克拉默法则

定理 5.3 克拉默法则 (Cramer's Rule)

作业

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} & b_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1, \\ & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

10 (4)
11 (6)
12 (3) (4)

若它的系数行列式 $D = |a_{ij}| \neq 0$, 则该方程组有唯一解

$|A| \cdot x_j = |A_j|$

$$\boxed{x_i = \frac{D_i}{D}}, i = 1, \cdots, n$$

其中 D_i 是将系数行列式中的第 i 列换成 $(b_1, \cdots, b_n)^T$ 后的行列式.

克拉默法则存在性证明

要证 $x_i = D_i/D$ 确是 $Ax = b$ 的解. 即要证, 对任意 $s = 1, \ldots, n$, 有

$$a_{s,1}\frac{D_1}{D} + \cdots + a_{s,n}\frac{D_n}{D} = b_s.$$

我们有

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= \frac{1}{D}\left(a_{s,1}\sum_k b_k A_{k,1} + \cdots + a_{s,n}\sum_k b_k A_{k,n}\right)\\
&= \frac{1}{D}\left(b_1\sum_k a_{s,k}A_{1,k} + \cdots + b_n\sum_k a_{s,k}A_{n,k}\right)\\
&= \frac{1}{D}b_s\sum_k a_{s,k}A_{s,k} = \frac{1}{D}b_s D = b_s.
\end{aligned}$$

$\sum_k a_{s,k}A_{l,k}$

$(a_{s1} \cdots a_{sk} \cdots a_{sn})$

if $n \neq s$ then $\sum_k a_{s,k}A_{n,k} = 0$

克拉默法则唯一性证明

假设 $Ax = b$ 有另一个解 $x = c$.
我们要证 $c_s = D_s/D$, $s = 1, \dots, n$. 代入方程组, 并让第 i 行乘以 $A_{i,s}$, 可得

$$\left\{\begin{array}{l}
a_{1,1}A_{1,s}c_1 + \cdots + a_{1,s}A_{1,s}c_s + \cdots + a_{1,n}A_{1,s}c_n = b_1A_{1,s} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\
a_{n,1}A_{n,s}c_1 + \cdots + a_{n,s}A_{n,s}c_s + \cdots + a_{n,n}A_{n,s}c_n = b_nA_{n,s}
\end{array}\right.$$

$=|A|$

$n \neq s \Rightarrow \dots = 0$

$= D_s$

$$\begin{array}{c} s \\ \left(\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{array}\right) \end{array}$$

将 n 个方程叠加可得

$$Dc_s = D_s.$$

2 x 2 的情形

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \\ \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cdot & \cdot \end{vmatrix}} \end{cases}$$

例题 5.3

例题 5.3

求一个三次多项式 $f(x)$，使得 $f(1)=6$，$f(2)=20$，$f(-1)=8$，$f(-3)=10$.

例题 5.3 解

三次多项式 $f(x)$ 有形式 $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$.

$$\begin{cases} a_0+a_1+a_2+a_3=6 \\ a_0+2a_1+4a_2+8a_3=20 \\ a_0-a_1+a_2-a_3=8 \\ a_0-3a_1+9a_2-27a_3=10 \end{cases}$$

例题 5.3 解

例题 5.3 解

设 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$. 注意这里, a_i 是我们需要求的, 它们才是未知量. 代入条件 x 的取值可得方程组:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 & = 6 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 & = 20 \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 & = 8 \\ a_0 - 3a_1 + 9a_2 - 27a_3 & = 10 \end{cases}$$

求解方程组, 可得.

定理 5.4

定理 5.4 (齐次方程组情形)

$f(k \cdot x) = k \cdot f(x)$

$y = f(x)$ graph

对于齐次方程组

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n & = 0 \\ & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,n}x_n & = 0 \end{cases}$$

若系数矩阵的行列式 $D \neq 0$, 则只有零解.
若有非零解, 则 $D = 0$.

$a \cdot x = b$

if $b = 0$

then $a \neq 0$, $x = \frac{b}{a} = 0$

$x \neq 0$, $ax = 0$

$\Rightarrow a = 0$

$A \cdot x = b$

if $b = 0$

then $|A| \neq 0$, $x_i = \frac{|A_i|}{|A|} = \frac{0}{|A|} = 0$

$x \neq 0 \Rightarrow \exists\, i$ s.t. $x_i \neq 0 \Rightarrow |A| \cdot x_i = |A_i|$

$\Rightarrow |A| = 0$

例题 5.4

例题 5.4

如果齐次方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 & = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 & = 0 \end{cases}$$

有非零解，求 λ

$$|A| = 0$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm 1$$

例题 5.4 解

例题 5.4 解

要使齐次方程组有非零解, 其系数矩阵的行列式必须为零, 即

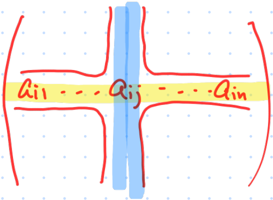
$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

得 $\lambda = \pm 1$.

回顾行列式按一行展开

行列式按第 i 行展开

$$|A| = \sum_{j} \boxed{a_{i,j}} \boxed{|A_{[i,j]}|}.$$



Q: $a_{i,j}$ 不是 1×1, 而是 $k \times k$?

