1. 解下列线性方程组

(1)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 + x_5 = 4 \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 10 \\ -x_2 - 13x_3 - 2x_4 + x_5 = -14 \\ x_3 - 16x_4 + 2x_5 = -11 \\ 2x_4 + 5x_5 = 12 \end{cases}$$

解：考虑增广矩阵

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & -1 & -3 & 2 & 10 \\ & -1 & -13 & -2 & 1 & -14 \\ & & 1 & -16 & 2 & -11 \\ & & & 2 & 5 & 12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 - 3r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 4 & 1 & 4 \\ & 1 & 14 & -15 & -1 & -2 \\ & & & & & \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} & & & & & \\ & & 1 & -17 & 0 & -16 \\ & & & & & \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_4 - r_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} & & & & & \\ & & & 1 & 2 & 5 \\ & & & & & \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_5 - 2r_4} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 4 & 1 & 4 \\ & 1 & 14 & -15 & -1 & -2 \\ & & 1 & -17 & 0 & -16 \\ & & & 1 & 2 & 5 \\ & & & & 1 & 2 \end{array}\right)$$

得 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 1, 1, 1, 2)$

2. 设 $\beta=(1,2,1,1)$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$$

求 β 由 α_i 的线性表示.

解：求解方程

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}$$

考虑增广矩阵

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\1&1&-1&-1&2\\1&-1&1&-1&1\\1&-1&-1&1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{2}r_i,\ i=2,3,4]{r_i-r_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\&&1&1&-\frac{1}{2}\\&1&&1&0\\&1&1&&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_4]{r_2\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\&1&&1&0\\&1&1&&0\\&&1&1&-\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\&1&&1&0\\&&1&-1&0\\&&1&1&-\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}r_4]{r_3-r_4}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\&1&&1&0\\&&1&-1&0\\&&&1&-\frac{1}{4}\end{array}\right)$$

得 $(k_1,k_2,k_3,k_4)=\left(\frac{5}{4},\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right)$

$\Rightarrow \beta=\frac{5}{4}\cdot\alpha_1+\frac{1}{4}\alpha_2-\frac{1}{4}\alpha_3-\frac{1}{4}\alpha_4$ #

3. 设 $\alpha_1=(3,-1,1)$

$\alpha_2=(1,1,2)$

$\alpha_3=(1,-3,-3)$

$\alpha_4=(4,0,5)$

(1) 求证 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相交

Pf. 考虑 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=0$

i.e. $$\begin{pmatrix}3&1&1&4\\-1&1&-3&0\\1&2&-3&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\k_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{消元法}}\begin{pmatrix}1&2&-3&5\\&1&-2&\frac{5}{3}\\&&&-\frac{8}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\k_4\end{pmatrix}=0$$

试用 k_1,k_2 为自由未知量.

可取 k_3 为自由未知量

$k_1=\quad -k_3$

$k_2=2k_3$

k_4 可为自由未知量吗?

得 $\begin{cases}k_1=-k_3\\k_2=2k_3\\k_4=0\end{cases}$

(Why?)

不妨取 $k_3=1$ 得

$-\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=0$

只有 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相交.

$\therefore\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相交. #

(2) 求证 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性无关

Pf: 方程 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_4\alpha_4=0$

对应 (1) 中方程的系数矩阵去掉 3rd 列

得消元后矩阵 $$\begin{pmatrix}1&2&5\\&1&\frac{5}{3}\\&&-\frac{8}{3}\end{pmatrix}$$

$\therefore$ 方程只有零解

$\therefore\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性无关. #

5. 求证：向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$

与向量组 $\beta_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{s-1} + \alpha_s$

$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{s-1} + \alpha_s$

$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{s-1}$

等价.

Pf. 要证 $\{\alpha_i\}$ 与 $\{\beta_i\}$ 等价

即证 它们可以相互线性表示,

- $\{\beta_i\}$ 可被 $\{\alpha_i\}$ 线性表示,

  从 β_i 的表达式可知

- $\{\alpha_i\}$ 可被 $\{\beta_i\}$ 线性表示,

Recall Ch1. 例4.3

可验证 $\beta_1 + \dots + \beta_n = (n-1)(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)$

$\therefore \alpha_i = (\alpha_1 + \dots + \alpha_n) - (\alpha_1 + \dots + \alpha_{i-1} + \alpha_i + \dots + \alpha_n)$

$= \frac{1}{n-1}(\beta_1 + \dots + \beta_n) - \beta_i$ #

10. 在 $\mathbb{R}^3$ 中的两组基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

(1) 求 $\{\varepsilon\}$ 到 $\{\eta\}$ 的过渡矩阵

解：即求矩阵 A s.t. $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \cdot A$.

