习题 34

- 灭蚊器 10 个：次品 3 个，正品 7 个。
- 售出 2 个后，从剩余中随机抽取 1 个

问：在“抽取的为正品”的条件下，“已售出为一正一次”的概率是多少？

方法一

解：B_i = {售出的……中正品的数量}

A = {抽取的是正品}

$$P(A|B_i) = \frac{7-i}{8}$$

$$P(B_i|A) = \frac{P(A\cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)\cdot P(B_i)}{\sum_{i=0}^{2} P(A|B_i)\cdot P(B_i)} = \cdots\cdots$$

方法二：

A_i = {i次为正品}

前两次一正一次 = $A_1\bar{A}_2 \cup \bar{A}_1 A_2$

抽取的正品 = A_3

$$P(A_1\bar{A}_2 \cup \bar{A}_1 A_2 | A_3) = \frac{1}{P(A_3)}\left(P(A_1\bar{A}_2A_3 \cup \bar{A}_1A_2A_3)\right)$$

$$= \frac{1}{P(A_3)}\cdot\left(P(A_1\bar{A}_2A_3) + P(\bar{A}_1A_2A_3)\right)$$

习题 36

袋中有球：红 x a；白 x b；黑 x c。
每次有放回地取球 1 个，并再放入同色的球 d 个。
记 $A_k = \{$第 k 次取得红球$\}$。求：$P(A_1|A_k)$。

解：考虑 $k=2$. $P(A_1|A_2) = \dfrac{P(A_1A_2)}{P(A_2)} = \dfrac{P(A_2|A_1)\cdot P(A_1)}{P(A_2)}$

$\left(P(A_1) = P(A_2) = \dfrac{a}{a+b+c}\right).$

$= P(A_2|A_1)$

$= \dfrac{a+d}{a+d+b+c}$.

考虑一般的 $k>2$.

$P(A_1|A_k) = \dfrac{P(A_k|A_1)\cdot P(A_1)}{P(A_k)}$

$= P(A_k|A_1)$

$= P\left((k-1)\text{th 取红} \,\middle|\, \begin{matrix}\text{红 } a+d \\ \text{非红 } b+c\end{matrix}\right)$

$= \dfrac{a+d}{a+d+b+c}$

A_1发生

ith	1	2		k
红	a	a+d		?
非红	b+c	b+c		?

附加题 2.1

两盒火柴，每盒 n 根。每次随机选一盒火柴，从中用掉一根。

求：用完一盒时，另一盒剩下 r 根的概率?

解：记火柴为甲, 乙两盒.

假设 甲盒用完.

$\overbrace{\text{甲 乙 乙 ······ 乙}}^{2n-r-1}$	$\overbrace{\text{甲}}^{1}$	$\overbrace{\text{乙 ··· 乙}}^{r}$

甲	$n-1$	1	0
乙	$n-r$	0	r

$$C_{2n-r-1}^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-r-1}\times\boxed{\frac{1}{2}\times 2}$$

附加题 2.2

两盒火柴，每盒 n 根。每次随机在所有火柴中选一根用掉

求：用完一盒时，另一盒剩下 r 根的概率?

$$\overbrace{\text{甲}\ \text{乙}\ \text{乙}\ \cdots\cdots\ \text{乙}}^{2n-r-1}\ \Big|\ \overbrace{\text{甲}}^{1}\ \Big|\ \overbrace{\text{乙}\ \cdots\ \text{乙}}^{r}$$

$$|\Omega| = C_{2n}^{n}$$

$$|A_{甲}| = C_{2n-r-1}^{n-1}$$

$$|A_{乙}| = C_{2n-r-1}^{n-1}$$

$$\Rightarrow P = \frac{2 \cdot C_{2n-r-1}^{n-1}}{C_{2n}^{n}}$$

$$\frac{C_{2n-r-1}^{n-1}}{C_{2n}^{n}}$$

回顾

- 二次分布.
  - n 次独立(二值)试验
  - 成立概率 p.
  - $X=$ 成功次数
  - $P(X=k)=C_n^k\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$.
- 泊松分布.
  - 单位时间内,事件"平均"发生的次数λ eg. 1d 卖 3个包子.
    1h .. $\frac{1}{8}$ - - -
  - $P_n(X=k)=C_n^k\cdot p_n^k\cdot(1-p_n)^{n-k}$
  - $P(X=k)=\lim\limits_{n\to+\infty}P_n(X=k)=\frac{1}{k!}\lambda^k\cdot e^{-\lambda}$ $\left(\lambda=\lim\limits_{n}n\cdot p_n\right)$

