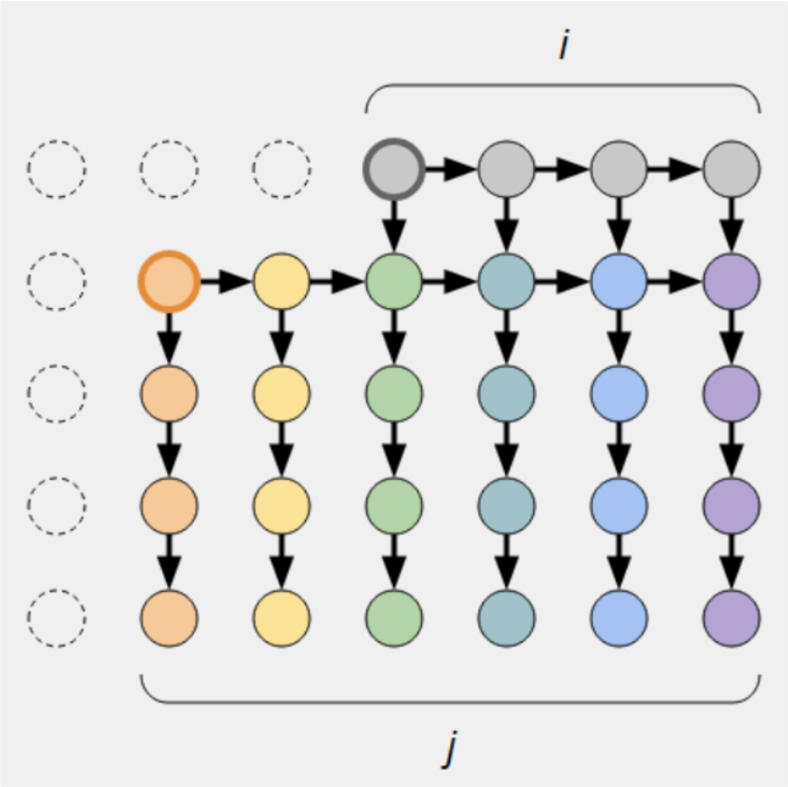
数数的题

Leftmost Ball

- 有n种球，每种球有k个，你把这些球排成一列，然后把每种球的最左边一个涂黑。
- 问有多少种不同的排列。
- n,k <=2000
  - (0,1,0,2)
  - (0,0,1,2)
  - (0,2,0,1)
  - (0,0,2,1)

Solution



Fraction of Fractal

```
.#.
###
#.#
```

- 给你一个n*m的网格，有些黑格子。
- 黑格子四连通。
- 然后做k次迭代。
- 问迭代完之后图里面有多少个连通块。
- n,m 1000, k 1e18

```
.............#.............
............###............
............#.#............
..........#..#..#..........
.........#########.........
.........#.##.##.#.........
..........#.....#..........
.........###...###.........
.........#.#...#.#.........
....#........#........#....
...###......###......###...
...#.#......#.#......#.#...
.#..#..#..#..#..#..#..#..#.
###########################
#.##.##.##.##.##.##.##.##.#
.#.....#..#.....#..#.....#.
###...######...######...###
#.#...#.##.#...#.##.#...#.#
....#.................#....
...###...............###...
...#.#...............#.#...
.#..#..#...........#..#..#.
#########.........#########
#.##.##.#.........#.##.##.#
.#.....#...........#.....#.
###...###.........###...###
#.#...#.#.........#.#...#.#
```

solution

- 如果横竖都连通，那么答案就是1
- 如果横竖都不连通，那么答案就是黑色格子数^(k-1)次。
- 否则不妨设横边连通，由于竖着不连通，所以一定形成一条一条。

- 令p等于连通块个数，q等于在边界上左右相连的连通块个数。
- $p'=a*p-b*q$, $q'=c*q$
- 其中a是黑格个数，b是相邻的黑格个数，c是连通的行数。

Many Easy Problems

- 给你一棵n个点的树。
- 你要在其中选出k个点，求虚树大小的期望。
- 对k=1…n都算出答案。
- n<=2e5

solution

- 点数=边数+1
- 一条边在虚树里当且仅当两端都有至少有一个点被选中。
- 也就是C(n,k)-C(A,k)-C(n-A,k)。
- 问题变成了sum bi*C(i,k)，对所有的k求解。