记为增广矩阵 $(\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3 \mid \eta_1\ \eta_2\ \eta_3)$

i.e. $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{消元}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ & 1 & & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & & 1 & & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1 - r_3]{r_1 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & \frac{1}{2} & 2 & \\ & 1 & & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & & 1 & & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

得 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 为 $\{\varepsilon\}$ 到 $\{\eta\}$ 过渡矩阵 #

(2) 求向量 $\xi = (3, 5, 0)$ 在 $\{\eta\}$ 下的坐标.

Rmk：此处 ξ 的坐标默认是在标准基 $\{e\}$ 下

解：解方程 $k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + k_3\eta_3 = \xi$

其增广矩阵 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow{\text{消元}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ & 1 & -1 & -2 \\ & & 1 & 3 \end{array}\right)$$

得 ξ 在 $\{\eta\}$ 下的坐标为

$(k_1, k_2, k_3) = (1, 1, 3)$ #

附 1. 已知 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix}$

1) 求 a, b 的值 s.t. b 不能由 $\{\alpha_i\}$ 线性表示，

解：b 不能由 $\{\alpha_i\}$ 线性表示

$\Leftrightarrow$ $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = b$ 无解.

考虑增广矩阵 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\text{消元}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ & 1 & -1 & 2 \\ & & a-1 & 0 \\ & & & b-2 \end{array}\right)$

$\therefore$ $b-2 \neq 0$ 时 方程无解

$\therefore$ $b \neq 2$ 时, β 不能被 $\{\alpha_i\}$ 线性表示 #

Rmk:

$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta\}$ 线性无关

$\Rightarrow$ $\nLeftarrow$ β 不能被 $\{\alpha_i\}$ 线性表示

e.g. $\{\alpha \ldots, \beta\}$ 线性无关

$\Leftrightarrow$ $a \neq 1$ & $b \neq 2$

$\Rightarrow$ $\nLeftarrow$ $b \neq 2$

$\Leftrightarrow$ β 不能被 $\{\alpha_i\}$ ....

2) 求 a, b 的值 s.t. β 可被 $\{\alpha_i\}$ 线性表示.

并写出此时表达式

解：即求 a, b s.t. 题(1) 方程有非零解

得 $b=2$ 时 β 能被 $\{\alpha_i\}$ 线性表示

解方程 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ & 1 & -1 \\ & & a-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

当 $a-1 \neq 0$ 时，得 $(k_1, k_2, k_3) = (-1, 2, 0)$

i.e. $a \neq 1$ 时 $\beta = -\alpha_1 + \alpha_2$

当 $a-1=0$ 时， k_3 为自由未知量

i.e. $a=1$ 时, $\beta = (-1-2k_3)\alpha_1 + (2+k_3)\alpha_2 + k_3\alpha_2$

例 2. 设矩阵通过有限次行变换矩阵 A 得到

如何从几何来理解

求证：A 与 B 的列向量有相同的线性关系

Pf. 记 A, B 的列向量分别为 $\{\alpha_i\}$ 和 $\{\beta_i\}$

要证 $\{\alpha_i\}$ 与 $\{\beta_i\}$ 有相同线性关系

即证，对 $\forall (k_1, \dots, k_n) \in F^n$ 有

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_n\alpha_n = 0$$

$$\Leftrightarrow k_1\beta_1 + \dots + k_n\beta_n = 0$$

已知初等变换不改变方程的解集

由 A, B 相差有限初等变换得

$$\{k \mid A\cdot k = 0\} = \{k \mid B\cdot k = 0\}$$

$\therefore$ $k = (k_1, \dots, k_n)$ 满足 $A\cdot k = 0$

$\Leftrightarrow$ k 满足 $B\cdot k = 0$

又 $A\cdot k = k_1\alpha_1 + \dots + k_n\alpha_n$

$B\cdot k = k_1\beta_1 + \dots + k_n\beta_n$

$\therefore$ $\{\alpha_i\}$ 与 $\{\beta_i\}$ 有相同线性关系 #

例 3. 设 A 为 $n\times n$ 方阵 满足

- $A^k \cdot x = 0$ 有解 $x = \alpha$
- $A^{k-1}\cdot \alpha \neq 0$

尝试构造题中的 A

求证：$\{\alpha, A\alpha, \dots, A^{k-1}\alpha\}$ 线性无关

Pf. 考虑方程 $k_0\alpha + k_1(A\alpha) + \dots + k_{k-1}(A^{k-1}\alpha) = 0$

同时乘 A^{k-1} 得 $k_0(A^{k-1}\alpha) + k_1(A^k\alpha) + \dots + k_{k-1}(A^{2k-2}\alpha) = 0$

