数学期望的运算性质

性质 1：任意常数 c 的数学期望等于 c

证明：随机变量 X 服从

$$P(X) = \begin{cases} 1, & X = c \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

所以其期望就是

$$E[X] = c \times 1 + 0 = c$$

数学期望的运算性质

性质 2 (线性): 设随机变量 X 和 Y 的期望都存在, a, b 都是常数, 那么

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$$

数学期望的运算性质

证明：只对连续型的随机变量证明。
先证明随机变量 $Z = aX + bY$ 的期望存在。假设 X, Y 的联合密度函数为 $f_{X,Y}(x,y)$，判断下面积分的收敛性

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} ax + by f_{X,Y}(x,y)\,dxdy \\
&\le a\int_{\mathbb{R}^2} x f_{X,Y}(x,y)\,dxdy + b\int_{\mathbb{R}^2} y f_{X,Y}(x,y)\,dxdy \\
&= a\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx + b\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

数学期望的运算性质

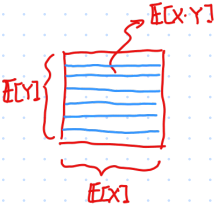
上面的式子表明 $E[Z]$ 存在，根据积分运算的线性性

$$
\begin{aligned}
E[aX+bY] &= \int_{2} (ax+by) f_{X,Y}(x,y)\,dxdy \\
&= a\int_{2} x f_{X,Y}(x,y)\,dxdy + b\int_{2} y f_{X,Y}(x,y)\,dxdy \\
&= a\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx + b\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy \\
&= aE[X] + bE[Y]
\end{aligned}
$$

数学期望的运算性质

性质 3: 若随机变量 X 与 Y 独立，且 X 与 Y 的期望都存在，那么

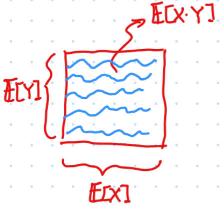
$$E[XY] = E[X]E[Y].$$



$$\int_{\mathbb{R}^2} xy \cdot f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} x\cdot y\, f_X(x)\cdot f_Y(y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\left(\int_{\mathbb{R}} y f_Y(y)\,dy\right)dx$$

$$= EX\cdot EY$$



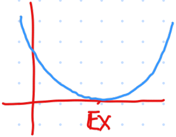
方差

随机变量的均值只能反映随机变量的平均预期，但却无法从中看出其取值的波动性大小，即随机试验的结果偏离平均值的程度。

$$Y = X - EX \Rightarrow EY = E[X-EX] = 0$$

$$Y = |X - EX| \Rightarrow E[|X-EX|]$$

$$Z = (X - EX)^2 \Rightarrow E[(X-EX)^2]$$



方差的例子

巧克力加工厂 A， B 分别包装一带巧克力的重量
$X_A \sim U[50-0.5, 50+0.5]$,
$X_B \sim U[50-1.5, 50+1.5]$，那么

$$E[X_A] = E[X_B] = 50,$$

从均值来看，这两个加工厂的包装水平是一样的，但是

$$P(X_A \in [50-1.5, 50-0.5] \cup [50+0.5, 50+1.5]) = 0$$

$$P(X_B \in [50-1.5, 50-0.5] \cup [50+0.5, 50+1.5]) = \frac{2}{103}$$

方差的定义

我们用 方差 来描述一个随机变量的波动性。

变量 X $E[X]$ $Var[X]=E[(X-EX)^2]$ $\sigma[X]=\sqrt{Var[X]}$

单位 两 两 两^2 两

定义 1.4.3: 设随机变量 X 有有限的数学期望，如果 $E[(X-E[X])^2]<\infty$，则称

$$Var[X]=E[(X-E[X])^2]$$

为 X 的 方差 ，而称 $\sqrt{Var[X]}$ 为 X 的 标准差 ，记为 $\sigma[X]$.

