生成函数基础

diamond_duke

2019 年 12 月 19 日

小朋友与二叉树

定义一棵 n 个节点的二叉树是合法的，当且仅当每个节点的权值都在给定集合 C 中。对于每个 $S \in [1, m]$，求有多少棵不同的，权值和为 S 的合法二叉树。

$n, m \leq 10^5$， C 中的元素不超过 10^5。

大朋友与多叉树

定义一棵 n 个节点的树是合法的，当且仅当每个节点的孩子个数都在给定集合 C 中。求有多少棵不同的，非叶节点个数为 S 的合法树。
$n, s \le 10^5$， C 中的元素不超过 10^5。

「TJOI2015」概率论

对于一棵随机生成的 n 个结点的有根二叉树（所有互相不同构的形态等概率出现），求叶子节点数的期望。
$n \le 10^9$。同构的判定如下：

算法 1: $boolCheck(T1, T2)$

Require: 两棵树的节点T1,T2

```
if T1 == null || T2 == null then
    return T1 == null && T2 == null
else
    return Check(T1− > leftson, T2− > leftson) && Check(T1− >
    rightson, T2− > rightson)
end if
```

一道例题

对于集合 S，定义 $w(S)=\prod_{x\in S}x$。
定义 $F(n,k)=\sum_{S\subseteq[n],|S|=k}w(S)$ （$0\le k\le n$）。
给定质数 p，对于 $\forall i\in[0,p)$，求存在多少个 $k\in[0,n]$，满足 $F(n,k)\equiv i\pmod p$。
$n\le 10^{18}$，$p\le 2\times10^5$。

另一道例题

给定长度为 n 的置换 p，判断字符串 S 每个长度为 n 的子串在 p 下是否是不动点。
$|S|, n \leq 5 \times 10^5$。

烷烃计数

给定 n，求 n 个点无标号的，每个节点度数 ≤ 4 的无根树个数，以及还要求根节点度数 ≤ 3 的无根树个数。
$n, T \leq 10^5$。

仙人掌计数

对于所有 $i \in [1, n]$，求有多少个 i 个节点的有标号仙人掌。
$n \le 3 \times 10^4$。

HDU 6585

求无标号，有根，联通，且每条边在恰好一个环的无向图个数。
$n \leq 10^5$。

点双连通图计数

求 n 个点的有标号点双连通图个数。
$n \leq 3 \times 10^4$。

边双连通图计数

求 n 个点的有标号边双连通图个数。
$n \leq 3 \times 10^4$。

极限

定义

设 f 为定义在 $[a, +\infty)$ 上的函数，A 为定数，若对于任意给定 $\varepsilon > 0$，存在正数 $M \geq a$，使得当 $x > M$ 时有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称**函数** f **在** x **趋于** $+\infty$ **时以** A **作为极限**，记作：

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A，\text{或：} f(x) \to A(x \to +\infty)$$

类似定义 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ 以及 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$。

极限（续）

定义

设 f 为定义在 $U^{\circ}(x_0;\delta')$ 上的函数，A 为定数，若对于任意给定 $\varepsilon > 0$，存在正数 $\delta < \delta'$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称**函数 f 在 x 趋于 x_0 时以 A 作为极限**，记作：

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A\text{，或：} f(x) \to A(x \to x_0)$$

这一定义称为函数极限的 $\varepsilon - \delta$ 定义。

导数

定义

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域中有定义，若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，则称 f **在点** x_0 **处可导**，并称该极限为 f **在点** x_0 **处的导数**，记作 $f'(x_0)$。若不存在，则称 f **在点** x_0 **处不可导**。

导数

定义

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域中有定义，若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，则称 f **在点** x_0 **处可导**，并称该极限为 f **在点** x_0 **处的导数**，记作 $f'(x_0)$。若不存在，则称 f **在点** x_0 **处不可导**。

令 $x=x_0+\Delta x$，$\Delta y=f(x+x_0)-f(x_0)$，则导数的定义即为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$$

因此导数即为函数增量 Δy 与自变量增量 Δx 之比的极限。这个增量比称为函数关于自变量的平均变化率（或**差商**），而函数 $f'(x_0)$ 为 f 在 x_0 处关于 x 的**变化率**。

