Ch 6. 数理统计的基本概念

钟友良

zhongyl@scut.edu.cn

Outline

Outline

6.0 前言

6.1 总体、样本和统计量

6.3 抽样分布

Outline

概率与统计

概率论和统计的区别:

- 概率论: 已知随机变量 X 的分布 (分布列或者分布密度函数), 进而根据分布进行事件概率和矩计算
- 统计: 总体的分布未知或者不完全已知的情形下, 通过抽样并研究抽样得到数据的统计特征, 并估计总体的分布。

问题提出

对某个学校的小学生身高 X 进行调查，确定其分布函数？X 为待研究的 总体 ，构成总体的每个成员被称为一个 个体 。

研究方法

对总体进行 简单随机抽样 ， 并根据抽样结果推断整体。

抽样：从 X 中随机的抽出 n 个个体，记为 n 维样本 。由于抽取的个体是随机的，即无法提前预知其数值，样本为 n 维随机向量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$。

简单随机抽样

independent identical distribution

$X_i \overset{i.i.d.}{\sim} P$

简单随机抽样:

- 样本与总体 同分布
- $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立

总体与样本

- 总体: 总体是一个分布待确定的随机变量 X。总体中包含很多个 个体 。
- 样本: 从总体中随机抽取的 n 个个体，为 n 维随机向量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$。对样本进行一次观测，记 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为样本的一个 观测值 。

分布函数

命题 6.1.1:
设总体 $X \sim F_X(\cdot, \theta)$, $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为其样本,
那么

$$F_{X_1, X_2, \cdots, X_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta)$$
$$= F_X(x_1, \theta) F_X(x_2, \theta) \cdots F_X(x_n, \theta)$$

经验分布函数

问题：由样本估计总体的分布函数。

经验分布函数：设总体的样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的一次观测值为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，并将其进行升序排列 $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(\overset{n}{\cancel{10}})}$，并定义

$$F_n^X(x) = \begin{cases} 0, & x < x_{(1)} \\ \cdots & \\ \dfrac{k}{n}, & x \in \left[x_{(k)}, x_{(k+1)}\right) \\ \cdots & \\ 1, & x \geq x_{(n)} \end{cases}$$

$\parallel$

$P(X \leq x)$

称 F_n^X 为总体 X 的一个经验分布函数，或样本分布函数。

经验分布函数的例子

- 抛硬币
- 投骰子

正 = 0，反 = 1

$X \sim B(1,p)$

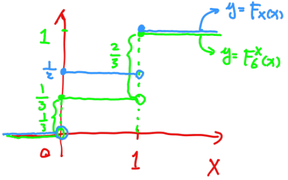
$X_1,\dots,X_6 \sim B(1,p)$

一次观测 $(1,0,1,1,1,0)$

$x_{(1)} \le x_{(2)} \le \dots \le x_{(5)} \le x_{(6)}$

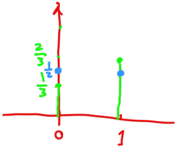
$0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1.$

$$F_6^X(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{2}{6}=\frac{1}{3}, & 0 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x \end{cases}$$

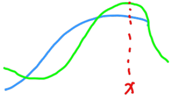


$P_6^X(X=0) = \lim\limits_{0^+} F_X^6(x) - \lim\limits_{0^-} F_X^6(x) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$

$F_6^X(X=1) = \lim\limits_{1^+} \dots \lim\limits_{1^-} \dots = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$



Glivenko 定理



设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自总体 X 的容量为 n 的样本，总体的分布函数为 $F_X(x)$，$F_n(x)$ 为其经验分布函数，那么

$\sup_{x\in\mathbb{R}}$

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \boxed{sup_{-\infty<x<\infty}} \left| F_n^X(x) - F_X(x) \right| = 0\right) = 1$$

