Ch 7. 参数估计

钟友良

zhongyl@scut.edu.cn

Outline

Outline

Outline

7.0 前言

7.1 参数的点估计

7.2 估计量优劣势的评价

7.3 参数的区间估计

参数估计.

$X \sim F_X(\cdot;\theta) \quad \theta \in \Theta$

样本 $(X_1,\dots,X_n) \xrightarrow{?} \theta = ?$

∘ 点估计 $\hat{\theta}$ ∘ 区间估计 u

∘ 矩估计.

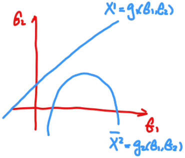
$$\begin{cases} E[X^1] = g_1(\theta_1,\dots,\theta_k) \\ \vdots \\ E[X^k] = g_k(\theta_1,\dots,\theta_k) \end{cases}$$

求解

$$\begin{cases} \theta_1 = h_1(E[X^1],\dots,E[X^k]) \\ \vdots \\ \theta_k = h_k(E[X^1],\dots,E[X^k]) \end{cases}$$

用 $\overline{X^k}$ 代 $E[X^k]$ $\Longrightarrow$

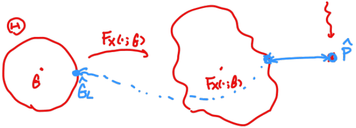
$$\begin{cases} \hat{\theta}_{1,M} = h_1(\overline{X^1},\dots,\overline{X^k}) \\ \vdots \\ \hat{\theta}_{k,M} = h_k(\overline{X^1},\dots,\overline{X^k}) \end{cases}$$



$(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$

$\Updownarrow$

$P(X=x_i) = \frac{1}{n}$



什么是参数

总体参数基本分为下面几类

- 总体分布中所含的参数：比如正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 中的 μ 和 σ^2。
- 总体参数的函数：比如服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的总体，其取值不超过某个给定常数 a 的概率，即 $P(X \leq a) = \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$。
- 分布的数字特征：比如均值 $E[X]$，方差 $Var[X]$ 等。

参数估计的形式

参数估计的形式有下面两种:

- 点估计。
- 区间估计。

参数的点估计

设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自总体 X 的一个容量为 n 的样本，称用于估计未知参数 θ 的统计量

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

为 θ 的 点估计量 。

点估计的分类

本课程要求掌握的点估计方法分为以下几类

- 矩法估计
- 最大似然估计
- 顺序统计量估计

矩法估计

所谓矩法估计，就是用样本的矩来估计总体的矩。比如对于总体 X，其概率密度函数 $f_X(x, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)$ 含有 k 个未知参数 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$。假若 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$ 是总体前 k 阶原点矩 $E[X^i]$，$i = 1, 2, \cdots, k$ 的函数，即

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_1(E[X], E[X^2], \cdots, E[X^k]) \\ \theta_2 = \theta_2(E[X], E[X^2], \cdots, E[X^k]) \\ \quad \cdots \\ \theta_k = \theta_k(E[X], E[X^2], \cdots, E[X^k]) \end{cases}$$

Q: 如何估计 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$?

矩法估计的具体操作

- 矩法估计的基本条件：把总体的参数表示成总体各阶原点矩 的函数。
- 矩法估计的基本方法：用前 k 阶样本原点矩 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^j$ 代替 X 的前 k 阶原点矩 $E[X^j]$，$j = 1, 2, \cdots, k$，得到 θ_j 的 矩法估计量 $\hat{\theta}_j$，

$$\begin{cases} \hat{\theta}_1 = \theta_1(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2, \cdots, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k) \\ \cdots \\ \hat{\theta}_k = \theta_k(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2, \cdots, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k) \end{cases}$$

- 对样本进行一次观测，假设 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是样本的一个观测值，那么将其带入 $\hat{\theta}_j$ 得到的数值 $\hat{\theta}_j(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 就是参数 θ_j 的 矩法估计值。