费马定理

定理

设 f 在 x_0 的某邻域有定义，且在 x_0 可导。若点 x_0 为 f 的极值点，则有 $f'(x_0) = 0$。

费马定理

定理

设 f 在 x_0 的某邻域有定义，且在 x_0 可导。若点 x_0 为 f 的极值点，则有 $f'(x_0) = 0$。

引理 (局部保号性)

若 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A > 0$（或 < 0），则对于任意正数 $r < A$，存在 $U^\circ(x_0)$，使得 $\forall x \in U^\circ(x_0)$，有

$$f(x) > r > 0$$

连续

定义

设函数 f 在某 $U(x_0)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称 f **在点** x_0 **处连续**。

我们同样也可以直接用 $\varepsilon-\delta$ 语言来描述这一定义：若对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，则称 f 在点 x_0 连续。

罗尔中值定理

定理

若函数 f 满足以下条件：

- f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续；
- f 在开区间 (a, b) 上可导；
- $f(a) = f(b)$。

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$，使得 $f'(\xi) = 0$。

柯西中值定理

定理

设函数 f, g 满足以下条件：

- f, g 在闭区间 $[a, b]$ 上都连续；
- f, g 在开区间 (a, b) 上都可导；
- $f'(x)$ 和 $g'(x)$ 不同时为 0；
- $g(a) \neq g(b)$。

则存在 $\xi \in (a, b)$，使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

洛必达法则

定理

若函数 f 和 g 满足以下条件：

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$；
- 在 x 的某空心邻域 $U^\circ(x_0)$ 内两者均可导，且 $g'(x) \neq 0$；
- $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$（其中 A 可为非正常极限）。

则

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

泰勒多项式

定义

对于函数 f，设它在点 x_0 存在直到 n 阶的导数，则我们由这些导数构造一个 n 次多项式：

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

称为 f 在点 x_0 处（带有皮亚诺型余项）的**泰勒多项式**，$T_n(x)$ 的各项系数称为**泰勒系数**。

泰勒多项式

定义

对于函数 f，设它在点 x_0 存在直到 n 阶的导数，则我们由这些导数构造一个 n 次多项式：

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

称为 f 在点 x_0 处（带有皮亚诺型余项）的**泰勒多项式**，$T_n(x)$ 的各项系数称为**泰勒系数**。

当 $x_0 = 0$ 时，有**麦克劳林公式**：

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

泰勒多项式

定理

若函数 f 在点 x_0 存在直到 n 阶的导数，则 $f(x) = T_n(x) + o((x - x_0)^n)$。

泰勒多项式

定理

若函数 f 在点 x_0 存在直到 n 阶的导数，则 $f(x) = T_n(x) + o((x - x_0)^n)$。

一些简单的例子：

- e^x

泰勒多项式

定理

若函数 f 在点 x_0 存在直到 n 阶的导数，则 $f(x) = T_n(x) + o((x - x_0)^n)$。

一些简单的例子：

- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$；
- $\sin(x)$

泰勒多项式

定理

若函数 f 在点 x_0 存在直到 n 阶的导数，则 $f(x) = T_n(x) + o((x - x_0)^n)$。

一些简单的例子：

- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$;
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$;
- $\cos(x)$

泰勒多项式

定理

若函数 f 在点 x_0 存在直到 n 阶的导数，则 $f(x) = T_n(x) + o((x - x_0)^n)$。

一些简单的例子：

- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$；
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$；
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdot + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \cdots$；
- $\ln(1 + x)$

泰勒多项式

定理

若函数 f 在点 x_0 存在直到 n 阶的导数，则 $f(x) = T_n(x) + o((x - x_0)^n)$。

一些简单的例子：

- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$；
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$；
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdot + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \cdots$；
- $\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \cdots$；
- $\frac{1}{1+x}$

泰勒多项式

定理

若函数 f 在点 x_0 存在直到 n 阶的导数，则 $f(x)=T_n(x)+o((x-x_0)^n)$。

一些简单的例子：

- $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$；
- $\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$；
- $\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdot+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}+\cdots$；
- $\ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\cdots$；
- $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n\cdot x^n+\cdots$；
- $(1+x)^a$

