正交矩阵

向量空间 $(V;+,\cdot)$　内积, $(\cdot,\cdot): V\times V \to R$

内积空间
- 长度 $|\alpha| = \sqrt{(\alpha,\alpha)}$
- 角度 $\cos\langle\alpha,\beta\rangle = \dfrac{(\alpha,\beta)}{|\alpha|\cdot|\beta|}$
  - $\langle\alpha,\beta\rangle = 0$ or π ⇒ 共线
  - $\langle\alpha,\beta\rangle = \frac{\pi}{2}$ ⇒ 垂直 (正交)

α,β 正交 $\Leftrightarrow (\alpha,\beta)=0$

定义 3.7

$n \times n$ 实矩阵 A 被称为 正交矩阵 如果

$$A^TA = E.$$

基 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$

正交基 (α_i,α_j)

$\downarrow$ 单位化

单位正交基 $\{\alpha_i\}: (\alpha_i,\alpha_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \text{ 单位} \\ 0 & i\neq j \text{ 正交} \end{cases}$

$\Updownarrow$

正交 $A = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in R^{n\times n}$

$$\Rightarrow A^TA = \begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \vdots \\ \alpha_n^T\end{pmatrix}(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = \begin{pmatrix}\alpha_1^T\alpha_1 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n\\ \vdots & \alpha_i^T\alpha_j & \vdots \\ \alpha_n^T\alpha_1 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix} = E$$

正交矩阵 A 满足以下性质:

- $A^{-1} = A^T$　$(A^{-1})^TA^{-1} = E,\ (A^T)^TA^T = E$
- A^{-1} 和 A^T 也是正交矩阵
- $|A| = \pm 1$　$|A^TA| = |A|^2$, $|E| = 1$
- 正交矩阵的乘积也是正交

A, B 正交

$(AB)^TAB = B^TA^TAB = B^TB = E$

定理 3.3

定理 3.3

记 n 阶实矩阵 $A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. A 是正交矩阵, 当且仅当, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基.

A 是正交 $\Longleftrightarrow$ A^T 是正交

$\Longleftrightarrow$ 列向量组 $\{\alpha_i\}$ 是单位正交基

$\Longleftrightarrow$ 行向量组 $\{\beta_i\}$ . . . . . .

定理 3.4

对称矩阵 $A\in F^{n\times n}$
满足 $A^T = A$.

定理 3.4

实对称矩阵的特征值均为实数

↳ $A\in \mathbb{R}^{n\times n}$ s.t. $A^T = A$.

证明

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

代数基本定理.

$|\lambda E - A| = 0$

有 n 个解(可能有重根)

A 是实对称

⇝ A 看作是复对称.

⇝ 由代数基本定理得

$\exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.

s.t. $|\lambda E - A| = 0$

Thm3.4 ⇝ $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $i=1,\dots,n$.

Pf. 假设 ∃ 特征值 λ

s.t. $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$

记 α s.t. $A\alpha = \lambda\alpha$

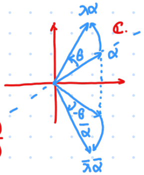
$(r\cdot e^{i\theta}\in\mathbb{C})$ $\to \sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \sqrt{x^2+y^2}(\cos\theta + i\sin\theta)$

• A 是对称

$\Rightarrow (\alpha^T A\alpha)^T = \alpha^T A^T \alpha = \alpha^T A \alpha$

• A 是实

$A\bar\alpha = \overline{(A\alpha)} = \overline{(\lambda\alpha)} = \bar\lambda\cdot\bar\alpha$



$(\alpha, \bar\alpha)_A = (\bar\alpha, \alpha)_A$

$\alpha^T A \bar\alpha = \bar\alpha^T A \alpha$

$\alpha^T \bar\lambda \bar\alpha \qquad = \lambda|\alpha|^2$

$= \bar\lambda\cdot|\alpha|^2 \qquad \Rightarrow \lambda = \bar\lambda$

α 是 λ 的特征向量

$\Rightarrow k\alpha$ 也是.

↳ $\mathbb{C}$.

$\Rightarrow \{k\alpha \mid k\in\mathbb{C}\}$ 都是 λ 的特征向量

($\because z\in\mathbb{C}$ 都是取 $k = \frac{z}{\alpha}$)

特别地 $\bar\alpha = \frac{\bar\alpha}{\alpha}\cdot\alpha$ 是 λ 的特征向量

$\Rightarrow A\bar\alpha = A\cdot\frac{\bar\alpha}{\alpha}\alpha = \frac{\bar\alpha}{\alpha}A\alpha = \frac{\bar\alpha}{\alpha}\lambda\alpha$

