习题课 Ch 4

1. 解下列线性方程组

(1)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 + x_5 = 4 \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 10 \\ \quad - x_2 - 13x_3 - 2x_4 + x_5 = -14 \\ \qquad x_3 - 16x_4 + 2x_5 = -11 \\ \qquad\quad 2x_4 + 5x_5 = 12 \end{cases}$$

解：考虑增广矩阵

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & -1 & -3 & 2 & 10 \\ & -1 & -13 & -2 & 1 & -14 \\ & & 1 & -16 & 2 & -11 \\ & & & 2 & 5 & 12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 - 3r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 4 & 1 & 4 \\ & 1 & 14 & -15 & -1 & -2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & 1 & -17 & 0 & -16 \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_4 - r_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & 1 & 2 & 5 \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_5 - 2r_4} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 4 & 1 & 4 \\ & 1 & 14 & -15 & -1 & -2 \\ & & 1 & -17 & 0 & -16 \\ & & & 1 & 2 & 5 \\ & & & & 1 & 2 \end{array}\right)$$

得 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 1, 1, 1, 2)$

2. 设 $\beta = (1,2,1,1)$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

求 β 由 α_i 的线性表示.

解：求解方程

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

考虑增广矩阵

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{2}r_i,\ i=2,3,4]{r_i - r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ & 1 & & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_4]{r_2 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & & 0 \\ & & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 - r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & & 1 & 0 \\ & & 1 & -1 & 0 \\ & & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}r_4]{r_3 - r_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & & 1 & 0 \\ & & 1 & -1 & 0 \\ & & & 1 & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

得 $(k_1, k_2, k_3, k_4) = \left(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

$\Rightarrow \beta = \frac{5}{4} \cdot \alpha_1 + \frac{1}{4}\alpha_2 - \frac{1}{4}\alpha_3 - \frac{1}{4}\alpha_4$ #

3. 设 $\alpha_1 = (3, -1, 1)$

$\alpha_2 = (1, 1, 2)$

$\alpha_3 = (1, -3, -3)$

$\alpha_4 = (4, 0, 5)$

(1) 求证 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关

Pf. 考虑 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4 = 0$

i.e. $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{消元法}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ & 1 & -2 & \frac{5}{3} \\ & & & -\frac{8}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = 0$$

试用 k_1, k_2 为自由未知量.

k_4 可为自由未知量吗? (Why?)

只有 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

可取 k_3 为自由未知量

$k_1 = \quad - k_3$

$k_2 = 2k_3$

得 $\begin{cases} k_1 = -k_3 \\ k_2 = 2k_3 \\ k_4 = 0 \end{cases}$

不妨取 $k_3 = 1$ 得

$-\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0$

$\therefore$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关. #

(2) 求证 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性无关

Pf: 方程 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_4\alpha_4 = 0$

对应 (1) 中方程的系数矩阵去掉 3rd 列

得消元后矩阵 $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ & 1 & \frac{5}{3} \\ & & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

$\therefore$ 方程只有零解

$\therefore$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性无关. #

5. 求证：向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$

与向量组
$$\beta_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{s-1} + \alpha_s$$
$$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{s-1} + \alpha_s$$

$$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{s-1}$$

等价.

Pf. 要证 $\{\alpha_i\}$ 与 $\{\beta_i\}$ 等价

即证它们可以相互线性表示,

- $\{\beta_i\}$ 可被 $\{\alpha_i\}$ 线性表示.

  从 β_i 的表达式可知

- $\{\alpha_i\}$ 可被 $\{\beta_i\}$ 线性表示,

Recall Ch1. 例 4.3

可验证 $\beta_1 + \dots + \beta_n = (n-1)(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)$

$$\therefore \alpha_i = (\alpha_1 + \dots + \alpha_n) - (\alpha_1 + \dots + \alpha_{i-1} + \alpha_i + \dots + \alpha_n)$$
$$= \frac{1}{n-1}(\beta_1 + \dots + \beta_n) - \beta_i$$

#

10. 在 $\mathbb{R}^3$ 中的两组基 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$

$(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&1\\0&3&-1\end{pmatrix}$

(1) 求 $\{\varepsilon\}$ 到 $\{\eta\}$ 的过渡矩阵

解：即求矩阵 A s.t. $(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\cdot A$.

记为增广矩阵 $(\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3 \mid \eta_1\ \eta_2\ \eta_3)$

i.e. $$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&2&0\\1&1&-1&1&1&1\\1&-1&1&&3&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{消元}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&2&0\\&1&&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\&&1&&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1-r_3]{r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&&&\frac{1}{2}&2&\\&1&&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\&&1&&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

得 $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&2&0\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ 为 $\{\varepsilon\}$ 到 $\{\eta\}$ 过渡矩阵 #

(2) 求向量 $\xi=(3,5,0)$ 在 $\{\eta\}$ 下的坐标.

Rmk: 此处 ξ 的坐标默认是在标准基 $\{e\}$ 下

解：解方程 $k_1\eta_1+k_2\eta_2+k_3\eta_3=\xi$

其增广矩阵 $$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\1&1&1&5\\0&3&-1&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{消元}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\&1&-1&-2\\&&1&3\end{array}\right)$$

得 ξ 在 $\{\eta\}$ 下的坐标为

$(k_1,k_2,k_3)=(1,1,3)$ #

7.

附 1. 已知 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\4&7&1&10\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\end{pmatrix}$

1) 求 a,b 的值 s.t. b 不能由 $\{\alpha_i\}$ 线性表示,

解: b 不能由 $\{\alpha_i\}$ 线性表示,

$\Leftrightarrow\quad k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=b$ 无解.

