Outline

前情回顾

F $+: F\times F \to F$ $\times: F\times F\to F$ $\bar{\cdot}: F\to F$ $|\cdot|: F\to F$

$F \to F^{m\times n}$

$+: F^{m\times n}\times F^{m'\times n'} \to F^{m\times n}$ $\begin{cases} m=m' \\ n=n' \end{cases}$

$\times: F^{m\times n}\times F^{m'\times n'} \to F^{m\times n'}$ $n=m'$

$\bar{\cdot}: F^{m\times n}\to F^{m\times n}$

$\boxed{|\cdot|: F^{m\times n} \to F}$

$r: F^{m\times n}\to N$

$\cdot^{-1}: F^{n\times n}\to F^{n\times n}$

$\cdot^{T}: F^{m\times n}\to F^{n\times m}$

	$+$	$\times$	$\bar{\cdot}$	$\cdot^T$	$\lvert\cdot\rvert$
$+$	✓	✓	✓	✓	✗
$\times$		No交换	✓	反交换	✓
$\bar{\cdot}$			id	✓	✓
$\cdot^T$				id	✓
$\lvert\cdot\rvert$					?

分块矩阵

$+:$ 分块$^{M\times N}\times$ 分块$^{M'\times N'}$ $\to$ 分块$^{M\times N}$ $\begin{cases} M=M' \\ N=N' \end{cases}$

$\times:$ 分块$^{M\times N}\times$ 分块$^{M'\times N'}$ $\to$ 分块$^{M\times N'}$

初等变换

定义 3.1 (矩阵的初等变换)

初等行变换:

1. $\overset{\text{row}}{r_i} \leftrightarrow r_j$: 交换第 i 行和第 j 行
2. $k \times r_i$: $k \in F$ 乘第 i 行 $k \cdot r_i \to r_i$ $kr_i + r_j \to r_j$
3. $r_i + k \times r_j$: 第 j 行乘以 $k \in F$ 并加到第 i 行

初等列变换: 改 "行" 为 "列"

初等变换: 初等行变换和初等列变换的统称.

$c_i \leftrightarrow c_j$

kc_i

$c_j + kc_i$

等价

定义 3.2

（有限的）

称 A 等价于 B, 如果 A 可以通过一系列初等变换变成 B. 即, 存在一个序列

$$A = A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_s = B,$$

其中每个 A_{i+1} 可由 A_i 经过一次初等变换得到.

等价关系

$= \quad < \quad \leq$

一个二元关系 $\sim$ 是一个等价关系, 如果满足以下三个条件:

$A \underset{r_i\leftrightarrow r_j}{\overset{r_i\leftrightarrow r_j}{\rightleftarrows}} B \qquad A \underset{k^{-1}r_i}{\overset{kr_i}{\rightleftarrows}} B$

- 反身性: $A \sim A$
- 对称性: $A \sim B$ 则 $B \sim A$

$A \underset{r_i-kr_j}{\overset{r_i+kr_j}{\rightleftarrows}} B$

- 传递性: $A \sim B$ 且 $B \sim C$, 则 $A \sim C$

可验证, 刚刚定义的矩阵等价关系确实是一个等价关系.

$A \rightleftarrows A_1 \cdots A_s \rightleftarrows B$

- 反身性: 显然 ✓
- 对称性: 初等变换均有初等变换的逆
- 传递性: 显然 $A \to \cdots \to B \to \cdots \to C$

阶梯形矩阵

j_i: ith行
首个非零元

定义 3.3 (阶梯形矩阵)

称一个矩阵 A 为一个 阶梯形矩阵, 如果

- 0 元素以下的元素都是 0
- 首个非零元一下的元素都是 0

记 a_{i,j_i} 为第 i 行的首个非零元素, 则

$$a_{i,j} = 0 \quad \text{if } j < j_i$$

和

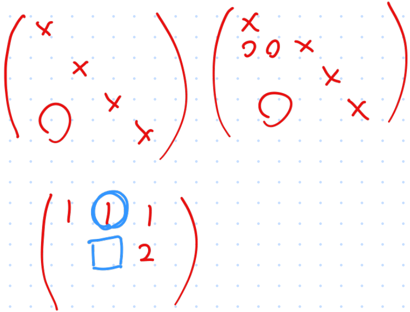
$$a_{i,j} = 0 \quad \text{if } \exists i_0 < i \text{ s.t. } j_{i_0} = j$$

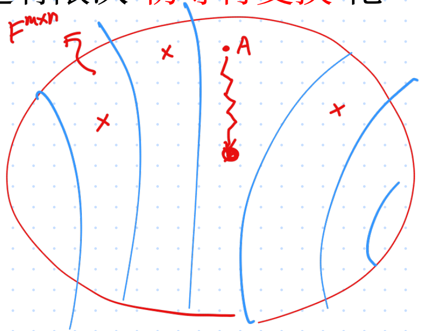
定理 3.1

定理 3.1 (化简为阶梯形)

任意一个矩阵都可以经过有限次 初等行变换 化为 阶梯形矩阵.