泰勒多项式

定理

若函数 f 在点 x_0 存在直到 n 阶的导数，则 $f(x)=T_n(x)+o((x-x_0)^n)$。

一些简单的例子：

- $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$；
- $\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$；
- $\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdot+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}+\cdots$；
- $\ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\cdots$；
- $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n\cdot x^n+\cdots$；
- $(1+x)^a=1+\frac{a}{1}x+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n+\cdots$。

普通生成函数

定义

对于一个无穷序列 $\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$，定义其**普通生成函数**为级数：$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$。

一些例子

- 序列 $\{\frac{1}{0!}, \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \cdots, \frac{1}{k!}, \cdots\}$ 的普通生成函数?

一些例子

- 序列 $\{\frac{1}{0!}, \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \cdots, \frac{1}{k!}, \cdots\}$ 的普通生成函数： e^x。
- 序列 $\{1, 1, 1, \cdots, 1, \cdots\}$ 的普通生成函数?

一些例子

- 序列 $\{\frac{1}{0!}, \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \cdots, \frac{1}{k!}, \cdots\}$ 的普通生成函数： e^x。
- 序列 $\{1, 1, 1, \cdots, 1, \cdots\}$ 的普通生成函数： $\frac{1}{1-x}$。
- 序列 $\{1, 2, 4, \cdots, 2^n, \cdots\}$ 的普通生成函数?

一些例子

- 序列 $\{\frac{1}{0!}, \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \cdots, \frac{1}{k!}, \cdots\}$ 的普通生成函数： e^x。
- 序列 $\{1, 1, 1, \cdots, 1, \cdots\}$ 的普通生成函数： $\frac{1}{1-x}$。
- 序列 $\{1, 2, 4, \cdots, 2^n, \cdots\}$ 的普通生成函数： $\frac{1}{1-2x}$。
- 序列 $\{1, 0, 1, 0, \cdots, 1, 0, \cdots\}$ 的普通生成函数?

一些例子

- 序列 $\{\frac{1}{0!}, \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \cdots, \frac{1}{k!}, \cdots\}$ 的普通生成函数：e^x。
- 序列 $\{1, 1, 1, \cdots, 1, \cdots\}$ 的普通生成函数：$\frac{1}{1-x}$。
- 序列 $\{1, 2, 4, \cdots, 2^n, \cdots\}$ 的普通生成函数：$\frac{1}{1-2x}$。
- 序列 $\{1, 0, 1, 0, \cdots, 1, 0, \cdots\}$ 的普通生成函数：$\frac{1}{1-x^2}$。
- 序列 $\{0, 1, 0, 1, \cdots, 0, 1, \cdots\}$ 的普通生成函数?

一些例子

- 序列 $\{\frac{1}{0!}, \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \cdots, \frac{1}{k!}, \cdots\}$ 的普通生成函数： e^x。
- 序列 $\{1, 1, 1, \cdots, 1, \cdots\}$ 的普通生成函数： $\frac{1}{1-x}$。
- 序列 $\{1, 2, 4, \cdots, 2^n, \cdots\}$ 的普通生成函数： $\frac{1}{1-2x}$。
- 序列 $\{1, 0, 1, 0, \cdots, 1, 0, \cdots\}$ 的普通生成函数： $\frac{1}{1-x^2}$。
- 序列 $\{0, 1, 0, 1, \cdots, 0, 1, \cdots\}$ 的普通生成函数： $\frac{x}{1-x^2}$。
- 序列 $\{1, 2, 3, 4, \cdots, n, \cdots\}$ 的普通生成函数?

一些例子

- 序列 $\{\frac{1}{0!}, \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \cdots, \frac{1}{k!}, \cdots\}$ 的普通生成函数：e^x。
- 序列 $\{1, 1, 1, \cdots, 1, \cdots\}$ 的普通生成函数：$\frac{1}{1-x}$。
- 序列 $\{1, 2, 4, \cdots, 2^n, \cdots\}$ 的普通生成函数：$\frac{1}{1-2x}$。
- 序列 $\{1, 0, 1, 0, \cdots, 1, 0, \cdots\}$ 的普通生成函数：$\frac{1}{1-x^2}$。
- 序列 $\{0, 1, 0, 1, \cdots, 0, 1, \cdots\}$ 的普通生成函数：$\frac{x}{1-x^2}$。
- 序列 $\{1, 2, 3, 4, \cdots, n, \cdots\}$ 的普通生成函数：

$$\frac{\mathrm{d}(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

小练习

序列 $\{1, 3, 5, 7, \cdots, 2n-1, \cdots\}$ 的普通生成函数?