$(X_1,\ldots,X_n) \sim F_X(x_1)\cdot F_X(x_2)\cdot\ldots\cdot F_X(x_n)$

上面的结果说明，就是当样本容量足够大的时候，用经验分布函数来推断总体的分布函数是合理的。

练习

某食品厂生产饮料，现在从生产线 (X) 上任意抽取 5 瓶，称得重量依次为 (g)

$$351 \quad 347 \quad 351 \quad 344 \quad 351$$

请写出总体 X 的经验分布函数

统计量

注意下面这个关系

$$\text{样本} \xrightarrow{\text{统计量}} \text{总体}$$

统计量是通过样本研究总体的手段
统计量是样本的函数，不含有任何未知参数，即
统计量由样本唯一决定。

常用统计量

- 样本均值:

$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X=x_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- 样本方差:

$E[(X-EX)^2] \sim E[(X-\overline{X})^2] = \sum_{i}(X_i-\overline{X})^2 \cdot P(X=X_i)$

$= \frac{1}{n}\sum_{i}(X_i-\overline{X})^2$

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

常用统计量

- 修正样本方差

$$S_n^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{n}{n-1}S_n^2$$

- 样本的 k 阶原点矩

$$\overline{X^k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

- 样本的 k 阶中心矩

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k$$

常用统计量

- 顺序统计量 $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$，其中 $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$, $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$，而 $X_{(k)}$ 是将 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的取值从小到大排列的第 k 位的值。
- 样本中位数

$$\tilde{X} = \begin{cases} X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}, & \text{若}n\text{为奇数} \\ \frac{1}{2}\left(X_{\left(\frac{n}{2}\right)} + X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\right), & \text{若}n\text{为偶数} \end{cases}$$

- 样本极差

$$R_n^X = X_{(n)} - X_{(1)}$$

Outline

6.0 前言

6.1 总体、样本和统计量

6.3 抽样分布

总体 $X \sim P$

个体 $X_1, \ldots\ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} P$

样本 $(X_1, \ldots\ldots, X_n)$

概率 已知 $\longrightarrow$ 未知

统计 未知 $\longleftarrow$ 已知

数字特征：依赖于 P

原点矩：1阶 $= \mathbb{E}X$

中心矩：2阶 $= \mathrm{Var}X$

统计量：只依赖样本

样本……：$\bar{X} := \frac{1}{n}\sum X_i \quad (\mathbb{E}\bar{X} = \mathbb{E}X)$

样本……：$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum (X_i - \bar{X})^2$

$\left(\mathbb{E}[S_n^2] = \frac{n-1}{n} \cdot \mathrm{Var}X\right)$

修正

$S_n^{*2} = \frac{n}{n-1} S_n^2$

$(\mathbb{E} S_n^{*2} = \mathrm{Var}X)$

排序 $X_{(1)} \le \ldots \le X_{(k)} \le \ldots \le X_{(n)}$

抽样分布

设计合适的统计量可以用来研究总体的数字特征和参数。

命题 6.3.1: 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自总体 X 的样本，$E[X] = \mu$，$Var[X] = \sigma^2$，那么

- $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum X_i \longrightarrow EX = \mu.$

$$E[\overline{X}] = \mu, \quad Var[\overline{X}] = \frac{\sigma^2}{n}$$

-

$$E[S_n^2] = \frac{n-1}{n}\sigma^2, \quad E[S_n^{*2}] = \sigma^2$$

$< \sigma^2$

$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_i (X_i - \bar{X})^2$

$\rightarrow Var X = \sigma^2$

$\frac{n}{n-1} S_n^2 = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{1}{n} \sum (X_i - \bar{X})^2$

$= \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2$

抽样分布

证明:

$$E[\overline{X}] = E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu = \mu$$

再由 X_i 之间的独立性有

$$Var[\overline{X}] = Var[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var[X_i]$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

抽样分布

对于 S_n $\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}X)^2]$

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_i X_i$$

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2\overline{X}X_i + \overline{X}^2)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2\overline{X}\sum_{i=1}^{n}X_i + n\overline{X}^2\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \overline{X}^2$$

