Outline

4.0 引言

4.1 消元法

4.2 n 维向量空间

4.3 向量组的线性相关性

4.4 $\mathbb{R}^n$ 的基，向量在基下的坐标

4.5 向量组的秩

向量组 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$

线性相关 —— 方程 —— 几何

$\exists\ k_1,\dots,k_n$ 不全为0 s.t. $k_1\alpha_1+\dots+k_n\alpha_n=0$

$\alpha_1,\dots,\alpha_n$ 落在同一个 $(n-1)$维....

$A\cdot k = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}=0$

有非零的解

$\Downarrow$

解不唯一

$|A|=0$ $(\mathrm{rank}(A)<n)$

线性无关

$k_1\alpha_1+\dots+k_n\alpha_n=0$ 只有零解 $(k_i=0\ \forall i)$

线性空间的基 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$

不大：$\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ 线性无关

不小：$\forall\alpha$ 都能被 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ 线性表示

e.g. $\mathbb{R}^n$ 中的 $(e_1,\dots,e_n) = \begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}$

坐标跟随基的变换而变化.

$\vec{p} = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = (\beta_1,\dots,\beta_n)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$

$\beta_i = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)\begin{pmatrix}a_{1i}\\ \vdots\\ a_{ni}\end{pmatrix}$

$(\beta_1,\dots,\beta_n) = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$

极大线性无关组

$(S, \le)$

a 在 $(S,\le)$ 是极大 if $\nexists\, b \in S$ s.t. $a < b$

$\hookrightarrow \begin{cases} a \le b \\ a \ne b \end{cases}$

定义 5.1 (极大线性无关组)

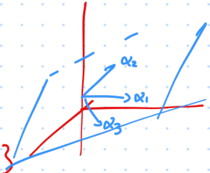
我们称向量组中的一个线性无关的子向量组是 极大的, 如果不存在真包含这个子向量组的线性无关向量组.

例如 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ 是 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}(m \le n)$ 的一个极大线性无关组, 那么再添加一个向量 α', 有

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha'\}$$

必然线性相关.

e.g. $\mathbb{R}^n$ 中 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ 是为极大线性无关 in $\{\alpha \in \mathbb{R}^n\}$



极大线性无关组的意义

定理 5.1

任意向量组都等价与它里面的一个极大线性无关组.

两个向量组等价 $\Leftrightarrow$ 它们可以相互线性表示

($\Leftrightarrow$ 它们张成相同的线性子空间)

Pf: 记向量组为 $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$

取一个极大线性无关组 $\alpha' = \{\alpha_1, \ldots \alpha_m\}$ $(m \leq n)$

- α 可以线性表示 α'. ✓
- α' · · · · · α.

假设 α_i $(m < i \leq n)$ 不能被 α' 线性表示

$\Rightarrow \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha_i\}$ 线性无关

$\supsetneq \{\alpha_1 \ldots \alpha_m\}$

与 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ 极大 . . . 矛盾 #.

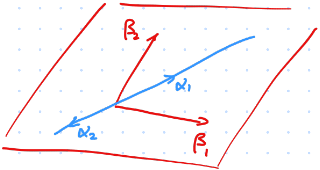
线性无关与秩

定理 5.2

考虑向量组 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ 可被 $\{\beta_1, \ldots, \beta_s\}$ 线性表出. 如果 $r > s$, 那么 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ 线性相关.

几何: $\{\alpha\ldots\}$ 可被 $\{\beta\ldots\}$ 线性表出

$\Leftrightarrow$ "$\{\alpha\ldots\}$张成子空间" 落在 "$\{\beta\ldots\}$张成子空间"



($\{\alpha\ldots\} \sim \{\beta\ldots\}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{span}\{\alpha\} \subseteq \mathrm{span}\{\beta\} \\ \mathrm{span}\{\alpha\} \supseteq \mathrm{span}\{\beta\} \end{cases} \Leftrightarrow \mathrm{span}\{\alpha\} = \mathrm{span}\{\beta\}$)

Pf: $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ 线性无关

$\Leftrightarrow (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_r \end{pmatrix} = 0$ 有非零解.

