Outline

6.0 前言

6.1 二次型及其标准形

6.2 正定二次型

6.3 曲面及其方程

6.4 二次曲面

线性替换 $Y\in\mathbb{R}^n \xrightarrow{C} \mathbb{R}^n \ni X = C\cdot Y$

$+\,C^{-1}$存在

非退化线性替换

A看作一个映射

相似

$$\begin{tikzcd} X\in\mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^n \ni AX \arrow[d, "C^{-1}"] \\ Y\in\mathbb{R}^n \arrow[u, "C"] \arrow[r, "C^{-1}A\cdot C"] & \mathbb{R}^n \ni (C^{-1}AC)\cdot Y \end{tikzcd}$$

实对称 A 合同 $\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$

标准型 $\begin{pmatrix}+1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & +1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}E_{p_+} & & \\ & -E_{p_-} & \\ & & 0\end{pmatrix}$

A看作一个"内积"

合同

$$\begin{tikzcd} X\in\mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{R} \ni X^TAX \\ Y\in\mathbb{R}^n \arrow[u, "C"] \arrow[ur, "C^TAC"'] & \end{tikzcd}$$

$X^TAX = (CY)^TA(CY) = Y^T(C^TAC)\cdot Y.$

前言

回顾: 实二次型 f 有唯一规范形

$$\begin{pmatrix} I_{p_+} & & \\ & \boxed{-I_{p_-}} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

本节中, 我们将考虑负惯性指数 $p_- = 0$ 的情形.

正定二次型

定义 2.1

二次型 $f(X)$ 成为 半正定的, 如果任意 $C \in \mathbb{R}^n$ 有

$$f(C) \geq 0.$$

内积 $(\cdot,\cdot)$

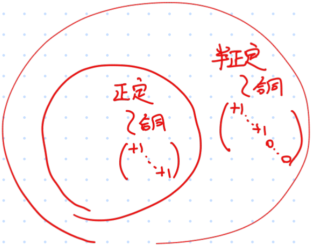
∘ 正定性: $(\alpha,\alpha) \geq 0$ & $(\alpha,\alpha)=0 \Rightarrow \alpha=0$

进一步地, 如果任意 $C \neq 0$ 有

$$f(C) > 0,$$

那么称 f 为 正定的.

- "正定" $\Rightarrow$ "半正定"
- "正定" $\nLeftarrow$ "半正定"



$(x_1,x_2)\begin{pmatrix}1 & \\ & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = x_1^2 \geq 0$ $X=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} \rightsquigarrow X^TAX=0$

例题 2.1

以下都是正定二次型

- $x_1^2 + \cdots + x_n^2$
- $x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + \cdots + (x_1 + \cdots + x_n)^2$

例题 2.2

- $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ 正定
- $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2$ 半正定

$$A = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & +1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$f(0, \ldots, 0, 1) = 0$

性质 2.1

非退化线性替换保持正定:

性质 2.1

正定实二次型经过非退化线性替换后仍为正定实二次型.

反证: 取二次型 A 是正定.

假设经非退化线性替换 $X=C\cdot Y$

得 C^TAC 不是正定

$\Rightarrow \exists\, Y_0 \neq 0$ s.t. $Y_0^T(C^TAC)Y_0 \leq 0$

取 $X_0 = C\cdot Y_0$

$\because$ C 可逆

$\therefore$ $Y_0 \neq 0 \Rightarrow X_0 = C\cdot Y_0 \neq 0$

$\therefore$ $X_0^T\cdot A\cdot X_0 \leq 0$ 与"A 正定"矛盾 #

定理 2.1

实对称 $A \xrightarrow{\text{对角化}} \begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{\text{标准型}} \begin{pmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{pmatrix}$

定理 2.1

考虑 $f(X) = X^TAX$. 以下命题等价:

1. f 正定
2. A 的特征值均为正
3. $r(A) = n$ & A 的正惯性指数为 n
4. A 合同于 E
5. 存在可逆 P s.t. $A = P^TP$

定理 2.1 ($1 \Rightarrow 2$)

1. f 正定
2. A 的特征值均为正

定理 2.1 ($2 \Rightarrow 3$)

1. A 的特征值均为正
2. $r(A) = n$ & A 的正惯性指数为 n

定理 2.1 ($3 \Rightarrow 4$)

1. $r(A) = n$ & A 的正惯性指数为 n
2. A 合同于 E

定理 2.1 ($4 \Rightarrow 5$)

1. A 合同于 E
2. 存在可逆 P s.t. $A = P^T P$

定理 2.1 $(5 \Rightarrow 1)$

1. 存在可逆 P s.t. $A = P^T P$
2. f 正定

性质 2.2

定义

实对称矩阵称为 正定矩阵 如果其对应的二次型是正定的.

