构造

吴清月

2020/3/9

写在前面

众所周知，构造题几乎毫无套路可言，也几乎分不出什么知识点。

所以没法分模块讲，~~只好硬扯~~。

还是众所周知，构造题从来不好判断难度，因为不知道会不会降智。

所以一千个人眼中有一千个难度，和难度标签可能没啥特别大的关系。

仍然是众所周知，CF 构造题多。

~~所以很多题是 CF 近期的比赛题，做过原题的同学请不要秒的太快。（雾~~

课件中涉及到的所有例题都会下发参考程序。

Coloring Torus

对于一个 $n \times n$ 的网格，称 (r, c) 为处于第 $r+1$ 行，第 $c+1$ 列的格子。一个对网格的好的 k 染色是满足下述条件的染色方案：

- 每个格子被染成 $1, 2, 3, \ldots, k$ 这 k 种颜色之一。
- k 种中的每种颜色都被至少一个格子使用。
- 对于任意颜色 $i, j(1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k)$，满足所有颜色为 i 的格子，其相邻的颜色 j 的格子个数相同。这里，与 (r, c) 相邻的格子为 $((r-1) \bmod n, c)$，$((r+1) \bmod n, c)$，$(r, (c-1) \bmod n)$，$(r, (c+1) \bmod n)$（如果一个格子多次出现，那么会算多次）。

给出 $k(1 \leq k \leq 1000)$，选择一个 $1 \leq n \leq 500$，任意构造一个对 $n \times n$ 的网格的好的 k 染色。

小提示

尝试构造一下 $k = 4, n = 4$。
尝试构造一下 $k = 8, n = 4$。
尝试构造一下 $k = 7, n = 4$。
会做了吗?

大提示

方案其实有很多，但是下面这一种比较妙：

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

1	2	3	4
6	7	8	5
3	4	1	2
8	5	6	7

扩展到 $k = 7, n = 4$ 也是可以的：

1	2	3	4
6	7	4	5
3	4	1	2
4	5	6	7

题解

对于 $k=n$ 的情况，我们构造 $a_{i,j}=(i+j-2) \bmod n+1$。

对于 $k=2n$ 的情况，我们对奇偶进行分类讨论：

- 奇数行：$a_{i,j}=(i+j-2) \bmod n+1$
- 偶数行：$a_{i,j}=(i+j-2) \bmod n+n+1$

对于 $n<k\le 2n$ 的情况，直接在 $k=2n$ 的基础上把所有大于 k 的 x 替换成 $x-n$ 即可。

所以接下来的问题就是找到一个 n 满足 $n\le k\le 2n$。

令 $n=2\left\lceil\frac{k}{4}\right\rceil$ 即可。特判 $k=1$。

代码长度 100b。

Robot Arms

一台机械臂由 m 段和 $m+1$ 个关节构成，第 i 段的长度为一个整数 d_i，段与段之间由关节连接。其中第一个关节位于 $(0,0)$，机械臂运行的过程中所有的段都必须水平或者竖直。

有 n 个目标点，第 i 个目标点位于 (x_i, y_i)。

构造一台最多 40 段的机械臂，满足机械臂的最后一个关节能够到达所有的目标点，并且输出方案。

$1 \le n \le 1000, -10^9 \le x_i, y_i \le 10^9$，你需要保证构造的 $1 \le d_i \le 10^{12}$。

题解

首先 $x_i + y_i$ 的奇偶性必须都相同，否则不合法。

先令 $m = 40$，接下来我们构造 $d_i = 2^{m-i}$。容易发现这时能够到达的点一定满足 $|x| + |y| \leq 2^m - 1$。

注意到，所有满足上述性质且奇偶性正确的点都可以被到达，证明可以用数学归纳法。

如果奇偶性不相同，就先在开头添加一段长度为 1 的段。

Not Same

大小为 n 的集合 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，满足 $1 \leq a_i \leq n$。

每次你可以选择一个子集的元素并且把这个子集的元素都 -1，你需要在至多 $n+1$ 次操作之内把所有数变成 0。

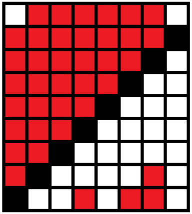
每次选择的子集不能相同。

$1 \leq n \leq 1000$

题解

我们把操作描述为一个宽度为 n 高度为 $n+1$ 的 01 矩阵 c，其中第 i 行第 j 列表示第 i 次操作中 a_j 是否被选中。

先按照降序排序，然后我们这样填充：



a={8,8,7,7,5,5,5,1}

接下来我们证明这种方案一定合法。

证明

Proof.

