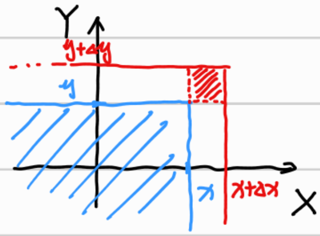
独立 vs 不相关



- X, Y 相互独立.

$\Leftrightarrow$ 分布: $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$.

$\Leftrightarrow$ 密度: $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$.

- X, Y 相关

$\Leftrightarrow$ 相关系数 $r(X,Y) \neq 0$

- X, Y 不相关

$\Leftrightarrow$ $r(X,Y) = 0$ (验证 $Cov(X,Y) = 0$ 即可).

$$r(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{VarX} \cdot \sqrt{VarY}}$$

- X, Y 具有线性关系: $\exists\, a \neq 0, b$ s.t. $Y = aX + b$ for almost $\omega \in \Omega$ w.r.t. P.

(i.e. $P[Y = aX + b] = 1$)

$\Leftrightarrow$ $|r(X,Y)| = 1$

$F_{X,Y} = F_X \cdot F_Y \leftrightarrow$ 独立 $\leftrightarrow f_{X,Y} = f_X \cdot f_Y$

独立 $\Rightarrow$ 不相关 $\longleftrightarrow$ $Cov(X,Y) = 0$

不相关 $\not\Rightarrow$ 独立

不成立: 例 4.2.1.

成立: 只有正态分布

(i.e. $(X,Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho)$)

1 习题

判断下列的随机变~~验~~量 X 和 Y 是否相关？是否独立？

X 的分布密度 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$, 其中 $x\in\mathbb{R}$；$Y=|X|$。

解：

X 的分布函数 $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{-|x|}dx$

- $x\le 0$ 时，$F_X(x)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{-(-x)}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{x}dx$
  $=\frac{1}{2}e^{x}\Big|_{-\infty}^{x}=\frac{1}{2}e^{x}$
- $x>0$ 时，$F_X(x)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{-(-x)}dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{x} e^{-x}dx$
  $=\frac{1}{2}e^{x}\Big|_{-\infty}^{0}-\frac{1}{2}e^{-x}\Big|_{0}^{x}$
  $=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(e^{-x}-1)=-\frac{1}{2}e^{-x}+1$

$$\Rightarrow F_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x\le 0\\ -\frac{1}{2}e^{-x}+1, & x>0\end{cases}$$

Y 的分布函数 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(|X|\le y)=P(-y\le X\le y)$

- $y\le 0$ 时，$F_Y(y)=P(\phi)=0$
- $y>0$ 时，$F_Y(y)=\int_{-y}^{y} f_X(x)dx=\int_{-y}^{y}\frac{1}{2}e^{-|x|}dx$
  $=\int_{-y}^{0}\frac{1}{2}e^{x}dx+\int_{0}^{y}\frac{1}{2}e^{-x}dx$
  $=\frac{1}{2}e^{x}\Big|_{-y}^{0}-\frac{1}{2}e^{-x}\Big|_{0}^{y}=1-e^{-y}$

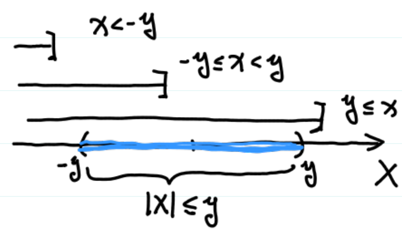
$$\Rightarrow F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ 1-e^{-y}, & y>0\end{cases}$$

X,Y 的联合分布函数

$$F_{X,Y}(x,y)=P(X\le x, Y\le y)=P(X\le x, |X|\le y)$$
$$=\begin{cases}0, & y<0\\ P(-y\le X\le \min\{x,y\}), & y\ge 0\end{cases}$$

其中 $P(-y\le X\le \min\{x,y\})$

$$=\begin{cases}0, & x<-y\\ 1-\frac{1}{2}(e^{-y}-e^{-x}), & -y\le x<y\\ 1-\frac{1}{2}e^{-y}, & y\le x\end{cases}$$



$\Rightarrow F_{X,Y}(x,y)\ne F_X(x)\cdot F_Y(y)$ (e.g. $x=-2, y=1 \Rightarrow LHS=0$ & $RHS\ne 0$)

$\Rightarrow X,Y$ 不独立.

$Cov(X,Y)=E[X\cdot Y]-E[X]\cdot E[Y]=E[X\cdot|X|]-E[X]\cdot E[|X|]$

其中 $E[X\cdot|X|]=\int_{\mathbb{R}} x\cdot|x|\cdot\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=0$

$E[X]=0$

得 $Cov(X,Y)=0 \Rightarrow X,Y$ 不相关

#

2 习题

判断下列的随机变量 X 和 Y 是否相关？是否独立？

$X \sim U(0,1)$；$Y = X^2$。

解：

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x, & 0 < x \le 1 \\ 1, & 1 < x \end{cases} \qquad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ \sqrt{y}, & 0 < y \le 1 \\ 1 & 1 < y \end{cases}$$

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x, X^2 \le y)$$

$$= \begin{cases} 0, & x \le 0 \text{ 或 } y \le 0 \\ P(X \le \min\{x, \sqrt{y}\}) = \min\{x, \sqrt{y}\} & 0 < x \le 1 \text{ 或 } 0 < y \le 1 \\ 1. & 1 < x \text{ 且 } 1 < y \end{cases}$$

$\Rightarrow F_{X,Y}(x,y) \ne F_X(x) \cdot F_Y(y)$ (e.g. $0 < y = x^2 < 1$)

$\Rightarrow X, Y$ 不独立.

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= \mathbb{E}[X \cdot Y] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] \\ &= \mathbb{E}[X^3] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[X^2] \\ &= \int_0^1 x^3 dx - \int_0^1 x dx \cdot \int_0^1 x^2 dx \\ &= \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 \times \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

$\Rightarrow X, Y$ 正相关 #

3 习题

→ 例 4.2.1 (略).

判断下列的随机变险 X 和 Y 是否相关？是否独立？

$X \sim N(0,1)$；$Y = X^2$。

解：

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(x)$$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^2 \le y)$$

$$= \begin{cases} 0, & y < 0 \\ P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}), & y \ge 0 \end{cases}$$

$$= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\sqrt{y}} - \int_{-\infty}^{-\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \Phi(\sqrt{y}) - \Phi(-\sqrt{y})$$

$$F_{X,Y}(x,y) = P[X \le x, Y \le y]$$

$$= \begin{cases} 0, & y < 0 \\ P[X \le x, -\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}], & y \ge 0 \end{cases}$$

$$= P[-\sqrt{y} \le X \le \min\{x, \sqrt{y}\}]$$

$$= \begin{cases} \Phi(x) - \Phi(-\sqrt{y}), & x < \sqrt{y} \\ \Phi(\sqrt{y}) - \Phi(-\sqrt{y}), & \sqrt{y} \le x \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_{X,Y}(x,y) \ne F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

$\Rightarrow$ X, Y 不独立.

X, Y 不相关 (参看 例 4.2.1) #

注：同为 $Y = X^2$.

- $X \sim U(0,2)$ (习题 2)：不独立 & 正相关
- $X \sim N(0,1)$ (习题 3)：不独立 & 不相关.