性质 2.2

正定矩阵 A 的行列式大于 0.

$$\int \qquad |A| = \prod_i \lambda_i > 0.$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

定义 2.2

Q: “矩阵是正定的” 的必要条件?

定义 2.2

矩阵 $A=(a_{i,j})_{n\times n}$ 的 k 阶顺序主子式 是指

$$k\left\{\begin{pmatrix} \overbrace{a_{11} \quad a_{1k}}^{k} & - & a_{1n} \\ a_{k1} \quad a_{kk} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} \quad - & - & a_{nn} \end{pmatrix}\right.$$

$$P_k := \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} \end{vmatrix}$$

定理 2.2

定理 2.2

是

实对称矩阵实正定的，当且仅当，其各阶顺序主子式都大于零，i.e.

$$P_k > 0, \qquad \forall k = 1, \dots, n.$$

略证 $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

例题 2.3

例题 2.3

判断下列二次型是否为正定的

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

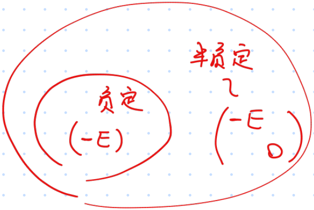
$P_1 = 3 > 0$

$P_2 = 6 - 1 = 5 > 0$

$P_3 = 24 + 4 + 4 - 4 - 12 - 8 = 8 > 0$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

负定



定义 2.3

称 $f(X)$ 是 半负定的 如果

$$f(X) \leq 0 \qquad \forall X \in \mathbb{R}^n.$$

进一步地, 称 $f(X)$ 是 负定的 如果

$$f(X) < 0 \qquad \forall X \neq 0 \in \mathbb{R}^n.$$

对负定 (或半负定) f 的讨论可转化为正定 (或半正定) $-f$ 的讨论.

Outline

6.0 前言

6.1 二次型及其标准形

6.2 正定二次型

6.3 曲面及其方程

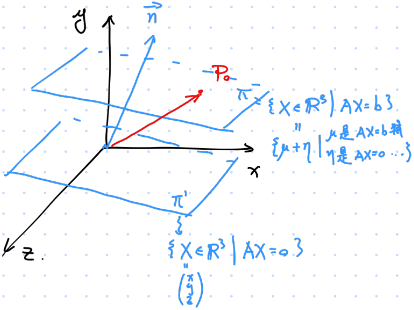
6.4 二次曲面

曲面方程

回顾

- 直线 : 平面与平面的交.
- 平面 $\pi := \{ P \in \mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0 \}$

曲面的方程



取 $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$

$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

点法式方程 $\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$

的坐标表示 $n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) + n_z(z - z_0) = 0$

$$n_x \cdot x + n_y \cdot y + n_z \cdot z = \underbrace{n_x x_0 + n_y y_0 + n_z z_0}_{=b}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} n_x & & \\ & n_y & \\ & & n_z \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = b.$$

AX=0 的基础解系.

$A \cdot P_0 = b$

球面方程

球面 $= \{P \in \mathbb{R}^3 | d(P, P_0) = r\}$

- 球心 $P_0 \in \mathbb{R}^3$
- 半径 $r \geq 0$

$\mathbb{R}^3$ 中的球面方程

$$|\overrightarrow{P_0 P}| = d(P_0, P) = r$$

或

$$|\overrightarrow{P_0 P}|^2 = r^2.$$

球面方程的坐标表示

球面方程的坐标可表示为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2.$$

展开得

$$x^2+y^2+z^2-2x_0x-2y_0y-2z_0z+(x_0^2+y_0^2+z_0^2-r^2)=0.$$

(3, 0) 方程表球面

$A \sim \begin{pmatrix} +1 & & \\ & +1 & \\ & & +1 \end{pmatrix}$

反过来, 对于三元二次方程

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

可写为

$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} xy + yz + zx = 0 \xrightarrow[y = x_1 - y_1]{x = x_1 + y_1} x_1^2 - y_1^2 + (\ldots)z + \ldots$

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$

$$(x - (-\frac{a}{2}))^2 + (x - (-\frac{a}{2}))^2 + (x - (-\frac{a}{2}))^2 = \boxed{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} - d}.$$

记

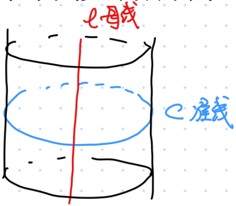
- $(x_0, y_0, z_0) = (-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2})$
- $t = \frac{a^2+b^2+c^2}{4} - d$

可得

1. $t > 0$: 圆心 (x_0, y_0, z_0), 半径 $\sqrt{t}$ 的球面
2. $t = 0$: 点 (x_0, y_0, z_0)
3. $t < 0$: $\mathbb{R}^3$ 中无解 (Q: $\mathbb{C}^3$ 呢?)

