乘法公式

将条件概率公式变形, 就有 乘法公式

$$P(AB) = P(B)P(A|B)$$

乘法公式表示：事件 AB 同时发生的概率等于 B 发生的概率乘上在 B 发生的前提下 A 发生的概率.

例题

盒子里有 3 颗红球, 7 颗白球, 现从盒子中任取两次, 每次取出一个球, 并且取出的第一个 不放回.

- 已知第一次取出的是红球, 求第二次也取出红球的概率

首先规定事件 $A_i = \{第\ i\ 次取出的是红球\}$

例题

方法一: 第一次取出的是红球, 那么盒子中剩下 7 颗白球, 2 颗红球; 那么第二次再取出一个红球的概率就是 $2/9$, 所以条件概率事件

$$P(A_2|A_1) = 2/9$$

例题

方法二: 根据条件概率公式以及古典概率的计算办法

$$\frac{C_3^2}{C_{10}^2}$$

$$P(A_2|A_1) = \frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)} = \frac{\frac{3\times 2}{10\times 9}}{\frac{3}{10}} = 2/9$$

$$\frac{C_3^1}{C_{10}^1}$$

例题

盒子里有 3 颗红球, 7 颗白球, 现从盒子中任取两次, 每次取出一个球, 并且取出的第一个不放回.

- 两次取出的都是红球的概率

求 $P(A_1A_2) = ?$

例题

方法一：根据古典概率计算办法

$= \frac{C_3^2}{C_{10}^2}$

$$P(A_1A_2) = \frac{3 \times 2}{10 \times 9} = 1/15$$

方法二：根据乘法公式

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{15}$$

更一般的乘法公式

定理

设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是概率空间, $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \cdots, N$, 且 $P(A_1 A_2 \cdots A_{N-1}) > 0$, 那么

$$P(\underbrace{A_1 A_2 \cdots A_{N-1}}_{B} A_N) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \cdots P(A_N|A_1A_2\cdots A_{N-1})$$

$$= P(A_N|B) \cdot P(B)$$

$$P(B) = P(A_1A_2\cdots A_{N-1})$$

证明

对 n 用归纳法，当 $n=2$ 的时候，就是两个事件的乘法公式，论题自然成立.
假设当 $n=k$ 的时候，论题也成立，即

$$P(A_1A_2\cdots A_k)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_k|A_1\cdots A_{k-1})$$

当 $n=k+1$ 时，记 $B=A_1A_2\cdots A_k$,

$$P(A_1A_2\cdots A_{k+1})=P(B)P(A_k|B)$$

再根据归纳法

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1A_2\cdots A_k)\\&=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_k|A_1\cdots A_{k-1})\end{aligned}$$

所以当 $n=k+1$ 时，论题也成立.

例 1.3.2

还是在 54 张扑克牌中依次无放回抽取扑克的试验. 请计算当依次 无放回 的取出四张牌, 下面的事件发生的概率

- 取出的扑克的花色依次为黑桃, 红桃, 梅花和方块

例 1.3.2

把花色将黑桃, 红桃, 梅花, 方块记为花色 $1,2,3,4$, 并定义事件

$$A_{j,i}=\{\text{第 } j \text{ 次抽取到花色为 } i \text{ 的扑克}\}$$

则 $B_1=A_{1,1}A_{2,2}A_{3,3}A_{4,4}$ 根据乘法公式

$$\begin{aligned} & P(B_1) \\ =& P(A_{1,1})P(A_{2,2}|A_{1,1})P(A_{3,3}|A_{1,1}A_{2,2})P(A_{4,4}|A_{1,1}A_{2,2}A_{3,3}) \\ =& \frac{13}{54}\frac{13}{53}\frac{13}{52}\frac{13}{51} \end{aligned}$$

例 1.3.2

还是在 54 张扑克牌中依次无放回抽取扑克的试验.

- 取出的扑克的花色各不相同

$B_2 = \cup_{i_1,i_2,i_3,i_4} A_{1,i_1}A_{2,i_2}A_{3,i_3}A_{4,i_4}$, i_1, i_2, i_3, i_4 两两不相同

由概率的可加性: $P(B_2) = 4! \times P(B_1)$

Q: 能否从条件概率的角度思考?

例 1.3.2

还是在 54 张扑克牌中依次无放回抽取扑克的试验.

- 取出的扑克的花色全部相同

$B_3 = \sum_{i=1}^{4} A_{1,i}A_{2,i}A_{3,i}A_{4,i}$

$P(B_3) = 4 \times \boxed{\frac{13}{54}}\boxed{\frac{12}{53}}\boxed{\frac{11}{52}}\boxed{\frac{10}{51}}$

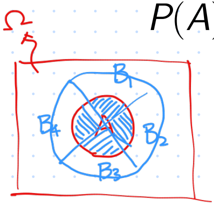
全概率公式

考虑这样的事件 A, 事件域中的某些不相容事件 $B_1, B_2, \cdots$ 存在一定的概率诱发 A 的发生, 那么根据全概率公式就可以计算 A 发生的概率.

