期末复习

课程难点

- Ch3：条件密度、连续性随机变量的卷积公式
- Ch4：条件期望及其性质
- Ch5：强大数定律，以概率1收敛
- Ch7：联合区间估计，非正态
- Ch8：单边检验，非正态

考试时间：6月29日

考试须知：

1. 记得填写学号，座位号
2. 不能带计算器。
   因此，分位数不用写具体数值（除非另有提示）
   e.g. $\left[\frac{40}{F_{0.975}(7,9)}, \frac{40}{F_{0.025}(7,9)}\right]$
3. 题型：选择 × 12，大题 × 6

古典概率: $C_n^m := \frac{m!(n-m)!}{n!}$: n中(无先后次序)取m个的取法.

例. 带编号1~10的10个球，随机取3个球

问: 1. 最小号码为4的概率

2. 大....4...

3. 中间....4...

解: 样本空间含样本数为C_{10}^3

1. 事件A = "最小..为4"

= "一个取4" & "另外两个取5,...,10"

$\therefore P(A) = \frac{C_6^2}{C_{10}^3}$

2. 事件B = "最大为4" = ... 1,2,3

$P(B) = \frac{C_3^2}{C_{10}^3}$

3. 事件C = "中间为4" = "一个取4" & "一个1,2,3" & "一个5~10"

$P(C) = \frac{C_3^1 \cdot C_6^1}{C_{10}^3}$

条件概率

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{\sum_C P(B|C) \cdot P(C)}$$

例: 题设同上.

问: 1. 已知"最大为4"的条件下, "含有5"的概率

2. 小

3. 中间

解: 1. 记 A = "最大为4", D = "含有5"

可见A与D互斥, 得 $P(D|A) = \frac{P(A \cdot D)}{P(A)} = \frac{0}{P(A)} = 0$

2. $B \cdot D$ = "一个4" & "一个5" & "一个6,...,10"

$P(D|B) = \frac{P(B \cdot D)}{P(B)} = \frac{C_5^1}{P(B)}$

3. $C \cdot D$ = "一个4" & "一个5" & "一个1,2,3"

$P(D|C) = \frac{P(C \cdot D)}{P(C)} = \frac{C_3^1}{P(C)}$

1 (10 分)

将 A, B, C 三个字母之一输入信道, 输出为原字母的概率为 α, 而输出为其他一个字母的概率为 $(1-\alpha)/2$。

今将字母串 AAAA，BBBB，CCCC 之一输入信道，记输入 AAAA，BBBB，CCCC 的概率分别为 p_1, p_2, p_3，其中 $p_1 + p_2 + p_3 = 1$。

已知输出信号为 $ABCA$，问输入的字母串为 AAAA 的概率是多少?

解：记 X_i 为 此 输入信号，Y_i 为 此 输出信号

$X = X_1X_2X_3X_4$，$Y = Y_1Y_2Y_3Y_4$

要求 $P[X=AAAA \mid Y=ABCA]$

$$= \frac{P[X=AAAA,\ Y=ABCA]}{P[Y=ABCA]} \quad (\text{条件概率定义})$$

$$= \frac{P[Y=ABCA \mid X=AAAA]\cdot P[X=AAAA]}{\sum_{*\in\{A,B,C\}} P[Y=ABCA \mid X={*}{*}{*}{*}]\cdot P[X={*}{*}{*}{*}]}.$$

计算 $P[Y=y \mid X={*}{*}{*}{*}]$

$$= \prod_{i=1}^{4} P[Y_i = y_i \mid X={*}{*}{*}{*}] \quad (\because Y_i \text{ 与 } Y_j \text{ 独立})$$

$$= \prod_i P[Y_i = y_i \mid X_i = x_i] \quad (\because Y_i \text{ 与 } X_j \text{ 独立},\ j\neq i)$$

$$= \alpha^{\#\{i \mid x_i = y_i\}}\cdot \beta^{\#\{i \mid x_i \neq y_i\}} \quad (\text{where } \beta = 1-\alpha)$$

