对偶率

- 对偶率

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

!P

!(P 且 Q) = !P 或 !Q

!(P 或 Q) = !P 且 !Q

A = { w | w 满足 P }
B = { . . . . . . Q }

$\bar{A}$ = { w | w 不满足 P }
= { . . . 满足 !P }

A∪B = { w | - - - - P 或 Q }
A∩B = { w | - - - P 且 Q }

$\overline{A \cup B}$ = { w | w 满足 !(P 或 Q) }
= { w | - - - - !P 且 !Q }
= { w | . . !P } ∩ { w | . . . !Q }
= $\bar{A} \cap \bar{B}$

$a_n \longrightarrow a_0$

$\forall \varepsilon > 0$
$\exists N(\varepsilon)$
$\forall n > N(\varepsilon)$
$|a_n - a_0| < \varepsilon$

$a_n \not\to a_0 \Leftrightarrow !(a_n \to a_0)$
$\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0$
$\forall N$
$\exists n_0 > N$
$|a_n - a_0| \geq \varepsilon_0$

三个事件

$$
\begin{aligned}
D &= \{A, B, C\text{都发生}\} \\
&= ABC = A \cap B \cap C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D &= \{A, B, C\text{都不发生}\} \\
&= \bar{A}\bar{B}\bar{C} = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}
\end{aligned}
$$

$= \overline{A \cup B \cup C}$

$$
\begin{aligned}
D &= \{A\text{发生但}B, C\text{都不发生}\} \\
&= A\bar{B}\bar{C} = A \backslash (B \cup C) = A \cap \overline{B \cup C}
\end{aligned}
$$

三个事件

$$D = \{A, B, C\text{中至少有一个发生}\}$$

$$= \overline{\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}} = A \cup B \cup C$$

	A	B	C		
3	✓	✓	✓	⇒	ABC
or	✗	✓	✓		$\bar{A}BC$
2	✓	✗	✓		$A\bar{B}C$
	✓	✓	✗		$AB\bar{C}$

$$D = \{A, B, C\text{中至少有两个发生}\}$$

$$= (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap \bar{C})$$

$$\cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)$$

$$= (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

三个事件

$$\begin{aligned} D =& \{A, B, C\text{中最多有一个发生}\} \\ =& (\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \\ & \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \\ =& \overline{(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)} \end{aligned}$$

例 1.1.7

射击比赛中, 射手连续射击三次, 问:

- $A = \{$击中 3 次$\}$
- $B = \{$击中 2 次$\}$
- $C = \{$击中不多于 2 次$\}$

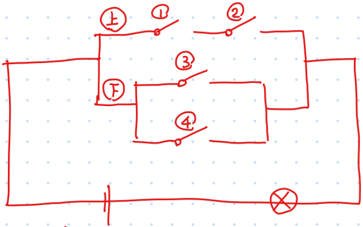
$A_i =$ ith 击中.

$A = A_1 A_2 A_3$

$B = \overline{A_1} A_2 A_3 \cup A_1 \overline{A_2} A_3 \cup A_1 A_2 \overline{A_3}$

$C = \overline{A \cup B}$

例 1.1.8



基本事件

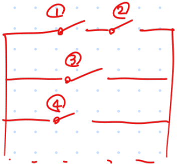
A_i = {开关 i 闭合}

A = {电路接通}

= $\underbrace{\{上电路接通\}}$ ∪ {下 ...}

$= (A_1 \cap A_2) \cup (A_3 \cup A_4)$

$= (A_1 \cap A_2) \cup A_3 \cup A_4$



课堂练习

化简下面的复杂事件

$$B\backslash\overline{(\bar{A}\cup\bar{B})}$$

$$\overline{(\bar{A}\cup B)\cap(A\cup B)}$$

一. $B\backslash\overline{(\bar{A}\cup\bar{B})}$

$= B\backslash(A\cap B)$

$= B\cap\overline{(A\cap B)}$

$= B\cap(\bar{A}\cup\bar{B})$

$=(B\cap\bar{A})\cup\underbrace{(B\cap\bar{B})}_{=\phi}$

$= B\cap\bar{A}$

二. $B\backslash\overline{(\bar{A}\cup\bar{B})}$

$= B\cap(\bar{A}\cup\bar{B})$

$=(B\cap\bar{A})\cup(B\cap\bar{B})$

$= B\cap\bar{A}$

$\overline{(\bar{A}\cup B)}\cup\overline{(A\cup B)}$

$=(A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap\bar{B})$

$=(\bar{B}\cap A)\cup(\bar{B}\cap\bar{A})$

$=\bar{B}\cap\underbrace{(A\cup\bar{A})}_{=\Omega}$

$=\bar{B}$

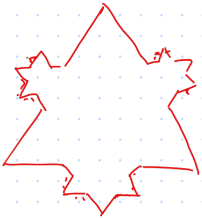
Outline

概率

定义

概率 是随机事件发生可能性的一种度量

换言之，概率是随机事件发生可能性的一种测量工具，可以把它理解为刻度尺或者体重秤，事件发生的可能性越大，那么其测量工具上显示的数值就会越大.



