}^n$ 中标准向量 $\{e_i\}$

$$\begin{pmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{pmatrix}$$

线性无关

$k_1\alpha_1+\dots+k_n\alpha_n=0$

只有零解.

最大

基 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$

- 不大: … 线性无关
- 不小: $\forall\alpha$ 能被 $\{\alpha_i\}$ 线性表示

坐标

$$\vec{p} = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = x_1\alpha_1+\dots+x_n\alpha_n$$

不同基

不同坐标

坐标变换

$$= (\beta_1,\dots,\beta_n)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

$$\beta_j = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)\begin{pmatrix}a_{1j}\\ \vdots\\ a_{nj}\end{pmatrix}$$

$$(\beta_1,\dots,\beta_n) = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

过渡矩阵 β α

$$\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

极大线性无关组

$(S, \leq)$

a 在 $(S, \leq)$ 极大 if $\nexists\, b \in S$ s.t. $a < b$

$\Leftrightarrow a \leq b \Rightarrow a = b$.

定义 5.1 (极大线性无关组)

我们称向量组中的一个线性无关的子向量组是 极大的, 如果不存在真包含这个子向量组的线性无关向量组.

$(\{$向量组中线性无关子集$\}; \subseteq)$

例如 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ 是 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}(m \leq n)$ 的一个极大线性无关组, 那么再添加一个向量 α', 有

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha'\}$$

必然线性相关.

$\mathrm{rank}(A) = \max\limits_{k} \{k \mid \exists\ k$阶子式 $\neq 0\}$

极大线性无关组的意义

定理 5.1

任意向量组都等价与它里面的一个极大线性无关组.

Pf. 向量组 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$

极大线性无关 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ $(m \le n)$.

① $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ 可被 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ 线表.

② $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ 可被 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ 线表

反证. $\exists\, \alpha' \in \{\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n\}$

s.t. α' 不能被 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ 线表

$\Rightarrow \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha'\}$ 线性无关

$+ \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha'\} \supsetneq \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$

$\Rightarrow$ 与 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ 极大线无. 矛盾. #

$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ 可被 $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ 线性表示

$\Leftrightarrow$ "$\{\alpha_i\}$张成线性子空间" $\subseteq$ "$\{\beta_j\}$ ……"

$\{\alpha \mid \alpha = k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m,\ k_1, \ldots, k_m \in F\}$.

(要证 $\alpha_i = (\beta_1, \ldots, \beta_n)\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix}$

$= (\beta_1, \ldots, \beta_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \alpha \in$ "$\{\beta\}$张成 …" …)

$\{\alpha\} \sim \{\beta\}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \{\alpha\}\text{可被}\{\beta\}\text{线表} \Leftrightarrow \mathrm{span}\{\alpha\} \subseteq \mathrm{span}\{\beta\} \\ \{\beta\} \cdots \{\alpha\} \cdots \Leftrightarrow \cdots \supseteq \cdots \end{cases} \Leftrightarrow \mathrm{span}\{\alpha\} = \mathrm{span}\{\beta\}$

线性无关与秩

定理 5.2

考虑向量组 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ 可被 $\{\beta_1, \ldots, \beta_s\}$ 线性表出. 如果 $r > s$, 那么 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ 线性相关.

Pf: $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ 线性相关

$\Leftrightarrow (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_r \end{pmatrix} = 0$ 有非零解

由 $\alpha_i = (\beta_1, \ldots, \beta_s)\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{si} \end{pmatrix}$

得 $(\beta_1, \ldots, \beta_s)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sr} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_r \end{pmatrix} = 0$

由 未知数个数 $r >$ 方程数 s

得 存在 非零解 $(k_1, \ldots, k_r)$ …… #

$\{\alpha\}$ 可被 $\{\beta\}$ 线表

$\Leftrightarrow \operatorname{span}\{\alpha\} \subseteq \operatorname{span}\{\beta\}$

$\Rightarrow \dim \operatorname{span}\{\alpha\} \leq \dim \operatorname{span}\{\beta\} \leq s < r$.

