2. 设 M 是 AB 中点
O 是任一点

求证：$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

Pf. 考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的情形（$\mathbb{R}^n$ 类似，略）.

记 $A = (x_A, y_A, z_A)$

$B = (x_B, y_B, z_B)$

$\Rightarrow M = \left(\frac{1}{2}(x_A + x_B), \frac{1}{2}(y_A + y_B), \frac{1}{2}(z_A + z_B)\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = (x_M, y_M, z_M) - (x_0, y_0, z_0)$

$= \frac{1}{2}\Big((x_A - x_0) + (x_B - x_0),$

$(y_A - x_0) + (y_B - x_0),$

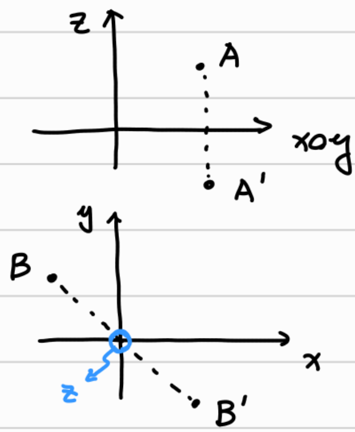
$(z_A - x_0) + (z_B - x_0)\Big)$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ #

3. 记 $A = (2, 4, -1)$，$B = (-2, 4, 1)$

求 A 关于 xOy 平面的对称点

B 关于 y 轴对称点



解：A 关于 xOy 平面的对称点 $A' = (2, 4, 1)$

B 关于 y 轴对称点 $B' = (2, 4, -1)$

#

4 记 $\vec{a} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + 4\vec{k}$

$b = -6\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$

$c = 4\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$

求 $2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c}$

解：略

✓ 5. 记 $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$

求 $\vec{a}$ 的长度和方向余弦.

解: $|\vec{a}| = (\vec{a}\cdot\vec{a})^{\frac{1}{2}}$

$= (1 + 2^2 + (-2)^2)^{\frac{1}{2}} = 3$

$\cos\langle\vec{a},\vec{i}\rangle = \Pi_{\vec{i}}\vec{a} / |\vec{a}| = \frac{1}{3}$

$\cos\langle\vec{a},\vec{j}\rangle = \Pi_{\vec{j}}\vec{a} / |\vec{a}| = \frac{2}{3}$

$\cos\langle\vec{a},\vec{k}\rangle = \Pi_{\vec{k}}\vec{a} / |\vec{a}| = -\frac{2}{3}$ #

✓ 8 记 $\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{k}$

$\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$

求 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ & $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$

解: $\vec{a}\cdot\vec{b} = (3\vec{i} - 6\vec{k})\cdot(2\vec{i} - 4\vec{j})$

$= (3\vec{i}, 2\vec{i}) + (3\vec{i}, -4\vec{j}) + (-6\vec{k}, 2\vec{i}) + (-6\vec{k}, -4\vec{j})$

$= 6$

$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-6)^2} = 3\sqrt{5}$

$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{5}$

$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \dfrac{6}{3\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}} = \dfrac{1}{5}$.

不要漏了 $\Rightarrow \langle\vec{a},\vec{b}\rangle = \arccos\frac{1}{5}$. #

10. 记 $\overrightarrow{AB} = \vec{a} - 2\vec{b}$

$\overrightarrow{AD} = \vec{a} - 3\vec{b}$

其中 $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角为 $\frac{\pi}{6}$

求 平行四边形 ABCD 的面积.

解: $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\cdot|\sin\langle\vec{a},\vec{b}\rangle|$

$= |5\times 3\times \sin\frac{\pi}{6}| = \frac{15}{2}$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD} = (\vec{a} - 2\vec{b})\times(\vec{a} - 3\vec{b})$

$= \vec{a}\times(-3\vec{b}) + (-2\vec{b})\times\vec{a} = -\vec{a}\times\vec{b}$

也可用内积求 $\Rightarrow$ ABCD 面积 $= |\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}| = |-\vec{a}\times\vec{b}| = \frac{15}{2}$. #

11 记 $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$

$\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$

$\vec{c} = 2\vec{i} + 2\vec{k}$

若 $\vec{x} \perp \vec{a}$, $\vec{x} \perp \vec{b}$, $\vec{x} \cdot \vec{c} = -10$

