

# Ch 7. 参数估计

钟友良

zhongyl@scut.edu.cn

# Outline

## 7.0 前言

## 7.1 参数的点估计

## 7.2 估计量优劣势的评价

## 7.3 参数的区间估计

# Outline

## 7.0 前言

## 7.1 参数的点估计

## 7.2 估计量优劣势的评价

## 7.3 参数的区间估计

# Outline

7.0 前言

7.1 参数的点估计

7.2 估计量优劣势的评价

7.3 参数的区间估计

# 什么是参数

总体参数基本分为下面几类

- ▶ 总体分布中所含的参数: 比如正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$  中的  $\mu$  和  $\sigma^2$ 。
- ▶ 总体参数的函数: 比如服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$  的总体, 其取值不超过某个给定常数  $a$  的概率, 即  $P(X \leq a) = \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$ 。
- ▶ 分布的数字特征: 比如均值  $E[X]$ , 方差  $Var[X]$  等。

# 参数估计的形式

参数估计的形式有以下两种：

- ▶ 点估计。
- ▶ 区间估计。

# 参数的点估计

设  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  是来自总体  $X$  的一个容量为  $n$  的样本，称用于估计未知参数  $\theta$  的统计量

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

为  $\theta$  的 **点估计量**。

# 点估计的分类

本课程要求掌握的点估计方法分为以下几类

- ▶ 矩法估计
- ▶ 最大似然估计
- ▶ 顺序统计量估计



# 矩法估计

所谓矩法估计，就是用样本的矩来估计总体的矩。  
比如对于总体  $X$ ，其概率密度函数  $f_X(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$  含有  $k$  个未知参数  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ 。假若  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$  是总体前  $k$  阶原点矩  $E[X^i]$ ， $i = 1, 2, \dots, k$  的函数，即

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_1(E[X], E[X^2], \dots, E[X^k]) \\ \theta_2 = \theta_2(E[X], E[X^2], \dots, E[X^k]) \\ \dots \\ \theta_k = \theta_k(E[X], E[X^2], \dots, E[X^k]) \end{cases}$$

Q: 如何估计  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ ?

# 矩法估计的具体操作

- ▶ 矩法估计的基本条件：把总体的参数表示成总体各阶 **原点矩** 的函数。
- ▶ 矩法估计的基本方法：用前  $k$  阶样本原点矩  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^j$  代替  $X$  的前  $k$  阶原点矩  $E[X^j]$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ , 得到  $\theta_j$  的 **矩法估计量**  $\hat{\theta}_j$ ,

$$\begin{cases} \hat{\theta}_1 = \theta_1(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2, \dots, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k) \\ \dots \\ \hat{\theta}_k = \theta_k(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2, \dots, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k) \end{cases}$$

- ▶ 对样本进行一次观测，假设  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  是样本的一个观测值，那么将其带入  $\hat{\theta}_j$  得到的数值  $\hat{\theta}_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$  就是参数  $\theta_j$  的 **矩法估计值**。

# 矩法估计应用

- ▶ 总体均值  $E[X]$  的矩法估计:  $\hat{\mu}_M = \bar{X}$ 。
- ▶ 一批产品合格率 (不合格率) 的估计:  
由于总体  $X \sim B(1, p)$ ,  $p = E[X]$ 。将  $E[X]$  换成  $\bar{X}$ , 即可得到合格率的矩法估计量

$$\hat{p}_M = \bar{X}$$

假如  $n = 100$ , 其中一次抽取中有 3 件不合格品, 那么

$$\hat{p}_M = \frac{1}{100} \times 3 = 0.03.$$

即 0.03 为矩法估计值。

# 矩法估计应用

- ▶ 总体方差  $\sigma^2 = \text{Var}[X]$  以及标准差  $\sigma$  的估计。  
因为

$$\sigma^2 = E[X^2] - (E[X])^2, \quad \sigma = \sqrt{E[X^2] - (E[X])^2}$$

作矩法估计

$$\widehat{E[X]} = \overline{X}, \quad \widehat{E[X^2]} = \overline{X^2}$$

$\hat{=} \frac{1}{n} \sum X_i$        $\hat{=} \frac{1}{n} \sum X_i^2$

有

$$\widehat{\sigma^2} = \overline{X^2} - \overline{X}^2 = S_n^2, \quad \widehat{\sigma} = \sqrt{\overline{X^2} - \overline{X}^2} = S_n$$

