Outline

5.0 引言

5.1 矩阵的特征值和特征向量

5.2 相似矩阵与矩阵可对角化

5.3 实对称矩阵的对角化

$A \overset{\text{相似}}{\sim} B$: $\exists$ 可逆 P s.t. $P^{-1}BP = A$.

几何: $A \sim B \Leftrightarrow$ 同一个线性映射 f 在不同基下表示

$B = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$A \sim \Lambda$ (可对角化)

$\Updownarrow$

$\exists$ 可逆 P s.t. $P^{-1}AP = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$\{e_1, \dots, e_n\}$下表示

$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$下表示

特征值

$\Updownarrow$

A的 n个线性无关的特征向量 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$v = \underbrace{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}_{=\alpha} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{=x} \longmapsto f(v) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{(\beta_1, \dots, \beta_n)}_{=\beta} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{=y} \qquad = (\beta_1, \dots, \beta_n) \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}}_{=B} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

取 $(\beta_1, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{n1} & \cdots & P_{nn} \end{pmatrix}$

$\Updownarrow$

$\beta = \alpha \cdot P$

$\alpha \cdot x = v = \beta \cdot y = \alpha \cdot P y \Rightarrow x = Py$

$\alpha \cdot A \cdot x = f(v) = \beta \cdot B \cdot y \Rightarrow AP = PB$

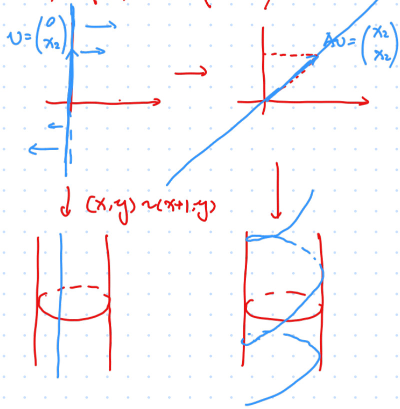
$\alpha A P y \qquad \alpha P \cdot B \cdot y \Rightarrow B = P^{-1}AP$

动机

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 1\\ & 1\end{pmatrix}$$

回顾: 不是所有的方阵都可以对角化.
我们将考虑一类方阵 (实对称矩阵), 并指出此类矩阵可对角化.

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ & 1\end{pmatrix}: \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}x_1+x_2\\ x_2\end{pmatrix}$$



$\mathbb{R}^n$ 中的内积

回顾: $\mathbb{R}^3$ 中 $\alpha = (x_1, x_2, x_3)$ 和 $\beta = (y_1, y_2, y_3)$ 的内积

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \beta &= |\alpha||\beta| \cos\langle \alpha, \beta \rangle \\ &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3. \end{aligned}$$

定义 3.1

$\mathbb{R}^n$ 中的 内积 为映射

$$\begin{aligned} (\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (\alpha, \beta) &\mapsto (\alpha, \beta), \end{aligned}$$

$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

对 $\alpha = (x_1, \ldots, x_n)$ 和 $\beta = (y_1, \ldots, y_n)$, α 和 β 的内积为

n

内积空间

内积空间 $=$ 向量空间 $+$ 内积

e.g. $(\mathbb{R}^n, (\cdot,\cdot))$ (仍简记为 $\mathbb{R}^n$)

内积满足

- $(\alpha,\beta) = (\beta,\alpha)$
- $(k\alpha,\beta) = k(\alpha,\beta)$
- $(\alpha_1+\alpha_2,\beta) = (\alpha_1,\beta)+(\alpha_2,\beta)$
- $(\alpha,\alpha) \geq 0$ 当且仅当 $(\alpha,\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

$= \sum_i x_i^2$

内积诱导长度

定义 3.2

内积空间 $\mathbb{R}^n$ 中的 α 的长度 $|\alpha|$ 定义为

$$|\alpha| \overset{\text{勾股定律}}{:=} \sqrt{(\alpha, \alpha)}.$$

称 α 为单位向量, 如果 $|\alpha| = 1$.

