伴随矩阵

定义 4.2 (伴随矩阵)

$A^*_{ij} = A_{j,i}$

矩阵 $A = (a_{i,j})_{n,n}$ 的 伴随矩阵 定义为

a_{ij} 的代数余子式

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

a_{ij} 的余子式

$$A^* := \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{j,1} & \cdots & A_{n,1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{1,i} & \cdots & \boxed{A_{j,i}} & \cdots & A_{n,i} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{1,n} & \cdots & A_{j,n} & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

其中 $A_{i,j}$ 为 $a_{i,j}$ 的代数余子式.

逆矩阵的伴随矩阵表示

逆矩阵的伴随矩阵表示

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}.$$

$$(A\cdot A^*)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot A^*_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = \begin{cases} |A| & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

$$= \begin{pmatrix} \\ a_{i1} \cdots\cdots a_{in} \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & A^*_{j1} & \\ & \vdots & \\ & A^*_{jn} & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |A| & & \\ & \ddots & \\ & & |A| \end{pmatrix} = |A|\cdot E \xRightarrow{|A|\neq 0} A\cdot\frac{A^*}{|A|} = E$$

类似地，$\frac{A^*}{|A|}\cdot A = E$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} \quad \text{if } |A|\neq 0.$$

逆矩阵的伴随矩阵表示

设 $d := |A|$. 由行列式按一行展开和定理 5.2 得

$$a_{i,1}A_{j,1} + \cdots + a_{i,n}A_{j,n} = \begin{cases} d, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

我们有

$$\begin{aligned} A \cdot A^* &= (a_{i,j})(A_{j,k}) \\ &= \Big(\sum_j a_{i,j}A_{j,k}\Big) \\ &= \begin{pmatrix} d & & \\ & \ddots & \\ & & d \end{pmatrix} = dE. \end{aligned}$$

定理 4.1

可逆的等价条件

矩阵 A 可逆，当且仅当行列式 $|A| \neq 0$.

$\Leftarrow \quad A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$

$\Rightarrow \quad |A| \neq 0$.

A可逆 $\Leftrightarrow$ A^{-1}有意义

$\Leftrightarrow a_{ii} \neq 0 \quad \forall i$

$\Leftrightarrow |A| = \prod_i a_{ii} \neq 0$.

从 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$ 来理解.

e.g.

- 对角矩阵
- 三角矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_{ii} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_{ii}^{-1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$|A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

定理 4.1 证明

必要性: 有 $AA^{-1} = E$ 可得

$\overset{\neq 0}{|A|}\overset{\neq 0}{|A^{-1}|} = |AA^{-1}| = |E| = 1.$

充分性: 如果 $|A| \neq 0$, 那么 $\frac{1}{|A|}A^*$ 为 A 的逆, i.e.

$$\frac{1}{|A|}A^* \cdot A = A \cdot \frac{1}{|A|}A^* = E.$$

例题 4.3

例题 4.3

求以下矩阵的行列式

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

解

利用 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$, 通过计算 A 的行列式和所有 2 阶代数余子式可得.

例题 4.4

例题 4.4

如果 A 可逆, 那么方程组 $Ax = b$ 存在唯一解.

解

存在性: $X = A^{-1}b$ 为方程组的解

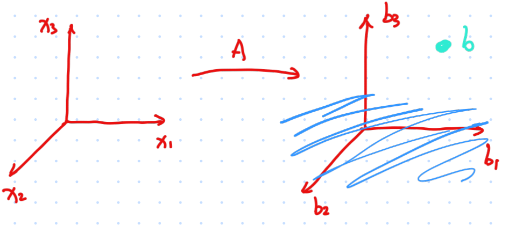
唯一性: 假设有另一个解 X', i.e. $AX' = b$. 两边左乘 A^{-1} 得, $A^{-1}(AX')A^{-1}b$, i.e. $X' = A^{-1}b$.

$$AX = b$$
$$\Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}b$$
$$\Leftrightarrow X = A^{-1}b$$

$n = 3$

$F = \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\parallel \atop x} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$



例题 4.5

例题 4.5

设可逆的 A 和 C, 求 $D = \begin{pmatrix} A & \\ B & C \end{pmatrix}$ 的逆.

$a \in F$ $\quad$ a 可逆 $\Leftrightarrow$ a^{-1} 有意义 $\Leftrightarrow$ $a \neq 0$

$A \in F^{n\times n}$ $\quad$ A 可逆 $\Leftrightarrow$ A^{-1} 有意义 $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

解

先证 A 的可逆性: 由 A, C 不可逆得

$|D| \underset{\text{Laplacian}}{=} \underset{\neq 0}{|A|} \cdot \underset{\neq 0}{|C|} \neq 0.$

例题 4.5 续

解 (续)

再求 A^{-1}: 设 $A^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$. 由 $AA^{-1} = E$ 可得:

$$\begin{pmatrix} A & \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & E \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} AX = E \\ AY = 0 \\ BX + CZ = 0 \\ BY + CT = E \end{cases}$$

由 A 可逆得 $X = A^{-1}$ 和 $Y = 0$. 代入得
$Z = -C^{-1}BA^{-1}$ 和 $T = C^{-1}$.

Outline

1st 初等矩阵 1

定义 5.1 (行对换)

初等变换 $\longleftrightarrow$ 初等矩阵乘法

行　　左··

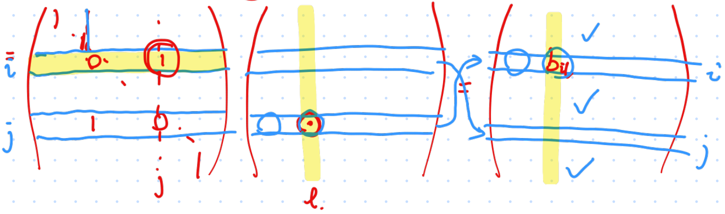
列　　右··

$$
P(i,j) := \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array}
\begin{pmatrix}
1 &&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&& \\
&&& 0 &&& 1 &&& \\
&&&& 1 &&&&& \\
&&&&& 1 &&&& \\
&&& 1 &&& 0 &&& \\
&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&& 1
\end{pmatrix}
$$

1st 初等矩阵 2

- $P(i,j)A$: 通过交换 A 的第 i 行和第 j 行得到.
- $AP(i,j)$: …… 列 ……

$P(i,j)\cdot A =$



$$b_{il} = \sum_k P_{ik}\cdot A_{kl} = A_{jl}$$

$$A\cdot P(i,j) = \Big(\underbrace{P(i,j)^T}_{= P(i,j)} A^T\Big)^T$$