例题 4.1

例题 4.1

计算行列式

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & \frac{1}{2} & 0 & -3 \\ 1 & \frac{1}{6} & 2 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

n 阶排列 → n 阶行列式 ⇝ 定义 $\sum_{i_1,\dots,i_n} (-1)^{\tau(i_1\dots i_n)} a_{1i_1}\cdots a_{ni_n}$

逆序数

计算

初等变换

对换

特殊行列式

对角

三角

行列式的线性性质.

习题

zhongyl@scut.edu.cn

Q: 按 1st 行
1st 列 expan

$$\frac{\bigcirc + \bigcirc}{2} \ ?$$

提示：观察主对角线上下的异同.

b_4

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_1 b_1} & \cancel{a_1 b_2} & \cancel{a_1 b_3} & a_1 \cancel{b_4} \\ a_1 b_2 & \cancel{a_2 b_2} & \cancel{a_2 b_3} & a_2 \cancel{b_4} \\ a_1 b_3 & a_2 b_3 & \cancel{a_3 b_3} & a_3 \cancel{b_4} \\ a_1 b_4 & a_2 b_4 & a_3 b_4 & a_4 \cancel{b_4} \end{vmatrix}$$

$a_1b_2 - a_2b_1$

$a_2b_3 - a_3b_2$

$a_3b_4 - a_4b_3$

$col_3 - b_3 \times col_4$

$col_2 - b_2 \times col_4$

$col_1 - b_1 \times col_4$

$$\begin{pmatrix} \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \times \\ \times & \bigcirc & \bigcirc & \times \\ \times & \times & \bigcirc & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \times & & & \\ \times & \times & & \\ \times & \times & \times & \\ \times & \times & \times & \times \end{pmatrix}$$

爪形行列式的一般解法

$\mathrm{col}_1 - \frac{b_n}{c_n} \times \mathrm{col}_n$

$\mathrm{col}_1 - \frac{b_n}{c_{n-1}} \cdot \mathrm{col}_{n-1}$

$\vdots$

$\mathrm{col}_1 - \frac{b_2}{c_2} \cdot \mathrm{col}_2$

$$\boxed{a_1 - \frac{b_n}{c_n}\cdot a_n - \frac{b_{n-1}}{c_{n-1}} a_{n-1} - \frac{b_2}{c_2}\cdot a_2}$$

$$\begin{pmatrix} \cancel{a_1} & a_2 & \cdots & a_j & \cdots a_{n-1} & a_n \\ \cancel{b_2} & c_2 & & & & \\ \cancel{\vdots} & & \ddots & & & \\ \cancel{b_i} & & & c_i & & \\ \cancel{\vdots} & & & & \ddots & \\ \cancel{b_{n-1}} & & & & c_{n-1} & \\ \cancel{b_n} & & & & & c_n \end{pmatrix}$$

习题

- 10 (4)
- 11 (6)

例题 4.2

例题 4.2

计算下面矩阵的行列式

$\mathrm{col}_1 - \frac{2^{n-1}}{n}\cdot\mathrm{col}_n$

$\vdots$

$\mathrm{col}_1 - \frac{2^{i}}{i}\cdot\mathrm{col}_i$

$$1-\left(\frac{2^{n-1}}{n}+\cdots+\frac{2^i}{i}+\cdots\frac{2}{2}\right)$$

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\
\cancel{2} & 2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\cancel{\vdots} & & \ddots & & & \vdots \\
\cancel{2^i} & & & i & & 0 \\
\cancel{\vdots} & & & & \ddots & \vdots \\
\cancel{2^{n-1}} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & n
\end{pmatrix}$$

提示

通过初等变换化为下三角矩阵. (上三角呢?)

例题 4.3

计算下面矩阵的行列式

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ x & 1 & x & & x \\ x & x & 1 & & x \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ x & \text{otherwise} \end{cases}$$

提示

观察到, 除了主对角线, 其他元素都相同. 所以, 每行减去某一含有相同元素的行, 将问题化简. 至此, 只需构造这样含有相同元素的行.

例题 4.3 解

$$
\underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{(1+(n-1)\cdot x)}\;
\underbrace{\begin{vmatrix}
1 & \cancel{x}\,1 & \cancel{x}\,1 & \cdots & \cancel{x}\,1 \\
\cancel{x}\,0 & 1-x & \cancel{x}\,0 & \cdots & \cancel{x}\,0 \\
\cancel{x}\,0 & \cancel{x}\,0 & 1-x & \cdots & \cancel{x}\,0 \\
\vdots & & & \ddots & \vdots \\
\cancel{x}\,0 & \cancel{x}\,0 & \cancel{x}\,0 & \cdots & 1-x
\end{vmatrix}}_{(1-x)^{n-1}}
$$

习题

$$\begin{vmatrix} x-a & x & x & \dots & x \\ x & x-a & x & \dots & x \\ x & x & x-a & \dots & x \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \dots & x-a \end{vmatrix}$$