柱面

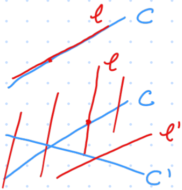
柱面 $=$ 一条直线 l 沿空间曲线 C 平行移动所得的曲面



- l 母线
- C 准线

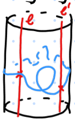
给定柱面, 母线与准线并不唯一.

e.g.



- 直线: 母线和准线唯一确定
- 平面: 母线和准线不唯一
- “柱面”

  - 准线不唯一 (取一平面割柱面) 更一般地, 与每条母线相交的曲线均可作准线
  - 母线: 不唯一, 但不同的选择相互平行

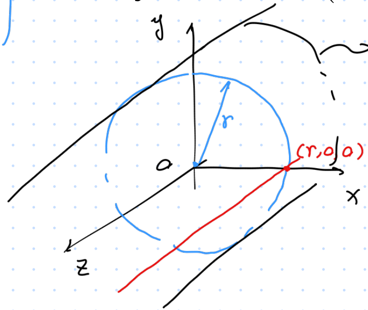


例题 3.1

例题 3.1

画出下列方程的曲面

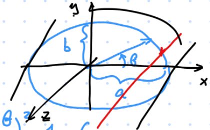
$$\begin{pmatrix} +1 & & \\ & +1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \qquad x^2 + y^2 = r^2 \qquad (r > 0).$$



$$\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

例题 3.2

$$\begin{pmatrix} +1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$



三类 二次柱面

- ▶ 椭圆柱面

$$\left(\frac{a\cdot\cos\theta}{a}\right)^2+\left(\frac{b\cdot\sin\theta}{b}\right)^2=1 \quad (\cos^2\theta+\sin^2\theta=1)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

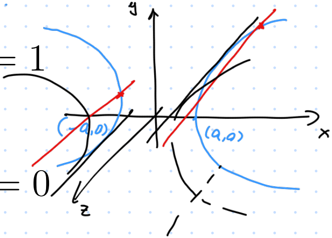
hyperbolic

$$\begin{cases} \cosh\theta = \frac{1}{2}(e^{\theta}+e^{-\theta}) \\ \sinh\theta = \frac{1}{2}(e^{\theta}-e^{-\theta}) \end{cases}$$

- ▶ 双曲柱面

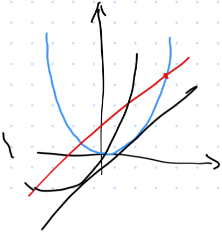
$$\left(\frac{a\cdot\cosh\theta}{a}\right)^2+\left(\frac{b\cdot\sinh\theta}{b}\right)^2=1. \quad \Rightarrow \cosh^2\theta-\sinh^2\theta=1.$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



- ▶ 抛物柱面

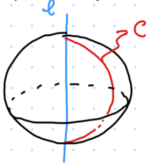
$$x^2-2py=0$$



旋转面

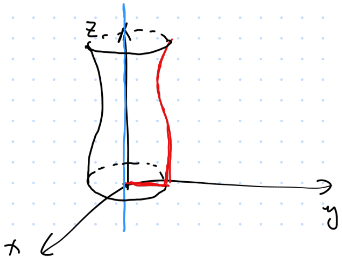
旋转面 $=$ 一条曲线 C 绕一条直线 l 旋转所得的曲面

- l: ~~母线~~ 旋转轴
- C: ~~准线~~ 母线

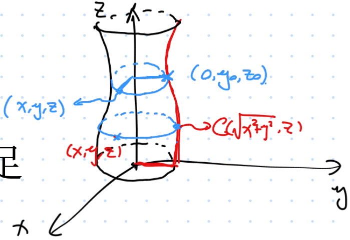


考虑旋转轴 l 为坐标轴的情况: 不妨取

- l 为 z 轴.
- C 为平面 yOz 上的曲线 $f(y,z)=0$



旋转面的曲面方程



记旋转面为 $M(x,y,z)$.

对 C 上的一点 $(0,y_0,z_0) \in M$ 满足

$$f(y_0,z_0)=0.$$

绕 z 轴旋转一圈, 得 $z=z_0$ 面上的圆周:

$$x^2+y^2=0^2+y_0^2=y_0^2.$$

可见, (x,y,z) 在 M 上, 如果 (x,y,z) “旋转” 到 yOz 平面上的点 (一般有两点) 落在母线 C 上.

- (x,y,z) “旋转” 到 yOz 上的点为

$$(0,\pm\sqrt{x^2+y^2},z)$$

- 落在母线 C 上:

$$\boxed{f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0}$$