内积性质

性质 3.1

$|\alpha| = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

1. $|\alpha| \geq 0 \cancel{\Rightarrow \alpha = 0}$
2. $|k\alpha| = |k||\alpha|$

内积性质

性质 3.1

1. Cauchy-Schwartz 不等式: $|(\alpha, \beta)| \le |\alpha| \cdot |\beta|$

证明 3

考察二次多项式 $(\alpha + t\beta, \alpha + t\beta) \geq 0$.

$= (\alpha,\alpha) + t(\alpha,\beta) + t(\beta,\alpha) + t^2(\beta,\beta).$

$= \underbrace{(\beta,\beta)}_{>0} t^2 + 2(\alpha,\beta)\cdot t + (\alpha,\alpha)$

$\Rightarrow (2(\alpha,\beta))^2 - 4(\beta,\beta)\cdot(\alpha,\alpha) \le 0$

$\Rightarrow (\alpha,\beta) \le \sqrt{(\beta,\beta)(\alpha,\alpha)}$

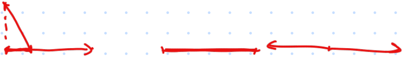
$|(\alpha,\beta)| = |\alpha||\beta||\cos\langle\alpha,\beta\rangle|$

$\le |\alpha||\beta|$

"=" $\Leftrightarrow \langle\alpha,\beta\rangle = 0$ or π

$\Leftrightarrow \alpha,\beta$ 共线

Q: 什么情况取等号?



内积性质

性质 3.1

1. 三角不等式: $|\alpha+\beta| \leq (|\alpha|+|\beta|)^2$

$$|\alpha+\beta|^2 = (\alpha+\beta, \alpha+\beta) = \underline{(\alpha,\alpha)} + \underline{2(\alpha,\beta)} + \underline{(\beta,\beta)} = \underline{|\alpha|^2} + \underline{2|\alpha||\beta|} + \underline{|\beta|^2}$$

要证 $(\alpha,\beta) \leq |\alpha||\beta|$

$$(\alpha,\beta) = |\alpha||\beta|\cdot\cos\theta$$

Q: 什么情况取等号?

"=" $\Leftrightarrow \langle\alpha,\beta\rangle = 0$

$\Leftrightarrow \alpha,\beta$ 同向

e.g. $\beta = -\alpha \neq 0$

$|\alpha+\beta| = 0 < |\alpha||\beta| = |\alpha|^2$

$|(\alpha,\beta)| = |-(\alpha,\alpha)| = |\alpha|^2$

夹角

对 $\alpha \neq 0$, 称 $\frac{\alpha}{|\alpha|}$ 为 α 的单位化向量.

定义 3.3

内积空间 $\mathbb{R}$ 中的不为零的向量 α 与 β 的夹角

$$\langle \alpha, \beta \rangle := \arccos\left(\frac{(\alpha, \beta)}{|\alpha| \cdot |\beta|}\right) \in [0, \pi]$$

正交

定义 3.4

称 α 和 β 垂直 (或 正交), 如果 $\langle\alpha, \beta\rangle = \frac{\pi}{2}$. 约定零向量 $\mathbf{0}$ 与任意向量正交.

性质 3.2

α, β 正交, 当且仅当, $(\alpha, \beta) = 0$.

正交向量组

$$\begin{array}{ccccc}
\text{线性无关组} & \xrightarrow{\text{极大}} & \text{基} & \xrightarrow{\text{单位化}} & \text{单位基} \\
\downarrow{\scriptstyle\text{正交}} & & \downarrow{\scriptstyle\text{正交}} & & \downarrow \\
\text{正交组} & \xrightarrow{\text{极大}} & \text{正交基} & \xrightarrow{\text{单位化}} & \text{单位正交基}
\end{array}$$

定义 3.5

一个由非零向量组成向量组被称为 **正交向量组**,
如果它的向量都相互正交.

定理 3.1

正交向量组必线性无关.