事件域

事件域 $\mathcal{F}$ 是样本空间 Ω 的一些子集的集合, 这个集合的元素满足下面三个条件

- 全: $\Omega \in \mathcal{F}$
- 补: 若 $A \in \mathcal{F}$, 那 $\bar{A} \in \mathcal{F}$.
- 可数并: 若 $A_n \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \cdots$, 那么 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

称 $\mathcal{F}$ 中的元素（即 Ω 的某个子集）为 事件.

下面的集合都是掷骰子试验的事件域

- $\{\{w_1\}, \{w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}, \Omega, \emptyset\}$
- $\{A : \forall A \subset \Omega\}$
- $\{\emptyset, \Omega\}$

$A_1 = \{w_1, w_2\}$
$A_2 = \{w_3, w_4\}$
$A_3 = \{w_5, w_6\}$
$\mathcal{F} = \{\Omega, \phi, A_1, A_2, A_3, \bar{A}_1 = A_2 \cup A_3, \bar{A}_2, \bar{A}_3\}$

$\Omega = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$
小 $= \{w_1, w_2, w_3\}$
大 $= \{w_4, w_5, w_6\}$
$\mathcal{F} = \{\Omega, \phi, 小, 大\}$

事件域

Q: 事件域的条件里面为什么没有

- 空: $\emptyset \in \mathcal{F}$ $\Omega \in F,\ \phi = \overline{\Omega} \in F.$
- 可数交: $\cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ 如果 $A_n \in \mathcal{F}$

Q: 如果 F 是事件域

那么 $\forall A_n \in F$ 有 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in F$?

Pf. $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \overset{?}{=} \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}} \in F$

$\overline{\cup \overline{A_n}} = \cap \overline{\overline{A_n}} = \cap A_n$

确定概率: 统计方法

为了考察某一随机试验的随机事件 A 发生的频率, 我们重复的进行这一随机试验, 并计算下面的数值

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

其中 n 是试验的总次数, n_A 为事件 A 发生的次数. 随着试验次数的增加, 准确的说当 $n \to \infty$ 时,

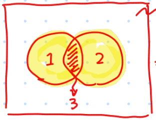
$$\lim_{n\to\infty} f_n(A) = p, p \in [0, 1],$$

p 称为事件 A 发生的 概率.

概率的公理化定义

设 Ω 是随机试验的样本空间, $P(\cdot): \mathcal{F} \to R$ 是从事件域 $\mathcal{F}$ 到实数集 的映射, 满足 $[0,1]$

- 非负性: 对任一事件 $A \in \mathcal{F}$, 有 $P(A) \geq 0$
- 规范性: $P(\Omega) = 1$
- 可列可加性: 若事件 $A_1, A_2, \cdots$ 两两不相容, 则



Ω

$A \cup B = (A-B) \cup (B-A) \cup (A \cap B)$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

$m(\Omega) \neq 1$

$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$

那么称 P 为事件域 $\mathcal{F}$ 上的 概率测度, 而称 $P(A)$ 为事件 A 的概率, 称三元素 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间.

小结

✓ 集合：样本空间 Ω

$\downarrow$

✓ 事件：事件域 $\mathcal{F}$.

$\downarrow$

测度：m

$\downarrow$ $m(\Omega) < +\infty$

✓ 概率：$P = \dfrac{m}{m(\Omega)}$

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

确定概率: 古典方法

设随机试验的样本空间为 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$, 并且 $P(\{\omega_i\})$ 相同. 则事件 A 发生的概率为

$$P(A) = \frac{A\text{包含的样本点个数}}{\Omega\text{包含的样本点个数}} = \frac{n_A}{n}$$

例 1.2.1

袋子中有 3 只白球和 2 只红球, 从袋子中任取两只, 请问下面事件的概率

- $A = \{$取得的两只球都是白球$\}$
- $B = \{$取得一只红球一只白球$\}$