Ch 4. 随机变量的数字特征

钟友良

zhongyl@scut.edu.cn

Outline

Outline

回顾

习题

2.21 $X \sim U[0,2]$.

$Y = X^2+1$ 分布. 密度

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^2+1 \le y) \rightsquigarrow -\sqrt{y-1} \le X \le \sqrt{y-1}.$$

$$= \begin{cases} 0, & y<1 \\ P(-\sqrt{y-1} \le x \le \sqrt{y-1}), & y \ge 1 \end{cases}$$

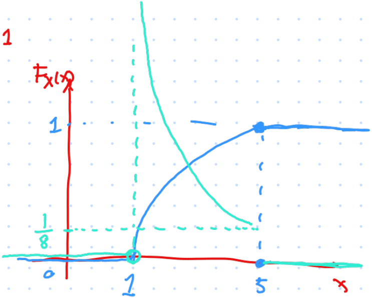
$$\parallel$$

$$P(0 \le x \le \min\{2, \sqrt{y-1}\})$$

$$= \begin{cases} P(0 \le x \le 2) = 1, & y \ge 5 \\ P(0 \le x \le \sqrt{y-1}), & 1 \le y < 5 \end{cases}$$

$$= \int_0^{\sqrt{y-1}} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{y-1}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y<1 \\ \dfrac{1}{4\sqrt{y-1}} & 1 \le y < 5 \\ 0 & 5 \le y \end{cases}$$



分布函数右连续 (右导数 = 密度)

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon}\left(f(x+\varepsilon) - f(x)\right) = f_X(x)$$

Outline

数字特征

已知 X 的分布函数，我们不仅可以通过其分布求任意一个随机事件的概率，还可以通过分布得知随机变量取值的平均值以及其取值偏离平均值的程度，这就是随机变量的 数学期望 和 方差 。

数学期望

数学期望 反映的是随机变量的 加权平均值 。
定义离散型随机变量 X 为某位选手射中的环数，已知其分布列为

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0.01 & 0.02 & 0.05 & 0.06 & 0.06 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

根据随机变量的分布，我们用下面的办法来计算这个选手的平均环数是合理的

$$\sum_{i=1}^{10} i \cdot \frac{n_i}{N} = \sum_{i=1}^{10} i \cdot P(X = i)$$

数学期望

设离散型随机变量 X 的概率分布列
$P(X = x_i) = p_i,\ i = 1, 2, \cdots$。
若级数 $\sum_i x_i p_i$ 收敛，则称 X 的数学期望存在，并称

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

为 X 的 数学期望 或 均值 ，简称 X 的 期望 。

期望的存在性

要求 $\sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i$ 收敛，是为了说明无论怎么排列 $\{x_i\}$，数项级数

$x_i \le 0$ $\quad E[X] = -E[Y]$.

$y_i = -x_i \ge 0 \Rightarrow E[Y]$

$$\{S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i\}$$

将收敛到同样的极限。
下面几种情形不需要考虑 $\sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i$ 是否收敛，直接计算期望值即可。

- 随机变量取值有限的情形
- 随机变量取值非负的情形

离散型随机变量

对于离散随机变量函数 $g(X)$ ，其期望如下计算

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) p_i$$

$$\begin{tikzcd}
& \Omega \arrow[dl, "X"'] \arrow[dr, "g(X)"] & \\
R \arrow[rr, "g"] & & R
\end{tikzcd}$$

如果 $P(X = x_i) = p_i$ 且 $\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) p_i$ 收敛。

二项分布的期望

$X \sim B(n, p)$ 有 $E[X] = np$。

$$P(X=k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$E[X] = \sum_{k=0}^{n} k \cdot P(X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \cdots\cdots$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,((n-1)-(k-1))!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$\underline{\underline{\ell = k-1}}\; np \cdot \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{\ell!\,((n-1)-\ell)!} \cdot p^{\ell} \cdot (1-p)^{(n-1)-\ell}$$

$$= np \cdot (\underbrace{p + (1-p)}_{=1})^{n-1}$$

泊松分布的期望

$X \sim Pois(\lambda)$ 有 $E[X] = \lambda$。

$$P(X=k) = \frac{1}{k!} e^{-\lambda} \cdot \lambda^k \quad (k \geq 0)$$

$$E[X] = \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot P(X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot \frac{1}{k!} e^{-\lambda} \cdot \lambda^k$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \cdots$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=1} \frac{1}{(k-1)!} \lambda^{k-1}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \cdot \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} \lambda^{\ell}.$$

$$= \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda.$$

几何分布的期望

$X \sim Geo(p)$ 有 $E[X] = \frac{1}{p}$。

$$P(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$$

$$E[X] = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot P(X=k)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot (1-p)^{k-1} \cdot p.$$

