

1 习题

做一系列独立的试验，每次试验成功的概率为 p 。

求：在成功 n 次之前刚好失败了 m 次的概率？

解：记 $A =$ “成功 n 次前刚好失败 m 次”
 $B =$ “前 $(n+m-1)$ 次刚好失败 m 次”
 $C =$ “第 $(n+m)$ 次成功”

其中 $P(B) = C_{n+m-1}^m \cdot p^{n-1} \cdot (1-p)^m$

$$P(C) = p$$

$$\begin{aligned} \text{则 } P(A) &= P(B \cdot C) = P(B) \cdot P(C) \\ &= C_{n+m-1}^m \cdot p^n \cdot (1-p)^m \end{aligned}$$

#

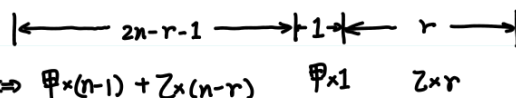
两盒火柴，每盒 n 根。分别通过下面两种方法选取火柴。

求：用完一盒时，另一盒剩下 r 根的概率？

1. 每次随机选一盒火柴，从中用掉一根。
2. 每次随机在所有火柴中选一根用掉。

Idea

转换为 $2n$ 盒子中放入“甲”、“乙”球各 n 个.



ii)

$$\begin{aligned} & P(\text{"抽完甲盒时,乙盒剩} r \text{根"}) \\ &= P(A_{n-1} \cdot B \cdot C_r) = P(A_{n-1} \cdot B) \quad (\because A_{n-1} \cdot B \cdot C_r = A_{n-1} \cdot B) \\ &= P(A_{n-1} | B) \cdot P(B) \end{aligned}$$

$$\text{Hence, } P(A_{n-1}|B) = C_{2n-r-1}^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{(2n-r-1)-(n-1)}$$

$$P(B) = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore P(\text{"抽完一盒, 另一盒剩} r \text{根"})$$

$$= P(\text{"抽完甲盒, 乙盒剩 } r \text{ 根"} \cup \dots \text{"乙...甲..."})$$

$$= P("q..z") + P("z..q")$$

$$= P(A_{n-1} \cdot B \cdot C) + P(A_{n-1} \cdot \bar{B} \cdot C)$$

$$= 2 \cdot P(A_{n-1} \cdot B \cdot C) \quad (\because \text{对称性}) \quad (\text{What if } P(\text{甲}) > P(\text{乙}) \text{ instead of } P(\text{甲}) = P(\text{乙})?)$$

2.

古典概型:

总样本空间 $\Omega = \{(2n) \text{ 盒子中放入 } n \text{ 个甲球的放法}\}$

Ω 的样本点数 $|\Omega| = C_{2n}^n$

事件 $A_{\text{甲}} = \text{"抽完甲盒, 乙盒剩} r \text{根"}$

$$= A_{n-1} \cdot B \cdot C_0$$

$$\dots |A_p| = C_{2n-r-1}^{n-1}$$

$$\therefore P(\text{"抽完一盒,另一盒乘"} r \text{根"})$$

$$= |A_1 \cup A_2| / |\Omega|$$

$$= 2 |A_0| / |\Omega| = 2 \cdot C_{2n-r-1}^{n-1} / C_{2n}^n$$

井