$$= k_0(A^{k-1}\alpha) + k_1(A^k\alpha) + k_2(A\cdot A^k\alpha) + \dots + k_{k-1}(A^{k-2}\cdot A^k\alpha)$$

$$\overset{A^k\alpha=0}{=\!=} k_0(A^{k-1}\alpha)$$

由 $A^{k-1}\alpha \neq 0$ 得 $k_0 = 0$

类似地，乘 A^{k-2} 得 $k_1 = 0$

$\vdots$ $\vdots$

A 得 $k_{k-1} = 0$

$\therefore$ $k_0\alpha + k_1(A\alpha) + \dots + k_{k-1}(A^{k-1}\alpha) = 0$ 只有零解

$\therefore$ $\{\alpha, A\alpha, \dots, A^{k-1}\alpha\}$ 线性无关 #

附 4. 设 A 为 $m\times n$，B 为 $n\times m$ $(m<n)$

(What if $n\le m$)

求证：$A\cdot B=E \Rightarrow B$ 的列向量组线性无关

Pf 1: 记 B 的列向量组为 $\{\beta_1,\dots,\beta_m\}$

反证，假设 $\{\beta_i\}$ 线性相关

i.e. $\exists$ 不全为零 k_i s.t. $k_1\beta_1+\dots+k_m\beta_m=0$

$$\therefore A\cdot B\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_m\end{pmatrix}=A\cdot(\beta_1,\dots,\beta_m)\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_m\end{pmatrix}=A\cdot\vec{0}=\vec{0}$$

与"$A\cdot B=E$"矛盾

$\hookrightarrow$ ($\because A\cdot B\cdot\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_m\end{pmatrix}=E\cdot\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_m\end{pmatrix}\neq 0$) #

回顾 Ch4 Thm 5.4

Pf 2: $\because \operatorname{rank}(AB)=\operatorname{rank}(E)=m$

又 $\operatorname{rank}(AB)\le\operatorname{rank}(B)\le m$

$\therefore$ 上述不等式中"$\le$"取"$=$"

$\Rightarrow \operatorname{rank}(B)=m$

$\therefore$ B 的列秩 $=\operatorname{rank}(B)=m$

i.e. $\{\beta_i\}$ 极大线性无关组的向量个数为 m

$\therefore$ $\{\beta_i\}$ 线性无关 #

11、 设向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

(1) 求证：α_1, α_2 线性无关

Pf: 略

(2) 求向量组中包含 α_1, α_2 的极大线性无关组.

解：1. 考察 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 能否构成线性无关组.

i.e. 考察 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$ 是否有非零解.

可得 $3\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0$

$\therefore$ α_3 可被 α_1, α_2 线性表出

2. 考察 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ ....

$$\text{rank}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right) = 3 = n$$

$\therefore$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性无关.

3. 考察 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5$ ...

$$\text{rank}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}\right) = 3 < 4 = n$$

$\therefore$ α_5 可被 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性表示，（同样，α_4 可被 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$ 线性表示，）

4. 考察 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$ ...

$$\text{rank}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}\right) = 3 = n$$

$\therefore$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$ 线性无关

综上所述，$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}$ 与 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5\}$ 为包含 $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 的极大线性无关组 #

13. 求证：若向量组(I)可由向量组(II)线性表出，

则向量组(I)的秩不超过向量组(II)的秩

回顾 Thm 5.2

Pf. 分别取向量组(I)和向量组(II)的某个极大线性无关组

$\{\alpha_1,\dots,\alpha_m\}$ 和 $\{\beta_1,\dots,\beta_n\}$

即证 $n \le m$

反证，假设 $n > m$.

