

1. 解下列线性方程组

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 + x_5 = 4 \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 10 \\ -x_2 - 13x_3 - 2x_4 + x_5 = -14 \\ x_3 - 16x_4 + 2x_5 = -11 \\ 2x_4 + 5x_5 = 12 \end{array} \right.$$

解：考虑增广矩阵

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & -1 & -3 & 2 & 10 \\ -1 & -13 & -2 & 1 & -14 \\ 1 & -16 & 2 & -11 & \\ 2 & 5 & & 12 & \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_2 - 3r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 14 & -15 & -1 & -2 & \\ - & - & - & - & - & \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} & & & & & - \\ & & & & & - \\ 1 & -17 & 0 & & & -16 \\ & \dots & \dots & & & \dots \\ & & & & & \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_4 - r_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} & & & & & - \\ & & & & & - \\ & & & & & - \\ 1 & 2 & 5 & & & \\ & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ & & & & & \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_5 - 2r_4} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 14 & -15 & -1 & -2 & \\ 1 & -17 & 0 & & & -16 \\ 1 & 2 & 5 & & & \\ 1 & 2 & & & & \end{array} \right)$$

得 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 1, 1, 1, 2)$

2. 设 $\beta = (1, 2, 1, 1)$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

求 β 由 α_i 的线性表示.

解: 求解方程

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

考虑增广矩阵

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} r_i - r_1 \\ -\frac{1}{2}r_i, i=2,3,4 \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} r_2 \leftrightarrow r_3 \\ r_3 \leftrightarrow r_4 \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_3 - r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} r_3 - r_4 \\ \frac{1}{2}r_4 \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \end{array} \right)$$

得 $(k_1, k_2, k_3, k_4) = (\frac{5}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$

$\Rightarrow \beta = \frac{5}{4}\alpha_1 + \frac{1}{4}\alpha_2 - \frac{1}{4}\alpha_3 - \frac{1}{4}\alpha_4$ #

3. 设 $\alpha_1 = (3, -1, 1)$

$$\alpha_2 = (1, 1, 2)$$

$$\alpha_3 = (1, -3, -3)$$

$$\alpha_4 = (4, 0, 5)$$

(1) 求证 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关

Pf. 考虑 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4 = 0$

i.e.
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

消元法
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = 0$$

可取 k_3 为自由未知量

$$k_1 = -k_3$$

得
$$\begin{cases} k_1 = -k_3 \\ k_2 = 2k_3 \\ k_4 = 0 \end{cases}$$

$$k_2 = 2k_3$$

不妨取 $k_3 = 1$ 得

$$-\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

$\therefore \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关.

#

只消 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$
线性相关.

(2) 求证 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性无关

Pf: 方程 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_4\alpha_4 = 0$

对应 (1) 中方程的系数矩阵去掉 3rd 行

得消元后矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

\therefore 方程只有零解

$\therefore \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性无关.

#

5. 试证：向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$

$$\text{与向量组 } \beta_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{s-1} + \alpha_s \\ \beta_1 = \alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{s-1} + \alpha_s$$

$$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{s-1}$$

等价。

Pf. 要证 $\{\alpha_i\}$ 与 $\{\beta_i\}$ 等价

即证它们可以相互线性表示。

• $\{\beta_i\}$ 可被 $\{\alpha_i\}$ 线性表示。

从 β_i 的表达式可知

• $\{\alpha_i\}$ 可被 $\{\beta_i\}$ 线性表示。

可验证 $\beta_1 + \dots + \beta_n = (n-1)(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)$

$$\therefore \alpha_i = (\alpha_1 + \dots + \alpha_n) - (\alpha_1 + \dots + \alpha_{i-1} + \alpha_i + \dots + \alpha_n)$$

$$= \frac{1}{n-1}(\beta_1 + \dots + \beta_n) - \beta_i \quad \#$$

Recall

Ch.1 [5] 4.3

10. 在 \mathbb{R}^3 中的两组基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

 $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

(1) 求 $\{\varepsilon_3\}$ 到 $\{\eta_3\}$ 的过渡矩阵

解：即求矩阵 A s.t. $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \cdot A$.

