Ch 4. 线性方程组

钟友良

zhongyl@scut.edu.cn

Outline

Outline

动机

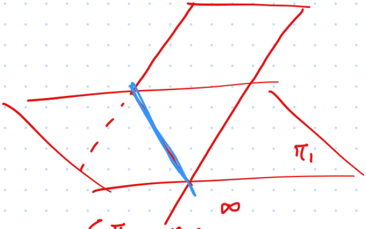
- 解的存在性
- 解的数量
    - 唯一性
    - 无穷之间的区别

$$\underbrace{A}_{m\times n}\underbrace{x}_{n\times 1} = \underbrace{b}_{m\times 1}.$$

$l_1 = l_2$

$$\begin{cases} l_1: \dfrac{x-x_0}{v_x} = \dfrac{y-y_0}{v_y} = \dfrac{z-z_0}{v_z}. \\ l_2: \text{- - - - - -} \end{cases}$$

① π_1 与 π_2 相交



∞

$$\begin{cases} \pi_1: n_x(x-x_0)+n_y(y-y_0)+n_z(z-z_0)=0 \\ \pi_2 \end{cases}$$

② π_1 与 π_2 重合

∞^2

$\lim_{n\to\infty} n = \infty$ $\lim_{n\to\infty} n^2$

Outline

线性方程组

方程 $f(x) = b$

方程组 $\begin{cases} f_1(x) = b_1 \\ \vdots \\ f_m(x) = b_m \end{cases}$

线性方程组 = 线性 + 方程组

考虑线性方程组

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n & = b_1 \\ & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,n}x_n & = b_n \end{cases}$$

- 未知数 x_j
- 系数 $a_{i,j}$
- 常数项 b_i
  - 齐次 $b_i = 0 \quad \forall i$
  - 非齐次

方程的解

- 方程的 解
- 方程的 解的集合
- 方程称为 相容的 如果方程有解.

同解方程组

定义 1.1

如果两个方程组的解的集合相等, 那么称这两个方程组 同解.

方程组的矩阵表示

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

记方程组为

$$Ax = b.$$

$$\tilde{A} = (A, b)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

- 系数矩阵 A
- 增广矩阵 $\tilde{A} = (A, b)$

回顾消元法

例题 1.1

解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ & 2 & -1 & 4 \\ & 4 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 - 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ & 2 & -1 & 4 \\ & & 1 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 \times \frac{1}{2}]{r_1 \times \frac{1}{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ & 1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ & & 1 & -6 \end{array}\right)$$

线性方程组的初等变换

例题 1.1 中我们进行了一下三种操作 (称为线性方程组的 初等变换):

- 交换行
- 数乘行
- 行加行

Q: 为什么对方程组进行初等变换是合理的? (性质 1.1)

初等变换不改变方程组的解

性质 1.1

初等变换后的方程组与原方程组同解.

证明

分别验证三种初等变换均不改变方程组的解.

① 行交换.

② 数乘行.

③ 行加行.

$$\begin{tikzcd} \tilde{A} \arrow[rr, "r_i+kr_j"] \arrow[dr, "kr_j"'] & & \tilde{B} \\ & \tilde{C} \arrow[ur, "r_i+r_j"'] & \end{tikzcd}$$

$r_i + kr_j$ $\quad \tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & & & \vdots \end{array}\right)$

$$\tilde{B} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11}+a_{21}, & \cdots, & a_{1n}+a_{2n} & b_1+b_2 \\ a_{21} & & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & & & \vdots \end{array}\right)$$

要证 $\tilde{A}$ 与 $\tilde{B}$ 同解

$\Leftrightarrow$ $\tilde{A}$ 解的集合 $=$ $\tilde{B}$ …

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cdots \supseteq \cdots \\ \cdots \subseteq \cdots \end{cases}$

设 $(x_1, \dots, x_n)$ 满足 $\tilde{B}$

要证 $(x_1, \dots, x_n)$ 也满足 $\tilde{A}$.

$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \overset{?}{=} b_1$

$= (a_{11}+a_{21}-a_{21})x_1 + \dots + (a_{1n}+a_{2n}-a_{2n})x_n$

$= \left((a_{11}+a_{21})x_1 + \dots + (a_{1n}+a_{2n})x_n\right)$

$\quad - (a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n)$

$= (b_1+b_2) - b_2 = b_1$

初等变换下改变方程组的解

定理 1.1

记 $\tilde{B}$ 为增广矩阵 $\tilde{A}$ 初等变换后的增广矩阵. 那么 $\tilde{A}$ 与 $\tilde{B}$ 分别对应的方程组同解.