$\underline{\underline{\text{取 } q=1-p}}$ $\sum_{k=1} k \cdot q^{k-1} (1-q)$

$$= \sum_{k=1} k q^{k-1} - \sum_{k=1} k q^k$$

$$= 1 + \sum_{k=2} k q^{k-1} - \sum_{k=1} k q^k$$

$$= 1 + \sum_{k=1} (k+1) q^k - \sum_{k=1} k q^k$$

$$= 1 + \sum_{k=1} q^k = \sum_{k=0} q^k = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}$$

$$= p(1 + 2 \cdot (1-p) + 3(1-p)^2 + \ldots\ldots)$$

$$= (1-q)(1 + 2 \cdot q + 3q^2 + \ldots\ldots)$$

$$= 1 + 2q + 3q^2 + \ldots\ldots$$

$$\quad - q - 2q^2 - \ldots\ldots$$

$$= 1 + q + q^2 + \ldots\ldots$$

例 4.1.2

设 X 的分布列为

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 9 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

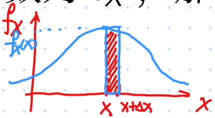
计算 $E[X]$, $E[-X+2]$, $E(X^2)$.

$$-X+2 \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$X^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 9 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

连续型随机变量的数学期望

设连续型随机变量 X 的分布密度函数为 f_X，那么对于任意的 x，有



$$P(x \le X \le x+\Delta x) = \int_x^{x+\Delta x} f_X(t)dt \approx f_X(x)\Delta x$$

我们可以将 $[-T, T]$ 划分为为 $\bigcup_{i=-\infty}^{\infty}[x_{i-1}, x_i]$，那么根据 Riemann 积分的定义，$X$ 的期望可以表示为

$$E_X(x) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \underbrace{x_i f_X(x_i)\Delta x_i}_{P(x_i \le X \le x_i+\Delta x_i)} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

连续型随机变量的数学期望

设连续型随机变量 X 的分布密度函数为 f_X，如果

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx < \infty$$

那么称

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx$$

为 X 的 数学期望 (均值)，简称为 X 的 期望 。

随机变量函数的期望

对于连续型随机变量的函数，求 $Y = g(X)$ 的数学期望，不需要先求得 Y 的分布密度函数 $f_Y(y)$，再通过 $\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dx$ 计算

实际上，若

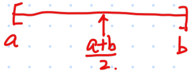
$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx < \infty$$

那么 $g(X)$ 的期望可以通过下面的方法计算

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

例 4.1.4

$X \sim U[a,b]$ 有 $E[X] = \frac{a+b}{2}$



$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx$$

$$= \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\, dx$$

$$= \frac{1}{2(b-a)} \int_a^b dx^2$$

$$= \frac{1}{2(b-a)} \cdot (b^2 - a^2)$$

$$= \frac{a+b}{2}$$

例 4.1.5

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 有 $E[X] = \mu$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sigma \cdot \frac{x-\mu}{\sigma} + \mu\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} d\,\frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$\underline{\text{取 } y = \frac{x-\mu}{\sigma}} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma y + \mu) \cdot e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

$$= \underbrace{\frac{\sigma}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy^2}_{-e^{-\frac{1}{2}y^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0} + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

$$\| \quad \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2} d\,\frac{y}{\sqrt{2}}$$

$$\| \quad \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

$$\| \quad \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \times \sqrt{\pi} = \mu.$$

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)^2$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy\right)$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx\,dy$$

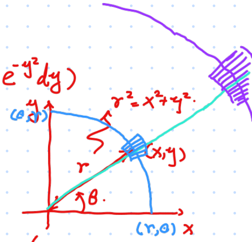
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-r^2}\, r \cdot dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} dr^2\, d\theta$$

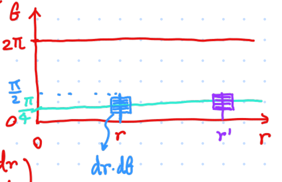
$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} -e^{-r^2}\Big|_0^{+\infty} d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 1\, d\theta$$

$$= \pi.$$



极坐标



$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -r \cdot \sin\theta \\ \sin\theta & r \cdot \cos\theta \end{pmatrix}}_{\det(\ldots) = r} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \\ y = r \cdot \sin\theta \end{cases}$$

例 4.1.6

$X \sim Exp(\lambda)$ 有 $E[X] = \frac{1}{\lambda}$

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & x > 0. \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\,dx$$

$$= \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x}\,dx.$$

$$= \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} (\lambda x) \cdot e^{-\lambda x}\,d(\lambda x)$$

取 $y = \lambda x$ $\frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} y^{2-1} e^{-y}\,dy.$

$$= \frac{1}{\lambda} \Gamma(2) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} e^{-y}\,dy.$$

Claim: $\Gamma(n+1) = n!$

Pf: $n=0$ 时 $\Gamma(0+1) = \int_0^{+\infty} e^{-y}\,dy = -e^{-y}\Big|_0^{+\infty}$.