记为增广矩阵 $(\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3 \mid \eta_1 \ \eta_2 \ \eta_3)$

i.e.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & -1 & \end{array} \right)$$

消元 $\xrightarrow{\quad}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \end{array} \right)$$

$\xrightarrow{r_1-r_2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \end{array} \right)$$

得

$$\left(\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \text{ 为 } \{\varepsilon_3\} \text{ 到 } \{\eta_3\} \text{ 过渡矩阵} \quad \#$$

(2) 求向量 $\varrho = (3, 5, 0)$ 在 $\{\eta_3\}$ 下的坐标.

Rmk: 此处

ϱ 的坐标

默认是在

标准基 $\{\varepsilon_3\}$ 下

解：解方程 $k_1 \eta_1 + k_2 \eta_2 + k_3 \eta_3 = \varrho$

其增广矩阵

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

消元 $\xrightarrow{\quad}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & & & 3 \end{array} \right)$$

得 ϱ 在 $\{\eta_3\}$ 下的坐标为

$$(k_1, k_2, k_3) = (1, 1, 3) \quad \#$$

$$\text{附 1. 已知 } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix}$$

1) 求 a, b 的值 s.t. β 不能由 $\{\alpha_i\}$ 线性表示,

解: β 不能由 $\{\alpha_i\}$ 线性表示,

$$\Leftrightarrow k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = \beta \text{ 无解.}$$

考虑增广矩阵

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{array} \right)$$

消元

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & b-2 & & \end{array} \right)$$

$\therefore b-2 \neq 0$ 时方程无解

$\therefore b \neq 2$ 时, β 不能被 $\{\alpha_i\}$ 线性表示 并

Rank:

$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta\}$ 线性无关

$\Leftrightarrow \beta$ 不能被 $\{\alpha_i\}$ 线性表示

e.g. $\{\alpha_1, \dots, \beta\}$ 线性无关

$$\Leftrightarrow a \neq 1 \& b \neq 2$$

$$\Leftrightarrow b \neq 2$$

$\Leftrightarrow \beta$ 不能被 $\{\alpha_i\}$...

2) 求 a, b 的值 s.t. β 可被 $\{\alpha_i\}$ 线性表示.

并写出此时表达式

解: 即求 a, b s.t. 题1) 方程有非零解

得 $b=2$ 时 β 能被 $\{\alpha_i\}$ 线性表示

解方程

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & a-1 & 0 \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

当 $a-1 \neq 0$ 时, 得 $(k_1, k_2, k_3) = (-1, 2, 0)$

$$\text{i.e. } a \neq 1 \text{ 时, } \beta = -\alpha_1 + \alpha_2$$

当 $a-1 = 0$ 时, k_3 为自由未知量

$$\text{i.e. } a = 1 \text{ 时, } \beta = (-1-2k_3)\alpha_1 + (2+k_3)\alpha_2 + k_3\alpha_3$$

附 2.

设矩阵通过有限次行变换矩阵 A 变到

求证：A 与 B 的列向量有相同的线性关系

如何从几何
来理解

Pf. 记 A, B 的列向量分别为 $\{\alpha_i\}$ 和 $\{\beta_i\}$

要证 $\{\alpha_i\}$ 与 $\{\beta_i\}$ 有相同线性关系

即证，对 $\forall (k_1, \dots, k_n) \in F^n$ 有

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_n\alpha_n = 0$$

$$\Leftrightarrow k_1\beta_1 + \dots + k_n\beta_n = 0$$

已知初等变换不改变方程的解集

由 A, B 相差有限初等变换得

$$\{k \mid A \cdot k = 0\} = \{k \mid B \cdot k = 0\}$$

$\therefore k = (k_1, \dots, k_n)$ 满足 $A \cdot k = 0$

$\Leftrightarrow k$ 满足 $B \cdot k = 0$

$$\text{又 } A \cdot k = k_1\alpha_1 + \dots + k_n\alpha_n$$

$$B \cdot k = k_1\beta_1 + \dots + k_n\beta_n$$

$\therefore \{\alpha_i\}$ 与 $\{\beta_i\}$ 有相同线性关系 #

附 3. 设 A 为 $n \times n$ 方阵 满足

◦ $A^k \alpha = 0$ 有解 $\alpha = \alpha$

◦ $A^{k-1} \alpha \neq 0$

求证： $\{\alpha, A\alpha, \dots, A^{k-1}\alpha\}$ 线性无关

Pf. 考虑方程 $k_0\alpha + k_1(A\alpha) + \dots + k_{k-1}(A^{k-1}\alpha) = 0$

同时乘 A^{k-1} 得 $k_0(A^{k-1}\alpha) + k_1(A^k\alpha) + \dots + k_{k-1}(A^{2k-2}\alpha) = 0$