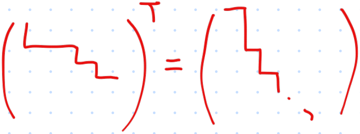
Q: Why not 上三角矩阵?





定理 3.1 证明

其实就是消元法.



Q: 怎样化为 “下” 阶梯形矩阵?

例题 3.1

把以下矩阵化为阶梯形矩阵

r_2-2r_1

r_3-r_1

r_4-2r_1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 9 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

定理 3.2

初等变换 ↗ 行
↘ 列

定理 3.2 (进一步化简)

任何一个 $m \times n$ 矩阵都等价于一个矩阵形如

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $r \leq \min\{m, n\}$.

证明

先行消元, 再列消元.

$c_2 - \frac{a_{12}}{a_{11}} c_1$

$\frac{1}{a_{11}} r_1$

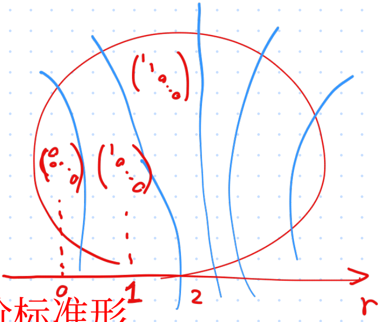
等价标准形

定理 3.2 (进一步化简)

如果

$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



等价于 A, 则称它为 A 的 等价标准形.

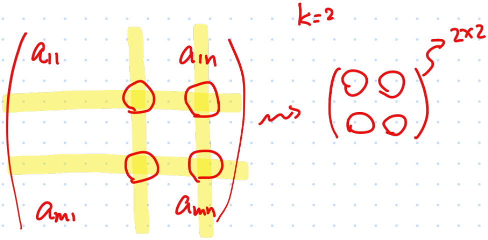
等价标准形只提供一个信息 r, 这就是矩阵的秩.

rank

k 阶子式

定义 3.4 (k 阶子式)

对一个 $m \times n$ 矩阵 A, 任取 k 行 k 列 $(k \le \min\{m, n\})$, 取这些行列交叉点上的 k^2 个元素, 按原来的顺序构成一个 $k \times k$ 的矩阵, 这个矩阵的行列式称为 A 的一个 k 阶子式.



秩

$A \rightsquigarrow$ r 阶子式 $\rightsquigarrow$ 最大的 r s.t. r 阶子式非零 $\rightsquigarrow$ $\mathrm{rank}(A) = r$

$A \rightsquigarrow$ 标准形 $\begin{pmatrix} E_r & \\ & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$

定义 3.5 (秩)

称 $r \in \mathbb{Z}_+$ 为一个矩阵 A 的 秩 (rank) (记为 $r(A)$), 如果

- 存在非零的 r 阶子式
- 不存在非零的 $r + 1$ 阶子式

规定零矩阵的秩为 0.

$$A \sim \begin{pmatrix} \boxed{E_r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

r+1

满秩与降秩

Q: 满秩矩阵的标准形是 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

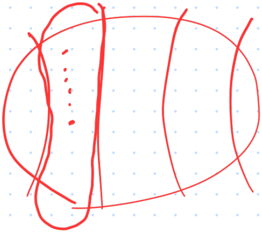
定义 (满秩与降秩)

对于 n 阶方阵, 如果 $r(A) = n$, 那个称 A 为 **满秩的** (非奇异的, 非退化的); 否则, 称为 **降秩的** (奇异的, 退化的).

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & \\ \hline & \begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix} \end{array}\right)$$

可见, A ~~满秩~~ 降秩 当且仅当 $\det(A) = 0$.

定理 3.3



定理 3.3
初等变换不改变矩阵的秩.

可见, 矩阵 A 的标准形为 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A 的秩

$$r(A) = r.$$

证明
初等变换不改变行列式

性质 3.1

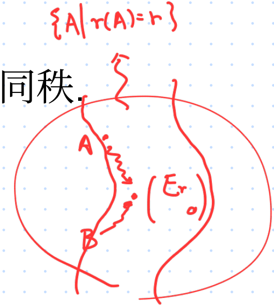
性质 3.1

两个同型矩阵等价，当且仅当它们同秩.

证明

$r(A) = r = r(B)$ 当且仅当

$$A \sim \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim B.$$



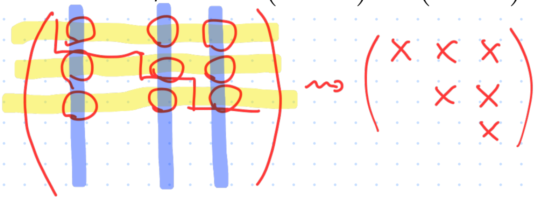
性质 3.2

性质 3.2

阶梯形矩阵的秩等于它非零的行的数量.

