Outline

线性替换 $Y \xrightarrow{C} X = CY$.

⇝ 非退化 . . . 即 C^{-1} 存在

对称 合同 标准型 $\begin{pmatrix} +1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & +1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$

A 作为一个映射

相似:

$$\begin{tikzcd} X \in \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^n \ni AX \arrow[d, "C^{-1}"] \\ Y \in \mathbb{R}^n \arrow[u, "C"] \arrow[r, "C^{-1}AC"] & \mathbb{R}^n \ni C^{-1}ACY \end{tikzcd}$$

A 作为一个"内积"

合同.

$$\begin{tikzcd} (X,X) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{R} \ni \boxed{X^TAX} \\ (Y,Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \arrow[u, "C"] \arrow[ur, "C^TAC"'] & \end{tikzcd}$$

$\boxed{X^TAX} = (CY)^TA(CY) = Y^TC^TACY$

前言

回顾: 实二次型 f 有唯一规范形

$$\begin{pmatrix} I_{p_+} & & \\ & \boxed{-I_{p_-}} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

本节中, 我们将考虑负惯性指数 $p_- = 0$ 的情形.

正定二次型

定义 2.1

$= X^TAX = \sum_i a_{ii}x_i^2 + \sum_{i<j} a_{ij}x_ix_j$

二次型 $f(X)$ 成为 半正定的, 如果任意 $C \in \mathbb{R}^n$ 有

$= C^TAC$　　内积正定的

$$f(C) \geq 0.$$

$(C,C) \geq 0$

$\& \ (C,C)=0 \Rightarrow C=0$

进一步地, 如果任意 $C \neq 0$ 有

$$f(C) > 0,$$

那么称 f 为 正定的.

- "正定" $\Rightarrow$ "半正定"
- "正定" $\not\Leftarrow$ "半正定"

$C=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow C^TAC=0.$

$\begin{pmatrix}1&\\&0\end{pmatrix}$

例题 2.1

以下都是正定二次型

- $x_1^2 + \cdots + x_n^2$
- $x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + \cdots + (x_1 + \cdots + x_n)^2$

例题 2.2

- $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ 正定
- $f(x_1, \ldots, x_n) = \underbrace{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2}$ 半正定

$f(0, \cdots, 0, 1) = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$X^TAX = (x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

性质 2.1

非退化线性替换保持正定:

性质 2.1

正定实二次型经过非退化线性替换后仍为正定实二次型.

反证: 取正定二次型 X^TAX.

非退化线性替换 $X=C\cdot Y$.

假设替换后的 $Y^TC^TAC\cdot Y$ 不是正定的

$\exists\ Y_0\neq 0\ \ s.t.\ \ Y_0^T(C^TA\cdot C)\cdot Y_0\leq 0$

$\Rightarrow X_0=C\cdot Y_0\neq 0$ ($\because C$ 可逆)

$\Rightarrow X_0^TAX_0\leq 0$ 与 A 正定矛盾 #

定理 2.1

$$\begin{tikzcd} X & \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{R} \\ Y & \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \arrow[u, "C"] \arrow[ur, bend right] & C^TAC=\boxed{\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}} \\ Z & \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \arrow[u, "\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}"] \arrow[ur, bend right] & \begin{pmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{pmatrix} \end{tikzcd}$$

定理 2.1

考虑 $f(X) = X^TAX$. 以下命题等价:

1. f 正定
2. A 的特征值均为正
3. $\cancel{r(A) = n\ \&}$ A 的正惯性指数为 n
4. A 合同于 E
5. 存在可逆 P s.t. $A = P^TP$

定理 2.1 ($1 \Rightarrow 2$)

1. f 正定
2. A 的特征值均为正

反证. 假设 A 存在 $\lambda_1 < 0$.

A 可对角为 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

可取 $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$$C^T A C = (1\ 0\ \cdots\ 0) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$= \lambda_1 < 0$ 矛盾.

定理 2.1 ($2 \Rightarrow 3$)

1. A 的特征值均为正
2. $r(A) = n$ & A 的正惯性指数为 n

定理 2.1 $(3 \Rightarrow 4)$

1. $r(A) = n$ & A 的正惯性指数为 n
2. A 合同于 E

定理 2.1 ($4 \Rightarrow 5$)

1. A 合同于 E
2. 存在可逆 P s.t. $A = P^T P$

定理 2.1 ($5 \Rightarrow 1$)

1. 存在可逆 P s.t. $A = P^T P$
2. f 正定

性质 2.2

A 正定 ⇒ "$X^TAX > 0$ if $X \neq 0$"

定义

实对称矩阵称为 正定矩阵 如果其对应的二次型是正定的.

