学习重点

本章将要学习几种特殊的离散型随机变量，它们分别服从以下的分布

- 二项分布
- 泊松分布
- 几何分布

二项分布

定义

若一个随机变量的取值为 $0, 1, 2, \cdots, n$, 且对 $k = 0, 1, \cdots, n$,

$$P(X = k) = b(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

这里我们称 X 服从 二项分布, 记为 $X \sim B(n, p)$. 特别的, 如果 $n = 1$, 那么 X 只有 0 和 1 两个取值, 我们称 X 服从 两点分布. 进一步, 若 $p = 1$ 或者 0, 那么两点分布退化为 单点分布.

二项分布的性质

若 $X \sim B(n, p)$, 则

- $P(X = k) \geq 0$,
- 由二项式定理,

$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = (p+(1-p))^n$

$$\sum_{k=0}^{n} P(X = k) = 1,$$

- $$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} b(i; n, p)$$

二项分布的例子

记 n 重伯努利试验中成功的次数为 X, 且一次成功的概率为 p, 那么

$$X \sim B(n, p)$$

那么 n 次试验中成功 k 次的概率为

$$P(X = k) = b(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

例 2.2.1

设 $X \sim B(10, 0.9)$, 求 $P(X = 8)$, $P(X \le 8)$, $P(3 \le X \le 9)$.

$$P(X=8) = C_{10}^{8} \cdot 0.9^{8} \cdot (1-0.9)^{10-8}$$

$$P(X \le 8) = \sum_{k=0}^{8} P(X=k)$$

$$P(3 \le X \le 9) = P(X \le 9) - P(X \le 2)$$

$$= P(X \le 8) + P(X=9)$$

$$- (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2))$$

例 2.2.2

导弹击中目标的概率为 0.96。
问：要发射多少枚导弹保证目标被击中的概率至少 0.999?

设发射 n 枚导弹.

则命中目标 $P_n(X \geq 1) \geq 0.999$

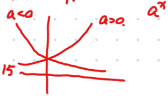
其中 X 为刚好命中的导弹数.

$$P_n(X \geq 1) = 1 - P_n(X < 1)$$
$$= 1 - P_n(X = 0)$$
$$= 1 - (1-p)^n$$
$$= 1 - (1-0.96)^n$$

得到不等式方程 $1 - 0.04^n \geq 0.999$.

i.e. $\underline{0.04^n} \leq 10^{-4}$

$$n \geq \frac{\log 10^{-4}}{\log 0.04} \approx 2.15$$



课堂练习

- 设某种药物的治愈率是 0.6, 请问需要同时治疗多少位病人, 才能使得至少有一位病人的治愈率为 90%
- 设随机变量 $X \sim B(2, p)$, $Y \sim B(3, p)$, 若 $P(X \geq 1) = 5/9$, 求 $P(Y \geq 1)$.

记 n 为治疗病人数量.

X: 刚好被治愈的数量.

则 $X \sim B(n, p)$ where $p = 0.6$.

要求 $P(X \geq 1) \geq 0.9$

i.e. $P(X=0) < 0.1$

$(1-0.6)^n < 0.1$

$0.4^n < 0.1$

$n > \frac{\log 0.1}{\log 0.4} \approx 2.51$

$P(X \geq 1) = \frac{5}{9}$

$\Rightarrow P(X=0) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$

$\Rightarrow (1-p)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow 1-p = \frac{2}{3} \Rightarrow p = \frac{1}{3}$.

$\therefore P(Y \geq 1) = 1 - P(Y=0)$

$= 1 - (1-p)^3$

$= 1 - (1-\frac{1}{3})^3 = \frac{19}{27}$

二项分布的极值

定理 2.2.1

设 $X \sim B(n, p)$，当 $(n+1)p$ 为整数 m 时，X 取 m 和 $m-1$ 的概率最大，且 $b(m; n, p) = b(m-1; n, p)$；当 $(n+1)p$ 不为整数时，X 取 $\lfloor (n+1)p \rfloor$ 的时候概率最大.