抽样分布

所以

$$E[S_n^2] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i^2] - E[\overline{X}^2]$$

$E[X_i^2] - E[X_i]^2 + E[X_i]^2$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Var[X_i] + (E[X_i])^2) - (Var[\overline{X}] + (E[\overline{X}])^2)$$

$Var\left[\frac{\sum X_i}{n}\right] = \frac{1}{n^2}\sum Var[X_i]$

$= \frac{1}{n^2}\cdot n\cdot\sigma^2 = \frac{1}{n}\sigma^2$

$$= \sigma^2 + \mu^2 - \frac{\sigma^2}{n} - \mu^2$$

$$= \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

$$E[S_n^{*2}] = E\left[\frac{n}{n-1}S_n^2\right] = \frac{n}{n-1}E[S_n^2] = \sigma^2$$

χ^2 分布

chi-square 卡方

[tʃai]

命题 6.3.2:
设总体 $X \sim N(0,1)$，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为其简单随机样本，则

$\frac{1}{n}\sum X_i^2$

$$\boldsymbol{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \sim \chi^2(n)}$$

其中

例 2.4.2

Recall $X \sim N(0,1)$

$$\chi^2(n) = \Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}).$$

$\Rightarrow Y = X^2 \sim \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} \cdot y^{\frac{1}{2}-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}y}, & y > 0 \\ 0 & y \le 0 \end{cases}$

$(\frac{1}{2})^n \cdots\cdots$

一般地 $\Gamma(\alpha, \lambda)$ 的密度为

$\begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot y^{\alpha-1} \cdot e^{-\lambda y}, & y > 0 \\ 0 & y \le 0 \end{cases} \xrightarrow{(\alpha,\lambda) = (\frac{n}{2}, \frac{1}{2})} \begin{cases} \frac{(\frac{1}{2})^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot y^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}y} & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{cases}$

χ^2 分布 chi-square distribution 卡方分布.

若 $X \sim \Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$，则称 X 服从自由度为 n 的 χ^2 分布，记为 $X \sim \chi^2(n)$，其分布密度函数为

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

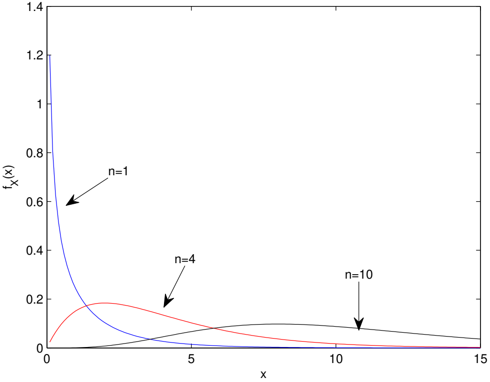
$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

χ^2 分布图像

根据例题 2.4.2，当 $X \sim N(0,1)$，

$$X^2 \sim \chi^2(1)$$

即 X^2 服从自由度为 1 的 χ^2 分布。



χ^2 分布的性质

$X=\sum X_i^2$ $\quad E[\bar{X}]=1$

$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum X_i^2$ $\quad Var[\bar{X}]=\frac{2}{n}$

- 若 $X \sim \chi^2(n)$，那么 $E[X]=n$， $Var[X]=2n$。
- 若 $X_1 \sim \chi^2(n_1)$， $X_2 \sim \chi^2(n_2)$， 且 X_1 与 X_2 独立，那么 $X_1+X_2 \sim \chi^2(n_1+n_2)$。
- 若 $X \sim \chi^2(n)$，那么 $\frac{X-n}{\sqrt{2n}}$ 近似服从 $N(0,1)$，当 $n \to \infty$

