1、选择题

伴随矩阵定义 → 分块矩阵性 → 答案

1. 解答：这里求伴随矩阵
自然而然的想到伴随矩阵的公式，$C^*=|C|C^{-1}$

根据分块矩阵的性质 $|C|=|A|\cdot|B|$ $C^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&\\&B^{-1}\end{pmatrix}$

则 $C^*=|A||B|\begin{pmatrix}A^{-1}&\\&B^{-1}\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}|B|\cdot|A|A^{-1}&\\&|A||B|\cdot B^{-1}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}|B|\cdot A^*&\\&|A|\cdot B^*\end{pmatrix}$$

选择D项.

2、合同定义：A与B合同当且仅当存在一个可逆矩阵C, s.t. $C^TAC=B$

$\Leftrightarrow$ A与B的正负惯性指数相等 合同矩阵是等秩的.

首先想定义 → 再想判定条件.

→ 正负特征值个数相等

B的秩为1. A的秩显然也为1

相似定义：A, B为n阶矩阵，则A与B相似，是指存在n阶可逆矩阵P, s.t. $P^{-1}AP=B$. 判断两个矩阵是否相似，只需判断特征值是否相等.

所以本题只需计算出A、B的特征值即可.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1&1\\1&1-\lambda&1&1\\1&1&1-\lambda&1\\1&1&1&1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1&1\\1&1-\lambda&1&1\\0&\lambda&-\lambda&0\\0&\lambda&0&-\lambda\end{vmatrix}$$ 按第1列展开

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1\\\lambda&-\lambda&0\\\lambda&0&-\lambda\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&1&1\\\lambda&-\lambda&0\\\lambda&0&-\lambda\end{vmatrix}$$

分别计算 $\Rightarrow$ $\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1\\\lambda&-\lambda&0\\\lambda&0&-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1\\\lambda&-\lambda&0\\2\lambda-\lambda^2&\lambda&0\end{vmatrix}$

$$=\lambda^2+\lambda(2\lambda-\lambda^2)=3\lambda^2-\lambda^3$$

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\\lambda&-\lambda&0\\\lambda&0&-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\\lambda&-\lambda&0\\2\lambda&\lambda&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&-\lambda\\2\lambda&\lambda\end{vmatrix}=3\lambda^2$$

原式$=(1-\lambda)(3\lambda^2-\lambda^3)-3\lambda^2=\lambda^2[(1-\lambda)(3-\lambda)-3]=\lambda^3(\lambda-4)$

∴A的特征值为0(3重),4

$$|B-\lambda E|=\begin{vmatrix}4-\lambda & & & \\ & -\lambda & & \\ & & -\lambda & \\ & & & -\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3(4-\lambda)=\lambda^3(\lambda-4)$$

∴B的特征值为0(3重),4.

∴A与B关系是合同与相似. 故选择A项.

3、因为$AB=C$，可将A、C写成列向量的形式

方程、矩阵、向量之间的联系
列向量、线性表出、等价

$(\alpha_1\cdots\alpha_n)B=(c_1\cdots c_n)$

所以C的列向量可以由A的列向量线性表出.

又由于B可逆，$AB=C$ 等式两端右侧同时作用B^{-1}, $ABB^{-1}=CB^{-1}$

故$A=CB^{-1}$ $(\alpha_1\cdots\alpha_n)=(c_1\cdots c_n)B^{-1}$

所以A的列向量可由C的列向量线性表出.

因此，A的列向量组与C的列向量组是等价的 故选B项.

4、因为题目条件：

λ_1,λ_2是矩阵A的两个不同的特征值，对应特征向量分别为α_1,α_2.

自然而然想到：属于不同特征值的特征向量线性无关 ← 结合

故α_1,α_2是线性无关的.

线性无关充要条件首先想到

题目给出$A(\alpha_1+\alpha_2)=A\alpha_1+A\alpha_2=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$

故α_1, $A(\alpha_1+\alpha_2)$线性无关充要条件就为 $k_1\alpha_1+k_2(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)=0$
$\Leftrightarrow k_1=0, k_2=0$

又α_1,α_2线性无关，所以 $k_1+k_2\lambda_1=0$, $k_2\lambda_2=0$ 将k_1,k_2看作未知量，并且只有零解

故系数行列式 $\begin{vmatrix}1 & \lambda_1\\ 0 & \lambda_2\end{vmatrix}\neq0$ 故$\lambda_2\neq0$ 故选D项.

5、本题考察正定的充要条件. 回忆课本中所学正定的等价条件.

① n元实二次型$f(x_1\cdots x_n)$是正定的$\Leftrightarrow$它的正惯性指数为n $\Leftrightarrow$ 特征值均大于0.

① 一个实对称矩阵正定 $\Leftrightarrow$ 它与单位矩阵E合同 $\Rightarrow$ 行列式大于0.

② $f(x_1, \cdots x_n) = X'AX$ 是正定的 $\Leftrightarrow$ A的顺序主子式都大于0

利用排除法，锁定答案B.