总体的各阶中心矩的矩法估计量就是样本的相应阶中心矩。

## 例 7.1.3

设总体在某一区间上均匀取值，试用矩法估计该区间的左右端点。

解：根据题意，设总体  $X \sim U[a, b]$ ，此题要估计的就是  $a$  和  $b$ 。均匀分布的数字特征我们知道，

$$E[X] = \frac{a+b}{2}, \quad \text{Var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

## 例 7.1.3

反解得

$$\begin{cases} a = E[X] - \sqrt{3\text{Var}[X]} = \mu - \sqrt{3}\sigma \\ b = E[X] + \sqrt{3\text{Var}[X]} = \mu + \sqrt{3}\sigma \end{cases}$$

依据将  $\mu, \sigma$  换成其相应的矩法估计量, 有

$$\hat{a}_M = \bar{X} - \sqrt{3}S_n$$

$$\hat{b}_M = \bar{X} + \sqrt{3}S_n$$

# 矩法估计量不唯一 (例 7.1.4)

设总体的分布密度函数为

$$f_X(x, \theta) = \frac{\theta}{2} e^{-\theta|x|}, \quad -\infty < x < \infty, \theta > 0$$

求  $\theta$  的矩法估计量。  
考虑总体的偶数阶矩，

$E[X]$ ,  $E[X^2]$   
 $E[X]$   
 $E[X^2]$

$$E[X^{2k}] = \theta \int_0^{\infty} x^{2k} e^{-\theta x} dx = \frac{(2k)!}{\theta^{2k}}$$

即

$$\theta = \left( \frac{(2k)!}{E[X^{2k}]} \right)^{\frac{1}{2k}}$$

# 矩法估计量不唯一 (例 7.1.4)

再由

$$\widehat{E[X^{2k}]}_M = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^{2k}$$

所以

$$\hat{\theta}_M = \left( \frac{(2k)!n}{\sum_{i=1}^n X_i^{2k}} \right)^{\frac{1}{2k}}$$



# 最大似然估计

最大似然估计的基本思想是 某一次 抽样的观测结果是 概率最大 的。

问题分类：

- ▶ 离散型总体：联合概率分布在观测点处概率最大。
- ▶ 连续型总体：联合概率密度函数在观测点处取值最大。

# 似然函数

- ▶ 总体  $X$  服从某种离散型分布, 含有参数  $\theta$ , 某次观察值为  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , 其 似然函数 为

*↪ likelihood*

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n; \theta)$$

- ▶ 总体  $X$  服从某种连续型分布, 含有参数  $\theta$ , 某次观察值为  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , 其 似然函数 为

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = f(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n; \theta)$$

# 最大似然估计

如上定义 **似然函数**  $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)$ , 如果某统计量  $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , 使得

$$\begin{aligned} & L(x_1, x_2, \dots, x_n; \hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)) \\ &= \max_{\theta} L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) \end{aligned}$$

就称  $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  为  $\theta$  的 **最大似然估计量**

。

在数学优化问题中, 一个函数 (一元或者是多元) 的极值点等价于使这个函数的导数 (或者梯度) 为零的点。而极大值点不仅满足上述条件还会使得目标函数的 Hessian 矩阵在该点负定。

# 最大似然估计量

对服从参数为  $\lambda$  的指数分布的总体  $X$ , 使用最大似然估计。

由于  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ , 假设从中抽取容量为  $n$  的样本, 那么当  $x_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$  的时候, 并假设样本的一次观测值为  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , 那么

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = \lambda^n \exp \left( -\lambda \sum_{i=1}^n x_i \right)$$

# 最大似然估计量

为了方便讨论, 我们运用  $\ln x$  的单调性, 来研究

$$\max_{\lambda} \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda)$$

计算一下

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = n \ln(\lambda) - \lambda$$