首先，无论 a 数组如何，一定都能通过这种方式变成全 0。
如果存在 $1 \le i < j \le n+1$，满足第 i 行和第 j 行相同，接下来分类讨论：
若 $i = 1$，则
$a_1 \le n \implies c_{1,1} = 0 \implies c_{j,1} = 0 \implies a_1 \le n+1-j < n$
$c_{1,2} = c_{j,2} \implies a_2 \le n-j$ 或 $a_2 \ge n \implies a_2 \le n-j < n-1$
$\dots$
$c_{j,n+2-j} = c_{1,n+2-j} \implies a_{n+2-j} \le 0$，矛盾。
否则，先抠掉第 1 行，第 i 行和第 j 行不可能都是全 1，选择一个 0 的位置，同理可证。 $\square$

Inverse of Rows and Columns

给定一个 $n \times m$ 的 01 矩阵，你可以选择任意行翻转任意列翻转。

求最后能否将整个矩阵变成有序的。

所谓有序就是满足 $a_{1,1} \leq a_{1,2} \leq \ldots \leq a_{1,m} \leq a_{2,1} \leq a_{2,2} \leq \ldots \leq a_{2,m} \leq \ldots \leq a_{n,m-1} \leq a_{n,m}$。

$1 \leq n, m \leq 200$

题解

首先特判 $n = 1$。

注意到，最终的矩阵要么满足第一行全 0 要么满足最后一行全 1，并且一旦确定了一行的情况，所有的列怎么翻转就是确定的了。

接下来问题就是确定每一行怎么翻转。这个非常简单，只需要让前面一半全 0，后面一半全 1，中间一行先一段 0 后一段 1 即可。

时间复杂度 $O(n^3)$ 或者 $O(n^2)$。

~~也不难啊，为啥难度是 2800 呢?~~

Construct the Binary Tree

给定 $d \leq 5000$，构造一个 n 个点的二叉树，满足所有节点的深度之和等于 d。

1000 组询问。

题解

首先构造一棵完全二叉树，令 $f_i = \lfloor \frac{i}{2} \rfloor$。

然后随便找出来一条链，从后到前枚举不在链上的点，每次让父节点深度 $+1$。

每次总深度会 $+1$，所以一定能构造出解。

时间复杂度 $O(Tn)$。

Kuroni and the Score Distribution

新鲜热乎的例题。

对于一个序列 $1 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_n \le 10^9$，我们定义三元组 (i, j, k) 是优美的，当且仅当 $a_i + a_j = a_k$。

给定 n 和 m，构造一个长度为 n 的有 m 个优美的三元组的序列。

$1 \le n \le 5000, 0 \le m \le 10^9$

题解

最大元素为 a_i 的优美的三元组最多有 $\lfloor\frac{i-1}{2}\rfloor$ 个。构造方法可以令 $a_i = i$。

取 k 满足 $\sum_{i=1}^{k}\lfloor\frac{i-1}{2}\rfloor \le m$ 且 $\sum_{i=1}^{k+1}\lfloor\frac{i-1}{2}\rfloor > m$。

设 $d = m - \sum_{i=1}^{k}\lfloor\frac{i-1}{2}\rfloor$，则

$$a_i = \begin{cases} i & i \le k \\ a_k + a_{k-2d+1} & i = k+1 \\ \infty & i > k+1 \end{cases}$$

注意 ∞ 的取值需要满足不能形成三元组。

时间复杂度 $O(n)$。

Modulo Matrix

构造一个 $n \times n$ 的矩阵 a，满足如下性质：

- $1 \leq a_{i,j} \leq 10^{15}$。
- 所有的 $a_{i,j}$ 互不相同。
- 存在一个正整数 m，满足对于任意两个行相邻或列相邻的元素 x, y，有 $\max(x, y) \bmod \min(x, y)$ 都是 m。

$2 \leq n \leq 500$，保证有解。

题解

考虑构造 $m = 1$ 的方案。

将整个矩阵黑白染色，令黑色格子中的数大于周围白色格子中的数。

假设我们已经确定了所有白色格子中的数，那么对于一个黑格子 (x, y)，$a_{x,y} = \mathrm{lcm}(a_{x1,y}, a_{x+1,y}, a_{x,y1}, a_{x,y+1}) + 1$。