下面给出证明：$\Rightarrow$ A为正定矩阵，故A的正惯性指数为n.

即A的所有特征值 $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n > 0$

故 $|A| > 0$，即 $|A| \neq 0$，则A可逆，且 A^{-1} 的特征值为 $\frac{1}{\lambda_1} \cdots \frac{1}{\lambda_n} > 0$

$\therefore A^{-1}$ 也正定

$\Leftarrow$ A^{-1} 为正定矩阵，故 A^{-1} 的正惯性指数为n. 同上所述，$\Rightarrow$ A也正定. ✓

正定充要条件
↓
排除法
↓
验证

6、解：基础解系是指方程组解集的极大线性无关组

由A的秩为n-3，那么极大无关组的个数为 $n-(n-3)=3$.

又 $\because \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关组

$\therefore \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可以作为极大线性无关组. 下面找线性相关的，即是题目答案

根据A的秩求出极大线性无关组的个数
↓
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为极大线性...
↓
判断选项向量是否线性无关

类似第4题 B项 $k_1(\alpha_1+2\alpha_2)+k_2(2\alpha_2+3\alpha_3)+k_3(\alpha_1+3\alpha_3)=0$

$(k_1+k_3)\alpha_1+(2k_1+2k_2)\alpha_2+(3k_2+3k_3)\alpha_3=0$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关 故 $k_1+k_3=0$ 将 k_1, k_2, k_3 看做未知数

$2k_1+2k_2=0$

$3k_2+3k_3=0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$$ 故线性无关

C项 $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+k_3(\alpha_1+\alpha_3)=0$

$(k_1+k_2+k_3)\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，故 $k_1+k_2+k_3=0$

$k_2=0$

$k_3=0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$ 线性无关

D项. $k_1(\alpha_1+2\alpha_2)+k_2(2\alpha_2+3\alpha_3)+k_3(\alpha_1-3\alpha_3)=0$

$(k_1+k_3)\alpha_1+(2k_1+2k_2)\alpha_2+(3k_2-3k_3)\alpha_3=0$

$k_1+k_3=0$

$k_1+k_2=0$

$k_2-k_3=0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$ 线性相关

故选D项

2、填空题

1、思路：根据椭球面的标准形式求解参数的值

$$x^2+(\lambda+2)y^2+\lambda z^2+2xy=5$$

化简 $x^2+(\lambda+2)y^2+\lambda z^2+2xy-5=0$

$F(x,y,z)=x^2+(\lambda+2)y^2+\lambda z^2+2xy-5$

$a=1,\ b=(\lambda+2),\ c=\lambda,\ h=1,\ d=-5$

根据椭球面的判定条件

① $\lambda(\lambda+2)>0$ $\lambda>0$ 或 $\lambda<-2$

② $\lambda>0$

③ $-5\lambda<0$，$\lambda>0$

④ $(0-\lambda)^2<(0-\lambda(\lambda+2))(0-\lambda)$

$-\lambda^2<\lambda^2(\lambda+2)$

$\lambda^2(\lambda+3)>0$ $\lambda>-3$.

综上所述，当 $\lambda>0$ 时

二次曲面是一个椭球面.

方法2. 将曲面方程化为标准方程，对比椭球面表示形式得到结果. 参考课本 P172.

对应矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&\lambda+2&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$，$x=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，$c=-5$

A 实对称矩阵 存在正交矩阵 Q，s.t. $Q^TAQ=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}$

$$|A-xE|=\begin{vmatrix}1-x&1&0\\1&\lambda+2-x&0\\0&0&\lambda-x\end{vmatrix}=(\lambda-x)[(1-x)(\lambda+2-x)-1]$$

求出特征值

$$=(\lambda-x)[\lambda+2-x-\lambda x-2x+x^2-1]$$

$$=(\lambda-x)[x^2-(\lambda+3)x+\lambda+1]$$

$\lambda_1=$ $\lambda_2=$ $\lambda_3=$ 求出特征值对应的特征向量 q_1,q_2,q_3

$Q=(q_1,q_2,q_3)$，$Q^TAQ=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}$

2、计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & -1 & & & & \\ a_2 & x & -1 & & & \\ a_3 & & x & -1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ a_{n-1} & & & & x & -1 \\ a_n & & & & & x \end{vmatrix}$$

$\frac{1}{x}$ $\frac{1}{x}$ $\frac{1}{x}$

第2行的$\frac{1}{x}$倍加到第1行

第n行的$\frac{1}{x}$倍加到$n-1$行

$$\begin{vmatrix} a_1+\frac{a_2}{x}+\cdots+\frac{a_n}{x^{n-1}} & & & & \\ a_2+\cdots+\frac{a_n}{x^{n-2}} & \ddots & & & \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ & & & x & 0 \\ a_n & \cdots & \cdots & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$=\left(a_1+\frac{a_2}{x}+\cdots+\frac{a_n}{x^{n-1}}\right)\cdot x^{n-1}$

$=a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n.$

3. 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\\alpha\end{pmatrix}$　思路：化成阶梯型求秩即可

写成$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=A$形式，令其秩为2.

$$\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\-1&0&1\\0&2&\alpha\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&-3\\0&1&3\\0&2&\alpha\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&0&0\\0&0&\alpha-6\end{pmatrix}$$

故$\alpha-6=0$时秩为2，即$\alpha=6$时，秩为2.