$\because$ α_i 可被 $\{\beta\}$ 线性表出

i.e. $\alpha_i = (\beta_1, \ldots, \beta_s)\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{si} \end{pmatrix}$

$$\therefore (\beta_1, \ldots, \beta_s)\ s\left\{\overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sr} \end{pmatrix}}^{r}\right. \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_r \end{pmatrix} = 0$$

$$s\left\{\left(\overbrace{\ \diagdown\ }^{s}\ \Big|\ \overbrace{\ \square\ }^{r-s}\right)\right. \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = 0$$

$\therefore \exists$ 非零解 $(k_1, \ldots, k_n)$

\#.

推论 5.1 & 5.2

Thm 5.2 $r>s \Rightarrow \{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}$ 线性相关
$r \le s \Leftarrow$ - - - 无

定理 5.2 的逆否命题:

推论 5.1

考虑向量组 $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}$ 可被 $\{\beta_1,\ldots,\beta_s\}$ 线性表出. 如果 $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}$ 线性无关, 那么 $r \le s$.

推论 5.2

在 $\mathbb{R}^n$ 中, $m > n$ 个向量必然线性相关.

取 $\{\beta_1,\ldots,\beta_n\} = \{e_1,\ldots,e_n\}$

向量组的秩

向量组的“秩”不依赖于极大线性无关组的选取:

推论 5.3

一个向量组的极大线性无关组都含有相同数量的向量.

Pf: $\{\alpha\}$与$\{\beta\}$都是某一个向量组的极大线性无关组.

$\therefore$ $\{\alpha\}$可被$\{\beta\}$线性表出

$+$ $\{\alpha\}$线性无关

$\Rightarrow \#\{\alpha\} \leq \#\{\beta\}$

$\cdots \geq$ #

向量组的秩

定义 5.2

一个向量组的 秩 是指它的极大线性无关组所含向量的个数.

推论 5.4

等价~~矩阵~~具有相等的秩.

向量组.

(类 Cor 5.3)

行秩 & 列秩

定义

对矩阵

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n}\\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n}\end{pmatrix}, = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$$

记

$$\alpha_i = (a_{i,1}, \ldots, a_{i,n}), \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$\beta_j = (b_{1,j}, \ldots, b_{m,j})^T, \qquad j = 1, \ldots, n$$

分别称 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ 与 $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ 为 A 的 行向量 与 列向量. 分别称 m 和 n 为 A 的 行秩 和 列秩.

例题 5.1

例题 5.1

求下列矩阵的行秩和列秩

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

行秩 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关 & 极大

$\Rightarrow$ 行秩 $= 3$

列秩 $\beta_1, \beta_2, \beta_4$ 线性无关 极大

$\Rightarrow$ 列秩 $= 3$

定理 5.3

定理 5.3

行秩 = 秩 = 列秩

$rank(A^T) = rank(A)$

仅考虑 "行秩 = 秩" (Why?)

仅需证明初等行变换也不改变行秩: 变换前后的向量组等价.

初等行变换

①. 行交换: 不改变向量组的秩.

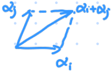
② 数乘行: $\{\alpha_1 \ldots \alpha_i, \ldots, \alpha_n\}$

$\wr$

$\{\alpha_1, \ldots k\alpha_i, \ldots \alpha_n\}$

③ 行加行: $\{\alpha_1 \ldots \alpha_i, \alpha_j, \ldots \alpha_n\}$

$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \alpha_j + \alpha_i, \ldots \alpha_n\}$



α_i 与 α_j 不共线

$\Leftrightarrow \alpha_i$ 与 $\alpha_j+\alpha_i$ 不共线.

定理 5.4

$$AB = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{12} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} b_{1s} \\ \vdots \\ b_{ns} \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$C = A \cdot B$

$(\gamma_1, \ldots, \gamma_s) \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

$\Updownarrow$

$\{\gamma\}$ 可被 $\{\alpha\}$ 线性表出 (i.e. B).

$\Updownarrow$

$\mathrm{span}\{\gamma\} \subseteq \mathrm{span}\{\alpha\}$

$\Downarrow$

$\dim \mathrm{span}\{\gamma\} \leq \dim \mathrm{span}\{\alpha\}$

$\Updownarrow$

$\mathrm{rank}(AB) \leq \mathrm{rank}(A)$.