接下来唯一的问题就是使得相邻四个数的 lcm 不超过 10^{15}。

筛出前 $2n$ 个质数，为白色格子的每一个主对角线和副对角线分配一个质数，白色格子中的数等于两个对角线上质数的乘积。

打表会发现这样整个矩阵的最大值在 4×10^{14} 左右，可以通过本题。

Skolem XOR Tree

给定 n，构造一棵 $2n$ 个节点的树，其中 $v_i = v_{n+i} = i$，要求 i 和 $i+n$ 路径上所有点权的异或和恰好是 i（包含端点）。

$1 \leq n \leq 10^5$

题解

我们用 $\bigoplus$ 代表异或运算。

注意到，当 $k \geq 2$ 时，$0 \bigoplus 1 \bigoplus 2 \bigoplus \cdots \bigoplus 2^k - 1 = 0$。

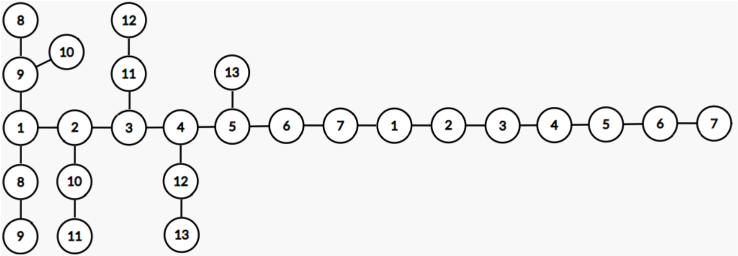
所以当 $n = 2^k - 1$ 时，从 1 到 $2n$ 排成一条链就好了。

当 $n = 2^k$ 时，除了 n 和 $2n$ 之外所有点的权值二进制第 k 位都是 0，所以无解。

题解

否则，注意到 $(x+2^k)\bigoplus x+1\bigoplus x=x+1+2^k$。

令 k 为最大的满足 $2^k\le n$ 的数。以 $n=13$ 为例，我们按照这种方法构造：



顺着构造就行了。时间复杂度 $O(n)$。

New Year and Forgotten Tree

给你一棵 n 个点的树，第 i 条边连接了 u_i 和 v_i，只不过除了 n 以外，所有的数位都被替换成了'?'，也就是你只知道 u_i 和 v_i 的位数。

求一棵合法的树。

$1 \leq n \leq 2 \times 10^5$

性质

两个点位数如果相同那就没有区别。同时我们注意到位数很小，最大只有 6。

对于每一位，我们选择一个关键点，为了方便直接选取 10 的整数次幂：$1, 10, 100, 1000, 10000, 100000$。

接下来我们证明存在一组解，满足任意一条边连接的两个点中都至少有一个是关键点。

证明

Proof.

若存在 (u, v) 满足 u, v 均不是关键点，则我们先断开 (u, v) 这条边。这样整棵树被分成了两个连通块。
设和 u 位数相等的关键点是 x，和 v 位数相等的关键点是 y，则下面三种情况必居其一：

- x 和 v 不在一个连通块内。连接 (x, v)。
- y 和 u 不在一个连通块内。连接 (y, u)。
- 否则，x 和 y 必定不在同一个连通块内。连接 (x, y)。

$\square$

题解

6 个关键点两两之间有 5 条路径，这个可以直接暴搜。

暴搜结束后，剩下的所有边都一定连接关键点和非关键点。

跑一个网络流，左边的点代表每一个位数，右边的点代表两个位数之间边的数量。

(方法不唯一，欢迎吐槽)

Choosing Points

给定 n, D_1, D_2，选择 n^2 个横纵坐标在 $[0, 2n)$ 之间的点，满足任意两个点之间的欧几里得距离既不是 $\sqrt{D_1}$ 也不是 $\sqrt{D_2}$。

$1 \le N \le 300, 1 \le D_1, D_2 \le 2 \times 10^5$

性质

对于一个 d，我们把距离为 $\sqrt{d}$ 的点两两相连，则一定不存在奇环。

Proof.