定理 3.5

定理 3.5

实对称矩阵中，属于不同特征值的特征向量必正交

回顾：不同特征值 $\lambda_i \neq \lambda_j$

$\Rightarrow$ 特征向量 α_i 与 α_j 线性无关

Pf. 只需 $(\alpha_i, \alpha_j)_E = 0$

$$(\alpha_i, \alpha_j)_A = \alpha_i^T A \alpha_j = \alpha_i^T \lambda_j \alpha_j = \lambda_j \boxed{\alpha_i^T \alpha_j}$$

$$(\alpha_j, \alpha_i)_A \cdots\cdots = \lambda_i \boxed{\alpha_j^T \alpha_i}$$

$$\Rightarrow \lambda_i \cdot \alpha_i^T \alpha_j = \lambda_i \cdot \alpha_j^T \alpha_i = \lambda_j \alpha_j^T \alpha_i$$

$$\Rightarrow \alpha_i^T \alpha_j = 0 \quad (\because \lambda_i \neq \lambda_j)$$

定理 3.6

$A_0 = A \quad A_1 \quad A_2 \quad A_n = \Lambda$

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} \\ \hline e_2^{(1)} \\ e_3^{(1)} \\ \vdots \\ e_n^{(1)} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} \\ \alpha_2^{(1)} \\ \hline e_3^{(2)} \\ \vdots \\ e_n^{(2)} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} \\ \alpha_2^{(2)} \\ \alpha_3^{(3)} \\ \hline \vdots \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} \\ \alpha_2^{(2)} \\ \vdots \\ \alpha_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

定理 3.6

对任意 n 阶实对阵矩阵 A, 则存在正交矩阵 T, s.t. $T^{-1}AT$ 为对角矩阵.

A 是可对角化.

iff $\exists$ 可逆 P $\to$ n个线性无关特征向量

s.t. $P^{-1}AP = \Lambda = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

A 实对称 $\Rightarrow$ n个线性无关 . .

$\Rightarrow$ 正交 . . -

取 $\{\alpha_1, e_2, \dots, e_n\}$ 线无

$\rightsquigarrow$ 单位正交 $\{\alpha_1^{(1)}, e_2^{(1)}, \dots, e_n^{(1)}\}$

记 $T_1 = (\alpha_1^{(1)}, e_2^{(1)}, \dots, e_n^{(1)})$

f 在 $\{\alpha_1^{(1)}, e_2^{(1)}, \dots, e_n^{(1)}\}$ 下的矩阵表示为

$T_1^{-1} A T_1$

$= T_1^T A T_1$ ($\because T_1$ 正交)

$= \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)T} \\ e_2^{(1)T} \\ \vdots \\ e_n^{(1)T} \end{pmatrix} A (\alpha_1^{(1)} e_2^{(1)} \cdots e_n^{(1)})$

$(e_2^{(1)T} A \alpha_1^{(1)})^T = \lambda_1 (e_2^{(1)}, \alpha_1^{(1)})$ "0"

$= \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1^{(1)T} A \alpha_1^{(1)} & \alpha_1^{(1)T} A e_2^{(1)} \cdots \alpha_1^{(1)T} A e_n^{(1)} \\ \hline e_2^{(1)T} A \alpha_1^{(1)} & \\ \vdots & A_2 \\ e_n^{(1)T} A \alpha_1^{(1)} & \end{array}\right)$

$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$

STEP i: $T_i = \begin{bmatrix} E_{i-1} & \\ & T_i' \end{bmatrix}$

$\rightsquigarrow$ 取 $T = T_n \cdot T_{n-1} \cdots T_2 \cdot T_1$

Pf. $A \in \mathbb{R}^{n\times n} \subseteq \mathbb{C}^{n\times n}$

$\Rightarrow |\lambda E - A| = 0$ 解的存在性

又 A 的特征值均为实

$\therefore$ A 的实特征值存在.

不妨取 λ_1 为 . . . .

s.t. $A\alpha_1 = \lambda_1 \alpha_1$

STEP 0: $\{e_1, \dots, e_n\}$

f 在 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 下矩阵表示为 A

STEP 1: α_1 顶多与 $\{e_i\}$ 的一个向量线性相关

不妨假设 $e_2, \dots, e_n$ 与 α_1 线性无关

例题 3.3

例题 3.3

设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

求正交矩阵 T, 使得 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵.

STEP1：求特征值

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

STEP2. 求特征向量.

$\lambda = -1$ $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\lambda = 5$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

STEP 3：对 $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

作单位正交化.

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

正交化

$$\beta_2 = \alpha_2 - (\alpha_2, \gamma_1) \cdot \gamma_1 \xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

正交化

$$\beta_3 = \alpha_3 - (\alpha_3, \gamma_1) \cdot \gamma_1 - (\alpha_3, \gamma_2) \cdot \gamma_2$$

单位化

$$\gamma_3 = \frac{\beta_3}{|\beta_3|}$$

例题 3.4

例题 3.4

求证: 如果实对称 $A \sim B$, 那么存在正交矩阵 T s.t.

$$T^{-1}AT = B.$$