数学归纳法 $= 1 = 1!$

假设对 n 成立 i.e. $\Gamma(n+1) = n!$

考虑 $n+1$ 的情况.

$$(n+1) \cdot \Gamma(n+1) = (n+1) \cdot \int_0^{+\infty} y^n e^{-y}\,dy$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-y}\,dy^{n+1}$$

$$= \frac{y^{n+1}}{e^y}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} y^{n+2-1} e^{-y}\,dy$$

$$= 0 - 0 + \Gamma(n+2).$$

例 4.1.7

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x f_X(x)|dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx.$$

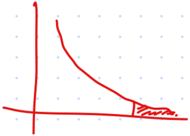
X 服从标准的柯西分布

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

判断 X 的数学期望是否存在，如果存在，求证 $E[X]$。

$f(x)$ 收敛 $\Longleftarrow$ $f(x)$ 绝对收敛

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \overset{?}{\Longrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx.$$



$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$$

$$-\int|f(x)|dx \le \int f(x)dx \le \int |f(x)|dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,dx}{\pi(1+x^2)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx^2}{1+x^2}$$

$$= \frac{2}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{dx^2}{1+x^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{dy}{1+y} = \frac{1}{\pi}\ln(1+y)\Big|_0^{+\infty} = +\infty$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{0} + \int_0^{+\infty}\right)\frac{1}{\frac{1}{x}+x}dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\int_0^{+\infty}\frac{d(-x)}{\frac{1}{-x}+(-x)} + \int_0^{+\infty}\frac{dx}{\frac{1}{x}+x}\right)$$

$$= 0$$

例 4.1.8

$X \sim U[0, 2\pi]$，$Y = \sin X$，求 $E[Y] = 0$。

数学期望的运算性质

性质 1：任意常数 c 的数学期望等于 c

证明：随机变量 X 服从

$$P(X) = \begin{cases} 1, & X = c \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

所以其期望就是

$$E[X] = c \times 1 + 0 = c$$

数学期望的运算性质

性质 2 (线性): 设随机变量 X 和 Y 的期望都存在, a, b 都是常数，那么

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$$

数学期望的运算性质

证明：只对连续型的随机变量证明。
先证明随机变量 $Z = aX + bY$ 的期望存在。假设 X, Y 的联合密度函数为 $f_{X,Y}(x,y)$，判断下面积分的收敛性

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} ax + by f_{X,Y}(x,y)dxdy \\
&\leq a\int_{\mathbb{R}^2} xf_{X,Y}(x,y)dxdy + b\int_{\mathbb{R}^2} yf_{X,Y}(x,y)dxdy \\
&= a\int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx + b\int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)dy \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

数学期望的运算性质

上面的式子表明 $E[Z]$ 存在，根据积分运算的线性性

$$
\begin{aligned}
E[aX + bY] &= \int_{2} (ax + by) f_{X,Y}(x, y)\,dxdy \\
&= a \int_{2} x f_{X,Y}(x, y)\,dxdy + b \int_{2} y f_{X,Y}(x, y)\,dxdy \\
&= a \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx + b \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy \\
&= aE[X] + bE[Y]
\end{aligned}
$$

数学期望的运算性质

性质 3: 若随机变量 X 与 Y 独立，且 X 与 Y 的期望都存在，那么

$$E[XY] = E[X]E[Y].$$

方差

随机变量的均值只能反映随机变量的平均预期，但却无法从中看出其取值的波动性大小，即随机试验的结果偏离平均值的程度。

方差的例子

巧克力加工厂 A, B 分别包装一带巧克力的重量 $X_A \sim U[50-0.5, 50+0.5]$, $X_B \sim U[50-1.5, 50+1.5]$, 那么

$$E[X_A] = E[X_B] = 50,$$

从均值来看，这两个加工厂的包装水平是一样的，但是

$$P(X_A \in [50-1.5, 50-0.5] \cup [50+0.5, 50+1.5]) = 0$$

$$P(X_B \in [50-1.5, 50-0.5] \cup [50+0.5, 50+1.5]) = \frac{2}{103}$$

方差的定义

我们用 方差 来描述一个随机变量的波动性。

定义 1.4.3: 设随机变量 X 有有限的数学期望，如果 $E[(X - E[X])^2] < \infty$，则称

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2]$$

为 X 的 方差 ，而称 $\sqrt{Var[X]}$ 为 X 的 标准差 ，记为 $\sigma[X]$.

方差的计算

- 对于离散型的随机变量:

$$Var[X] = \sum_{i=1}^{\infty}(x_i - E[X])^2 p_i$$

- 对于连续型的随机变量:

$$Var[X] = \int_{-\infty}^{\infty}(x - E[X])^2 f_X(x)dx$$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

例 4.1.9

$X \sim B(1, p)$ 有 $Var[X] = p(1-p)$