例题 4.1

例题 4.1

计算行列式

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & \frac{1}{2} & 0 & -3 \\ 1 & \frac{1}{6} & 2 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

n 阶排列 ⇝ n 阶行列式 ⇝ 定义 $|A| = \sum_{j_1 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{nj_n}$.

计算

- 初等变换 →
- 行列式的线性性质

特殊行列式

- 对角
- 三角

习题

提示：

能否化为三角行列式？

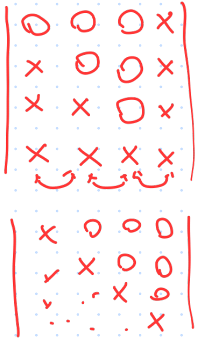
$$b_4 \cdot \begin{vmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 & a_1 b_4 \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 & a_2 b_3 & a_2 b_4 \\ a_1 b_3 & a_2 b_3 & a_3 b_3 & a_3 b_4 \\ a_1 b_4 & a_2 b_4 & a_3 b_4 & a_4 b_4 \end{vmatrix}$$

$a_1b_2 - a_2b_1$

$a_2b_3 - a_3b_2$

$a_2b_4 - a_4b_2$

$a_3b_4 - a_4b_3$



$col_3 - b_3 \times col_4$

$col_2 - b_2 \times col_4$

$col_1 - b_1 \times col_4$

爪形行列式的一般解法

$a_1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{b_i}{c_i} \cdot a_i$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_j & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_2 & c_2 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & 0 & \\ b_i & & & c_i & & & \\ \vdots & & 0 & & \ddots & & \\ b_{n-1} & & & & & c_{n-1} & \\ \cancel{b_n} & & & & & & c_n \end{pmatrix}$$

$col_1 - \frac{b_n}{c_n} \cdot col_n$

习题

- 10 (4)
- 11 (6)

例题 4.2

例题 4.2

计算下面矩阵的行列式

$$\left[1-\left(\frac{2^{n-1}}{n}+\frac{2^{n-2}}{n-1}+\cdots+\frac{2}{2}\right)\right]\times n!$$

$col_1-\frac{2^{n-1}}{n}\cdot col_n$

$col_1-\frac{2^{n-2}}{n-1}\cdot col_{n-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 2^i & & & i & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 2^{n-1} & 0 & \dots & \dots & 0 & n \end{pmatrix}$$

提示

通过初等变换化为下三角矩阵. (上三角呢?)

例题 4.3

计算下面矩阵的行列式

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ x & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ x & 1 & x & \cdots & x \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

提示

观察到, 除了主对角线, 其他元素都相同. 所以, 每行减去某一含有相同元素的行, 将问题化简. 至此, 只需构造这样含有相同元素的行.

例题 4.3 解

$$
\left(1+(n-1)x\right)
\begin{vmatrix}
1 & \cancel{x}\,1 & \cancel{x}\,1 & \cdots & \cancel{x}\,1 \\
\cancel{x}\,0 & 1-x & \cancel{x}\,0 & \cdots & \cancel{x}\,0 \\
\cancel{x}\,0 & \cancel{x}\,0 & 1-x & \cdots & \cancel{x}\,0 \\
\vdots & & & \ddots & \vdots \\
\cancel{x}\,0 & \cancel{x}\,0 & \cancel{x}\,0 & \cdots & 1-x
\end{vmatrix}
= \left(1+(n-1)x\right)\cdot(1-x)^{n-1}
$$

习题

$$\begin{vmatrix} x-a & x & x & \dots & x \\ x & x-a & x & \dots & x \\ x & x & x-a & \dots & x \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \dots & x-a \end{vmatrix}$$

Outline

- Sec 1.0 引言
- Sec 1.1 2 阶与 3 阶行列式
- Sec 1.2 n 阶排列
- Sec 1.3 n 阶行列式的定义
- Sec 1.4 n 阶行列式的性质及计算
- Sec 1.5 行列式按一行展开及克拉默法则

2x2

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}$$

$a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

3x3

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

$$= a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,2} \begin{vmatrix} a_{2,3} & a_{2,1} \\ a_{3,3} & a_{3,1} \end{vmatrix} + a_{1,3} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$$

