

Outline

Sec 2.0 引言

Sec 2.1 矩阵与其运算

Sec 2.2 矩阵的分块

Sec 2.3 矩阵的秩

Sec 2.4 矩阵的逆

Sec 2.5 初等矩阵

前情回顾

$$F \quad +: F \times F \rightarrow F \quad \times: F \times F \rightarrow F \quad |\cdot|: F \rightsquigarrow \text{距离0多远}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m=m' \\ n=n' \end{array} \right\} \quad \left\{ n=m' \right\} \quad \overline{\cdot}: F \rightarrow F$$

$$F^{m \times n} \quad +: F^{m \times n} \times F^{m' \times n'} \rightarrow F^{m \times n} \quad \times: F^{m \times n} \times F^{m' \times n'} \rightsquigarrow F^{m \times n'} \quad \text{rank}: F^{m \times n} \rightarrow N$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\cdot}: F^{m \times n} \rightarrow F^{m \times n} \quad \cdot T: F^{m \times n} \rightarrow F^{n \times m} \quad \cdot^{-1}: F^{m \times n} \rightarrow F^{n \times m} \end{array} \right.$$

$$|\cdot|: F^{m \times n} \rightarrow \text{距离退化矩阵多远} (F)$$

$$M=M' \\ N=N'$$

分块 $M \times N$

$$+: \text{分块 } M \times N \times \text{分块 } M' \times N' \rightarrow \text{分块 } M \times N'$$

$\times \dots$

	+	\times	$\overline{\cdot}$	$\cdot T$	$ \cdot $
+	✓	✓	✓	✓	✗
\times		non-commutative	✓	$(AB)^T = B^T A^T$	✓
$\overline{\cdot}$			id	✓	✓
$\cdot T$				✓	✓
$ \cdot $?

初等变换

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} A \xrightarrow{r_j \leftrightarrow r_i} A''$$

定义 3.1 (矩阵的初等变换)

初等行变换:

1. $r_i \leftrightarrow r_j$: 交换第 i 行和第 j 行
2. $k \times r_i$: $k \in F$ 乘第 i 行
3. $r_i + k \times r_j$: 第 j 行乘以 $k \in F$ 并加到第 i 行

初等列变换: 改“行”为“列”

初等变换: 初等行变换和初等列变换的统称.

$$C_i \leftrightarrow C_j$$

$$kC_i$$

$$C_j + kC_i$$

等价

定义 3.2

(有限次)

称 A 等价于 B , 如果 A 可以通过一系列初等变换变成 B . 即, 存在一个序列

$$A = A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \cdots \rightarrow A_s = B,$$

其中每个 A_{i+1} 可由 A_i 经过一次初等变换得到.

等价关系 (\sim) \leq $<$

一个二元关系 \sim 是一个等价关系, 如果满足以下三个条件:

- ▶ 反身性: $A \sim A$
- ▶ 对称性: $A \sim B$ 则 $B \sim A$
- ▶ 传递性: $A \sim B$ 且 $B \sim C$, 则 $A \sim C$

可验证, 刚刚定义的矩阵等价关系确实是一个等价关系.

- ▶ 反身性: 显然 ✓
- ▶ 对称性: 初等变换均有初等变换的逆
- ▶ 传递性: 显然 $A \rightarrow \dots \rightarrow B \rightarrow \dots \rightarrow C$

$$A \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} A_2 \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \dots \xrightarrow{r_{n-1} \leftrightarrow r_n} A_n = B$$

$$A \xrightleftharpoons[r_1 \leftrightarrow r_2]{r_1 \leftrightarrow r_2} B$$

$$A \xrightleftharpoons[k^{-1}r_i]{kr_i} B$$

$$A \xrightleftharpoons[r_j - kr_i]{r_j + kr_i} B$$

阶梯形矩阵

定义 3.3 (阶梯形矩阵)

称一个矩阵 A 为一个 **阶梯形矩阵**, 如果

- ▶ 0 元素以下的元素都是 0
- ▶ 首个非零元一下的元素都是 0

记 a_{i,j_i} 为第 i 行的首个非零元素, 则

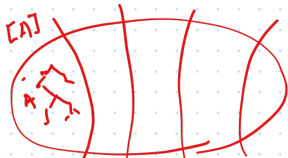
$$a_{i,j} = 0 \quad \text{if } j < j_i$$

和

$$a_{i,j} = 0 \quad \text{if } \exists i_0 < i \text{ s.t. } j_{i_0} = j$$

上三角

$$\begin{pmatrix} \times & & & \\ 0 & \times & & \\ & \times & \times & \\ & & \times & \times \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

该行, j_i : 首个非零
所在列
 $j_1 = 1, j_2 = 3$

定理 3.1

定理 3.1 (化简为阶梯形)

任意一个矩阵都可以经过有限次 **初等行变换** 化为 **阶梯形矩阵**.

