## 1 习题

做一系列独立的试验，每次试验成功的概率为 $p$。

求：在成功 $n$ 次之前刚好失败了 $m$ 次的概率?

解：记 $A$ = "成功 $n$ 次前刚好失败 $m$ 次"

$B$ = "前 $(n+m-1)$ 次刚好失败 $m$ 次"

$C$ = "第 $(n+m)$ 次成功"

其中 $P(B) = C_{n+m-1}^{m} \cdot p^{n-1} \cdot (1-p)^{m}$

$P(C) = p$

则 $P(A) = P(B \cdot C) = P(B) \cdot P(C)$

$= C_{n+m-1}^{m} \cdot p^{n} \cdot (1-p)^{m}$ #

## 2 习题

两盒火柴，每盒 $n$ 根。分别通过下面两种方法选取火柴。

求：用完一盒时，另一盒剩下 $r$ 根的概率?

1. 每次随机选一盒火柴，从中用掉一根。
2. 每次随机在所有火柴中选一根用掉。

解：

1.

记两盒火柴分别为甲盒和乙盒.

$A_i$ = "前 $(2n-r-1)$ 根为甲盒的有 $i$ 根"

$B$ = "第 $(2n-r)$ 根为甲盒的"

$C_i$ = "后 $r$ 根为甲盒的有 $i$ 根"

Idea

转换为 $2n$ 盒子中放入"甲","乙"球各 $n$ 个.

|←— $2n-r-1$ —→|←1→|←— $r$ —→|

"乙剩 $r$" $\Leftrightarrow$ 甲×$(n-1)$ + 乙×$(n-r)$ 甲×1 乙×$r$

则

P("抽完甲盒时, 乙盒剩 $r$ 根")

$= P(A_{n-1}\cdot B\cdot C_0) = P(A_{n-1}\cdot B)$ (∵ $A_n\cdot B\cdot C_0 = A_{n-1}\cdot B$)

$= P(A_{n-1}|B)\cdot P(B)$

其中, $P(A_{n-1}|B) = C_{2n-r-1}^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{(2n-r-1)-(n-1)}$

$P(B) = \frac{1}{2}$.

∴ P("抽完一盒, 另一盒剩余 $r$ 根")

= P("抽完甲盒, 乙盒剩余 $r$ 根" ∪ "…乙…甲…")

= P("甲..乙") + P("乙..甲")

$= P(A_{n-1}\cdot B\cdot C_0) + P(A_{n-r}\cdot \overline{B}\cdot C_r)$

$= 2\cdot P(A_{n-1}\cdot B\cdot C_0)$ (∵ 对称性) (What if P(甲) > P(乙) instead of P(甲) = P(乙) ? )

$= C_{2n-r-1}^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-r-1}$

2.

古典概型:

总样本空间 $\Omega$ = {$(2n)$ 盒子中放入 $n$ 个甲球的放法}

$\Omega$ 的样本点数 $|\Omega| = C_{2n}^{n}$

事件 $A_甲$ = "抽完甲盒, 乙盒剩余 $r$ 根"

$= A_{n-1}\cdot B\cdot C_0$

…… $|A_甲| = C_{2n-r-1}^{n-1}$

∴ P("抽完一盒, 另一盒剩 $r$ 根")

$= |A_甲 \cup A_乙| / |\Omega|$

$= 2|A_甲| / |\Omega| = 2\cdot C_{2n-r-1}^{n-1} / C_{2n}^{n}$ #