$$= k_0(A^{k-1}\alpha) + k_1(A^k\alpha) + k_2(A \cdot A^k\alpha)$$

$$+ \dots + k_{k-1}(A^{k-2} \cdot A^k\alpha)$$

$$\underline{A^k\alpha = 0} \quad k_0(A^{k-1}\alpha)$$

由 $A^{k-1}\alpha \neq 0$ 得 $k_0 = 0$

类似地，乘 A^{k-2} 得 $k_1 = 0$

\vdots A 得 $k_{k-1} = 0$

$\therefore k_0\alpha + k_1(A\alpha) + \dots + k_{k-1}(A^{k-1}\alpha) = 0$ 只有零解

$\therefore \{\alpha, A\alpha, \dots, A^{k-1}\alpha\}$ 线性无关 #

#

尝试构造
题中的 A

附 4. 设 $A \in m \times n$, $B \in n \times m$ ($m < n$)

(What if
 $n \leq m$)

求证: $A \cdot B = E \Rightarrow B$ 的列向量组线性无关

Pf 1: 记 B 的列向量组为 $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$

反证, 假设 $\{\beta_i\}$ 线性相关

i.e. 存在不全为零 k_i s.t. $k_1\beta_1 + \dots + k_m\beta_m = 0$

$$\therefore A \cdot B \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} = A \cdot (\beta_1, \dots, \beta_m) \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} = A \cdot \vec{o} = \vec{o}$$

与 " $A \cdot B = E$ " 矛盾

$$\hookrightarrow (\because A \cdot B \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} = E \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} \neq 0) \quad \#$$

回顾

Pf 2: $\because \text{rank}(AB) = \text{rank}(E) = m$

又 $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(B) \leq m$

\therefore 上述不等式中 " \leq " 取 " $=$ "

$\Rightarrow \text{rank}(B) = m$

$\therefore B$ 的列秩 $= \text{rank}(B) = m$

i.e. $\{\beta_i\}$ 极大线性无关组的向量个数为 m

$\therefore \{\beta_i\}$ 线性无关

#

$$11. \text{ 设向量 } \xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}, \xi_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(1) 试证: ξ_1, ξ_2 线性无关

Pf. 略

(2) 试向量组中包含 ξ_1, ξ_2 的极大线性无关组.

解: 1. 考察 ξ_1, ξ_2, ξ_3 能否构成线性无关组.

i.e. 考察 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3 = 0$ 是否有非零解.

$$\text{可得 } 3\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 = 0$$

$\therefore \xi_3$ 可被 ξ_1, ξ_2 线性表示

2. 考察 $\xi_1, \xi_2, \xi_4 \dots$

$$\text{rank} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \right) = 3 = n$$

$\therefore \xi_1, \xi_2, \xi_4$ 线性无关.

3. 考察 $\xi_1, \xi_2, \xi_4, \xi_5 \dots$

$$\text{rank} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix} \right) = 3 < 4 = n$$

$\therefore \xi_5$ 可被 ξ_1, ξ_2, ξ_4 线性表示, (同样, ξ_4 可被 ξ_1, ξ_2, ξ_5 线性表示.)

4. 考察 $\xi_1, \xi_2, \xi_5 \dots$

$$\text{rank} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix} \right) = 3 = n$$

$\therefore \xi_1, \xi_2, \xi_5$ 线性无关

综上所述, $\{\xi_1, \xi_2, \xi_4\}$ 与 $\{\xi_1, \xi_2, \xi_5\}$ 为

包含 $\{\xi_1, \xi_2\}$ 的极大线性无关组

并

13. 求证：若向量组(I)可由向量组(II)线性表示，

则向量组(I)的秩不超过向量组(II)的秩

回顾 Thm 5.2 Pf. 分别取向量组(I)和向量组(II)的某个极大线性无关组
 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ 和 $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$

即证 $n \leq m$

反证，假设 $n > m$.

