Ch 2. 一维随机变量及其分布

钟友良

zhongyl@scut.edu.cn

Outline

Ch1. 12.

10 中：7 正 3 次.

不放回取，直到取 3 次.

Q: {取 7 次} 的概率 = ?

A: 无编号

{取 7 次} = {7th 次. 前 6 次 2 次}

组合数 C_6^2

总组合数 C_{10}^3

$P(\{\ldots\}) = \dfrac{C_6^2}{C_{10}^3}$

Outline

方法二：有编号 $\overbrace{1\quad 2\quad 3}^{次}\quad \overbrace{4\ \cdots\ 9\quad 10}^{正}$

$\{取7次\} = \{$ 3次中选1 $\rightsquigarrow C_3^1$

剩2次 C_2^2

7正中选4 C_7^4

6个排列 A_6^6

$C_7^4\cdot A_6^6$ $\}$

排列组合数 $C_3^1\cdot C_7^4\cdot A_6^6$

总排列…… A_{10}^7

$$P(\ldots)=\frac{C_3^1\cdot C_7^4\cdot A_6^6}{A_{10}^7}$$

Ω

1 2 3 ~~4 5 6 7~~

1 2 3 ~~5 6 7 8~~

1 3 2

2 1 3

2 3 1

Outline

35. a 红，b 白.

有放回取 1 球 $\rightsquigarrow$ $P(A_k)=\dfrac{a}{a+b}$

放回同色 c 球

$A_k=\{k\text{th 取红}\}$

Pf: $P(A_1)=\dfrac{a}{a+b}$.

假设 $P(A_k)=\dfrac{a}{a+b}$.

计算 $P(A_{k+1})=P(A_{k+1}\cdot A_k)+P(A_{k+1}\cdot\overline{A_k})$

$=P(A_{k+1}\mid A_k)\cdot P(A_k)+P(A_{k+1}\mid\overline{A_k})\cdot P(\overline{A_k})$

设 $x_1=(k-1)$次中取红次数 $\}\Rightarrow x_1+x_2=k-1$

$x_2=$ ...... 白 ...

$P(A_{k+1}\mid A_k)=\dfrac{a+x_1\cdot c+c}{a+b+k\cdot c}$

$P(A_{k+1}\mid\overline{A_k})=\dfrac{a+x_1\cdot c}{a+b+k\cdot c}$

随机变量

随机变量是根据出现的试验结果取实值的变量.
换言之, 随机变量以一定的概率取相应的函数值.
请指出下面随机现象结果的区别:

- 掷一次骰子, 出现的点数
- 家用电器的使用寿命
- 掷一枚硬币, 观察向上的面
- 抽取一件产品, 检查其是否合格

例子

- 掷一次骰子, 出现的点数 $X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- 家用电器的使用寿命 $X \in [0, \infty)$
- 掷一枚硬币, 观察向上的面
  $X \in \{0(\text{正面}), 1(\text{反面})\}$
- 抽取一件产品, 检查其是否合格
  $X \in \{0(\text{合格}), 1(\text{不合格})\}$

随机变量的定义

定义 2.1.1

设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间，称映射 $X: \Omega \to \mathbb{R}$ 为随机变量，如果对于任意 $x \in \mathbb{R}$，有

$$\Omega \xrightarrow{X} R$$

$$\mathcal{F} \xrightarrow{X} \{(a,b)\}$$

$$P \searrow [0,1] \swarrow X^*P[(a,b)] = P[\{\omega \mid X(\omega) \in (a,b)\}]$$

$$\{\omega | X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F} \tag{1}$$

事件域关于余、补、可数并封闭.

$\{\omega \mid X(\omega) \in (a,b)\} \in \mathcal{F}.$

这个定义包含了下面几个意思

- 随机变量是从样本空间到实轴的映射
- （可测）对于任意的 $x \in \mathbb{R}$，满足 (1)（反例见例题 2.1.1）

measurable
可测

$f: \Omega_1 \longrightarrow R$

$P[(-\infty, x]]$

$\overline{(-\infty, x]} = (x, +\infty)$

$(-\infty, x) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} (-\infty, x+\frac{1}{n}]$

$(x, y) = (-\infty, y) \cap \overline{(-\infty, x]}$

例 2.1.1

- 投骰子 $\omega_i = \{$点数为 i$\}$
- 基本事件空间 $\Omega_1 = \{\omega_1, \ldots, \omega_6\}$
- 事件 $A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$ 和 $B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$
- 事件域 $\mathcal{F}_3 = \{\Omega_1, \emptyset, A, B\}$
- 概率空间 $(\Omega_1, \mathcal{F}_3, P)$

1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0

定义映射

$$X : \Omega_1 \to \mathbb{R}$$
$$\omega_i \mapsto i$$

$P[\{\omega | X(\omega) \le 2\}]$

$= P[\{\omega_1, \omega_2\}]$

$= \begin{cases} \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}. \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{cases}$

由 $\{\omega \in \Omega_1 | X(\omega) \le 2\} = \{\omega_1, \omega_2\} \notin \mathcal{F}_3$ 得 X 不是 $(\Omega_1, \mathcal{F}_3, P)$ 上的随机变量。

随机变量和事件

假设, 给定 $a < b \in \mathbb{R}$

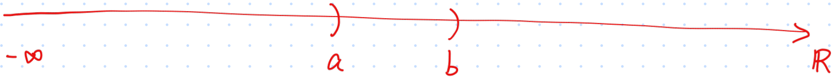
$$A = \{\omega : X(\omega) < a\}$$

$$B = \{\omega : X(\omega) < b\}$$

请定义下面的事件

$$\bar{A}, \quad \bar{B}, \quad A \cap B, \quad A - B = \begin{cases} \phi & a \le b \\ [b, a) & a > b \end{cases}$$