例题 1.2

例题 1.2

解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 & = 0, \\ x_1 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 & = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 & = 4, \end{cases}$$

例题 1.2 解

将方程组表为增广矩阵

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 6 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

通过初等行变换可得

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例题 1.2 解

方程组的一般解

$$\begin{cases} x_1 & = -2x_3 - 2x_4 - 6x_5 + 6 \\ x_2 & = x_3 + x_4 + 5x_5 - 4 \end{cases}$$

其中, x_3, x_4, x_5 可取任意数, 因此被称为 自由 未知量.

例题 1.3

例题 1.3

解方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 & = -1, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 & = 5, \\ 3x_1 + 6x_2 - 10x_3 & = 3 \end{cases}$$

例题 1.3 解

考虑增广矩阵

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 & 5 \\ 3 & 6 & -10 & 3 \end{pmatrix}$$

通过初等行变换可得

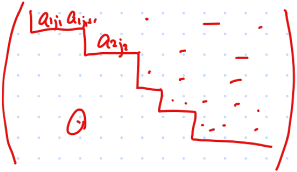
$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow b_{r+1}$$

$0=1$

消元法

回顾

定理 3.1 (Ch2)



任意矩阵可通过有限次初等行变换化为阶梯形矩阵.

对增广矩阵 $\tilde{A} = (A, b)$ 中的 A 进行阶梯化. 考虑

$$\tilde{A} = (A, b) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} & b_n \end{pmatrix}$$

消元法结果

$r = \max\{k \mid 存在非零k阶子式\}$

假设首列元素不为零，记 $r = \operatorname{rank}(A)$，那么 $\tilde{A}$ 可化为阶梯形矩阵

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c}
a_{1,j_1} & & \cdots & \cdots & \cdots & & a_{1,n} & b_1 \\
0 & \cdots & a_{2,j_2} & & \cdots & & a_{2,n} & b_2 \\
\vdots & & & & & & \vdots & \vdots \\
0 & & \cdots & 0 & a_{r,j_r} & \cdots & a_{r,n} & b_r \\
0 & & & \cdots & & & 0 & b_{r+1}
\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}
a_{1j_1} & \cdots & & & b_1 \\
& a_{2j_2} & \cdots & & b_2 \\
& & & a_{rj_r} & b_r \\
\hline
& & & & b_{r+1}
\end{array}\right)$$

可见

- 解存在 $\Leftrightarrow b_{r+1} = 0$
- 解唯一 $\Leftrightarrow r = n$

$$r(\tilde{A}) = \begin{cases} r(A) \Leftrightarrow b_{r+1} = 0 \\ r(A)+1 \Leftrightarrow b_{r+1} \neq 0 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{pmatrix} \diagdown & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ \vdots \end{pmatrix}$$

解的唯一性

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ & & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2\leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ & 1 & & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} - & - \\ - & - \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} - & - \\ - & - \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}$$

将增广矩阵为

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc|c}
a_{1,j_1} & & \cdots & a_{1,r} & a_{1,r+1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\
 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,r} & a_{2,r+1} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\
 & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & & & a_{r,r} & a_{r,r+1} & \cdots & a_{r,n} & b_r
\end{array}\right)$$

的方程组记为 列交换

$$\begin{pmatrix} A_{r\times r} & A_{r\times(n-r)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_r \\ X_{n-r} \end{pmatrix} = B_r.$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ \hline x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

X_{n-r} 中的未知量被称为 自由未知量.

$$A_{r\times r}\cdot X_r = \boxed{B_r - A_{r\times(n-r)}\cdot X_{n-r}}$$

解的存在性 vs 秩

定理 1.2

方程 $Ax = b$ 有解的充要条件是：系数矩阵 A 的秩等于增广矩阵 $\tilde{A}$ 的秩, i.e.

$$r(A) = r(\tilde{A}).$$

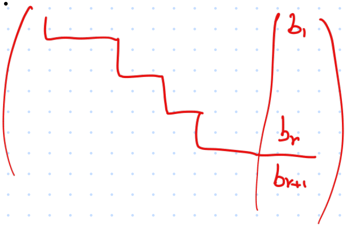
$$r(\tilde{A}) = \begin{cases} r(A) \\ r(A)+1 \end{cases}$$

$$r(\tilde{A}) \neq r(A)$$

$\Leftrightarrow r(\tilde{A}) = r(A)+1$

$\Leftrightarrow b_{r+1} \neq 0$

$\Leftrightarrow$ 无解.