方差的计算

- 对于离散型的随机变量:

$$Var[X] = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - E[X])^2 p_i$$

- 对于连续型的随机变量:

$$Var[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f_X(x) dx$$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$\|$ $\|$

$E[(X-EX)^2]$

$= E[X^2 - 2\cdot X \cdot EX + EX^2] = EX - 2\cdot EX \cdot EX + EX^2$

例 4.1.9

$X \sim B(\cancel{1}\,n, p)$ 有 $Var[X] = p(1-p)$

$P(X=k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

$E[X] = n \cdot p$

$E[X^2] = \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot P(X=k)$

$= \sum_{k=0}^{n} k^2 \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

$= \sum_{k=1} k^2 \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

$= \sum_{k=1} k \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$

$= \sum_{k=1} ((k-1)+1) \frac{\cdots}{(k-1)!\cdots} \cdots$

$= \sum_{k=1} (k-1) \frac{\cdots}{(k-1)!\cdots} + \sum_{k=1} \frac{\cdots}{(k-1)!\cdots} \cdots$

$= \sum_{k=2} \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} \times p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

$+ \sum_{k=1} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

$= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!((n-2)-(k-2))!} p^{k-2} (1-p)^{n-2-(k-2)}$

$+ n \cdot p \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-1-(k-1)}$

$= n(n-1)p^2 + np$

$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$

$= n(n-1)p^2 + np - (np)^2$

$= np(1-p)$ #

例 4.1.10

$X \sim U[a,b]$ 有 $Var[X] = \frac{1}{12}(b-a)^2$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2}(b+a)$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_X(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx$$

$$= \frac{1}{3(b-a)} x^3 \Big|_a^b$$

$$= \frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)$$

$$Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

$$= \frac{1}{3}(a^2+ab+b^2) - \left(\frac{1}{2}(b+a)\right)^2$$

$$= \frac{1}{12}(4a^2+4ab+4b^2-3b^2-6ab-3a^2)$$

$$= \frac{1}{12}(a-b)^2$$

$$Var[X] = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}X)^2]$$

$$X \sim U[a,b]$$

$$Y = X - \underset{\frac{1}{2}(b+a)}{\underset{\parallel}{\mathbb{E}X}} \sim \underset{U[-c,c]}{\underset{\parallel}{U\left[-\frac{b-a}{2}, \frac{b-a}{2}\right]}}$$

例 4.1.11

$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ 有 $Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx$$

$$= \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}\int_0^{+\infty} (\lambda x)^2 e^{-\lambda x}\,d(\lambda x)$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}\int_0^{+\infty} y^{3-1} e^{-y}\,dy$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}\Gamma(3) \qquad \left(\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} \cdot e^{-y}\,dy \right.$$

$$= \frac{2}{\lambda^2}. \qquad \Gamma(n+1) = n!$$

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \qquad \#$$

例 4.1.12

$X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$ 有 $Var[X] = \lambda$

$P(X=k) = \frac{1}{k!}\lambda^k \cdot e^{-\lambda}$

$\mathbb{E}[X] = \lambda$

$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \frac{1}{k!}\lambda^k \cdot e^{-\lambda}$

$= e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=1} k \frac{1}{(k-1)!}\lambda^k$

$= e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=1} ((k-1)+1) \frac{1}{(k-1)!}\lambda^k$

$= e^{-\lambda}\left(\sum_{k=1} (k-1)\frac{1}{(k-1)!}\lambda^k + \sum_{1} \frac{1}{(k-1)!}\lambda^k\right)$

$= e^{-\lambda}\left(\sum_{2} \frac{1}{(k-2)!}\lambda^k + \sum_{1} \frac{1}{(k-1)!}\lambda^k\right)$

$= e^{-\lambda}\left(\lambda^2 \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!}\lambda^\ell + \lambda \cdot \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!}\lambda^\ell\right)$

$= e^{-\lambda}(\lambda^2 \cdot e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda}) = \lambda^2 + \lambda.$

$Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

$= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

\#

例

$X \sim \mathrm{Geo}(p)$ 有 $Var[X] = \frac{1-p}{p^2}$

$P(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$

$E[X] = \frac{1}{p}$

$E[X^2] = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \cdot (1-p)^{k-1} p$

$\underline{\underline{q=1-p}} \sum_{k=1} k^2 q^{k-1}(1-q)$

$= \sum_1 k^2 q^{k-1} - \sum_1 k^2 q^k$

$= 1 + \sum_{k=1} (k+1)^2 q^k - \sum_{k=1} k^2 q^k$

$= 1 + \sum_1 (2k+1) q^k$

$= 1 + 2\sum_1 k q^k + \sum_1 q^k$

$= 1 + 2\frac{1-p}{p^2} + \frac{1-p}{p} = \frac{1}{p^2}(p^2 + 2(1-p) + p(1-p)) = \frac{1}{p^2}(2-p)$