矩法估计应用

- 总体均值 $E[X]$ 的矩法估计：$\hat{\mu}_M = \overline{\boldsymbol{X}}$。
- 一批产品合格率 (不合格率) 的估计：
  由于总体 $X \sim B(1, p)$，$p = E[X]$。将 $E[X]$ 换成 $\overline{X}$，即可得到合格率的矩法估计量

  $$\widehat{\boldsymbol{p}}_M = \overline{\boldsymbol{X}}$$

  假如 $n = 100$，其中一次抽取中有 3 件不合格品，那么

  $$\hat{p}_M = \frac{1}{100} \times 3 = 0.03.$$

  即 0.03 为矩法估计值。

矩法估计应用

- 总体方差 $\sigma^2 = Var[X]$ 以及标准差 σ 的估计。因为

$$\sigma^2 = E[X^2] - (E[X])^2, \quad \sigma = \sqrt{E[X^2] - (E[X])^2}$$

作矩法估计

$$\widehat{E[X]} = \overset{=\frac{1}{n}\sum_i X_i}{\overline{X}}, \quad \widehat{E[X^2]} = \overset{=\frac{1}{n}\sum X_i^2}{\overline{X^2}}$$

有

$$\widehat{\sigma^2} = \overline{X^2} - \overline{X}^2 = S_n^2, \checkmark \quad \hat{\sigma} = \sqrt{\overline{X^2} - \overline{X}^2} = S_n \checkmark$$

总体的各阶中心矩的矩法估计量就是样本的相应阶中心矩。

例 7.1.3

设总体在某一区间上均匀取值，试用矩法估计该区间的左右端点。

解：根据题意，设总体 $X \sim U[a,b]$，此题要估计的就是 a 和 b。均匀分布的数字特征我们知道，

$$E[X] = \frac{a+b}{2}, \quad Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

例 7.1.3

反解得

$$\begin{cases} a = E[X] - \sqrt{3Var[X]} = \mu - \sqrt{3}\sigma \\ b = E[X] + \sqrt{3Var[X]} = \mu + \sqrt{3}\sigma \end{cases}$$

依据将 μ, σ 换成其相应的矩法估计量，有

$$\hat{a}_M = \overline{X} - \sqrt{3}S_n$$
$$\hat{b}_M = \overline{X} + \sqrt{3}S_n$$

矩法估计量不唯一 (例 7.1.4)

设总体的分布密度函数为

$$f_X(x,\theta) = \frac{\theta}{2} e^{-\theta|x|}, \infty < x < \infty, \theta > 0$$

求 θ 的矩法估计量。

$E[X]$, $E[X^{2k+1}]$

$E[|X|]$

$E[X^{2k}]$.

考虑总体的偶数阶矩，

$$E[X^{2k}] = \theta \int_0^{\infty} x^{2k} e^{-\theta x} \, \mathrm{d}x = \frac{(2k)!}{\theta^{2k}}$$

即

$$\theta = \left(\frac{(2k)!}{E[X^{2k}]} \right)^{\frac{1}{2k}}$$

矩法估计量不唯一 (例 7.1.4)

再由

$$\widehat{E[X^{2k}]}_M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^{2k}$$

所以

$$\hat{\theta}_M = \left(\frac{(2k)!n}{\sum_{i=1}^{n} X_i^{2k}}\right)^{\frac{1}{2k}}$$

最大似然估计

最大似然估计的基本思想是 某一次 抽样的观测结果是 概率最大 的。

问题分类：

- 离散型总体：联合概率分布在观测点处概率最大。
- 连续型总体：联合概率密度函数在观测点处取值最大。

似然函数

- 总体 X 服从某种离散型分布，含有参数 θ，某次观察值为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，其 似然函数 为

likelihood

$$\boldsymbol{L(x_1, \cdots, x_n; \theta) = P(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n; \theta)}$$

- 总体 X 服从某种连续型分布，含有参数 θ，某次观察值为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，其 似然函数 为

$$\boldsymbol{L(x_1, \cdots, x_n; \theta) = f(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n; \theta)}$$

最大似然估计

如上定义 似然函数 $L(x_1, x_2, \cdots, x_n, \theta)$，如果某统计量 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，使得

$$
\begin{aligned}
& L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)) \\
= & \max_{\theta} L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta)
\end{aligned}
$$

就称 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_n)$ 为 θ 的 最大似然估计量

。
在数学优化问题中，一个函数（一元或者是多元）的极值点等价于使这个函数的导数（或者梯度）为零的点。而极大值点不仅满足上述条件还会使得目标函数的 Hessian 矩阵在该点负定。