求 $\vec{x}$

解: $\vec{x} \perp \vec{a}$ & $\vec{x} \perp \vec{b}$

$\Rightarrow \vec{x} \parallel \vec{a} \times \vec{b}$

其中 $\vec{a} \times \vec{b} = (2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}) \times (\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k})$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$= 10\vec{i} - 5\vec{j} - 5\vec{k}$

$\Rightarrow$ 不妨记 $\vec{x} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$

$= 10\lambda \cdot \vec{i} - 5\lambda\vec{j} - 5\lambda\vec{k}$

由 $\vec{x} \cdot \vec{c} = -10$ 得

$(10\lambda\vec{i} - 5\lambda\vec{j} - 5\lambda\vec{k}) \cdot (2\vec{i} + 2\vec{k})$

$= 20\lambda - 10\lambda = 10\lambda = -10$

$\Rightarrow \lambda = -1$

$\Rightarrow \vec{x} = -10\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k}$ #

12 记 $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$

$\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$

$\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

求 $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

解: $$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 1 + 4 - 2 - (-1) = 4$ #

13 (1) 判断 $A(1,2,3)$, $B(0,3,7)$, $C(3,5,11)$ 是否共线

Idea: 注意到 A, B, C 共线
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$
$\Leftrightarrow |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 0$

(部分用 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, 其实也行, 不过得验算 $\left|\dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}\right| = 1$)

答 $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 4)$
$\overrightarrow{AC} = (2, 3, 8)$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix}$$
$$= -4\vec{i} + 16\vec{j} - 5\vec{k}$$

$\Rightarrow |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| \neq 0$

$\Rightarrow A, B, C$ 不共线 #

14 利用混合积, 求证 $A(1,0,1)$, $B(2,4,6)$, $C(3,-1,2)$, $D(6,2,8)$ 共面.

Pf. $\overrightarrow{AB} = (1, 4, 5)$
$\overrightarrow{AC} = (2, -1, 1)$
$\overrightarrow{AD} = (5, 2, 7)$

注意到 A, B, C, D 共面
$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$

计算 $$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$
$$= -7 + 20 + 20 - (-25) - 2 - 56$$
$$= 0$$

$\therefore A, B, C, D$ 共面 #

15 (1) 求 $3x-2y+5z-1=0$ 的法向量.

解: 法向量 $\vec{n}=(3,-2,5)$ #

16. 求平面满足

- 过 $M_0(2,9,-6)$
- 垂直于 OM_0

解: 取法向量 $\vec{n}=\overrightarrow{OM_0}=(2,9,-6)$.
平面上任一点 P 满足点法式方程.

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0P}=0.$$

$$\Rightarrow (2,9,-6)\cdot(x-2,y-9,z-(-6))=0$$

$$\Rightarrow 2(x-2)+9(y-9)-6(z+6)=0$$

$$\Rightarrow 2x+9y-6z-121=0$$ #

17. 求过 $(1,1,-1),(-2,-2,2),(1,-1,2)$ 的平面方程.

解: 代入三点式方程.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-(-1) \\ x-(-2) & y-(-2) & z-2 \\ x-1 & y-(-1) & z-2 \end{vmatrix}=0$$

$$\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_3}\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ 3 & 1 & \\ & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow x-3y-2z=0$$ #

附 1　设向量 $\vec{b} \in V$ 满足

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \qquad \forall\, \vec{a} \in V$$

求证　$\vec{b} = 0$

（Q: 若把条件 "$\forall\, \vec{a} \in V$" 换为 "$\forall$ 极大线性无关组 $\{\vec{a}\} \subseteq V$" ）

Pf. $|\vec{b}|^2 = \vec{b}\cdot\vec{b} = 0$

$\Rightarrow |\vec{b}| = 0 \Rightarrow \vec{b} = 0$　　#

附 2.　求证：平行四边形的两对角线的平方和等于四边的平方和

i.e. $|\vec{a}+\vec{b}|^2 + |\vec{a}-\vec{b}|^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2)$

Pf. $LHS = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) + (\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})$

$= \vec{a}\cdot\vec{a} + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{a} - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2$