$E[X] = \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot q^{k-1} \cdot p = \frac{1}{p}$

$\sum_{k=1} k q^k = \frac{q}{p^2}$

$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$

$= \frac{1}{p^2}(2-p) - \left(\frac{1}{p}\right)^2$

$= \frac{1}{p^2}(1-p)$. #

例 4.1.13

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 有 $Var[X] = \sigma^2$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}$$

$$E[X] = \mu$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sqrt{2}\sigma \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma} + \mu\right)^2 e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} d\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sqrt{2}\sigma y + \mu)^2 \cdot e^{-y^2} dy.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int (2\sigma^2 y^2 + 2\sqrt{2}\sigma\mu \cdot y + \mu^2) e^{-y^2} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(2\sigma^2 \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} + 0 + \mu^2 \cdot \sqrt{\pi}\right)$$

$$= \sigma^2 + \mu^2$$

$$Var[X] = E[X^2] - (EX)^2 = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

$$\int e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$$

$$\int y e^{-y^2} dy = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy^2$$

(可积，只需证 $\frac{1}{e^{y^2}}$ 比 $\frac{1}{x^2}$ 趋零更快

$$\int_a^{+\infty} \left|\frac{1}{e^{y^2}}\right| dy^2 \le \int_a^{+\infty} \left|\frac{1}{x^2}\right| dx < +\infty$$)

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{0} + \int_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{+\infty}^{0} + \int_0^{+\infty} \cdots = 0$$

$$\int y^2 e^{-y^2} dy = \frac{1}{2} \int y e^{-y^2} dy^2$$

$$= -\frac{1}{2} \int y \, d e^{-y^2}$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{y}{e^{y^2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int e^{-y^2} dy \right)$$

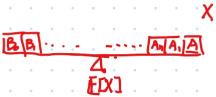
$$= \frac{1}{2} \int e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

#

矩

定义 4.1.4: 设 X 为随机变量，c 为常数，k 为正整数，如果 $E[(X-c)^k] < \infty$，那么称

$\sum P(X=x_i)\times(x_i-EX)$



$$E[(X-c)^k]$$

为 X 关于 c 的 k 阶矩。

$\int f_X(x)\cdot dx\cdot(x-EX) = E[X-EX] = 0$

- $c=0$，称 $E[X^k]$ 为 X 的 k 阶原点矩，例如均值 (1 阶原点矩)。
- $c=E[X]$，$E[(X-E[X])^k]$ 称为 X 的 k 阶中心矩