行列式的余子式表示

- $A = [a_{i,j}]_{i,j}$: $n \times n$ 矩阵
- $A_{[i,j]}$: 通过 A 去掉第 i 行和第 j 列的元素得到的 $(n-1) \times (n-1)$ 矩阵
- $M_{i,j} := |A_{[i,j]}|$: $a_{i,j}$ 的余子式
- $A_{i,j} := (-1)^{i+j} M_{i,j}$: $a_{i,j}$ 的代数余子式 ((i,j)-cofactor)
- 规定 $n = 1$ 时, 取 $M_{i,j} = A_{i,j} = 1$

$A_{[i,j]}: A \setminus \{a_{i\cdot}, a_{\cdot j}\}$

行列式按行列展开

定理 5.1

- 按第 i 行展开: $|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}A_{i,j}$
- 按第 i 列展开: $|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}A_{j,i}$

ith 行 $|A| = a_{i1} \cdot A_{i1} + \dots\dots + a_{in}A_{in}$

ith 列 $|A| = a_{1i}A_{1i} + \dots\dots + a_{ni}A_{ni}$

$$\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{ji} \\ a_{ni} \end{pmatrix}$$

行列式按行列展开的证明 (0)

想法

仅考虑按一行展开 (转置保持行列式不变).
考虑按第一行展开 (否则, 通过行交换转化为第一行).
利用行列式的线性性质, 转化为 “对角” 情形.

行列式按行列展开的证明 (1)

计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \times & 0 \\ \times & \times \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\tau(i_1,\dots,i_n)} a_{1,i_1}\dots a_{n,i_n} \quad (\text{定义})$$

$$=a_{1,1}((-1)^{\tau(1,i_2,\dots,i_n)} a_{1,i_2}\dots a_{n,i_n}) \quad (a_{1,j}=0 \text{ for } j\neq 1)$$

$$=a_{1,1}((-1)^{\tau(\underset{\substack{\downarrow\\ i_1}}{i_2},\dots,\underset{\substack{\downarrow\\ i_{n-1}}}{i_n})} a_{1,\underset{i_1}{i_2}}\dots a_{n,\underset{i_{n-1}}{i_n}}) \quad (1 \text{ 在首尾不构成逆序})$$

$$=a_{1,1}|A_{[1,1]}| \quad (\text{定义}).$$

行列式按行列展开的证明 (2)

$$
\begin{vmatrix}
0 & 0 & \dots & a_{1,j} & \dots & 0 \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n}
\end{vmatrix}
$$

$$
=(-1)^{j-1}
\begin{vmatrix}
a_{1,j} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
a_{2,j} & a_{1,2} & \dots & a_{2,j-1} & \dots & a_{2,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n,j} & a_{1,2} & \dots & a_{n,j-1} & \dots & a_{n,n}
\end{vmatrix}
$$

$$
=(-1)^{j-1} a_{1,j} |A_{[1,j]}| \quad (\text{上述情形}).
$$

行列式按行列展开的证明 (3)

将 $a_{1,j}$ 看作 $\overbrace{0+\cdots+0}^{j-1}+a_{1,j}+\overbrace{0+\cdots+0}^{n-j}$. 由行列式的线性性质得 $f(a_1,a_2)=f(a_1+0,0+a_2)=f(a_1,0)+f(0,a_2)$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+0 & 0+a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{j=1,\dots,n} \begin{vmatrix} 0 & \dots & a_{1,j} & \dots & 0 \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

行列式按行列展开的证明 (4)

$$\cdots = \sum_{j=1,\dots,n} (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} a_{1,j} & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,j} & a_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,j} & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j=1,\dots,n} (-1)^{j-1} a_{1,j} |A_{[1,j]}|.$$

至此, 我们得到的行列式按第一行展开.

行列式按行列展开的证明 (5)

现考虑按第 i 行进行展开. 类似对第 j 列的处理, 得

$$
\begin{vmatrix}
a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & \\
\vdots & & \vdots & \\
a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} & \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} &
\end{vmatrix}
=(-1)^{i-1}
\begin{vmatrix}
a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} & \\
a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} &
\end{vmatrix}
$$

$$
= \sum_{j=1,\dots,n} (-1)^{i+j-2} a_{i,j} |A_{[i,j]}|.
$$

行列式按行列展开的证明 (6)

最后, 证明按第 i 列展开. 由转置保持行列式可得

$$
\begin{aligned}
|A| &= |A^T| \\
&= \sum_{j=1,\dots,n} (-1)^{i+j} a^T_{i,j} |A^T_{[i,j]}| \\
&= \sum_{j=1,\dots,n} (-1)^{i+j} a_{j,i} |A_{[j,i]}|
\end{aligned}
$$

例题 5.1

例题 5.1

计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

提示

按第一行进行展开.

