Ch 1. 随机事件与概率

钟友良

zhongyl@scut.edu.cn

Outline

Outline

Outline

随机现象

定义

在一定的试验条件下, 并不总是出现相同结果的现象被称为 随机现象.

判断一个现象是否是随机现象, 只需要验证该现象是否满足下面的两个特征:

- 结果不止一个.
- 事先无法预知将出现哪个结果.

例子

下面的现象都是随机的:

- 投掷一枚硬币, 出现的结果有可能是数字面朝上, 也有可能国徽面朝上.
- 投掷一个骰子, 有可能出现 1-6 点中的任意一个.
- 家里某种电器的寿命, 可能是 $(0, \infty)$ 上的任意一个实数.
- 对某种物品的称重, 其测量误差可能是 $(-\infty, \infty)$ 中的任意一个实数.

随机试验

定义

对在相同条件下可以重复的对随机现象的观察，记录，实验称为 **随机试验**.

其基本意义是:

- 可以在基本相同条件下大量重复试验
- 试验会出现的结果是可以预知的
- 具体是什么结果是不可预知的

样本空间

Omega : Ω

omega : ω

定义

随机试验的 一切 可能的 基本 结果组成的集合, 记为 Ω. Ω 中的任意一个元素被称为一个 基本事件 或 样本点.

样本空间的解释:

- 一切: 随机试验的每一个可能的结果, 都在样本空间中有对应的元素.
- 基本: 最简单的, 不能再分的结果. 这一点暗示各样本点之间没有非空的交集.

例子

前述随机现象的对应样本空间

- 投掷一枚硬币试验的样本空间 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, 其中 ω_1 表示正面朝上, ω_2 表示反面朝上.
- 投掷一个骰子试验的样本空间

$$\Omega = \{\omega_i : i = 1, 2, \cdots, 6\},$$

  其中 ω_i 表示掷出 i 点.
- 家里某样电器寿命的样本空间 $\Omega = \{t : t \geq 0\}$
- 对某样物品称重误差的样本空间 $\Omega = \{m : m \in \mathbb{R}\}$

当样本空中的样本点有限或者可数时, 被称为 离散 样本空间, 否则被称为 连续 样本空间.

例 1.1.1

掷一颗骰子，考虑以下事件的概率:

- $A = \{点数为奇数\}$ $= \{1, 3, 5\}$ $P[A] = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.
- $B = \{点数为偶数\}$
- $C = \{点数小于\ 3\}$ $= \{1, 2\}$ $P[C] = 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

概率的古典定义

例 1.1.2

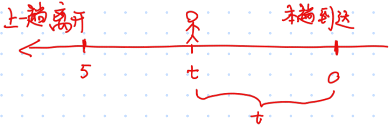
地铁五分钟一趟, 观测一名乘客的等待时间.

- $A = \{$等待时间少于 2 分钟$\}$
- $B = \{$等待时间多于 2 分钟$\}$
- $C = \{$等待时间介于 1 至 2 分钟$\}$

概率的几何定义

$\Omega = \{$乘客到达车站, 离地铁出发前的时间$\}$

$= \{ t \in [0,5) \}$



$A = \{ t < 2 \} = \{ t \in [0,2) \}$

$\mathbb{P}[A] = \dfrac{|[0,2)|}{|[0,5)|} = \dfrac{2}{5}$

$B = \{ 2 < t < 5 \}$

$\underset{\frac{2}{5}}{\mathbb{P}[A]} + \underset{\frac{3}{5}}{\mathbb{P}[B]} + \underset{0}{\mathbb{P}[t=2]} = 1$

$C = \{ 1 < t < 2 \}$

$\mathbb{P}[C] = \dfrac{|(1,2)|}{|(0,5)|} = \dfrac{2}{5}.$

课堂练习

讨论下面的随机试验的样本空间：

- 射击手连续射击 2 次所得的总环数（环数按整数计算）
- 将一颗骰子掷两次，观察每一次的点数.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\Omega_1 = \{ w_1 + w_2 \mid w_1, w_2 \in \Omega \}$ 投两次骰子的总数.