小练习

序列 $\{1, 3, 5, 7, \cdots, 2n-1, \cdots\}$ 的普通生成函数：

$$A = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \cdots$$

小练习

序列 $\{1,3,5,7,\cdots,2n-1,\cdots\}$ 的普通生成函数：

$$\begin{aligned} A &= 1+3x+5x^2+7x^3+\cdots \\ xA &= 0+1x+3x^2+5x^3+\cdots \end{aligned}$$

小练习

序列 $\{1, 3, 5, 7, \cdots, 2n-1, \cdots\}$ 的普通生成函数：

$$\begin{aligned}
A &= 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \cdots \\
xA &= 0 + 1x + 3x^2 + 5x^3 + \cdots \\
(1-x)A &= 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \cdots \\
&= 1 + \frac{2x}{1-x}
\end{aligned}$$

小练习

序列 $\{1,3,5,7,\cdots,2n-1,\cdots\}$ 的普通生成函数：

$$
\begin{aligned}
A &= 1+3x+5x^2+7x^3+\cdots \\
xA &= 0+1x+3x^2+5x^3+\cdots \\
(1-x)A &= 1+2x+2x^2+2x^3+\cdots \\
&= 1+\frac{2x}{1-x} \\
A &= \frac{1+\frac{2x}{1-x}}{1-x} = \frac{1+x}{(1-x)^2}
\end{aligned}
$$

练习

求下列级数的普通生成函数：

- $4, 4, 4, 4, \cdots$；
- $2, 4, 6, 8, \cdots$；
- $0, 0, 0, 2, 4, 6, 8, \cdots$；
- $1, 5, 25, 125, \cdots$；
- $1, -3, 9, -27, 81, \cdots$；
- $1, 0, 5, 0, 25, 0, 125, 0, \cdots$；
- $0, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 3, 0, 0, 4, 0, 0, 5, \cdots$；
- $4, 5, 7, 10, 14, 19, 25, \cdots$。

练习答案

- $\dfrac{4}{1-x}$；
- $\dfrac{2}{(1-x)^2}$；
- $\dfrac{2x^3}{(1-x)^2}$；
- $\dfrac{1}{1-5x}$；
- $\dfrac{1}{1+3x}$；
- $\dfrac{1}{1-5x^2}$；
- $\dfrac{x}{(1-x^3)^2}$；
- $\dfrac{4}{1-x}+\dfrac{x}{(1-x)^3}$。

经典例题

有四种无限多的水果，要求第一种恰好拿出偶数个，第二种恰好拿出 5 的倍数个，第三种最多拿 4 个，第四种最多拿 1 个，求恰好拿出 n 个水果的方案数。

经典例题

有四种无限多的水果，要求第一种恰好拿出偶数个，第二种恰好拿出 5 的倍数个，第三种最多拿 4 个，第四种最多拿 1 个，求恰好拿出 n 个水果的方案数。

$$\frac{1-x^2}{\cdot}\frac{1-x^5}{\cdot}(1+x+x^2+x^3+x^4)\cdot(1+x)=\frac{1}{(1-x)^2}$$

故方案数为 $n+1$。

Fibonacci 数列

求 Fibonacci 数列 $a_0 = a_1 = 1$，$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$（$n \geq 2$）的普通生成函数?

