

Ch 1. 随机事件与概率

钟友良

zhongyl@scut.edu.cn

Outline

1.0 引言

1.1 随机现象与随机试验

1.2 概率的定义

1.3 条件概率与独立性

Outline

1.0 引言

1.1 随机现象与随机试验

1.2 概率的定义

1.3 条件概率与独立性

Outline

1.0 引言

1.1 随机现象与随机试验

1.2 概率的定义

1.3 条件概率与独立性

随机现象

定义

在一定的试验条件下, 并不总是出现相同结果的现象被称为 **随机现象**.

判断一个现象是否是随机现象, 只需要验证该现象是否满足下面的两个特征:

- ▶ 结果不止一个.
- ▶ 事先无法预知将出现哪个结果.

例子

下面的现象都是随机的：

- ▶ 投掷一枚硬币，出现的结果有可能是数字面朝上，也有可能国徽面朝上.
- ▶ 投掷一个骰子，有可能出现 1-6 点中的任意一个.
- ▶ 家里某种电器的寿命，可能是 $(0, \infty)$ 上的任意一个实数.
- ▶ 对某种物品的称重，其测量误差可能是 $(-\infty, \infty)$ 中的任意一个实数.

随机试验

定义

对在相同条件下可以重复的对随机现象的观察, 记录, 实验称为 **随机试验**.

其基本意义是:

- ▶ 可以在基本相同条件下大量重复试验
- ▶ 试验会出现的结果是可以预知的
- ▶ 具体是什么结果是不可预知的

f : 试验 \longrightarrow 结果

样本空间

$$\begin{aligned} \Omega &: \Omega \\ \omega &: \omega \end{aligned}$$

定义

随机试验的 **一切** 可能的 **基本** 结果组成的集合, 记为 Ω . Ω 中的任意一个元素被称为一个 **基本事件** 或 **样本点**.

样本空间的解释:

- ▶ **一切**: 随机试验的每一个可能的结果, 都在样本空间中有对应的元素.
- ▶ **基本**: 最简单的, 不能再分的结果. 这一点暗示各样本点之间没有非空的交集.

例子

前述随机现象的对应样本空间

- ▶ 投掷一枚硬币试验的样本空间 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, 其中 ω_1 表示正面朝上, ω_2 表示反面朝上.
- ▶ 投掷一个骰子试验的样本空间

$$\Omega = \{\omega_i : i = 1, 2, \dots, 6\},$$

猜大小的样本空间
 $\Omega = \{\omega_1^-, \omega_1^+, \omega_2^-, \omega_2^+, \dots, \omega_n^-, \omega_n^+\}$
 $\omega_1^- \cup \omega_1^+ \cup \omega_2^- \cup \omega_2^+ \cup \dots \cup \omega_n^- \cup \omega_n^+$

其中 ω_i 表示掷出 i 点.

- ▶ 家里某样电器寿命的样本空间
 $\Omega = \{t : t \geq 0\}$
- ▶ 对某样物品称重误差的样本空间
 $\Omega = \{m : m \in \mathbb{R}\}$

当样本空间中的样本点有限或者可数时, 被称为 **离散** 样本空间, 否则被称为 **连续** 样本空间.

例 1.1.1

掷一颗骰子, 考虑以下事件的概率:

- ▶ $A = \{\text{点数为奇数}\} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\} = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$
- ▶ $B = \{\text{点数为偶数}\}$
- ▶ $C = \{\text{点数小于 3}\} = \{\omega_1, \omega_2\} = 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

概率的古典定义

例 1.1.2

地铁五分钟一趟, 观测一名乘客的等待时间.

- ▶ $A = \{\text{等待时间少于 2 分钟}\}$
- ▶ $B = \{\text{等待时间多于 2 分钟}\}$
- ▶ $C = \{\text{等待时间介于 1 至 2 分钟}\}$

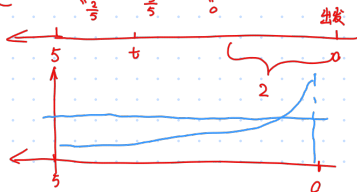
概率的几何定义

$\Omega = \{\text{乘客到达车站时, 最近一趟地铁出发时间}\}$

$$= \{t \in [0, 5]\}$$

$$A = \{t \in [0, 2)\} \rightsquigarrow P[A] = \frac{|[0, 2)|}{|[0, 5]|} = \frac{2}{5}$$

$$\begin{array}{l} B \\ C \end{array} \quad \underbrace{P[A]}_{\frac{2}{5}} + \underbrace{P[B]}_{\frac{3}{5}} + \underbrace{P[t=2]}_0 = 1$$



课堂练习

讨论下面的随机试验的样本空间：

- ▶ 射击手连续射击 2 次所得的总环数（环数按整数计算）
- ▶ 将一颗骰子掷两次，观察每一次的点数.