最大似然估计量

对服从参数为 λ 的指数分布的总体 X，使用最大似然估计。
由于 $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$，假设从中抽取容量为 n 的样本，那么当 $x_i > 0,\ i = 1, 2, \cdots, n$ 的时候，并假设样本的一次观测值为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，那么

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda) = \lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

最大似然估计量

为了方便讨论，我们运用 $\ln x$ 的单调性，来研究

$$\max_{\lambda} \ln L(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda)$$

计算一下

$$\ln L = \ln\left(\lambda^n \cdot \exp\left(-\lambda \sum_i x_i\right)\right)$$

$$= n \cdot \ln\lambda - \lambda \cdot \sum x_i$$

$$G(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda) = \ln L(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda) = \cancel{n \ln(\lambda) - \lambda}$$

$$\frac{d}{d\lambda} \ln L = \frac{n}{\lambda} - \sum x_i$$

对上式求其驻点，即求使得

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\lambda} = 0$$

的 λ，得到

$$\boxed{\lambda^\star = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}}$$

最大似然估计量

验证下

$$\frac{\mathrm{d}^2 G}{\mathrm{d}\lambda^2}|_{\lambda^\star} = -\frac{n}{\lambda^2}|_{\lambda^\star} = -\frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n} < 0$$

所以 $\lambda^\star$ 确实为 G 从而是 L 的极大值点，即

$$\hat{\lambda}_L = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i} = \frac{1}{\overline{X}}$$

最大似然估计量

对于服从 $[0,\theta]$ 上均匀分布的总体 X，估计区间的右端点 θ。
假设样本容量为 n，那么 X 似然函数为

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta^n}, & x_1,x_2,\cdots,x_n\in[0,\theta]\\ 0, & else\end{cases}$$

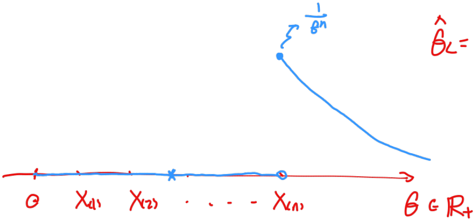
$X \sim U[0,\theta]$

$(X_1,\dots,X_n)$

$$"\prod_{i=1}^{n}" P(X_i=x_i;\theta)$$

$$P(X=x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}, & x\in[0,\theta]\\ 0, & else\end{cases}$$

$$\hat{\theta}_L = x_{(n)} = \max_i x_i$$



最大似然估计量

对于 确定 的观测值 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，要使得 L 取到最大值，那么

$$\theta = \max\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$

即

$$\theta = x_{(n)} \Rightarrow \hat{\theta}_L = X_{(n)}$$

也就是说区间右端点的最大似然估计量为顺序统计量 $X_{(n)}$.

最大似然估计量

我们也可以用矩法估计 θ，因为

$$E[X] = \frac{\theta}{2},$$

所以 $\theta = 2E[X]$，说明

$$\hat{\theta}_M = 2\overline{X}$$

即区间右端点的矩法估计量为 $2\overline{X}$.

Outline

无偏估计量

定义 7.2.1: 设总体 $X \sim F_X(\cdot, \theta)$, $\theta \in \Theta$, g 为 θ 的函数, $T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 $g(\theta)$ 的一个估计量, 如果

$$E[T(X_1, X_2, \cdots, X_n)] = g(\theta),$$

称 $T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 $g(\theta)$ 的 无偏估计量 。如果

unbiased

$$\lim_{n\to\infty} E[T(X_1, X_2, \cdots, X_n)] = g(\theta)$$

则称 $T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 $g(\theta)$ 的 渐进无偏估计量 。

无偏与渐进无偏

分析当 $X \sim U[0,\theta]$，其区间右端点的矩估计量 $\hat{\theta}_M$ 与最大似然估计量 $\hat{\theta}_L$ 是否为 θ 的无偏估计量?