4. 基 $\beta_1=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$，$\beta_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$　参考课本P120思路

到基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 的过渡矩阵

过渡矩阵的求法 这里借助标准基 $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

$\alpha_1=\varepsilon_1$，$\alpha_2=\varepsilon_2+\varepsilon_3$，$\alpha_3=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$

$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)A$.　$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ 为基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$到$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的过渡矩阵. 同理有.

$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)B$, $B=\begin{pmatrix}3&2&1\\1&3&2\\2&1&3\end{pmatrix}$ 为基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过渡矩阵

因为过渡矩阵可逆，故

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)A=((\beta_1,\beta_2,\beta_3)B^{-1})A=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)B^{-1}A$$

故过渡矩阵为 $B^{-1}A$ $\qquad (B,A)\to(E,\ B^{-1}A)$

$B^{-1}A$ 求法：

$$\begin{pmatrix}3&2&1&0&0&1\\1&3&2&0&1&1\\2&1&3&1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&2&0&1&1\\3&2&1&0&0&1\\2&1&3&1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&2&0&1&1\\0&-7&-5&0&-3&-2\\0&-5&-1&1&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&3&2&0&1&1\\0&-5&-1&1&-1&-1\\0&0&-\frac{18}{5}&-\frac{7}{5}&-\frac{8}{5}&-\frac{3}{5}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&2&0&1&1\\0&-5&-1&1&-1&-1\\0&0&1&\frac{7}{18}&\frac{4}{9}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&0&-\frac{7}{9}&\frac{1}{9}&\frac{2}{3}\\0&-5&0&\frac{25}{18}&-\frac{5}{9}&-\frac{5}{6}\\0&0&1&\frac{7}{18}&\frac{4}{9}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{18}&-\frac{2}{9}&\frac{1}{6}\\0&1&0&-\frac{5}{18}&\frac{1}{9}&\frac{1}{6}\\0&0&1&\frac{7}{18}&\frac{4}{9}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

故 $B^{-1}A=\begin{pmatrix}\frac{1}{18}&-\frac{2}{9}&\frac{1}{6}\\-\frac{5}{18}&\frac{1}{9}&\frac{1}{6}\\\frac{7}{18}&\frac{4}{9}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$ 为过渡矩阵

5. 设 $M_1=(x_1,y_1,z_1)$ 是母线上的任意点，因为旋转轴通过原点，所以过 M_1 的纬圆的方程为

曲线 $y=5x^2$，$y=0$

线直线 $\begin{cases}y=x\\z=0\end{cases}$

$$\begin{cases}(x-x_1)+(y-y_1)+0\cdot(z-z_1)=0 & ①\\x^2+y^2+z^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2 & ②\end{cases}$$

又因为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 在母线上，所以有

$$y_1=5x_1^2 \quad ③$$

联合①②③式，消去 x_1,y_1,z_1 所得旋转曲面的方程为：

…

4. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-6x_2x_3+2x_1x_3$

1. f 对应的对称矩阵A为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

2. 将其化为标准型等价于将实对称矩阵A正交对角化.

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & 3 \\ -1 & 3 & \lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \lambda^2-1 & 3\lambda-1 \\ -1 & \lambda & 3 \\ 0 & 3-\lambda & \lambda-3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda^2-1 & 3\lambda-1 \\ 3-\lambda & \lambda-3 \end{vmatrix}=(\lambda^2-1)(\lambda-3)-(3\lambda-1)(3-\lambda)$$

$$=\lambda^3-3\lambda^2-\lambda+3-9\lambda+3\lambda^2+3-\lambda$$

$$=\lambda^3-11\lambda+6$$

$$=(\lambda-3)(\lambda^2+3\lambda-2)$$

$\lambda_1=3$, $\lambda_2=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$ $\lambda_3=\frac{-3-\sqrt{17}}{2}$

代入 $\lambda_1=3$ 时, 求解对应特征向量 η_1.

当 $\lambda_2=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$ 时, 求解对应特征向量 η_2.

当 $\lambda_3=\frac{-3-\sqrt{17}}{2}$ 时, 求解对应特征向量 η_3.

故 $(\eta_1,\eta_2,\eta_3)A(\eta_1,\eta_2,\eta_3)^T=\begin{pmatrix} 3 & & \\ & \frac{-3+\sqrt{17}}{2} & \\ & & \frac{-3-\sqrt{17}}{2} \end{pmatrix}$

③. 经过一系列的变换, 可得方程变为

$$3w_1^2+\frac{\sqrt{17}-3}{2}w_2^2-\frac{3+\sqrt{17}}{2}w_3^2=t.$$

考虑t的取值进行讨论,

当t=0时, 二次锥面.

当t>0时, 单叶双曲面.

当t<0时, 双叶双曲面.