动机

- 单位时间内，事件发生的次数 λ （“平均”）

  $X=$ 单位时间内……次数

  $P(X=k) \sim P_{pois}(\lambda) = \frac{1}{k!}\cdot\lambda^k\cdot e^{-\lambda}$

  $Y=$ 两个事件发生的间隔． ．两个事件…“平均”间隔 $=\frac{1}{\lambda}$

  $P(Y\geq 1) = P(X=0) = \frac{1}{0!}\lambda^0\cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda}$

  $P(X\geq t) = P(X_t=0) = \frac{1}{k!}(t\lambda)^k\cdot e^{-t\lambda}\Big|_{k=0} = e^{-\lambda t}$

  X_t：时间 t 内，事件……次数

  $X_t \sim P_{pois}(t\lambda)$

  $P(X<t) = 1-P(X\geq t) = 1-e^{-\lambda t}$

  $t\geq 0$： $p(t) = \frac{d}{dt}P(X<t) = \frac{d}{dt}(1-e^{-\lambda t}) = \lambda\cdot e^{-\lambda t}$

指数分布

若连续型随机变量 X 的分布密度函数为

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, \text{当} x > 0, \\ 0, \text{当} x \le 0 \end{cases}$$

其中 $\lambda > 0$ 为参数，记为 $X \sim \exp(\lambda)$，其分布函数为

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{当} x > 0 \\ 0, & \text{当} x \le 0 \end{cases}$$

例子

某窗口接待一位顾客的服务时间 T 服从参数为 $\frac{1}{10}$ 的指数分布, 即

$$f_T(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{10} e^{-\frac{1}{10}t}, \text{当} t > 0, \\ 0, \text{当} t \leq 0 \end{cases}$$

例子

假设一次服务时间超过 15 分钟, 顾客即评价为“不满意”，求

- 某位顾客不满意的概率
- 十位顾客中恰有两位顾客评价为不满意的概率
- 十位顾客中最多有两位评价为不满意的概率
- 十位顾客中至少有两位评价为不满意的概率

例子

设事件 $A = \{$某位顾客不满意$\}$

$$P(A) = \int_{15}^{\infty} \frac{1}{10} e^{-\frac{1}{10}x} x$$

由于每位顾客接受服务的试验相互独立, 所以某一窗口服务多位顾客是 n 重伯努利试验
记不满意的顾客数为 Y, $Y \sim B(10, P(A))$
那么题目中的第 $2, 3, 4$ 小问分别对应下面三个概率

$$P(Y = 2), \; P(Y \leq 2), \; P(Y \geq 2)$$

例子

根据二项分布公式

$$P(Y=2)=\binom{10}{2}P(A)^2P(\bar{A})^8$$

$$P(Y\leq 2)=\sum_{k=0}^{2}\binom{10}{k}P(A)^kP(\bar{A})^{10-k}$$

$$\begin{aligned}P(Y\geq 2)&=1-P(Y\leq 1)\\&=1-\sum_{k=0}^{1}\binom{10}{k}P(A)^kP(\bar{A})^{10-k}\end{aligned}$$

指数分布的无记忆性

指数分布也具有无记忆性, 即

$$P(X > t + s|X > s) = P(X > t)$$

$$\frac{P(\{X>t+s\}\cap\{X>s\})}{P(X>s)} = \frac{P(X>t+s)}{P(X>s)}$$

$$= \frac{e^{-(t+s)\cdot\lambda}}{e^{-s\lambda}} = e^{-t\lambda}$$

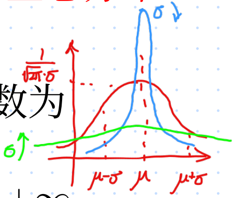
正态分布

正态分布

连续型随机变量服从的最常见的分布是 正态分布

正态分布的密度函数

若 X 服从正态分布, 那么其分布密度函数为



$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}$$

其中 $\mu \in \mathbb{R}$ 和 $\sigma > 0$ 为正态分布的参数, 记 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. normal

特别的, 当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时, 称 X 服从 标准正态分布.

标准正态分布

当 $X \sim N(0,1)$, 其密度函数为

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

其分布函数为 $\Phi(x)$,

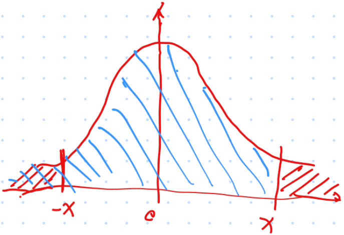
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$

标准正态分布

显然

$$\Phi(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-x} e^{\frac{-t^2}{2}} dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{x} e^{\frac{-\xi^2}{2}} d\xi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x}^{\infty} e^{\frac{-\xi^2}{2}} d\xi = 1 - \Phi(x)$$



标准正态分布

$$P(a < X < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_a^b e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}d\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_a^b e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} d\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} - \int_{-\infty}^{\frac{a-\mu}{\sigma}} \cdots$