假设两个点 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 之间有边，则 $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = d$，也就是 $\Delta x^2 + \Delta y^2 = d^2$。
接下来分类讨论：

- 若 d 是奇数，则 $\Delta x + \Delta y$ 是奇数，不存在奇环。
- 若 d 是偶数，则整个点集按照横纵坐标的奇偶性可以被分成互不相交的四部分，递归证明。

□

题解

先把所有点拿出来，把所有距离为 $\sqrt{D_1}$ 的点两两相连。

由上可知，连出来的图一定是二分图，所以我们可以 01 染色，取较多的一半。

再在这一部分中把所有距离为 $\sqrt{D_2}$ 的点两两相连，染色后再取较多的一半。

则最后的点集大小一定大于等于 $\frac{1}{4} \cdot (2n)^2$，即 n^2。

在连边的时候枚举横坐标，时间复杂度 $O(n^3)$。

Sorting a Grid

$n \times m$ 的网格 A，格子里的数形成了一个 1 到 $n \times m$ 的排列，你需要顺次进行下面三次操作：

1. 重排所有的行。
2. 重排所有的列。
3. 重排所有的行。

最后的目标是将整个网格排序。输出第一次操作后的网格和第二次操作后的网格。

$1 \leq n, m \leq 100$

性质

考虑最后一次重排。这一次操作一定是把所有行排序。换句话说在此之前我们只需要关心元素在哪一行。为了方便令 $A_{i,j} = \left\lfloor \frac{A_{i,j}-1}{m} \right\rfloor + 1$。

接下来考虑第二次重排。这一次一定是把所有的列排序，并且满足排完序之后恰好是 1 到 n。容易发现这要求重排之前所有的列都是 1 到 n 的一个排列。

现在我们只需要考虑第一次重排就好了。

题解

先给出一个结论：在题目所给条件下（1 到 n 每个数都有 m 个），第一次重排一定存在合法解。这个我们在构造过程中递归证明。

考虑第一列的结果。相当于让你在每一行剩下的元素中选择一个数，使得 1 到 n 各出现一次。

用二分图匹配，左边是每一行，右边是每一个数，左边第 i 行和右边的第 j 个数之间有 $cnt_{i,j}$ 条边。

由于任意 k 行中至少有 k 个互不相同的数，有霍尔定理可知存在完美匹配，能够构造出解。

用匈牙利算法，每次画 $O(n^2)$ 的时间寻找一组匹配，总复杂度 $O(n^2m)$。

Winding polygonal line

平面上有 n 个点，不存在三点共线。还有一个长度为 $n-2$ 的字符串 s，满足 $s_i = \{\text{'L'},\text{'R'}\}$。

你需要将这 n 个点连接成一条折线，满足每一个拐点向哪拐刚好符合给定的字符串 s。

$3 \le n \le 2000$

题解

首先，随便取一个凸包上的点当做起始点。

每一次，求出剩下的所有点的凸包，如果下一步需要往左拐就找到凸包上最靠右的点，否则找到最靠左的点。

注意到一旦我们选择了最靠左的点，那么接下来选择任何一个点一定都是向右拐的，靠右同理，所以构造出的方案一定合法。

时间复杂度 $O(n^2)$。

Median Replace

我们定义一个长度为 n （n 是奇数）的 01 串 s 是美丽的，当且仅当它能够通过进行下面这个操作 $\frac{n-1}{2}$ 次变成'1'：

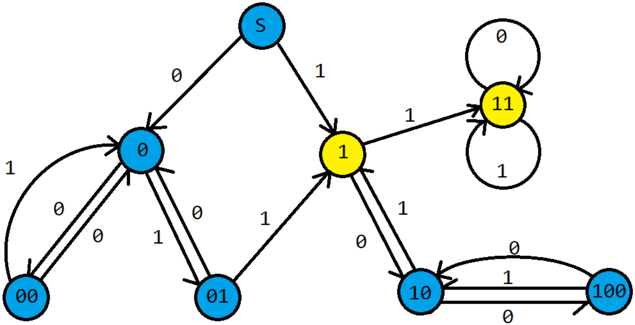
- 选择三个连续的位置 s_{i-1}, s_i, s_{i+1}，并且用它们的中位数代替这三个字符。

现在给定一个长度为 n 的包含'0','1','?' 三种字符的字符串，求有多少种将'?' 替换为'0' 和'1' 的方案，使得最后得到的串是美丽的。对 $10^9 + 7$ 取模。