Q: Y: 两个事件发生之间的间隔

$P(Y\geq 1)=?$

$P(Y\geq t)=?$

几何分布

定义随机试验，是一次次的做伯努利试验，直到第一次成功为止，记录所做的伯努利试验次数.
设每次独立试验成功的概率为 p，记首次成功的时候做的伯努利试验的次数为 X，那么 $X = k$ 代表事件

$$A = \{第1, 2, \cdots, k-1次试验都是失败的, \\ 第k次试验是成功的\}$$

则有

$$P(A) = P_{\text{geom}}(X = k) = (1-p)^{k-1} p$$

称 X 服从 几何分布，记作 $X \sim Geo(p)$.

例 2.2.6

设一个地下采矿点有 5 个可以上升到地面的通道, 如果事故发生, 只有一个通道可以逃生, 且由于没有照明, 所以遇险者 每次 只能 随意 的在 5 个通道中选择一个, 若发现该通道不通, 则需要返回原点再 随意 的选择一个. 求

$\left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{5}$

- 第三次才选择正确的通道的概率
- 选择成功时已经选择其他错误的通道次数不大于 6 次的概率

$P(X \le 7) = \sum_{k=1}^{7} P(X=k) = \sum_{k=1}^{7} (1-p)^{k-1} \cdot p.$

例 2.2.6

解：定义随机变量 X 为选择正确时总共选择的次数, 那么 $X \sim Geo(\frac{1}{5})$

- 第三次才选择正确的概率

$$P_{\text{Geo}}(X = 3) = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \frac{1}{5}$$

- 选择正确前选择其他通道的次数不大于 6

$$P_{\text{Geo}}(X \leq 7) = \sum_{k=1}^{7} \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} \frac{1}{5}$$

几何分布的"无记忆性"

几何分布具有"无记忆性"，也就是说当前 k 次试验都不成功时，第 $k+n$ 次试验首次成功与 k 的大小无关，即

$$P(X = k + n \mid X > k) = P(X = n)$$

几何分布的“无记忆性”

证明

$$
\begin{aligned}
P(X=k+n|X>k) &= \frac{P((X=k+n)\cap(X>k))}{P(X>k)} \\
&= \frac{P(X=k+n)}{1-P(X\leq k)} \\
&= \frac{(1-p)^{n+k-1}p}{(1-p)^k} \\
&= (1-p)^{n-1}p = P(X=n)
\end{aligned}
$$

作为练习, 请大家验证

$$P(X>k+n|X>k) = P(X>n)$$

课堂练习

袋中有 m 个白球, n 个黑球, 现有放回的摸球, 直到摸到白球停止, 请问已知摸球的次数大于 3, 那么在第 5 次后停止的概率.

$X=\{$取得白球已经取球次数$\}$

$$P(X=5 \mid X>3)=\frac{P(X=5 \cap X>3)}{P(X>3)}=\cdots$$

$$=P(X=2)$$

$$=\frac{n}{m+n}\times\frac{m}{m+n}$$

Outline

2.0 引言

2.1 随机变量

2.2 一维离散型随机变量

2.3 一维连续型随机变量

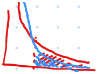
2.4 一维随机变量的分布

一维连续型随机变量

若随机变量的可能取值充满 $\mathbb{R}$ 上的一个区间 (a, b), 则称其为 连续随机变量.
请思考下面的问题:

- 计算质量密度为 $\rho(x)$ 的一维杆的一个端点到杆上某个指定点的质量
- 在 $[a, b]$ 区间随机的投点, 求落点位置 X 的分布函数

一维连续型随机变量的定义



$\frac{1}{x} \to 0$ while $x \to +\infty$ 0 1 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$

定义 2.3.1

设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间, X 为其上的随机变量, F_X 为 X 的分布函数. 如果存在 非负可积 的函数 f_X, 使得

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, \quad \forall x \in (-\infty, \infty)$$

那么称 X 为 连续型随机变量, 称 $f_X(x)$ 为 X 的 分布密度函数.