①

记 $X_i \sim N(0,1)$

$X=\sum X_i^2$

则 $E[X]=E[\sum X_i^2]$

$=n\cdot E[X_i^2]$

$=n\cdot(VarX_i+(E[X_i])^2)$ $\quad$ 0

$=n\cdot\sigma^2=n.$

$Var[X]=Var[\sum X_i^2]$

$=\sum Var[X_i^2]=n\cdot Var[X_i^2]$

$=n\left(\underbrace{E[X_i^4]}_{峰度}-(E[X_i^2])^2\right)$

$=n\cdot(3\cdot VarX_i^2-VarX_i^2)=n\cdot 2\cdot VarX_i^2=2n$

②

$X_1=X_1^2+\dots+X_{n_1}^2$

$X_2=(X_1')^2+\dots+(X_{n_2}')^2$

$X_1+X_2=X_1^2+\dots+X_{n_1}^2+(X_1')^2+\dots+(X_{n_2}')^2$

$=X_1''+\dots+X_{n_1+n_2}''$

...

③

$\bar{X}=\frac{X-EX}{\sqrt{VarX}}=\frac{X-n}{\sqrt{2n}}$

by CLT. . . . .

习题 6.2

设 $(X_1, X_2, \cdots, X_5)$ 是来自总体 $N(0, 4)$ 的一个样本，且

$$Y = aX_1^2 + b(2X_2 + 3X_3)^2 + c(4X_4 - X_5)^2$$

$$4a\cdot\left(\frac{X_1}{2}\right)^2 \qquad 52b\cdot\left(\frac{2X_2+3X_3}{\sqrt{52}}\right)^2 \qquad 68c\cdot\left(\frac{4X_4-X_5}{\sqrt{68}}\right)^2$$

请问 $a, b, c > 0$ 取什么值的时候，随机变量 Y 服从 $\chi^2(n)$ 分布，n 为多少？

$(4^2+(-1)^2)\times 4$

$X_1 \sim N(0,4)$

$\frac{X_1}{2} \sim N(0,1)$

$2X_2+3X_3 \sim N(0,52)$

where $\mu = 0$

$\sigma^2 = Var[2X_2+3X_3]$

$= 2^2\cdot VarX_2 + 3^2\cdot VarX_3$

$= 4\times 4 + 9\times 4 = 52.$

$\Rightarrow \frac{2X_2+3X_3}{\sqrt{52}} \sim N(0,1)$

$4X_4 - X_5 \sim N(0,68)$

$\Rightarrow \frac{4X_4-X_5}{\sqrt{68}} \sim N(0,1).$

取 $Y_1 = \frac{X_1}{2}$, $Y_2 = \frac{\cdots\cdots}{\sqrt{52}}$, $Y_3 = \frac{\cdots}{\sqrt{68}}$

则 $Y = 4a\cdot Y_1^2 + 52b\cdot Y_2^2 + 68c\cdot Y_3^2$ $(Y_i \sim N(0,1))$

要使 $Y \sim \chi^2(n)$

有 $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{52}$, $c = \frac{1}{68}$, $n = 3$

#

习题 6.6

设 $X_1, X_2, \cdots, X_{20}$ 是来自总体 $X \sim N(0,1)$ 的一个样本，记

$$Y = \frac{1}{10}\left(\sum_{i=1}^{10} X_i\right)^2 + \frac{1}{10}\left(\sum_{i=11}^{20} X_i\right)^2$$

请问 Y 服从什么分布?

