习题课 Ch 1

1\. 4) 略.

5) $\begin{vmatrix} x & y & x \\ y & x & y \\ y & y & x \end{vmatrix} \xrightarrow[r_1+r_2]{r_1+r_2} \begin{vmatrix} x+2y & x+2y & x+2y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{vmatrix}$

$$= (x+2y)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & x & y \\ y & y & x \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-yr_1]{r_2-yr_1} (x+2y)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & x-y & \\ & & x-y \end{vmatrix}$$

$$= (x+2y)(x-y)^2 \qquad \#$$

2. 1) 略

2) $$\begin{vmatrix} & b & a \\ 1 & e & f \\ & d & c \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & e & f \\ & b & a \\ & d & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

求 i, j s.t. $1, 7, i, 5, 2, j, 6$ 为偶.

解: 记 τ_i 为 ith 数与其后的数构成逆序的数量.

注意到 i, j 为 3 或 4.

得

τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6	τ_7
0	5	?	2	0	0	0

↳ 3 & 4 均小于 6

分情况讨论

① $i=3$ & $j=4$:

$\tau_3 = 1 \Rightarrow \tau = 8$

② $i=4$ & $j=3$

$\tau_3 = 2 \Rightarrow \tau = 9$

综上 $i=3$ & $j=4$. #

6 3). 求逆序数并判断奇偶性.

$$I = \underbrace{2n\cdot(2n-2)\cdots 4\cdot 2}_{n}\ \underbrace{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}_{n}.$$

解: 记 $\bar{I}$ 为 I 的逆.

i.e. $\bar{I} = 1\cdot 3\cdots(2n-3)(2n-1)\times 2\cdot 4\cdots(2n-2)\cdot 2n$.

在排列 $\bar{I}$ 中任取一对数 (i,j)

若 i,j 均为奇或均为偶

则 (i,j) 不构成逆序

Q: Why not i偶j奇?

仅需考虑 i 为奇, j 为偶的情况

为简便记 $(2i-1, 2j)$ $i,j\in\{1,2,\dots,n\}$

ith 奇数 jth 偶数.

可见 $(2i-1, 2j)$ 构成逆序

$\iff j<i$

注意到所有偶数均在奇数后面.

$\therefore$ ith 奇数 "产生" $(i-1)$ 个逆数.

$\therefore$ $\bar{I}$ 的逆序数为 $\sum_{i=1}^{n}(i-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$

回顾 Ex 5

$\therefore$ 由 $\tau(I)+\tau(\bar{I}) = C_{2n}^{2}$ 得

$$\tau(I) = C_{2n}^{2} - \tau(\bar{I})$$
$$= \frac{1}{2}2n(2n-1) - \frac{1}{2}n(n-1)$$
$$= \frac{1}{2}n(3n-1)$$

现判断 $\frac{1}{2}n(3n-1)$ 何时取偶数.

若 $\frac{1}{2}n(3n-1) = 2m$ $12m+6-1$

$\iff n(3n-1) = 4m$ $12m+9-1$

可见 n 含因子 4 时, $\tau(I)$ 为偶.

仅需考虑 $n = 4m+1, 4m+2, 4m+3$ 时.

- $n=4m+1 \Rightarrow \tau(I) = (4m+1)\cdot 2(6m+1)$ 不含因子 4
- $n=4m+2 \Rightarrow \tau(I) = 2(2m+2)(12m+5)$ - - - -
- $n=4m+3 \Rightarrow \tau(I) = (4m+3)\cdot 4(3m+2)$ 含因子 4.

综上所述, $n=4m$ 或 $4m+3$ 时 I 为偶; 否则为奇 #

8. 在多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 7 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & x & 0 \\ 0 & x & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 中 x^2 的系数.

解1：直接计算行列式 $f(x)$，略.