(I) 可由 (II) 线性

$\Leftrightarrow$ $\{\alpha_1,\dots,\alpha_m\}$ 可由 $\{\beta_1,\dots,\beta_n\}$ 线性表出

$\Leftrightarrow$ $\exists\, a_{ij}$ s.t. $\alpha_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\beta_i \quad j=1,\dots,m$

$\Leftrightarrow$ $\exists$ $n\times m$ 矩阵 $A_{n\times m}$ s.t. $(\alpha_1,\dots,\alpha_m) = (\beta_1,\dots,\beta_n)\cdot A_{n\times m}$

齐次方程 $(\alpha_1,\dots,\alpha_m)\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} = 0$

$\|$

$(\beta_1,\dots,\beta_n)\, A_{n\times m}\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} = 0$

由 $m>n$ 得，$A_{n\times m}\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} = 0$ 有非零解

$\therefore$ $\{\alpha_1,\dots,\alpha_m\}$ 线性相关

与"$\{\alpha_1,\dots,\alpha_m\}$为线性无关组"矛盾 #

14 设 A, B 均为 $m\times n$ 矩阵

求证 $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$

Pf. 以列向量表示矩阵

$$A=(\alpha_1,\dots,\alpha_n),\quad B=(\beta_1,\dots,\beta_n)$$

记 $r_A = \mathrm{rank}(A)$，$r_B = \mathrm{rank}(B)$

由"列秩 = 秩"得不妨取极大线性无关组

$$\{\alpha_1',\dots,\alpha_{r_A}'\} \text{ 和 } \{\beta_1',\dots,\beta_{r_B}'\}$$

我们可证

Claim: $A+B$ 的列向量 $\{\alpha_1+\beta_1,\dots,\alpha_n+\beta_n\}$

可由 $\{\alpha_i'+\beta_j' \mid i=1,\dots,r_A,\ j=1,\dots,r_B\}$ 线性表示，

（仅证 $\alpha_1+\beta_1$ 可由 ...

只需证 $\exists\, k_{ij}$ s.t. $\alpha_1+\beta_1 = \sum\limits_{i=1..r_A,\, j=1..r_B} k_{ij}(\alpha_i'+\beta_j')$

$$= \sum_i \Big(\sum_j k_{ij}\Big)\alpha_i' + \sum_j \Big(\sum_i k_{ij}\Big)\beta_j'$$

可证 $\exists\, k_{ij}$ s.t. $\begin{cases} \sum\limits_i \Big(\sum\limits_j k_{ij}\Big)\cdot\alpha_i' = \alpha_1 \\ \sum\limits_j \Big(\sum\limits_i k_{ij}\Big)\beta_j' = \beta_1 \end{cases}$

由 $\{\alpha_i'\}$, $\{\beta_j'\}$ 极大 ... 得

$\exists\, a_i, b_j$ s.t. $\begin{cases} \sum a_i\alpha_i' = \alpha_1 \\ \sum b_j\beta_j' = \beta_1 \end{cases}$

考察方程 $\begin{cases} \sum\limits_j k_{ij} = a_i \\ \sum\limits_i k_{ij} = b_j \end{cases}$
$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1\,1\cdots1 & & & \\ & 1\,1\cdots1 & \cdots & \\ & & & 1\,1\cdots1 \\ \hline \begin{smallmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{smallmatrix} & \cdots & \begin{smallmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{smallmatrix} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} k_{11}\\ \vdots \\ k_{1r_B} \\ \hline k_{21} \\ \vdots \\ k_{2r_B} \\ \hline \vdots \\ \hline k_{r_A1} \\ \vdots \\ k_{r_Ar_B}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{r_A} \\ \hline b_1 \\ \vdots \\ b_{r_B}\end{pmatrix}$$

可见未知量 k_{ij} 个数 $= r_A\times r_B$

$\geq r_A + r_B =$ 方程数

这里排除，（$\because$ 更易证 略）
- $r_A=1$ & $r_B=1$
- $r_A=1$ & $r_B=2$
- $r_A=2$ & $r_B=1$

$\therefore$ 存在不全为零 k_{ij} ...