- 1×1: $a_{i,j}$ 中 j 从 1 到 n 取一遍即可. $A_{[i,j]}$ 是 "剩下" 的矩阵

k 阶子式

选取

- k 行: $I_k = (i_1, \ldots, i_k)$
- k 列: $J_k = (j_1, \ldots, j_k)$

记

- A_{I_k,J_k} 为 A 中在 I_k 行 J_k 列交汇处按原来次序提取的 $\overset{k\times k}{k^2}$ 子矩阵.
- $A_{[I_k,J_k]}$ 为去掉 I_k 行 J_k 列后 "剩下的" $(n-k)\times(n-k)$ 子矩阵

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} &
\begin{pmatrix}
\cancel{a_{1,1}} & a_{1,2} & \cancel{a_{1,3}} & a_{1,4} \\
a_{2,1} & \cancel{a_{2,2}} & a_{2,3} & \cancel{a_{2,4}} \\
\cancel{a_{3,1}} & a_{3,2} & \cancel{a_{3,3}} & a_{3,4} \\
a_{4,1} & \cancel{a_{4,2}} & a_{4,3} & \cancel{a_{4,4}}
\end{pmatrix}
\end{array}$$

$I_2 = (2,4)$

$J_2 = (1,3)$

$$A_{(2,4),(1,3)} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{41} & a_{43} \end{pmatrix}$$

$$A_{[\ldots]} = \begin{pmatrix} a_{1,2} & a_{1,4} \\ a_{3,2} & a_{3,4} \end{pmatrix}$$

拉普拉斯展开定理

定理 5.5 (拉普拉斯展开定理)

给定 $0 < k < n$. 行列式 $|A|$ 按 I_k 行展开为

$$|A| = \sum_{\boxed{J_k \text{ 为 } n \text{ 中选 } k}} |A_{I_k,J_k}||A_{[I_k,J_k]}|.$$

$\to C_n^k$

$k=1$ $\quad |A| = \sum_{j\text{在}n\text{取}1} a_{ij} |A[i,j]|$

$\Leftrightarrow j=1,\dots,n$

$k=2$. $\quad |A| = \sum_{(j_1,j_2)\text{在}n\text{取}2} |A_{(i_1,i_2),(j_1,j_2)}| |A[\dots]|$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$(i_1,i_2)=(1,2)$

$$\begin{aligned} & |A_{(1,2)(1,2)}| \, |A[\cdot,(1,2)]| \quad = a_{33} \\ + & |A_{(1,2)(1,3)}| \, |A[\cdot,(1,3)]| \quad \to a_{3,2} \\ + & |A_{(1,2)(2,3)}| \, |A[\cdot,(2,3)]| \quad \to a_{3,1} \end{aligned}$$

例题 5.5

例题 5.5

求证

$$\begin{array}{c|c|c} & k & n-k \\ k & A & \boxed{0} \\ n-k & B & C \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ B & C \end{vmatrix} = |A||C|.$$

解

按前 k 行展开.

$$D = \sum_{(j_1 \cdots j_k):\text{在}n\text{取}k} \left|D_{(1 \dots k)(j_1 \dots j_k)}\right| \left|D'_{[(1 \dots k)(j_1 \dots j_k)]}\right|$$

$$= \left|D_{(1 \dots k)(1 \dots k)}\right| \left|D_{[\dots]}\right|$$

$$= |A| \cdot |C|$$

例题

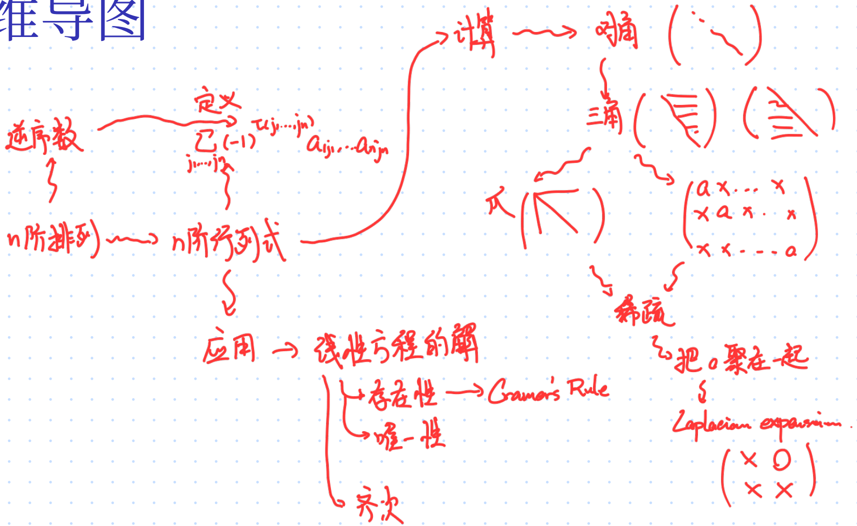
计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ a_2 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & d_2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_2 \leftrightarrow c_3]{r_2 \leftrightarrow r_3} \left|\begin{array}{cc|cc} a_1 & b_1 & & \\ a_2 & b_2 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline & & c_1 & d_1 \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & c_2 & d_2 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

Outline

思维导图



逆序数
定义
$\sum\limits_{j_1\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}$
n阶排列
n阶行列式
计算
对角
三角
爪
稀疏
把0聚在一起
Laplacian expansion
应用
线性方程的解
存在性
Cramer's Rule
唯一性
齐次