- 对于矩法估计量

$$\hat{\theta}_M = 2\overline{X}$$

计算

$$E_\theta[\hat{\theta}_M] = 2E_\theta[\overline{X}] = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} E_\theta[X_i]$$
$$= \frac{2}{n} \cdot n \cdot \frac{\theta}{2} = \theta$$

所以 $\hat{\theta}_M$ 是 θ 的无偏估计量。

无偏与渐进无偏

- 对于最大似然估计量

$$\hat{\theta}_L = X_{(n)}$$

$$\underbrace{X_{(1)} \cdots X_{(k-1)}}_{(k-1)\text{个}}\ X_{(k)}=x\ \underbrace{X_{(k+1)} \cdots X_{(n)}}_{(n-k)\text{个}} \quad \mathbb{R}$$

根据 (6.3.19)，知 $P[X_{(k)}=x]$

$$f_{X_{(n)}}(x) \overset{\downarrow k=n}{=} n[F_X(x)]^{n-1} f_X(x) \quad \{X_1,\ldots,X_n\}\text{样本}$$

而

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta}, & x \in [0,\theta] \\ 0, & else \end{cases}$$

$$P[X_{(k)}=x] = C_n^{k-1} C_{n-(k-1)}^{1} P[X<x]^{k-1} \cdot P[X=x] \cdot P[X>x]^{n-k}$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot F_X(x)^{k-1} \cdot (1-F_X(x))^{n-k} \cdot f_X(x)$$

并且

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{x}{\theta}, & x \in [0,\theta] \\ 1, & else \end{cases}$$

无偏与渐进无偏

所以

$$f_{X_{(n)}}(x) = \begin{cases} n\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1}\frac{1}{\theta}, & x \in [0,\theta] \\ 0, & else \end{cases}$$

所以

$$E_\theta[\hat{\theta}_L] = E_\theta[X_{(n)}] = \int_0^\theta xn\frac{x^{n-1}}{\theta^n}\,\mathrm{d}x = \frac{n}{n+1}\theta < \theta.$$

所以 $\hat{\theta}_L$ 不是 θ 的无偏估计量，而是 θ 的渐进无偏估计量。 $E[S_n^2] = \frac{n-1}{n}\cdot Var[X]$ $S_n^{*2} = \frac{n}{n-1}S_n^2$

无偏与渐进无偏

我们令

$$\hat{\theta}_L^* = \frac{n+1}{n}\hat{\theta}_L \qquad E[\hat{\theta}_L^*] = \theta$$

那么 $\hat{\theta}$ 就是 θ 的无偏估计量。若 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量，那么 $g(\hat{\theta})$ 一般不是 $g(\theta)$ 的无偏估计量，除非 $g(x)$ 是线性函数。例如 S_n^{*2} 是 σ^2 的无偏估计量，但是 S_n^* 却不是 σ 的无偏估计量。

有效估计量

对于总体 X 的参数 $g(\theta)$ 的两个 无偏估计量 $T_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)$， $T_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$， 若有

$$\boldsymbol{Var}[\boldsymbol{T_1}] < \boldsymbol{Var}[\boldsymbol{T_2}]$$

则称 T_1 比 T_2 有效 。
由于方差反映随机变量取值的波动程度，认为波动较小的统计量更有效是合理的。

有效估计

判断总体 $X \sim U[0,\theta]$ 的区间右端点的矩估计量和最大似然估计量哪一个更有效?

$$Var[\hat{\theta}_M] = Var[2\overline{X}] = Var[\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i]$$

$$= \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var[X_i] = \frac{4}{n^2} n \frac{\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3n}$$

无偏估计量

$$
\begin{aligned}
Var[\hat{\theta}_L] &= Var[\frac{n+1}{n}X_{(n)}] \\
&= \frac{(n+1)^2}{n^2}[E[X_{(n)}^2] - \left(E[X_{(n)}]\right)^2] \\
&= \frac{(n+1)^2}{n^2}\left\{\int_0^{\theta} x^2 n\frac{x^{n-1}}{\theta^n}\,\mathrm{d}x - \frac{n^2}{(n+1)^2}\theta^2\right\} \\
&= \frac{(n+1)^2}{n^2}\left\{\frac{n}{n+2}\theta^2 - \frac{n^2}{(n+1)^2}\theta^2\right\} \\
&= \frac{\theta^2}{n(n+2)}
\end{aligned}
$$