$\therefore$ Claim 得证 ✓ ）

由 Claim 得 $r(A+B) \leq \mathrm{rank}(\{\alpha_i'+\beta_j'\})$

$\leq \mathrm{rank}(\{\alpha_1',\dots,\alpha_{r_A}',\beta_1',\dots,\beta_{r_B}'\})$

（$\because \{\alpha_i'+\beta_j'\}_{i,j}$ 可由 $\{\alpha_i',\beta_j'\}_{i,j}$ 线性表出）

$\leq r_A + r_B$ （秩不大于个数） #

17 设 A 为 $n\times n$ 矩阵 & $A^2=A$

求证：$r(A)+r(A-E)=n$

Rmk: $A(A-E)=0$

$\not\Rightarrow A=0$ or $A-E=0$

e.g. $\begin{pmatrix}1&\\&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&\\&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\\&0\end{pmatrix}$

Idea: 考虑齐次线性映射 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$

记 $\operatorname{Ker}f=\{X\in\mathbb{R}^n \mid f(X)=0\}$ (Ker for kernel)

$\operatorname{Im}f=\{f(X)\mid X\in\mathbb{R}^n\}$ (Im for image)

可得 $\begin{cases}\operatorname{rank}(f)=\dim\operatorname{Im}f.\\ \dim\operatorname{Ker}f+\dim\operatorname{Im}f=\dim\mathbb{R}^n=n.\end{cases}$

代入 $f=A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$

则只要证 $\dim\operatorname{Im}(A-E)=r(A-E)=\dim\operatorname{Ker}A$ 即可

Pf. 记 $r=r(A)$，$r'=r(A-E)$

由列秩=秩，可取 A 和 $A-E$ 中的极大线性无关组

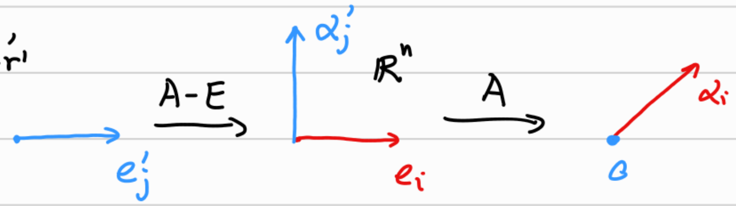
不妨记为 $\alpha_1,\dots,\alpha_r$

和 $\alpha_1',\dots,\alpha_{r'}'$

技巧：通过 $Ae_i=\alpha_i$

将 A 列向量的极大线性无关组

转化 $\operatorname{Im}A$ 的一个极大…



图示：$\underbrace{\dim\{e_1,\dots,e_r\}}_{=r}+\underbrace{\dim\{\alpha_1',\dots,\alpha_{r'}'\}}_{=r'}\ \underbrace{=}_{\text{要证}}\ \underbrace{\dim\mathbb{R}^n}_{=n}$

要证 $r+r'=n$

只需证 $\{e_1,\dots,e_r,\alpha_1',\dots,\alpha_{r'}'\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的极大线性无关组.

① 线性无关

反证 $\exists\ k_i,k_j'$（不全为零）s.t. $\sum k_ie_i+\sum k_j'\alpha_j'=0$

由 $A(\sum k_ie_i+\sum k_j'\alpha_j')$

$=\sum k_iAe_i+\sum k_j'A\alpha_j'$

$=\sum k_iAe_i+\sum k_j'\underbrace{A(A-E)}_{=0\ (\because A^2=A)}e_j'$

$=\sum k_i\alpha_i$

得与 $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ 线性无关矛盾 ✓

② 极大

由 $\forall \beta \in \mathbb{R}^n$ 可表为 $\beta = \sum_{i=1}^{r} k_i e_i + \sum_{j=1}^{n-r} k_j \eta_j$ ← $AX=0$ 的基础解系.

仅证 $\{\eta_1, \dots, \eta_{n-r}\}$ 与 $\{\alpha_1', \dots, \alpha_{r'}'\}$ 互相线性表出.

(2.1) α_j' 可由 $\{\eta \dots\}$ 线性表示:

由 $A\alpha_j' = A(A-E)e_j' = (A^2-A)e_j' = 0$

得 α_j' 为 $AX=0$ 的解

$\checkmark\ 0 = A\eta = ? + E\eta$ ← Im

(2.2) η $\in\{\eta_1,\dots,\eta_{n-r}\}$ 可由 $\{\alpha' \dots\}$ 线性表示

$(A-E)\eta = ?$

记 $\eta = k_1 e_1' + \dots + k_{r'} e_{r'}' + k_{r'+1} e_{r'+1}' + \dots + k_n e_n'$, 其中 $\begin{cases} Ae_j' = \alpha_j', & j=1,\dots,r' \\ Ae_i' = 0, & i=r'+1,\dots,n \end{cases}$