~K Perm Counting

- 求所有的排列个数，满足|ai-i|!=k
- n<=2000

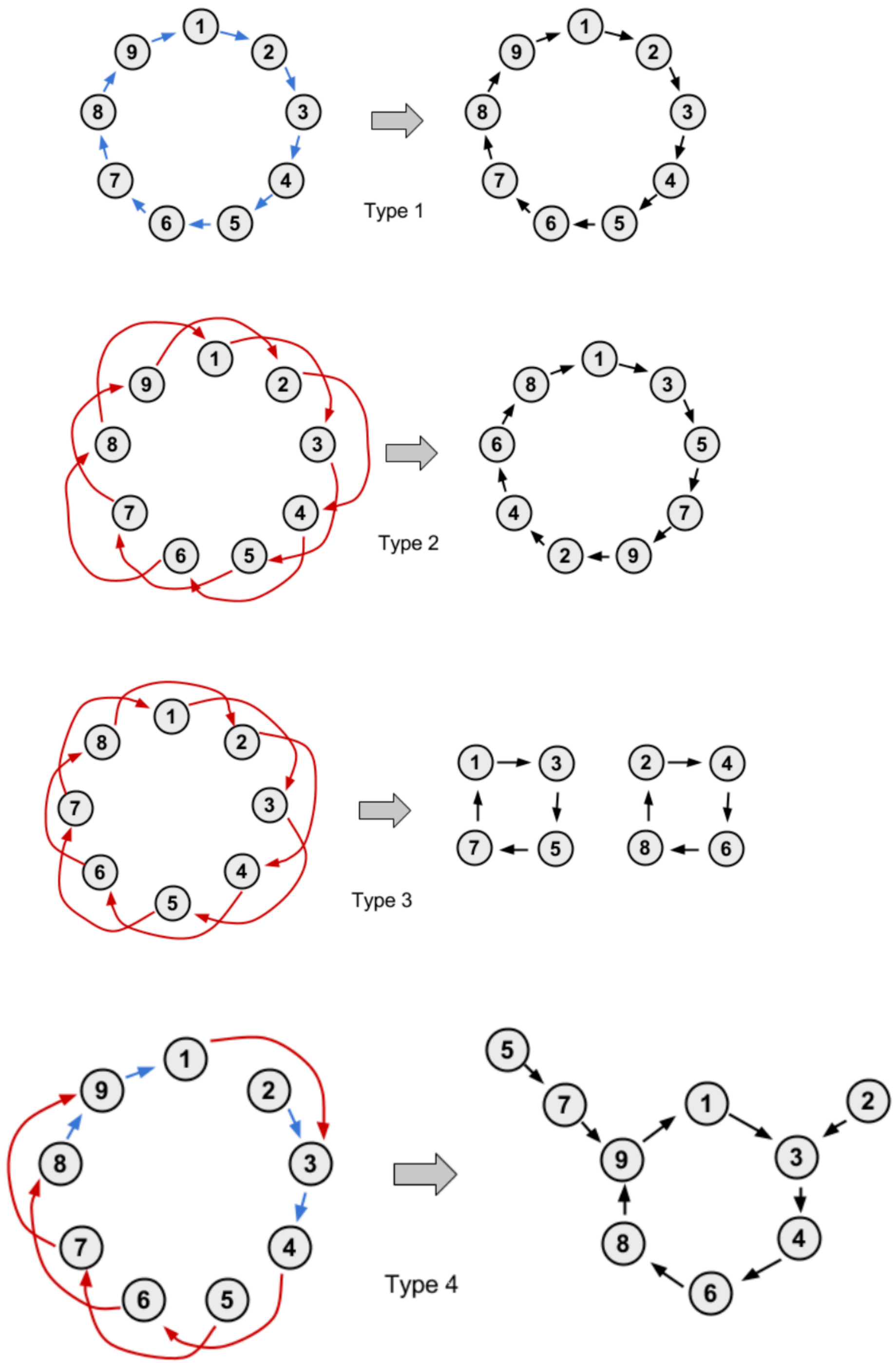
solution

- 建一个二分图。
- 容斥。

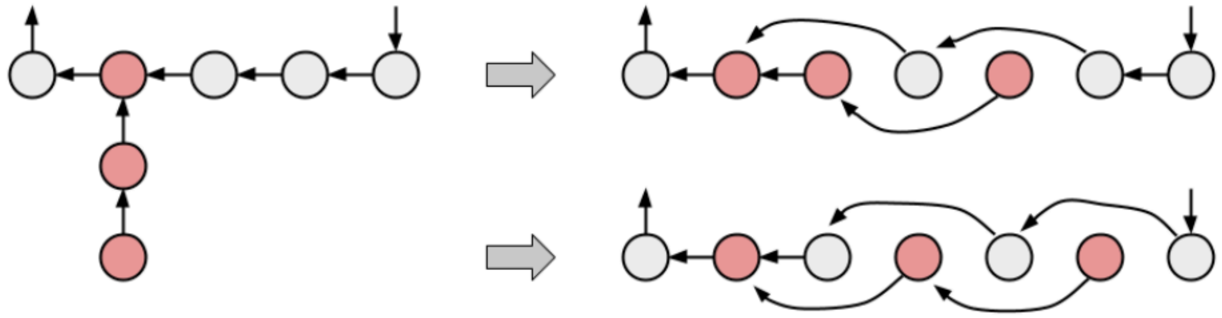
Next or Nextnext

- 给定a1, a2, …, an
- 求排列pi个数，满足所有i有pi=ai或者p(pi)=ai
- n 1e5

solution



solution



- type2要求是奇环。
- type3要求是偶环。
- 我们要算一个所有长度相同的环之间的一个匹配。
- type4要求每条长出来的都是一条链。
- 根据长度确定是0/1/2中嵌入方式。