证明

假设阶梯形矩阵 A 有 r 行非零元.
一方面, 对于第 i 行, 选取第 j_i 列, 可得 $r \times r$ 的上三角矩阵, 其行列式不为 0.
另一方面, 任意 $(r+1) \times (r+1)$ 的行列式都为 0.



例题 3.3

例题 3.3

求以下矩阵的秩

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 13 & 19 \end{pmatrix}$$

解

~~例题 3.3~~

通过初等变换化为阶梯形矩阵.

Outline

逆元

对于数域 F 中的元素 a

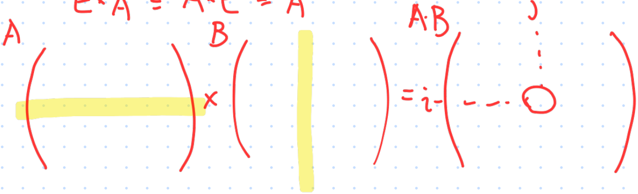
- 加法的逆元 $-a$ 满足 $a + \boxed{(-a)} = 0$
- 乘法的逆元 a^{-1} 满足 $a \times \boxed{a^{-1}} = 1$

对于矩阵

- 矩阵加法的逆元 $-A$ 满足 $A + \boxed{(-A)} = 0$
- 矩阵乘法的逆元 A^{-1} 应该满足 $A \times \boxed{A^{-1}} = E$

$0 + A = A + 0 = A$

$E \times A = A \times E = A$



逆矩阵

A 不是方阵 $\underbrace{AA^T}$ $\underbrace{A^TA}$

定义 4.1 (逆矩阵)

设 A 是一个 n 阶方阵, 如果存在矩阵 B, s.t.

$$AB = BA = E,$$

则称 A 存在逆矩阵 B, 将 A 的 逆矩阵 (记为 A^{-1}). 称 A 与 B 为 互逆矩阵.

A of size 1×2

$x \rightsquigarrow x^{-1}$ (if $x \neq 0$)

$A \rightsquigarrow A^{-1}$ (if $|A| \neq 0$)

$\begin{pmatrix} E_r & \\ & 0 \end{pmatrix}$, $\overset{A}{(a_1\ a_2)} \cdot \overset{A^{-1}}{\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}} = 1$

$\overset{A^{-1}}{\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}} \overset{2\times 1}{} \overset{A}{(\quad)} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$

Q: 为什么要先声明 B 的存在性?

Q: 如果 A 不是方阵呢?

例题 4.1 (1)

对角矩阵的逆矩阵

对角矩阵 $\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ 的逆矩阵为

$$\mathrm{diag}(a_1^{-1}, \ldots, a_n^{-1}).$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

例题 4.2 (2)

三角矩阵的逆矩阵

上三角矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 也是上三角, 且 A^{-1} 的对角元 $a_{i,i}^{-1}$ 满足

$$a_{i,i}^{-1} = (a_{i,i})^{-1}.$$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots \\ & a_{22} & \cdots \\ & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}} \underset{B}{\begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & & \\ & \boxed{a_{22}^{-1}} & \\ & & \ddots \\ & & & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{11} b_{12} + a_{12} \cdot a_{22}^{-1} = 0$$

矩阵逆的性质 1

逆矩阵的唯一性

如果 A 可逆, 那么 A 的逆矩阵唯一确定.

证明

如果 B, C 都是 A 的逆矩阵, 那么

$$\begin{aligned} B &= BE \\ &= B(\underline{AC}) = (\underline{BA})C \\ &= EC = C. \end{aligned}$$

矩阵逆的性质 2

逆的逆

A 可逆, 则 A^{-1} 可逆, 且

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

证明

$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$

$\Rightarrow A$ 是 A^{-1} 的逆元

记 $A = (A^{-1})^{-1}$

矩阵逆的性质 3

$(AB)^T = B^T A^T$

乘积的逆

A, B 可逆, 那么 AB 可逆, 且

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

证明

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(\underline{BB^{-1}})A^{-1} \\ &= \underline{AEA^{-1}} \\ &= E.\end{aligned}$$

矩阵逆的性质 4

转置的逆

A 可逆, 则 A^T 可逆, 且

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

证明

$$(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = E^T = E.$$

例题 4.2

例题 4.2

判断 $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ 是否可逆.

证明

假设 A 存在逆矩阵 $B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix}$, 那么

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b_{2,1} & 3b_{2,2} \\ 4b_{2,1} & 4b_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$3b_{2,1} = 1$

$4b_{2,1} = 0$

伴随矩阵

1　0

A　(退化)

定义 4.2 (伴随矩阵)

矩阵 $A = (a_{i,j})_{n,n}$ 的 伴随矩阵 定义为

$$A^* := \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{j,1} & \cdots & A_{n,1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{1,i} & \cdots & A_{j,i} & \cdots & A_{n,i} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{1,n} & \cdots & A_{j,n} & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

其中 $A_{i,j}$ 为 $a_{i,j}$ 的代数余子式.