$1 \leq n \leq 300000$

结论

我们直接给出结论：把你的字符串放到下面这个自动机上跑一遍，能跑到终点就是合法的！



题解

虽然这道题看起来和构造没啥关系，但是像做出这道题，你的构造水平必须过硬。

关于上面那个自动机的构造，我们可以这么考虑：

从开头开始一个一个加字符。那么如果在任意时刻开头出现了两个 1 那就一定合法（对应了 11 那个终点），而如果最后剩下了一个 1，也一定合法（对应 1 那个终点）。

注意到，某些情况下删掉一些字符一定不会变劣。比如 000 删成 0，101 删成 1 等等，于是就有了上面那个自动机。

设 $f_{i,j}$ 表示长度为 i，到达 j 号点的方案数，直接转移就好了。

时间复杂度 $O(n)$。

Walking on a Tree

有一棵 n 个点的树，还有 m 条路径，第 i 条路径是从 u_i 到 v_i。

定义一条路径的愉悦度为满足如下两个条件之一的边的数量：

- 在之前的路径中，这条边未被经过。
- 在之前的路径中，这条边只被沿相反方向经过。

你需要把所有的 m 条路径重新定向，使得总愉悦度最大。

求一组方案。

$1 \leq n, m \leq 2000$

猜想

首先考虑理论最大值。容易发现被经过一次的边至多会带来 1 的贡献，被经过至少 2 次的边至多会带来 2 的贡献。

经过手玩找规律，我们大胆猜想这就是答案。接下来尝试在构造过程中证明。

题解

考虑增量法，每次删掉树上的一个叶子 x，并且确定以这个叶子为其中一个端点的所有路径：

- 若这种路径数量为 0，直接删掉这个叶子。
- 若数量为 1，怎么定向答案都一样，将这条路径向内收缩一条边，然后删掉 x。
- 否则，每次删掉两条路径。设两条路径分别为 $x-u$ 和 $x-v$，其中 u 和 v 在以 x 为根时的 LCA 为 d，则将 $x-d$ 路径上所有边都标记为访问了两次，同时把原先的两条路径替换为 $u-v$ 这一条路径。

在构造的过程中，所有的边都达到了理论最大值，所以理论最大值就是答案。

朴素实现，时间复杂度 $O(nm)$。

Berserk Robot

有一个机器人从 $(0,0)$ 出发，每一秒会向上下左右四个方向中的一个移动 1 单位长度。机器人的移动方式是循环的，循环节长度为 l。

你知道 n 条信息，第 i 条信息形如在 t_i 时刻机器人位于 (x_{t_i}, y_{t_i})。构造一个合法的移动方式。

$1 \le n \le 2 \times 10^5, 1 \le l \le 10^6, 1 \le t_i \le 10^{18}, -10^{18} \le x_i, y_i \le 10^{18}$

题解

奇偶性不满足条件直接无解。

假设 l 次移动后机器人位于 $(\Delta x, \Delta y)$，则第 k 次移动后机器人一定位于 $(x_{k \bmod l} + \left\lfloor \frac{k}{l} \right\rfloor \Delta x, y_{k \bmod l} + \left\lfloor \frac{k}{l} \right\rfloor \Delta y)$。

我们把所有的点按照 $t_i \bmod l$ 排序，令 $x'_{t_i} = x_{t_i \bmod l} - \left\lfloor \frac{t_i}{l} \right\rfloor \Delta x$，$y'_{t_i}$ 同理，则对于相邻的两条信息，我们有：

$$\left|x'_{t_{i+1}} - x'_{t_i}\right| + \left|y'_{t_{i+1}} - y'_{t_i}\right| \le t_{i+1} \bmod l - t_i \bmod l$$