由 $(A-E)(-\eta) = -A\eta + E\eta = \eta$ 得

$$\eta = (A-E)\left(-\sum_{j=1}^{r'} k_j e_j' - \sum_{i=r'+1}^{n} k_i e_i'\right) = -\sum_j k_j (A-E) e_j'$$

$$= -\sum k_j \alpha_j' \quad \dots \quad \checkmark$$

综上所述 $\{e_1, \dots, e_r, \alpha_1', \dots, \alpha_{r'}'\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一个极大线性无关组

$\Rightarrow r + r' = n$

i.e. $r(A) + r(A-E) = n$ #

预备命题

Prop 1: 记 $\mathrm{Ker} A = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = 0\}$

则 $\dim \mathrm{Ker}(AB) \le \dim \mathrm{Ker} A + \dim \mathrm{Ker} B$

Pf: 记 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 为 $\mathrm{Ker} A$ 的一组极大线性无关组

$\beta_1, \dots, \beta_t$ $\mathrm{Ker} B$ . . . . .

$\because \mathrm{Ker}(A \cdot B) = \{a_1\alpha_1 + \dots + a_s\alpha_s + b_1\beta_1 + \dots + b_t\beta_t \mid a_i, b_j \in \mathbb{R}\}$

$\therefore \dim \mathrm{Ker}(A \cdot B) \le s + t$

$= \dim \mathrm{Ker} A + \dim \mathrm{Ker} B$ #

Prop 2: 记 $\mathrm{Im} A = \{AX \mid X \in \mathbb{R}^n\}$

则 $\dim \mathrm{Im}(A+B) \le \dim \mathrm{Im} A + \dim \mathrm{Im} B$

Pf: 记 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 为 $\mathrm{Im} A$ 的极大线性无关组

$\beta_1, \dots, \beta_t$. $\mathrm{Im} B$ . . .

$\because \mathrm{Im}(A+B) \subseteq \{a_1\alpha_1 + \dots + a_s\alpha_s + b_1\beta_1 + \dots + b_t\beta_t \mid a_i, b_j \in \mathbb{R}\}$

$\therefore \dim \mathrm{Im}(A+B) \le s + t$

$= \dim \mathrm{Im} A + \dim \mathrm{Im} B$ #

17的其他证法

Pf 2: 由 Prop 1 得:

$$\underset{\displaystyle n-r(A(A-E))}{\underset{\shortparallel}{\dim \operatorname{Ker} A(A-E)}} \le \underset{\displaystyle n-r(A)}{\underset{\shortparallel}{\dim \operatorname{Ker} A}} + \underset{\displaystyle n-r(A-E)}{\underset{\shortparallel}{\dim \operatorname{Ker}(A-E)}}$$

$$= n - r(0) = n$$

$$\Rightarrow \quad n \le (n - r(A)) + (n - r(A-E))$$

$$\Rightarrow \quad r(A) + r(A-E) \le n$$

由 Prop 2 得

$$\dim \operatorname{Im}((E-A)+A) \le \underset{\displaystyle r(E-A)=r(A-E)}{\underset{\shortparallel}{\dim \operatorname{Im}(E-A)}} + \underset{\displaystyle r(A)}{\underset{\shortparallel}{\dim \operatorname{Im} A}}$$

$$= \dim \operatorname{Im} E = n$$

$$\Rightarrow \quad n \le r(A-E) + r(A)$$

综上所述, $r(A-E) + r(A) = n$ #

Pf 3. 考虑分块矩阵 $\begin{pmatrix} A & E \\ & A-E \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r_2-(A-E)r_1} \begin{pmatrix} A & E \\ -(A-E)A & A-E-(A-E) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\because A(A-E)=0)$$

$$\therefore r(A) + r(A-E) = r\left(\begin{pmatrix} A & E \\ & A-E \end{pmatrix}\right)$$

$$= r\left(\begin{pmatrix} A & E \\ & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= r(E) = n$$ #

18. 取 $\eta_1, \dots, \eta_{n-r}$ 为 $Ax=0$ 的一个基础解系

求证：对任意 $\{\gamma_1, \dots, \gamma_{n-r}\} \sim \{\eta_1, \dots, \eta_{n-r}\}$

有 $\{\gamma_1, \dots, \gamma_{n-r}\}$ 也是 $Ax=0$ 的基础解系

Pf. 通过基础解系的定义，仅须验证

① $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-r}$ 线性无关

反证 假设 $\{\gamma_i\}$ 线性相关

由 $\{\eta_j\}$ 可由 $\{\gamma_i\}$ 线性表示得

$\exists a_{ij}$ s.t. $\eta_j = \sum a_{ij}\gamma_i$

则齐次方程 $(\eta_1, \dots, \eta_{n-r})\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_{n-r} \end{pmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow (\gamma_1, \dots, \gamma_{n-r})\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_{n-r} \end{pmatrix} = 0$$