推论 5.1 & 5.2

定理 5.2 的逆否命题: $r>s \Rightarrow \{\alpha\}$ 线性相关 $\Leftarrow$

推论 5.1

考虑向量组 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ 可被 $\{\beta_1, \ldots, \beta_s\}$ 线性表出. 如果 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ 线性无关, 那么 $r \leq s$.

推论 5.2

在 $\mathbb{R}^n$ 中, $m > n$ 个向量必然线性相关.

$\{\beta_1, \ldots, \beta_n\} = \{e_1, \ldots, e_n\}$

向量组的秩

向量组的“秩”不依赖于极大线性无关组的选取:

推论 5.3

一个向量组的极大线性无关组都含有相同数量的向量.

Pf: $\{\alpha\}$ 与 $\{\beta\}$ 是某向量组极大线性无关组.

- $\{\alpha\}$ 可被 $\{\beta\}$ 线表.

  $+ \{\alpha\}$ 线无 $\Rightarrow \#\{\alpha\} \le \#\{\beta\}$

- - - - - - - $\geq$

向量组的秩

定义 5.2

一个向量组的 秩 是指它的极大线性无关组所含向量的个数.

git clone - - -

推论 5.4

等价~~矩阵~~具有相等的秩.

向量组.

(类 Cor 5.3)

行秩 & 列秩

定义

对矩阵

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n}\\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n}\end{pmatrix}; \quad =: (\beta_1,\ldots,\beta_n)$$

记

$$\alpha_i = (a_{i,1}, \ldots, a_{i,n}), \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$\beta_j = (b_{1,j}, \ldots, b_{m,j})^T, \qquad j = 1, \ldots, n$$

分别称 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ 与 $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ 为 A 的 行向量 与 列向量. 分别称 m 和 n 为 A 的 行秩 和 列秩.

例题 5.1

例题 5.1

求下列矩阵的行秩和列秩

$$\begin{array}{c} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

行秩 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关 极大

$\Rightarrow$ 行秩 $= 3$

列秩 $\beta_1, \beta_2, \beta_4$ 线无 极大

$\Rightarrow$ 列秩 $= 3$

定理 5.3

定理 5.3

行秩 = 秩 = 列秩

仅考虑 “行秩 = 秩” (Why?) $\text{rank}(A^T) = \text{rank}(A)$

$\Rightarrow$ A的列秩 = A^T的行秩 = A^T秩 = A秩.

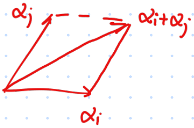
仅需证明初等行变换也不改变行秩: 变换前后的向量组等价.

验证：初等行变换保持行向量组秩

① 行交换： ✓

② 数乘行： $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \xrightarrow{k\neq 0} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ k\alpha_i \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ ✓

③ 行加行： $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \alpha_j \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \xrightarrow{r_i + r_j} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_i+\alpha_j \\ \alpha_j \\ \alpha_n \end{pmatrix}$



定理 5.4

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix} = (\gamma_1, \dots, \gamma_s) = C$$

$$= (\alpha_1, \dots, \alpha_n)\left(\left(\vdots\right)\cdots\left(\ \right)\right)$$

$$\gamma_1 = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)\left(\vdots\right)$$

定理 5.4

设 A, B 分别为 $m \times n$, $n \times s$ 矩阵, 则

$$r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}.$$

$C = A\cdot B$
$(\gamma_1, \dots, \gamma_s)$ $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$
$\Updownarrow$
$\{\gamma \dots\}$ 可被 $\{\alpha \dots\}$ 线性表示
(i.e. B 作为"坐标")

仅证 $r(\overset{C}{AB}) \leq r(A)$. 记 $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $AB = (\gamma_1, \dots, \gamma_s)$, 则

$$\gamma_j = \alpha_1 b_{1,j} + \cdots + \alpha_n b_{n,j}.$$

可见 $\{\gamma_j\}$ 可被 $\{\alpha_i\}$ 线性表示. 所以

$$r(AB) \leq r(A).$$

$C = A\cdot B$
$\{\gamma..\}$ 可被 $\{\alpha..\}$ 线表
$\Leftrightarrow \operatorname{span}\{\gamma..\} \subseteq \operatorname{span}\{\alpha..\}$
$\Rightarrow \dim \operatorname{span}\{\gamma..\} \leq \dim \operatorname{span}\{\alpha..\}$
$= \operatorname{rank}\{\gamma..\} = \operatorname{rank}(C)$; $= \operatorname{rank}\{\alpha..\} = \operatorname{rank}(A)$