全概率公式

设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间, $B_i \in \mathcal{F}$, $\boxed{P(B_i) > 0,}$ $i = 1, 2, \cdots$, 且 $\underline{B_i \cap B_j = \emptyset}$, $i \neq j$, 且 $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, 那么

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(AB_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \underline{P(B_i)}\,\underline{P(A|B_i)}$$



全概率公式

Q:

- 为什么需要条件 $P(B_i) > 0$?
- 为什么需要条件 $B_i \cap B_j = \emptyset$?

证明

因为 $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, 则 $A = A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. 又由于 $B_i \cap B_j = \emptyset, \forall i \neq j$. 故 $(A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = \emptyset$, 由概率的可列可加性

$$P(A) = P\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} AB_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(AB_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) P(A|B_i)$$

例 1.3.3

袋子中间有 $m+n$ 个乒乓球, 其中 m 个为红色, n 个为黄色. 现在从袋子中无放回的取两次, 每次取出一个球,

求第二次摸得的是黄球的概率.

$A_i = \{ i\text{th 摸得黄球} \}$

$P(A_2) = ?$

例 1.3.3

分析: 记 $A_i = \{$第 i 次取出的是黄球$\}$, 那么我们要求的就是 $P(A_2)$, 根据全概率公式

$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(A_1)P(A_2|A_1) + P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1}) \\ &= \frac{n}{m+n}\frac{n-1}{m+n-1} + \frac{m}{m+n}\frac{n}{m+n-1} \\ &= \frac{n}{m+n} \end{aligned}$$

思考题

思考

抽奖问题: 一共 $m+n$ 张奖券, 其中 m 张有奖, n 张没有奖, 请问第 k 个人抽中有奖奖券的概率.

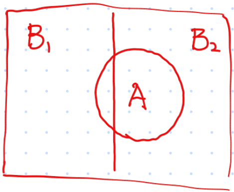
贝叶斯公式

定理

运用全概率公式, 若 $P(A) > 0$, 那么

$$P(B_j|A) = \frac{P(AB_j)}{P(A)} = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i)P(B_i)}$$

我们把 $P(B_1), P(B_2), \cdots$ 叫做 先验概率.
贝叶斯公式是根据已经发生的结果来推导某中诱因的可能性.



例 1.3.5

某无线电话运营商同时担负了 3 种制式的通话网络,

- 三种通话网络的市场占有率分别为 30%, 45% 和 25%,
- 各种网络的故障率为 0.3%, 0.2% 和 0.4%.

为最大限度的保证 网络出现故障时 有维护人员及时抢修, 该如何配置维护人员的百分比.

例 1.3.5

- 分析
- 因: $B_i = \{$用户选择第 i 种网络$\}$, B_1, B_2, B_3 是两两不相容事件.
- 果: $A = \{$用户的网络发生故障$\}$.

$P(B_i | A)$

解

- 计算先验概率

$$P(B_1) = 0.3, P(B_2) = 0.45, P(B_3) = 0.25$$

- 计算条件概率

$$P(A|B_1) = 0.003, P(A|B_2) = 0.002, P(A|B_3) = 0.004$$

- 由全概率公式计算

$$\begin{aligned} P(A) = &\sum_{i=1}^{3} P(A|B_i)P(B_i) \\ =&0.003 * 0.3 + 0.002 * 0.45 + 0.004 * 0.25 \\ =&0.0028 \end{aligned}$$

解

- 计算贝叶斯概率

$$P(B_1|A) = \frac{0.3 * 0.003}{0.0028} = 0.3214$$
$$P(B_2|A) = \frac{0.45 * 0.002}{0.0028} = 0.3214$$
$$P(B_3|A) = \frac{0.25 * 0.004}{0.0028} = 0.3571$$

事件的独立性

若 A 与 B 相互独立, 那么一次随机试验中, 事件 $A(B)$ 发生与否, 不影响 $B(A)$ 发生的概率.
譬如抛两个硬币的试验, 那么定义

- $A =$“第一个硬币为数字面”
- $B =$“第二个硬币是数字面”

显然 A 和 B 的发生是互不影响的

独立性的定义

定义

设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间, $A, B \in \mathcal{F}$, 如果

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

那么称 A 和 B 相互独立.