$$\left.\begin{array}{l} Y_1 = \sum_{i=1}^{10} X_i \sim N(0,10) \\ Y_2 = \sum_{i=11}^{20} X_i \sim N(0,10) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{Y_i}{\sqrt{10}} \sim N(0,1)$$

$$Y = \left(\frac{Y_1}{\sqrt{10}}\right)^2 + \left(\frac{Y_2}{\sqrt{10}}\right)^2$$

$$\sim \chi^2(2)$$

t 分布

Student's t- distribution

↳ pseudonym of William Gosset

命题 6.3.3: 设 $X \sim N(0,1)$， $Y \sim \chi^2(n)$， 且 X 与 Y 相互独立， 令

$$\boldsymbol{T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)}$$

$X_i \sim P$ with $\mathbb{E}P = \mu$

$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum X_i$

方差 $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_i (X_i - \bar{X})^2$

↳ 标准差 $\sqrt{\frac{S_n^2}{n}}$

标准化 $\bar{X}_n$ 为 $\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{S_n^2}{n}}}$

if $X_i \sim N(0,1)$

then 标准化 $\bar{X}_n \sim t(n)$

$$\frac{X}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum X_i^2}} = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$$

$Y = \sum X_i^2$

则 T 的分布密度函数 f_T 为

$$f_T(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

t 分布图像

$X \sim t(n)$ 表示 X 服从自由度为 n 的 t 分布

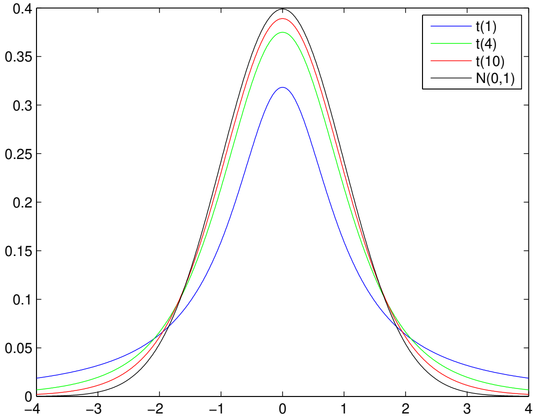


图: $t(n)$ 分布密度函数

t 分布的性质

- t 分布关于原点对称 $\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$
- 当 $n \to \infty$，$t(n)$ 趋于标准正态分布
- $e^{x} = (1+\frac{x}{n})^{n}$

$$E[X] = 0(n > 1), Var[X] = \frac{n}{n-2}(n > 2)$$

$X \sim N(0,1)$

$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$

$$f_T(n) = \underbrace{\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})}}_{\mathrm{I}} \cdot \underbrace{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}}_{\mathrm{II}}$$

$$\mathrm{II} = \left(\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{n+1}\right)^{-\frac{1}{2}} \to \left(e^{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\therefore f_T(n) = \mathrm{I}\cdot\mathrm{II} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$\Rightarrow t(n) \to N(0,1)$

$E[X] = 0$ （$\because$ 对称）

$Var[X] = \frac{n}{n-2}$ (use Beta func).

I: Stirling's approximation: for large α

$$\Gamma(\alpha) = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} \cdot \left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha}\left(1+O\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{\sqrt{\frac{2\pi}{(n+1)/2}} \cdot \left(\frac{(n+1)/2}{e}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \left(1+O\left(\frac{2}{n+1}\right)\right)}{\sqrt{\frac{2\pi}{n/2}} \cdot \left(\frac{n/2}{e}\right)^{n/2}\left(1+O\left(\frac{2}{n}\right)\right)} = \left(\frac{n+1}{2e}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}_{\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\mathrm{I} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \to \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \times \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

习题 6.4

设 $(X_1, X_2, \cdots, X_9)$ 是来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，请确定正数 C，使得

$$\frac{C(X_1+X_2+X_3)}{\sqrt{(X_4+X_5)^2+(X_6+X_7)^2+(X_8+X_9)^2}}$$

服从 t 分布，并指出其自由度。

$Y_1 = X_1+X_2+X_3 \sim N(0,3)$

$\underbrace{X_4+X_5}_{Y_2}, \underbrace{X_6+X_7}_{Y_3}, \underbrace{X_8+X_9}_{Y_4} \sim N(0,2)$

要使 $\cdots \sim t(n)$.

则 $\frac{C}{\sqrt{2}} = 1$ i.e. $C = \sqrt{2}$.

