向量的坐标 1

定义 (基本向量)

记 $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ 分别为 x 轴, y 轴, z 轴的 基本向量.

定义 (向量的分解式)

对于向量 $\mathbf{p} = \overrightarrow{OP}$, 记

- $p_x = \Pi_{\mathbf{i}}\mathbf{p}$
- $p_y = \Pi_{\mathbf{j}}\mathbf{p}$
- $p_z = \Pi_{\mathbf{k}}\mathbf{p}$

则

$$\mathbf{p} = p_x\mathbf{i} + p_y\mathbf{j} + p_z\mathbf{k}$$

称为 $\mathbf{p}$ 的 分解式.

向量的坐标 2

定义 (向量的分解式)

对于

$$\mathbf{p} = p_x\mathbf{i} + p_y\mathbf{j} + p_z\mathbf{k}$$

我们称

$$\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$$

为向量 $\mathbf{p}$ 的 坐标表示 或 代数表示.

取点 P 满足 $\overrightarrow{OP} = \mathbf{p}$, 称 p_x, p_y, p_z 为 $\mathbf{p}$ 的横, 纵, 竖坐标, 可用 $P(p_x, p_y, p_z)$ 来表示 P.

向量的坐标 3

对于 $P(p_x, p_y, p_z)$ 和 $Q(q_x, q_y, q_z)$, 我们有

- $\overrightarrow{OP} = p_x\mathbf{i} + p_y\mathbf{j} + p_z\mathbf{k}$
- $\overrightarrow{OQ} = q_x\mathbf{i} + q_y\mathbf{j} + q_z\mathbf{k}$

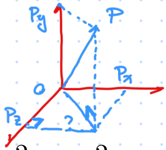
可得 $\overrightarrow{PQ}$ 的分解式

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ &= (q_x - p_x)\mathbf{i} + (q_y - p_y)\mathbf{j} + (q_z - p_z)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

可见, 任意一个向量的坐标是终点与起点的对应坐标的差.

向量长度

勾股定理得



$|OP|^2 = P_y^2 + ?^2$

$= P_y^2 + (P_x^2 + P_z^2)$

$$|\mathbf{p}|^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2.$$

两点 P 和 Q 之间的距离 $d(P, Q)$ 满足

$$\begin{aligned} d(P, Q) =& |\overrightarrow{PQ}| \\ =& ((q_x - p_x)^2 + (q_y - p_y)^2 + (q_z - p_z)^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

方向角 1

p 的单位向量

$\Pi_{\vec i}\vec p = |\vec p|\cdot\cos\langle\vec p,\vec i\rangle$
$= |\vec p|\cdot\cos\alpha$
$\Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\Pi_{\vec i}\vec p}{|\vec p|}$

$$\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} = \boxed{\frac{\Pi_{\vec i}\vec p}{|\vec p|}}\vec i + \frac{\Pi_{\vec j}\vec p}{|\vec p|}\cdot\vec j + \frac{\Pi_{\vec k}\vec p}{|\vec p|}\cdot\vec k$$

$$\mathbf{e_p} = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}.$$

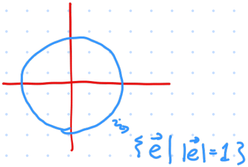
称 α, β, γ 为 **p** 的 方向角. 对应的余弦为 **p** 的 方向余弦:

- $\cos\alpha = \dfrac{p_x}{(p_x^2+p_y^2+p_z^2)^{\frac{1}{2}}}$
- $\cos\beta = \dfrac{p_y}{(p_x^2+p_y^2+p_z^2)^{\frac{1}{2}}}$
- $\cos\gamma = \dfrac{p_z}{(p_x^2+p_y^2+p_z^2)^{\frac{1}{2}}}$

方向角 2

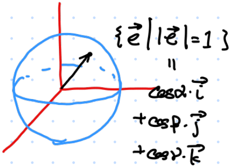
$\mathbb{R}^3$ 中所有向量的单位向量

$$\{\mathbf{e_p} : \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3\}$$



对应与 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球面

$$\{\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{e}| = 1\}.$$



可从以下等式得到

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

例题 1.1

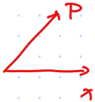
例题 1.1

对于 $P(1,2,0)$ 和 $Q(2,1,\sqrt{2})$，求

- 距离 $d(P,Q)$ $=\sqrt{(2-1)^2+(1-2)^2+(\sqrt{2}-0)^2}=\sqrt{4}=2$
- 向量 $\overrightarrow{PQ}$ 及其
  - 长度
  - 方向余弦
  - 方向角

$\overrightarrow{PQ}=(2-1,1-2,\sqrt{2}-0)=(1,-1,\sqrt{2})$

$|\overrightarrow{PQ}|=d(P,Q)=2$



方向余弦:

- $\cos\alpha=\dfrac{P_x}{|\vec{P}|}=\dfrac{1}{2}$
- $\cos\beta=-\dfrac{1}{2}$
- $\cos\gamma=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

