对偶率

- 对偶率

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$\neg$, ! : 否定

!(P 或 Q) = !P 且 !Q

!(P 且 Q) = !P 或 !Q

$A = \{ w \mid w$ 满足 $P \}$

$B = \{ w \mid \ldots Q \}$

$\bar{A} = \{ \ldots !P \}$

$\bar{B} \cdot \ldots$

$A \cup B = \{ w \mid P$ 或 $Q \}$

$\overline{A \cup B} = \{ w \mid !(P$ 或 $Q) \}$

$= !P$ 且 $!Q$

$= \bar{A} \cap \bar{B}$

$a_n \longrightarrow a_0$

$\forall \varepsilon > 0$

$\exists N(\varepsilon)$ s.t.

$\forall n > N(\varepsilon)$

$\Rightarrow |a_n - a_0| < \varepsilon$

$a_n \not\to a_0 \Leftrightarrow !(a_n \to a_0)$.

$\exists \varepsilon_0 > 0$

$\forall N > 0$ s.t.

$\exists n_0 > N$

$|a_n - a| \geq \varepsilon$

三个事件

$$
\begin{aligned}
D &= \{A, B, C\text{都发生}\} \\
&= ABC = A \cap B \cap C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D &= \{A, B, C\text{都不发生}\} \\
&= \bar{A}\bar{B}\bar{C} = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D &= \{A\text{发生但}B, C\text{都不发生}\} \\
&= A\bar{B}\bar{C} = A \backslash (B \cup C) = A \cap \overline{B \cup C}
\end{aligned}
$$

$A \cap \overline{B \cup C}$

三个事件

$$D=\{A,B,C\text{中至少有一个发生}\}$$

$$=\overline{\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}}=A\cup B\cup C$$

	A	B	C
1	✓	✓	✓
2	✓	✓	
3	✓		✓
4		✓	✓

$$D=\{A,B,C\text{中至少有两个发生}\}$$

$$=\text{①}(A\cap B\cap C)\cup\text{②}(A\cap B\cap\bar{C})$$

$$\cup\text{③}(A\cap\bar{B}\cap C)\cup\text{④}(\bar{A}\cap B\cap C)$$

$$=(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)$$

三个事件

$$
\begin{aligned}
D =& \{A, B, C\text{中最多有一个发生}\} \\
=& (\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C})\cup(\bar{A}\cap\bar{B}\cap C) \\
& \cup(\bar{A}\cap B\cap\bar{C})\cup(A\cap\bar{B}\cap\bar{C}) \\
=& \overline{(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)}
\end{aligned}
$$

	A	B	C		
0	×	×	×	⇔	$\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}$
1	√	×	×		$A\cap\bar{B}\cap\bar{C}$
	×	√	×		$\vdots$
	×	×	√		

例 1.1.7

射击比赛中, 射手连续射击三次, 问:

- $A = \{$击中 3 次$\}$
- $B = \{$击中 2 次$\}$
- $C = \{$击中不多于 2 次$\}$

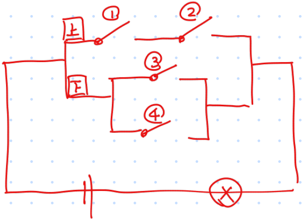
样本空间 $= \{ A_i \mid A_i$: 第 i 次击中 $\}$

$A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$

$B = (A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3)$

$C = \overline{A \cup B}$

例 1.1.8



样本空间

A_i = 开关 i 闭合.

A = {电路接通}

= {上电路接通} $\cup$ {下.....}

$= (A_1 \cap A_2) \cup (A_3 \cup A_3)$

课堂练习

化简下面的复杂事件

$$B \backslash \overline{(\bar{A} \cup \bar{B})}$$

$$\overline{(\bar{A} \cup B) \cap (A \cup B)}$$

一: $B \backslash \boxed{\overline{(\bar{A} \cup \bar{B})}}$

$B \backslash (A \cap B)$

$= B \cap \overline{(A \cap B)}$

$= B \cap (\bar{A} \cup \bar{B})$

$= (B \cap \bar{A}) \cup \underbrace{(B \cap \bar{B})}_{=\phi}$

$= \bar{A} \cap B$

二. $B \backslash \overline{(\bar{A} \cup \bar{B})}$

$= B \cap (\bar{A} \cup \bar{B})$

$= \cdots$

$= \bar{A} \cap B$

$\overline{(\bar{A} \cup B) \cap (A \cup B)}$

$= \overline{\bar{A} \cup B} \cup \overline{A \cup B}$

$= (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$

$= (\bar{B} \cap A) \cup (\bar{B} \cap \bar{A})$

$= \bar{B} \cap (A \cup \bar{A})$

$= \bar{B}$

Outline

概率

定义

概率 是随机事件发生可能性的一种度量

换言之, 概率是随机事件发生可能性的一种测量工具, 可以把它理解为刻度尺或者体重秤, 事件发生的可能性越大, 那么其测量工具上显示的数值就会越大.