推论 5.5 & 5.6

推论 5.5

$$r(A_1 \dots A_t) \leq \min_{i=1,\dots,t} r(A_i).$$

例题 5.6

设 A 为 $m \times n$ 矩阵. 如果 P 和 Q 分别为 $m \times m$ 和 $n \times n$ 的可逆矩阵, 那么任意向量的坐标是唯一确定

$PA = A$ $A = P^{-1}A$

$$r(PA) = r(A) = r(AQ).$$

Outline

回顾

考虑 A 的列向量 α_j, i.e.

$$A = (\alpha_1 \ldots, \alpha_n).$$

那么方程组 $Ax = b$ 可以记为

$$(\alpha_1 \ldots, \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

i.e.

$$x_1\alpha_1 + \ldots x_n\alpha_n = \mathbf{b}.$$

定理 6.1

定理 6.1

方程 $Ax = b$ 有解, 当且仅当, 向量 b 可由 $\alpha_1, \ldots,$ α_n 线性表示.

分情况: b 是否为 0?

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b.$$

齐次方程的解

$(V;+,\cdot)$

向量空间: 封闭, 单位元, 逆元, 律

性质 6.1 & 6.2

齐次方程组 $Ax=0$ 的解集

kernel

$$\mathrm{Ker}(A) := \{x \mid Ax=0\}$$

关于加法和数乘封闭:

- $x_1+x_2 \in \mathrm{Ker}(A)$ if $x_1, x_2 \in \mathrm{Ker}(A)$
- $kx \in \mathrm{Ker}(A)$ if $k \in F$ and $x \in \mathrm{Ker}(A)$

可见, 解集 $\mathrm{Ker}(A)$ 是一个向量空间.

基础解系

由上述性质 6.1 & 6.2 可知, 如果解集 Ker(A) 包含一个非零元 $x \neq 0$, 那么它含有无限个非零元 kx $(k \in F)$.

Q: Ker(A) 是否有限维? 存在有限 $x_1, \ldots, x_n$, s.t.

$$\text{Ker}(A) := \{k_1 x_1 + \ldots k_n x_n\}.$$

$Ax=0$ 解集 Ker(A) $\longleftrightarrow$ 过零点的线性子空间

基础解系 $\longleftrightarrow$ 极大线性无关组

基础解析

定义 6.1

称 $Ax = 0$ 的解 $\eta_1, \ldots, \eta_m$ 为该方程组的一个 **基础解系**, 如果

- (线性无关) $\eta_1, \ldots, \eta_m$ 线性无关
- (极大) 任一解都可由 $\eta_1, \ldots, \eta_m$ 线性表示

齐次方程的一个基础解系, 其实就是解集 $\mathrm{Ker}(A)$ 的一个极大线性无关组.

定理 6.2

定理 6.2

若 $Ax = 0$ 有非零解, 则

- 方程组有基础解系
- 基础解系所含解的个数为 $n - r(A)$

$Ax = 0$

阶梯化

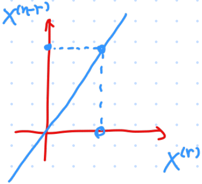
行交换

$$\leadsto \begin{pmatrix} A^{(r\times r)} & A^{(r\times(n-r))} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{(r)} \\ X^{(n-r)} \end{pmatrix} = 0$$

$$A^{(r\times r)} \cdot X^{(r)} + A^{(r\times(n-r))} \cdot X^{(n-r)} = 0$$

$$A^{(r\times r)} \cdot X^{(r)} = -A^{(r\times(n-r))} \cdot X^{(n-r)}$$

$$X^{(r)} = \left(A^{(r\times r)}\right)^{-1}\left(-A^{(r\times(n-r))} \cdot X^{(n-r)}\right)$$