考虑增广矩阵 $\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\4&7&1&10\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\end{array}\right)$

$\xrightarrow{\text{消元}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\&1&-1&2\\&&a-1&0\\&&&b-2\end{array}\right)$

$\therefore\ b-2\neq0$ 时方程无解

$\therefore\ b\neq2$ 时, β 不能被 $\{\alpha_i\}$ 线性表示 #

Rmk:

$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta\}$ 线性无关

$\Rightarrow$ $\not\Leftarrow$ β 不能被 $\{\alpha_i\}$ 线性表示

e.g. $\{\alpha\ldots,\beta\}$ 线性无关

$\Leftrightarrow\ a\neq1\ \&\ b\neq2$

$\Rightarrow$ $\not\Leftarrow$ $b\neq2$

$\Leftrightarrow\ \beta$ 不能被 $\{\alpha_i\}$ ....

2) 求 a,b 的值 s.t. β 可被 $\{\alpha_i\}$ 线性表示.

并写出此时表达式

解: 即求 a,b s.t. 题(1)方程有非零解

得 $b=2$ 时 β 能被 $\{\alpha_i\}$ 线性表示

解方程 $\begin{pmatrix}1&2&0\\&1&-1\\&&a-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$

当 $a-1\neq0$ 时, 得 $(k_1,k_2,k_3)=(-1,\ 2,\ 0)$

i.e. $a\neq1$ 时 $\beta=-\alpha_1+\alpha_2$

当 $a-1=0$ 时, k_3 为自由未知量

i.e. $a=1$ 时, $\beta=(-1-2k_3)\alpha_1+(2+k_3)\alpha_2+k_3\alpha_2$

7. 附2. 设矩阵通过有限次行变换矩阵A得到

如何从几何来理解

求证：A与B的列向量有相同的线性关系

Pf. 记 A, B 的列向量分别为 $\{\alpha_i\}$ 和 $\{\beta_i\}$

要证 $\{\alpha_i\}$ 与 $\{\beta_i\}$ 有相同线性关系

即证，对 $\forall (k_1, \ldots, k_n) \in F^n$ 有

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$$

$$\Leftrightarrow k_1\beta_1 + \cdots + k_n\beta_n = 0$$

已知初等变换不改变方程的解集

由 A, B 相差有限初等变换得

$$\{k \mid A\cdot k = 0\} = \{k \mid B\cdot k = 0\}$$

$\therefore$ $k = (k_1, \ldots, k_n)$ 满足 $A\cdot k = 0$

$\Leftrightarrow$ k 满足 $B\cdot k = 0$

又 $A\cdot k = k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n$

$B\cdot k = k_1\beta_1 + \cdots + k_n\beta_n$

$\therefore$ $\{\alpha_i\}$ 与 $\{\beta_i\}$ 有相同线性关系 #

7. 附3. 设 A 为 $n\times n$ 方阵 满足

- $A^k x = 0$ 有解 $x = \alpha$
- $A^{k-1}\alpha \neq 0$

尝试构造题中的A

求证：$\{\alpha, A\alpha, \ldots, A^{k-1}\alpha\}$ 线性无关

Pf. 考虑方程 $k_0\alpha + k_1(A\alpha) + \cdots + k_{k-1}(A^{k-1}\alpha) = 0$

同时乘 A^{k-1} 得 $k_0(A^{k-1}\alpha) + k_1(A^k\alpha) + \cdots + k_{k-1}(A^{2k-2}\alpha) = 0$

$$= k_0(A^{k-1}\alpha) + k_1(A^k\alpha) + k_2(A\cdot A^k\alpha) + \cdots + k_{k-1}(A^{k-2}A^k\alpha)$$

$$\xlongequal{A^k\alpha=0} k_0(A^{k-1}\alpha)$$

由 $A^{k-1}\alpha \neq 0$ 得 $k_0 = 0$

类似地，乘 A^{k-2} 得 $k_1 = 0$

$\vdots$ $\vdots$

A 得 $k_{k-1} = 0$

$\therefore$ $k_0\alpha + k_1(A\alpha) + \cdots + k_{k-1}(A^{k-1}\alpha) = 0$ 只有零解

$\therefore$ $\{\alpha, A\alpha, \ldots, A^{k-1}\alpha\}$ 线性无关 #

7. 附 4. 设 A 为 $m\times n$，B 为 $n\times m$ $(m<n)$

(What if $n\le m$)

求证：$A\cdot B=E \Rightarrow B$ 的列向量组线性无关

Pf 1: 记 B 的列向量组为 $\{\beta_1,\dots,\beta_m\}$

反证，假设 $\{\beta_i\}$ 线性相关

i.e. $\exists$ 不全为零 k_i s.t. $k_1\beta_1+\dots+k_m\beta_m=0$

$$\therefore A\cdot B\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_m\end{pmatrix}=A\cdot(\beta_1,\dots,\beta_m)\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_m\end{pmatrix}=A\cdot\vec{0}=\vec{0}$$

与 "$A\cdot B=E$" 矛盾

$\hookrightarrow$ ($\because A\cdot B\cdot\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_m\end{pmatrix}=E\cdot\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_m\end{pmatrix}\neq 0$) #

回顾 Ch4 Thm 5.4

Pf 2: $\because \operatorname{rank}(AB)=\operatorname{rank}(E)=m$

又 $\operatorname{rank}(AB)\le\operatorname{rank}(B)\le m$

$\therefore$ 上述不等式中 "$\le$" 取 "$=$"

$\Rightarrow \operatorname{rank}(B)=m$

$\therefore$ B 的列秩 $=\operatorname{rank}(B)=m$

i.e. $\{\beta_i\}$ 极大线性无关组的向量个数为 m

$\therefore$ $\{\beta_i\}$ 线性无关 #