$[a, +\infty)$ $\quad$ $[b, +\infty)$ $\quad$ $A \cap B = (-\infty, \min\{a, b\})$



分布函数

定义 2.1.2

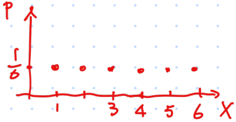
设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间, X 为随机变量, X 的 分布函数 F_X 定义为

$= P[X^{-1}((-\infty, x])]$

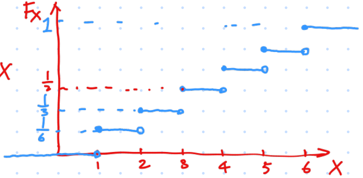
$$F_X(x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\}), \ \forall x \in \mathbb{R}$$

以后将 $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\}$ 简写为 $X \le x$.

骰子	概率
ω_1	$\frac{1}{6}$
ω_2	$\frac{1}{6}$
ω_3	$\frac{1}{6}$
ω_4	$\frac{1}{6}$
ω_5	$\frac{1}{6}$
ω_6	$\frac{1}{6}$



$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)\,dx$



分布函数和事件

根据分布函数的定义, 显然的

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a), \forall a < b \in \mathbb{R}$$

根据概率的上下连续性, 对于 $\forall a < b \in \mathbb{R}$, 有下面的事实

$$\begin{aligned}
P(X = a) &= F_X(a) - F_X(a-0), \\
P(a \leq X \leq b) &= F_X(b) - F_X(a-0), \\
P(a \leq X < b) &= F_X(b-0) - F_X(a-0), \\
P(a < X < b) &= F_X(b-0) - F_X(a)
\end{aligned}$$

当 $F_X(x)$ 在 a 连续时,
$F_X(a-0) = F_X(a+0) = F_X(a)$.

分布函数的性质

- **有界性** $0 \le F_X(x) \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$

证明.
因为对于任给的 $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x)$ 表示事件 $\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}$ 的概率, 根据概率的有界性可得. $\square$

- **单调性** 对于任意的 $x_1 < x_2$, 有 $F_X(x_1) \le F_X(x_2)$ 并且

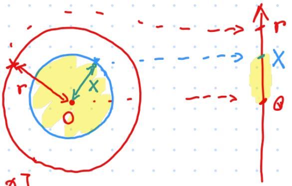
$$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1.$$

- **右连续性** $\lim_{x\to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$

$$\lim_{\substack{x_n = x_0+\frac{1}{n} \\ n\to+\infty}} P[X^{-1}(\underbrace{(-\infty, x_n]}_{= (-\infty, x_0+\frac{1}{n}]})] = P[\bigcap_n X^{-1}((-\infty, x_n])] = P[X^{-1}(\underbrace{\bigcap_n (-\infty, x_0+\tfrac{1}{n}]}_{(-\infty, x_0)})]$$

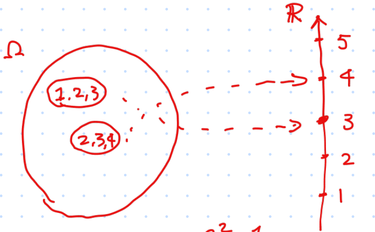
课堂练习

- 向半径为 r 的圆内随机抛一点，求此点到圆心距离 X 的分布函数，并且求 $P(X > \frac{2r}{3})$
- 口袋中有 5 个球，编号为 1,2,3,4,5，从中任取 3 个，以 X 表示 3 个球中最大的号码，求 X 的分布函数，并作图.



$P[X \le x]$

$= \dfrac{\text{Area}(B_x(o))}{\text{Area}(B_r(o))} = \dfrac{\pi x^2}{\pi r^2} = \dfrac{x^2}{r^2}$



$X \le 2 = \phi$ $\quad C_2^2 = 1$

$X = 3 = \{(1,2,3)\}$ $\quad C_3^2 = 3$

$X = 4 = \{(1,2,4),(1,3,4),(2,3,4)\}$

$X = 5 = \{ \ldots \}$ $\quad C_4^2 = 6.$

Outline

一维离散型随机变量 $\mathbb{N}$ $\mathbb{Q}=\{[\frac{p}{q}] \mid q\neq 0\in\mathbb{N}, p\in\mathbb{N}\}$

当随机变量只能取有限个或者可数个函数值的时候，称为 离散型随机变量.
设一个定义在概率空间 $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ 上的随机变量 X 只有可数个取值，记作 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$, 且

$$P(X=a_i)=p_i, \ \ i=1,2,\cdots,n,\cdots$$

通常称

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix}$$

的右端为 X 的 分布列，称 $(p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots)$ 为 概率分布.

分布列的性质

- $p_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots$
- $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$
- X 的分布函数为

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{a_i \leq x} p_i$$

$F_X(x)$ 的图像为右连续的阶梯函数.

$$P(b < X \leq c) = \sum_{b < a_i \leq c} p_i$$

课堂练习

一汽车沿着街道行驶，需要经过三个红绿灯，若每个信号灯显示红绿两种信号的时间相等，且各个信号灯工作相互独立．以 X 表示该汽车首次遇到红灯前已经通过的路口数，求 X 的分布列

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \geqslant 3^{?} \\ \frac{1}{2} & \left(\frac{1}{2}\right)^2 & \left(\frac{1}{2}\right)^3 & 1-\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^3 \end{pmatrix}$$