解2：行列式定义为 $\sum\limits_{(j_1,j_2,j_3,j_4)} (-1)^{\tau(j_1,\dots,j_4)} \cdot a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot a_{3j_3} \cdot a_{4j_4}$

含 x^2 的项 $\Leftrightarrow$ a_{ij_i} 中有且仅有两项为 x.

可得 (j_1, j_2, j_3, j_4) 的可能组合共 C_3^2 种.

- $(1, 3, 4, 2)$
- $(1, 4, 2, 3)$
- $(4, 3, 2, 1)$

$\therefore$ 含 x^2 的项为

$$\begin{aligned} & (-1)^{\tau(1,3,4,2)} \cdot x \cdot x \cdot 5 \cdot 1 \\ & + (-1)^{\tau(1,4,2,3)} \cdot x \cdot 0 \cdot x \cdot 2 \\ & + (-1)^{\tau(4,3,2,1)} \cdot -1 \cdot x \cdot x \cdot 2 \\ = & \ 3 \cdot x^2 \end{aligned}$$

$\therefore$ x^2 项的系数为 3 #

10. 4) 求

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & a_{2n} \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & & a_{ij} & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解1: 按 1st 行展开,得

$$|\cdots| = a_{11}\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & & a_{2n} \\ & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\text{记为}D}$$

其中 D 仅有一项 $(-1)^{\tau(n-1,n-2,\cdots,2,1)}\cdot a_{2n}\cdot a_{3,n-1}\cdots a_{n-1,3}\cdot a_{n,2}$

$$= (-1)^{C_{n-1}^{2}}\cdot a_{2,n}\cdots a_{n,2}$$

$$\therefore |\cdots| = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\cdot a_{11}\cdot a_{2n}\cdots a_{n,2}$$

解2: 先通过(n-1)次列对换,将 1st 列换到最后一列,得

$$|\cdots| = (-1)^{n-1}\times \begin{vmatrix} & & & a_{1,1} \\ 0 & & a_{2,n} & \\ & & \vdots & 0 \\ a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1}\times(-1)^{C_n^2}\cdot a_{11}.a_{2,n}\cdots a_{n,2}$$

$$= \cdots\cdots$$

#

11. 6) 求

$$\begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & a \\ & & & a & x \\ & & \iddots & & \vdots \\ a & & & & x \end{vmatrix}_n$$

回顾本题型行列式解

n=1时的表达式到底是|x|还是|a|?暂且不管

解: Case $n=1$: ?

Case $n=2$. $\begin{vmatrix} x & a \\ a & x \end{vmatrix} = x^2 - a^2$

Case $n>2$.

- Subcase $a=0$

$$|\cdots| = \begin{vmatrix} x & \cdots & x & 0 \\ & & & x \\ & 0 & & \vdots \\ & & & x \end{vmatrix} = 0 \quad (\because \text{1st 行展开})$$

- Subcase $a \neq 0$

进行初等列变换 $C_n - \frac{x}{a} \cdot C_j$, $j = 1, \ldots, n-1$

得

$$|\cdots| = \begin{vmatrix} x & \cdots & x & a-(n-1)\cdot\frac{x^2}{a} \\ & & a & 0 \\ & \iddots & & \vdots \\ a & & & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{C_n^2} \cdot \left(a - (n-1)\cdot\frac{x^2}{a}\right) \cdot a^{n-1}$$

#

12. 3) 求

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & a+1 & 3 & & n \\ 1 & 2 & a+2 & & n \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & a+n-1 \end{vmatrix}$$

解：进行初等行变换 $r_i - r_1 \quad i=2,\ldots,n$

得爪型

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1-a & a-1 & & & \\ 1-a & & a-1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1-a & & & & a-1 \end{vmatrix}$$

进行初等列变换 $c_1 + c_j \quad j=2,\ldots,n$

得上三角

$$\begin{vmatrix} a+(2+3+\cdots+n) & 2 & 3 & \cdots & n \\ & a-1 & & & \\ & & a-1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a-1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \left|\cdots\right| = \left(a+\frac{(n+2)(n-1)}{2}\right)\cdot(a-1)^{n-1}$$

