例题 3.4

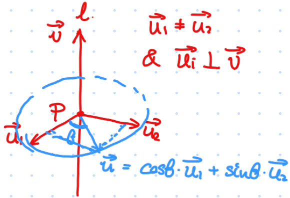
同轴平面族

∘ 给定轴(直线) ℓ.

∘ 同ℓ轴平面族

$= \{\pi \mid$ 过 $P\in\ell$, 法向量 $\vec n = \cos\theta\cdot\vec u_1 + \sin\theta\,\vec u_2\} = \{\pi \mid$ 过 P, $\vec n = \lambda_1\vec u_1 + \lambda_2\vec u_2\}$

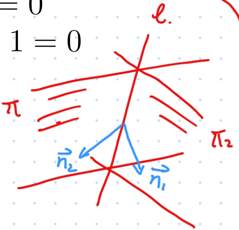
$\vec n = \lambda_1\vec u_1 + \lambda_2\vec u_2 = \sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{\cdots}}\vec u_1 + \frac{\lambda_2}{\sqrt{\cdots}}\vec u_2\right) = \sqrt{\cdots}\left(\cos\theta\cdot\vec u_1 + \sin\theta\cdot\vec u_2\right)$



例题 3.4

求平面满足

- 过 $P(-1,0,1)$
- 经过线: 该线落在以下两个平面上:
  - $x+3y-z=0$
  - $x-y+z+1=0$



解 对过ℓ轴的平面,

法向量 $\vec n$

形如 $\lambda_1\vec n_1 + \lambda_2\vec n_2$

$= \lambda_1(1,3,-1)$

$+ \lambda_2(1,-1,1)$

ℓ 同时满足 π_1, π_2 方程

$\lambda_1(x+3y-z) + \lambda_2(x-y+z+1) = 0$ (*)

$\pi \supseteq \ell \Longrightarrow \pi$ 满足 (*)

代入 $P(-1,0,1)$ 进 (*)

得 $-2\lambda_1 + \lambda_2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_2 = 2\lambda_1$

$\Rightarrow \vec n \,/\!/\, (3,1,1)$

$\Rightarrow$ 点法式 π . . .

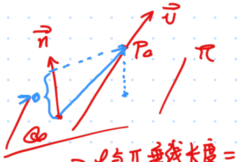
#

设定

考虑一条直线 l 与一个平面 π 之间的关系:

- 直线 l : $\overrightarrow{P_0P} \parallel \mathbf{v}$
  - 经过 $P_0(x_0, y_0, z_0)$
  - 方向向量 $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$
- 平面 $\pi : \overrightarrow{Q_0Q} \cdot \mathbf{n} = 0$
  - 经过 Q_0
  - 法向量 $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$

关系

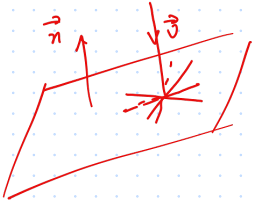


直线 l 与平面 π 的关系:

- $\mathbf{v} \perp \mathbf{n}$: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$

  l与π垂线长度=0

  - P_0 在平面 π 上: $\overrightarrow{Q_0P_0} \cdot \mathbf{n} = 0$ 则 l 在 π 上
  - P_0 不在平面 π 上: $\overrightarrow{Q_0P_0} \cdot \mathbf{n} \neq 0$ 则 l 与 π 平行且不在 π 上
- $\mathbf{v}$ 与 $\mathbf{n}$ 不垂直: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \neq 0$ 则 l 与 π 相交
  - 特别地, $\mathbf{v} \parallel \mathbf{n}$: $\mathbf{v} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ 则 l 与 π 垂直



关系: 不共面情形

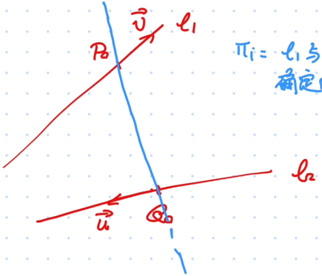
- $l_1 : P = P_0 + \mathbf{v}t$
- $l_2 : Q = Q_0 + \mathbf{u}s$