定理 5.4

$C = [\gamma_1, \ldots, \gamma_s]$

设 A, B 分别为 $m \times n$, $n \times s$ 矩阵, 则

$C = A \cdot B$

$$r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}.$$

仅证 $r(AB) \leq r(A)$. 记 $A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $AB = (\gamma_1, \ldots, \gamma_s)$, 则

$$\gamma_j = \alpha_1 b_{1,j} + \cdots + \alpha_n b_{n,j}.$$

可见 $\{\gamma_j\}$ 可被 $\{\alpha_i\}$ 线性表出. 所以

$$r(AB) \leq r(A).$$

推论 5.5 & 5.6

推论 5.5

$$r(A_1 \dots A_t) \le \min_{i=1,\dots,t} r(A_i).$$

例题 5.6

设 A 为 $m \times n$ 矩阵. 如果 P 和 Q 分别为 $m \times m$ 和 $n \times n$ 的可逆矩阵, 那么任意向量的坐标是唯一确定

$$r(PA) = r(A) = r(AQ).$$

Outline

回顾

考虑 A 的列向量 α_j, i.e.

$$A = (\alpha_1 \ldots, \alpha_n).$$

那么方程组 $Ax = b$ 可以记为

$$(\alpha_1 \ldots, \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

i.e.

$$x_1\alpha_1 + \ldots x_n\alpha_n = \mathbf{b}.$$

定理 6.1

定理 6.1

方程 $Ax = b$ 有解, 当且仅当, 向量 b 可由 α_1, …, α_n 线性表示.

分情况: b 是否为 0?

$$A \cdot x = b$$

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b.$$

齐次方程的解

性质 6.1 & 6.2

$(V;+,\cdot)$

↳ 封闭, 单位元, 逆元 ...

齐次方程组 $Ax = 0$ 的解集

Kernel

$$\mathrm{Ker}(A) := \{x \mid Ax = 0\}$$

关于加法和数乘封闭:

- $x_1 + x_2 \in \mathrm{Ker}(A)$ if $x_1, x_2 \in \mathrm{Ker}(A)$
- $kx \in \mathrm{Ker}(A)$ if $k \in F$ and $x \in \mathrm{Ker}(A)$

可见, 解集 $\mathrm{Ker}(A)$ 是一个向量空间.

基础解系

由上述性质 6.1 & 6.2 可知, 如果解集 $\mathrm{Ker}(A)$ 包含一个非零元 $x \neq 0$, 那么它含有无限个非零元 kx $(k \in F)$.

Q: $\mathrm{Ker}(A)$ 是否有限维? 存在有限 $x_1, \ldots, x_n$, s.t.

$$\mathrm{Ker}(A) := \{k_1 x_1 + \ldots k_n x_n\}.$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n\text{中的线性子空间} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{性质}", "6.1\ \&\ 6.2"'] \arrow[d, squiggly] & \text{齐次方程组解集 } \mathrm{Ker}A=\{x \mid Ax=0\} \arrow[d, squiggly] \\ \text{极大线性无关组} \arrow[r, leftrightarrow] & \text{基础解系} \end{tikzcd}$$

基础解析

定义 6.1

称 $Ax = 0$ 的解 $\eta_1, \dots, \eta_m$ 为该方程组的一个 **基础解系**, 如果

- (线性无关) $\eta_1, \dots, \eta_m$ 线性无关
- (极大) 任一解都可由 $\eta_1, \dots, \eta_m$ 线性表示

齐次方程的一个基础解系, 其实就是解集 $\mathrm{Ker}(A)$ 的一个极大线性无关组.

定理 6.2

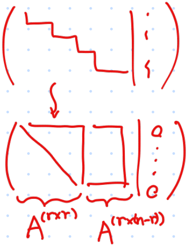
定理 6.2

若 $Ax = 0$ 有非零解, 则

- 方程组有基础解系
- 基础解系所含解的个数为 $n - r(A)$

$A \cdot x = 0$

消元法



$$\left(A^{(r\times r)} \quad A^{(r\times(n-r))}\right)\begin{pmatrix} X^{(r)} \\ X^{(n-r)} \end{pmatrix} = 0$$

方程

$$A^{(r\times r)} \cdot X^{(r)} + A^{(r\times(n-r))} \cdot X^{(n-r)} = 0$$

$$A^{(r\times r)} \times X^{(r)} = -A^{(r\times(n-r))} \times X^{(n-r)}$$

$$X^{(r)} = \left(A^{(r\times r)}\right)^{-1} \cdot \left(-A^{(r\times(n-r))} \cdot X^{(n-r)}\right)$$