Outline

2x2

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}$$

$$a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1}$$

3x3

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

$$= a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,2} \begin{vmatrix} a_{2,3} & a_{2,1} \\ a_{3,3} & a_{3,1} \end{vmatrix} + a_{1,3} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$$

$$- a_{1,2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

行列式的余子式表示

- $A = [a_{i,j}]_{i,j}$: $n \times n$ 矩阵
- $A_{[i,j]}$: 通过 A 去掉第 i 行和第 j 列的元素得到的 $(n-1) \times (n-1)$ 矩阵
- $M_{i,j} := |A_{[i,j]}|$: $a_{i,j}$ 的余子式
- $A_{i,j} := (-1)^{i+j} M_{i,j}$: $a_{i,j}$ 的代数余子式 ((i,j)-cofactor)
- 规定 $n = 1$ 时, 取 $M_{i,j} = A_{i,j} = 1$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A_{[i,j]} = A \setminus \{a_{i,\cdot}, a_{\cdot,j}\}$$

$$M_{ij} = |A_{[i,j]}|$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

行列式按行列展开

定理 5.1

- 按第 i 行展开: $|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}A_{i,j}$
- 按第 i 列展开: $|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}A_{j,i}$

2×2 $\quad |A| = a_{11}\cdot \underbrace{A_{11}}_{a_{2,2}} + a_{12}\underbrace{A_{12}}_{(-a_{2,1})}$

$= a_{11}\cdot a_{2,2} - a_{1,2}\cdot a_{2,1}$

$$\left(\begin{array}{c|c} a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \end{array}\right)$$

3×3 按第2行展开

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$a_{21}\cdot A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$

$-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

行列式按行列展开的证明 (0)

想法

仅考虑按一行展开 (转置保持行列式不变).
考虑按第一行展开 (否则, 通过行交换转化为第一行).
利用行列式的线性性质, 转化为 “对角” 情形.

行列式按行列展开的证明 (1)

计算行列式

$$
\begin{vmatrix}
a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n}
\end{vmatrix}
\qquad
\begin{vmatrix}
\times & 0 \\
\times & \times
\end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&=(-1)^{\tau(i_1,\dots,i_n)} a_{1,i_1} \dots a_{n,i_n} \quad (\text{定义}) \\
&=a_{1,1}((-1)^{\tau(1,i_2,\dots,i_n)} a_{1,i_2} \dots a_{n,i_n}) \quad (a_{1,j} = 0 \text{ for } j \neq 1) \\
&=a_{1,1}((-1)^{\tau(i_2,\dots,i_n)} a_{1,i_2} \dots a_{n,i_n}) \quad (1 \text{ 在首尾不构成逆序}) \\
&=a_{1,1}|A_{[1,1]}| \quad (\text{定义}).
\end{aligned}
$$

行列式按行列展开的证明 (2)

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix}
0 & 0 & \dots & a_{1,j} & \dots & 0 \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n}
\end{vmatrix} \\
=&(-1)^{j-1}\begin{vmatrix}
a_{1,j} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
a_{2,j} & a_{1,2} & \dots & a_{2,j-1} & \dots & a_{2,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n,j} & a_{1,2} & \dots & a_{n,j-1} & \dots & a_{n,n}
\end{vmatrix} \\
=&(-1)^{j-1}a_{1,j}|A_{[1,j]}| \quad (\text{上述情形}).
\end{aligned}
$$

行列式按行列展开的证明 (3)

将 $a_{1,j}$ 看作 $0+\cdots+0+a_{1,j}+0+\cdots+0$. 由行列式的线性性质得

$f(x_1,x_2)=f(x_1+0,0+x_2)=f(x_1,0)+f(0,x_2)$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_1+0+\cdots & 0+x_2+0\cdots & \cdots & 0+\cdots+0+x_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & x_n \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,j} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ldots & a_{2,j} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,j} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{j=1,\ldots,n} \begin{vmatrix} 0 & \ldots & a_{1,j} & \ldots & 0 \\ a_{2,1} & \ldots & a_{2,j} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,j} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

行列式按行列展开的证明 (4)

$$\cdots = \sum_{j=1,\ldots,n} (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} a_{1,j} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{2,j} & a_{2,j} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,j} & a_{n,j} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j=1,\ldots,n} (-1)^{j-1} a_{1,j} |A_{[1,j]}|.$$

至此, 我们得到的行列式按第一行展开.