Q: Why not 上三角矩阵?

例题 3.1

把以下矩阵化为阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 9 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

定理 3.2

定理 3.2 (进一步化简)

任何一个 $m \times n$ 矩阵都等价于一个矩阵形如

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$C_2 - \frac{a_{12}}{a_{11}} C_1$

其中 $r \leq \min\{m, n\}$.

证明

先行消元, 再列消元.

等价标准形

定理 3.2 (进一步化简)

如果

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \overbrace{1 \cdots 1}^r & \\ \hline & 0 \end{pmatrix}$$

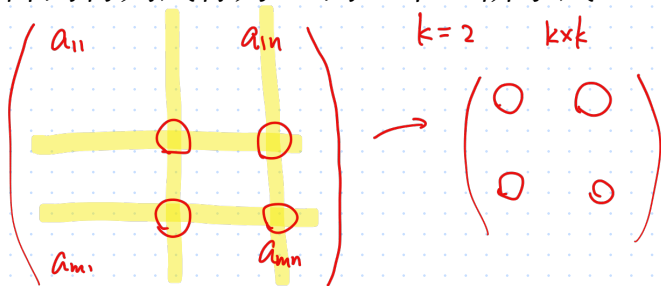
等价于 A , 则称它为 A 的 **等价标准形**.

等价标准形只提供一个信息 r , 这就是矩阵的秩.

k 阶子式

定义 3.4 (k 阶子式)

对一个 $m \times n$ 矩阵 A , 任取 k 行 k 列 ($k \leq \min\{m, n\}$), 取这些行列交叉点上的 k^2 个元素, 按原来的顺序构成一个 $k \times k$ 的矩阵, 这个矩阵的行列式称为 A 的一个 k 阶子式.



秩

定义 3.5 (秩)

↗ 最大 r s.t. r 阶子式 $\neq 0$

称 $r \in \mathbb{Z}_+$ 为一个矩阵 A 的 **秩 (rank)** (记为 $r(A)$), 如果

- ▶ 存在非零的 r 阶子式
- ▶ 不存在非零的 $r+1$ 阶子式

规定零矩阵的秩为 0.

$$\begin{pmatrix} E_r & \\ & 0 \end{pmatrix}$$

Q: 最大的 k 阶非零子式
的 $k = r$.

满秩与降秩

定义 (满秩与降秩)

对于 n 阶方阵, 如果 $r(A) = n$, 那个称 A 为 **满秩的** (非奇异的, 非退化的); 否则, 称为 **降秩的** (奇异的, 退化的).
 $r(A) < n$

可见, A ~~满秩~~^{降秩} 当且仅当 $\det(A) = 0$.

$$|A| = 0$$

定理 3.3

定理 3.3

初等变换不改变矩阵的秩.

可见, 矩阵 A 的标准形为 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A 的秩

$$r(A) = r.$$

证明

初等变换不改变行列式

性质 3.1

性质 3.1

两个同型矩阵等价, 当且仅当它们同秩.

证明

$r(A) = r = r(B)$ 当且仅当

$$A \sim \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim B.$$

性质 3.2

性质 3.2

阶梯形矩阵的秩等于它非零的行的数量.

证明

假设阶梯形矩阵 A 有 r 行非零元.

一方面, 对于第 i 行, 选取第 j_i 列, 可得 $r \times r$ 的上三角矩阵, 其行列式不为 0.


另一方面, 任意 $(r+1) \times (r+1)$ 的行列式都为 0.

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{pmatrix}$$

例题 3.3

例题 3.3

求以下矩阵的秩


$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 13 & 19 \end{pmatrix}$$

例题 3.3

通过初等变换化为阶梯形矩阵.