展开，化简，我们就可以得到关于 Δx 和 Δy 的一组限制。

最后在取值范围里面随便找一组 $\Delta x, \Delta y$，就可以顺着构造路径啦。

Excavator Contest

有一个 $n \times n$ 的网格，你需要从边界上的某个位置出发，经过所有的格子恰好一次并最终回到边界上，要求拐弯的数量至少有 $n(n-1)-1$ 次。

$1 \leq n \leq 1000$

尝试

loopy.exe 已经传到了 QQ 群里，大家可以手玩找规律。

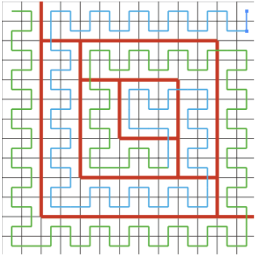
注意原题里面是在格子里走，而这个小游戏是在分界线上，不过本质是一样的。

可以先手玩一些比较小的情况，找一找规律，然后考虑比较大的情况有什么一般方法。

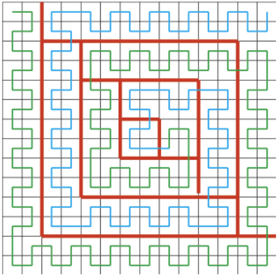
~~我把屏幕分享关了手玩一个20×20，玩完了就开始讲。~~

题解

两张图，安排的明明白白：



奇数



偶数

判就完了。~~（说起来容易）~~

2014 World Finals Baggage

有一个长度为 $2n$ 的序列 BABA...BA，序列左边还有 $2n$ 个空位。

每一次，你可以选择两个相邻的元素，并且把它们移动到任意两个相邻的空位上。

你的目标是让所有的 A 都在所有的 B 左边，并且这 $2n$ 个字母仍然相邻。求最少步数并构造一组解。

$3 \le n \le 100$

乱搞

$n = 3$

____BABABA
__ABB__ABA
__ABBBAA__
AAABBB____

$n = 4$

__BABABABA
ABBABAB__A
ABBA__BBAA
A__ABBBBAA
AAAABBBB__

接着乱搞

$n = 5$

___BABABABABA
ABBABABAB___A
ABBA___BABBAA
ABBAABB___BAA
A___AABBBBBAA
AAAAABBBBB___

$n = 6$

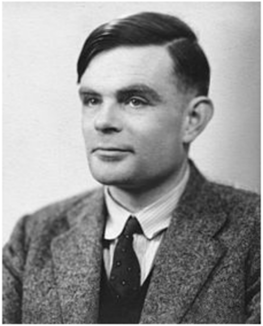
___BABABABABABA
ABBABABABAB___A
ABBABABA___BBAA
ABB___ABAABBBAA
ABBAAAB___BBBAA
A___AAABBBBBBAA
AAAAAABBBBBB___

继续乱搞

$$n = 7$$

___BABABABABABABA
ABBABABAB___ABABA
ABBABA___BBAABABA
ABBABAABBBAAB___A
ABBA___ABBBAABBAA
ABBAAAABBB___BBAA
A___AAAABBBBBBAA
AAAAAAABBBBBBB___

更复杂的情况?



Computer Science will destroy you!

计算机科学将会毁灭你!

题解

对于 n 更大的情况，是存在规律的：

___BA[BABA...BABA]BABA

ABBA[BABA...BABA]B___A

ABBA[___BA...BABA]BBAA

...

ABBA[AAAA...BB___]BBAA

A___A[AAAA...BBBB]BBAA

AAAA[AAAA...BBBB]BB___

时间复杂度 $O(n)$。

Comparator Networks

有一个长度为 n 的 01 序列 a，你需要构造下面的代码：

```
if(a[i[1]]>a[j[1]])swap(a[i[1]],a[j[1]]);
if(a[i[2]]>a[j[2]])swap(a[i[2]],a[j[2]]);
...
if(a[i[m]]>a[j[m]])swap(a[i[m]],a[j[m]]);
```

其中 $i_k < j_k$，并且满足 $m \le 1000$。

你需要保证除了对他给你的一个序列之外，其它的序列都排好序了。无解输出 -1。

$n \le 10$

题解

若输入已经排好了序显然无解。

我们大胆猜想剩下的情况全都有解。

首先将所有 0 的位置排序。由于步数限制很松，排序用 $O(n^2)$ 就可以了。

然后摁住最后一个 0，把其它位置排序。

再然后摁住第一个 1，把其它位置排序。此时序列会长成 $00\dots001011\dots11$ 这个样子。

然后我们惊奇地发现，其它所有的序列都排好了！

证明

Proof.