$$\therefore \begin{cases} P[Y=ABCA \mid X=AAAA] = \alpha^2\cdot\beta^2 \\ P[\quad\cdot\quad\cdot\quad \mid X=BBBB] = \alpha\cdot\beta^3 \\ P[\qquad \mid X=CCCC] = \alpha\cdot\beta^3 \end{cases}$$

$$\therefore \text{原} = \frac{\alpha^2\cdot\beta^2\cdot P_1}{\alpha^2\cdot\beta^2\cdot P_1 + \alpha\cdot\beta^3\cdot P_2 + \alpha\beta^3\cdot P_3} \quad (\text{Def of } P_i)$$

$$= \frac{\alpha\cdot P_1}{\alpha\cdot P_1 + (1-\alpha)\cdot(1-P_1)} \quad (\because P_2+P_3 = 1-P_1)$$

分布函数 $F_X(x) = P(X \le x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$

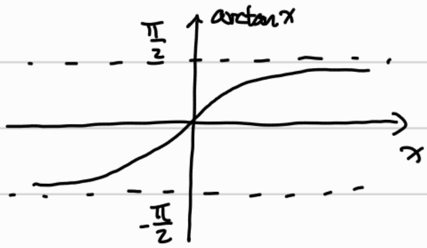
概率密度 $f_X(x_0) = \frac{d}{dx} F_X(x)\Big|_{x=x_0}$ $\quad F_X$ 在 x_0 处连续

例: $X \sim F(x) = A + B \cdot \arctan x \quad (-\infty < x < +\infty)$

问: 1. $A, B = ?$

2. $P[-1 \le X \le 1] = ?$

3. $f_X(x) = ?$



解: ① 分布函数满足 $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B \times (-\frac{\pi}{2}) = 0 \\ A + B \times (\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{\pi} \end{cases}$$

② $P[-1 \le X \le 1] = F(1) - F(-1)$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan 1\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(-1)\right) = \frac{1}{2}$$

③ $f_X(x) = \frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan x\right) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ #

2 (15 分)

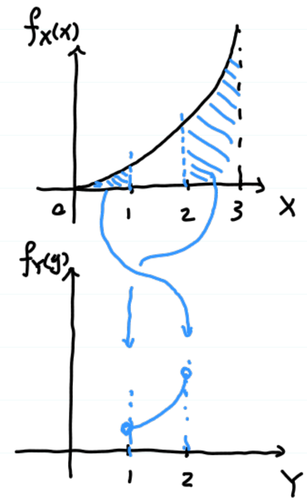
设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x) := \begin{cases} \frac{1}{9}x^2, & 0 < x < 3 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

记随机变量

$$Y := \begin{cases} 2, & X \leq 1 \\ X, & 1 < X < 2 \\ 1, & X \geq 2 \end{cases}$$

1. 求 Y 的分布函数 F_Y
2. 求 Y 的分布密度函数 f_Y
3. 求概率 $P[X \leq Y]$



解: 1. 当 $y<1$ 时. $F_Y(y)=0$ （∵ Y 取值范围为 $[1,2]$）

当 $1\le y<2$ 时, $F_Y(y) = P[Y\le y] = P[Y=1] + P[1<Y\le y]$

其中 $P[Y=1] = P[X\ge 2] = \int_2^{+\infty} f_X(x)dx = \int_2^3 \frac{1}{9}x^2 dx = \frac{19}{27}$

$P[1<Y\le y] = P[1<X\le y] = \int_1^y \frac{1}{9}x^2 dx = \frac{1}{27}(y^3-1)$

∴ 此时. $F_Y(y) = \frac{1}{27}(y^3+18)$

当 $y\ge 2$ 时 $F_Y(y) = 1$.