#

12 4) 求 $\begin{vmatrix} a+b & ab & & & \\ 1 & a+b & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a+b & ab \\ & & & 1 & a+b \end{vmatrix}$

数学归纳法

解：记 $D_m = \begin{vmatrix} a+b & ab & & & \\ 1 & a+b & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a+b & ab \\ & & & 1 & a+b \end{vmatrix}_m$

对 $m=1$. $D_1 = |a+b| = a+b$

对 $m=2$, $D_2 = \begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - ab = a^2+ab+b^2$

考虑 $m=n+1$ 情况

假设 $D_n = \sum_{i=0}^{n} a^i \cdot b^{m-i}$ 对 $m=1,\dots,n-1$ 成立.

对 D_{n+1} 第 1st 行展开. 得

$$D_{n+1} = (a+b)\cdot D_n + (-1)\cdot ab \cdot \left.\begin{vmatrix} 1 & a & & & & \\ \vdots & a+b & ab & & & \\ \vdots & 1 & a+b & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ \vdots & & & & a+b & ab \\ \vdots & & & & 1 & a+b \end{vmatrix}\right\} n-1$$

$$= (a+b)\cdot D_n - ab\cdot D_{n-1}$$

$$\overset{(假设)}{=} (a+b)\cdot \sum_{i=0}^{n} a^i\cdot b^{n-i} - ab\cdot \sum_{i=0}^{n-1} a^i \cdot b^{n-1-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\left(a^{i+1} b^{n-i} + a^i\cdot b^{n-i+1}\right) - \sum_{i=0}^{n-1} a^{i+1} b^{n-1-i+1}$$

$$\begin{aligned} = & \quad\quad\ \ ab^n + \cdots\cdots + a^n b + a^{n+1} \\ & + b^{n+1} + ab^n + \quad\quad\quad + a^n b \\ & \quad\quad\ - ab^n - \cdots\cdots - a^n b \end{aligned}$$

$$= b^{n+1} + ab^n + \cdots\cdots + a^n b + a^{n+1}$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} a^i \cdot b^{n-i}$$

#

16. 求证 $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$

证明：进行 C_4-C_3，C_3-C_2，C_2-C_1 得

$$\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2a+3 & 2a+5 \\ b^2 & 2b+1 & 2b+3 & 2b+5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

进行 C_4-C_3，C_3-C_2 得

$$\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

后两列相等，行列式为零 #.

17. 计算 $D_n = \begin{vmatrix} x^n & x^{n-1} & \cdots & x^2 & x^1 & 1 \\ (x+1)^n & (x+1)^{n-1} & & & x+1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ (x+n-1)^n & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ (x+n)^n & (x+n)^{n-1} & & & x+n & 1 \end{vmatrix}$

解：进行 $C_i-(x+n)\cdot C_{i+1}$ $\quad i=1,\cdots,n$

得 $\begin{vmatrix} -n\cdot x^{n-1} & -n\cdot x^{n-2} & -n & 1 \\ -(n-1)\cdot(x+1)^{n-1} & -(n-1)\cdot(x+1)^{n-2} & -(n-1) & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1\cdot(x+n-1)^{n-1} & -1\cdot(x+n-1)^{n-2} & -1 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$\xlongequal[\text{展开}]{n\text{th行}} \begin{vmatrix} -n\cdot x^{n-1} & \cdots & -n \\ -(n-1)\cdot(x+1)^{n-1} & & -(n-1) \\ \vdots & & \vdots \\ -1\cdot(x+n-1)^{n-1} & \cdots & -1 \end{vmatrix}$

$= \prod_{i=1}^{n}(-i)\cdot \begin{vmatrix} x^{n-1} & \cdots & 1 \\ (x+1)^{n-1} & & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ (x+n-1)^{n-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$

$= (-1)^n \cdot n! \times D_{n-1}$

又 $D_0 = 1$

$\therefore D_n = (-1)^n\cdot n!\cdot D_{n-1}$

$= (-1)^n\cdot n! \times (-1)^{n-1}(n-1)! \times \cdots \times 1$

$= (-1)^{n+n-1+\cdots+1} \times \prod_{i=1}^{n} i!$

$= (-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)}\cdot \prod_{i=1}^{n} i!$

18. 解方程

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解：克拉默法则 (略).