正交向量组 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$

观察 $k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$

$$(k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n, \alpha_i)$$
$$= k_1\underbrace{(\alpha_1, \alpha_i)}_{=0} + \cdots + k_i\underbrace{(\alpha_i, \alpha_i)}_{=|\alpha_i|^2>0} + k_n\underbrace{(\alpha_n, \alpha_i)}_{=0}$$
$$= k_i \cdot |\alpha_i|^2$$
$$\Rightarrow k_i = 0$$

标准正交基

定义 3.6

- 正交基 $=$ 基 $+$ 正交
- 标准正交基 $=$ 正交基 $+$ 单位化

一个向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 为标准正交基, 当且仅当,

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \delta_{i,j}. = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

e.g. R^n 中的单位向量 $e_1, \ldots, e_n$ 构成一组标准正交基.

$$(e_i, e_j) = 0\times 0 \cdots \underset{i}{1\times 0} + \cdots \underset{j}{0\times 1} + \cdots 0\times 0 = 0$$

例题 3.1

例题 3.1

取 R^n 的一组标准正交基 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.
求证: 如果 $\alpha = k_1\alpha_1 + \ldots k_n\alpha_n$, 那么 $k_i = (\alpha_i, \alpha)$.

$$(\alpha, \alpha_i) = (k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n, \alpha_i)$$

$$= k_1 \underbrace{(\alpha_1, \alpha_i)}_{=0} + \cdots + k(\alpha_i, \alpha_i) + \cdots + k_n \underbrace{(\alpha_n, \alpha_i)}_{=0}$$

$$= k_i \underbrace{|\alpha_i|^2}_{=1} = k_i$$

可见, α 在标准正交基 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 下的坐标

$$\alpha = (\alpha, \alpha_1)\alpha_1 + \cdots + (\alpha, \alpha_n)\alpha_n.$$

性质 3.3

标准正交基下, 可以简化向量的运算.

性质 3.3

取 $\mathbb{R}^n$ 下的一组标准正交基 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. 记 α 和 β 在这组基下的坐标分别为 $x_1, \ldots, x_n$ 和 $y_1, \ldots, y_n$. 那么

- $(\alpha, \beta) = x_1 y_1 + \ldots x_n y_n$
- $|\alpha|^2 = (\alpha, \alpha) = x_1^2 + \ldots x_n^2$

$\alpha = \sum_i x_i \alpha_i$

$\beta = \sum_j y_j \alpha_j$

$(\alpha, \beta) = (\sum_i x_i \alpha_i, \sum_j y_j \alpha_j)$

$= \sum_i \sum_j x_i y_j (\alpha_i, \alpha_j)$

$= \sum_{i=j} x_i y_j (\alpha_i, \alpha_j)$, $|\alpha_i|^2 = 1$

$= \sum_i x_i y_i$

构造标准正交基

Q: 如何得到一组标准正交基? 特别地, 能否通过一组已知的基 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 构造一组标准正交基 $\eta_1, \ldots, \eta_n$?
这等价于以下两个问题:

1. (正交化) $\{\alpha_i\}$ 化为正交基 $\{\beta_i\}$
2. (标准化 / 单位化) $\{\beta_i\}$ 化为标准正交基 $\{\eta_i\}$

Schmidt 正交化

定理 3.2

给定 $\mathbb{R}^n$ 上的一组基 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, 取

- $\beta_1 = \alpha_1$
- $\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1$
- $\vdots$
- $\beta_n = \alpha_n - \frac{(\alpha_n, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 \cdots - \frac{(\alpha_n, \beta_{n-1})}{(\beta_{n-1}, \beta_{n-1})} \beta_{n-1}$

那么 $\beta_1, \ldots, \beta_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 一组正交基.

Schmidt 正交化证明

对维数 n 进行数学归纳法.

$n = 2$ 情况:

$$(\beta_2, \beta_1) = \left(\alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \alpha_1)}{(\alpha_1, \alpha_1)} \cdot \alpha_1, \alpha_1\right) = (\alpha_2, \alpha_1) - \frac{(\alpha_2, \alpha_1)}{(\alpha_1, \alpha_1)} (\alpha_1, \alpha_1) = 0$$

假设 $n = k$ 时成立, 验证 $n = k + 1$ 情况:

要验证 $(\beta_{k+1}, \beta_i) = 0 \quad i = 1, \dots, k$

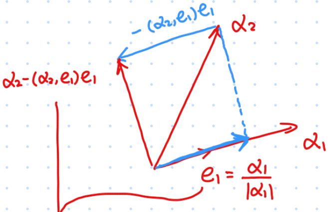
$$= \left(\alpha_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \frac{(\alpha_{k+1}, \beta_j)}{(\beta_j, \beta_j)} \cdot \beta_j, \beta_i\right)$$

