函数图像

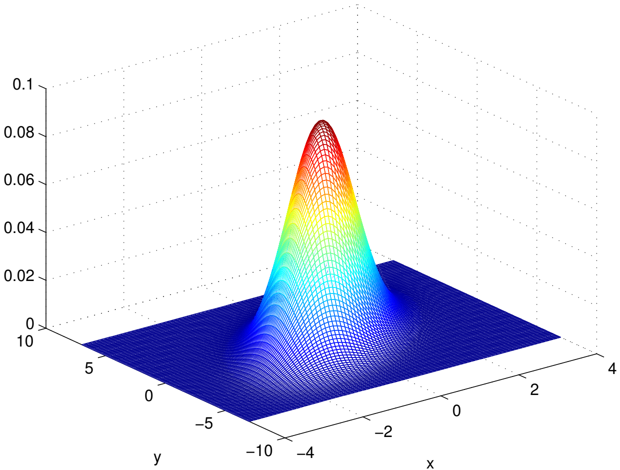


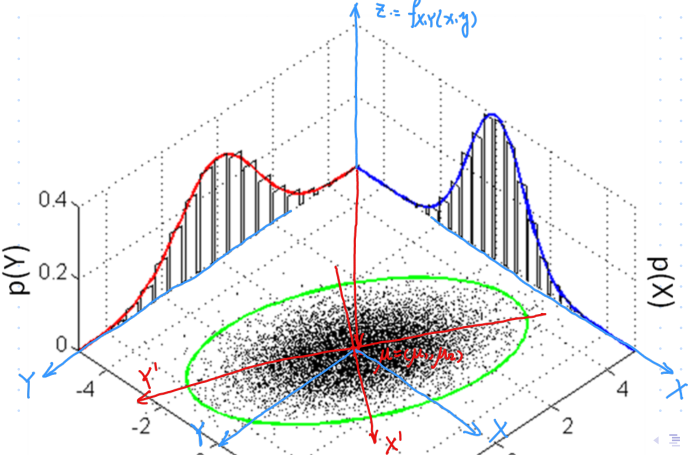
图: $\mu_1 = \mu_2 = 0,\ \sigma_1 = 1,\ \sigma_2 = 2,\ \rho = \frac{1}{2}$

边缘分布

二维正态分布的边缘分布为一维正态分布，即

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \quad f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

亦即 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$， $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 。



边缘分布

$\rho = 0$ 是 X, Y 是相互独立随机变量的充要条件。

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right)}$$

$$f_{X|Y}(x|y) \stackrel{?}{=} f_X(x)$$

n 维正态分布（非退化情形）

设 $\mu=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)'$，$\boldsymbol{\Sigma}$ 为 n 阶正定矩阵，记 $=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$，若

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi\sigma}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} & y=0\\ 0 & y\neq 0\end{cases}$$

$$f_{X_1,X_2,\cdots,X_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(x-\boldsymbol{\mu})\right\}$$

则称 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)'$ 服从 n 维正态分布，记作 $\sim N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$。

取 $Y=X-\mu$ i.e. $\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\mu_1\\\vdots\\\mu_n\end{pmatrix}$

Σ 正定

$\Leftrightarrow X^T\Sigma X>0\ \forall X\neq 0$

$\Leftrightarrow \exists A$ 正交矩阵

$A^T\Sigma A=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$

$\lambda_i>0$.

