小结

集合：样本空间 = {基本事件}
Ω

幂集：事件域 = "感兴趣"的事件
$\mathcal{F}$ 通过"全，补，可数并"
生成的集合.

测度 概率 $P: \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$.

- 非负
- 规范
- 可列可加

随机取一个三角形

问："……是锐角三角形"的概率？

确定概率: 古典方法

设随机试验的样本空间为 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$, 并且 $P(\{\omega_i\})$ 相同. 则事件 A 发生的概率为

$$P(A) = \frac{A\text{包含的样本点个数}}{\Omega\text{包含的样本点个数}} = \frac{n_A}{n}$$

例 1.2.1

袋子中有 3 只白球和 2 只红球, 从袋子中任取两只, 请问下面事件的概率

- $A = \{$取得的两只球都是白球$\}$
- $B = \{$取得一只红球一只白球$\}$

$|\Omega| = C_5^2$

$|A| = C_3^2$

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \cdots$

$|B| = C_2^1 C_3^1$

$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|}$

例 1.2.2

划拳叫哪个数更容易取胜? 划拳的规则是

- 两个人同时出拳, 任意伸出 0,1,2,3,4,5 个手指头中的一种.
- 出拳的同时, 两个人同时叫出 0-10 中的一个数字

当两人伸出手指头个数的和等于其中一个人（仅一人）叫出的数字, 则叫出正确数字的人胜, 否则为平局. 请问叫哪个数字获胜的概率大?

例 1.2.2

穷举所有事件的概率

基本事件 $A_i = \{甲出\ i\}$

$B_i = \{乙出\ i\}$.

事件 $C_i = \{甲 + 乙 = i\}$

$C_0 = A_0B_0 = 1$

$C_1 = A_1B_0 \cup A_0B_1 = 2$

$C_2 = A_2B_0 \cup A_1B_1 \cup A_0B_2 = 3$

$\vdots$

$C_{10} = A_5B_5 = 1$

课堂练习

把 n 个不同的球随机放入 $N(N > n)$ 个盒子中, 求以下事件概率:

A. 某指定的 n 个盒子中各有一个球
B. 任意 n 个盒子中各有一个球
3. 某指定的盒子中恰有 $m(m \leq n)$ 个球

①. $|A| = n!$

ith 球	1	2	$\cdots$	n
盒的选择数	n	n-1		1

$\rightsquigarrow n!$

$|\Omega| = N^n$

$\Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{n!}{N^n}$.

② $|B| = \frac{N!}{(N-n)!}$

ith 球	1	2	$\cdots$	n
盒的 $\cdots$	N	N-1		N-n+1

$\rightsquigarrow A_N^n = \frac{N!}{(N-n)!}$

$\Rightarrow P(B) = \frac{N!}{n! \times N^n}$

②' $|B| = C_N^n \cdot |A|$

$= \frac{N!}{n!(N-n)!} \times n!$

$= \frac{N!}{(N-n)!}$

$N=5, n=2$

$A_{i,j} = \{$ith 球在 jth 盒子$\} \rightsquigarrow |A_{i,j}| = 1$.

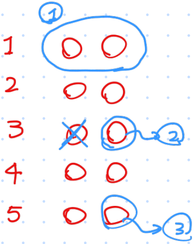
$B_{j_1,j_2} = \{j_1, j_2$ 盒各有 1 球$\} \rightsquigarrow |B_{j_1,j_2}| = 2$

$B = \bigcup_{j_1 \neq j_2} B_{j_1,j_2} = C_5^2 \times 2 = \frac{5!}{3!} \rightsquigarrow$

习题 1.11

从 5 双不同尺码的鞋子中任取 4 只，求 “4 只中至少 2 只凑成一双” 的概率?

- 基本事件 = {10只中选4只}
- 总事件 Ω　$|\Omega| = C_{10}^4$
- 事件 $A_i = \{$刚好凑成 i 对$\}$
- 事件 $A = A_1 \cup A_2$

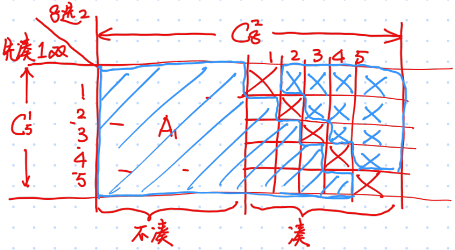


$$A_1 = \underbrace{C_5^1}_{5双选1双} \times \underbrace{C_8^1}_{剩下8选1} \times \underbrace{C_6^1}_{剩下6选1} / 2$$

$$A_2 = C_5^2$$

习题 1.11

从 5 双不同尺码的鞋子中任取 4 只，求 “4 只中至少 2 只凑成一双” 的概率?



$|A| = C_5^1 \times C_8^2 - C_5^2$

习题 1.11

从 5 双不同尺码的鞋子中任取 4 只，求 “4 只中至少 2 只凑成一双” 的概率?

- 对立事件 $\bar{A}$

$|\bar{A}| = C_5^4 \times 2^4$

$|A| = |\Omega| - |\bar{A}|$

习题 1.12

10 只电子管

- 7 只正品
- 3 只次品

不放回抽检，直到 3 只次品抽到未知无编号情形:

习题 1.12

10 只电子管

- 7 只正品
- 3 只次品

不放回抽检，直到 3 只次品抽到未知有编号情形:

确定概率: 几何方法

确定概率的几何方法, 我们对其如下定义:

- 某随机试验的样本空间是连续的, 我们用面积 $S(\Omega)$ 表示 Ω 的度量
- 任意两个事件, 只要他们覆盖的样本空间的面积相等, 则他们发生的概率相等
- 对于覆盖样本空间区域 Ω_A 的事件 A, 其概率定义为

$$P(A) = \frac{S(\Omega_A)}{S(\Omega)}$$

这个概率被称为 几何概率.