定理 6.2 证明

仅考虑阶梯化后的 A, 那么 $Ax = 0$ 可写为

$$(A^{(r\times r)} A^{(r\times(n-r))}) \begin{pmatrix} X^{(r)} \\ x^{(n-r)} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

或

$$A^{(r\times r)} X^{(r)} = -A^{(r\times(n-r))} X^{(n-r)},$$

其中 $X^{(n-r)}$ 是 $(n-r$ 个$)$ 自由未知量. 对 $i = 1, \ldots, n-r$, 记

- $e_i^{(n-r)}$ 为 $\mathbb{R}^{n-r}$ 的第 i 个单位向量.
- $e_i^{(r)} := -(A^{(r\times r)})^{-1}(A^{r\times(n-r)} e_i^{(n-r)})$.
- $\eta_i = \begin{pmatrix} e_i^{(r)} \\ e_i^{(n-r)} \end{pmatrix}$

定理 6.2 证明

要证 $\eta_1, \ldots, \eta_{n-r}$ 为 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 仅需证

- 线性相关: 由 $\{e_i^{(n-r)}\}$ 的线性无关可得
- 极大:

对于任意一个解 $\eta = (c_1, \ldots, c_n)$, 要证

$$\eta = c_1\eta_1 + \cdots + c_{n-r}\eta_{n-r}.$$

记 $\eta = (\eta^{(r)}, \eta^{(n-r)})^T$. 显然 $\eta^{(n-r)} = c_1 e_1^{(n-r)} + \ldots c_{n-r} e_{n-r}^{(n-r)}$, 剩下证

$$\eta^{(r)} = c_1 e_1^{(r)} + \ldots c_{n-r} e_{n-r}^{(r)}.$$

验证左右都是以下方程的解

$$A^{(r\times r)} X^{(r)} = -A^{(r\times(n-r))}(c_1 e_1^{(n-r)} + \ldots c_{n-r} e_{n-r}^{(n-r)}).$$

求基础解系过程

上述给出了基础解系的求法:

1. 阶梯化 $A = (A^{(r\times r)} A^{(r\times (n-r))})$
2. 取自由未知量中的一组基 $\{e_1^{(n-r)}, \ldots, e_{n-r}^{(n-r)}\}$
3. 求解 $e_i^{(r)} := -(A^{(r\times r)})^{-1}(A^{r\times (n-r)} e_i^{(n-r)})$
4. 组装 $\eta_i = \begin{pmatrix} e_i^{(r)} \\ e_i^{(n-r)} \end{pmatrix}$

通解

定义 6.2 (通解)

对于

- 齐次方程组的一个基础解系 $\eta_1, \ldots, \eta_{n-r}$
- 任意 $c_1, \ldots, c_{n-r}$

我们称

$$\eta = c_1\eta_1 + \ldots c_n\eta_n$$

为方程组的 通解 (或 一般解).

通解 vs 特解

性质 6.3

如果 γ_1, γ_2 为 $Ax = b$ 的解, 那么 $\gamma_1 - \gamma_2$ 为 $Ax = 0$ 的解.

性质 6.4

如果

- γ 为 $Ax = b$ 的解
- η 为 $Ax = 0$ 的解

那么 $\gamma + \eta$ 是 $Ax = b$ 的解.

定理 6.3

定理 6.3

取 $Ax = b$ 的一个解 γ_0. 方程的所有解形如

$$\gamma = \gamma_0 + \eta$$

其中 η 为方程组通解.

我们通常称 γ_0 为方程组的 特解.

定理 6.4

结合定理 6.3 与通解的 “分解”, 我们有方程组的解的线性表示:

定理 6.4

方程组 $Ax = b$ 的解有线性表示

$$\gamma = \gamma_0 + k_1\eta_1 + \dots k_{n-r}\eta_{n-r}$$

其中

- γ_0 为 $Ax = b$ 的一个特解
- $\eta_1, \dots, \eta_{n-r}$ 为 $Ax = 0$ 的一个基础解系

例题 6.1

旧题 (例题 1.2) 新解

例题 6.1

解下列增广矩阵对应的方程

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ & 1 & -1 & -1 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

例题 6.2

例题 6.2

解下列增广矩阵对应的方程

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$