Ch 4. 线性方程组

钟友良

zhongyl@scut.edu.cn

Outline

Outline

动机

- 解的存在性
- 解的数量
  - 唯一性
  - 无穷之间的区别

$$\underbrace{A}_{m\times n}\underbrace{x}_{n\times 1}=\underbrace{b}_{m\times 1}.$$

解的个数

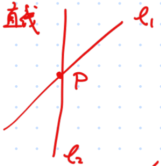
存在： $\overset{?}{=}0$

唯一： $\overset{?}{=}1$

$$\left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{不存在} \\ 1 & \text{存在 \& 唯一} \\ \infty & \text{存在 \& 不唯一.} \end{array}\right.$$

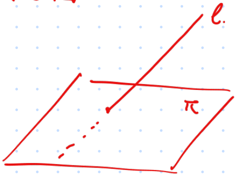
$$\lim_{n\to\infty} n^1 \ne \lim_{n\to\infty} n^2$$

直线 vs 直线



$\left\{\begin{array}{l} \ell_1: \dots \\ \ell_2: \dots \end{array}\right.$

直线 vs 平面



$\left\{\begin{array}{l} \pi \\ \ell. \end{array}\right.$

Outline

线性方程组

考虑线性方程组

方程 $f(x) = b$

方程组 $\begin{cases} f_1(x) = b_1 \\ \vdots \\ f_m(x) = b_m \end{cases}$

线性方程组 = 线性 + 方程组

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n & = b_1 \\ & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,n}x_n & = b_n \end{cases}$$

- 未知数 x_j
- 系数 $a_{i,j}$
- 常数项 b_i
  - 齐次 $b_i = 0 \quad \forall i$
  - 非齐次

方程的解

- 方程的 解
- 方程的 解的集合
- 方程称为 相容的 如果方程有解.

同解方程组

定义 1.1
如果两个方程组的解的集合相等，那么称这两个方程组 同解.

方程组的矩阵表示

记方程组为

$$Ax = b.$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

- 系数矩阵 A
- 增广矩阵 $\tilde{A} = (A, b)$

回顾消元法

例题 1.1

解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ & 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ & 2 & -1 & 4 \\ & 4 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 - 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ & 2 & -1 & 4 \\ & & 1 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{2}r_2]{\frac{1}{2}r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ & 1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ & & 1 & -6 \end{array}\right)$$

线性方程组的初等变换

例题 1.1 中我们进行了一下三种操作 (称为线性方程组的 初等变换):

- 交换行
- 数乘行
- 行加行

Q: 为什么对方程组进行初等变换是合理的? (性质 1.1)

初等变换不改变方程组的解

性质 1.1

初等变换后的方程组与原方程组同解.

证明

分别验证三种初等变换均不改变方程组的解.

① 交换行.

② 数乘行.

③ 行加行.

前 $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 后 $\begin{pmatrix} a_{11}+a_{21} & \cdots & a_{1n}+a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$

要证 前后同解 $\Leftrightarrow$ 前解的集合 $=$ 后解的集合.

① $\supseteq$: 验证 $\forall$ 后解 被前解的集合包含

② $\subseteq$

初等变换下改变方程组的解

定理 1.1

记 $\tilde{B}$ 为增广矩阵 $\tilde{A}$ 初等变换后的增广矩阵. 那么 $\tilde{A}$ 与 $\tilde{B}$ 分别对应的方程组同解.

例题 1.2

例题 1.2

解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 & = 0, \\ x_1 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 & = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 & = 4, \end{cases}$$

例题 1.2 解

将方程组表为增广矩阵

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 6 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

通过初等行变换可得

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例题 1.2 解

自由度 3.

$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

方程组的一般解

$$\begin{cases} x_1 & = -2\overset{R}{x_3} - 2\overset{R}{x_4} - 6\overset{R.}{x_5} + 6 \\ x_2 & = x_3 + x_4 + 5x_5 - 4 \end{cases}$$

其中, x_3, x_4, x_5 可取任意数, 因此被称为 自由 未知量.

l 的参数方程: $P = P_0 + \vec{v} \cdot t$

例题 1.3

例题 1.3

解方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 & = -1, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 & = 5, \\ 3x_1 + 6x_2 - 10x_3 & = 3 \end{cases}$$

例题 1.3 解

考虑增广矩阵

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 & 5 \\ 3 & 6 & -10 & 3 \end{pmatrix}$$

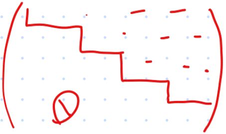
通过初等行变换可得

$$\tilde{B} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$0 = 1$

消元法

回顾



定理 3.1 (Ch2)

任意矩阵可通过有限次初等行变换化为阶梯形矩阵.