$= 2\,\vec{a}\cdot\vec{a} + 2\vec{b}\cdot\vec{b}$

$= RHS$　　#

19. 求过点 $(1,0,-1)$

平行于 $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

$\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$

的平面方程

解：取平面法向量 $\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}$

$$=(2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})\times(\vec{i}-\vec{j})$$

$$=\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$$

由点法式方程得平面 $P(x,y,z)$ 满足

$$(1,1,-3)(x-1,y,z-(-1))=0$$

$$\Rightarrow x-1+y-3(z+1)=0$$

$$\Rightarrow x+y-3z-4=0$$ #

22. 记平面 $-2x+4y-6z+6$

$\pi_1: \quad x-2y+3z+D=0$

$\pi_2: \quad -2x+4y+C\cdot z+6=0$

求 C, D 的值

s.t. π_1 与 π_2 平行？重合？

解：π_1 与 π_2 的法向量分别为

$\vec{n_1}=(1,-2,3)$

$\vec{n_2}=(-2,4,C)$.

要使 $\pi_1 // \pi_2$，只需 $\vec{n_1}//\vec{n_2}$

i.e. $\frac{1}{-2}=\frac{-2}{4}=\frac{3}{C}$

$\Rightarrow C=-6$

即 $C=-6$ 时，π_1 与 π_2 平行

进一步，要使 π_1 与 π_2 重合，只需 π_2 上的一点满足 π_1 方程

验证 π_2 上的一点 $(3,0,0)$

代入 π_2 得 $3+D=0$ i.e. $D=-3$

即 $D=-3$ 时 π_1 与 π_2 重合 #

23 求平面 π

- 过 $P_0(1,1,1)$
- 垂直于 $\pi_1: x-y+z=7$
  $\pi_2: 3x+2y-12z+5=0$

解：记 π_1 和 π_2 分别为 $\vec{n_1}=(1,-1,1)$ 和 $\vec{n_2}=(3,2,-12)$

π 的法向量为 $\vec{n}$

由 $\pi \perp \pi_i$ 得 $\vec{n} \perp \vec{n_i}$

不妨取 $\vec{n}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -12 \end{vmatrix}$

$=10\cdot\vec{i}+15\vec{j}+5\vec{k}$

由点法式方程 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0$

i.e. $(10,15,5)\cdot(x-1,y-1,z-1)=0$

$\Rightarrow 2x+3y+z-6=0$ #

24. 求证：过不共线的三点 $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_3,z_3)$ 的平面方程为 $\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0$

Pf.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ & x_1-x & y_1-y & z_1-z \\ & x_2-x & y_2-y & z_2-z \\ & x_3-x & y_3-y & z_3-z \end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1-x & y_1-y & z_1-z \\ x_2-x & y_2-y & z_2-z \\ x_3-x & y_3-y & z_3-z \end{vmatrix}=0$$

$\Leftrightarrow P(x,y,z), P_1(x_1,y_1,z_1), P(x_2,y_2,z_2), P(x_3,y_3,z_3)$ 共面 #

25 求下列直线的对称式方程

(1) 平行 $\vec{a}=3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$，过点 $P(1,0,-2)$

解：点向式方程 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{2}$. #

(2) 过点 $A(1,0,-1)$ 和 $B(1,1,3)$

解：两点式方程 $\dfrac{x-1}{1-1}=\dfrac{y-0}{1-0}=\dfrac{z-(-1)}{3-(-1)}$

得对称式方程 $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{4}$. #

(3) 过 $A(2,3,-5)$，与 $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{4}$ 平行

解：点向式方程 $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z+5}{4}$ #

(4) 过点 $P_0(3,1,2)$，平行于 $\pi_1: x+y+z+3=0$

$\pi_2: y-z+1=0$

解：直线 l 平行于 π_1 与 π_2

其切向量 $\vec{v}$ 垂直于法向量 $\vec{n_1}$ 与 $\vec{n_2}$

取 $\vec{v}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}$

$=-2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

由点向式方程得 $\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$. #

26 判断直线与平面的位置关系，若有交点求出交点坐标。

(1) $l: \frac{x-5}{2} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-1}{3}$; $\pi: x+2y-5z-11=0$