$$f_X(x)=\frac{1}{((2\pi)^n|\Sigma|)^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}Y^T\Sigma^{-1}Y\right\}$$

$$=\frac{1}{(\cdots)^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(AY)^T\Lambda^{-1}(AY)\right\}\overset{Z=AY}{=\!=}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\cdot\prod_i\sigma_i}\exp\left\{-\frac{1}{2}Z^T\Lambda^{-1}Z\right\}$$

$$(z_1,\dots,z_n)\begin{pmatrix}\lambda_1^{-1}&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\\vdots\\z_n\end{pmatrix}$$

$$\sum\frac{z_i^2}{\lambda_i}\ \overset{\text{取}\sigma_i>0,\ \sigma_i^2=\lambda_i}{=\!=}\ \sum_i\frac{z_i^2}{\sigma_i^2}$$

$$\rightsquigarrow \Sigma^{-1}=(A^T\Lambda A)^{-1}$$

$$=A^{-1}\Lambda^{-1}(A^T)^{-1}=A^T\Lambda^{-1}A.$$

n 维正态分布（非退化情形）

请大家验证，对于 $n = 2$ 的情形

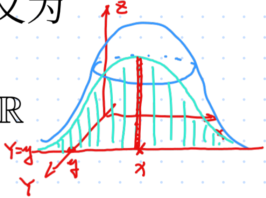
$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

二维连续型随机变量的条件密度函数

设 (X, Y) 为二维连续型的随机向量，其联合分布密度函数为 $f_{X,Y}(x, y)$，边缘分布密度函数分别为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$，若 $f_Y(y) > 0$，那么在 $\{Y = y\}$ 发生的条件下，X 的 条件密度函数 定义为

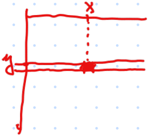
离散 $P_{X|Y}(x|y) = \dfrac{P_{X,Y}(x,y)}{P_Y(y)}$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}, \forall x \in \mathbb{R}$$



同样的，当 $f_X(x) > 0$，在 $\{X = x\}$ 发生的条件下 Y 的 条件密度函数 定义为

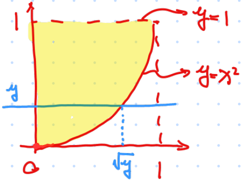
$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}, \forall y \in \mathbb{R}$$



例

设 (X, Y) 的联合密度函数为

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 6xy, & x^2 \le y \le 1, 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



求 $f_{X|Y}(x|y=\frac{1}{2})$ 和 $f_{Y|X}(y|x=\frac{1}{3})$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} 0 & y<0 \text{ 或 } y>1 \\ \frac{6xy}{3y^2} = \frac{2x}{y} & 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le \sqrt{y} \\ 0 & 0 \le y \le 1,\ x<0 \text{ 或 } x>\sqrt{y}. \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$$

$$= \begin{cases} 0 & y<0 \text{ 或 } y>1 \\ \int_0^{\sqrt{y}} 6xy\,dx & 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

$$6y\int_0^{\sqrt{y}} x\,dx = 3y\left(x^2\Big|_0^{\sqrt{y}}\right) = 3y^2.$$

例

大家可以自行验证，对于二维正态分布

$$(X,Y)\sim\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\times$$
$$e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}((\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2})-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2})},$$

X 在 $\{Y=y\}$ 下和 Y 在 $\{X=x\}$ 下的条件分布分别为

$$N(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2),\sigma_1^2(1-\rho^2))$$

和

$$N(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1),\sigma_2^2(1-\rho^2))$$

Outline

简单情形

问题：根据 (X, Y) 的联合分布，求 $g(X, Y) = X + Y$ 的分布

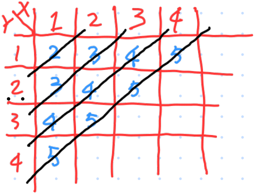
离散型的简单情形

对于二维离散型随机向量的情形，设 (X, Y) 的分布列为

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, i, j = 1, 2, \cdots$$

那么 $Z = X + Y$ 的分布列为

$$P(Z = z_k) = \sum_{x_i + y_j = z_k} p_{ij}, k = 1, 2, \cdots$$



特别的，若 $x_i = i$，$y_j = j$，那么

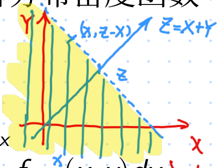
$$P(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i, Y = k - i) = \sum_{i=0}^{k} p_{i(k-i)}, k = 0, 1, 2, \cdots$$