定理 6.2 证明

仅考虑阶梯化后的 A, 那么 $Ax = 0$ 可写为

$$\left(A^{(r\times r)} A^{(r\times(n-r))}\right) \begin{pmatrix} X^{(r)} \\ x^{(n-r)} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

或

$$A^{(r\times r)} X^{(r)} = -A^{(r\times(n-r))} X^{(n-r)},$$

其中 $X^{(n-r)}$ 是 $(n-r$ 个$)$ 自由未知量. 对 $i = 1, \ldots, n-r$, 记

- $e_i^{(n-r)}$ 为 $\mathbb{R}^{n-r}$ 的第 i 个单位向量.
- $e_i^{(r)} := -(A^{(r\times r)})^{-1}(A^{r\times(n-r)} e_i^{(n-r)})$.
- $\eta_i = \begin{pmatrix} e_i^{(r)} \\ e_i^{(n-r)} \end{pmatrix}$

定理 6.2 证明

要证 $\eta_1, \ldots, \eta_{n-r}$ 为 $Ax = 0$ 的一个基础解系，仅需证

- 线性相关：由 $\{e_i^{(n-r)}\}$ 的线性无关可得
- 极大：

对于任意一个解 $\eta = (c_1, \ldots, c_n)$，要证

$$\eta = c_1\eta_1 + \cdots + c_{n-r}\eta_{n-r}.$$

记 $\eta = (\eta^{(r)}, \eta^{(n-r)})^T$. 显然 $\eta^{(n-r)} = c_1 e_1^{(n-r)} + \ldots c_{n-r} e_{n-r}^{(n-r)}$，剩下证

$$\eta^{(r)} = c_1 e_1^{(r)} + \ldots c_{n-r} e_{n-r}^{(r)}.$$

验证左右都是以下方程的解

$$A^{(r\times r)} X^{(r)} = -A^{(r\times(n-r))}(c_1 e_1^{(n-r)} + \ldots c_{n-r} e_{n-r}^{(n-r)}).$$

求基础解系过程

上述给出了基础解系的求法:

1. 阶梯化 $A = (A^{(r\times r)} A^{(r\times(n-r))})$
2. 取自由未知量中的一组基 $\{e_1^{(n-r)}, \ldots, e_{n-r}^{(n-r)}\}$
3. 求解 $e_i^{(r)} := -(A^{(r\times r)})^{-1}(A^{r\times(n-r)} e_i^{(n-r)})$
4. 组装 $\eta_i = \begin{pmatrix} e_i^{(r)} \\ e_i^{(n-r)} \end{pmatrix}$

通解

定义 6.2 (通解)

对于

- 齐次方程组的一个基础解系 $\eta_1, \ldots, \eta_{n-r}$
- 任意 $c_1, \ldots, c_{n-r}$

我们称

$$\eta = c_1\eta_1 + \ldots c_n\eta_n$$

为方程组的 通解 (或 一般解).

通解 vs 特解

性质 6.3

如果 γ_1, γ_2 为 $Ax = b$ 的解, 那么 $\gamma_1 - \gamma_2$ 为 $Ax = 0$ 的解.

性质 6.4

如果

- γ 为 $Ax = b$ 的解
- η 为 $Ax = 0$ 的解

那么 $\gamma + \eta$ 是 $Ax = b$ 的解.

定理 6.3

定理 6.3

取 $Ax = b$ 的一个解 γ_0. 方程的所有解形如

$$\gamma = \gamma_0 + \eta$$

其中 η 为方程组通解.

我们通常称 γ_0 为方程组的 特解.

定理 6.4

结合定理 6.3 与通解的 “分解”, 我们有方程组的解的线性表示:

定理 6.4

方程组 $Ax = b$ 的解有线性表示

$$\gamma = \gamma_0 + k_1\eta_1 + \dots k_{n-r}\eta_{n-r}$$

其中

- γ_0 为 $Ax = b$ 的一个特解
- $\eta_1, \dots, \eta_{n-r}$ 为 $Ax = 0$ 的一个基础解系

例题 6.1

旧题 (例题 1.2) 新解

例题 6.1

解下列增广矩阵对应的方程

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ & 1 & -1 & -1 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

例题 6.2

例题 6.2

解下列增广矩阵对应的方程

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$