综上所述, $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y<1 \\ \frac{1}{27}(y^3+18), & 1\le y<2 \\ 1, & 2\le y \end{cases}$

2. $f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y<1 \text{ 或 } y>2 \\ \frac{1}{9}y^2, & 1<y<2. \\ \frac{19}{27}\cdot\delta(0), & y=1 \\ \frac{1}{27}\cdot\delta(0), & y=2 \end{cases}$ （$\delta(x)$: Dirac δ function）

3. $P[X\le Y] = P[X\le Y, X\le 1] + P[X\le Y, 1<X<2] + P[X\le Y, X\ge 2]$

其中 $P[X\le Y, X\le 1] = P[X\le 2, X\le 1] = P[X\le 1]$

$P[\ldots, 1<X<2] = P[X\le X, 1<X<2] = P[1<X<2]$

$P[\ldots, X\ge 2] = P[X\le 1, X\ge 2] = 0$

$\therefore P[X\le Y] = P[X\le 1] + P[1<X<2] = F_X(2)$

$= \int_0^2 \frac{1}{9}x^2 dx = \frac{8}{27}$ #

数字特征

- $\mathbb{E}[X] = \int x f(x)\, dx.$
  - 线性：$\mathbb{E}[aX+bY] = a\cdot\mathbb{E}[X] + b\cdot\mathbb{E}[Y]$
  - X, Y 独立 $\Rightarrow \mathbb{E}[X\cdot Y] = \mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y].$

- $Var[X] = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$
  - $Var[aX] = a^2\cdot Var[X]$
  - X, Y 独立 $\Rightarrow Var[X\pm Y] = Var[X] + Var[Y]$

例. (X,Y) 在 $D=\{(x,y)\mid 0<x<1,\ |y|<x\}$ 上服从均匀分布

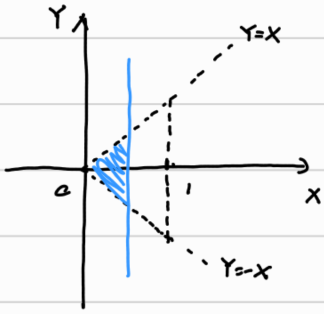
$Z = 2X+1$

问：1. F_Z

2. f_Z

3. $\mathbb{E}[Z]$

4. $Var[Z]$



解：D 的面积 $\int_{(0,1)}\int_{|y|<x} dy\, dx$

$= \int_0^1\int_{-x}^{x} dy\, dx = 1$

由 (X,Y) 在 D 上服从均匀分布得

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y)\in D \\ 0, & else. \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \int_0^x\int_{-x}^{x} dy\, dx = x^2, & 0\le x<1 \\ 1, & 1\le x \end{cases}$$

$F_Z(z) = P[Z\le z] = P[2X+1\le z] = P[X\le \frac{1}{2}(z-1)] = F_X(\frac{1}{2}(z-1))$

$$= F_X(\tfrac{1}{2}(z-1)) = \begin{cases} 0, & z<1 \quad (\because \frac{1}{2}(z-1)<0) \\ (\frac{1}{2}(z-1))^2 = \frac{1}{4}(z-1)^2, & 1\le z<3 \\ 1, & 3\le z \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}(z-1), & 1\le z<3 \\ 0, & else \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[Z] = \int z f_Z(z)\,dz = \int_1^3 z \cdot \frac{1}{2}(z-1)\,dz = \frac{7}{3}$$

$$\mathbb{E}[Z^2] = \int z^2 f_Z(z)\,dz = \int_1^3 z^2 \cdot \frac{1}{2}(z-1)\,dz = \frac{17}{3}$$

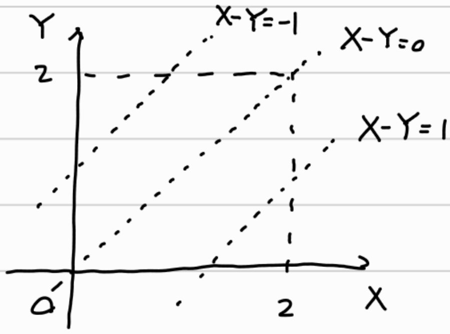
$$Var[Z] = \mathbb{E}[Z^2] - (\mathbb{E}[Z])^2 = \frac{2}{9}$$

例: (X, Y) 在 $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2\}$ 服从均匀分布

$Z = |X - Y|$

问: 1. $f_Z(z)$

2. $\mathbb{E}[Z]$ & $Var[Z]$.



