转置保持特征值

性质 1.1

对于 $n \times n$ 矩阵 A 与其转置 A^T 有相同的特征值.

性质 1.2

设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 记它的 n 个特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, 我们有

- A 的迹 $\mathrm{tr}(A)$ 等于 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$
- A 的行列式 $|A|$ 等于 $\lambda_1 \dots \lambda_n$

Q: 特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 的存在性?

性质 1.2 证明

一方面, 由于 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 为 $f(\lambda)$ 的根, 所以

$$
\begin{aligned}
f(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)\dots(\lambda - \lambda_n) \\
&= \lambda^n - (\sum_i \lambda_i)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n(\prod_i \lambda_i)
\end{aligned}
$$

另一方面, 特征多项式

$$
\begin{aligned}
f(\lambda) = |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{1,1} & -a_{1,2} & \dots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & \lambda - a_{2,2} & \dots & -a_{2,n} \\ & & \ddots & \\ -a_{n,1} & -a_{n,2} & \dots & \lambda - a_{n,n} \end{vmatrix} \\
&= \lambda^n - \mathrm{tr}(A)\cdot\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n|A|
\end{aligned}
$$

例题 1.3

例题 1.3

$$A\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow A^n\alpha = \lambda^n\alpha.$$

一般地, 对于多项式

$$f(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$$

有

$$f(A) = a_m A^m + \cdots + a_1 A + a_0 E$$

可得

$$f(A)\alpha = a_m\lambda^n\alpha + \cdots + a_1\lambda\alpha + a_0\alpha.$$

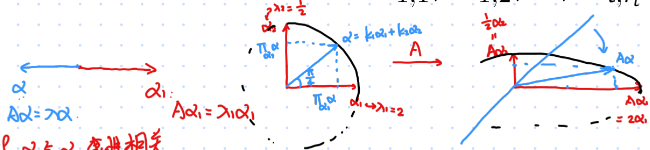
特征向量线性无关

性质 1.3

记

- $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ 为 A 的两两不同的特征值
- $\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,r_i}$ 为属于 λ_i 的线性无关的特征向量

那么所有特征向量 $\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \ldots, \alpha_{t,r_t}$ 都线性无关.



if α 与 α_1 线性相关

then $\alpha = k_1\alpha_1$

$$
\begin{aligned}
A\alpha &= A(k_1\alpha_1) \\
&= k_1 \cdot A\alpha_1 \\
&= k_1\lambda_1\alpha_1 \\
&= \lambda_1(k_1\alpha_1) = \lambda_1\alpha
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A\alpha &= A(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2) \\
&= k_1 A\alpha_1 + k_2 A\alpha_2 \\
&= k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_2\alpha_2 \\
&\neq \lambda(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2)
\end{aligned}
$$

性质 1.3 证明

要证命题 P(t) 成立
须证 • P(1) 成立
• P(t) 成立 ⇒ P(t+1) 成立

对特征值个数 t 使用数学归纳法.
当 $t=1$ 时, 由题设可得.
假设命题对 $t=k$ 时成立, 考虑 $t=k+1$ 的情况,
要证以下向量组线性无关:

$$\underbrace{\alpha_{1,1},\ldots,\alpha_{1,r_1}}_{\lambda_1},\ldots,\underbrace{\alpha_{k+1,1},\ldots,\alpha_{k+1,r_{k+1}}}_{\lambda_{k+1}}.$$

考虑方程

$$\sum_i \underset{=0}{a_{1,i}}\alpha_{1,i}+\cdots+\sum_i \underset{=0}{a_{k,i}}\alpha_{k,i}+\boxed{\sum_i \underset{=0}{a_{k+1,i}}\alpha_{k+1,i}=0.}$$