  $k=0$. $E[(X-EX)^0] = E[1] = 1$

  - $k=1$ $E[X-EX] = 0$
  - $k=2$ $E[(X-EX)^2] = Var[X]$

“标准化”随机变量

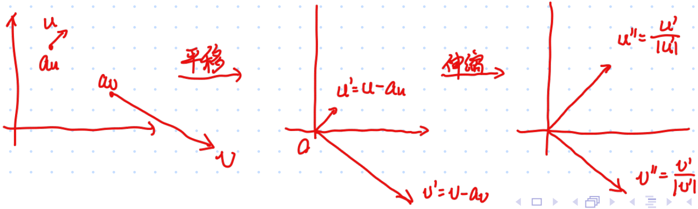
对随机变量 X，如果 $Var[X] > 0$, 我们考虑其标准化

$$\bar{X} := \frac{1}{Var[X]^{\frac{1}{2}}}(X - E[X]).$$

可见,

- $E[\bar{X}] = 0$
- $\cancel{E[\bar{X}] = 1}$ $Var[\bar{X}] = 1$

我们希望进一步刻画 $\bar{X}$ 的数字特征。



高阶矩

对于三阶和四阶中心矩，概率学上有明确的定义

定义 4.1.5: 设 X 为随机变量，如果 $E[X^4] < \infty$，则称

$$E[\bar{X}^3] = \frac{E[(X - E[X])^3]}{(Var[X])^{\frac{3}{2}}}$$

为 X 的 偏度 ，偏度刻画 X 的分布的偏斜程度。称

$$E[\bar{X}^4] = \frac{E[(X - E[X])^4]}{(Var[X])^2}$$

为 X 的 峰度 ，峰度刻画随机变量的分布在其均值附近的陡峭程度。

高阶矩

当密度函数 $f_X(x)$ 关于 $E[X]$ 对称时，偏度为零。

X s.t. $E[X]=0$, $Var[X]=1$

$f_X(-x)=f_X(x)$

$$E[(X-E[X])^3] = \int_{-\infty}^{\infty}(x-c)^3 f_X(x)dx$$

$E[X^3] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f_X(x)dx$

$= \int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{+\infty} x^3 f(x)dx$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f_X(x+c)dx$$

$= -\int_{0}^{+\infty} x^3 \cdot f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} x^3 f(x)dx = 0$

记 $g(x) = f_X(x+c)$，根据 $f_X(x+c) = f_X(c-x)$，知 $g(x) = g(-x)$，即 $g(x)$ 是偶函数，且 $E[X^3] < \infty$

$$E[(X-E[X])^3] = \left(\int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{\infty}\right)x^3 g(x)dx = 0$$

计算偏度和峰度

$X \sim U(a, b)$

$\tilde{X} = \frac{X - \mathbb{E}X}{\sqrt{\mathrm{Var}[X]}}$

$\mathbb{E}[\tilde{X}^3]$

$\mathbb{E}[\tilde{X}^4]$

计算偏度和峰度

$$Exp(\lambda)$$

计算偏度和峰度

$$N(\mu, \sigma)$$

Outline

数字特征

对于二维的随机变量 (X, Y)，假设 $E[g(X, Y)]$ 存在，那么

- 设离散型随机变量 (X, Y) 有概率分布 $P(X = x_i, Y = y_i) = p_{ij}$，$i, j = 1, 2, \cdots$，那么

$$E[g(X, Y)] = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} g(x_i, y_j)p_{ij},$$

- 设连续型随机变量 (X, Y) 有分布密度函数 $f_{X,Y}$，那么

$$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)f_{X,Y}(x, y)dxdy$$

练习

假设 (X, Y) 的联合分布列为

$$P(X=0, Y=0) = P(X=1, Y=1)$$
$$= P(X=0, Y=1) = P(X=1, Y=0) = 0.25$$

求 $E\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}(X+Y)\right)\right)$

练习

在长度为 a 的线段上任取两个点 X 与 Y，求这两个点之间的平均长度。

协方差与相关系数

定义 4.2.1: 设 (X, Y) 为二维随机向量，且 $Var[X] < \infty$， $Var[Y] < \infty$，

- 称

$Cov(X,X) = E[(X-EX)(X-EX)]$
$= E[(X-EX)^2] = Var[X]$

$$Cov(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

为 X 与 Y 的 协方差 。

- 称

$$r(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var[X]}\sqrt{Var[Y]}} = Cov(\tilde{X}, \tilde{Y})$$

为 X 与 Y 的 相关系数 。

- 若 $r(X, Y) = 0$，称 X 与 Y 不相关 。

协方差的意义

- $Cov(X,Y) > 0$，则 X 与 Y 有同增同减的倾向。
- $Cov(X,Y) < 0$，则 X 与 Y 有此消彼涨的倾向。
- $Cov(X,Y) = 0$，则要么 X 与 Y 独立，要么 X 与 Y 有某种非线性关系 (见例题 4.2.1)。

例 4.2.1

考虑 $X \sim N(0,1)$ 和 $Y = X^2$。
可见 X 与 Y 有非线性关系。
求 $Cov(X, Y)$?