Outline

Sec 2.0 引言

Sec 2.1 矩阵与其运算

Sec 2.2 矩阵的分块

Sec 2.3 矩阵的秩

Sec 2.4 矩阵的逆

Sec 2.5 初等矩阵

逆元

对于数域 F 中的元素 a

- ▶ 加法的逆元 $-a$ 满足 $a + (-a) = 0$
- ▶ 乘法的逆元 a^{-1} 满足 $a \times a^{-1} = 1$

对于矩阵

- ▶ 矩阵加法的逆元 $-A$ 满足 $A + (-A) = 0$
- ▶ 矩阵乘法的逆元 A^{-1} 应该满足 $A \times A^{-1} = E$

$$0 + A = A + 0 = A$$

$$E \times A = A \times E = A$$

逆矩阵

$$n \times m = 1 \times 2$$

$$(a_1 \ a_2) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \nearrow 2 \times 1 \\ \searrow 1 \times 2 \end{matrix}$$

$$\underline{A \times B = 1} \quad \underline{B \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

定义 4.1 (逆矩阵)

设 A 是一个 n 阶方阵, 如果存在矩阵 B , s.t.

$$AB = BA = E,$$

$$A \rightsquigarrow \frac{A^T A}{(A^T A)^{-1}} \cdot \frac{A A^T}{(A A^T)^{-1}}$$

则称 A 存在逆矩阵 B , 将 A 的 **逆矩阵** (记为 A^{-1}). 称 A 与 B 为 **互逆矩阵**.

$$a \rightsquigarrow a^{-1} \text{ (if } a \neq 0 \text{)}$$

$$A \rightsquigarrow A^{-1} \text{ (if } A \text{ 非退化)}$$

$$\begin{pmatrix} E_r & \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Q: 为什么要先声明 B 的存在性?

Q: 如果 A 不是方阵呢?

例题 4.1 (1)

对角矩阵的逆矩阵

对角矩阵 $\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ 的逆矩阵为

$\text{diag}(a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1})$.

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

例题 4.2 (2)

三角矩阵的逆矩阵

上三角矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 也是上三角, 且 A^{-1} 的对角元 $a_{i,i}^{-1}$ 满足

$$a_{i,i}^{-1} = (a_{i,i})^{-1}.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & & \\ 0 & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

矩阵逆的性质 1

逆矩阵的唯一性

如果 A 可逆, 那么 A 的逆矩阵唯一确定.

证明

如果 B, C 都是 A 的逆矩阵, 那么

$$\begin{aligned} B &= B \textcircled{E} \\ &= B(\underline{AC}) = (\underline{BA})C \\ &= EC = C. \quad \checkmark \end{aligned}$$

矩阵逆的性质 2

逆的逆

A 可逆, 则 A^{-1} 可逆, 且

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

证明

$$\underline{A} \underline{A^{-1}} = \underline{A^{-1}} A = E.$$

A 是 A^{-1} 的逆元

$$\text{记 } A = (A^{-1})^{-1}$$

矩阵逆的性质 3

乘积的逆

$$(A \cdot B)^T = B^T A^T$$

A, B 可逆, 那么 AB 可逆, 且

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

证明

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(\underline{BB^{-1}})A^{-1} \\ &= AEA^{-1} \\ &= E. \quad \checkmark\end{aligned}$$

矩阵逆的性质 4

转置的逆

A 可逆, 则 A^T 可逆, 且

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

证明

$$(A^{-1})^T A^T = (\underline{AA^{-1}})^T = E^T = E. \quad \checkmark$$

例题 4.2

$$\begin{aligned} 2 \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

例题 4.2

判断 $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ 是否可逆.

证明

假设 A 存在逆矩阵 $B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix}$, 那么

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3b_{2,1} & 3b_{2,2} \\ 4b_{2,1} & 4b_{2,2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$3b_{2,1} = 1$
 $4b_{2,1} = 0$

伴随矩阵

定义 4.2 (伴随矩阵)

矩阵 $A = (a_{i,j})_{n,n}$ 的 **伴随矩阵** 定义为

$$A^* := \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{j,1} & \cdots & A_{n,1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{1,i} & \cdots & A_{j,i} & \cdots & A_{n,i} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{1,n} & \cdots & A_{j,n} & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

其中 $A_{i,j}$ 为 $a_{i,j}$ 的代数余子式.