Ch 4. 随机变量的数字特征

钟友良

zhongyl@scut.edu.cn

Outline

Outline

回顾

习题

2.21. $X \sim U[0,2]$.

$Y = X^2+1$ 分布函数．分布密度函数．

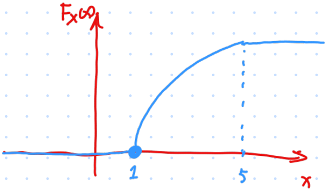
$$F_Y(y) = P(Y\le y) = P(X^2+1\le y) \longrightarrow -\sqrt{y-1}\le X\le\sqrt{y-1}$$

$$= \begin{cases} 0, & y<1 \\ P(-\sqrt{y-1}\le X\le \sqrt{y-1}), & y\ge 1. \end{cases} = \begin{cases} 0, & y<1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{y-1}, & 1\le y\le 5 \\ 1, & y>5 \end{cases}$$

$$\| \quad X\sim U[0,2]$$

$$P(0\le X\le \min\{2,\sqrt{y-1}\})$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{y-1}, & y\le 5 \\ 1, & y>5 \end{cases}$$



分布函数 右连续（存在右导数）

$$f_X(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\varepsilon}(F_X(x+\varepsilon)-F_X(x))$$

$$= \begin{cases} 0, & y<1 \\ \frac{1}{4\sqrt{y-1}}, & 1\le y<5 \\ 0, & 5\le y \end{cases}$$

Outline

数字特征

已知 X 的分布函数，我们不仅可以通过其分布求任意一个随机事件的概率，还可以通过分布得知随机变量取值的平均值以及其取值偏离平均值的程度，这就是随机变量的 数学期望 和 方差 。

数字期望

数学期望 反映的是随机变量的 加权平均值 。
定义离散型随机变量 X 为某位选手射中的环数,
已知其分布列为

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0.01 & 0.02 & 0.05 & 0.06 & 0.06 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

根据随机变量的分布，我们用下面的办法来计算
这个选手的平均环数是合理的

$$\sum_{i=1}^{10} i \cdot \frac{n_i}{N} = \sum_{i=1}^{10} i \cdot P(X = i)$$

数学期望

设离散型随机变量 X 的概率分布列
$P(X = x_i) = p_i,\ i = 1, 2, \cdots$。
若级数 $\sum_i x_i p_i$ 收敛，则称 X 的数学期望存在，并称

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

为 X 的 数学期望 或 均值 ，简称 X 的 期望 。

期望的存在性

要求 $\sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i$ 收敛，是为了说明无论怎么排列 $\{x_i\}$，数项级数

$\sum_{i=1}^{+\infty} p_i = 1$

$$\{S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i\}$$

将收敛到同样的极限。
下面几种情形不需要考虑 $\sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i$ 是否收敛，直接计算期望值即可。

- 随机变量取值有限的情形
- 随机变量取值非负的情形

离散型随机变量

对于离散随机变量函数 $g(X)$，其期望如下计算

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i$$

如果 $P(X = x_i) = p_i$ 且 $\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i$ 收敛。

二项分布的期望

$X \sim B(n,p)$ 有 $E[X] = np$。

$$E[X] = \sum_{k=0}^{n} k \cdot p(X=k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \cdot C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k} k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= n \sum \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$= np \cdot \boxed{\sum_{l=0}^{n-1} C_{n-1}^{l} \cdot p^{l} \cdot (1-p)^{(n-1)-l}} \to (p+(1-p))^{n-1} = 1$$

泊松分布的期望

$X \sim Pois(\lambda)$ 有 $E[X] = \lambda$。

$$P(X=k) = \frac{1}{k!}\lambda^k \cdot e^{-\lambda} \quad (\lambda > 0)$$

$$E[X] = \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot P(X=k)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda}.$$

$$= \sum_{k=1} \frac{1}{(k-1)!}\lambda^k \cdot e^{-\lambda}.$$

$$= \lambda \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!}\lambda^{k-1} e^{-\lambda}$$

$$= \lambda \underbrace{\sum_{l=0} \frac{1}{l!}\lambda^l e^{-\lambda}} = \lambda$$