行列式按行列展开的证明 (5)

现考虑按第 i 行进行展开. 类似对第 j 列的处理, 得

$$
\begin{vmatrix}
a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{n,1} & \dots & a_{n,n}
\end{vmatrix}
=(-1)^{i-1}
\begin{vmatrix}
a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\
a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{n,1} & \dots & a_{n,n}
\end{vmatrix}
$$

$$
= \sum_{j=1,\dots,n} (-1)^{i+j\cancel{-2}} a_{i,j} |A_{[i,j]}|.
$$

行列式按行列展开的证明 (6)

最后, 证明按第 i 列展开. 由转置保持行列式可得

$$\begin{aligned}|A| &= |A^T| \\ &= \sum_{j=1,\dots,n} (-1)^{i+j} a^T_{i,j} |A^T_{[i,j]}| \\ &= \sum_{j=1,\dots,n} (-1)^{i+j} a_{j,i} |A_{[j,i]}|\end{aligned}$$

例题 5.1

例题 5.1

计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$a_{11} \cdot A_{11} + a_{1n} A_{1n}$

提示

按第一行进行展开.

例题 5.2

例题 5.2

计算范德蒙德 (Vandermonde) 行列式 $|V_n|$, 其元素 $v_{i,j} = a_j^{i-1}$ 即

$$
\begin{array}{c}
 \\
\text{ith row} \\
 \\
\end{array}
\begin{array}{c}
\text{jth col} \\
\begin{vmatrix}
1 & \cdots & 1 \\
\vdots & a_j^{i-1} & \vdots \\
a_1^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1}
\end{vmatrix}
\end{array}
$$

求证

$$|V_n| = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_i - a_j).$$

例题 5.2 解 (1)

尝试 "对角化" V_n, 如 $r_{i+1} - a_n r_i$ for $i = 1, \ldots, n-1$ 得

r_i $a_i^{i-1} \cdots a_j^{i-1} \cdots a_n^{i-1}$

r_{i+1} $a_1^{i-1}(a_1-a_n) \cdot a_j^{i-1}(a_j-a_n)$ 0

$$\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & 1 \\ a_1 - a_n & \ldots & a_{n-1} - a_n & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} - a_n a_1^{n-2} & \ldots & a_{n-1}^{n-1} - a_n a_{n-1}^{n-2} & 0 \end{vmatrix}$$

$a_j - a_n$

$a_1^{n-2}(a_1-a_n)$

按第 1 行展开, 并化简得

$$(-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} (a_i - a_n) \boxed{\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-2} & \ldots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}}$$

例题 5.2 解 (2)

$$
\begin{aligned}
|V_n| &= (-1)^{n-1}\prod_{i=1}^{n-1}(a_i - a_n)|V_{n-1}| \\
&= \prod_{i=1}^{n-1}(a_n - a_i)|V_{n-1}| \\
&= \dots \\
&= \prod_{j=n}^{2}\left(\prod_{i=1}^{j-1}(a_j - a_i)\right)|V_1| \\
&= \prod_{1\le i<j\le n}(a_j - a_i).
\end{aligned}
$$

$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + \dots + a_n$

$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \times \dots \times a_n$

$|1|$

定理 5.2

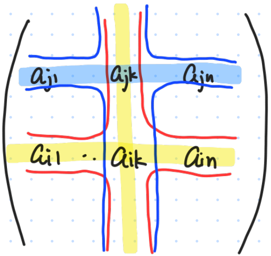
定理 5.2

如果 $i \neq j$, 那么

$$a_{i,1}A_{j,1} + \cdots + a_{i,n}A_{j,n} = 0$$

且

$$a_{1,i}A_{1,j} + \cdots + a_{n,i}A_{n,j} = 0$$



定理 5.2 证明

取 A' 为将 A 第 j 行替换为第 i 行所得的矩阵. 有 $a'_{j,k} = a_{i,k}$ 和 $A'_{j,k} = A_{j,k}$.
通过对第 j 行展开, 有

$$
\begin{aligned}
& a_{i,1}A_{j,1} + \cdots + a_{i,n}A_{j,n} \\
= & a'_{j,1}A'_{j,1} + \cdots + a'_{j,n}A'_{j,n} \\
= & |A'| = 0.
\end{aligned}
$$

取 A' s.t. $a'_{jk} = a_{ik}$

$a_{i1}A_{j1} + \cdots + a_{in}A_{jn}$

$= a'_{j1}A'_{j1} + \cdots + a'_{jn}A'_{jn}$

$= |A'| = 0$

习题

对

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

求 $A_{2,1} + A_{2,2}$

提示

通过替换第 i 行元素, 产生含有 $A_{2,1} + A_{2,2}$ 的方程.

克拉默法则

定理 5.3 克拉默法则 (Cramer's Rule)

作业

10 (4)

11 (6)

12 (3) (4)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} & b_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1, \\ & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

若它的系数行列式 $D = |a_{ij}| \neq 0$, 则该方程组有唯一解

$|A| \cdot x_j = |A_j|$

$$x_i = \frac{D_i}{D}, i = 1, \cdots, n$$

其中 D_i 是将系数行列式中的第 i 列换成 $(b_1, \cdots, b_n)^T$ 后的行列式.