考虑另一个序列。在第一次排序的时候，如果排好了序那就不用管了，否则分情况讨论：

- 如果 0 的数量小于输入，那么第一次摁住的 0 的位置一定是 1，这个 1 是排好序的，所以第二次就排好序了。
- 如果 0 的数量等于输入，同理，因为不能完全相同。
- 如果 0 的数量大于输入，那么第二次摁住的 1 的位置一定是 0，这个 0 是排好序的，所以第三次就排好序了。

□

总步数 $O(n^2)$。

Restoring Map

有一棵 n 个点的树，你知道到每一个点距离不超过 2 的点的集合，但是不知道哪个集合对应了哪个点。

构造一棵合法的树。

题解

观察两个点 u, v 的集合的交集的性质：

- 若 u, v 距离为 1，则交集为 u, v 以及所有与 u 或 v 直接相连的点。
- 若距离为 2，则交集为 u, v 的中点以及所有与这个点相连的点。
- 若距离为 3，则交集为 u, v 之间的两个点。
- 若距离为 4，则交集为 u, v 的中点。
- 若距离大于 4，交集为空。

枚举两个集合求交集，若交集大小为 2 那么把这两个点相连，这样我们就得到了所有非叶节点之间的边。

题解

令原树为 T_1，非叶节点形成的树为 T_2。

当 T_2 的大小为 1 或 2 时特判。

否则，每次拿出 T_2 中的一个叶节点 x，并尝试找出所有和 x 相连的点。

设在 T_2 中与 x 直接相连的点为 y，我们找出一个在 T_2 中只包含 x, y 的集合，则这个集合的中心点一定和 x 直接相连，且所有未被访问的点都和 x 有边。做完后从 T_2 中删掉 x。

不断重复这个操作，就可以得到整棵树。注意各种实现细节。

集合之间的操作可以用 bitset 加速，复杂度为 $O\left(\frac{n^3}{w}\right)$。

Construction of a Tree

给定 $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ 的 $n-1$ 个子集，令第 i 个子集为 E_i，其中 $|E_i| \geq 2$。

在每一个集合中选择两个元素并且连边，使得最后形成一棵树。构造一组解。

$2 \leq n \leq 10^5, \sum |E_i| \leq 2 \times 10^5$

题解

首先任取一个点当根，并且把一条边视作确定一个父子关系。这样如果我们从根节点开始 bfs，相当于依次遍历每一个点集，并且在这个点集中选择了一个点。

考虑用二分图匹配求解，左边是除了根节点之外的 $n-1$ 个点，右边是 $n-1$ 个点集，如果 E_i 这个点集包含了点 x，就连接从 x 到 E_i 的边。

接下来求一个完美匹配，如果不存在显然无解。

否则从根节点开始 bfs，如果 x 号点遍历到了，就把所有包含 x 的点集标记为遍历到并且把点集匹配的点连到 x 的下方。最后如果有点没有被访问到就无解，否则就找到了一组解。

用 Dinic 算法求解二分图匹配，时间复杂度 $O(\sqrt{n}\sum E_i)$。

特点

构造题都有哪些特点呢?

- 最大的特点当然是降智辣! 构造题**几乎**没有方法可循。
- 可以和多种算法结合，比如二分图匹配，网络流，bfs/dfs，凸包等~~，好像二分图匹配尤其多~~。比如这个课件里面就涉及到了 5 道题：CF611H，agc025D，agc037D，CF1158D，agc029F。
- OI 中涉及比较少（可能是因为不好区分难度），ACM 中偏多一些。
- 由于考到的主要是选手的思维能力，所以如果出到比赛里面，可能会阻掉一些神仙，也可能会让一些人占便宜。

方法

几乎没有方法可寻不代表完全没有方法可寻!

构造题都有哪些方法呢?

1) 增量法。每次考虑增加一个元素或者删除一个元素，将问题分解。如 CF1305E，agc025E，ZOJ3823，Gym101221A。
2) 如果题目要求构造一个方案使得权值等于某个数，可以考虑构造理论最大值，理论最小值并且尝试在这种构造方法的基础上构造一般情况。如 CF1311E，1305E，agc025E。
3) 对于构造树的情况，考虑链/菊花图/二叉树等特殊情况，正解很有可能是这几种情况的组合。如 CF1311E。
4) 对于完全找不到思路的题，可以先考虑手玩构造特殊情况，通过特殊情况寻找普遍规律。如 agc030C。

方法

5) 考虑质数、2 的整数次幂等特殊的数字，如 arc103D，agc027D，agc035C。
6) 如果有集合，可以考虑它们的并、交等等，尝试寻找性质。如 CF566E。
7) 和贪心等思路相结合，从而构造出解。如 agc022E。
8) 拆出来限制，构造出解。如 CF538G。
9) 最重要的还是看脑洞。(雾

多良心的讲题人，此处应有掌声!

Q&A

谢谢大家！