对增广矩阵 $\tilde{A} = (A, b)$ 中的 A 进行阶梯化. 考虑

$$\tilde{A} = (A, b) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} & b_n \end{pmatrix}$$

消元法结果

假设首列元素不为零，记 $r = \mathrm{rank}(A)$，那么 $\tilde{A}$ 可化为阶梯形矩阵

$$\begin{cases} rk(\tilde{A}) = r+1 \\ rk(A) = r. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a_{1,j_1} & & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ 0 & \cdots & a_{2,j_2} & & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & a_{r,j_r} \;\; \cdots & a_{r,n} & b_r \\ 0 & & & \cdots & & 0 & b_{r+1} \end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} r \\ \\ \end{array}$$

可见

- 解存在 $\Leftrightarrow b_{r+1} = 0$
- 解唯一 $\Leftrightarrow r = n$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & - & - & - & b_1 \\ & a_{22} & - & - & b_2 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} & b_{n-1} \\ & & & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

解的唯一性

$$A_{r\times r}\cdot X_r + A_{r\times(n-r)}\cdot X_{n-r} = B_r$$

$$\Rightarrow A_{r\times r}\cdot X_r = \underbrace{\boxed{B_r - A_{r\times(n-r)}\cdot X_{n-r}}}_{=C_r}$$

将增广矩阵为

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc|c}
a_{1,1} & & \cdots & a_{1,r} & a_{1,r+1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\
 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,r} & a_{2,r+1} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\
 & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & & & a_{r,r} & a_{r,r+1} & \cdots & a_{r,n} & b_r
\end{array}\right)$$

$$r\times r \qquad\qquad r\times(n-r) \qquad\qquad r\times 1$$

的方程组记为

$$\begin{pmatrix} A_{r\times r} & A_{r\times(n-r)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_r \\ X_{n-r} \end{pmatrix} = B_r.$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ \hline x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

X_{n-r} 中的未知量被称为 自由未知量.

解的存在性 vs 秩

定理 1.2

方程 $Ax = b$ 有解的充要条件是：系数矩阵 A 的秩等于增广矩阵 $\tilde{A}$ 的秩, i.e.

$$r(A) = r(\tilde{A}).$$

$$r(\tilde{A}) = \begin{cases} r(A) \\ r(A)+1 \end{cases}$$

$r(\tilde{A}) \neq r(A)$

$\Leftrightarrow r(\tilde{A}) = r(A)+1$

$\Leftrightarrow b_{r+1} \neq 0$

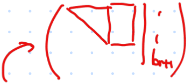
$\Leftrightarrow$ 无解

解的数量 vs 秩

定理 1.3

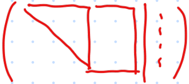
方程 $Ax = b$ 解的数量为

- 0 $\Leftrightarrow r(\tilde{A}) \neq r(A)$ (i.e. $r(\tilde{A}) = r(A) + 1$)



- 1 $\Leftrightarrow r(\tilde{A}) = r(A) = n$

- $\infty \Leftrightarrow r(\tilde{A}) = r(A) < n$



齐次情形

定理 1.4

齐次方程 $Ax = 0$ 有非零解, 当且仅当,

$Ax=0$ 总有 $x=0$ 解.

$$r(A) < n.$$

$\Rightarrow$ $Ax=0$ 有非零解

$\Leftrightarrow$ $Ax=0$ 的解唯一

推论 1.1

推论 1.1

对于齐次方程组

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n & = 0 \\ & \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n & = 0 \end{cases}$$

有非零解, 如果 $m < n$.

$rk(A) \leq \min\{m, n\}$

if $m < n$

then $rk(A) \leq m < n$.

推论 1.2

推论 1.2

对于齐次方程组

$$
\begin{cases}
a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n & = 0 \\
 & \vdots \\
a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n & = 0
\end{cases}
$$

有非零解, 当且仅当, $|A| = 0$.

$|A| = 0$

$\Longleftrightarrow$ $r(A) < \min\{m, n\}$

推论1.1 $\Longleftrightarrow$ $Ax = 0$ 有非零解.

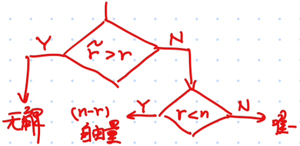
思考题

Q: 如果方程数大于变量数, 那么解的情况如何?

$\tilde{A}_1 \quad \left(1, 1 \,\middle|\, 1\right)$ $\qquad rk(\tilde{A}_1) = rk(\tilde{A}_2)$

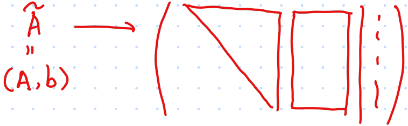
$$\tilde{A}_2 \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

求解步骤



求解 $Ax = b$ 的步骤:

1. 记 $\tilde{A} = (A, b)$
2. 通过初等行变化 换, 化 $\tilde{A}$ 为阶梯形矩阵. 得 $\tilde{r} = r(\tilde{A})$ 和 $r = r(A)$.
3. 如果 $\tilde{r} > r$, 那么无解, 结束; 否则 $(\tilde{r} = r)$, 有解, 继续.
4. 选取 $n - r$ 个自由未知量, 移至方程右侧, 得到 $A'X' = b' - A''X''$
5. 求解剩余 r 个未知量



例题 1.4

例题 1.4

解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 4x_3 - 2x_4 & = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 9x_3 - 5x_4 & = 2 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 & = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 5x_4 & = -2 \end{cases}$$