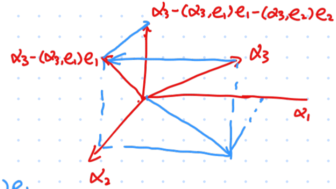
$$= (\alpha_{k+1}, \beta_i) - \sum_{j} \frac{(\alpha_{k+1}, \beta_j)}{(\beta_j, \beta_j)} (\beta_j, \beta_i)$$

$$= (\alpha_{k+1}, \beta_i) - \frac{(\alpha_{k+1}, \beta_i)}{(\beta_i, \beta_i)} (\beta_i, \beta_i)$$

$$= 0$$

Schmidt 正交化的几何意义





α_2在e_1投影向量 $(\alpha_2,e_1)e_1$

$$\alpha_2-\left(\alpha_2,\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|}\right)\cdot\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|}$$

$$=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\alpha_1)}{|\alpha_1||\alpha_1|}\alpha_1$$

$$=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\cdot\alpha_1$$

例题 3.2

单位化 标准化

$\beta_1=\alpha_1 \rightsquigarrow \eta_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}$

$\beta_2=\alpha_2-(\alpha_2,\eta_1)\cdot\eta_1 \rightsquigarrow \eta_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}$

$\beta_3 \cdots\cdots \longrightarrow \eta_3$

例题 3.2

对以下的基进行标准正交化

- $\alpha_1 = (1,1,1,1)$
- $\alpha_2 = (3,3,1,1)$
- $\alpha_3 = (1,9,1,9)$
- $\alpha_4 = (4,0,0,0)$

$\beta_1=\alpha_1 \rightsquigarrow \eta_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

$\beta_2=\alpha_2-(\alpha_2,\eta_1)\eta_1 \rightsquigarrow \eta_2=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$

$=(3,3,1,1)-(2,2,2,2)$

$=(1,1,-1,-1)$

$\beta_3=\alpha_3-(\alpha_3,\eta_1)\eta_1-(\alpha_3,\eta_2)\eta_2 \rightsquigarrow \eta_3=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

$=(1,9,1,9)-(5,5,5,5)$

$=(-4,4,-4,4)$

$\beta_4=\alpha_4-(\alpha_4,\eta_1)\eta_1-(\alpha_4,\eta_2)\eta_2-(\alpha_4,\eta_3)\eta_3$

$=(4,0,0,0)-(1,1,1,1)-(1,1,-1,-1)-(1,-1,1,-1)$

$=(1,-1,-1,1) \rightsquigarrow \eta_4=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

正交矩阵

列向量 $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$

$= \left[\begin{pmatrix}\alpha_1\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}\alpha_n\end{pmatrix}\right]$

$A^T = \begin{bmatrix}(\cdots\alpha_1\cdots)\\ \vdots\\ (\cdots\alpha_n\cdots)\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{pmatrix}$

$A^TA = \begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{pmatrix}(\alpha_1\cdots\alpha_n) = \begin{bmatrix}\alpha_1^T\alpha_1 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n\\ \vdots & \alpha_i^T\alpha_j & \vdots\\ \alpha_n^T\alpha_1 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n\end{bmatrix}$

定义 3.7

$n \times n$ 实矩阵 A 被称为 正交矩阵 如果

$$A^TA = E.$$

$\alpha_i^T\alpha_j = (x_1^{(i)},\dots,x_n^{(i)})\begin{pmatrix}x_1^{(j)}\\ \vdots\\ x_n^{(j)}\end{pmatrix}$

$= \sum_{k=1}^{n} x_k^{(i)} x_k^{(j)}$

$A^TA = ((\alpha_i,\alpha_j))_{ij} = (\delta_{ij})$

A 是正交矩阵

$\Leftrightarrow$ 列向量 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ 是一组标准正交基.

正交矩阵 A 满足以下性质:

- $A^{-1} = A^T$
- A^{-1} 和 A^T 也是正交矩阵
- $|A| = \pm 1$ $\quad |A|^2 = |A^TA| = |E| = 1$
- 正交矩阵的乘积也是正交