对上式求其驻点, 即求使得

$$\frac{dG}{d\lambda} = 0$$

的  $\lambda$ , 得到

$$\lambda^* = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i}$$

# 最大似然估计量

验证下

$$\frac{d^2 G}{d\lambda^2} \Big|_{\lambda^*} = -\frac{n}{\lambda^2} \Big|_{\lambda^*} = -\frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n} < 0$$

所以  $\lambda^*$  确实为  $G$  从而是  $L$  的极大值点, 即

$$\hat{\lambda}_L = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i} = \frac{1}{\bar{X}}$$

# 最大似然估计量

对于服从  $[0, \theta]$  上均匀分布的总体  $X$ , 估计区间的右端点  $\theta$ 。

假设样本容量为  $n$ , 那么  $X$  似然函数为

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n}, & x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, \theta] \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

# 最大似然估计量

对于 **确定** 的观测值  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , 要使得  $L$  取到最大值, 那么

$$\theta = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

即

$$\theta = x_{(n)} \Rightarrow \hat{\theta}_L = X_{(n)}$$

也就是说区间右端点的最大似然估计量为顺序统计量  $X_{(n)}$ .



# 最大似然估计量

我们也可以用矩法估计  $\theta$ ，因为

$$E[X] = \frac{\theta}{2},$$

所以  $\theta = 2E[X]$ ，说明

$$\hat{\theta}_M = 2\bar{X}$$

即区间右端点的矩法估计量为  $2\bar{X}$ .

# Outline

7.0 前言

7.1 参数的点估计

7.2 估计量优劣势的评价

7.3 参数的区间估计

# 无偏估计量

定义 7.2.1: 设总体  $X \sim F_X(\cdot, \theta)$ ,  $\theta \in \Theta$ ,  $g$  为  $\theta$  的函数,  $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$  是  $g(\theta)$  的一个估计量, 如果

$$E[T(X_1, X_2, \dots, X_n)] = g(\theta),$$

称  $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$  为  $g(\theta)$  的 **无偏估计量**。如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[T(X_1, X_2, \dots, X_n)] = g(\theta)$$

则称  $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$  为  $g(\theta)$  的 **渐进无偏估计量**。

# 无偏与渐进无偏

分析当  $X \sim U[0, \theta]$ , 其区间右端点的矩估计量  $\hat{\theta}_M$  与最大似然估计量  $\hat{\theta}_L$  是否为  $\theta$  的无偏估计量?

► 对于矩法估计量

$$\hat{\theta}_M = 2\bar{X}$$

计算

$$\begin{aligned} E_{\theta}[\hat{\theta}_M] &= 2E_{\theta}[\bar{X}] = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n E_{\theta}[X_i] \\ &= \frac{2}{n} \cdot n \cdot \frac{\theta}{2} = \theta \end{aligned}$$

所以  $\hat{\theta}_M$  是  $\theta$  的无偏估计量。

# 无偏与渐进无偏

- ▶ 对于最大似然估计量

$$\hat{\theta}_L = X_{(n)}$$

根据 (6.3.19), 知

$$f_{X_{(n)}}(x) = n[F_X(x)]^{n-1}f_X(x)$$

而

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & x \in [0, \theta] \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

并且

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{\theta}, & x \in [0, \theta] \\ 1, & \text{else} \end{cases}$$

# 无偏与渐进无偏

所以

$$f_{X_{(n)}}(x) = \begin{cases} n \left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1} \frac{1}{\theta}, & x \in [0, \theta] \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

所以

$$E_{\theta}[\hat{\theta}_L] = E_{\theta}[X_{(n)}] = \int_0^{\theta} x n \frac{x^{n-1}}{\theta^n} dx = \frac{n}{n+1} \theta$$