解：切向量 $\vec{v}=(2,-2,3)$，法向量 $\vec{n}=(1,2,-5)$

得 $\vec{v}\cdot\vec{n} = 2\times1+(-2)\times2+3\times(-5) = -17 \neq 0$

$\therefore$ 直线 l 与平面 π 相交，其交点满足

$$\begin{cases} x+2y-5z-11=0 \\ \frac{x-5}{2} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x-15 = -3y-9 = 2z-2 \\ 3x+6y-15z-33=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x,y,z) = (3,-1,-2)$$

即 l 与 π 交点为 $(3,-1,-2)$ #

(2) $l: \frac{x-13}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{3}$; $\pi: x+2y-4z+1=0$

解：切向量 $\vec{v}=(8,2,3)$，法向量 $\vec{n}=(1,2,-4)$

得 $\vec{v}\cdot\vec{n} = 8\times1+2\times2+3\times(-4) = 0$

可见 l 与 π 平行

再考察 l 与 π 是否有公共点

l 过 $P_0(13,1,4)$ 满足 π

$13+2\times1-4\times4+1=0$

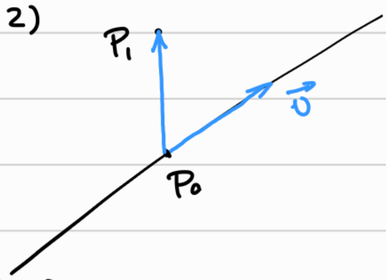
i.e. l 与 π 有公共点 P_0

$\therefore$ l 在 π 上 #

27. 求下列平面的方程

(1) 过直线 $l: \begin{cases} x = 2+3t \\ y = 2+t \\ z = 1+2t \end{cases}$ 和 $P_1(1,2,-1)$

解：l 过 $P_0(2,2,1)$，切向量 $\vec{v}=(3,1,2)$



π 过 l 和 P_0

$\Rightarrow$ 向量 $\overrightarrow{P_0P_1}$ 与 $\vec{v}$ 平行于 π

$\Rightarrow$ 可取法向量

$\vec{n} = \overrightarrow{P_0P_1} \times \vec{v}$

$= (-1,0,-2)\times(3,1,2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= 2\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}$

$= (2,-4,-1)$

平面的点法式方程：π 上的 P 满足

$\overrightarrow{P_1P} \cdot \vec{n} = 0$

$\Rightarrow \quad 2(x-1) - 4(y-2) - (z-(-1)) = 0$

i.e. $\quad 2x - 4y - z + 5 = 0$ #

(2) 过 $P_0(1,1,1)$

垂直于 $l_1 \begin{cases} 2x+y+z=3 \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$

解：平面垂直于 l_1

$\Rightarrow$ 可取法向量 $\vec{n}$ 为 l_1 的切向量 $\vec{v_1}$

现求 $\vec{v_1}$ 如下：

记 $\pi_1: \ 2x+y+z=3$

$\pi_2: \ 2x+3y-z=1$

它们的法向量 $\vec{n_1}=(2,1,1)$，$\vec{n_2}=(2,3,-1)$

则计算 $\vec{n_1}\times\vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-4,4,4)$

可取 $\vec{v_1} = (-1,1,1)$

由点法式方程 $\quad -(x-1)+(y-1)+(z-1)=0$

i.e. $\quad -x+y+z-1=0$ #

(3) 过直线 l_0 $\begin{cases} x+3y-z=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$

& 垂直于平面 π_1: $x+2z=1$.

解: 过 l 的平面形如

$$\lambda_1(x+3y-z)+\lambda_2(x-y+z+1)=0$$

i.e. $(\lambda_1+\lambda_2)x+(3\lambda_1-\lambda_2)y+(-\lambda_1+\lambda_2)z+\lambda_2=0$

其法向量 $\vec{n}=(\lambda_1+\lambda_2,\ 3\lambda_1-\lambda_2,\ -\lambda_1+\lambda_2)$

由于该平面垂直于平面 π_1

所以 $\vec{n}\perp\vec{n_1}$

$\Leftrightarrow (\lambda_1+\lambda_2, 3\lambda_1-\lambda_2, -\lambda_1+\lambda_2)\cdot(1,0,2)=0$

$\Leftrightarrow \lambda_1+\lambda_2-2\lambda_1+2\lambda_2=0$

$\Leftrightarrow \lambda_1=3\lambda_2$

不妨取 $\lambda_2=1 \Rightarrow \lambda_1=3$, 代入得

$(3+1)x+(3\times3-1)y+(-3+1)z+1=0$

i.e. $4x+8y-2z+1=0$ #

28 设 l_1: $\frac{x-7}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{-2}$ 和 l_2: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-3t \\ z=5+4t \end{cases}$

- 求证: l_1 与 l_2 共面
- 求 l_1 与 l_2 所在的平面.