例题 5.2

例题 5.2

计算范德蒙德 (Vandermonde) 行列式 $|V_n|$, 其元素 $v_{i,j} = a_j^{i-1}$ 即

$$\begin{array}{rc} & \begin{array}{ccc} \phantom{a_1^{n-1}} & \text{jth col} & \phantom{a_n^{n-1}} \end{array} \\ \text{ith row} & \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_1^1 & & a_n^1 \\ \vdots & a_j^{i-1} & \vdots \\ a_1^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \end{array}$$

求证

$$|V_n| = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_i - a_j).$$

例题 5.2 解 (1)

ith row $(a_1^{i-1} \;\cdots\; a_j^{i-1} \;\cdots\; a_n^{i-1})$

(i+1)th row $(a_1^{i-1}\cdot a_1 \quad a_j^{i-1}\cdot a_j \quad a_n^{i-1}\cdot a_n)$

尝试 “对角化” V_n, 如 $r_{i+1} - a_n r_i$ for $i = 1, \ldots, n-1$ 得

$$\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & 1 \\ a_1 - a_n & \ldots & a_{n-1} - a_n & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} - a_n a_1^{n-2} & \ldots & a_{n-1}^{n-1} - a_n a_{n-1}^{n-2} & 0 \end{vmatrix}$$

$(a_1 - a_n)\cdot a_1^{n-2}$

按第 1 行展开, 并化简得

$$(-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} (a_i - a_n) \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-2} & \ldots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

例题 5.2 解 (2)

$$
\begin{aligned}
|V_n| &= (-1)^{n-1}\prod_{i=1}^{n-1}(a_i - a_n)|V_{n-1}| \\
&= \prod_{i=1}^{n-1}(a_n - a_i)\boxed{|V_{n-1}|} \\
&= \dots \\
&= \prod_{j=n}^{2}\left(\prod_{i=1}^{j-1}(a_j - a_i)\right)\boxed{|V_1|} \\
&= \prod_{1\le i<j\le n}(a_j - a_i).
\end{aligned}
$$

$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + \dots + a_n$

$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \times \dots \times a_n$

定理 5.2

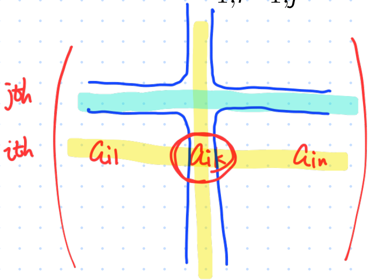
定理 5.2

如果 $i \neq j$, 那么

$$a_{i,1}A_{j,1} + \cdots + a_{i,n}A_{j,n} = 0$$

且

$$a_{1,i}A_{1,j} + \cdots + a_{n,i}A_{n,j} = 0$$



定理 5.2 证明

取 A' 为将 A 第 j 行替换为第 i 行所得的矩阵. 有 $a'_{j,k} = a_{i,k}$ 和 $A'_{j,k} = A_{j,k}$.
通过对第 j 行展开, 有

$$
\begin{aligned}
& a_{i,1}\boxed{A_{j,1}} + \cdots + a_{i,n}\boxed{A_{j,n}} \\
=& a'_{j,1}\boxed{A'_{j,1}} + \cdots + a'_{j,n}\boxed{A'_{j,n}} \\
=& |A'| = 0.
\end{aligned}
$$

习题

对

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

求 $A_{2,1} + A_{2,2}$

提示

通过替换第 i 行元素, 产生含有 $A_{2,1} + A_{2,2}$ 的方程.

克拉默法则

定理 5.3 克拉默法则 (Cramer's Rule)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} & b_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1, \\ & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

若它的系数行列式 $D = |a_{ij}| \neq 0$, 则该方程组有唯一解

作业

$$x_j = \frac{|A_i|}{|A|} \qquad x_i = \frac{D_i}{D}, i = 1, \cdots, n$$

10 (4)

11 (6)

12 (3) (4)

其中 D_i 是将系数行列式中的第 i 列换成 $(b_1, \cdots, b_n)^T$ 后的行列式.

- Why V_n 写成 $\prod_{i<j}$
- 翻译 Thm 5.2