$n = 3$

$$\frac{CY_1}{\sqrt{Y_2^2+Y_3^2+Y_4^2}} = \frac{\sqrt{3}C \cdot Z_1}{\sqrt{2(Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)}} \quad \left(\because \; Z_1 = \frac{Y_1}{\sqrt{3}} \quad Z_i = \frac{Y_i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}C}{\sqrt{2}} \cdot \frac{Z_1}{\sqrt{Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2}}$$

$$= \frac{C}{\sqrt{2}} \frac{Z_1}{\sqrt{\frac{Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2}{3}}}$$

F 分布

Fisher

命题 6.3.4：若 $X \sim \chi^2(m)$，$Y \sim \chi^2(n)$，且 X 与 Y 相互独立，令

$\frac{1}{Z} = \frac{Y/n}{X/m} \sim F(n,m).$

$$\boldsymbol{Z = \frac{X/m}{Y/n} \sim F(m,n)},$$

则 Z 的分布密度函数为

$$f_Z(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} m^{\frac{n}{2}} n^{\frac{m}{2}} \dfrac{x^{m/2-1}}{(mx+n)^{(m+n)/2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

称随机变量 Z 服从第一自由度为 m，第二自由度度 n 的 F 分布，记作 $Z \sim F(m,n)$。

F 分布图像

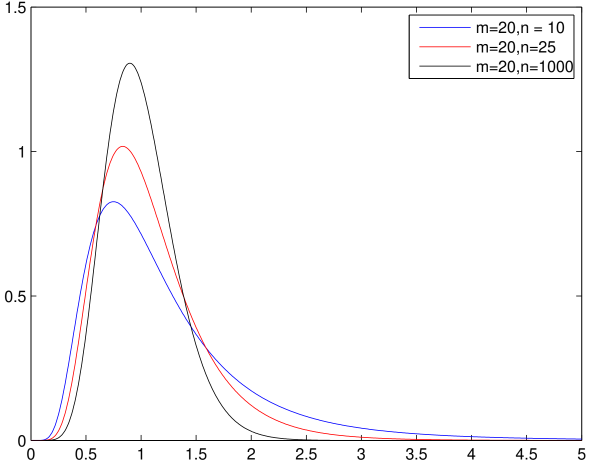


图: $F(m,n)$ 分布密度函数

F 分布

$Z \sim F(m,n)$，那么 $\frac{1}{Z} \sim \boldsymbol{F(n,m)}$。
证明:

$$
\begin{aligned}
F_{\frac{1}{Z}}(t) &= P(\frac{1}{Z} \leq t) \\
&= P(Z \geq \frac{1}{t}) \\
&= 1 - P(\underset{\sim F(m,n).}{Z} < \frac{1}{t}) \\
&= 1 - \int_0^{\boxed{\frac{1}{t}}} f_Z(x)dx
\end{aligned}
$$

F 分布

$$= \frac{d\frac{1}{t}}{dt}\cdot\frac{dF_{\frac{1}{Z}}(t)}{d\frac{1}{t}} = -\frac{1}{t^2}\cdot\frac{d}{d\frac{1}{t}}\left(1-\int_0^{\frac{1}{t}} f_Z(x)dx\right)$$

$$f_{\frac{1}{Z}}(t) = \frac{d}{dt}F_{\frac{1}{Z}}(t) = t^{-2}f_Z(\frac{1}{t}) \qquad = \frac{1}{t^2}\cdot\frac{d}{d\frac{1}{t}}\int_0^{\frac{1}{t}} f_Z(x)dx$$

$$f_Z(x) = C_{m,n}\cdot\frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(mx+n)^{\frac{m+n}{2}}}$$

$$= t^{-2}C_{m,n}\frac{t^{1-\frac{m}{2}}}{\left(mt^{-1}+n\right)^{\frac{m+n}{2}}}$$

$$= t^{-2}C_{m,n}\frac{t^{\frac{m+n}{2}-\frac{m}{2}+1}}{\left(nt+m\right)^{\frac{m+n}{2}}}$$

$$= C^{n,m}_{\cancel{m,n}}\frac{t^{\frac{n}{2}-1}}{\left(nt+m\right)^{\frac{m+n}{2}}}$$