性质 1.3 证明

乘以 A 得

$$\underbrace{\sum_i a_{1,i}\lambda_1\alpha_{1,i}}_{\lambda_1}+\cdots+\underbrace{\sum_i a_{k,i}\lambda_k\alpha_{k,i}}_{\lambda_k}+\underbrace{\sum_i a_{k+1,i}\lambda_{k+1}\alpha_{k+1,i}}_{\lambda_{k+1}}=0.$$

减去 λ_{k+1} 倍原方程, 得

$$\sum_i \underbrace{a_{1,i}}_{=0}(\underbrace{\lambda_i-\lambda_{k+1}}_{\neq 0})\alpha_{1,i}+\cdots+\sum_i \underbrace{a_{k,i}}_{=0}(\underbrace{\lambda_k-\lambda_{k+1}}_{\neq 0})\alpha_{k,i}$$

$$+\underbrace{\boxed{\sum_i a_{k+1,i}(\underbrace{\lambda_{k+1}-\lambda_{k+1}}_{=0})\alpha_{k+1,i}}}_{=0}=0.$$

由 $\alpha_{1,1},\ldots,\alpha_{k,r_k}$ 线性无关得

$$a_{i,j}=0 \qquad \forall i=1,\ldots,k, j=1,\ldots,r_i.$$

所以 $\sum_{i=1,\ldots,r_{k+1}} a_{k+1,i}\alpha_{k+1,i}=0.$

性质 1.3 证明

再有题设 $\alpha_{k+1,1},\ldots,\alpha_{k+1,r_{k+1}}$ 线性无关得
$a_{k+1,i}=0$.

性质 1.4

性质 1.4

属于不同特征值的特征向量线性无关, i.e. $\alpha_{i,\cdot}$ 与 $\alpha_{j,\cdot}$ 线性无关, 如果 $i \neq j$.

Outline

5.0 引言

5.1 矩阵的特征值和特征向量

5.2 相似矩阵与矩阵可对角化

5.3 实对称矩阵的对角化

矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $\longleftrightarrow$ 线性映射 $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\alpha \longmapsto \lambda\alpha$.

特征值

特征

α 为 A 属于 λ 的特征方向

存在性： $A\alpha = \lambda\alpha$ 有 $\alpha \neq 0$ 解

$\Leftrightarrow (\lambda E - A)\alpha = 0$ 有非零解 $\rightsquigarrow$ 特征矩阵 $\lambda E - A$

$\Leftrightarrow |\lambda E - A| = 0$ $\rightsquigarrow$ 特征多项式 $|\lambda E - A|$

代数… $\Longrightarrow$ $\begin{cases} F = \mathbb{R}, \text{ 至多 } n \text{ 个特征值} \\ F = \mathbb{C}, \text{ exactly } n. \end{cases}$

if n 个特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

then $\begin{cases} \sum_i \lambda_i = \sum_i a_{ii} = \mathrm{tr}(A) \\ \prod_i \lambda_i = |A|. \end{cases}$

- $\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow \alpha_i$ 与 α_j 线性无关

  更一步 取 $\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,r_i}$ 线性无关

  $\Rightarrow \{\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,r_i}\}_{i=1}^{t}$ 线性无关

幂的计算

考虑计算 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ 的幂 A^n 的 “复杂度”.

对于 2×2 的矩阵, 一次矩阵乘法需要 2^3 次乘法.

那么 A^n 需要进行 $2^3(n-1)$ 次乘法.

一般地, 对 $m \times m$ 的矩阵的 n 次幂计算复杂度为 $O(m^3 n)$.

$A^2 = A \cdot A$.

$m \times m^2$ $O(m^3)$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{m\times m} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A^n $m^3(n-1) \sim O(m^3 n)$

$m = 100 = 10^2$

$m^3 = 10^6$

幂的计算 (改)

取 $P = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ 对 A 进行对角化:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & \\ & 3 \end{pmatrix} = B.$$

那么

$$= (PAP^{-1}) \cdot (PAP^{-1}) \cdots (PAP^{-1})$$

$$A^n = PB^nP^{-1}$$

$$= P \cdot \begin{pmatrix} 2^n & \\ & 3^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

$O(m \cdot n)$

$m = 10^2$

通过类似的对角化, 对 $m \times m$ 的矩阵的 n 次幂计算复杂度为 $O(mn)$.