之间的关系

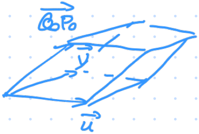
- $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ 与 $\overrightarrow{Q_0P_0}$ 不共面:

$$|(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \overrightarrow{Q_0P_0})| \neq 0$$

则 l_1 与 l_2 不共面



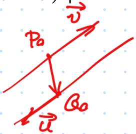
π_1 = l_1 与 P_0Q_0 确定的平面



关系：共面情形

- $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ 与 $\overrightarrow{Q_0P_0}$ 共面:

$$|(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \overrightarrow{Q_0P_0})| = 0$$



则 l_1 与 l_2 共面

- 平行 $\Leftrightarrow \mathbf{v} \parallel \mathbf{u}$
  - 重合 $\Leftrightarrow \overrightarrow{Q_0P_0} \parallel \mathbf{v} \parallel \mathbf{u}$
- 相交 $\Leftrightarrow |\mathbf{v} \times \mathbf{u}| \neq 0$

例题 4.4

例题 4.4

考虑两条直线:

$$l_1 : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}$$

$$l_2 : \frac{x-r}{2} = \frac{y-2}{t} = \frac{z+1}{-2}$$

通过对 r 和 t 的讨论, 分析 l_1 与 l_2 的相对位置.

可见

$$\begin{cases} P_1(1,-2,1) & \mathbf{v}_1 = (-1,2,1) \\ P_2(r,2,-1) & \mathbf{v}_2 = (2,t,-2) \end{cases}$$

$v_2 = -2v_1$

$(2,-4,-2)$

例题 4.4 解

$\overrightarrow{P_1P_2}=(r-1,4,-2)$.

考虑是否共面, i.e. $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\overrightarrow{P_1P_2}$ 是否共面. 计算

$$(v_1, v_2, \overrightarrow{P_1P_2}) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & t & -2 \\ r-1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

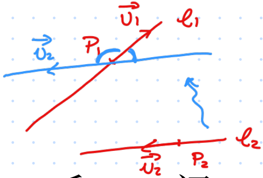
$$= \pm (r-3)(t+4)$$

例题 4.4 解

l_1 与 l_2 共面 $\Leftrightarrow r = 3$ 或 $t = -4$.
进一步分析共面的情形

- $t = -4$: 平行但不重合 $\vec{v_1} // \vec{v_2} \Rightarrow l_1 // l_2$. P_1不在 $l_2 \Rightarrow l_1, l_2$不重合
- $t \neq -4$: 相交 (共面可得 $r = 3$)
  - $t = 2$: 垂直 $\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} \stackrel{?}{=} 0$.

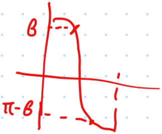
两直线夹角



定义 (直线与直线的夹角)

设直线 l_1 和 l_2 的方向向量分别为 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$. 记 θ 为 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$ 的夹角. 称

$$\varphi = \min\{\theta, \pi - \theta\}$$



为直线 l_1 和直线 l_2 的夹角.

可见

$$\cos\varphi = \overset{=|\cos\theta|}{\left|\frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1| \cdot |\mathbf{v}_2|}\right|}. = \frac{|v_1|\cdot|v_2|\cdot|\cos\theta|}{|v_1|\cdot|v_2|}$$

Q: 为什么直线间的夹角要取锐角, 但向量间的夹角不用?

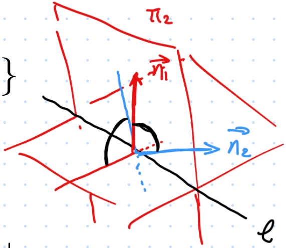
两平面夹角

定义 (平面与平面的夹角)

设平面 π_1 和 π_2 的法向向量分别为 $\mathbf{n}_1$ 和 $\mathbf{n}_2$. 记 θ 为 $\mathbf{n}_1$ 和 $\mathbf{n}_2$ 的夹角. 称

= $\vec{n}_1 . \vec{n}_2$ 所在直线的夹角

$$\varphi = \min\{\theta, \pi - \theta\}$$



为平面 π_1 和平面 π_2 的夹角.