ϕ 密度

$\Phi = \int_{-\infty}^{x} \phi$

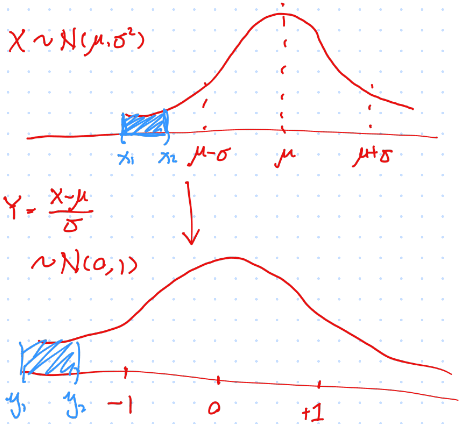
上面的 $\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$ 和 $\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$ 都可以查表计算.

对于 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 查表计算有

$$P(X - \mu \leq 3\sigma) = 0.9973$$

命题 2.3.1

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 令 $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$, 那么 $Y \sim N(0,1)$.
证明稍后给出.



例 2.3.3

$Y = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-(-1)}{2} = \frac{X+1}{2}.$

设 $X \sim N(-1, 2^2)$, 求 $P(\underline{-5} \leq \underline{X} < \underline{1})$,
$P(-2 \leq X \leq 2)$, $P(X \geq 1)$.

解:

$$P(-5 \leq X < 1) = \Phi\left(\frac{1-(-1)}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-5-(-1)}{2}\right)$$
$$= \Phi(1) - \Phi(-2)$$

$$P(-2 \leq X \leq 2) = \Phi\left(\frac{2-(-1)}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-2-(-1)}{2}\right)$$
$$= \Phi(\frac{3}{2}) - \Phi(-\frac{1}{2})$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1)$$

例 2.3.4

假设一次测量误差 $X \sim N(0, 10^2)$, 现在独立重复的进行 100 次测量, 求误差的绝对值超过 19.6 的次数不小于 3 的概率.

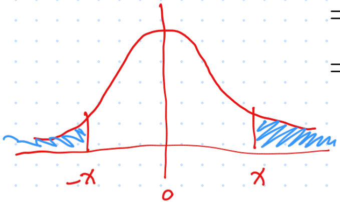
解：先求出一次测量误差大于 19.6 的概率.

$Y = \frac{X-0}{10}$

$-1.96 \le \dots \le 1.96$

$$
\begin{aligned}
P(|X| > 19.6) &= 1 - P(|X| \le 19.6) \\
&= 1 - P(|\frac{X-0}{10}| \le 1.96) \\
&= 1 - [\Phi(1.96) - \Phi(-1.96)] \\
&= 2 - 2\Phi(1.96) \approx 0.05
\end{aligned}
$$

$= 2(1-\Phi(1.96))$



例 2.3.4

由于每次测量都是独立的, 所以设 Y 为 100 次测量中误差大于 19.6 的次数, 那么
$Y \sim B(100, 0.05)$,

$$P(Y \geq 3) = 1 - P(Y \leq 2) = 1 - \sum_{k=0}^{2} b(k; 100, 0.05) = 0.88$$

大家也可用泊松分布计算下看看.

例 2.3.5

公共汽车车门的高度是按照男子与车门顶碰头的机会 0.01 以下来设计的. 设男子的身高 $X \sim N(170, 6^2)$. 确定车门高度.

例 2.3.5

解：设车门高度为 h, 按照题意,

$$P(X > h) < 0.01,$$

$X \sim N(170, 6^2)$

所以 $Y = \frac{X-170}{6} \sim N(0,1)$

$$\Phi(\frac{h-170}{6}) = P(X \le h) = 1 - P(X > h) > 0.99$$

查一下正态分布表, 近似的 $\frac{h-170}{6} \ge \Phi^{-1}(0.99)$

$$\frac{h-170}{6} \ge 2.33$$

即

$$h \ge 183.98$$

如果取整数的话, $h = 184$ cm.

例 2.3.6

设某只股票的初始价格为 $S_0 = 40$ 元, 预期收益率 μ 为每年 16%, 波动率为每年 20%. 在 Black-Scholes 模型下, 股票在每个时刻 t 的价格 S_t 为随机变量

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right)$$

其中 $B_t \sim N(0, t)$, 估计六个月后这只股票的价格范围（允许出错的概率为 5% ）.