(I) 可由 (II) 线性

$\Leftrightarrow \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ 可由 $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ 线性表示

$$\Leftrightarrow \exists a_{ij} \text{ s.t. } \alpha_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \beta_i \quad j=1, \dots, m$$

$$\Leftrightarrow \exists n \times m \text{ 矩阵 } A_{n \times m} \text{ s.t. } (\alpha_1, \dots, \alpha_m) = (\beta_1, \dots, \beta_n) \cdot A_{n \times m}$$

齐次方程 $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} = 0$

$$(\beta_1, \dots, \beta_n) A_{n \times m} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} = 0$$

由 $m > n$ 得， $A_{n \times m} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} = 0$ 有非零解

$\therefore \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ 线性相关

与 “ $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ 为线性无关组” 矛盾 并

14 设 A, B 均为 $m \times n$ 矩阵

求证 $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$

Pf. 以列向量表示矩阵

$$A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad B = (\beta_1, \dots, \beta_n)$$

记 $r_A = \text{rank}(A), \quad r_B = \text{rank}(B)$

由“列秩=秩”得不妨取极大线性无关组

$$\{\alpha'_1, \dots, \alpha'_{r_A}\} \text{ 和 } \{\beta'_1, \dots, \beta'_{r_B}\}$$

我们可证

Claim: $A+B$ 的列向量 $\{\alpha_i + \beta_j \mid i=1, \dots, r_A, j=1, \dots, r_B\}$

可由 $\{\alpha'_i + \beta'_j \mid i=1, \dots, r_A, j=1, \dots, r_B\}$ 线性表示,

(仅证 $\alpha_i + \beta_j$ 可由 ...)

$$\begin{aligned} \text{只需证 } \exists k_{ij} \text{ s.t. } \alpha_i + \beta_j &= \sum_{i=1 \dots r_A, j=1 \dots r_B} k_{ij} (\alpha'_i + \beta'_j) \\ &= \sum_i (\sum_j k_{ij}) \alpha'_i + \sum_j (\sum_i k_{ij}) \beta'_j \end{aligned}$$

$$\text{可证 } \exists k_{ij} \text{ s.t. } \begin{cases} \sum_j (\sum_i k_{ij}) \cdot \alpha'_i = \alpha_i \\ \sum_i (\sum_j k_{ij}) \beta'_j = \beta_j \end{cases}$$

由 $\{\alpha'_i\}, \{\beta'_j\}$ 极大 ... 得

$$\exists a_i, b_j \text{ s.t. } \begin{cases} \sum_i a_i \alpha'_i = \alpha_i \\ \sum_j b_j \beta'_j = \beta_j \end{cases}$$

$$\text{考察方程 } \begin{cases} \sum_j k_{ij} = a_i \\ \sum_i k_{ij} = b_j \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \hline 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \hline \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \hline 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} k_{11} \\ \hline k_{1r_B} \\ \hline k_{21} \\ \hline k_{2r_B} \\ \vdots \\ \hline k_{r_A1} \\ \hline k_{r_Ar_B} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} a_1 \\ \hline a_{r_A} \\ \hline b_1 \\ \hline b_{r_B} \end{array} \right)$$

可见未知量 k_{ij} 个数 $= r_A \times r_B$

$$\geq r_A + r_B = \text{方程数}$$

\therefore 存在不全为零 $k_{ij} \dots$

\therefore Claim 得证 \checkmark

这里排除 (\because 更易证略)

- $r_A = 1 \& r_B = 1$
- $r_A = 1 \& r_B = 2$
- $r_A = 2 \& r_B = 1$

由 Claim 得 $r(A+B) \leq \text{rank}(\{\alpha'_i + \beta'_j\})$

$$\leq \text{rank}(\{\alpha'_1, \dots, \alpha'_{r_A}, \beta'_1, \dots, \beta'_{r_B}\})$$

($\because \{\alpha'_i + \beta'_j\}_{i,j}$ 由 $\{\alpha'_i, \beta'_j\}_{i,j}$ 线性表示)

$$\leq r_A + r_B \quad (\text{秩不大于个数})$$

#

17 设 A 为 $n \times n$ 矩阵 & $A^2 = A$

求证: $r(A) + r(A-E) = n$

Rank: $A(A-E) = 0$

$\Rightarrow A=0$ or $A-E=0$

$$\text{e.g. } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Idea: 考虑齐次线性映射 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

记 $\text{Ker } f = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$ (Ker for kernel)

$\text{Im } f = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ (Im for image)

可得 $\begin{cases} \text{rank}(f) = \dim \text{Im } f \\ \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^n = n \end{cases}$

