# Ch 1. 行列式

钟友良

zhongyl0430@gmail.com

Sec 1.0 引言

Sec 1.1 2 阶与 3 阶行列式

Sec 1.2 n 阶排列

Sec 1.3 n 阶行列式的定义

Sec 1.4 n 阶行列式的性质及计算

#### Sec 1.0 引言

Sec 1.1 2 阶与 3 阶行列式

Sec 1.2 n 阶排列

Sec 1.3 n 阶行列式的定义

Sec 1.4 n 阶行列式的性质及计算

# 回顾

- ▶ 线性方程组
  - ▶ 方程组表示

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ & \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n &= b_m \end{cases}$$

- ▶ 矩阵表示: 系数矩阵, 增强矩阵
- ▶ 线性方程组的解
  - ▶ 1x1, 2x2 情形求解
  - ▶ 解的存在性
  - ▶ 解的唯一性

## 动机 1x1

求解 1×1 线性方程组 ax = b

- ▶  $a \neq 0$  则有存在性
  - ▶ 进一步,有唯一性

# 动机 2×2

#### 求解方程组

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 &= b_2 \end{cases}$$

#### 消元法可得

$$\begin{cases} (a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1})x_1 &= (b_1a_{2,2} - b_2a_{1,2}) \\ (a_{2,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1})x_2 &= (b_2a_{1,1} - b_1a_{2,1}) \end{cases}$$

由  $1 \times 1$  的情况可得,  $a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \neq 0$  有解的存在性.

Sec 1.0 引言

Sec 1.1 2 阶与 3 阶行列式

Sec 1.2 n 阶排列

Sec 1.3 n 阶行列式的定义

Sec 1.4 n 阶行列式的性质及计算

# 定义

## 定义 1.1 (行列式)

对于 2×2 矩阵

$$A:=egin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

它的 行列式 (determinant) 定义为

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\det(A) := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

也记作

$$|A| := \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}$$

## 例子

### 鸡兔同笼 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \pi \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 = 0$$

# 对角线法则

我们可以在矩阵上通过画斜线进行记忆.

+ Q1,1 Q2,2 - Q1,2 Q2,1

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

# 定义

### 定义 1.2 (3x3 行列式) 对于 3 × 3 矩阵

$$A := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}_{\alpha_{3,1}} \alpha_{3,1}$$

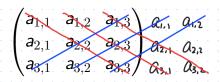
它的 行列式 (determinant)

$$\det(A) := a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}.$$



# 对角线法则

类似  $2 \times 2$ , 我们可以在矩阵上通过画斜线进行记忆.



Sec 1.0 引言

Sec 1.1 2 阶与 3 阶行列式

Sec 1.2 n 阶排列

Sec 1.3 n 阶行列式的定义

Sec 1.4 n 阶行列式的性质及计算

# n 阶排列

### 定义 2.1 (n 阶排列)

一个 n <mark>阶排列</mark> 是一个由自然数 1, ..., n 组成的一个 n 元有序数组  $i_1, i_2, ..., i_n$ .

- ▶ 自然排序: 1,2,...,n
- ▶ 所有 n 阶排列的总数为  $n! = n \cdot (n-1) \dots 2 \cdot 1$

# 排列作为一个双射

▶ 排序可以看作一个双射

$$p: \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$$
$$j \mapsto i_j.$$

▶ 也看理解