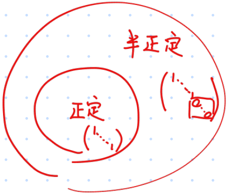
性质 2.2

正定矩阵 A 的行列式大于 0.

Q: 半正定矩阵的行列式 ≥ 0

$$A \backsim \begin{pmatrix} E & \\ & 0 \end{pmatrix}$$

$$\backsim_{\text{合同}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad |A| = \prod_i \lambda_i > 0$$



定义 2.2

Q: “矩阵是正定的” 的必要条件?

定义 2.2

矩阵 $A = (a_{i,j})_{n\times n}$ 的 k 阶顺序主子式 是指

$$\begin{pmatrix} \overbrace{a_{11} \quad \cdots \quad a_{1k}}^{k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots & & \vdots \\ \underbrace{a_{k1} \quad \cdots \quad a_{kk}}_{} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} \quad \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad P_k := \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} \end{vmatrix}$$

定理 2.2

定理 2.2

是

实对称矩阵实正定的, 当且仅当, 其各阶顺序主子式都大于零, i.e.

$$P_k > 0, \qquad \forall k = 1, \ldots, n.$$

略证

$$A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

例题 2.3

例题 2.3

判断下列二次型是否为正定的

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$P_1 = 3 > 0$

$P_2 = 3 \times 2 - (-1) \times (-1) = 5 > 0$

$P_3 = 3 \times 2 \times 4 + \cancel{4 + 4}$

$- 4 - 12 \cancel{-8}$

$= 24 - 16 = 8 > 0.$

负定

$$\begin{pmatrix} -I & \\ & 0 \end{pmatrix}$$

定义 2.3

称 $f(X)$ 是 半负定的 如果

$$f(X) \leq 0 \qquad \forall X \in \mathbb{R}^n.$$

进一步地, 称 $f(X)$ 是 负定的 如果

$$f(X) < 0 \qquad \forall X \neq 0 \in \mathbb{R}^n.$$

对负定 (或半负定) f 的讨论可转化为正定 (或半正定) $-f$ 的讨论.

Outline

曲面方程

回顾

$\ell := \left\{ P \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{array}{l} \pi_1 \cdots\cdots \\ \pi_2 \cdots\cdots \end{array} \right\}$

- 直线 = 平面与平面的交.
- 平面 $\pi := \{ P \in \mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0 \}$

曲面的方程

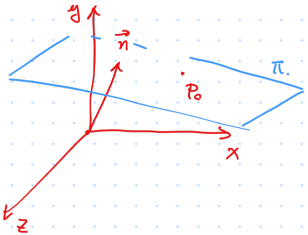
取 $n = (n_x, n_y, n_z)$

$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

点法式方程 $\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$

写成坐标

$n_x \cdot (x - x_0) + n_y \cdot (y - y_0) + n_z (z - z_0) = 0$



球面方程

球面 $= \{P \in \mathbb{R}^3 | d(P, P_0) = r\}$

- 球心 $P_0 \in \mathbb{R}^3$
- 半径 $r \geq 0$

$\mathbb{R}^3$ 中的球面方程

$$|\overrightarrow{P_0P}| = d(P_0, P) = r$$

或

$$|\overrightarrow{P_0P}|^2 = r^2.$$

球面方程的坐标表示

球面方程的坐标可表示为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2.$$

展开得

$$x^2+y^2+z^2-2x_0x-2y_0y-2z_0z+(x_0^2+y_0^2+z_0^2-r^2)=0.$$

$(3,0)$ 方程表球面

(m,n)型方程

$$\begin{pmatrix} E_m & \\ & -E_n \end{pmatrix}$$

e.g.