相似矩阵

定义 2.1

称方阵 A 相似于 B (记作 $A \sim B$), 如果存在可逆矩阵 P, s.t.

$$\underline{B = P^{-1}AP.}$$

相似关系是一类等价关系:

- 反身性 : 取 $P=E$: $A=P^{-1}AP$
- 对称性 $B=P^{-1}AP \Rightarrow A=PBP^{-1} \overset{Q=P^{-1}}{=} Q^{-1}BQ$
- 传递性 $\begin{cases} B=P^{-1}AP \\ C=Q^{-1}BQ \end{cases} \Rightarrow C=Q^{-1}(P^{-1}AP)Q$

$=(PQ)^{-1}A(PQ)$

性质 2.1

性质 2.1

$B=P^{-1}AP$

如果 $A\sim B$, 那么

$|\lambda E-B|=|\lambda E\cdot P^{-1}P-P^{-1}AP|$
$=|P^{-1}(\lambda E)\cdot P-P^{-1}AP|$
$=|P^{-1}||\lambda E-A||P|=|\lambda E-A||P^{-1}||P|$
$=|\lambda E-A||P^{-1}P|$
$=|\lambda E-A|$

- ▶ A 与 B 有相同的特征多项式
  - ▶ 有相同的特征值 (特征值是特征多项式的根)
  - ▶ 行列式, 秩也相同 $\begin{cases}|A|=\prod_i \lambda_i\\ tr(A)=\sum_i \lambda_i\end{cases}$
- ▶ $f(B)=P^{-1}f(A)P$ 对任一多项式 $f(x)$

$A\sim B \Rightarrow f(A)\sim f(B)$

- ▶ $A^T\sim B^T$

$B^T=(P^{-1}AP)^T=P^TA^T(P^{-1})^T \xlongequal{Q=(P^{-1})^T} Q^{-1}A^TQ.$

  - ▶ 如果 A 可逆, 那么 $A^{-1}\sim B^{-1}$
    - ▶ 从而有 $A^*\sim B^*$

$B^{-1}=(P^{-1}AP)^{-1}$
$=P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^{-1}$
$=P^{-1}A^{-1}P.$

A^* 为 A 的伴随矩阵

if A^{-1} 存在

then $A^*=|A|E\cdot A^{-1}$

$B^*=|B|E\cdot B^{-1}=|A|E\cdot P^{-1}A^{-1}P=P^{-1}(|A|E\cdot A^{-1})\cdot P=P^{-1}A^*P$

对角化

Q: 任一矩阵是否都相似于某个对角矩阵?
简记对角矩阵 $\Lambda = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$.

定义 2.2

称矩阵 A 为 可对角化, 如果存在对角阵 Λ 相似于 A. i.e. 存在可逆矩阵 P 和对角矩阵 Λ, s.t.

$$P^{-1}AP = \Lambda.$$

定理 2.1

定理 2.1

$n \times n$ 矩阵 A 可对角化，当且仅当，A 存在 n 个线性无关的特征向量.

$\mathbb{R}^n$ 取标准向量组 $e_1,\dots,e_n$.　线性映射 $f:\ \alpha \longmapsto A\alpha$

$$\alpha = x_1e_1+\dots+x_ne_n = (e_1,\dots,e_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

$$\alpha = (e_1,\dots,e_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \longmapsto (e_1,\dots,e_n)\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

$$(\alpha_1,\dots,\alpha_n)P^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \qquad (\alpha_1,\dots,\alpha_n)P^{-1}\begin{pmatrix}A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