几何分布的期望

$X \sim Geo(p)$ 有 $E[X] = \frac{1}{p}$。

成功的概率 p

$P(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$

$$E[X] = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot P(X=k)$$

$$= \sum_{k} k \cdot (1-p)^{k-1} \cdot p$$

取 $q = 1-p$ $\sum_{k} k \cdot q^{k-1}(1-q)$

$$= \sum_{k=1} k \cdot q^{k-1} - \sum_{k=1} k \cdot q^{k}$$

$$= \sum_{k=1} k \cdot q^{k-1} - \sum_{k=2} (k-1) \cdot q^{k-1}$$

$$= 1 + \sum_{k=2} (k-(k-1)) q^{k-1}$$

$$= 1 + \sum_{k=2} q^{k-1}$$

$$= \sum_{k=0} q^{k} = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}.$$

$\because (\sum_{k=0} q^{k})(1-q) = 1 - q^{\infty} = 1$

例 4.1.2

设 X 的分布列为

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

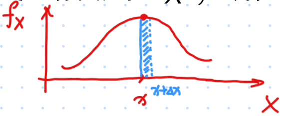
计算 $E[X]$, $E[-X+2]$, $E(X^2)$.

$E[X] = -1\times\frac{1}{8} + 0\times\frac{1}{4} + 1\times\frac{3}{8} + 3\times\frac{1}{4}$

$-X+2 \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ $\quad X^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 9 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

连续型随机变量的数学期望

设连续型随机变量 X 的分布密度函数为 f_X，那么对于任意的 x，有



$$P(x \leq X \leq x+\Delta x) = \int_x^{x+\Delta x} f_X(t)dt \approx f_X(x)\Delta x$$

我们可以将 $[-T, T]$ 划分为为 $\bigcup_{i=-\infty}^{\infty}[x_{i-1}, x_i]$，那么根据 Riemann 积分的定义，$X$ 的期望可以表示为

$$E_X(x) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i \boxed{f_X(x_i)\Delta x_i} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

$\approx$

$P(X=x_i)$

连续型随机变量的数学期望

设连续型随机变量 X 的分布密度函数为 f_X，如果

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx < \infty$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x\,dx$$

$$S_n = \int_{-n\pi}^{+n\pi} \cos x\,dx$$

那么称

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx$$

为 X 的 数学期望（均值），简称为 X 的 期望 。

随机变量函数的期望

对于连续型随机变量的函数，求 $Y = g(X)$ 的数学期望，不需要先求得 Y 的分布密度函数 $f_Y(y)$，再通过 $\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)dx$ 计算
实际上，若

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\, dx < \infty$$

那么 $g(X)$ 的期望可以通过下面的方法计算

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\, dx$$

例 4.1.4

$X \sim U[a,b]$ 有 $E[X] = \frac{a+b}{2}$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\, dx$$

$$= \int_a^b x \frac{1}{b-a}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{b-a} \int_a^b dx^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{a+b}{2}$$

例 4.1.5

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 有 $E[X] = \mu$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sigma \frac{x-\mu}{\sigma} + \mu\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} d\,\frac{x-\mu}{\sigma}$$

取 $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma y + \mu) e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

$$= \underbrace{\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y e^{-\frac{1}{2}y^2} dy}_{\displaystyle \| \; \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} d\frac{y^2}{2}} + \underbrace{\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy.}_{\displaystyle \| \; \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2} d\frac{y}{\sqrt{2}}}$$

$$-e^{-\frac{1}{2}y^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0 - 0 = 0$$

$$\frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz$$

$$= \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \times \sqrt{\pi} = \mu.$$

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix}$$

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)^2$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dx\, dy$$

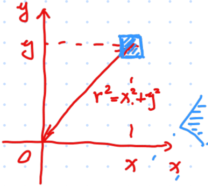
$$= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx\,dy$$

