小结

集合： 样本空间 = { 基本事件 }

幂集： 事件域 ： "感兴趣"的事件

关于"全"、"补"、"可数交"封闭

测度 概率： 非负

规范 ($P(\Omega) < +\infty$)

可列可加性

确定概率: 古典方法

设随机试验的样本空间为 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$, 并且 $P(\{\omega_i\})$ 相同. 则事件 A 发生的概率为

$$P(A) = \frac{A\text{包含的样本点个数}}{\Omega\text{包含的样本点个数}} = \frac{n_A}{n}$$

例 1.2.1

袋子中有 3 只白球和 2 只红球, 从袋子中任取两只, 请问下面事件的概率

- $A = \{$取得的两只球都是白球$\}$
- $B = \{$取得一只红球一只白球$\}$

if $m \leq n$.

let $C_n^m := \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$

$= \frac{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-m+1)}{m!}$

解: 总事件 $\Omega = \{$5个球取2个球的组合$\}$

$= C_5^2$

1). . . . $A = \{$3个白球取2个球的组合$\}$

$= C_3^2$

$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{\frac{5\times4}{2}} = \frac{3}{10}$

2) . . . $B = \{$3白取1, 2红取1$\}$

$= C_3^1 \cdot C_2^1$

$\mathbb{P}(B) = \frac{3\times2}{\frac{5\times4}{2}} = 0.6$ #

例 1.2.2

划拳叫哪个数更容易取胜? 划拳的规则是

- 两个人同时出拳, 任意伸出 0,1,2,3,4,5 个手指头中的一种.
- 出拳的同时, 两个人同时叫出 0-10 中的一个数字

当两人伸出手指头个数的和等于其中一个人（仅一人）叫出的数字, 则叫出正确数字的人胜, 否则为平局. 请问叫哪个数字获胜的概率大?

例 1.2.2

穷举所有事件的概率

基本事件 A_i : 甲出 i $i = 0, 1, \ldots, 5$

B_i : 乙出 i . — — —

事件 $C_i := \{$甲+乙加起来为 $i\}$

甲 乙

$C_0 = A_0 B_0$

$C_1 =$

$C_2 =$

$\vdots$

$C_9 = \ldots$

$C_{10} = A_5 B_5$

课堂练习

把 n 个不同的球随机放入 $N(N > n)$ 个盒子中, 求以下事件概率:

1. A 某指定的 n 个盒子中各有一个球
2. B 任意 n 个盒子中各有一个球
3. C 某指定的盒子中恰有 $m(m \le n)$ 个球

基本事件 $A_{ij} = \{$ ith 球放入 jth 盒子 $\}$

总样本空间 Ω : $|\Omega| = N^n$

事件 A : $\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 2 & \cdots & n \\ \hline n & n-1 & \cdots & 1 \end{array} \rightsquigarrow |A| = n!$

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{n!}{N^n}$

事件 B : $\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 2 & \cdots & n \\ \hline N & N-1 & & N-n+1 \end{array} \rightsquigarrow A_N^n = \frac{N!}{n!}$

$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|}$

C: 先选 m个球 $\rightsquigarrow C_n^m$

再将剩下 $(n-m)$ 个球放入

剩下 $(N-1)$ 个盒子 $\rightsquigarrow (N-1)^{n-m}$

$\rightsquigarrow |C| = C_n^m \times (N-1)^{n-m}$

$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|}$ ...

$N=2$, $n=1$

习题 1.11

$$\frac{N!}{n!(N-n)!}\times n! = \frac{N!}{(N-n)!}$$

从 5 双不同尺码的鞋子中任取 4 只，求 “4 只中至少 2 只凑成一双” 的概率?

- 基本事件 = { 10只中取4只的组合 }
- 总事件 Ω $|\Omega| = C_{10}^{4}$.
- 事件 $A_i = \{$刚好凑成 i 对$\}$
- 事件 $A = A_1 \cup A_2$

方法一: $|A_1| = C_5^1 \times C_8^1 \times C_6^1 / 2$

在5双中选1双

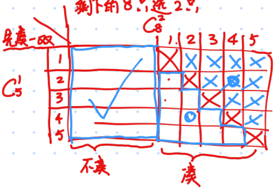
在剩下8只选1只

在"再剩下"6选1

$|A_2| = C_5^2$

方法二:

$|A| = C_5^1 \times C_8^2 - C_5^2$



习题 1.11

从 5 双不同尺码的鞋子中任取 4 只，求 “4 只中至少 2 只凑成一双” 的概率?

对立事件 $\bar{A}=\{1$ 双也没有$\}$

$|\bar{A}|=C_5^4\times 2^4$

$|A|=|\Omega|-|\bar{A}|$

习题 1.11

从 5 双不同尺码的鞋子中任取 4 只，求 "4 只中至少 2 只凑成一双" 的概率?