$y = f(x, x^2)$

$= a_0 + \underline{a_1 x} + a_2 x^2 + \ldots$

协方差的性质

$$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$$

即

$$E[XY] = E[X]E[Y] \Leftrightarrow Cov(X,Y) = 0$$

协方差的性质

独立与相关性: X 与 Y 相互独立，那么 X 与 Y 一定不相关，反之不成立。

协方差的性质

对称性: 设随机变量 X 和 Y 的方差都存在，那么

$$Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$$

协方差的性质

双线性性: 设随机变量 X, Y 和 Z 的方差都存在, a 和 b 为常数, 那么

$$Cov(aX+bY,Z)=aCov(X,Z)+bCov(Y,Z)$$

以及

$$Cov(Z,aX+bY)=aCov(Z,X)+bCov(Z,Y)$$

方差的运算性质

性质 1: 任意常数 c 的方差为 0

$$Var[c] = E[(c - E[c])^2] = 0$$

性质 2: 若随机变量 X 与 Y 相互独立 或者 不相关，并且 X 与 Y 的方差都存在，a，b 为常数，那么

$$Var[aX + bY] = a^2 Var[X] + b^2 Var[Y]$$

对于任意的随机向量 (X, Y)

$$Var(aX \pm bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) \pm 2abCov(X, Y)$$

均值以及方差性质的运用

若 X_1 与 X_2 相互独立，且 $X_1, X_2 \sim B(1, p)$，则 $X_1 + X_2 \sim B(2, p)$。

进一步的，若 $X_1 \sim B(m, p)$，$X_2 \sim B(n, p)$，则 $X_1 + X_2 \sim B(m + n, p)$。

均值以及方差性质的运用

若 $X \sim B(n,p)$，$X_i \sim B(1,p)$，$i = 1,2,\cdots,n$，相互独立，那么

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

根据期望的线性性，

$$E[X] = E[X_1] + E[X_2] + \cdots + E[X_n]$$

$E[X_i] = p$，故

$$E[X] = np$$

再由方差的性质

$$\begin{aligned} Var[X] &= Var[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] \\ &= Var[X_1] + Var[X_2] + \cdots + Var[X_n] \\ &= np(1-p) \end{aligned}$$

数字特征的性质

设 (X, Y) 为二维随机向量，且 $Var[X] < \infty$，$Var[Y] < \infty$。

若 X 与 Y 独立，则 $r(X, Y) = 0$，即 X 与 Y 不相关。

相关性

设 (X, Y) 为二维随机向量，且 $Var[X] < \infty$，$Var[Y] < \infty$。则

$$r(X, Y) \leq 1$$

证明：考虑下面这三个随机变量

$$\bar{X} = \frac{X - E[X]}{\sqrt{Var[X]}}, \quad \bar{Y} = \frac{Y - E[Y]}{\sqrt{Var[Y]}}, \quad Z = \bar{X} \pm \bar{Y}$$

相关性

首先

$$Var[aX] = a^2 Var[X]$$

那么

$$Var[\bar{X}] = Var[\bar{Y}] = 1$$

其次

$$Cov(aX, bY) = E[abXY] - E[aX]E[bY] = abCov(X, Y)$$

计算下

$$\begin{aligned} Var[\bar{X} \pm \bar{Y}] &= Var[\bar{X}] + Var[\bar{Y}] \pm 2Cov(\bar{X}, \bar{Y}) \\ &= 2 \pm 2r(X, Y) \geq 0 \end{aligned}$$

所以 $r(X, Y) \leq 1$。

相关性

正相关: 若 $r(X, Y) = 1$，则存在常数 $a > 0$ 和 b，使得

$$P(Y = aX + b) = 1$$

负相关: 若 $r(X, Y) = -1$，则存在常数 $a < 0$ 和 b，使得

$$P(Y = aX + b) = 1$$

相关性

只讨论第一种情况，第二种类似讨论
若 $r(X,Y)=1$ 时，根据上面第二条，

$$Var[\bar{Y}-\bar{X}]=0,$$

即

$$\bar{Y}-\bar{X}=c, \quad a.e.$$

其中 c 是一个常数。
变换上式得

$$Y=\sqrt{\frac{Var[Y]}{Var[X]}}X+c\sqrt{Var[Y]}-\sqrt{\frac{Var[Y]}{Var[X]}}\sqrt{E[X]}+E[Y]$$