$k=1,\ n = 2k,\ p = \frac{1}{2}.\quad \lfloor (n+1)p \rfloor = \lfloor \frac{2k+1}{2} \rfloor = k$

$n = 2k+1,\ p = \frac{1}{2},\quad (n+1)p = \frac{2k+1+1}{2} = k+1$

$\rightsquigarrow k+1,\ k.$

$k \sim (n+1)p.$

$p'(k) = P(k) - P(k-1) \to 0$

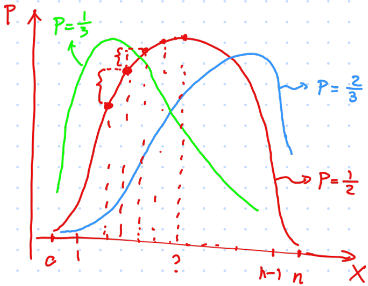
$\frac{n+1}{k} - 1 \sim \frac{1}{p} - 1$

$\Updownarrow$

$\frac{p(k)}{p(k-1)} \to 1$

$= \frac{n+1-k}{k} \cdot \frac{p}{1-p}$ close to 1

$= \frac{C_n^k \cdot p^k (1-p)^{n-k}}{C_n^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k+1}} = \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}} \cdot \frac{p}{1-p}$



例 2.2.3

为了估计一个鱼塘中鱼的总数, 我们做下面的试验

- 网起一兜鱼, 假设是 100 条, 给这些鱼做上标记.
- 把做过标记的鱼放回鱼塘中, 让这些放回去的鱼欢快的游一段时间.
- 再网起一兜, 假设是 80 条, 数出有标记的鱼的数目, 假设有 2 条.

怎样根据试验的结果, 估计鱼塘中鱼的总数呢?

例 2.2.3

定义随机变量 X 表示 80 条鱼中有记号的鱼的个数, 那么 $X \sim B(80, \frac{100}{N})$, $X = 0, 1, 2, \cdots, 80$.

由于 小概率事件在一次试验中基本不发生, 即一次随机试验出现的结果是发生可能性大的, 或者是最大的, 那么根据定理 2.2.1, 有

求 $P(N \mid \{80条刚好有2条有标记\}) = ?$

$N \in \arg\max P(N \mid \cdots)$

$$2 = (80+1)\frac{100}{N}$$

即 $N = 4050$

泊松分布

$X \sim B(n,p)$.

$P(X=k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$.

$C_n^k \to \frac{n!}{k!(n-k)!}$

定义

如果一个随机变量只能取非负整数值, 并且

$$P(X=k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \ k = 0, 1, 2, \cdots,$$

则称 X 服从 泊松 (Poisson) 分布, 记为
$X \sim Pois(\lambda)$.

泊松分布实际上是二项分布在 $p \to 0$, $n \to \infty$ 情形下的近似. 换句话说, 泊松分布描述的是 “稀有事件”

$n=1$ $p_1 = 0.9$ $X=k$. $Y = \frac{X}{n}$

$n=2$. $p_2 = \frac{0.9}{2}$

$n=4$ $p_4 = \frac{0.9}{4}$.

$\vdots$ $\vdots$

n p_n

泊松定理

泊松定理

设随机变量 $X \sim B(n, p_n)$, $0 < p_n < 1$ 是与 n 有关的概率, 并且有 $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$, 那么

$$\lim_{n\to\infty} P(X=k) = \lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

泊松定理证明

记 $\lambda_n = np_n$, 那么

$$b(k;n,p_n)$$

$$= \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p_n^k (1-p_n)^{n-k}$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{\lambda_n^k}{k!} \left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} \cdot$$

$$1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \left(1-\frac{2}{n}\right) \cdots \left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

泊松定理证明

固定 k, 有

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n^k = \lambda^k,$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-\cancel{k}} = e^{-\lambda}(hint : \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e)$$

以及 $\left(\left(1+\frac{\lambda_n}{-n}\right)^{\frac{-n}{\lambda_n}}\right)^{-\lambda_n}$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{k-1}{n}\right) = 1$$

故

$$\lim_{n\to\infty} b(k; n, p_n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

泊松分布的应用

对于可以用二项分布 $X \sim B(n, p_n)$ 描述的随机变量，如果同时满足

- $n \to \infty, \ p_n \to 0$
- $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$

$\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!}$

我们就可以用泊松分布代替二项分布.