分布密度函数与分布函数

由 Newton-Leibniz 公式, 在 $f_X(x)$ 的连续点上, 有

$$f_X(x) = F'_X(x) = \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = f_X(x) - f_X(-\infty)$$

$= f_X(x)$ $\quad$ $f_X(-\infty) = 0$

- 若 $f_X(x)$ 是 X 的分布密度函数, 那么
  - $f_X(x) \geq 0, \ \forall x \in (-\infty, \infty)$
  - $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$
- 若定义在 $(-\infty, \infty)$ 上的函数 f 满足上面的两点, 那么令

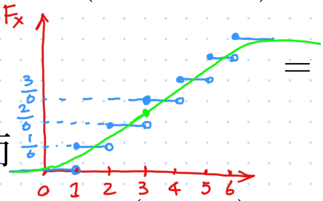
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, x \in (-\infty, \infty)$$

那么 $F(x)$ 一定是某随机变量的分布函数.

分布密度函数与分布函数

显然的

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$



$$= \int_a^b f_X(x)dx, \ \forall a < b \in \mathbb{R}$$

而

$$P(X = a) = \lim_{h \to 0^+} P(a - h < X \leq a)$$

$P(X=3)$

$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} P(X \leq 3) - F(X \leq 3 - \varepsilon)$

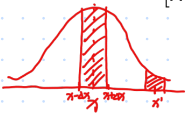
$= \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$

$$= \lim_{h \to 0^+} \int_{a-h}^a f_X(x)dx = 0$$

上面的式子表明连续型随机变量取任意的单点值的概率为零，换句话说，连续型随机变量的分布特性不能通过列举它取单点值的概率表示.

分布密度函数与分布函数

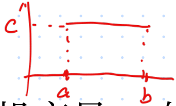
根据 Riemann 积分的性质, 存在 $\eta \in (m, M)$, 其中 $m = \min_{[x-\Delta x, x+\Delta x]} f_X(x)$, $M = \max_{[x-\Delta x, x+\Delta x]} f_X(x)$ 使得



$$\eta \Delta x = \int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} f_X(t)t = F_X(x+\Delta x) - F_X(x-\Delta x)$$
$$= P(x-\Delta x < X \leq x+\Delta x)$$

说明连续型随机变量在密度函数取值大的点附近取值的概率也较大.

均匀分布



如果连续型随机变量 X 的分布密度函数为

$f_X(t) = c \ , \ t \in [a,b]$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt$

$= \int_a^b f_X(t)\,dt$

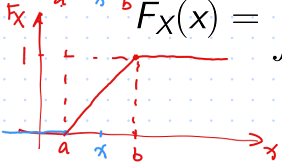
$= \int_a^b c \cdot dt = c(b-a) = 1$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{当} x \in [a, b] \\ 0, & \text{当} x \notin [a, b] \end{cases}$$

则称 X 服从 $[a, b]$ 上的 均匀分布, 记为
$X \sim U[a, b]$, 其分布函数为

uniform distribution.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)t = \begin{cases} 0, & \text{当} x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{当} a \leq x \leq b \\ 1, & \text{当} x > b \end{cases}$$



课堂练习

- 设随机变量 $X \sim U[0,10]$, 对 X 进行 4 次独立观测, 求至少有 3 次观测值大于 5 的概率.
- 在 $[0,1]$ 上任取一点记为 X, 求 $P(X^2 - \frac{3}{4}X + \frac{1}{8} \geq 0)$

$A = \{X > 5\}$

$P(X>5) = 1 - P(X \leq 5)$

$= 1 - \frac{5-0}{10-0} = \frac{1}{2}.$

$C_4^3 \cdot P(X>5)^3 \cdot P(X \leq 5)^1 + C_4^4 \cdot P(X>5)^4$

$X^2 - \frac{3}{4}X + \frac{1}{8} \geq 0$

$\Leftrightarrow (X - \frac{1}{4})(X - \frac{1}{2}) \geq 0$

$\Leftrightarrow X \leq \frac{1}{4} \cup X \geq \frac{1}{2}.$

$P(X^2 - \frac{3}{4}X + \frac{1}{8} \geq 0)$

$= P(X \leq \frac{1}{4} \cup X \geq \frac{1}{2})$

$= P[0, \frac{1}{4}] + P[\frac{1}{2}, 1]$

$= \frac{3}{4}.$