上面的定义有一个等价的表述:

$$P(A) = P(A|B).$$

$$\overset{=}{P(A|\Omega)}$$

$$\overset{\shortparallel}{\frac{P(AB)}{P(B)}}$$

例子

从一副 54 张的扑克中任取一张, 记

- $A=$ “取得的花色是黑桃”
- $B=$ “取到 K”

请问 A 和 B 是否独立?

如果拿掉红桃 A? 红桃 K? 黑桃 A? 黑桃 K?

$P(AB)=\frac{1}{54}$, $P(A)=\frac{13}{54}$, $P(B)=\frac{4}{54}$ $P(A) \overset{?}{=} P(A|B)$

拿掉 Joker:

$P(AB)=\frac{1}{52}$, $P(A)=\frac{1}{4}$, $P(B)=\frac{1}{13}$.

拿掉 黑桃K

$P(AB)=\frac{0}{51}$, $P(A)=\frac{12}{51}$, $P(B)=\frac{3}{51}$

事件的独立性

当 A 和 B 相互独立的时候，下面几组事件也是相互独立事件

$$A与\bar{B} \quad \bar{A}与B \quad \bar{A}与\bar{B}$$

例如：由于 $A\cap\bar{B}$ 与 $A\cap B$ 是不相容事件，而 $A=(A\cap\bar{B})\cup(A\cap B)$，所以

$$P(A)=P(A\cap\bar{B})+P(A\cap B)=P(A\cap\bar{B})+P(A)P(B)$$

故

$$\begin{aligned}P(A\bar{B}) =& P(A)-P(A)P(B)\\ =& P(A)(1-P(B))=P(A)P(\bar{B})\end{aligned}$$

多个事件相互独立

定义

设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间, $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{F}$, 如果以下等式

$$P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j),\ 1 \le i < j \le n$$
$$P(A_iA_jA_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k),\ 1 \le i < j < k \le n$$
$$\cdots\cdots$$
$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

都成立, 则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立.

多个事件相互独立

相互独立的一系列事件有下面的性质:

- 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立, 则 $A_{k_1}, A_{k_2}, \cdots, A_{k_s}$ 也相互独立, $2 \leq s < n$, $k_1 < k_2 < \cdots < k_s$.
- 若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 相互独立, 则将其中的任意 s 个换成其对立事件, 所得的 k 个事件也相互独立.

试验的独立性

请思考下面的随机试验有什么相似点

- 投掷 n 次硬币观察正反
- 检查 n 件产品是否合格
- 投掷一枚硬币观察正反并检查一件产品是否合格

独立随机试验

定义

设有随机试验 $E_1, E_2, \cdots, E_n$, 如果对 E_i 的任意结果（事件）A_i, $i = 1, 2, \cdots, n$, 都有

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

则称随机试验 $E_1, E_2, \cdots E_n$ 相互独立.

多重独立试验

假设 n 个试验的条件相同, 可能出现的结果也相同. 最简单的 n 重独立试验是所谓的 n 重伯努利试验, 其中每个试验都只有两个可能的结果, 比如成功 (A) 和失败 $(\bar{A})$.

定理

设伯努利试验中 $P(A) = p$, 则 n 重独立伯努利试验中恰好成功 k 次的概率为

C_n^k

$$b(k; n, p) = \cancel{\binom{n}{k}} p^k (1-p)^{n-k}$$

$C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

n 实验 ···

多重伯努利试验

从定理 1.3.4 可以看出, \$n\$ 重伯努利试验中, 每次试验的结果, 即随机事件只有 A 和 $\bar{A}$. 每次的试验结果是不互相影响的, 所以当进行 \$k\$ 次试验的时候, 等价于进行 \$k\$ 次独立的试验, 计算这 \$k\$ 次试验的积事件的概率, 比如 $A_1A_2\cdots A_k$, 其中 $A_i \in \{A, \bar{A}\}$, 等价于 k 次试验分别出现这些事件的概率的简单乘积, 即

$$P(A_1A_2\cdots A_k) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_k).$$

独立试验的应用

$\{A, B, C, D, E\}$ 5 个人参与一项药物的疗效测试，该药物治愈的概率为 0.6，求

- A，B 都被治愈的概率 0.6^2
- 五个人中有两个人被治愈的概率
- 五个人中至少有两个人被治愈的概率

$$P(A_2) = C_5^2 \times 0.6^2 \times (1-0.6)^{5-2}$$

$$\begin{aligned}
P(A_{\geq 2}) &= P(A_2 + A_3 + A_4 + A_5) \\
&= P(\Omega - (A_0 + A_1)) \\
&= P(\Omega) - P(A_0) - P(A_1) \\
&= 1 - C_5^0 \times 0.6^0 \times (1-0.6)^{5-0} - C_5^1 \times 0.6^1 \times (1-0.6)^{5-1}
\end{aligned}$$