可见

$$\cos\varphi = \left|\frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|}\right|.$$

直线与平面夹角

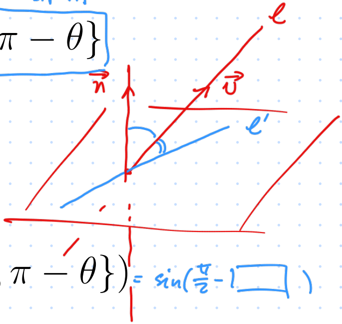
定义 (直线与平面的夹角)

设直线 l_1 的切向量为 $\mathbf{v}_1$, 平面 π_1 的法向量为 $\mathbf{n}_1$.
记 θ 为 $\mathbf{v}_1$ 与 $\mathbf{n}_1$ 的夹角. 称

$\vec{n}$所在直线与ℓ的夹角

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \boxed{\min\{\theta, \pi - \theta\}}$$

为直线 l_1 和平面 π_1 的夹角.



可得

$$\sin\varphi = \cos(\min\{\theta, \pi - \theta\}) = \sin(\tfrac{\pi}{2} - \boxed{\quad})$$

$$= \left|\frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_1}{|\mathbf{v}_1||\mathbf{n}_1|}\right|.$$

例题 4.5

例题 4.5

记

- 直线 $l: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}$
- 平面 $\pi: x + y + 2z = 3$

求直线 l 与平面 π 的夹角.

解

先求

- l 的方向向量 $\mathbf{v} = (-1, 2, 1)$
- π 的法向量 $\mathbf{n} = (1, 1, 2)$

例题 4.5 解

解 (续)

由 $\mathbf{v} = (-1, 2, 1)$ 和 $\mathbf{n} = (1, 1, 2)$, 得

- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$
- $|\mathbf{v}|$
- $|\mathbf{n}|$

利用

$$\sin \varphi = \left| \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{v}||\mathbf{n}|} \right|$$

求 φ

一般含义

对于度量空间 (X, d) 诱导其上集合之间的距离

幂集 power set.

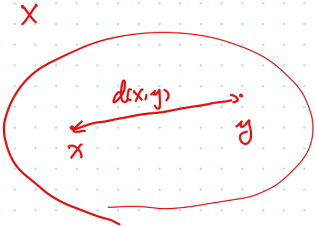
$X = \{a, b\}$

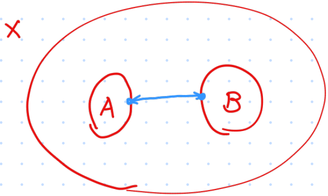
$2^X = \{00, \longleftrightarrow \{a,b\}$
$01, \quad \{a\}$
$10, \quad \{b\}$
$11\} \quad \phi$

$$d : 2^X \times 2^X \to \mathbb{R}_+$$
$$(A, B) \mapsto d(A, B)$$

其中

$$d(A, B) := \inf_{x \in A, x \in B} d(x, y).$$





点到点的距离

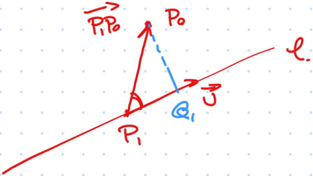
对于两点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 和 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, 那么 P_0 与 P_1 两点之间的距离可以通过 $\overrightarrow{P_0P_1}$ 的大小确定, i.e.

$= \sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2+(z_0-z_1)^2}$

$$d(P_0, P_1) = |\overrightarrow{P_0P_1}|.$$

我们将利用两点之间的距离表示线面之间的距离.