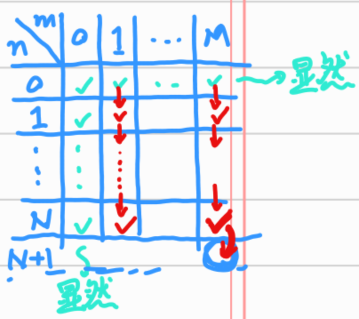
19. 用数学归纳法求证

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

证明：记 $D_{n,m} = \begin{pmatrix} A_n & 0 \\ C_{n,m} & B_m \end{pmatrix}$ 其中 $A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，$B_m = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix}$

对 $n=0$ 或 $m=0$ 时，显然 $|D_{n,m}| = |A_n|\cdot|B_m|$.

数学归纳的推导链



假设 $(n,m)=(N,M)$ 时有 $|D_{n,m}| = |A_n|\cdot|B_m|$.

现证 $(n,m)=(N+1,M)$ 也成立.

$$|D_{N+1,M}| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,N+1} & \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{N+1,1} & \cdots & a_{N+1,N+1} & \\ & C & & B_M \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{线性性质}]{\text{行列式的}} \sum_{j=1}^{N+1} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1j} & 0 & \cdots & 0 & \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2j} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,N+1} & \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \\ a_{N+1,1} & \cdots & & a_{N+1,j} & & \cdots & a_{N+1,1} & \\ & & & C & & & & B_M \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{列交换}]{\text{适当}} \sum_{j=1}^{N+1} (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} \begin{matrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{N+1,j} \end{matrix} & A_{1j} & \\ & C & B_M \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{N+1} (-1)^{j-1} a_{1j} \begin{vmatrix} A_{1j} & \\ C' & B_M \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{假设}} \sum_{j=1}^{N+1} (-1)^{j-1} a_{1j} |A_{1j}|\cdot|B_M|$$

$$\xlongequal[\text{展开式}]{\text{1st 行}} |A_{N+1}|\cdot|B_M|$$

#

21. 设 $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ 互不相同

$b_1,\dots b_n\in\mathbb{R}$.

用克拉默法则证明

∃! 实系数多项式

$$f(x)=c_{n-1}x^{n-1}+\dots\dots+c_1x+c_0$$

s.t. $f(a_i)=b_i$, $i=1,\dots n$.

证明：代入 $f(a_i)=b_i$ 得方程组.

$$\begin{pmatrix} a_1^{n-1} & \cdots & a_1 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_n^{n-1} & \cdots & a_n & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{n-1} \\ \vdots \\ c_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

要证存在唯一解，仅需证行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1^{n-1} & \cdots & a_1 & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n^{n-1} & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix}\neq 0$$

回顾 Ex 17

数学归纳法

- $n=1$ 时 $D_n=|1|\neq 0$
- $n=N+1$ 时

$$D_{N+1}=\begin{vmatrix} a_1^N & \cdots & a_1 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{N+1}^N & \cdots & a_{N+1} & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[i=1,\dots,N]{C_i-a_{N+1}C_{i+1}}\begin{vmatrix} (a_1-a_N)a_1^{N-1} & \cdots & a_1-a_N & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (a_{N-1}-a_N)a_{N-1}^{N-1} & \cdots & a_{N-1}-a_N & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{展开式}]{\text{第}(N+1)\text{行}}(-1)^{N+1+N+1}\cdot\begin{vmatrix} (a_1-a_{N+1})a_1^{N-1} & \cdots & a_1-a_N \\ \vdots & & \vdots \\ (a_N-a_{N+1})a_N^{N-1} & \cdots & a_N-a_{N+1} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{公因子}]{\text{每行提出}}\prod_{i=1}^{N}(a_j-a_{N+1})\cdot D_N\neq 0$$