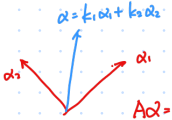
$$(\alpha_1,\dots,\alpha_n)P^{-1}\cdot P\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} \qquad (\alpha_1,\dots,\alpha_n)\underbrace{P^{-1}AP}_{=\Lambda}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

↳ α 在 $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ 下的坐标

取 n 个线性无关特征向量 $\alpha_1,\dots,\alpha_2$

$$\alpha_i = p_{1i}e_1+\dots+p_{ni}e_n$$

$$(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = (e_1,\dots,e_n)\begin{pmatrix}p_{11}&\cdots&p_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ p_{n1}&\cdots&p_{nn}\end{pmatrix} = (e_1,\dots,e_n)P$$



$$A\alpha = \begin{pmatrix}\lambda_1&\\&\lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\end{pmatrix}$$

$$\Lambda = P^{-1}AP$$

$$\begin{tikzcd}
\{\alpha\}\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "\Lambda"] \arrow[d, "P"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{R}^n \\
\{e\}\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^n \arrow[u, "P^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

定理 2.1 充分性

假设 A 有 n 个线性无关的特征向量 $v_1, \ldots, v_n$. 取矩阵

$$P = (v_1, \ldots, v_n)$$

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} v_n \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

那么

$$\begin{aligned} AP &= A(v_1, \ldots, v_n) = (Av_1, \ldots, Av_n) \\ &= (\lambda_1 v_1, \ldots, \lambda_n v_n) \\ &= (v_1, \ldots, v_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= P\Lambda. \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 v_1 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} \lambda_n v_n \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} v_n \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

所以

$$P^{-1}AP = \Lambda.$$

定理 2.1 必要性

由 A 可对角化, 存在对角矩阵 Λ 与可逆矩阵 P s.t.

$P=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$

$$P^{-1}AP=\Lambda. \Leftrightarrow \underbrace{AP}_{=(A\alpha_1,\dots,A\alpha_n)}=\underbrace{P\Lambda}_{=(\lambda_1\alpha_1,\dots,\lambda_n\alpha_n)}$$

记 α_i 为 P 的列向量, 得

$$A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i.$$

由 P 可逆得 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ 线性无关.

几何意义: 坐标变换

推论 2.1 & 2.2

推论 2.1

如果 $n \times n$ 矩阵有 n 个不同的特征值, 那么它可对角化.

证明: 属于不同特征值的特征向量线性无关.

推论 2.2

如果 $n \times n$ 复数矩阵的特征多项式无重根, 那么它可对角化.

证明: 复特征多项式中的重根 $\Rightarrow$ 相同的特征值

注意

推论中的条件是充分而非必要.

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda = 1 \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

例题 1.1

回顾例题 1.1 中, 矩阵 $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ 只有 2 个线性无关的特征向量:

- 属于特征值 1 的特征向量 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 属于特征值 -1 的特征向量 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -\frac{19}{2} \end{pmatrix}$

所以 A 不能对角化.

例题 2.1

例题 2.1

矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 能否对角化? 如果可以, 求 $P^{-1}AP$ 中的 P.

解

A 的特征方程为

$$|\lambda E - A| = (\lambda - 5)(\lambda + 1)^2 = 0$$

有根 $\lambda = 5$ 和 $\lambda = -1$.

例题 2.1

- $\lambda = 5$ 代入 $\lambda E - A$ 得

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ 有非零解} \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = -1$ 代入 $\lambda E - A$ 得

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \ldots \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \underbrace{1 \quad 1}_{\text{自由}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

011 011 011

例题 2.1

$(P|E) \rightsquigarrow (E|P^{-1})$

取

$$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

得

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & & \\ & \frac{1}{3} & \\ & & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

有

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

#

例题 2.2

例题 2.2

矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

- 能否对角化?
- 考虑复数特征值的情况?

解

A 的特征方程为

$$|\lambda E - A| = \lambda(\lambda^2 + 19) = 0.$$