Pf. l_1 与 l_2 的切向量 $\vec{v_1}$ 与 $\vec{v_2}$ 为

$\vec{v_1}=(3,2,-2)$, $\vec{v_2}=(2,-3,4)$

$\Rightarrow l_1$ 与 l_2 不平行

要证 l_1 与 l_2 共面, 只需证 l_1 与 l_2 相交.

假设 l_1 与 l_2 相交, 则交点满足

$$\frac{1+2t-7}{3}=\frac{-2-3t-2}{2}=\frac{5+4t-1}{-2}$$

可得 $t=0 \Rightarrow (1,-2,5)$ 为 l_1 与 l_2 交点

$\therefore l_1$ 与 l_2 共面 #

解: 可取法向量 $\vec{n}=\vec{v_1}\times\vec{v_2}=(3,2,-2)\times(2,-3,4)$

$=(2,-16,-13)$

已求得 l_1 与 l_2 交点 $(1,-2,5)$

点法式方程 $2(x-1)-16(y-(-2))-13(z-5)=0$

i.e. $2x-16y-13z+31=0$

关于 $\vec{n}$ 与 $\vec{v_1},\vec{v_2}$ 关系的解释:

平面 π 包含直线 l_1, l_2

$\Rightarrow$ 方向向量 $\vec{v_1},\vec{v_2}$ 为 π 上的方向

又 法向量 $\vec{n}$ 垂直于 π 上所有方向

$\therefore \vec{n}\perp\vec{v_1}$ & $\vec{n}\perp\vec{v_2}$

又 $\vec{v_1}\times\vec{v_2}\perp\vec{v_1}$ & $\vec{v_1}\times\vec{v_2}\perp\vec{v_2}$

$\therefore \vec{n}\ /\!/\ \vec{v_1}\times\vec{v_2}$

($\mathbb{R}^3$ 中:

$\vec{u_1},\vec{u_2}$ 均垂直于 $\vec{v_1}$ 和 $\vec{v_2}$

$\Rightarrow \vec{u_1}\ /\!/\ \vec{u_2}$

$\mathbb{R}^n\ (n>3)$ 中对吗?)

29. 求直线 $l:\begin{cases} x+y+3z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ 与 π: $x-y-z+1=0$ 的夹角.

解: 可取 l 的切向量 $\vec{v}=(1,1,3)\times(1,-1,-1)$
$=(2,4,-2)$

可取 π 的法向量 $\vec{n}=(1,-1,-1)$

计算 $\vec{v}\cdot\vec{n}=0$

$\Rightarrow \vec{v}\perp\vec{n}$

$\therefore$ l 与 π 平行 $\Rightarrow$ 夹角为 0. #

31. 求下列平面间的距离.

(1) π_1: $x-2y-2z=12$; π_2: $x-2y-2z=6$.

解: 取 π_i 上的一点 P_i, $i=1,2$:

$P_1(12,0,0)$, $P_2(6,0,0)$

取 π_1 与 π_2 的公共法向量 $\vec{n}=(1,-2,-2)$.

π_1 与 π_2 的距离为 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 在 $\vec{n}$ 上的投影的长度.

$$\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{|(6,0,0)\cdot(1,-2,-2)|}{|(1,-2,-2)|}=\frac{6}{3}=2$$ #

32. 求平面 π 满足

- $\pi \parallel \pi'$: $x+2y-2z=1$
- π 与 π' 距离为 2.

解: 平面 π' 过点 $P'(1,0,0)$.
法向量 $\vec{n'}=(1,2,-2)$.

则平面 π 上的点 P 到平面 π' 的距离为

$$\frac{|\overrightarrow{P'P}\cdot\vec{n'}|}{|\vec{n'}|}=\frac{|x-1+2y-2z|}{3}=2.$$

$\Leftrightarrow x+2y-2z-1=\pm 6$

$\therefore$ 满足条件的平面 π 有两个

$x+2y-2z=1\pm 6$ #