- 对立事件 $\bar{A}$

习题 1.12

10 只电子管

- 7 只正品
- 3 只次品

不放回抽检，直到 3 只次品抽到未知无编号情形:

习题 1.12

10 只电子管

- 7 只正品
- 3 只次品

不放回抽检，直到 3 只次品抽到未知有编号情形:

确定概率: 几何方法

确定概率的几何方法, 我们对其如下定义:

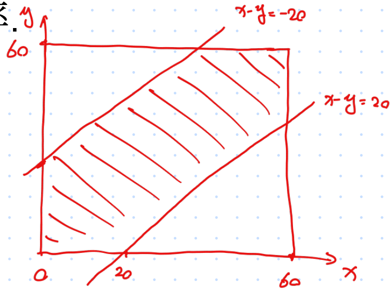
- 某随机试验的样本空间是连续的, 我们用面积 $S(\Omega)$ 表示 Ω 的度量
- 任意两个事件, 只要他们覆盖的样本空间的面积相等, 则他们发生的概率相等
- 对于覆盖样本空间区域 Ω_A 的事件 A, 其概率定义为

$$P(A) = \frac{S(\Omega_A)}{S(\Omega)}$$

这个概率被称为 几何概率.

课堂练习

会面问题：甲乙两人约定在下午 6 点到 7 点间在某处会面，并约定先到的人等候另一个人 20 分钟，请问两个人能会面的概率.



基本事件：$x = \{$甲到达的时间$\}$
$y = \{$乙 . . . . .$\}$

样本空间 $\Omega = [0,60]\times[0,60]$

事件 $A = \{(x,y)\in\Omega \mid \underbrace{|x-y| \le 20}_{-20 \le x-y \le 20}\}$

概率的性质

根据概率的公理化定义, 我们有概率的如下几条性质

- $P(\emptyset) = 0$.
- 有限可加性: 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容, 则

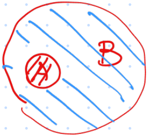
$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

- 对任意事件 A,

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

概率的性质

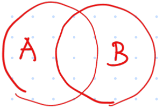
$P(B) = P(B\backslash A) + P(A)$



- 单调性 和 可减性 若 $A \subset B$, 则有

$$P(A) \le P(B), P(B\backslash A) = P(B) - P(A)$$

- 加法公式



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$P(A \cup B) = P(A\backslash B) + \underline{P(AB)} + P(B\backslash A)$

$P(A) = P(A\backslash B) + \underline{P(AB)}$

$P(B) = P(B\backslash A) + \underline{P(AB)}$

概率的性质

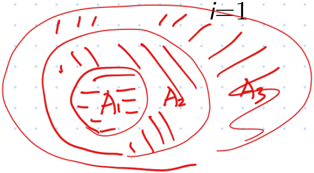
- **上（下）连续性**

若 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$, 那么

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)(\text{下连续性})$$

若 $\cdots \subset A_n \subset \cdots A_2 \subset A_1$, 那么

$$P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)(\text{上连续性})$$



例 1.2.6

一个箱子中装有 36 只灯泡, 其中 32 只为一等品, 4 只为二等品, 先从中任取 3 只, 求取出的三只灯泡中至少有一只为二等品的概率

$|\Omega| = C_{36}^3$

事件 $A_i = \{3只中有 i 只次品\}$

$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$

对立事件 $\overline{A} = A_0$

$|A_0| = C_{32}^3 \rightsquigarrow |A| = |\Omega| - |\overline{A}| \ldots$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{C_{36}^3 - C_{32}^3}{C_{36}^3} \sim 0.3.$$

随机给出一个三角形,
问"三角形是锐角三角形"的概率?

Outline

条件概率

假设 $A, B \in \mathcal{F}$, 则

- 概率 $P(A)$: 无条件状态下, 事件 A 的概率.
- 概率 $P(A|B)$: 当 B 发生的条件下事件 A 发生的概率.

概率也可以理解为一种条件概率

$$P(A) = P(A|\Omega)$$

例子

以打扑克为例，一副扑克牌有 54 张，黑桃，红桃，方块，梅花各 13 张之外还有大王小王各一张．现在从牌堆里任取一张，取到任意一张的概率都是相同的，即 $\frac{1}{54}$．记

$$A = \{\text{取得扑克为黑桃}K\}$$

$$B = \{\text{取得扑克为黑桃}\}$$

Q: 试求 $P(A|B)$?

例子续

知 $A \subset B$, 故 $P(A) = P(A \cap B)$, 且

$$P(A) = \frac{1}{54}, \quad P(B) = \frac{13}{54} \qquad \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A|B).$$

如果事先知道一定会取到黑桃花色的牌, 那么此时再取到黑桃 K 的概率为 $\frac{1}{13}$

$$P(A|B) = \frac{1}{13} \overset{\text{好巧}}{=} \frac{1/54}{13/54} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

条件概率

设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间, $A, B \in \mathcal{F}$, 且 $P(B) \neq 0$, 那么定义

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

为 B 发生的条件下事件 A 发生的 条件概率.
实际上, 对于任意给定的 $B \in \mathcal{F}$, 并且 $P(B) > 0$, 定义映射

$P(A)=P(A|\Omega)$

$$P_B : \mathcal{F} \to [0, 1]$$

$$P_B(A) = P(A|B), \forall A \in \mathcal{F}.$$

仍然为 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的概率测度, 即 $(\Omega, \mathcal{F}, P_B)$ 也是概率空间.

乘法公式

将条件概率公式变形，就有 乘法公式

$$P(AB) = P(B)P(A|B)$$

乘法公式表示：事件 AB 同时发生的概率等于 B 发生的概率乘上在 B 发生的前提下 A 发生的概率.