# Ch 2. 一维随机变量及其分布

钟友良

zhongyl@scut.edu.cn

# Outline

Ch1. 12.

10 中: 7 正, 3 次.

不放回检验., 直到3个次品检测出来

Q: 需要7次检测的概率?

A: 无编号.

$$\text{7次检测} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{cases} \text{前6次检测到 2次} \\ \text{7th 次} \end{cases}}_{\text{组合数. } C_6^2}$$

总组合. $C_{10}^3$

$$P[\ \ldots\ ] = \frac{C_6^2}{C_{10}^3} \qquad \#$$

# Outline

方法2: 有编号 $\overbrace{1\ 2\ 3}^{次}\ \overbrace{4\ 5\ \dots\ 9\ 10}^{正}$

7次检测 $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \text{前6次选2次品次.} \\ \text{7th. 选剩下次} \end{cases}$

---

$$\left.\begin{array}{l} \text{7正中选4} \rightsquigarrow C_7^4 \\ \text{3次中选2} \rightsquigarrow C_3^2 \\ \text{共有排序数 } A_6^6 \end{array}\right\} \quad C_7^4\cdot C_3^2\cdot A_6^6$$

总排列 $A_{10}^7$

$$P[\ \dots\ ] = \frac{C_7^4\cdot C_3^2\cdot A_6^6}{A_{10}^7}$$

○ 正

× 次

○ × ○ ○ × ○ ×

× × × | ○ ○ ○ ○

× × ○ ×

× ○ × ×

# Outline

一开始 $a$ 红 $+$ $b$ 白.

有放回取地取 1 球
(放回同色 $c$ 球)

if remove

$\Rightarrow P(A_k) = \frac{a}{a+b}$

$P(A_k) \overset{?}{=} \frac{a}{a+b}$

Pf. $P(A_1) = \frac{a}{a+b}$ 显然

数学归纳法.

假设. $P(A_n) = \frac{a}{a+b}$.

$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap \bar{A}_n)$

$= \underline{P(A_{n+1} | A_n) \cdot P(A_n) + P(A_{n+1} | \bar{A}_n) \cdot P(\bar{A}_n)} = \frac{a}{a+b}$

设 $x_1 = (n-1)$ 次中抽到红的次数.
$x_2 = \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$ 白 $\cdot \cdot \cdot$
$\Rightarrow x_1 + x_2 = n-1$.

$(n-1)$次后. 红: $a + x_1 \cdot c$
白: $b + x_2 \cdot c$.

$P(A_{n+1} | A_n) = \frac{a + x_1 c + c}{a+b+n \cdot c}$ $\quad$ $P(A_{n+1} | \bar{A}_n) = \frac{a + x_2 c}{a+b+n \cdot c}$.

$P(A_n) = \frac{a}{a+b}$ $\quad$ $P(\bar{A}_n) = \frac{b}{a+b}$

# 随机变量

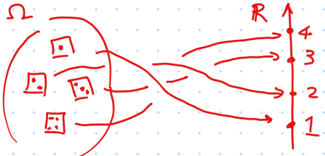
随机变量是根据出现的试验结果取实值的变量.
换言之, 随机变量以一定的概率取相应的函数值.
请指出下面随机现象结果的区别:

- 掷一次骰子, 出现的点数
- 家用电器的使用寿命
- 掷一枚硬币, 观察向上的面
- 抽取一件产品, 检查其是否合格

# 例子

- 掷一次骰子，出现的点数 $X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- 家用电器的使用寿命 $X \in [0, \infty)$
- 掷一枚硬币，观察向上的面
  $X \in \{0(\text{正面}), 1(\text{反面})\}$
- 抽取一件产品，检查其是否合格
  $X \in \{0(\text{合格}), 1(\text{不合格})\}$

# 随机变量的定义




## 定义 2.1.1

设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间, 称映射 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ 为 随机变量, 如果对于任意 $x \in \mathbb{R}$, 有

$(-\infty, x) = \bigcap_n (-\infty, x+\frac{1}{n}]$

$(x, y] = (-\infty, y] \cap \overline{(-\infty, x]}$

$(-\infty, x]$ ⇝ 全 ⇝ 补 ⇝ 可数并 生成 $\mathbb{R}$

$\Omega \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$\mathcal{F} \xrightarrow{f}$ {R上的区间}

