

伴随矩阵

定义 4.2 (伴随矩阵)

矩阵 $A = (a_{i,j})_{n,n}$ 的 **伴随矩阵** 定义为


a_{ij} 的代数余子式 A_{ij}
 $= (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

$A^* := (A_{ji})$

(A_{ij})

$\in F$

$$A^* = \begin{pmatrix} \underline{A_{1,1}} & \cdots & A_{j,1} & \cdots & A_{n,1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{1,i} & \cdots & \underline{A_{i,i}} & \cdots & A_{n,i} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{1,n} & \cdots & A_{j,n} & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix}$$



其中 $A_{i,j}$ 为 $a_{i,j}$ 的代数余子式.

逆矩阵的伴随矩阵表示

逆矩阵的伴随矩阵表示

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$$

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$$

$$\begin{aligned} A \cdot A^* &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{1j} & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{in} & A_{jn} & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bigcirc & & \\ & \ddots & \\ & & \bigcirc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & \\ & \ddots & \\ & & |A| \end{pmatrix} \\ &= |A| \cdot E \end{aligned}$$

$A_{ij}^* = A_{ji}$

$$= \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot A_{kj}^* = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ |A| & i = j \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{if } |A| \neq 0 \text{ then } A \cdot \frac{A^*}{|A|} &= E \\ \text{similarly, we have } \frac{A^*}{|A|} \cdot A &= E \end{aligned} \right\} \Rightarrow A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} \text{ if } |A| \neq 0.$$

逆矩阵的伴随矩阵表示

设 $d := |A|$. 由行列式按一行展开和定理 5.2 得

$$a_{i,1}A_{j,1} + \cdots + a_{i,n}A_{j,n} = \begin{cases} d, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

我们有

$$\begin{aligned} A \cdot A^* &= (a_{i,j})(A_{j,k}) \\ &= \left(\sum_j a_{i,j}A_{j,k} \right) \\ &= \begin{pmatrix} d & & \\ & \ddots & \\ & & d \end{pmatrix} = dE. \end{aligned}$$

定理 4.1

可逆的等价条件

矩阵 A 可逆, 当且仅当行列式 $|A| \neq 0$.

\Leftarrow : $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$.

\Rightarrow : A^{-1} 存在唯一性
 $\Rightarrow A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$.

从 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$ 来理解.

e.g.

- ▶ 对角矩阵
- ▶ 三角矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix}$$

\downarrow
 $|A| = \prod_i a_{ii}$

A^{-1} 存在 $\Leftrightarrow a_{ii} \neq 0$
 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

定理 4.1 证明

必要性: 有 $AA^{-1} = E$ 可得

$$|A||A^{-1}| = |AA^{-1}| = |E| = 1.$$

充分性: 如果 $|A| \neq 0$, 那么 $\frac{1}{|A|}A^*$ 为 A 的逆, i.e.

$$\frac{1}{|A|}A^* \cdot A = A \cdot \frac{1}{|A|}A^* = E.$$

例题 4.3

例题 4.3

求以下矩阵的行列式

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$$

$$A_{ij}^* = A_{ji}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

解

利用 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$, 通过计算 A 的行列式和所有 2 阶代数余子式可得.

例题 4.4

例题 4.4

如果 A 可逆, 那么方程组 $Ax = b$ 存在唯一解.

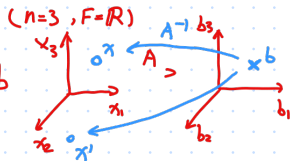
解

存在性: $X = A^{-1}b$ 为方程组的解

唯一性: 假设有另一个解 X' , i.e. $AX' = b$. 两边左乘 A^{-1} 得, $A^{-1}(AX') = A^{-1}b$, i.e. $X' = A^{-1}b$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \longleftrightarrow Ax = b \\ & \Leftrightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \\ & \Leftrightarrow x = A^{-1}b \end{aligned}$$



例题 4.5

例题 4.5

设可逆的 A 和 C , 求 $D = \begin{pmatrix} A & \\ B & C \end{pmatrix}$ 的逆.

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$a_{ii} \neq 0$$

$$a \neq 0 \Leftrightarrow a^{-1} \text{存在}$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$|A_{ii}| \neq 0$$

$$|A| \neq 0 \Leftrightarrow A^{-1} \text{存在}$$

解

先证 A 的可逆性: 由 A, C 不可逆得

$$|D| = |A| \cdot |C| \neq 0.$$

Laplacian expansion

例题 4.5 续

解 (续)

再求 A^{-1} : 设 $A^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$. 由 $AA^{-1} = E$ 可得:

$$\begin{cases} AX = E \\ AY = 0 \\ BX + CZ = 0 \\ BY + CT = E \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

由 A 可逆得 $X = A^{-1}$ 和 $Y = 0$. 代入得
 $Z = -C^{-1}BA^{-1}$ 和 $T = C^{-1}$.

Outline

Sec 2.0 引言

Sec 2.1 矩阵与其运算

Sec 2.2 矩阵的分块

Sec 2.3 矩阵的秩

Sec 2.4 矩阵的逆

Sec 2.5 初等矩阵

1st 初等矩阵 1

定义 5.1 (行对换)

$$P(i,j) \cdot P(i,j) = E$$

$$\begin{aligned} r_i &\leftrightarrow r_j \\ c_i &\leftrightarrow c_j \end{aligned}$$

$$P(i,j) := \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ i & - & - & - & \textcircled{0} & - & - & - & - \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ j & - & - & - & \textcircled{1} & - & - & - & - \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \textcircled{0} & - & - & - \\ & & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & & 1 & \end{pmatrix}$$

1st 初等矩阵 2

- ▶ $P(i,j)A$: 通过交换 A 的第 i 行和第 j 行得到.
- ▶ $AP(i,j)$: 列

$$P(i,j) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{ji} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{ji} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

Diagram illustrating the row swap operation $P(i,j)A$. The permutation matrix $P(i,j)$ is shown as an identity matrix with rows i and j swapped. The matrix A is shown with its i -th row (containing a_{ji}) and j -th row (containing a_{ni}) highlighted. The resulting matrix $P(i,j)A$ shows the rows of A swapped, with the i -th row now containing a_{ni} and the j -th row containing a_{ji} . Blue checkmarks indicate the correct result.