无偏估计量

显然的，当 $n > 1$，就有

$$Var[\hat{\theta}_L] < Var[\hat{\theta}_M]$$

即 $\hat{\theta}_L$ 比 $\hat{\theta}_M$ 要好。

一致最小方差无偏估计量

定义 7.2.2: 设总体 $X \sim F_X(\cdot, \theta)$, $\theta \in \Theta$, 若 $T_0(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 $g(\theta)$ 的无偏估计量, 且对 $g(\theta)$ 的任意无偏估计量 $T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 都有

$$Var[T_0] \leq Var[T], \ \forall \theta \in \Theta$$

UMVUE

则称 T_0 是 $g(\theta)$ 的一致最小方差无偏估计量 。

uniform minimal variance unbiased estimation

一致最小方差无偏估计量一般不易求得, 除非事先知道 $g(\theta)$ 无偏估计量的方差的下界, 再去寻找达到该方差的无偏估计量。

相合估计量

定义 7.2.3: 设总体 $X \sim F_X(\cdot, \theta)$, $\theta \in \Theta$, 并且设 $T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 $g(\theta)$ 的估计量, 如果对于任意的 $\epsilon > 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} P(|T(X_1, X_2, \cdots, X_n) - g(\theta)| \geq \epsilon) = 0, \forall\theta \in \Theta,$$

则称 $T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 $g(\theta)$ 的 相合估计量 。

由弱大数定律, $\overline{X^k}$ 是总体 k 阶原点矩的相合估计量。

相合估计量的判定依据

若 $\hat{\theta}$ 为 θ 的相合估计，且 $\eta = g(\theta)$ 为 θ 的连续函数，那么 $\hat{\eta} = g(\hat{\theta})$ 为 η 的相合估计量。

- $\overline{X^k}$ 是 $E[X^k]$ 的相合估计量。
- S_n^2 和 S_n^{*2} 都是 σ^2 的相合估计量。
- S_n 和 S_n^* 都是 σ 的相合估计量。

Outline

参数的区间估计

区间估计: 参数的 区间估计 表示以

$$T_1(X_1, X_2, \cdots, X_n) \text{ 和 } T_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

为一个 随机区间 的端点，并且使得该随机区间包含参数的 概率 满足给定的条件。

参数的区间估计

定义 7.3.1: 设总体 $X \sim F_X(\cdot, \theta)$， $\theta \in \Theta$, $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为样本。若有统计量 $T_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 和 $T_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$， 使得对给定的 $\alpha (0 < \alpha < 1)$ 有

$$\boldsymbol{P(T_1(X_1, \cdots, X_n) \le g(\theta) \le T_2(X_1, \cdots, X_n)) = 1}$$

则称 $[T_1(X_1, X_2, \cdots, X_n), T_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)]$ 是 $g(\theta)$ 的 置信度为 $1-\alpha$ 的 区间估计， 或叫做 估计区间， 置信区间 。

区间估计的一般方法

置信度为 $1-\alpha$ 的区间估计的一般方法可以分为下面三步:

- 构造一个样本和未知参数 θ 的函数，记为 $Y(X_1, X_2, \cdots, X_n, \theta)$，使得 Y 服从的分布 不依赖 于 θ。
- 适当选择 两个常数 a, b，使得

$$P(a \le Y \le b) = 1 - \alpha$$

- 根据 $a \le Y \le b$ 反解出 θ 的范围

$$T_1(X_1, X_2, \cdots, X_n) \le \theta \le T_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

即有了 θ 的 $1-\alpha$ 置信区间。

正态分布总体均值的区间估计

对于正态分布总体 $X \sim N(\mu, \sigma_0^2)$，其中 σ_0 已知，求 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的区间估计。
假设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为其样本，根据推论 6.3.1 知

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma_0^2}{n})$$

所以

$$Y = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}}} \sim N(0, 1)$$

正态分布总体均值的区间估计

由

$$P(|Y| \le u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

知

$$P\left(\left|\frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}}}\right| \le u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

变化为

$$P\left(\overline{X} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}} \le \mu \le \overline{X} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

所以我们有 μ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的区间估计为

$$\left[\overline{X} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}}, \overline{X} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}}\right]$$

正态总体参数的区间估计

总体方差 σ^2 未知，给出总体均值 μ 的区间估计量

根据推论 6.3.2 有

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S_n}\sqrt{n-1} \sim t(n-1)$$

由

$$P\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu}{S_n}\sqrt{n-1}\right| \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) = 1-\alpha$$

知 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的区间估计为

$$\left[\overline{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S_n}{\sqrt{n-1}}, \overline{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S_n}{\sqrt{n-1}}\right]$$

