克拉默法则

定理 5.3 克拉默法则 (Cramer's Rule)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} & b_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1, \\ & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

若它的系数行列式 $D = |a_{ij}| \neq 0$, 则该方程组有唯一解

作业
10 (4)
11 (6)
12 (3) (4)

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|}$$

$$x_i = \frac{D_i}{D}, i = 1, \cdots, n$$

其中 D_i 是将系数行列式中的第 i 列换成 $(b_1, \cdots, b_n)^T$ 后的行列式. ∘ Why V_n 写成 $\prod_{i<j}$ ∘ 解释 Thm 5.2

克拉默法则存在性证明

要证 $x_i = D_i/D$ 确是 $Ax = b$ 的解. 即要证, 对任意 $s = 1, \ldots, n$, 有

$$\text{LHS} = a_{s,1}\frac{D_1}{D} + \cdots + a_{s,n}\frac{D_n}{D} = b_s.$$

$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

我们有 D_j 由第 j 列展开

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= \frac{1}{D}\Big(\boxed{a_{s,1}}\overbrace{\sum_k b_k A_{k,1}}^{b_1 A_{1,1}} + \cdots + \boxed{a_{s,n}}\overbrace{\sum_k b_k A_{k,n}}^{b_1 A_{1,n}}\Big) \\
&= \frac{1}{D}\Big(b_1 \boxed{\sum_k a_{s,k}A_{1,k}} + \cdots + b_n \boxed{\sum_k a_{s,k}A_{n,k}}\Big) \\
&= \frac{1}{D} b_s \sum_k a_{s,k}A_{s,k} = \frac{1}{D} b_s D = b_s.
\end{aligned}$$

$\Sigma\, b_1 A_{1,2}$

$\sum_j b_1 A_{1,j}$

$= 0$

Thm 5.2 $\Rightarrow n \neq s$

$\sum a_{sk}A_{nk} = 0$

克拉默法则唯一性证明

假设 $Ax = b$ 有另一个解 $x = c$.
我们要证 $c_s = \boxed{D_s/D}$, $s = 1, \ldots, n$. 代入方程组, 并
让第 i 行乘以 $A_{i,s}$, 可得

$$\begin{cases} a_{1,1}A_{1,s}c_1 + \cdots + a_{1,s}A_{1,s}c_s + \cdots + a_{1,n}A_{1,s}c_n = b_1A_{1,s} \\ \vdots \\ a_{n,1}A_{n,s}c_1 + \cdots + a_{n,s}A_{n,s}c_s + \cdots + a_{n,n}A_{n,s}c_n = b_nA_{n,s} \end{cases}$$

$=0$

A沿第s列展开

将 n 个方程叠加可得

$$Dc_s = D_s.$$

2 x 2 的情形

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 = b_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2} \\ b_2 & a_{2,2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}} \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & b_1 \\ a_{2,1} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}} \end{cases}$$

例题 5.3

例题 5.3

求一个三次多项式 $f(x)$, 使得 $f(1)=6$, $f(2)=20$, $f(-1)=8$, $f(-3)=10$.

例题 5.3 解

三次多项式 $f(x)$ 有形式 $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$.

$$\begin{cases} a_0+a_1+a_2+a_3=6 \\ a_0+2a_1+4a_2+8a_3=20 \\ a_0-a_1+a_2-a_3=8 \\ a_0-3a_1+9a_2-27a_3=10 \end{cases}$$

例题 5.3 解

例题 5.3 解

设 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$. 注意这里, a_i 是我们需要求的, 它们才是未知量. 代入条件 x 的取值可得方程组:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 & = 6 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 & = 20 \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 & = 8 \\ a_0 - 3a_1 + 9a_2 - 27a_3 & = 10 \end{cases}$$

求解方程组, 可得.

定理 5.4

定理 5.4 (齐次方程组情形)

对于齐次方程组

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n & = 0 \\ & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,n}x_n & = 0 \end{cases}$$

若系数矩阵的行列式 $D \neq 0$, 则只有零解.
若有非零解, 则 $D = 0$.

$f(k \cdot x) = k \cdot f(x)$

$y = f(x)$ graph

$y = x + b$

$a \cdot x = b$

if $b = 0$

then $a \neq 0 \Rightarrow x = 0$

$x \neq 0 \Rightarrow a = 0$

$A \cdot x = 0$

- $|A| \neq 0 \xrightarrow{\text{Cramer's Rule}} x_i = \dfrac{|A_i|}{|A|} = 0$

- $\exists\, i$ s.t. $x_i \neq 0 \Longrightarrow |A| \cdot \underbrace{x_i}_{\neq 0} = \underbrace{|A_i|}_{=0} \Rightarrow |A| = 0$.