Fibonacci 数列

求 Fibonacci 数列 $a_0 = a_1 = 1$，$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$（$n \geq 2$）的普通生成函数：

$$A = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

Fibonacci 数列

求 Fibonacci 数列 $a_0 = a_1 = 1$，$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$（$n \geq 2$）的普通生成函数：

$$\begin{aligned} A &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \\ xA &= 0 + a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \cdots \end{aligned}$$

Fibonacci 数列

求 Fibonacci 数列 $a_0 = a_1 = 1$，$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$（$n \geq 2$）的普通生成函数：

$$A = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$
$$xA = 0 + a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \cdots$$
$$x^2 A = 0 + 0 + a_0 x^2 + a_1 x^3 + \cdots$$

Fibonacci 数列

求 Fibonacci 数列 $a_0 = a_1 = 1$，$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$（$n \geq 2$）的普通生成函数：

$$
\begin{aligned}
A &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots \\
xA &= 0 + a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + \cdots \\
x^2A &= 0 + 0 + a_0x^2 + a_1x^3 + \cdots \\
(1 - x - x^2)A &= a_0 + a_1x - a_0x = 1
\end{aligned}
$$

Fibonacci 数列

求 Fibonacci 数列 $a_0 = a_1 = 1$，$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$（$n \geq 2$）的普通生成函数：

$$\begin{aligned} A &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \\ xA &= 0 + a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \cdots \\ x^2 A &= 0 + 0 + a_0 x^2 + a_1 x^3 + \cdots \\ (1 - x - x^2)A &= a_0 + a_1 x - a_0 x = 1 \\ A &= \frac{1}{1 - x - x^2} \end{aligned}$$

Fibonacci 数列

求 Fibonacci 数列 $a_0 = a_1 = 1$，$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$（$n \geq 2$）的普通生成函数：

$$\begin{aligned} A &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \\ xA &= 0 + a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \cdots \\ x^2 A &= 0 + 0 + a_0 x^2 + a_1 x^3 + \cdots \\ (1 - x - x^2) A &= a_0 + a_1 x - a_0 x = 1 \\ A &= \frac{1}{1 - x - x^2} \end{aligned}$$

使用特征根法，即可得到 Fibonacci 数列的通项公式。

Catlan 数

求 Catlan 数 $c_0 = 1$， $c_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i c_{n-i-1}$ 的普通生成函数?

Catlan 数

求 Catlan 数 $c_0 = 1$，$c_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} c_i c_{n-i-1}$ 的普通生成函数：

$$G(x)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{m=0}^{n} c_m c_{n-m} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} x^n$$

Catlan 数

求 Catlan 数 $c_0=1$，$c_n=\sum_{i=0}^{n-1} c_i c_{n-i-1}$ 的普通生成函数：

$$G(x)^2=\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{m=0}^{n} c_m c_{n-m}=\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} x^n$$

故 $G(x)=1+x\cdot G(x)^2$，解得 $G(x)=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2x}$。

Catlan 数

求 Catlan 数 $c_0 = 1$，$c_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i c_{n-i-1}$ 的普通生成函数：

$$G(x)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{m=0}^{n} c_m c_{n-m} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} x^n$$

故 $G(x) = 1 + x \cdot G(x)^2$，解得 $G(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$。若 $G(x) = \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$，则 $\lim_{x \to 0} G(x) = \infty$，与 $G(x)$ 的常数项为 1 矛盾。

Catlan 数

求 Catlan 数 $c_0=1$，$c_n=\sum_{i=0}^{n-1} c_i c_{n-i-1}$ 的普通生成函数：

$$G(x)^2=\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{m=0}^{n} c_m c_{n-m}=\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} x^n$$

故 $G(x)=1+x\cdot G(x)^2$，解得 $G(x)=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2x}$。若 $G(x)=\dfrac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$，则 $\lim\limits_{x\to 0} G(x)=\infty$，与 $G(x)$ 的常数项为 1 矛盾。

$$-\sqrt{1-4x}=-(1-4x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}=\frac{1}{2x}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2k-3)}{2^k}\cdot\frac{(4x)^k}{k!}$$

Catlan 数

求 Catlan 数 $c_0 = 1$， $c_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} c_i c_{n-i-1}$ 的普通生成函数：

$$G(x)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{m=0}^{n} c_m c_{n-m} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} x^n$$

故 $G(x) = 1 + x \cdot G(x)^2$，解得 $G(x) = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$。若 $G(x) = \dfrac{1 + \sqrt{1-4x}}{2x}$，则 $\lim\limits_{x \to 0} G(x) = \infty$，与 $G(x)$ 的常数项为 1 矛盾。

$$-\sqrt{1-4x} = -(1-4x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1}{2x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2k-3)}{2^k} \cdot \frac{(4x)^k}{k!}$$