点到直线距离



考虑

- 点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$
- 线 $l(P_1, \mathbf{v})$: 过点 P_1 & 方向向量为 $\mathbf{v}$

记 P_0 到 l 的距离为 $d(P_0, l)$. 验证

$$d(P_0, l) = \frac{|\mathbf{v} \times \overrightarrow{P_1P_0}|}{|\mathbf{v}|}.$$

$= d(P_0, Q_1)$

$=$ 垂线长度 $= |\sin\langle \vec{v}, \overrightarrow{P_1P_0}\rangle| \, |\overrightarrow{P_1P_0}|$

$$= \frac{|\vec{v}| \cdot |\overrightarrow{P_1P_0}| \, |\sin\langle v, \overrightarrow{P_1P_0}\rangle|}{|\vec{v}| \cdot |\overrightarrow{P_1P_0}|} \cdot |\overrightarrow{P_1P_0}|$$

$$= \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{P_1P_0}|}{|\vec{v}| \cdot \cancel{|\overrightarrow{P_1P_0}|}} \cdot \cancel{|\overrightarrow{P_1P_0}|}$$

例题 4.6

例题 4.6

设 $\vec{v}_1=(1,2,2)$, $\vec{v}_2=(2,4,4)$

- $l_1 : \frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{2}$
- $l_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-2}{4}$

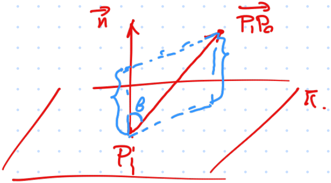
求 l_1 与 l_2 之间的距离.

$l_1 // l_2$

$(1,2,2)$

$\Rightarrow d(l_1,l_2) = d(l_1,P_2)$

点到平面距离



考虑

- $P_0(x_0, y_0, z_0)$
- 平面 $\pi(P_1, \mathbf{n})$: 过点 P_1 & 法向量为 $\mathbf{n}$

记 P_0 到 π 的距离为 $d(P_0, \pi)$. 验证

$$d(P_0, \pi) = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_1P_0}|}{|\mathbf{n}|},$$

其中 P_1 为 π 上的一点.

$$= \frac{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{P_1P_0}| \cdot |\cos\langle \vec{n}, \overrightarrow{P_1P_0} \rangle|}{|\vec{n}|}$$

$$= |\overrightarrow{P_1P_0}| \cdot |\cos\langle \vec{n}, \overrightarrow{P_1P_0} \rangle|$$

例题 4.7

例题 4.7

设

$\vec{n_1}=(1,2,-2)$, $\vec{n_2}=(2,4,-4)$

- $\pi_1 : x + 2y - 2z + 3 = 0$
- $\pi_2 : 2x + 4y - 4z - 3 = 0$

求 $d(\pi_1, \pi_2)$

$\pi_1 // \pi_2$

$\Rightarrow d(\pi_1, \pi_2) = d((-3,0,0), \pi_2)$

线到线的距离

我们定义直线 l_1 与 l_2 之间的距离为

$$d(l_1, l_2) := \inf_{p_1 \in l_1, p_2 \in l_2} d(p_1, p_2).$$

e.g.

- $l_1 \parallel l_2$: $d(l_1, l_2) = d(p_1, l_2)$ for all $p_1 \in l_1$. ✓
- l_1 与 l_2 相交或重合: $d(l_1, l_2) = 0$ ✓
- 其他情形: $d(l_1, l_2)$ 为公垂线段长度

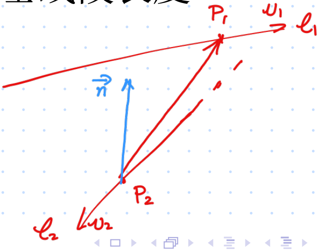
公垂方向 $\vec{n} = \vec{v_1} \times \vec{v_2}$

$\overrightarrow{P_1P_2}$ 到 $\vec{n}$ 投影长度.

$= |\overrightarrow{P_1P_2}| \cdot |\cos\langle \vec{n}, \overrightarrow{P_1P_2} \rangle|$

$= \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot |\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{P_1P_2}| \cdot |\cos\langle \vec{n}, \overrightarrow{P_1P_2} \rangle|$

$= \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_1P_2}|}{|\vec{n}|}.$



面到面的距离

定义平面 π_1 与 π_2 之间的距离为

$$d(\pi_1, \pi_2) := \inf_{p_1 \in \pi_1, p_2 \in \pi_2} d(p_1, p_2).$$

e.g.

- $\pi_1 \parallel \pi_2$: $d(\pi_1, \pi_2)$ 为公垂线段长度
- 相交或重合: 距离为零