$P \searrow [0,1]$

$f^*P((a,b)) := P[\underline{\{\omega \mid f(\omega) \in (a,b)\}}]$

$$\underline{\{\omega | X(\omega) \leq x\}} \in \mathcal{F} \tag{1}$$

这个定义包含了下面几个意思

- 随机变量是从样本空间到实轴的 映射
- (保测) 对于 任意 的 $x \in \mathbb{R}$, 满足 (1)（反例见例题 2.1.1）

measurable
可测

$f : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$



$\forall (a,b) \subseteq \mathbb{R}$.

$P[\text{"}f^{-1}(a,b)\text{"}] = ?$

$\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \in [a,b)\}$

$(-\infty, b) \setminus (-\infty, a)$

# 例 2.1.1

- 投骰子 $\omega_i = \{\text{点数为 i}\}$
- 基本事件空间 $\Omega_1 = \{\omega_1, \ldots, \omega_6\}$
- 事件 $A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$ 和 $B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$
- 事件域 $\mathcal{F}_3 = \{\Omega_1, \emptyset, A, B\}$
- 概率空间 $(\Omega_1, \mathcal{F}_3, P)$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | $\frac{1}{2}$ | 3 | 0 | 5 | 0 |
| B | 2 | $\frac{1}{2}$ | 4 | 0 | 6 | 0 |

定义映射

$\{\omega_1, \omega_2\} = \frac{1}{3}$

$$X : \Omega_1 \to \mathbb{R}$$
$$\omega_i \mapsto i$$

1

由 $\{\omega \in \Omega_1 | X(\omega) \leq 2\} = \{\omega_1, \omega_2\} \notin \mathcal{F}_3$ 得 $X$ 不是 $(\Omega_1, \mathcal{F}_3, P)$ 上的随机变量。

# 随机变量和事件

假设, 给定 $a < b \in \mathbb{R}$

$$A = \{\omega : X(\omega) < a\} = (-\infty, a)$$

$$B = \{\omega : X(\omega) < b\} = (-\infty, b)$$

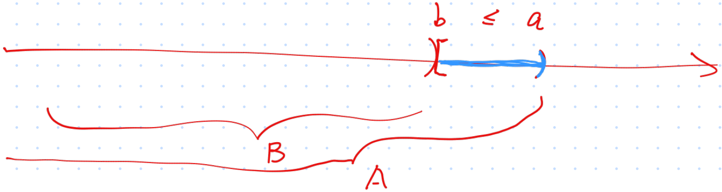
请定义下面的事件

$(-\infty, \min\{a,b\})$

$$= \begin{cases} \phi & a < b \\ [b, a) & a \geq b \end{cases}$$

$$\bar{A}, \quad \bar{B}, \quad A \cap B, \quad A - B$$

$[a, +\infty)$ $[b, +\infty)$



# 分布函数

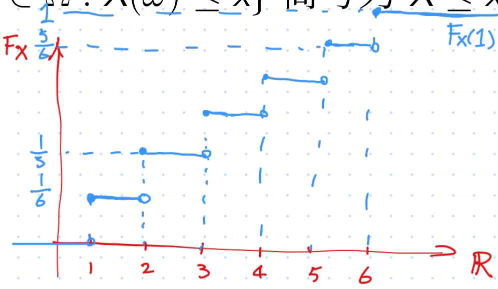
## 定义 2.1.2

设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间, $X$ 为随机变量, $X$ 的 **分布函数** $F_X$ 定义为

$$F_X(x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\}), \ \forall x \in \mathbb{R}$$

以后将 $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\}$ 简写为 $X \le x$.

| 骰子 | 概率 |
|---|---|
| $w_1$ | $\frac{1}{6}$ |
| $w_2$ | $\frac{1}{6}$ |
| $w_3$ | $\frac{1}{6}$ |
| $w_4$ | $\frac{1}{6}$ |
| $w_5$ | $\frac{1}{6}$ |
| $w_6$ | $\frac{1}{6}$ |