所以  $\hat{\theta}_L$  不是  $\theta$  的无偏估计量，而是  $\theta$  的渐进无偏估计量。

# 无偏与渐进无偏

我们令

$$\hat{\theta} = \frac{n+1}{n}\hat{\theta}_L$$

那么  $\hat{\theta}$  就是  $\theta$  的无偏估计量。若  $\hat{\theta}$  是  $\theta$  的无偏估计量，那么  $g(\hat{\theta})$  一般不是  $g(\theta)$  的无偏估计量，除非  $g(x)$  是线性函数。例如  $S_n^{*2}$  是  $\sigma^2$  的无偏估计量，但是  $S_n^*$  却不是  $\sigma$  的无偏估计量。

# 有效估计量

对于总体  $X$  的参数  $g(\theta)$  的两个 无偏估计量  $T_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ,  $T_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , 若有

$$\mathbf{Var}[T_1] < \mathbf{Var}[T_2]$$

则称  $T_1$  比  $T_2$  有效。

由于方差反映随机变量取值的波动程度, 认为波动较小的统计量更有效是合理的。



# 有效估计

判断总体  $X \sim U[0, \theta]$  的区间右端点的矩估计量和最大似然估计量哪一个更有效?

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{\theta}_M] &= \text{Var}[2\bar{X}] = \text{Var}\left[\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] \\ &= \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i] = \frac{4}{n^2} n \frac{\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3n} \end{aligned}$$

# 无偏估计量

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{\theta}_L] &= \text{Var}\left[\frac{n+1}{n}X_{(n)}\right] \\ &= \frac{(n+1)^2}{n^2} [E[X_{(n)}^2] - (E[X_{(n)}])^2] \\ &= \frac{(n+1)^2}{n^2} \left\{ \int_0^\theta x^2 n \frac{x^{n-1}}{\theta^n} dx - \frac{n^2}{(n+1)^2} \theta^2 \right\} \\ &= \frac{(n+1)^2}{n^2} \left\{ \frac{n}{n+2} \theta^2 - \frac{n^2}{(n+1)^2} \theta^2 \right\} \\ &= \frac{\theta^2}{n(n+2)} \end{aligned}$$

# 无偏估计量

显然的, 当  $n > 1$ , 就有

$$\text{Var}[\hat{\theta}_L] < \text{Var}[\hat{\theta}_M]$$

即  $\hat{\theta}_L$  比  $\hat{\theta}_M$  要好。

# 一致最小方差无偏估计量

定义 7.2.2: 设总体  $X \sim F_X(\cdot, \theta)$ ,  $\theta \in \Theta$ , 若  $T_0(X_1, X_2, \dots, X_n)$  是  $g(\theta)$  的无偏估计量, 且对  $g(\theta)$  的任意无偏估计量  $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$  都有

$$\text{Var}[T_0] \leq \text{Var}[T], \forall \theta \in \Theta$$

则称  $T_0$  是  $g(\theta)$  的 **一致最小方差无偏估计量**。

一致最小方差无偏估计量一般不易求得, 除非事先知道  $g(\theta)$  无偏估计量的方差的下界, 再去寻找达到该方差的无偏估计量。

# 相合估计量

定义 7.2.3: 设总体  $X \sim F_X(\cdot, \theta)$ ,  $\theta \in \Theta$ , 并且设  $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$  是  $g(\theta)$  的估计量, 如果对于任意的  $\epsilon > 0$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|T(X_1, X_2, \dots, X_n) - g(\theta)| \geq \epsilon) = 0, \forall \theta \in \Theta,$$

则称  $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$  为  $g(\theta)$  的 **相合估计量**。

由弱大数定律,  $\overline{X^k}$  是总体  $k$  阶原点矩的相合估计量。

# 相合估计量的判定依据

若  $\hat{\theta}$  为  $\theta$  的相合估计, 且  $\eta = g(\theta)$  为  $\theta$  的连续函数, 那么  $\hat{\eta} = g(\hat{\theta})$  为  $\eta$  的相合估计量。

- ▶  $\overline{X^k}$  是  $E[X^k]$  的相合估计量。
- ▶  $S_n^2$  和  $S_n^{*2}$  都是  $\sigma^2$  的相合估计量。
- ▶  $S_n$  和  $S_n^*$  都是  $\sigma$  的相合估计量。