代入 $f = A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

即只要证 $\dim \text{Im}(A-E) = r(A-E) = \dim \text{Ker } A$ 即可

Pf. 记 $r = r(A)$, $r' = r(A-E)$

由列秩=秩, 可取 A 和 $A-E$ 中的极大线性无关组

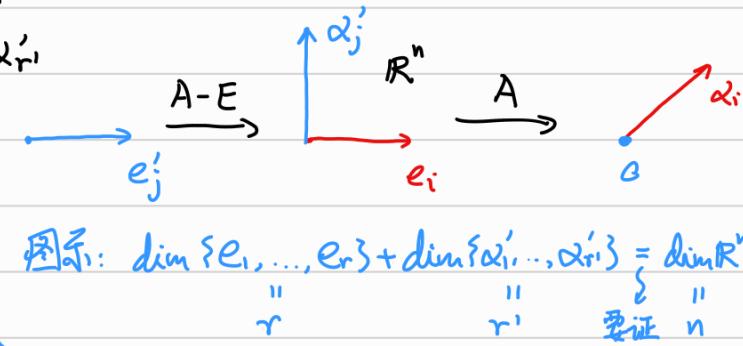
不妨记为 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$

和 $\alpha'_1, \dots, \alpha'_{r'}$

技巧: 通过 $Ae_i = \alpha_i$

将 A 列向量的极大线性无关组

转化为 $\text{Im } A$ 的一个极大...



要证 $r + r' = n$

只需证 $\{e_1, \dots, e_r, \alpha'_1, \dots, \alpha'_{r'}\}$ 为 \mathbb{R}^n 的极大线性无关组

① 线性无关, 不全为零

反证 $\exists k_i, k_j' \text{ s.t. } \sum k_i e_i + \sum k_j' \alpha_j' = 0$

由 $A(\sum k_i e_i + \sum k_j' \alpha_j')$

$= \sum k_i A e_i + \sum k_j' A \alpha_j'$

$= \sum k_i A e_i + \sum k_j' \underbrace{A(A-E)}_{=0} e_j'$

$= \sum k_i \alpha_i$

得与 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性无关矛盾 \checkmark

② 极大

$$\text{由 } \forall \beta \in \mathbb{R}^n \text{ 可表示为 } \beta = \sum_{i=1}^r k_i e_i + \sum_{j=1}^{n-r} k_j \alpha'_j$$

仅证 $\{\eta_1, \dots, \eta_{n-r}\}$ 与 $\{\alpha'_1, \dots, \alpha'_{n-r}\}$ 互相线性表示.

(2.1) $\alpha'_j \Rightarrow$ 由 $\{\eta\}$ 线性表示:

$$\text{由 } A\alpha'_j = A(A-E)e'_j = (A^2 - A)e'_j = 0 \quad \text{Im}$$

α'_j 为 $Ax=0$ 的解 $\checkmark 0 = A\eta = ? + E\eta$

(2.2) $\eta \Rightarrow$ 由 $\{\alpha'\}$ 线性表示 $(A-E)\eta = ?$

$$\text{记 } \eta = k_1 e'_1 + \dots + k_r e'_r + k_{r+1} e'_{r+1} + \dots + k_n e'_n, \text{ 其中 } \begin{cases} Ae'_i = \alpha'_i, i=1, \dots, r \\ Ae'_i = 0, i=r+1, \dots, n \end{cases}$$

$$\text{由 } (A-E)(-\eta) = -A\eta + E\eta = \eta \text{ 得}$$

$$\eta = (A-E)(-\sum_{j=1}^r k_j e'_j - \sum_{l=r+1}^n k_l e'_l) = -\sum_j k_j (A-E)e'_j$$

$$= -\sum_j k_j \alpha'_j \quad \checkmark$$

综上所述 $\{e_1, \dots, e_r, \alpha'_1, \dots, \alpha'_{n-r}\}$ 为 \mathbb{R}^n 的一个极大线性无关组

$$\Rightarrow r+r' = n$$

$$\text{i.e. } r(A) + r(A-E) = n$$

#

预备命题

Prop 1: 记 $\text{Ker } A = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = 0\}$

$$\text{Pf: } \dim \text{Ker}(AB) \leq \dim \text{Ker } A + \dim \text{Ker } B$$

Pf: 记 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 为 $\text{Ker } A$ 的一组极大线性无关组

$$\beta_1, \dots, \beta_t \in \text{Ker } B$$

$$\because \text{Ker}(AB) = \{a_1\alpha_1 + \dots + a_s\alpha_s + b_1\beta_1 + \dots + b_t\beta_t \mid a_i, b_j \in \mathbb{R}\}$$