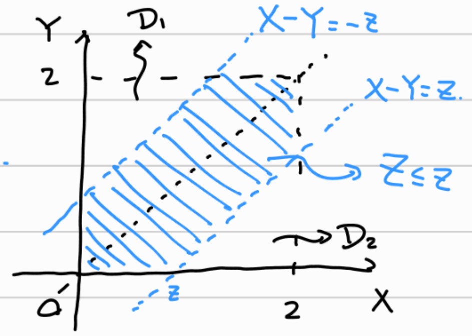
解: (X,Y) 概率密度

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & (x,y) \in D \\ 0, & else \end{cases}$$

记 $D'(z) = \{(x,y) \in D \mid |x-y| \le z\}$

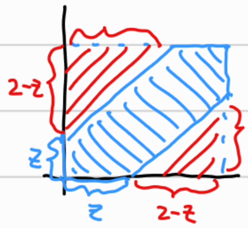
$$\text{Area } D'(z) = \text{Area } D - \text{Area } D_1 - \text{Area } D_2$$
$$= 4 - \frac{1}{2}(2-z)^2 - \frac{1}{2}(2-z^2)$$
$$= 4z - z^2$$

$(z \ge 0)$ $-z \le X - Y \le z$.

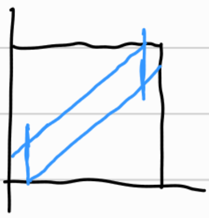


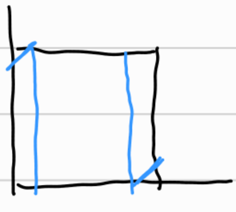
$$\therefore F_Z(z) = P(Z \le z) = P(|X-Y| \le z)$$
$$= \int_{|X-Y| \le z} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$
$$= \int_{D'(z)} \frac{1}{4}\,dx\,dy = \frac{1}{4}\int_{D'(z)} dx\,dy = \frac{1}{4}\text{Area } D'(z) = -\frac{1}{4}z^2 + z.$$

$$\therefore f_Z(z) = \begin{cases} \frac{d}{dz}F_Z(z) = -\frac{1}{2}z + 1, & 0 \le z < 2 \\ 0 & else \end{cases}$$



$$\mathbb{E}[Z] = \int_0^2 z \cdot (-\frac{1}{2}z + 1)\,dz = \frac{2}{3}$$
$$\mathbb{E}[Z^2] = \int_0^2 z^2 \cdot (-\frac{1}{2}z + 1)\,dz = \frac{2}{3}$$
$$Var[Z] = \mathbb{E}[Z^2] - (\mathbb{E}[Z])^2 = \frac{4}{9}$$





($\lambda \neq 5$!)

4 (15 分)

两台相同型号的自动记录仪，每台无故障工作的时间服从指数分布 $\mathrm{Exp}(\lambda)$。首先开动其中一台，当其发生故障时停用，并自动开动另外一台。记随机变量 T 为两台记录仪无故障工作的总时间。求：

- T 的概率密度 f_T
- 数学期望 $\mathbb{E}[T]$ 和方差 $\mathrm{Var}[T]$

解：① X：第一台记录仪的工作时间，Y：另一台 ...

$\Rightarrow T = X + Y$

$$f_T(t) = \int_0^t f_X(s) \cdot f_{Y|X}(t-s \mid s)\,ds \quad (\because \text{全概率公式})$$
$$= \int_0^t f_X(s) \cdot f_Y(t-s)\,ds \quad (\because X, Y \text{ 独立})$$
$$= \int_0^t \lambda \cdot e^{-\lambda s} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda(t-s)}\,ds$$
$$= \lambda^2 t \cdot e^{-\lambda t}$$

$$\therefore f_T(t) = \begin{cases} \lambda^2 t \cdot e^{-\lambda t}, & t > 0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

② $\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = 2\lambda^{-1}$ ($\because X, Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda) \therefore \mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = \lambda^{-1}$)

$\mathrm{Var}[T] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] = 2\lambda^{-2}$ ($\mathrm{Var}X = \mathrm{Var}Y = \lambda^{-2}$)

#