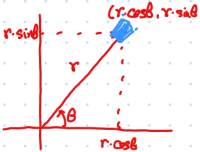
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-r^2}\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} dr^2\, d\theta$$

$$-e^{-r^2}\Big|_0^{+\infty} = 0 - (-1) = 1.$$

$$\| \\ \pi$$





例 4.1.6

$X \sim Exp(\lambda)$ 有 $E[X] = \frac{1}{\lambda}$

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & x>0 \\ 0. & x \le 0 \end{cases}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\, dx$$

$$= \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} \lambda x \cdot e^{-\lambda x}\, d(\lambda x)$$

$$= \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} y^{2-1} e^{-y}\, dy$$

$$= \frac{1}{\lambda} \Gamma(2)$$

$$= \frac{1}{\lambda} \Gamma(1+1) = \frac{1}{\lambda} 1! = \frac{1}{\lambda}.$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} \cdot e^{-y}\, dy.$$

Claim: $\Gamma(n+1) = n!$ ✓

$n=0$ 时 $\Gamma(n+1) = \Gamma(1)$

$$= \int_0^{+\infty} y^{1-1} \cdot e^{-y}\, dy$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-y}\, dy = -e^{-y} \Big|_0^{+\infty}.$$

$$= 0-(-1) = 1.$$

数学归纳法.

假设 $\Gamma(n+1) = n!$

要证 $\Gamma(n+2) \overset{?}{=} (n+1) \times \Gamma(n+1) = (n+1)!$

$$(n+1) \cdot \Gamma(n+1) = (n+1) \int_0^{+\infty} y^{n+1-1} e^{-y}\, dy.$$

$$= (n+1) \int_0^{+\infty} y^{n} \cdot e^{-y}\, dy$$

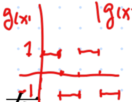
$$= \int_0^{+\infty} e^{-y}\, dy^{n+1}$$

$$= \frac{y^{n+1}}{e^{y}} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} y^{n+1}\, de^{-y}$$

$$= 0-0 + \int_0^{+\infty} y^{n+2-1} e^{-y}\, dy$$

$$= \Gamma(n+2).$$

例 4.1.7



$|g(x)|=1$

$$\int_1^{+\infty}\frac{|g(x)|}{x}dx = \ln x\Big|_1^{+\infty} =$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\cdot g(x)\,dx = ?$$

X 服从标准的柯西分布

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

判断 X 的数学期望是否存在，如果存在，求证 $E[X]$。

绝对收敛 $\Longrightarrow$ 收敛 ($\because -|x| \le x \le |x|$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x| f_X(x)dx \;\not\Longleftarrow\; \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f_X(x)dx$$

$$\therefore -\int |x| f_X\,dx \le \int x f_X\,dx \le \int |x| f_X\,dx \;)$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,dx}{\pi(1+x^2)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx^2}{1+x^2}$$

$$= \frac{2}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{dy}{1+y} = \frac{1}{\pi}\ln(y+1)\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\pi}(\ln(\infty)-0) = +\infty$$

例 4.1.8

$X \sim U[0, 2\pi]$， $Y = \sin X$， 求 $E[Y] = 0$。

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y)\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x\, f_X(x)\, dx$$

$$= \int_{0}^{2\pi} \sin x \cdot \frac{1}{2\pi}\, dx$$

$$= \frac{-1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} d \cos x$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \cdot \cos x \Big|_{0}^{2\pi}.$$

$$= -\frac{1}{2\pi}(1-1) = 0$$

数学期望的运算性质

性质 1：任意常数 c 的数学期望等于 c

证明：随机变量 X 服从

$$P(X) = \begin{cases} 1, & X = c \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