$$\left[\begin{array}{l} \Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ \Omega = \{2, \dots, 12\} \rightsquigarrow |\Omega| = 12. \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ \Omega = \Omega_2 \times \Omega_2 \\ \quad = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (1, 6), \\ \quad \quad (2, 1), \dots, (2, 6), \\ \quad \quad \vdots \\ \quad \quad (6, 1), \dots, (6, 6)\} \end{array} \right. \quad |\Omega| = 6^2 = 36$$

思考题

$$\Omega = \{\text{"熟"}, \text{"不熟"}\}$$

问样本空间是什么? $\Omega = \{\omega \in [0, 1]\}$



随机事件

Ω : 集合 $\omega \in \Omega$ 基本事件.
eg. $\Omega = \{\text{正}, \text{反}\}$
 $2^\Omega = \{\emptyset, \{\text{正}\}, \{\text{反}\}, \{\text{正}, \text{反}\}\}$

定义

2^Ω : 幂集 (Ω 的子集所构成的集合)

随机事件: 样本空间 Ω 中若干样本点构成的子集.

下面是几种特殊的随机事件

- ▶ **基本事件**: 样本空间 Ω 中的单个元素组成的子集.
- ▶ **不可能事件**: 样本空间的最小子集, 即空集 \emptyset
- ▶ **必然事件**: 样本空间的最大子集, 即它自己 Ω

Q: 随机事件所构成的集合 \subseteq 样本空间 Ω 的幂集

eg. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

小 = $\{1, 2, 3\}$

大 = $\{4, 5, 6\}$

$\{1, 2, 3\}$ $\{4, 5, 6\}$ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
" " "
{小, 大} 所构成的集合 = $\{\emptyset, \text{小}, \text{大}, \text{小} \cup \text{大}\}$

事件的关系

同一随机现象的任意两个事件 A 和 B 之间有下面的几种关系.

对于任意的 $\omega \in \Omega$:



- ▶ 若 $\omega \in A$, 则 $\omega \in B$, 那么称 B **包含** A , 记为 $A \subset B$
- ▶ $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称 A 与 B **相等**, 记为 $A = B$.
- ▶ 要么 $\omega \in A$, 要么 $\omega \in B$, 则称 A 和 B 互为对方的 **对立事件**, 记为 $B = \bar{A}$ 或者 $A = \bar{B}$.
- ▶ $A \cap B = \emptyset$, 那么称 A 与 B **互不相容**

练习

对于掷骰子的试验, 请对下面事件的关系进行判断:

- ▶ $A = \{\omega_1, \omega_2\}, B = \{\omega_3\}$
- ▶ $A = \{\omega_4\}, B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_5\}$
- ▶ $A = \{\omega_i : i \text{ 为偶数}\}, B = \{\omega_i : i \text{ 为奇数}\}$

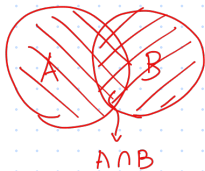
事件的运算

事件也可以做运算, 事件经过某种运算得到的还是事件.

对于某随机试验的随机事件 A, B :

► 事件的积 (交) $C = \underline{A \cap B}$

$$\begin{aligned} C &= \{A \text{ 和 } B \text{ 同时发生}\} \\ &= \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B\} \end{aligned}$$



事件的运算

- 事件的和 (并) $C = A \cup B$



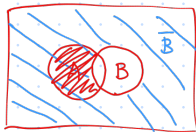
$$\begin{aligned} C &= \{A \text{ 和 } B \text{ 中至少有一个发生}\} \\ &= \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\} \end{aligned}$$

- 事件的差 $C = A \setminus B$ 或 $A - B$



$$\begin{aligned} C &= \{A \text{ 发生但 } B \text{ 不发生}\} = A \text{ 发生} \& \bar{B} \text{ 发生} \\ &= \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ 且 } \omega \in \bar{B}\} \end{aligned}$$

显然 $A - B = A \cap \bar{B}$.



事件运算的法则

► 交换律

$$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$$

► 结合律

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

分配率

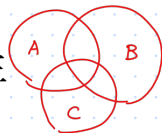
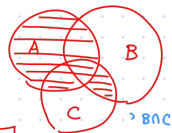
► 分配率

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

分配率的概率语言证明：

$$\begin{aligned} & \underbrace{A \cap (B \cup C)}_{\text{B或C发生}} \\ \Leftrightarrow & \underbrace{A \text{发生}} \text{ 且 } \boxed{B \text{ 和 } C \text{ 中至少有一个发生}} \\ \Leftrightarrow & \underbrace{A \text{ 和 } B \text{ 一起发生}} \text{ 或者 } \underbrace{A \text{ 和 } C \text{ 一起发生}} \\ \Leftrightarrow & (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$



Q：用集合论语言证明分配率.