由假设 $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-r}$ 线性相关得

$\exists$ 不全为零 $l_1, \dots, l_{n-r}$ s.t. $(\gamma_1 \dots \gamma_{n-r})\begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_{n-r} \end{pmatrix} = 0$

$\because \{\gamma_i\} \sim \{\eta_j\}$

$\therefore$ 过渡矩阵 A 可逆

$$\therefore \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_{n-r} \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_{n-r} \end{pmatrix} \neq 0$$

$\therefore \gamma_1, \dots, \gamma_{n-r}$ 线性无关 ✓.

② $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-r}$ 极大

由 $\{\eta_j\}$ 为 $Ax=0$ 的基础解系得

$\forall$ 解 η $\exists k_j$ s.t. $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{n-r})\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_{n-r} \end{pmatrix}$

$$\therefore \eta = (\gamma_1, \dots, \gamma_{n-r}) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_{n-r} \end{pmatrix}$$

$$= (\gamma_1, \dots, \gamma_{n-r})\begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_{n-r} \end{pmatrix} \quad \text{where} \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

#

19 求通解

1)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -3 \\ 5 & 10 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

解 $A \xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ & & -4 & \\ & & -4 & \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{4}r_2]{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ & & 1 & \end{pmatrix}$

可取 x_2, x_4 为自由未知量

不妨取 (x_2, x_4) 上一组基 $(1,0), (0,1)$

得 (x_1, x_3) 上的对应 $(-2,0), (1,0)$

$\Rightarrow$ 基础通解 $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore$ 通解 $\eta = k_1\eta_1 + k_2\eta_2$ where $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ #

22 对线性方程 $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & p & 7 & -1 \\ 1 & -1 & -6 & -1 & t \end{array}\right)$

讨论参数 p, t 取何值时，方程有解/无解.
有解时，求通解.

解：对增广矩阵阶梯化

$$A \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ & -1 & -2 & -2 & -1 \\ & -1 & p+6 & -2 & -1 \\ & -2 & -4 & -4 & t \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ & 1 & 2 & 2 & 1 \\ & & p+8 & 0 & 0 \\ & & & 0 & t+2 \end{array}\right)$$

- $t \neq -2$ 时无解
- $t = 2$ 时有解.
  - $p = -8$ 时 $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$

    取 x_3, x_4 为自由未知量，取 (x_3, x_4) 一组基 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

    得基础解系 $\eta_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\eta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

    取 $(x_3, x_4) = (0, 0)$ 得特解 $\gamma_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

    得通解 $\eta = \gamma_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2$
  - $p \neq -8$ 时，$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ & 1 & 2 & 2 & 1 \\ & & p+8 & & 0 \end{array}\right)$

    取 x_4 为自由未知量，取 x_4 一组基 1

    得基础解系 $\eta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

    取 x_4 为 0 得特解 $\gamma_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

    得通解 $\eta = \gamma_0 + k_1\eta_1$ …

#

23. 记 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 为 $AX=0$ 的一个基础解系

取 $\beta_1 = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2$

$\beta_2 = t_1\alpha_2 + t_2\alpha_3$

$\vdots$

$\beta_s = t_1\alpha_s + t_2\alpha_1$

求：t_1, t_2 满足什么条件时，$\beta_1, \ldots, \beta_s$ 也是 $AX=0$ 的一组基础解系.

解：记
$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{s-1} \\ \beta_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & & & \\ & t_1 & t_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & t_1 & t_2 \\ t_2 & & & & t_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{s-1} \\ \alpha_s \end{pmatrix}$$

简为 $\beta = T \cdot \alpha$

Claim 1：T 可逆 $\Rightarrow$ β 为 $AX=0$ 的基础解系

（根据基础解系定义，验证 β 满足

① β 线性无关：

反证，假设 β 线性相关，则 $\exists$ 不全为零 k_i

s.t. $\beta^T k = 0$ where $k = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_s \end{pmatrix}$

$\therefore (T\alpha)^T k = \alpha^T (T^T k) = 0$

由 T 可逆得 $T^T k$ 不全为零，与 α 线性无关矛盾.