(相当于 m,n 交换

$\Rightarrow \frac{1}{Z} \sim F(n,m)$

其中

$$C_{m,n} = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}m^{\frac{n}{2}}n^{\frac{m}{2}}$$

习题 6.3

设 $X_1, X_2, \cdots, X_8$ 是来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，求常数 c，使得

$$\frac{c(X_1^2+X_2^2)}{(X_3+X_4+X_5)^2+(X_6+X_7+X_8)^2}$$

服从 F 分布，并指出其自由度

$Y_1 = \frac{X_3+X_4+X_5}{\sqrt{3}}$, $Y_2 = \frac{X_6+X_7+X_8}{\sqrt{3}} \sim N(0,1)$

原 r.v. $= \frac{c}{3} \cdot \frac{(X_1^2+X_2^2)/2}{(Y_1^2+Y_2^2)/2}$ $\quad (X_1^2+X_2^2) \to \chi^2(2)$, $\quad (Y_1^2+Y_2^2) \to \chi^2(2)$

服从 $F(2,2)$

计 $c=3$

分位数

分位数: 设 $X \sim \phi(n)$, $0 < \alpha < 1$, 称满足

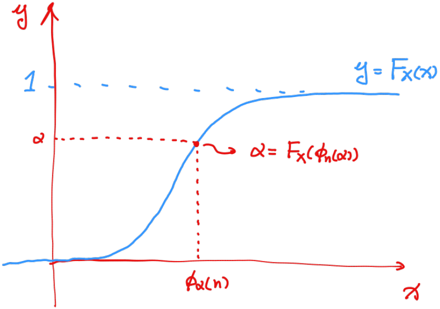
$$P(X \leq \phi_\alpha(n)) = \alpha$$

的实数 $\phi_\alpha(n)$ 为分布 $\phi(n)$ 的 α 分位数，或叫做 α 分位点。

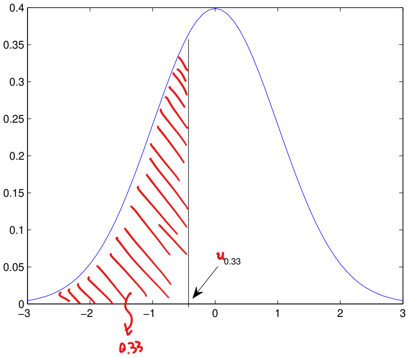
Fix n.

$F_X(\phi_\alpha(n)) = P(X \leq \phi_\alpha(n)) = \alpha$

$\Rightarrow \phi_\alpha(n) = F_X^{-1}(\alpha)$



分位数



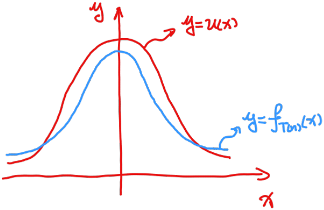
上图是标准正态分布的密度区线，其中 $u_{0.33}$ 是其 0.33 分位点，表示

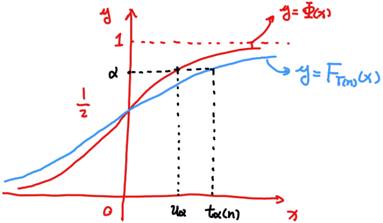
$$P(X \leq u_{0.33}) = 0.33$$

计算 t 分位数

若 $X \sim t(n)$，由于 $\lim_{n\to\infty} X \sim N(0,1)$，

$$\lim_{n\to\infty} t_\alpha(n) = u_\alpha$$





练习

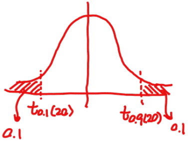
$t_{0.95}(10), t_{0.1}(20), t_{0.9}(50)$