例 2.3.6

例 2.3.6

解：对于每个给定的时间 t, 随机变量 S_t 为另一个随机变量 B_t 的函数, 易知的是在 $t = 0.5$ （半年）的时候

$$\ln(S_{0.5}) = \ln(40) + [0.5(0.16 - \frac{0.2^2}{2}) + 0.2B_{0.5}]$$
$$= 3.758879 + 0.2B_{0.5}$$

$N(0, 0.5)$

那么

$$\frac{ln(S_{0.5}) - 3.758879}{0.2} = B_{0.5} \sim N(0, 0.5)$$

$$\frac{B_{0.5} - 0}{\sqrt{0.5}} \sim N(0,1)$$

亦即

$$X = \frac{ln(S_{0.5}) - 3.758879}{0.2\sqrt{0.5}} \sim N(0, 1)$$

例 2.3.6

练习

- 设 $X \sim N(3, 2^2)$, 求 $P(2 < X \leq 5)$, $P(X > 2)$, 确定 c 使得 $P(X < c) = P(x > c)$.

练习

- 某地区成年男子的体重 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 若已知 $P(X\leq 70)=0.5$, $P(X\leq 60)=0.25$.
  1. 求 μ, σ,
  2. 若在这个地区随机抽出 5 名成年男子, 问其中至少有两个人的体重超过 65 的概率是多少?

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

$P(X \leq 70) = 0.5$

$\parallel$

$P(Y \leq \frac{70-\mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{70-\mu}{\sigma})$

$\Rightarrow \frac{70-\mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(0.5)$

$\frac{60-\mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(0.25)$

Outline

2.0 引言

2.1 随机变量

2.2 一维离散型随机变量

2.3 一维连续型随机变量

2.4 一维随机变量的分布

附加

问题

已知 X 的分布，求 $f(X)$ 的分布

离散型

列举 $f(X)$ 在离散点上的相应取值，然后将 $f(X)$ 取相同值的概率相加.

例：设 X 的分布列为

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.15 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.25 \end{pmatrix}$$

求 $Y = X^2$, $Z = 2X - 1$, $W = X + 1$ 的分布列.

$$Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}$$

解

直接求 Y, Z, W 的分布列

$$Y \sim \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$Z \sim \begin{pmatrix} -5 & -3 & -1 & 1 & 3 \\ 0.15 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.25 \end{pmatrix}$$

$$W \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$$

连续型

先求 $f(X)$ 的分布函数, 再对分布函数求导数得到 $f(X)$ 的分布密度函数

例: $X \sim N(0,1)$, 求 $Y = X^2$ 的分布密度函数.

第一步: 先求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$. 显然的, 对 $y < 0$ 有

$$P(Y \leq y) = 0$$

对 $y \geq 0$, 有

$$F_Y(y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X < \sqrt{y})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\sqrt{y}} + \int_{-\sqrt{y}}^{0} \cdots \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} \times 2$$

连续型

$$\frac{d}{dy}\int_0^{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \xlongequal{z=\sqrt{y}} \frac{d}{dz}\int_0^{z} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\cdot\frac{dz}{dy} = e^{-\frac{z^2}{2}}\cdot\boxed{\frac{d\sqrt{y}}{dy}}$$

第二步：对 $F_Y(y)$ 关于 y 求导数，得到 $e^{-\frac{y}{2}}$ $\quad = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

$$f_Y(y) = F_Y(y)y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}}\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}}\left(-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-\frac{y}{2}}$$

即

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

$aX+b$ 的分布

设 X 的分布函数为 f_X, 求 $Y=aX+b$ 的分布密度函数, 其中 $a\neq 0$
记 Y 的分布函数为 F_Y, 分布密度函数为 f_Y, 那么

- 当 $a>0$ 时
  第一步：求 Y 的分布函数

$$\begin{aligned}F_Y(y) = P(Y\leq y) &= P(aX+b\leq y)\\ &= P\left(X\leq \frac{y-b}{a}\right)\\ &= \int_{-\infty}^{\frac{y-b}{a}} f_X(x)x\end{aligned}$$

$aX+b$ 的分布

第二步：对 $F_Y(y)$ 关于 y 求导，有

$$f_Y(y) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

- 当 $a<0$ 时，有

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \le y) = P(aX+b \le y) \\ &= P(X \ge \frac{y-b}{a}) = \int_{\frac{y-b}{a}}^{+\infty} f_X(x)x \end{aligned}$$

关于 y 求导，有

$$f_Y(y) = \left(-\frac{1}{a}\right) f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$aX+b$ 的分布

综上所述

$$f_Y(y) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

作为特例，若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，且 $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$，那么由上式

$= \frac{1}{\sigma}X + (-\frac{\mu}{\sigma})$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\frac{1}{\sigma}} f_X\left(\frac{y+\frac{\mu}{\sigma}}{\frac{1}{\sigma}}\right) = \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\sigma y+\mu-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

即 $Y \sim N(0, 1)$，与命题 2.3.1 吻合.

例子

- 请大家验证：$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 那么若 $a \neq 0$, 则 $aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$. 并根据这个结论, 说明命题 2.3.1
- 设随机变量 X 的密度函数是

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\pi^2}, & 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 $Y = sin(X)$ 的密度函数.