所以其期望就是

$$E[X] = c \times 1 + 0 = c$$

数学期望的运算性质

性质 2 (线性): 设随机变量 X 和 Y 的期望都存在，a, b 都是常数，那么

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (ax+by) f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

$$= a\iint x f_{X,Y}\,dx\,dy + b\underbrace{\iint y f_{X,Y}\,dx\,dy}$$

$$= a\int x\big(\underbrace{\int f_{X,Y}\,dy}\big)dx + \cdots$$

$$= a\cdot\int x f_X\,dx + \cdots$$

$$= a\cdot E[X] + b\cdot E[Y].$$

数学期望的运算性质

证明：只对连续型的随机变量证明。
先证明随机变量 $Z = aX + bY$ 的期望存在。假设 X, Y 的联合密度函数为 $f_{X,Y}(x,y)$，判断下面积分的收敛性

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} ax + by f_{X,Y}(x,y)dxdy \\
&\leq a\int_{\mathbb{R}^2} xf_{X,Y}(x,y)dxdy + b\int_{\mathbb{R}^2} yf_{X,Y}(x,y)dxdy \\
&= a\int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx + b\int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)dy \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

数学期望的运算性质

上面的式子表明 $E[Z]$ 存在，根据积分运算的线性性

$$\begin{aligned}
E[aX+bY] &= \int_2 (ax+by) f_{X,Y}(x,y)\,dxdy \\
&= a\int_2 x f_{X,Y}(x,y)\,dxdy + b\int_2 y f_{X,Y}(x,y)\,dxdy \\
&= a\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx + b\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy \\
&= aE[X] + bE[Y]
\end{aligned}$$

数学期望的运算性质

性质 3: 若随机变量 X 与 Y 独立，且 X 与 Y 的期望都存在，那么

$$E[XY] = E[X]E[Y].$$

$$\iint xy\, f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \iint xy \cdot f_X(x) \cdot f_Y(y)\,dx\,dy$$

$$= \int x f_X(x) \left(\int y f_Y(y)\,dy \right) dx$$

$$= \int x f_X(x) \cdot E[Y]\,dx$$

$$= E[Y] \cdot \int x \cdot f_X(x)\,dx$$

$$= E[X] \cdot E[Y].$$

方差

随机变量的均值只能反映随机变量的平均预期，但却无法从中看出其取值的波动性大小，即随机试验的结果偏离平均值的程度。

方差的例子

巧克力加工厂 A, B 分别包装一带巧克力的重量
$X_A \sim U[50-0.5, 50+0.5]$,
$X_B \sim U[50-1.5, 50+1.5]$, 那么

$$E[X_A] = E[X_B] = 50,$$

从均值来看，这两个加工厂的包装水平是一样的，但是

$$P(X_A \in [50-1.5, 50-0.5] \cup [50+0.5, 50+1.5]) = 0$$

$$P(X_B \in [50-1.5, 50-0.5] \cup [50+0.5, 50+1.5]) = \frac{2}{103}$$

方差的定义

我们用 方差 来描述一个随机变量的波动性。

量	X	$E[X]$	$Var[X]$	$\sigma[X]$
单位	g	g	g^2	g

定义 1.4.3: 设随机变量 X 有有限的数学期望，如果 $E[(X-E[X])^2]<\infty$，则称

$Y=(X-E[X])^2$

$E[Y]$

$$Var[X]=E[(X-E[X])^2]$$

为 X 的 方差 ，而称 $\sqrt{Var[X]}$ 为 X 的 标准差 ，记为 $\sigma[X]$.

方差的计算

- 对于离散型的随机变量:

$$Var[X] = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - E[X])^2 p_i$$

- 对于连续型的随机变量:

$$Var[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f_X(x)dx$$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$= E[(X - E[X])^2]$

$= E[X^2 - 2E[X] \cdot X + E[X]^2]$

$= E[X^2] - 2E[X] \cdot E[X] + E[X]^2.$

例 4.1.9

$X \sim B(1, p)$ 有 $Var[X] = p(1-p)$

$P(X=k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$.

$E[X] = n \cdot p$

$$E[X^2] = \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot P(X=k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot C_n^k \cdot p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum k^2 \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}.$$

$$= \sum k \cdot \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum (k-1+1) \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}.$$

$$= \sum \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$+ \sum \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$