$\hookrightarrow a_j\neq a_{N+1}$ & $D_N\neq 0$

#

升阶法
例 1

计算 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 \end{vmatrix}$

解：通过升阶考虑范德蒙德行列式 $V=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x^3 \end{vmatrix}$

对 V 按 1st 列展开，得

$V = 1\cdot V_{1,4} + x\cdot V_{2,4} + x^2\cdot V_{3,4} + x^3\cdot V_{4,4}$

其中 $V_{3,4}=(-1)^{3+4}\cdot D$ 为 x^2 的系数

另一方面

回顾例 5.2

$V=(x-x_3)(x-x_2)(x-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_2-x_1)$

可得 x^2 的系数为

$-(x_1+x_2+x_3)(x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_2-x_1)$

综上所述

$D=-V_{3,4}=(x_1+x_2+x_3)(x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_2-x_1)$ #

升阶法

例 2. 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_2x_1 & x_3x_1 & \cdots & x_nx_1 \\ x_1x_2 & 1+x_2^2 & x_3x_2 & & x_nx_2 \\ x_1x_3 & x_2x_3 & 1+x_3^2 & & x_nx_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1x_n & x_2x_n & x_3x_n & \cdots & 1+x_n^2 \end{vmatrix}$$

解：升阶考虑

$$D_n' = \begin{vmatrix} 1 & & & & & \\ x_1 & 1+x_1^2 & x_2x_1 & x_3x_1 & \cdots & x_nx_1 \\ x_2 & x_1x_2 & 1+x_2^2 & x_3x_2 & & x_nx_2 \\ x_3 & x_1x_3 & x_2x_3 & 1+x_3^2 & & x_nx_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_1x_n & x_2x_n & x_3x_n & \cdots & 1+x_n^2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[i=1,\ldots,n]{C_{i+1}-x_i\cdot C_1} \begin{vmatrix} 1 & -x_1 & -x_2 & -x_3 & \cdots & -x_n \\ x_1 & 1 & & & & \\ x_2 & & 1 & & & \\ x_3 & & & 1 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ x_n & & & & & 1 \end{vmatrix}$$

解爪型行列式（略）

$\Rightarrow D_n = D_n' \quad \cdots\cdots$ #

拆分法
例

计算 $D_n = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$ $(n \geq 2)$

解: Case $n=2$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1+x_1y_2 \\ 1 & 1+x_2y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1y_1 & 1+x_1y_2 \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 \end{vmatrix}$$

$$= (x_2-x_1)y_2 + \begin{vmatrix} x_1y_1 & 1 \\ x_2y_1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 \\ x_2y_1 & x_2y_2 \end{vmatrix}$$

$$= (x_2-x_1)y_2 + y_1(x_1-x_2) + 0$$

$$= (x_1-x_2)(y_1-y_2)$$

Case $n>2$.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ \vdots & & & \vdots \\ x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \square \\ \vdots & \vdots & \\ 1 & 1 & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x_1y_2 & \square \\ \vdots & \vdots & \\ 1 & x_ny_2 & \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} xy & 1 & \square \\ \vdots & \vdots & \\ xy & 1 & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} xy & xy & \square \\ \vdots & \vdots & \\ xy & xy & \end{vmatrix}$$

$=0$ 类似 $=0$ $=0$

$$\begin{vmatrix} 1 & xy & 1 & \square \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & xy & 1 & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & xy & xy & \square \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & xy & xy & \end{vmatrix}$$

$=0$ $=0$

$=0$ #