事件域

事件域 $\mathcal{F}$ 是样本空间 Ω 的一些子集的集合, 这个集合的元素满足下面三个条件

- 全: $\Omega \in \mathcal{F}$
- 补: 若 $A \in \mathcal{F}$, 那 $\bar{A} \in \mathcal{F}$.
- 可数并: 若 $A_n \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \cdots$, 那么 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

称 $\mathcal{F}$ 中的元素（即 Ω 的某个子集）为 事件.

下面的集合都是掷骰子试验的事件域 tóu

- $\{\{w_1\}, \{w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}, \Omega, \emptyset\}$
- $\{A : \forall A \subset \Omega\}$
- $\{\emptyset, \Omega\}$

$\Omega = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$

小 $= \{w_1, w_2, w_3\}$

大 $= \{w_4, w_5, w_6\}$

生成 $\rightsquigarrow \mathcal{F} = \{\Omega, \phi, 小, 大\}$

$A_1 = \{w_1, w_2\}$

$A_2 = \{w_3, w_4\}$

$A_3 = \{w_5, w_6\}$

$\mathcal{F} = \{\Omega, \phi, A_1, A_2, A_3, A_2 \cup A_3, A_1 \cup A_3, A_1 \cup A_2\}$

事件域

Q: 事件域的条件里面为什么没有

- 空: $\emptyset \in \mathcal{F}$
- 可数交: $\cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ 如果 $A_n \in \mathcal{F}$

Q: $A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Pf. $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}} \in \mathcal{F}$.

$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\overline{A_n}} = \bigcap_n A_n$

确定概率: 统计方法

为了考察某一随机试验的随机事件 A 发生的频率, 我们重复的进行这一随机试验, 并计算下面的数值

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

其中 n 是试验的总次数, n_A 为事件 A 发生的次数. 随着试验次数的增加, 准确的说当 $n \to \infty$ 时,

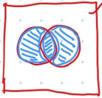
$$\lim_{n\to\infty} f_n(A) = p, p \in [0,1],$$

p 称为事件 A 发生的 概率.

概率的公理化定义 $P: \mathcal{F} \to [0,1]$

设 Ω 是随机试验的样本空间, $P(\cdot) : \mathcal{F} \to R$ 是从事件域 $\mathcal{F}$ 到实数集 的映射, 满足

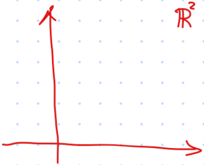
- **非负性**: 对任一事件 $A \in \mathcal{F}$, 有 $P(A) \geq 0$
- **规范性**: $P(\Omega) = 1$
- **可列可加性**: 若事件 $A_1, A_2, \cdots$ **两两不相容**, 则



$P(\Omega) < +\infty$

$P'(\cdot) := \frac{P(\cdot)}{P(\Omega)}$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$



那么称 P 为事件域 $\mathcal{F}$ 上的 **概率测度**, 而称 $P(A)$ 为事件 A 的概率, 称三元素 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间.

集合 $\xrightarrow{\text{关心的事件}}$ 幂集 $\xrightarrow{\text{面积}}$ 测度 $\xrightarrow{\text{有限}}$ 概率

样本空间Ω $\longrightarrow$ 事件域$\mathcal{F}$ $\longrightarrow$ m $\longrightarrow$ $P(A) := \frac{m(A)}{m(\Omega)} : \mathcal{F} \to [0,1]$

小结

确定概率: 古典方法

设随机试验的样本空间为 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$, 并且 $P(\{\omega_i\})$ 相同. 则事件 A 发生的概率为

$$P(A) = \frac{A\text{包含的样本点个数}}{\Omega\text{包含的样本点个数}} = \frac{n_A}{n}$$

例 1.2.1

袋子中有 3 只白球和 2 只红球, 从袋子中任取两只, 请问下面事件的概率

- $A = \{$取得的两只球都是白球$\}$
- $B = \{$取得一只红球一只白球$\}$

A_i = ith 拿白球

$\bar{A}_i$ = ith 不拿白球 = ith 拿红球

$A = A_1 \cap A_2$