伴随矩阵

定义 4.2 (伴随矩阵)

矩阵 $A = (a_{i,j})_{n,n}$ 的 伴随矩阵 定义为

a_{ij} 的代数余子式 A_{ij}

$= (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

$= (A_{ji})$

$\neq (A_{ij})$

$$A^* := \begin{pmatrix} \overset{\in F}{A_{1,1}} & \cdots & A_{j,1} & \cdots & A_{n,1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{1,i} & \cdots & A_{j,i} & \cdots & A_{n,i} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{1,n} & \cdots & A_{j,n} & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

其中 $A_{i,j}$ 为 $a_{i,j}$ 的代数余子式.

逆矩阵的伴随矩阵表示

逆矩阵的伴随矩阵表示

$A_{ij}^* = A_{ji}$

$A^{-1}A = A\cdot A^{-1} = E$

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}.$$

$$\underset{(a_{ij})(A_{ji})}{A\cdot A^*} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{j1} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{jn} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & (\ )_{ij} & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & \\ & \ddots & \\ & & |A| \end{pmatrix}$$

$$(\ )_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot A^*_{kj} = \sum_k a_{ik} A_{jk} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ |A| & i = j \end{cases}$$

$= |A|\cdot E$

if $|A| \neq 0$ then $A\cdot\frac{A^*}{|A|} = E$

similarly, we have $\frac{A^*}{|A|}\cdot A = E$

$\Rightarrow A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$ if $|A| \neq 0$.

逆矩阵的伴随矩阵表示

设 $d := |A|$. 由行列式按一行展开和定理 5.2 得

$$a_{i,1}A_{j,1} + \cdots + a_{i,n}A_{j,n} = \begin{cases} d, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

我们有

$$\begin{aligned} A \cdot A^* &= (a_{i,j})(A_{j,k}) \\ &= (\sum_j a_{i,j}A_{j,k}) \\ &= \begin{pmatrix} d & & \\ & \ddots & \\ & & d \end{pmatrix} = dE. \end{aligned}$$

定理 4.1

可逆的等价条件

矩阵 A 可逆，当且仅当行列式 $|A| \neq 0$.

$\Leftarrow$: $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$.

$\Rightarrow$: A^{-1} 存在唯一性

$\Rightarrow A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$.

从 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$ 来理解.

e.g.

- 对角矩阵
- 三角矩阵

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_{ii} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}}_{|A| = \prod_i a_{ii}}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_{ii}^{-1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix}$$

A^{-1} 存在 $\Leftrightarrow a_{ii} \neq 0$

$\Leftrightarrow |A| \neq 0$

定理 4.1 证明

必要性: 有 $AA^{-1} = E$ 可得
$|A||A^{-1}| = |AA^{-1}| = |E| = 1.$
充分性: 如果 $|A| \neq 0$, 那么 $\frac{1}{|A|}A^*$ 为 A 的逆, i.e.

$$\frac{1}{|A|}A^* \cdot A = A \cdot \frac{1}{|A|}A^* = E.$$

例题 4.3

例题 4.3

求以下矩阵的行列式

$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$ $A^*_{ij} = A_{ji}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

解

利用 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$, 通过计算 A 的行列式和所有 2 阶代数余子式可得.

例题 4.4

例题 4.4

如果 A 可逆, 那么方程组 $Ax = b$ 存在唯一解.

解

存在性: $X = A^{-1}b$ 为方程组的解

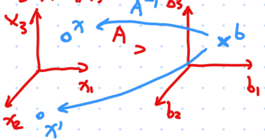
唯一性: 假设有另一个解 X', i.e. $AX' = b$. 两边左乘 A^{-1} 得, $A^{-1}(AX')A^{-1}b$, i.e. $X' = A^{-1}b$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \longleftrightarrow Ax = b$$

$$\Leftrightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

$$\Leftrightarrow x = A^{-1}b$$

$(n=3, F=\mathbb{R})$



例题 4.5

例题 4.5

设可逆的 A 和 C, 求 $D = \begin{pmatrix} A & \\ B & C \end{pmatrix}$ 的逆.

$\begin{pmatrix} a_{11} & \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $a_{ii} \neq 0$ $a \neq 0 \Leftrightarrow a^{-1}$存在

$\begin{pmatrix} A_{11} & \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ $|A_{ii}| \neq 0$ $|A| \neq 0 \Leftrightarrow A^{-1}$存在

解

先证 A 的可逆性: 由 A, C 不可逆得

$|D| = |A| \cdot |C| \neq 0.$

Laplacian expansion

例题 4.5 续

解 (续)

再求 A^{-1}: 设 $A^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$. 由 $AA^{-1} = E$ 可得:

$$\begin{pmatrix} A & \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & \\ & E \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} AX = E \\ AY = 0 \\ BX + CZ = 0 \\ BY + CT = E \end{cases}$$

由 A 可逆得 $X = A^{-1}$ 和 $Y = 0$. 代入得 $Z = -C^{-1}BA^{-1}$ 和 $T = C^{-1}$.

Outline

1st 初等矩阵 1

定义 5.1 (行对换)

$r_i \leftrightarrow r_j$

$c_i \leftrightarrow c_j$

$P(i,j) \cdot P(i,j) = E$

$$
P(i,j) := \begin{array}{c}
\\ \\ \\ i \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & i & & & j & & \\
\end{array}
\\
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & \\
 & & & 0 & & & 1 & & \\
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & 1 & & & \\
 & & & 1 & & & 0 & & \\
 & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & & \ddots \\
 & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

1st 初等矩阵 2

- $P(i,j)A$：通过交换 A 的第 i 行和第 j 行得到.
- $AP(i,j)$：…… 列 ……