1 习题

求 $Z = X + Y$ 的概率密度，其中 X 与 Y 的分布密度函数为

$$f_X(x) := \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases} \qquad \text{and} \qquad f_Y(y) := \begin{cases} e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

Hint: 对于 $Z = X + Y$，其分布密度函数

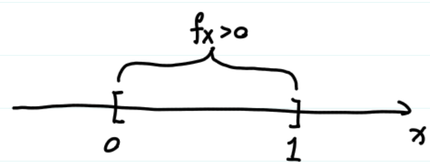
$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x, z-x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(z-y, y)dy.$$

特别地，如果 X 与 Y 独立，那么

$$f_Z(z) = (f_X * f_Y)(z).$$

解：由 X. Y 的独立性得

$$f_Z(z) = (f_X * f_Y)(z) = \int_R f_X(x) \cdot f_Y(z-x) dx.$$



注意到 $f_X(x)$ 在 $[0,1]$ 非零

$f_Y(z-x)$ 在 $(-\infty, z)$ 非零.

$$\therefore f_Z(z) = \int_R f_X(x) \cdot f_Y(z-x) dx$$

$$= \int_{[0,1] \cap (-\infty, z)} 1 \cdot e^{-(z-x)} dx$$

$$= \begin{cases} 0, & z \le 0 \\ \int_0^z e^{-(z-x)} dx = 1 - e^{-z}, & 0 < z \le 1 \\ \int_0^1 e^{-(z-x)} dx = 1 - e^{-1}, & 1 < z \end{cases}$$

#

2 习题

对于 $X \sim U[0,1]$ 和 $Y \sim \mathrm{Exp}(1)$，求 $M = \max\{X, Y\}$ 和 $N = \min\{X, Y\}$ 的分布函数与分布密度函数。
Hint: 对于独立的随机变量 X 和 Y，$M = \max\{X, Y\}$ 和 $N = \min\{X, Y\}$ 的分布函数有

$$F_M(m) = F_X(m) \cdot F_Y(m)$$
$$F_N(n) = 1 - (1 - F_X(n)) \cdot (1 - F_Y(n)).$$

解：已知 $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x \end{cases}$ $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ 1 - e^{-y}, & y > 0. \end{cases}$

- $M = \max\{X, Y\}$ 的分布函数

$$F_M(m) = F_X(m) \cdot F_Y(m) = \begin{cases} 0, & m < 0 \\ m \cdot (1 - e^{-m}), & 0 \le m < 1 \\ 1 \cdot (1 - e^{-m}) & 1 \le m \end{cases}$$

$$f_M(m) = \frac{d}{dm} F_M(m) = \begin{cases} 0, & m < 0 \\ m \cdot e^{-m} - e^{-m} + 1, & 0 \le m < 1 \\ e^{-m}, & 1 \le m \end{cases}$$

- $N = \min\{X, Y\}$ 的分布函数有

$$1 - F_N(n) = (1 - F_X(n)) \cdot (1 - F_Y(n))$$

其中 $1 - F_X(n) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 1 - x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & 1 \le x \end{cases}$, $1 - F_Y(n) = \begin{cases} 1, & y \le 0 \\ e^{-y}, & y > 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \underset{1 - F_N(n)}{\underbrace{(1 - F_X(n)) \cdot (1 - F_Y(n))}} = \begin{cases} 1, & n < 0 \\ (1 - n) \cdot e^{-n} & 0 \le n < 1 \\ 0, & 1 \le n \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_N(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1 - (1 - n) \cdot e^{-n} = (n - 1) e^{-n} + 1, & 0 \le n < 1 \\ 1, & 1 \le n \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_N(n) = \frac{d}{dn} F_N(n) = \begin{cases} 0, & n \in (-\infty, 0) \cup [1, +\infty) \\ (2 - n) \cdot e^{-n}, & n \in [0, 1) \end{cases}$$ #

3 习题

对于 $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda_1)$ 和 $Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda_2)$，求 $Z = X/Y$ 的分布密度函数。
Hint: 随机变量 $Z = X/Y$ 的分布密度函数满足

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} |y| f_{X,Y}(yz, y) dy.$$

解：

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} |y| \cdot f_{X,Y}(yz, y) dy$$
$$= \int_{\mathbb{R}} |y| \cdot f_X(yz) \cdot f_Y(y) dy \quad (X, Y \text{ 独立}).$$

注意到 $\{y \mid f_X(yz) > 0\} = \begin{cases} (0, +\infty) & z > 0. \\ \phi & z = 0 \\ (-\infty, 0) & z < 0 \end{cases}$

$\{y \mid f_Y(y) > 0\} = (0, +\infty)$.

可见. 只有 $z > 0$ 时. $\{y \mid f_X(yz) > 0\} \cap \{y \mid f_Y(y) > 0\} \neq \phi$.

$$\therefore f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} |y| \cdot f_X(yz) \cdot f_Y(y) dy$$

$$= \begin{cases} 0, & z \le 0 \\ \displaystyle\int_{\{y \mid f_X(yz) > 0\} \cap \{y \mid f_Y(y) > 0\}} |y| \cdot f_X(yz) \cdot f_Y(y) dy & z > 0. \end{cases}$$

$$= \int_0^{+\infty} |y| \cdot f_X(yz) \cdot f_Y(y) dy$$

$$= \int_0^{+\infty} y \cdot \lambda_1 e^{-\lambda_1 yz} \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} dy$$

$$= \lambda_1 \lambda_2 \cdot \int_0^{+\infty} y \cdot e^{-(\lambda_1 z + \lambda_2) \cdot y} dy$$

$$= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 z + \lambda_2)^2}$$

#