# Outline

7.0 前言

7.1 参数的点估计

7.2 估计量优劣势的评价

7.3 参数的区间估计

# 参数的区间估计

区间估计: 参数的 **区间估计** 表示以

$$T_1(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n) \text{ 和 } T_2(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n)$$

为一个 **随机区间** 的端点, 并且使得该随机区间包含参数的 **概率** 满足给定的条件。



# 参数的区间估计

定义 7.3.1: 设总体  $X \sim F_X(\cdot, \theta)$ ,  $\theta \in \Theta$ ,  
( $X_1, X_2, \dots, X_n$ ) 为样本。若有统计量  
 $T_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$  和  $T_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , 使得对  
给定的  $\alpha (0 < \alpha < 1)$  有

$$P(T_1(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n) \leq g(\theta) \leq T_2(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n)) = 1$$

则称  $[T_1(X_1, X_2, \dots, X_n), T_2(X_1, X_2, \dots, X_n)]$  是  
 $g(\theta)$  的 置信度为  $1 - \alpha$  的 区间估计, 或叫做 估计区间, 置信区间。

# 区间估计的一般方法

置信度为  $1 - \alpha$  的区间估计的一般方法可以分为下面三步：

- ▶ 构造一个样本和未知参数  $\theta$  的函数，记为  $Y(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta)$ ，使得  $Y$  服从的分布 **不依赖** 于  $\theta$ 。
- ▶ **适当选择** 两个常数  $a, b$ ，使得

$$P(a \leq Y \leq b) = 1 - \alpha$$

- ▶ 根据  $a \leq Y \leq b$  **反解出**  $\theta$  的范围

$$T_1(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq \theta \leq T_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

即有了  $\theta$  的  $1 - \alpha$  置信区间。

# 正态分布总体均值的区间估计

对于正态分布总体  $X \sim N(\mu, \sigma_0^2)$ , 其中  $\sigma_0$  已知, 求  $\mu$  的置信度为  $1 - \alpha$  的区间估计。

假设  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  为其样本, 根据推论 6.3.1 知

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma_0^2}{n}\right)$$

所以

$$Y = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}}} \sim N(0, 1)$$

# 正态分布总体均值的区间估计

由

$$P(|Y| \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

知

$$P\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}}}\right| \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

变化为

$$P\left(\bar{X} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

所以我们有  $\mu$  的置信度为  $1 - \alpha$  的区间估计为

$$\left[\bar{X} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}}, \bar{X} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}}\right]$$

# 正态总体参数的区间估计

总体方差  $\sigma^2$  未知, 给出总体均值  $\mu$  的区间估计量

根据推论 6.3.2 有

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S_n} \sqrt{n-1} \sim t(n-1)$$

由

$$P\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu}{S_n} \sqrt{n-1}\right| \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) = 1 - \alpha$$

知  $\mu$  的置信度为  $1 - \alpha$  的区间估计为

$$\left[\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n-1}}, \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n-1}}\right]$$

# $\sigma^2$ 的区间估计

$\mu = \mu_0$ , 其中  $\mu_0$  已知, 求  $\sigma^2$  的区间估计。

由于总体与样本独立同分布, 所以

$$Y_i = \frac{X_i - \mu_0}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

根据命题 6.3.2 知

$$Z = \sum_{i=1}^n Y_i^2 \sim \chi^2(n)$$

所以

$$P(\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n) \leq Z \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)) = 1 - \alpha$$

# $\sigma^2$ 的区间估计

即

$$P\left(\frac{1}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)} \geq \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2} \geq \frac{1}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)}\right) = 1 - \alpha$$

得到  $\sigma^2$  置信度为  $1 - \alpha$  的区间估计为

$$\left[ \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)} \right]$$

## $\sigma^2$ 区间估计

$\mu$  未知, 估计  $\sigma^2$  的置信度  $1 - \alpha$  的区间。  
由抽样分布基本定理,

$$\frac{nS_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

令

$$P\left(\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1) \leq \frac{nS_n^2}{\sigma^2} \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)\right) = 1 - \alpha$$

所以  $\sigma^2$  的置信度  $1 - \alpha$  的区间估计为

$$\left[ \frac{nS_n^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}, \quad \frac{nS_n^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)} \right]$$



# 两个正态总体参数的区间估计

设  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ , 且  $X, Y$  相互独立, 样本分别为  $(X_1, X_2, \dots, X_m)$ ,  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ , 其中总体  $X$  与  $Y$  的样本均值与方差分别为

$$\bar{X}, \bar{Y}, S_m^2, S_n^2$$

$\mu_1 - \mu_2$  和  $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$  的区间估计量分别是什么?