$$\therefore \dim \text{Ker}(AB) \leq s+t$$

$$= \dim \text{Ker } A + \dim \text{Ker } B$$

#

Prop 2: 记 $\text{Im } A = \{AX \mid X \in \mathbb{R}^n\}$

$$\text{Pf: } \dim \text{Im}(A+B) \leq \dim \text{Im } A + \dim \text{Im } B$$

Pf: 记 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 为 $\text{Im } A$ 的极大线性无关组

$$\beta_1, \dots, \beta_t \in \text{Im } B$$

$$\because \text{Im}(A+B) \subseteq \{a_1\alpha_1 + \dots + a_s\alpha_s + b_1\beta_1 + \dots + b_t\beta_t \mid a_i, b_j \in \mathbb{R}\}$$

$$\therefore \dim \text{Im}(A+B) \leq s+t$$

$$= \dim \text{Im } A + \dim \text{Im } B$$

#

17的其他证法

Pf 2: 由 Prop 1 得：

$$\begin{aligned}\dim \text{Ker } A(A-E) &\leq \dim \text{Ker } A + \dim \text{Ker } (A-E) \\ n - \overset{\parallel}{r}(A(A-E)) &\quad \overset{\parallel}{n} - r(A) \quad \overset{\parallel}{n} - r(A-E) \\ &= n - r(0) = n \\ \Rightarrow n &\leq (n - r(A)) + (n - r(A-E)) \\ \Rightarrow r(A) + r(A-E) &\leq n\end{aligned}$$

由 Prop 2 得

$$\begin{aligned}\dim \text{Im } ((E-A)+A) &\leq \dim \text{Im } (E-A) + \dim \text{Im } A \\ = \dim \text{Im } E &= n \quad \overset{\parallel}{r}(E-A) = r(A-E) \quad \overset{\parallel}{r}(A)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow n \leq r(A-E) + r(A)$$

综上所述, $r(A-E) + r(A) = n$

#

Pf 3. 考虑分块矩阵 $\begin{pmatrix} A & E \\ & A-E \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_2 - (A-E)r_1}$ $\begin{pmatrix} A & E \\ -(A-E)A & A-E - (A-E) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} A & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\because A(A-E)=0)$

$\therefore r(A) + r(A-E) = r(\begin{pmatrix} A & E \\ & A-E \end{pmatrix})$
 $= r(\begin{pmatrix} A & E \\ & 0 \end{pmatrix})$
 $= r(E) = n$

#

18. 取 $\eta_1, \dots, \eta_{n-r}$ 为 $Ax=0$ 的一个基础解系

求证：对任意 $\{\gamma_1, \dots, \gamma_{n-r}\} \sim \{\eta_1, \dots, \eta_{n-r}\}$

有 $\{\gamma_1, \dots, \gamma_{n-r}\}$ 也是 $Ax=0$ 的基础解系

Pf. 通过基础解系的定义，仅须验证

① $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-r}$ 线性无关

反证假设 $\{\gamma_i\}$ 线性相关

由 $\{\eta_j\}$ 可由 $\{\gamma_i\}$ 线性表示得

$$\exists a_{ij} \text{ s.t. } \eta_j = \sum a_{ij} \gamma_i \quad \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_{n-r} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\gamma_1, \dots, \gamma_{n-r}) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_{n-r} \end{pmatrix} = 0$$

由假设 $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-r}$ 线性相关得

$$\exists \text{ 不全为零 } l_1, \dots, l_{n-r} \text{ s.t. } (\gamma_1, \dots, \gamma_{n-r}) \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_{n-r} \end{pmatrix} = 0$$

$$\therefore \{\gamma_i\} \sim \{\eta_j\}$$

∴ 过渡矩阵 A 可逆

$$\therefore \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_{n-r} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_{n-r} \end{pmatrix} \neq 0$$

∴ $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-r}$ 线性无关 ✓

② $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-r}$ 极大

由 $\{\eta_j\}$ 为 $Ax=0$ 的基础解系得

$$\forall \text{ 解 } \eta \exists k_j \text{ s.t. } \eta = (\eta_1, \dots, \eta_{n-r}) \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_{n-r} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \eta = (\gamma_1, \dots, \gamma_{n-r}) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_{n-r} \end{pmatrix}$$

$$= (\gamma_1, \dots, \gamma_{n-r}) \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_{n-r} \end{pmatrix} \quad \text{where } \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