相关性

令

$$a = \sqrt{\frac{Var[Y]}{Var[X]}} > 0,$$

$$b = c\sqrt{Var[Y]} - \sqrt{\frac{Var[Y]}{Var[X]}}\sqrt{E[X]} + E[Y]$$

相关系数只能反映 X 与 Y 的线性相关程度，而不能刻画 X 与 Y 的非线性关系。

二维正态分布的相关性

对于 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$， $r(X, Y) = \rho$。
对于二维联合正态分布，

$$X, Y \text{ 独立} \Leftrightarrow \rho = 0 \Leftrightarrow X, Y \text{ 不相关}$$

即 X 与 Y 独立与 X 与 Y 不相关是等价的，这个性质是联合正态分布特有的。

例 4.2.2

设 (X, Y) 的联合分布密度函数为

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 8xy, & 0 \le y \le x, 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 $E[X]$, $E[Y]$, $Var[X]$, $Var[Y]$, $Cov(X, Y)$ 和 $r(X, Y)$

多维随机变量的数字特征

定义 4.2.2: 设随机向量 $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)'$ 的每个分量都有有限的方差，定义

$$E[\mathbb{X}] = (E[X_1], E[X_2], \cdots, E[X_n])'$$

和

$$Var[\mathbb{X}] = E[(\mathbb{X} - E[\mathbb{X}])(\mathbb{X} - E[\mathbb{X}])'] = (Cov(X_i, X_j))_{n \times n}$$

条件数学期望

条件数学期望是在条件分布的数学期望。

- 离散型：设 (X, Y) 是二维离散型随机向量，有有限的数学期望，在 $\{Y = b_j\}$ 发生的条件下，X 的 条件数学期望（条件期望），就是对条件分布列

$$P(X = a_i Y = b_j), \ i = 1, 2, \cdots$$

求数学期望，即

$$E[XY = b_j] = \sum_{i=1}^{\infty} a_i P(X = a_i Y = b_j)$$

同理，在 $X = a_i$ 发生的条件下，Y 的数学期望，就是在条件分布列

$$P(Y = b_j X = a_i), \ j = 1, 2, \cdots$$

下求 Y 的数学期望

$$E[YX = a_i] = \sum^{\infty} b_j P(Y = b_j X = a_i)$$

条件数学期望

- 连续型: 若 (X, Y) 是连续型的随机向量，并且有有限的数学期望。在 $\{Y = y\}$ 发生的情况下，X 的条件数学期望，就是基于条件分布密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$ 求 X 数学期望

$$E[X|Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)\, dx$$

在 $\{X = x\}$ 发生的情况下，Y 的条件数学期望，就是在条件分布密度函数 $f_{Y|X}(y|x)$ 下求 Y 的数学期望

$$E[Y|X = x] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x)\, dy$$

条件期望的性质

- 条件期望是条件的函数。比如 $E[X|Y=y]$ 就是 y 的函数。
- 当 X 和 Y 相互独立的时候，由于

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

于是 $f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$，于是

$$E[X|Y] = E[X]$$

同理

$$E[Y|X] = E[Y]$$

- 重期望公式

$$E[E[X|Y]] = E[X], \quad E[E[Y|X]] = E[Y]$$

重期望公式

- 若 Y 是离散型随机变量，则

$$E[X] = \sum_i E[X|Y = y_i]P(Y = y_i)$$

- 若 Y 是连续型随机变量，则

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} E[X|Y = y]f_Y(y)dy$$

条件期望的运用

假设 $E[X_i]=\mu$，$i=1,\cdots,N$，N 是随机变量，且与 X_i 都独立，求 $E[\sum_{k=1}^{N}X_k]$。

解：

$$
\begin{aligned}
E[\sum_{k=1}^{N}X_k] = E[E[\sum_{k=1}^{N}X_k|N]] &= \sum_{n=1}^{\infty}E[\sum_{k=1}^{N}X_k|N=n]\cdot P(N=n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}E[\sum_{k=1}^{n}X_k]\cdot P(N=n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}n\mu\cdot P(N=n) = \mu\sum_{n=1}^{\infty}nP(N=n) = \mu E[N]
\end{aligned}
$$

条件期望的运用

若 (X, Y) 服从二维正态分布
$(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$

$$E_{X|Y}(x|y) = \mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - \mu_2)$$

$$E_{Y|X}(y|x) = \mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1)$$

即 $E_{X|Y}$ 和 $E_{Y|X}$ 分别是 Y 和 X 的线性函数，这是正态分布的特征。