例题 5.4

例题 5.4

如果齐次方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + \lambda x_2 &= 0 \end{cases}$$

有非零解, 求 λ

由 Thm 5.4 得 $|A| = 0$

$= \lambda^2 - 1$

$\Rightarrow \lambda = \pm 1.$

例题 5.4 解

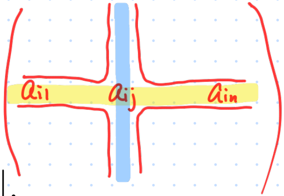
例题 5.4 解

要使齐次方程组有非零解, 其系数矩阵的行列式必须为零, 即

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

得 $\lambda = \pm 1.$

回顾行列式按一行展开



行列式按第 i 行展开

$(-1)^{i+j}$

$$|A| = \sum_j a_{i,j}|A_{[i,j]}|.$$

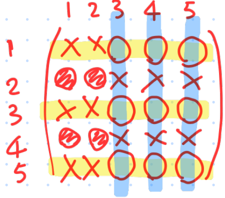
Q: $a_{i,j}$ 不是 1×1, 而是 $k \times k$?

- 1×1: $a_{i,j}$ 中 j 从 1 到 n 取一遍即可. $A_{[i,j]}$ 是 “剩下” 的矩阵

k 阶子式

$I_3=(1,3,5)$

$J_3=(3,4,5)$



选取

- k 行: $I_k=(i_1,\dots,i_k)$
- k 列: $J_k=(j_1,\dots,j_k)$

$A_{I_k,J_k}=\begin{pmatrix} a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{pmatrix}$ $A_{[I_k,J_k]}=\begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{4,1} & a_{4,2} \end{pmatrix}$

记

- A_{I_k,J_k} 为 A 中在 I_k 行 J_k 列交汇处按原来次序提取的 k^2 子矩阵.
- $A_{[I_k,J_k]}$ 为去掉 I_k 行 J_k 列后 “剩下的” $(n-k)\times(n-k)$ 子矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix}$$

拉普拉斯展开定理

定理 5.5 (拉普拉斯展开定理)

给定 $0 < k < n$. 行列式 $|A|$ 按 I_k 行展开为

$$|A| = \sum_{J_k \text{ 为 } n \text{ 中选 } k} |A_{I_k,J_k}||A_{[I_k,J_k]}|.$$

$k=1$: $I_k=(i)$ $\quad |A| = \sum_j a_{ij} \cdot |A_{[i,j]}|$

$k=2$: $I_k=(1,2)$ $\quad |A| = |A_{(1,2)(1,2)}||a_{33}| + |A_{(1,2)(1,3)}||a_{32}| + |A_{(1,2)(2,3)}||a_{31}|$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

例题 5.5

例题 5.5

求证

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} k & n-k \end{array} \\ \begin{array}{c} k \\ n-k \end{array} & \begin{vmatrix} A & 0 \\ B & C \end{vmatrix} \end{array} = |A||C|.$$

解

按前 k 行展开.

$$D = \sum_{\substack{n\text{中取}k \\ (j_1,\dots,j_k)}} \left|D_{(1,\dots,k)(j_1,\dots,j_k)}\right| \cdot \left|D[\dots]\right|$$

$$= \left|D_{(1,\dots,k)(1,\dots,k)}\right| \left|D[\dots]\right|$$

$$= |A| \cdot |C|$$

例题

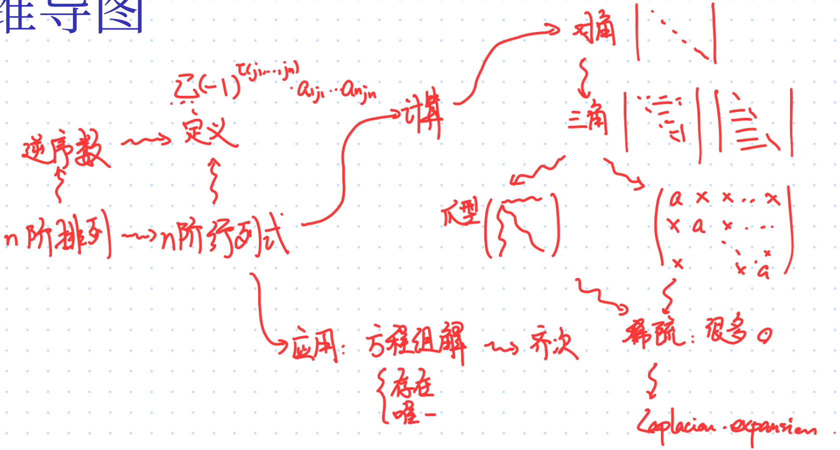
计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ a_2 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & d_2 \end{vmatrix}$$

$$= \left|\begin{array}{cc|cc} a_1 & b_1 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ a_2 & b_2 & & \\ \hline & & c_1 & d_1 \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & c_2 & d_2 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

Outline

思维导图



逆序数
定义
$\sum(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}$
n阶排列
n阶行列式
计算
对角
三角
爪型
稀疏：很多0
Laplacian expansion
应用：方程组解
齐次
存在
唯一