故 $c_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2k-1)}{2^{k+1}} \cdot \frac{4^{k+1}}{(k+1)!}$，整理得 $c_k = \frac{(2k)!}{(k+1)!k!} = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$。

指数生成函数

定义

对于一个无穷序列 $\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$，定义其**指数生成函数**为级数：$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \frac{x^k}{k!}$。

指数生成函数

定义

对于一个无穷序列 $\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$，定义其**指数生成函数**为级数：$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \frac{x^k}{k!}$。

普通生成函数通常用来解决无标号计数问题，指数生成函数通常用来解决带标号的计数问题。

一些例子

- n 个元素的排列数 $p_n = n!$ 的指数生成函数?

一些例子

- n 个元素的排列数 $p_n = n!$ 的指数生成函数：
  $\hat{P}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} x^n = \frac{1}{1-x}$。
- n 个元素的环排列数 $c_n = (n-1)!$（$n \geq 1$）的指数生成函数?

一些例子

- n 个元素的排列数 $p_n = n!$ 的指数生成函数：
  $\hat{P}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} x^n = \frac{1}{1-x}$。
- n 个元素的环排列数 $c_n = (n-1)!$（$n \geq 1$）的指数生成函数：
  $\hat{C}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n!} x^n = -\ln(1-x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$。

一些例子

- n 个元素的排列数 $p_n = n!$ 的指数生成函数：
  $\hat{P}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} x^n = \frac{1}{1-x}$。
- n 个元素的环排列数 $c_n = (n-1)!$（$n \geq 1$）的指数生成函数：
  $\hat{C}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n!} x^n = -\ln(1-x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$。注意到
  $\hat{P}(x) = e^{\hat{C}(x)}$，这是巧合吗?

一些例子

- n 个元素的排列数 $p_n = n!$ 的指数生成函数：
  $\hat{P}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} x^n = \frac{1}{1-x}$。
- n 个元素的环排列数 $c_n = (n-1)!$（$n \geq 1$）的指数生成函数：
  $\hat{C}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n!} x^n = -\ln(1-x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$。注意到
  $\hat{P}(x) = e^{\hat{C}(x)}$，这是巧合吗？
- 错排数的指数生成函数？

一些例子

- n 个元素的排列数 $p_n = n!$ 的指数生成函数：
  $\hat{P}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} x^n = \frac{1}{1-x}$。
- n 个元素的环排列数 $c_n = (n-1)!$（$n \geq 1$）的指数生成函数：
  $\hat{C}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n!} x^n = -\ln(1-x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$。注意到
  $\hat{P}(x) = e^{\hat{C}(x)}$，这是巧合吗?
- 错排数的指数生成函数?
- n 个点的有标号无向连通图个数的指数生成函数?

生成函数操作

- 乘法；

生成函数操作

- 乘法；NTT；

生成函数操作

- 乘法；NTT；MTT；

生成函数操作

- 乘法；NTT；MTT；
- 求逆；

生成函数操作

- 乘法；NTT；MTT；
- 求逆；
- 牛顿迭代；

生成函数操作

- 乘法；NTT；MTT；
- 求逆；
- 牛顿迭代；
- 求 $\ln$；

生成函数操作

- 乘法；NTT；MTT；
- 求逆；
- 牛顿迭代；
- 求 $\ln$；
- 求 $\exp$；

生成函数操作

- 乘法；NTT；MTT；
- 求逆；
- 牛顿迭代；
- 求 $\ln$；
- 求 $\exp$；
- 除法与取余；

生成函数操作

- 乘法；NTT；MTT；
- 求逆；
- 牛顿迭代；
- 求 $\ln$；
- 求 $\exp$；
- 除法与取余；
- 多点求值；

生成函数操作

- 乘法；NTT；MTT；
- 求逆；
- 牛顿迭代；
- 求 $\ln$；
- 求 $\exp$；
- 除法与取余；
- 多点求值；
- 多点插值；

生成函数操作

- 乘法；NTT；MTT；
- 求逆；
- 牛顿迭代；
- 求 $\ln$；
- 求 $\exp$；
- 除法与取余；
- 多点求值；
- 多点插值；
- 复合逆。

Thank You!