

1 习题

求 $Z = X + Y$ 的概率密度, 其中 X 与 Y 的分布密度函数为

$$f_X(x) := \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad \text{and} \quad f_Y(y) := \begin{cases} e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

Hint: 对于 $Z = X + Y$, 其分布密度函数

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x, z-x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(z-y, y) dy.$$

特别地, 如果 X 与 Y 独立, 那么

$$f_Z(z) = (f_X * f_Y)(z).$$

2 习题

对于 $X \sim U[0, 1]$ 和 $Y \sim \text{Exp}(1)$, 求 $M = \max\{X, Y\}$ 和 $N = \min\{X, Y\}$ 的分布函数与分布密度函数。

Hint: 对于独立的随机变量 X 和 Y , $M = \max\{X, Y\}$ 和 $N = \min\{X, Y\}$ 的分布函数有

$$F_M(m) = F_X(m) \cdot F_Y(m)$$

$$F_N(n) = 1 - (1 - F_X(n)) \cdot (1 - F_Y(n)).$$

3 习题

对于 $X \sim \text{Exp}(\lambda_1)$ 和 $Y \sim \text{Exp}(\lambda_2)$, 求 $Z = X/Y$ 的分布密度函数。

Hint: 随机变量 $Z = X/Y$ 的分布密度函数满足

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} |y| f_{X,Y}(yz, y) dy.$$