查表 (P.228)

$t_{0.95}(10) = 1.8125$

$t_{0.1}(20) = -t_{0.9}(20)$

$= -1.3253$



$t_{0.9}(50) \sim u(0.9) \approx 1.282$

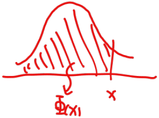
1.299

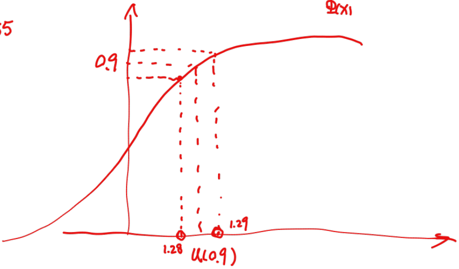
$\approx \dfrac{1.28+1.29}{2} = 1.285$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	. . . . .	0.08	0.09
0.0							
0.1							
0.2							
0.3							

$x = 0.2 + 0.03$
$= 0.23$

$x \rightsquigarrow \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$





计算 χ 分位数

$X \sim \chi^2(n)$

$\Rightarrow \begin{cases} EX = n \\ VarX = 2n \end{cases} \Rightarrow$ 标准化 $\dfrac{X-n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{CLT} N(0,1)$

- 若 $X \sim \chi^2(n)$ 分布，当 $n \to \infty$，$(X-n)/\sqrt{2n} \sim N(0,1)$，所以

$$\begin{aligned} \alpha &= P(X \le \chi^2_\alpha(n)) \\ &= P((X-n)/\sqrt{2n} \le (\chi^2_\alpha(n) - n)/\sqrt{2n}) \end{aligned}$$

即

n 较大时.

$$u_\alpha \approx (\chi^2_\alpha(n) - n)/\sqrt{2n}$$

解出

$$\boldsymbol{\chi^2_\alpha(n) \approx n + \sqrt{2n}u_\alpha}, \quad n \to \infty$$

练习

$$\chi^2_{0.99}(10), \chi^2_{0.05}(20), \chi^2_{0.95}(60)$$

查表 P.229

$\chi^2_{0.99}(10) = 23.209$

$\chi^2_{0.05}(20) = 10.851$

$\chi^2_{0.95}(60) \approx n + \sqrt{2n} \cdot u_{0.95}$ where $n = 60$

$= 60 + \sqrt{2 \times 60} \times u_{0.95}$

计算 F 分位数

若 X 服从 $F(m,n)$，则有 $\overset{Y=}{\boxed{\frac{1}{X}}} \sim F(n,m)$，若已知 $F_\alpha(m,n)$，那么

$$\alpha = P(X < F_\alpha(m,n)) = P(\frac{1}{X} > \frac{1}{F_\alpha(m,n)})$$

$$= 1 - P(\frac{1}{X} \le \frac{1}{F_\alpha(m,n)})$$

$X \sim F(m,n)$

$\Rightarrow Y = \frac{1}{X} \sim F(n,m)$

即

$$P(\frac{1}{X} \le \frac{1}{F_\alpha(m,n)}) = 1-\alpha \quad \checkmark$$

$\overset{\shortparallel}{P}[Y \le \frac{1}{F_\alpha(m,n)}]$ $(Y \sim F(n,m))$

也即

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{F_\alpha(m,n)} = F_{1-\alpha}(n,m)}$$

练习

$$F_{0.99}(5,4), F_{0.05}(3,7)$$

查表 P.238

$$P_{0.99}(5,4) = 15.5$$

由 $F_{\alpha}(m,n) = \dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n,m)}$

得 $F_{0.05}(3,7) = \dfrac{1}{F_{1-0.05}(7,3)} = \dfrac{1}{F_{0.95}(7,3)} = \dfrac{1}{8.89}$