## $\mu_1 - \mu_2$ 的区间估计

$\sigma_1^2$  和  $\sigma_2^2$  已知, 求  $\mu_1 - \mu_2$  的区间估计。由推论 6.3.1

$$\bar{X} \sim N(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{m}), \bar{Y} \sim N(\mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n}),$$

所以

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0, 1)$$

然后令

$$P\left(\left|\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}}\right| \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

# $\mu_1 - \mu_2$ 的区间估计

求得  $u_1 - u_2$  的置信度为  $1 - \alpha$  区间估计为

$$\left[ (\bar{X} - \bar{Y}) - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}, \right. \\ \left. (\bar{X} - \bar{Y}) + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} \right]$$

# 两个正态总体参数的区间估计

$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$  未知, 求  $\mu_1 - \mu_2$  的区间估计。  
由推论 6.3.4 知

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \sim t(m + n - 2)$$

以及  $t$  分布关于  $y$  轴对称的性质, 得到

$$P\left(\left|\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}\right| \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m + n - 2)\right) = 1 - \alpha$$

# 两个正态总体参数的区间估计

知  $\mu_1 - \mu_2$  的置信度为  $1 - \alpha$  的区间估计量为

$$\begin{aligned} & [(\bar{X} - \bar{Y}) - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)S_w\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}, \\ & (\bar{X} - \bar{Y}) + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)S_w\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}] \end{aligned}$$

# $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的区间估计

$\mu_1, \mu_2$  已知, 求  $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$  的区间估计。

首先, 下面的结论是显然的

$$\frac{1}{\sigma_1^2} \sum_{i=1}^m (X_i - \mu_1)^2 \sim \chi^2(m), \quad \frac{1}{\sigma_2^2} \sum_{i=1}^n (Y_i - \mu_2)^2 \sim \chi^2(n)$$

根据  $F$  分布的定义有

$$\frac{n \sum_{i=1}^m (X_i - \mu_1)^2 \sigma_2^2}{m \sum_{i=1}^n (Y_i - \mu_2)^2 \sigma_1^2} \sim F(m, n)$$

# $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的区间估计

特别的

$$P\left(F_{\frac{\alpha}{2}}(m, n) \leq \frac{n \sum_{i=1}^m (X_i - \mu_1)^2 \sigma_2^2}{m \sum_{i=1}^n (Y_i - \mu_2)^2 \sigma_1^2} \leq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m, n)\right) = 1$$

由此可得  $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$  的置信度为  $1 - \alpha$  的区间估计

$$\left[ \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m, n)} \frac{n \sum_{i=1}^m (X_i - \mu_1)^2}{m \sum_{i=1}^n (Y_i - \mu_2)^2}, \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(m, n)} \frac{n \sum_{i=1}^m (X_i - \mu_1)^2}{m \sum_{i=1}^n (Y_i - \mu_2)^2} \right]$$

# $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的区间估计

$\mu_1, \mu_2$  未知, 求  $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$  的区间估计。

根据推论 6.3.3 有

$$\frac{mS_m^2}{nS_n^2} \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \frac{n-1}{m-1} \sim F(m-1, n-1)$$

所以

$$P\left(F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1) \leq \frac{mS_m^2}{nS_n^2} \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \frac{n-1}{m-1} \leq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)\right) = 1 - \alpha$$

可得  $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$  的置信度为  $1 - \alpha$  的区间估计量为

$$\left[ \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)} \frac{m(n-1)S_m^2}{n(m-1)S_n^2}, \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)} \frac{m(n-1)S_m^2}{n(m-1)S_n^2} \right]$$