Q: 泊松分布用于 $n\to\infty$, $p_n\to 0$.

可否 $n\to\infty$, $p_n\to 1$.

$q_n = 1-p_n$.

$P(\bar{X}=n-k) = P(X=k)$.

例 2.2.4

假如一个孕妇生三胞胎的概率是 $p = 10^{-4}$, 求在 100000 个孕妇中, 有 2 个人生三胞胎的概率.

$X \sim B(10^5, 10^{-4})$

$P(X=2) = C_{10^5}^{2} \cdot (10^{-4})^2 \cdot (1-10^{-4})^{10^5-2}$

$X' \sim Pois(\lambda)$ where $\lambda = n \cdot p = 10^5 \cdot 10^{-4} = 10$

$P(X'=2) = \frac{e^{10} \cdot 10^2}{2!}$

解: 由于每个孕妇生几胞胎这个试验是相互独立的, 故定义随机变量 X 为生三胞胎的人数, $X \sim B(100000, 10^{-4})$. 所以事件

$A_i = \{100000\text{个孕妇中有}i\text{个人生三胞胎}\}$

例 2.2.4

$$
\begin{aligned}
P(A_2) &= P_{\text{binom}}(X=2) = b(2, 10^5, 10^{-4}) \\
&= \binom{10^5}{2}(10^{-4})^2(1-10^{-4})^{10^5-2} = 0.002269293
\end{aligned}
$$

注意 $p \ll 1$ 且 $n \gg 1$, $pn = 10$, 我们用泊松分布来计算一下

$$P(A_2) = P_{\text{pois}}(X=2) = 0.00226996$$

近似效果还是可以的, 绝对误差在第 5 位有效数字上.

例 2.2.5

同类设备有 80 台，各台设备是否正常工作是独立事件，每台设备的故障率是 $p = 0.01$，一台设备发生故障时需要安排一人维修. 求

- 一人负责维修 20 台设备的时候，设备发生故障无人维修的概率.

例 2.2.5

当一个人负责 20 台设备的时候, 只要同时有两台及以上发生故障的时候, 就有设备没有人去维修, 所以要求的事件是
$A = \{$至少有两台设备同时发生故障$\}$.
定义随机变量 $X = \{$同时发生故障的设备台数$\}$, 由试验条件, $X \sim B(20, p)$. 计算

$$\begin{aligned} P(A) &= P_{\text{binom}}(X \geq 2) \\ &= 1 - P_{\text{binom}}(X \leq 1) = 0.01685934 \end{aligned}$$

改用泊松分布的话, 可以求得

$$P(A) = P_{\text{pois}}(X \geq 2) = 0.0175231$$

例 2.2.5

同类设备有 80 台, 各台设备是否正常工作是独立事件, 每台设备的故障率是 $p = 0.01$, 一台设备发生故障时需要安排一人维修. 求

- 由三个人共同负责维修 80 台设备的时候, 设备发生故障无人维修的概率.

例 2.2.5

当三个人共同负责 80 台设备的时候, 只要有四台以及以上的设备同时发生故障, 就有设备没有人去维修, 定义事件
$A = \{$至少有四台设备同时发生故障$\}$.

$$P(A) = P_{\mathrm{binom}}(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 0.008659189$$

用泊松分布计算

$$P(A) = P_{\mathrm{pois}}(X \geq 4) = 0.009079858$$

当 n 不是很大的时候, 泊松分布对二项分布的近似并不理想.