进一步的，若 X 与 Y 独立，那么

$$P(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i) P(Y = k - i) = p_{i\cdot} p_{\cdot(k-i)}$$

连续型的简单情形

对于二维连续型随机向量，设 (X, Y) 的联合分布密度函数为 $f_{X,Y}$，那么 $Z = X + Y$ 的分布函数为



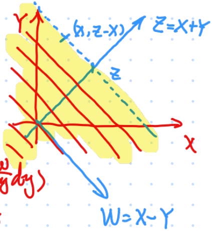
$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X + Y \le z)$$

$$= \int_{x+y\le z} f_{X,Y}(x,y)xdy = \int_{-\infty}^{\infty} \cancel{x}\left(\int_{-\infty}^{z-x} f_{X,Y}(x,y)dy\right)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cancel{y}\left(\int_{-\infty}^{z-y} f_{X,Y}(x,y)dx\right)dy$$

$$dx\,dy = |dx \wedge dy|$$

$$\begin{pmatrix} dz \\ dw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$



$$dz = dz(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy$$

$$dz \wedge dy = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) \wedge \left(\frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy\right)$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}dx \wedge dy + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}dy \wedge dx$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\right) dx \wedge dy$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{vmatrix} dx \wedge dy.$$

连续型的简单情形

按照连续型随机变量函数的分布密度函数求法，对分布函数 $F_Z(z)$ 关于 z 求导，得到 Z 的分布密度函数为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, z-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(z-y, y)dy$$

特别的，若 X, Y 相互独立，那么

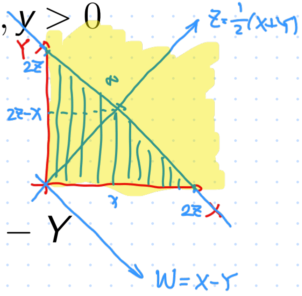
$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

即两个独立的随机变量和的分布密度函数为它们各自的分布密度函数的“卷积”。

练习

设 X, Y 的联合密度函数为

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



求下面的随机变量的密度函数:

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$Z = (X+Y)/2, \quad W = X - Y$$

$$F_Z(x) = \int_0^{2z}\int_0^{2z-x} e^{-(x+y)}\,dy\,dx = \dots$$

多维正态分布的函数

- (X, Y) 是二维随机向量，X 与 Y 独立，$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim (\mu_2, \sigma_2^2)$，那么 $Z = X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$
- $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 n 维正态分布，且 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$，$i = 1, \cdots, n$，那么 $\sum_{i=1}^n a_i X_i \sim N(\sum_{i=1}^n a_i \mu_i, \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2)$

命题 3.4.1

随机向量 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)^T$ 服从 n 维正态分布的充要条件是对任意的 $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \cdots, k_n)^T \in \mathbb{R}^n$，那么 $\boldsymbol{k}^T\boldsymbol{X}$ 服从一维正态分布

命题 3.4.2

设随机向量 $=(X_1, X_2, \cdots, X_n)'$ 服从 n 维正态分布，期望向量为 $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)'$，协方差矩阵为 Σ，那么对于任意的实矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，有
$\boldsymbol{A} \sim N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{A}\Sigma\boldsymbol{A}')$

$$\begin{tikzcd}
 & \Omega \arrow[dl, "X=\begin{pmatrix}X_1\\ \vdots \\ X_n\end{pmatrix}"'] \arrow[dr, "Y=\begin{pmatrix}Y_1\\ \vdots \\ Y_m\end{pmatrix}=A\cdot X."] & \\
\mathbb{R}^n \arrow[rr, "A_{m\times n}"] & & \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

练习

相互独立的随机变量 $X \sim \exp(\lambda_1)$，$Y \sim \exp(\lambda_2)$，求 $Z = X/Y$ 的密度函数。

Outline