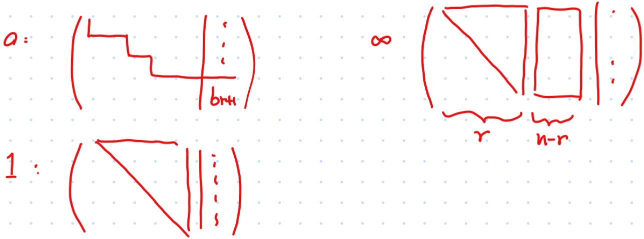


解的数量 vs 秩

定理 1.3

方程 $Ax = b$ 解的数量为

- $0 \Leftrightarrow r(\tilde{A}) \neq r(A)$ (i.e. $r(\tilde{A}) = r(A) + 1$)
- $1 \Leftrightarrow r(\tilde{A}) = r(A) = n$
- $\infty \Leftrightarrow r(\tilde{A}) = r(A) < n$



齐次情形

定理 1.4

齐次方程 $Ax = 0$ 有非零解, 当且仅当,

$$r(A) < n.$$

$Ax=0$ 总有 $x=0$ 解.

$\rightsquigarrow$ $Ax=0$ 有非零解

$\Leftrightarrow$ $Ax=0$ 的解不唯一

$\Leftrightarrow$ $n-r>0$

推论 1.1

推论 1.1

对于齐次方程组

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n & = 0 \\ & \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n & = 0 \end{cases}$$

有非零解, 如果 $m < n$.

$r(A) \le \min\{m,n\}$

$m<n$

$\Rightarrow r(A) \le m < n$

推论 1.2

推论 1.2

对于齐次方程组

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n & = 0 \\ & \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n & = 0 \end{cases}$$

有非零解，当且仅当，$|A| = 0$.

$|A|=0 \Leftrightarrow r<n. \Leftrightarrow$ 有非零解.

思考题

Q: 如果方程数大于变量数，那么解的情况如何？

$\tilde{A}_1$: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \longleftrightarrow x_1+x_2=1$

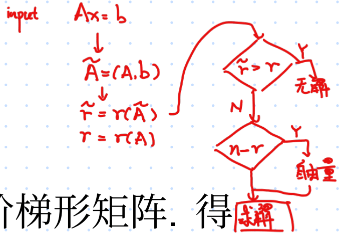
$\tilde{A}_2$: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=1 \\ 2x_1+2x_2=2 \end{cases}$

$\updownarrow$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

	A_1	A_2
条件数(秩)	1	1
行数(方程数)	1	2

求解步骤



求解 $Ax=b$ 的步骤:

1. 记 $\tilde{A}=(A,b)$
2. 通过初等行变化, 化 $\tilde{A}$ 为阶梯形矩阵. 得 $\tilde{r}=r(\tilde{A})$ 和 $r=r(A)$.
3. 如果 $\tilde{r}>r$, 那么无解, 结束; 否则 $(\tilde{r}=r)$, 有解, 继续.
4. 选取 $n-r$ 个自由未知量, 移至方程右侧, 得到 $A'X'=b'-A''X''$
5. 求解剩余 r 个未知量

例题 1.4

例题 1.4

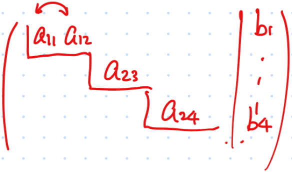
解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 4x_3 - 2x_4 & = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 9x_3 - 5x_4 & = 2 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 & = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 5x_4 & = -2 \end{cases}$$

例题 1.4 思考题

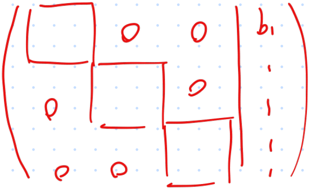
Q: 例题 1.4 中 x_1 或 x_2 可以作为自由未知量吗?