课堂练习

会面问题: 甲乙两人约定在下午 6 点到 7 点间在某处会面, 并约定先到的人等候另一个人 20 分钟, 请问两个人能会面的概率.

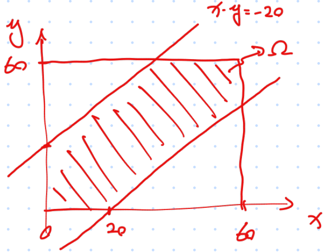
基本事件　$x = \{甲到达时间\} = [0,60]$

$y = \{乙 \ldots\} = [0,60]$

样本空间　$\Omega = [0,60] \times [0,60]$

事件 A　$A = \{(x,y) \in \Omega \mid |x-y| \le 20\}$

$-20 \le x-y \le 20$



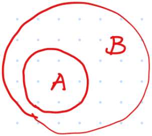
概率的性质

根据概率的公理化定义, 我们有概率的如下几条性质

- $P(\emptyset) = 0$.
- 有限可加性: 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容, 则
$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$
- 对任意事件 A,
$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

概率的性质

$P(A)+P(B\backslash A)$
$=P(B)$



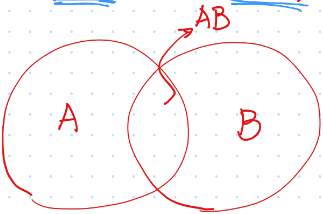
- 单调性 和 可减性 若 $A \subset B$, 则有

$$P(A) \le P(B),\ \underline{P(B\backslash A) = P(B) - P(A)}$$

- 加法公式

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

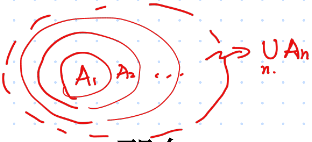
$$\begin{array}{ccc} \| & \| & \| \\ P(A\backslash B)+P(AB)+P(B\backslash A) & P(A\backslash B)+\underline{P(AB)} & P(B\backslash A)+\underline{P(AB)} \end{array}$$



概率的性质

- 上（下）连续性

  若 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$, 那么



$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)(\text{下连续性})$$

  若 $\cdots \subset A_n \subset \cdots A_2 \subset A_1$, 那么

$$P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)(\text{上连续性})$$

例 1.2.6

一个箱子中装有 36 只灯泡, 其中 32 只为一等品, 4 只为二等品, 先从中任取 3 只, 求取出的三只灯泡中至少有一只为二等品的概率

$|\Omega| = C_{36}^{3}$

$A_i = \{3只中刚好有\ i只次品\}$

$|A| = |A_1| + |A_2| + |A_3|$

$|A_0| = C_{32}^{3}$

$\overline{A} = A_0$

$|A| = |\Omega| - |\overline{A}| = C_{36}^{3} - C_{32}^{3}$

$P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$

Outline

条件概率

假设 $A, B \in \mathcal{F}$, 则

- 概率 $P(A)$: 无条件状态下, 事件 A 的概率.
- 概率 $P(A|B)$: 当 B 发生的条件下事件 A 发生的概率.

概率也可以理解为一种条件概率

$$P(A) = P(A|\Omega)$$

例子

以打扑克为例，一副扑克牌有 54 张，黑桃，红桃，方块，梅花各 13 张之外还有大王小王各一张．现在从牌堆里任取一张，取到任意一张的概率都是相同的，即 $\frac{1}{54}$．记

$$A = \{\text{取得扑克为黑桃}K\}$$

$$B = \{\text{取得扑克为黑桃}\}$$

Q: 试求 $P(A|B)$?

例子续

知 $A \subset B$, 故 $P(A) = P(A \cap B)$, 且

$$P(A) = \frac{1}{54}, \quad P(B) = \frac{13}{54}$$

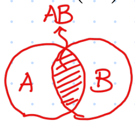
如果事先知道一定会取到黑桃花色的牌, 那么此时再取到黑桃 K 的概率为 $\frac{1}{13}$

$$P(A|B) = \frac{1}{13} \boxed{\overset{\text{好巧}}{=}} \frac{1/54}{13/54} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

条件概率

设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间, $A, B \in \mathcal{F}$, 且 $P(B) \neq 0$, 那么定义

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$



为 B 发生的条件下事件 A 发生的 条件概率.
实际上, 对于任意给定的 $B \in \mathcal{F}$, 并且 $P(B) > 0$, 定义映射

$$P_B : \mathcal{F} \to [0, 1]$$

$$P_B(A) = P(A|B), \forall A \in \mathcal{F}.$$

仍然为 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的概率测度, 即 $(\Omega, \mathcal{F}, P_B)$ 也是概率空间.

乘法公式

将条件概率公式变形, 就有 乘法公式

$$P(AB) = P(B)P(A|B)$$

乘法公式表示：事件 AB 同时发生的概率等于 B 发生的概率乘上在 B 发生的前提下 A 发生的概率.

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$P(AB) = P(B)\cdot P(A|B)$$
$$= P(A)\cdot P(B|A)$$