σ^2 的区间估计

$\mu = \mu_0$，其中 μ_0 已知，求 σ^2 的区间估计。

由于总体与样本独立同分布，所以

$$Y_i = \frac{X_i - \mu_0}{\sigma} \sim N(0,1)$$

根据命题 6.3.2 知

$$Z = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 \sim \chi^2(n)$$

所以

$$P(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n) \leq Z \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)) = 1 - \alpha$$

σ^2 的区间估计

即

$$P\left(\frac{1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)} \geq \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (X_i-\mu_0)^2} \geq \frac{1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right) = 1-\alpha$$

得到 σ^2 置信度为 $1-\alpha$ 的区间估计为

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\mu_0)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}, \quad \frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\mu_0)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\right]$$

σ^2 区间估计

μ 未知，估计 σ^2 的置信度 $1-\alpha$ 的区间。
由抽样分布基本定理,

$$\frac{nS_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

令

$$P\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \le \frac{nS_n^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}(n-1)}\right) = 1-\alpha$$

所以 σ^2 的置信度 $1-\alpha$ 的区间估计为

$$\left[\frac{nS_n^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\quad \frac{nS_n^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]$$

两个正态总体参数的区间估计

设 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，且 X，Y 相互独立，样本分别为 $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$，$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$，其中总体 X 与 Y 的样本均值与方差分别为

$$\overline{X},\ \overline{Y},\ S_m^2,\ S_n^2$$

$\mu_1 - \mu_2$ 和 $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ 的区间估计量分别是什么?

$\mu_1 - \mu_2$ 的区间估计

σ_1^2 和 σ_2^2 已知，求 $\mu_1 - \mu_2$ 的区间估计。由推论 6.3.1

$$\overline{X} \sim N(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{m}), \overline{Y} \sim N(\mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n}),$$

所以

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0, 1)$$

然后令

$$P\left(\left|\frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}}\right| \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

$\mu_1 - \mu_2$ 的区间估计

求得 $u_1 - u_2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 区间估计为

$$[(\overline{X} - \overline{Y}) - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}},$$

$$(\overline{X} - \overline{Y}) + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}]$$

两个正态总体参数的区间估计

$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ 未知，求 $\mu_1 - \mu_2$ 的区间估计。
由推论 6.3.4 知

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \sim t(m+n-2)$$

以及 t 分布关于 y 轴对称的性质，得到

$$P\left(\left|\frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}\right| \le t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)\right) = 1-\alpha$$

两个正态总体参数的区间估计

知 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的区间估计量为

$$[(\overline{X}-\overline{Y})-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}},$$

$$(\overline{X}-\overline{Y})+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}]$$

$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的区间估计

μ_1, μ_2 已知，求 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的区间估计。
首先，下面的结论是显然的

$$\frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2 \sim \chi^2(m), \quad \frac{1}{\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2 \sim \chi^2(n)$$

根据 F 分布的定义有

$$\frac{n}{m}\frac{\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(m,n)$$

$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的区间估计

特别的

$$P\left(F_{\frac{\alpha}{2}}(m,n) \le \frac{n}{m}\frac{\sum_{i=1}^m (X_i-\mu_1)^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i-\mu_2)^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m,n)\right) = 1$$

由此可得 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的区间估计

$$[\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m,n)}\frac{n\sum_{i=1}^m (X_i-\mu_1)^2}{m\sum_{i=1}^n (Y_i-\mu_2)^2},$$
$$\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(m,n)}\frac{n\sum_{i=1}^m (X_i-\mu_1)^2}{m\sum_{i=1}^n (Y_i-\mu_2)^2}]$$

$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的区间估计

μ_1, μ_2 未知，求 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的区间估计。

根据推论 6.3.3 有

$$\frac{mS_m^2}{nS_n^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\frac{n-1}{m-1} \sim F(m-1, n-1)$$

所以

$$P\left(F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1) \leq \frac{mS_m^2}{nS_n^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\frac{n-1}{m-1} \leq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)\right) = 1$$

可得 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的区间估计量为

$$\left[\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)}\frac{m(n-1)S_m^2}{n(m-1)S_n^2}, \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)}\frac{m(n-1)S_m^2}{n(m-1)S_n^2}\right]$$