$= \{2, 3, 4, \ldots, 12\} \rightsquigarrow |\Omega_1| = 11$

$\Omega_2 = \Omega \times \Omega$

$= \{ (w_1, w_2) \mid w_1, w_2 \in \Omega \} \rightsquigarrow |\Omega_2| = 6^2 = 36$

$= \{ (1,1), (1,2) \ldots, (1,6)$

$\ldots \}$

$\Omega_3 = \Omega \times \Omega / \sim$ $(w_1, w_2) \sim (w_2, w_1)$

$= \{ \underset{(1,1)}{[(1,1)]}, \underset{(1,2),(2,1)}{[(1,2)]}, \ldots \}$

思考题

问样本空间是什么?

随机事件

集合 Ω（样本空间）⇝ 基本事件 $\omega\in\Omega$

幂集 2^Ω（由 Ω 所有的子集所构成的集合）⇝ $A\in 2^\Omega$ 是 Ω 的子集.

定义

随机事件: 样本空间 Ω 中若干样本点构成的子集.

下面是几种特殊的随机事件

- 基本事件: 样本空间 Ω 中的单个元素组成的子集.
- 不可能事件: 样本空间的最小子集, 即空集 $\emptyset$
- 必然事件: 样本空间的最大子集, 即它自己 Ω

Q: 随机事件的集合 $\subseteq$ 样本空间 Ω 的幂集

e.g. $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

小 $=\{1,2,3\}$

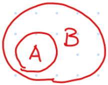
大 $=\{4,5,6\}$

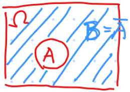
小, 大"所生成"的随机事件集合 $=\{\emptyset,$ 小, 大, 小 $\cup$ 大$\}$

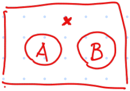
事件的关系

同一随机现象的任意两个事件 A 和 B 之间有下面的几种关系.

对于任意的 $\omega \in \Omega$:







- 若 $\omega \in A$, 则 $\omega \in B$, 那么称 B 包含 A, 记为 $A \subset B$
- $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称 A 与 B 相等, 记为 $A = B$.
- 要么 $\omega \in A$, 要么 $\omega \in B$, 则称 A 和 B 互为对方的 对立事件, 记为 $B = \bar{A}$ 或者 $A = \bar{B}$.
- $A \cap B = \emptyset$, 那么称 A 与 B 互不相容

A, B 对立 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ A, B 互不相容

if $A \cup B = \Omega$, then A, B 互不相容

$\Rightarrow$ A, B 对立.

练习

对于掷骰子的试验，请对下面事件的关系进行判断：

- $A=\{\omega_1,\omega_2\}$, $B=\{\omega_3\}$
- $A=\{\omega_4\}$, $B=\{\omega_2,\omega_4,\omega_5\}$
- $A=\{\omega_i: i\text{为偶数}\}$, $B=\{\omega_i: i\text{为奇数}\}$

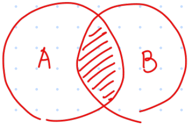
事件的运算

事件也可以做运算，事件经过某种运算得到的还是事件.

对于某随机试验的随机事件 A, B:

- 事件的积 (交) $C = A \cap B$ $A \cdot B$

$$C = \{A和B同时发生\}$$
$$= \{\omega \in \Omega : \omega \in A且\omega \in B\}$$

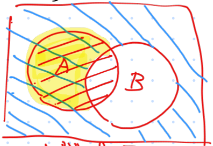


事件的运算

- 事件的和 (并) $C = A \cup B$

$$C = \{A\text{和}B\text{中至少有一个发生}\}$$
$$= \{\omega \in \Omega : \omega \in A\text{或}\omega \in B\}$$

- 事件的差 $C = A \setminus B$ 或 $A - B$



$$C = \{A\text{发生但}B\text{不发生}\}$$ A发生 & $\bar{B}$发生
$$= \{\omega \in \Omega : \omega \in A\text{且}\omega \in \bar{B}\}$$ $A \cap \bar{B}$

显然 $A - B = \underline{A \cap \bar{B}}.$

事件运算的法则

- 交换律

$$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$$

- 结合律

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

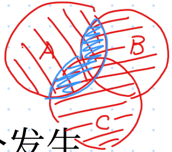
分配率

- 分配率

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

分配率的概率语言证明:

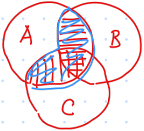


$A \cap (B \cup C)$

$\Leftrightarrow A$发生且B和C中至少有一个发生

$\Leftrightarrow A$和B一起发生或者A和C一起发生

$\Leftrightarrow (A \cap B) \cup (A \cap C)$



Q : 用集合论语言证明分配率.