② 极大（$AX=0$ 的任一解可由 β 线性表示）

$\because \alpha$ 为基础解系

$\therefore \forall X$ 满足 $AX=0$

$\exists\ k = (k_1, \ldots, k_s)$ s.t. $X = k \cdot \alpha$.

由 T 可逆得：$X = (k \cdot T^{-1}) \cdot \beta$. ✓ ）.

Claim 2：T 可逆 $\Leftarrow$ β 是 . . . —

（$\because \alpha, \beta$ 均为 $\{X \mid AX=0\}$ 的一组线性无关组

$\therefore T$ 为过渡矩阵 $\Rightarrow$ 可逆）.

由 Claim 1 & 3，仅须考察 T 的可逆性：

$$|T_s| = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & & & \\ & t_1 & t_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & t_1 & t_2 \\ t_2 & & & & t_1 \end{vmatrix}$$

综上所述，

$t_1^s = (-1)^{s-2} \cdot t_2^s$ 是 $\{\beta_i\}$ 为 . . . . 的充要条件 #

$$\overset{\text{按 1st}}{\underset{\text{行展开}}{=}}\ t_1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} t_1 & t_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & t_2 \\ & & & t_1 \end{vmatrix}}_{= t_1^{s-1}} - t_2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} t_2 & & & \\ t_1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & t_2 \\ t_2 & & & t_1 \end{vmatrix}}_{= (-1)^{s-2} \begin{vmatrix} t_2 & & \\ t_1 & t_2 & \\ & \ddots & \ddots \\ & t_1 & t_2 \end{vmatrix} = (-1)^{s-2} \cdot t_2^{s-1}} = t_1^s - (-1)^{s-2} \cdot t_2^s$$

24 求证：对 $n\times n$ 矩阵 A，

$AX=b$ 对任意 b 有解

$\Leftrightarrow |A|\neq 0$

Pf. $\Leftarrow$ $|A|\neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ 存在

$\therefore$ 有解 $X=A^{-1}b$

$\Rightarrow$ 反证 假设 $|A|=0$

取 A 的列向量极大线性无关组 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_r\}$

由 A 的秩 $r<n$ 得

$\exists\ b\in\mathbb{R}^n$ 与 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_r\}$ 线性无关

如果 X_0 是 $AX=b$ 的解.

记 $X_0=k_1e_1+\dots+k_re_r+k_{r+1}e_{r+1}+\dots+k_ne_n$

$b=AX_0=A(\sum k_ie_i)=\sum k_iAe_i=\sum k_i\alpha_i$ 可由 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_r\}$ 线性表示.

$\therefore$ 与 " b 与 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_r\}$ 线性无关 " 矛盾 #

27 方程 $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & & & & a_1 \\ & 1 & -1 & & & a_2 \\ & & 1 & -1 & & a_3 \\ & & & 1 & -1 & a_4 \\ -1 & & & & 1 & a_5 \end{array}\right)$

1) 求证：方程有解 $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{5} a_i = 0$

Pf. 阶梯化 $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & & & & a_1 \\ & 1 & -1 & & & a_2 \\ & & 1 & -1 & & a_3 \\ & & & 1 & -1 & a_4 \\ & & & & 0 & \sum_i a_i \end{array}\right)$

$\therefore$ 有解 $\Leftrightarrow \sum_i a_i = 0$

2) 求：有解情况下的一般解.

解：取 x_5 为自由未知量，取其 1 得基础解 $\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

取 $x_5 = 0$ 得特解 $\gamma_0 = \begin{pmatrix} a_1+a_2+a_3+a_4 \\ a_2+a_3+a_4 \\ a_3+a_4 \\ a_4 \\ 0 \end{pmatrix}$

得通解 $\eta = \gamma_0 + k_1\eta_1$ #

28 设 $\eta_1, \dots, \eta_t$ 是 $AX=b$ 的解

求证：$k_1\eta_1 + \dots + k_t\eta_t$ 也是 $AX=b$ 的解

$\Leftrightarrow k_1 + \dots + k_t = 1$

Pf. $A(k_1\eta_1 + \dots + k_t\eta_t)$

$= k_1 A\eta_1 + \dots + k_t A\eta_t = k_1 b + \dots + k_t b$

$\therefore A(k_1\eta_1 + \dots + k_t\eta_t) = b$

$\Leftrightarrow k_1 + \dots + k_t = 1$ #