例题 1.4 思考题

Q: 例题 1.4 中 x_1 或 x_2 可以作为自由未知量吗?

$$\tilde{A} = (a_1\ a_2 \mid b) \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad a_2x_2 = b - a_1x_1 \qquad \tilde{A}' = (a_2\ a_1 \mid b) \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix}$$

Check:

$$\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} x_r & x_{r+1} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & 0 & b_1 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & \\ & & 1 & 1 & b_r \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & \cdots \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = b_1 \\ \vdots \\ x_{r-1} = b_{r-1} \\ x_r = b_r - x_{r+1} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{A_{11}} & & & 0 & b_1 \\ & \boxed{A_{22}} & & & b_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \boxed{A_{rr}} & b_r \end{array}\right)$$

例题 1.5

例题 1.5

解齐次方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 + x_5 &= 0 \\ x_2 + x_3 + 6x_4 - 10x_5 &= 0 \\ 3x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 39x_4 + 43x_5 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 9x_3 + 8x_4 - 28x_5 &= 0 \end{cases}$$

Outline

n 维向量

定义 2.1

一个数域 F 上 n 维向量是 F 上的 n 个数 $a_1, \ldots, a_n$ 组成的 n 元有序数组

$$(a_1, \ldots, a_n) \text{ 或 } \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

其中 a_i 称为该向量的第 i 个分量.

定义 2.2

称 $(a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_n)$, 如果

$$a_i = b_i, \qquad \forall i = 1, \ldots, n.$$

行向量与列向量

- 行向量: 写成行形式的向量
- 列向量: 写成列形式的向量

行向量与列向量可以分别看作 $1 \times n$ 与 $n \times 1$ 矩阵.

约定:

- 本章中, F^n 的向量记为行向量形式.
- 用希腊字母 α, β, γ 表示向量

向量运算

- 加, 减 $\alpha \pm \beta$:

$$(a_1, \ldots, a_n) \pm (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 \pm b_1, \ldots, a_n \pm b_n)$$

- 数乘 $k\alpha$ 或 αk:

$$\begin{aligned} & k \cdot (a_1, \ldots, a_n) \\ = & (ka_1, \ldots, ka_n) \end{aligned}$$

数域的 n 维向量空间

定义 2.6

$(F^n; +, \cdot)$ 构成 F 上的 n 维向量空间, 如果满足:

- $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
- $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
- $\alpha + 0 = \alpha$
- $\alpha + (-\alpha) = 0$
- $1 \cdot \alpha = \alpha$
- $k(l\alpha) = (kl)\alpha$
- $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$
- $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$

e.g. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$

Outline

简单例子

- 共线

$$\mathbf{a} = k_1 \mathbf{a}_1.$$

- 共面

$$\mathbf{a} = k_1 \mathbf{a}_1 + k_2 \mathbf{a}_2.$$

- 一般 $(n+1)$ 个向量落在 n 线性子空间

$$\vec{a} = k_1\vec{a}_1 + \cdots\cdots + k_n\vec{a}_n$$

$$\Updownarrow$$

$$k_1\vec{a}_1 + \cdots + k_n\vec{a}_n - \vec{a} = 0$$

线性表示

定义 3.1

我们称 $\mathbf{a}$ 是 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ 的 线性组合 (等价地, $\mathbf{a}$ 可由 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ 线性表示), 如果存在 $k_1, \ldots, k_m$, s.t.

$$\mathbf{a} = k_1\mathbf{a}_1 + \cdots + k_m\mathbf{a}_m.$$

e.g. 取 n 维单位向量 $\mathbf{e}_i = (0, \ldots, 0, \overset{ith}{1}, 0, \ldots, 0)$, 则对任意 $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, 有

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n.$$

可见 F^n 中的任意向量均可由 n 维单位向量线性表示.

e.g. 零向量 $\mathbf{0}$ 是任意向量组的线性组合.

例题 3.1

例题 3.1

求证 $a=(-1,1,5)$ 是 $a_1=(1,2,3)$, $a_2=(0,1,4)$, $a_3=(2,3,6)$ 的线性组合

“判别能否线性表示” 等价于 “判别方程组是否有解”

$\vec{a}$ 可由 $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ 线性表示

$\Leftrightarrow \exists k_i$

s.t. $k_1\vec{a_1}+k_2\vec{a_2}+k_3\vec{a_3}=\vec{a}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

线性表出

定义 3.2 (向量组的线性表示)

向量组 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_t\}$ 可由向量组 $\{\beta_1, \ldots, \beta_s\}$ 线性表示, 如果任一 α_i 均可由 $\{\beta_1, \ldots, \beta_s\}$ 线性表示.

定义 3.2 (向量组的线性表示)

称两个向量组等价, 如果它们可以互相线性表示.

$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_t\}$ 被 $\{\beta_1, \ldots, \beta_s\}$ 线性表示

$\Rightarrow$ $\{\beta_1 \ldots \beta_s\}$ . . $\{\alpha_1, \ldots \alpha_s\}$