$xy+yz+zx$

$\downarrow$

$(x_1+y_1)(x_1-y_1)+(\cdots)$

反过来, 对于三元二次方程

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

可写为

$$(x-(-\frac{a}{2}))^2+(x-(-\frac{a}{2}))^2+(x-(-\frac{a}{2}))^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{4}-d.$$

记

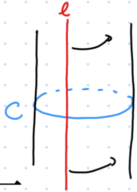
- $(x_0,y_0,z_0)=(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2})$
- $t=\frac{a^2+b^2+c^2}{4}-d$

可得

1. $t>0$: 圆心 (x_0,y_0,z_0), 半径 $\sqrt{t}$ 的球面
2. $t=0$: 点 (x_0,y_0,z_0)
3. $t<0$: $\mathbb{R}^3$ 中无解 (Q: $\mathbb{C}^3$ 呢?)

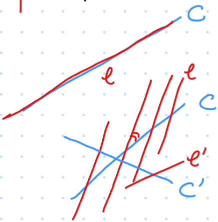
柱面 “理解” (2,0)

柱面 = 一条直线 l 沿空间曲线 C 平行移动所得的曲面



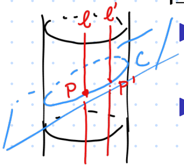
- l 母线
- C 准线

给定柱面, 母线与准线并不唯一.



e.g.

- 直线: 母线和准线唯一确定
- 平面: 母线和准线不唯一
- “柱面”



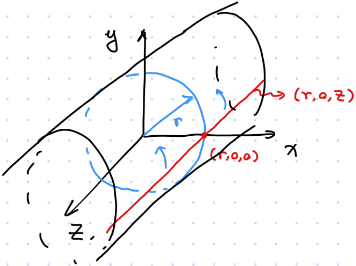
  - 准线不唯一 (取一平面割柱面) 更一般地, 与每条母线相交的曲线均可作准线
  - 母线: 不唯一, 但不同的选择相互平行

例题 3.1

例题 3.1

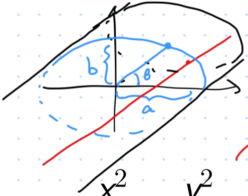
画出下列方程的曲面

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad (r > 0).$$



例题 3.2

三类 二次柱面



- 椭圆柱面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(a\cdot\cos\theta)^2}{a^2}+\frac{(b\cdot\sin\theta)^2}{b^2}=1.$$

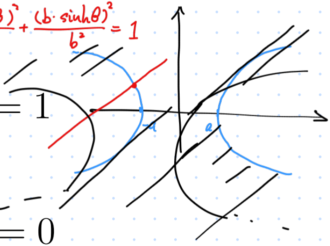
$$(\cos^2\theta+\sin^2\theta=1)$$

- 双曲柱面 $\begin{cases}\cosh\theta=\dfrac{e^\theta+e^{-\theta}}{2}\\ \sinh\theta=\dfrac{e^\theta-e^{-\theta}}{2}\end{cases}$

$$(\cosh^2\theta-\sinh^2\theta=1)$$

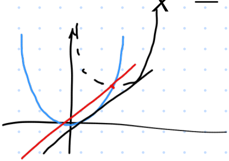
$$\frac{(a\cdot\cosh\theta)^2}{a^2}+\frac{(b\cdot\sinh\theta)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



- 抛物柱面

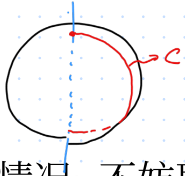
$$x^2-2py=0$$

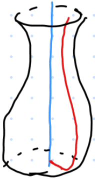


旋转面

旋转面 $=$ 一条曲线 C 绕一条直线 l 旋转所得的曲面

- l: ~~母线~~ 旋转轴
- C: ~~准线~~ 母线





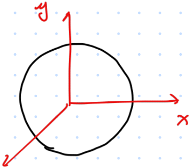
考虑旋转轴 l 为坐标轴的情况：不妨取

- l 为 z 轴.
- C 为平面 yOz 上的曲线 $f(y,z)=0$

旋转面的曲面方程

记旋转面为 $M(x, y, z)$.
对 C 上的一点 $(0, y_0, z_0) \in M$ 满足

$$f(y_0, z_0) = 0.$$



绕 z 轴旋转一圈, 得 $z = z_0$ 面上的圆周:

$$x^2 + y^2 = 0^2 + y_0^2 = y_0^2.$$

可见, (x, y, z) 在 M 上, 如果 (x, y, z) “旋转” 到 yOz 平面上的点 (一般有两点) 落在母线 C 上.

- (x, y, z) “旋转” 到 yOz 上的点为

$$(0, \pm\sqrt{x^2 + y^2}, z)$$

- 落在母线 C 上:

$$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$$