$\tilde{A} = (1, 1 \mid 1) \iff x_2 = 1 - x_1$



$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & 2 \\ & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 - x_3 \end{cases}$$



例题 1.5

例题 1.5

解齐次方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 + x_5 & = 0 \\ x_2 + x_3 + 6x_4 - 10x_5 & = 0 \\ 3x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 39x_4 + 43x_5 & = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 9x_3 + 8x_4 - 28x_5 & = 0 \end{cases}$$

Outline

n 维向量

定义 2.1

一个数域 F 上 n 维向量是 F 上的 n 个数 $a_1, \ldots, a_n$ 组成的 n 元有序数组

$$(a_1, \ldots, a_n) \text{ 或 } \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

其中 a_i 称为该向量的第 i 个分量.

定义 2.2

称 $(a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_n)$, 如果

$$a_i = b_i, \qquad \forall i = 1, \ldots, n.$$

行向量与列向量

- 行向量: 写成行形式的向量
- 列向量: 写成列形式的向量

行向量与列向量可以分别看作 $1 \times n$ 与 $n \times 1$ 矩阵.

约定:

- 本章中, F^n 的向量记为行向量形式.
- 用希腊字母 α, β, γ 表示向量

alpha beta gamma

向量运算

- 加, 减 $\alpha \pm \beta$:

$$(a_1, \ldots, a_n) \pm (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 \pm b_1, \ldots, a_n \pm b_n)$$

- 数乘 $k\alpha$ 或 αk:

$$\begin{aligned} & k \cdot (a_1, \ldots, a_n) \\ = & (ka_1, \ldots, ka_n) \end{aligned}$$

数域的 n 维向量空间

定义 2.6

$(F^n;+,\cdot)$ 构成 F 上的 n 维向量空间, 如果满足:

- $\alpha+\beta=\beta+\alpha$
- $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$
- $\alpha+0=\alpha$
- $\alpha+(-\alpha)=0$
- $1\cdot\alpha=\alpha$
- $k(l\alpha)=(kl)\alpha$
- $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$
- $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

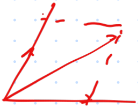
e.g. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$

Outline

简单例子

- 共线

$$\mathbf{a} = k_1\mathbf{a}_1.$$



- 共面

$$\mathbf{a} = k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2.$$

- 一般 $(n+1)$ 个向量落在 n 线性子空间

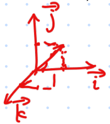
线性表示

定义 3.1

我们称 $\mathbf{a}$ 是$\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$的 线性组合 (等价地, $\mathbf{a}$ 可由 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ 线性表示), 如果存在 $k_1, \dots, k_m$, s.t.

$$\mathbf{a} = k_1\mathbf{a}_1 + \cdots + k_m\mathbf{a}_m.$$

e.g. 取 n 维单位向量 $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, 则对任意 $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, 有



$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n.$$

可见 F^n 中的任意向量均可由 n 维单位向量线性表示.

e.g. 零向量 $\mathbf{0}$ 是任意向量组的线性组合.

例题 3.1

例题 3.1

求证 $a = (-1, 1, 5)$ 是 $a_1 = (1, 2, 3)$, $a_2 = (0, 1, 4)$, $a_3 = (2, 3, 6)$ 的线性组合

"判别能否线性表示" 等价于 "判别方程组是否有解"

$\vec{a}$ 可被 $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ 线性表示

$\Leftrightarrow$ $\exists (k_1, k_2, k_3)$

s.t. $k_1\vec{a_1} + k_2\vec{a_2} + k_3\vec{a_3} = \vec{a}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

线性表出

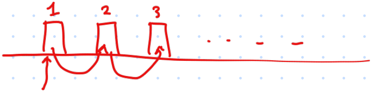
定义 3.2 (向量组的线性表示)

向量组 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_t\}$ 可由向量组 $\{\beta_1, \ldots, \beta_s\}$ 线性表示, 如果任一 α_i 均可由 $\{\beta_1, \ldots, \beta_s\}$ 线性表示.

定义 3.2 (向量组的线性表示)

称两个向量组等价, 如果它们可以互相线性表示.

Hilbert hotel.



① $n < \infty$

② $\infty + n = \infty$

③ $n \cdot \infty = \infty$

④ $\infty = \infty$