$F_X(1) = P[\{w \mid X(w) \le 1\}]$

$= P[\{w_1\}] = \frac{1}{6}$

# 分布函数和事件

根据分布函数的定义，显然的

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a), \forall a < b \in \mathbb{R}$$

根据概率的上下连续性，对于 $\forall a < b \in \mathbb{R}$，有下面的事实

$$\begin{aligned}
P(X = a) &= F_X(a) - F_X(a-0),\\
P(a \leq X \leq b) &= F_X(b) - F_X(a-0),\\
P(a \leq X < b) &= F_X(b-0) - F_X(a-0),\\
P(a < X < b) &= F_X(b-0) - F_X(a)
\end{aligned}$$

当 $F_X(x)$ 在 $a$ 连续时，
$F_X(a-0) = F_X(a+0) = F_X(a)$.

# 分布函数的性质

- **有界性** $0 \le F_X(x) \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$

证明.
因为对于任给的 $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x)$ 表示事件 $\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}$ 的概率, 根据概率的有界性可得. $\square$

- **单调性** 对于任意的 $x_1 < x_2$, 有 $F_X(x_1) \le F_X(x_2)$ 并且

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1.$$

- **右连续性** $\lim_{x \to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$

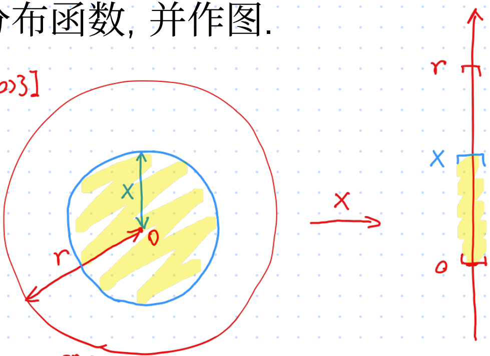
$x = x_0 + \frac{1}{n}$
$n \to +\infty$

$P[X \le x_0 + \frac{1}{n}]$
$= P[\bigcap_n \{\omega \mid f(\omega) \le x_0 + \frac{1}{n}\}]$

# 课堂练习

- 向半径为 $r$ 的圆内随机抛一点，求此点到圆心距离 $X$ 的分布函数，并且求 $P(X > \frac{2r}{3})$
- 口袋中有 5 个球，编号为 1,2,3,4,5，从中任取 3 个，以 $X$ 表示 3 个球中最大的号码，求 $X$ 的分布函数，并作图.

$$P[\{\omega \mid \omega \in B_X(O)\}] = \frac{\mathrm{Area}(B_X(O))}{\mathrm{Area}(B_r(O))} = \frac{\pi X^2}{\pi r^2} = \frac{X^2}{r^2}$$




$$P(X > \tfrac{2r}{3}) = \frac{P(\Omega) - P(X \le \frac{2r}{3})}{P(\Omega)} = 1 - \frac{(\frac{2r}{3})^2}{r^2} = \frac{5}{9}$$

# Outline

# 一维离散型随机变量

当随机变量只能取有限个或者可数个函数值的时候, 称为 离散型随机变量.

设一个定义在概率空间 $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ 上的随机变量 \$X\$ 只有可数个取值, 记作 $a_1$, $a_2$, $\cdots$, $a_n$, $\cdots$, 且

$$P(X = a_i) = p_i, \; i = 1, 2, \cdots, n, \cdots$$

通常称

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix}$$

的右端为 $X$ 的 分布列, 称 $(p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots)$ 为 概率分布.

# 分布列的性质

- $p_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots$
- $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$
- $X$ 的分布函数为

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{a_i \leq x} p_i$$

$F_X(x)$ 的图像为右连续的阶梯函数.

$$P(b < X \leq c) = \sum_{b < a_i \leq c} p_i$$

# 课堂练习

一汽车沿着街道行驶，需要经过三个红绿灯，若每个信号灯显示红绿两种信号的时间相等，且各个信号灯工作相互独立．以 $X$ 表示该汽车首次遇到红灯前已经通过的路口数，求 $X$ 的分布列

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \geq 3 \\ \frac{1}{2} & \left(\frac{1}{2}\right)^2 & \left(\frac{1}{2}\right)^3 & 1-\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^3 \end{pmatrix}$$