方向角

- $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$
- $\beta=\dfrac{2\pi}{3}$
- $\gamma=\dfrac{\pi}{4}$

Outline

3.0 引言

3.1 向量的线性运算

3.2 向量的内积, 外积与混合积

3.3 空间平面及其方程

3.4 空间直线及其方程

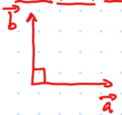
定义

$\cdot : V\times V \to \mathbb{R}$

定义 2.1 (内积)

向量 **a** 和 **b** 的 内积 (或 数量积) 定义为数量

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} := |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle.$$



$\vec a\cdot\vec b = |\vec a||\vec b|$

$\vec a\cdot\vec b = -|\vec a|\cdot|\vec b|$

易得

- $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{b}|\cdot\Pi_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$
- $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}$
- $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}\perp\mathbf{b}$ 这时, 我们称 **a** 与 **b** 正交.

性质

Hilbert space

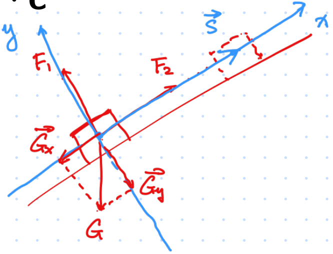
$$\left((V, F; +, \cdot), (\cdot, \cdot) \right)$$

性质 2.1

- $\overbrace{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}^{=|a|^2} > 0$ if $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ ✓
- $\overbrace{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}^{=|a|\cdot|b|\cdot\cos\langle a,b\rangle} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ ✓
- $(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
- $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$

$$(\lambda a, b) = |\lambda a| \cdot |b| \cdot \cos\langle \lambda a, b\rangle$$
$$= |\lambda| \cdot |a| \cdot |b| \cdot \cos\langle \lambda a, b\rangle$$
$$= \begin{cases} \lambda\, |a| \cdot |b| \cdot \cos\langle a, b\rangle & \text{if } \lambda \geq 0 \\ \lambda\, |a| \cdot |b| \cos\langle a, b\rangle & \text{if } \lambda < 0 \end{cases}$$
$$= \lambda \cdot (a, b)$$

物理意义 $\overset{做功}{W} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$



$$W_1 = \vec{F_1} \cdot \vec{s} = |\vec{F_1}| \cdot |\vec{s}| \cdot \underbrace{\cos\langle \vec{F_1}, \vec{s}\rangle}_{=0} = 0$$

$$W_2 = \vec{F_2} \cdot \vec{s} = |\vec{F_2}| \cdot |\vec{s}| \cdot \underbrace{\cos\langle \vec{F_2}, \vec{s}\rangle}_{=1} = |\vec{F_2}| \cdot |\vec{s}|.$$

$$W_G = \vec{G} \cdot \vec{s}$$
$$= (\vec{G_x} + \vec{G_y}) \cdot \vec{s}$$
$$= \vec{G_x} \cdot \vec{s} + \underbrace{\vec{G_y} \cdot \vec{s}}_{=0} = |\vec{G_x}| \cdot |\vec{s}| \cdot \underbrace{\cos\langle \vec{G_x}, \vec{s}\rangle}_{=-1} = -|\vec{G_x}| \cdot |\vec{s}|.$$

理解矩阵乘法

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = (v_1, \ldots, v_n)$$

$$C = A \cdot B = (C_{ij})_{i,j}$$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} = \underbrace{u_i \cdot v_j^T}_{\text{内积}}$$

$$= (a_{i1}, \ldots, a_{in}) \cdot (b_{1j}, \ldots, b_{nj})$$

$$u_{i1} \cdot \vec{e}_1 + u_{i2} \cdot \vec{e}_2 + \ldots + u_{in} \cdot \vec{e}_n$$

$$\vec{p} = (p_x, p_y, p_z) = p_x \cdot \vec{i} + p_y \cdot \vec{j} + p_z \cdot \vec{k},$$

$$\vec{q} = (q_x, q_y, q_z) = q_x \vec{i} + q_y \vec{j} + q_z \vec{k}$$

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = (p_x \vec{i} + p_y \vec{j} + p_z \vec{k}) \cdot (q_x \vec{i} + q_y \vec{j} + q_z \vec{k}) = p_x q_x + p_y q_y + p_z q_z$$

例题

例题 (Schwarz 不等式)

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 \le ||\mathbf{a}||^2 \cdot ||\mathbf{b}||^2.$$

$$\parallel$$

$$\left(|a|\cdot|b|\cdot \cos\langle a,b\rangle\right)^2$$

$$= |a|^2\cdot|b|^2\cdot\underbrace{(\cos\langle a,b\rangle)^2}_{\le 1}$$

例题

例题 (斜边大于直角边)

求证: 任给一对正交的向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, 则

$$||\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}|| \leq ||\mathbf{a}||, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

进一步地, 等号成立 $\Leftrightarrow \mathbf{b}=\mathbf{0}$.