#

19 求通解

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -3 \\ 5 & 10 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

解 $A \xrightarrow{\frac{r_2-3r_1}{r_3-5r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -4 & & & \\ -4 & & & \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{4}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & & & \end{pmatrix}$

可取 x_2, x_4 为自由未知量

不妨取 (x_2, x_4) 上一组基 $(1, 0), (0, 1)$

得 (x_1, x_3) 上的对应 $(-2, 0), (1, 0)$

$$\Rightarrow \text{基础通解 } \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 和 } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{通解 } \eta = k_1 \eta_1 + k_2 \eta_2 \text{ where } k_1, k_2 \in \mathbb{R} \quad \#$$

22

对线性方程

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & p & 7 & -1 \\ 1 & -1 & -6 & -1 & t \end{array} \right)$$

讨论参数 p, t 取何值时，方程有解 / 无解。
有解时，求通解。

解：对方增矩阵阶梯化。

$$A \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & p+6 & -2 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & -4 & t & t \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ p+8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t+2 & & & \end{array} \right)$$

• $t \neq -2$ 时无解• $t = 2$ 时有解

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

取 x_3, x_4 为自由未知量，取 (x_3, x_4) 一组基 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\text{得基础解系 } \eta_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{取 } (x_3, x_4) = (0, 0) \text{ 得特解 } \gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{得通解 } \eta = \gamma_0 + k_1 \eta_1 + k_2 \eta_2$$

$$\bullet p \neq -8 \text{ 时. } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ p+8 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

取 x_4 为自由未知量，取 x_4 一组基 1

$$\text{得基础解系 } \eta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{取 } x_4 = 0 \text{ 得特解 } \gamma_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{得通解 } \eta = \gamma_0 + k_1 \eta_1 \dots$$

#

24 求证: 对 $n \times n$ 矩阵 A ,

$$AX = b \text{ 对任意 } b \text{ 有解} \\ \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

Pf. $\Leftarrow |A| \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ 存在

\therefore 有解 $X = A^{-1}b$

\Rightarrow 反证假设 $|A| = 0$

取 A 的列向量有极大线性无关组 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$

由 A 的秩 $r < n$ 得

$\exists b \in \mathbb{R}^n$ 与 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ 线性无关

如果 x_0 是 $AX = b$ 的解.

记 $x_0 = k_1 e_1 + \dots + k_r e_r + k_{r+1} e_{r+1} + \dots + k_n e_n$

$b = Ax_0 = A(\sum k_i e_i) = \sum k_i A e_i = \sum k_i \alpha_i$ 可由 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ 线性表示.

\therefore 与 " b 与 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ 线性无关" 矛盾

#

27 方程 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & & a_1 \\ 1 & -1 & & a_2 \\ 1 & -1 & & a_3 \\ 1 & -1 & & a_4 \\ -1 & & 1 & a_5 \end{pmatrix}$

1) 求证：方程有解 $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^5 a_i = 0$

Pf. 阶梯化 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & & a_1 \\ 1 & -1 & & a_2 \\ 1 & -1 & & a_3 \\ 1 & -1 & & a_4 \\ 0 & & 1 & \sum_i a_i \end{pmatrix}$

\therefore 有解 $\Leftrightarrow \sum_i a_i = 0$

2) 求：有解情况下的一般解

解：取 x_5 为自由未知量，取基1得基础解 $\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
 取 $x_5 = 0$ 得特解 $\gamma_0 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ a_2 + a_3 + a_4 \\ a_3 + a_4 \\ a_4 \\ 0 \end{pmatrix}$

得通解 $\gamma = \gamma_0 + k_1 \eta_1$ #

28 设 η_1, \dots, η_t 是 $AX = b$ 的解

求证： $k_1 \eta_1 + \dots + k_t \eta_t$ 也是 $AX = b$ 的解

$$\Leftrightarrow k_1 + \dots + k_t = 1$$

Pf. $A(k_1 \eta_1 + \dots + k_t \eta_t)$

$$= k_1 A\eta_1 + \dots + k_t A\eta_t = k_1 b + \dots + k_t b$$

$$\therefore A(k_1 \eta_1 + \dots + k_t \eta_t) = b$$

$$\Leftrightarrow k_1 + \dots + k_t = 1$$

#