Eternal Average

- 你有n个0，m个1。
- 每次你可以选择k个数字，然后删除，加入他们的平均数。
- 问最后有多少种不同的答案。
- n,m<=2000, k<=2000

solution

- 考虑最后数字的深度，1的深度为x1,x2,…,xn, 0的深度为y1,y2,…,ym。
- 那么等价于sum k^(-xi)+k^(-yi)=1
- 也就是有理数z，它能被写成n个k的幂次的和，1-z能被写成m个k的幂次的和。
-

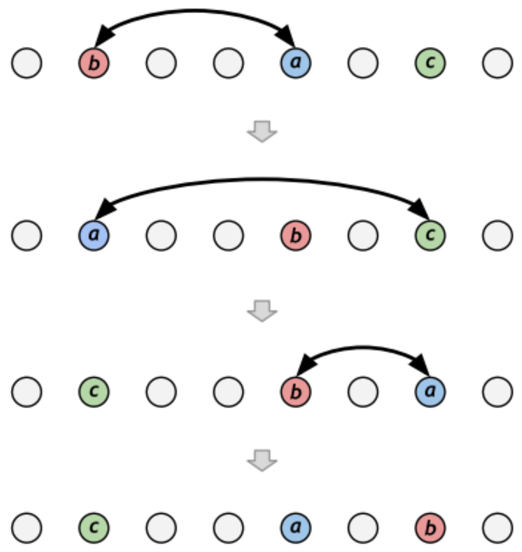
solution

- 把z写成k进制，z=0.z1 z2 z3 … zl
- 相当于zl!=0, 0<=zi<=k-1
- sum zi<=n 且sum zi = n (mod k-1)
- 反面的相当于sum (k-1-zi)<=m-1且sum (k-1-zi) = m-1 (mod k-1)

Colorful Balls

- 有n个球，第i个球的颜色为ci，重量为wi。
- 有两个参数X,Y。
- 你可以选择两个颜色相同的球重量和不超过X的球交换。
- 或者两个颜色不同，重量和不超过Y的球交换。
- 问最后的方案数。

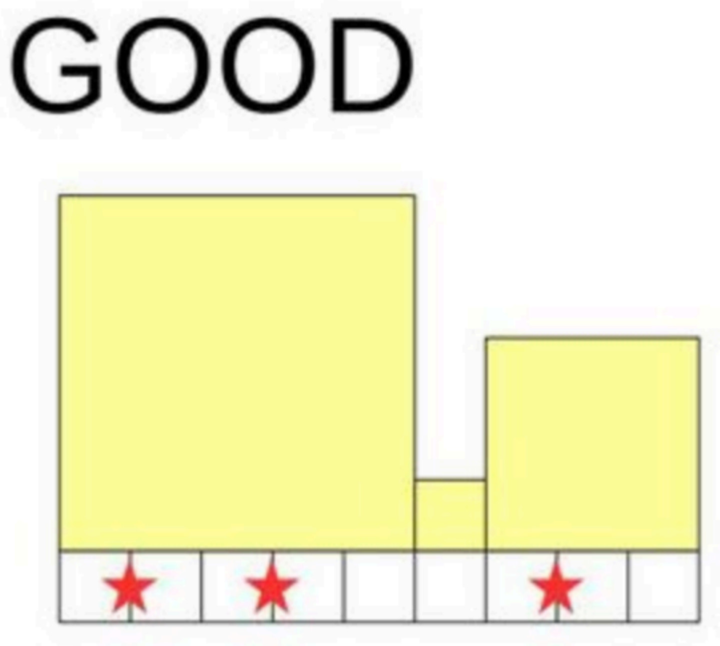
solution



- 交换具有传递性。
- 我们只需要把能交换连边即可。
- 首先同种颜色，只需要考虑最轻的。
- 不同颜色只会通过最轻的两种交换。

Placing Squares

- 一个bar，你要划分成若干段。
- 要求段的边界不能有星星。
- 权值是每段长度平方的乘积。
- 求权值总和。
- 星星总数不超过1e5, bar长度不超过1e9.



solution

- 考虑组合意义。
- 我们填分界线，然后在每段之间考虑放一个红球一个蓝球。
- dp[i][x]表示前i个位置，最后一段放了x个球。
- 矩阵乘法。

Games on DAG

- 给你一个DAG，对于每条边有1/2的概率被删除。
- 考虑在上面移棋子的游戏，有多少的概率1,2这两个点的sg值不同。
- n<=15
-

solution

- 考虑sg值=0的那些点记作U，要求U里面没有边。
- V里面每个点都有一条U里面的出边，U到V随意。
- 然后dp。

DevuAndBeautifulSubstrings

- 一个串是beautiful的当且仅当相邻字母两两不同。
- 一个二进制串的beauty level定义为beauty level为beautiful子串个数。
- 给定n和cnt，求长度为n的beauty level为cnt的二进制串个数。
- n<=50
- "0001"的beauty level为5。
-

solution

- 将串奇数位置反一下就变成相同字母子串个数。
- $dp_{i,j}$表示前i个字母beauty level为j的方案。
- 枚举最后一段长度。

$$dp_{i,j} = \sum_{k\geq 0} dp_{i-k,j-k(k-1)/2}$$

PerfectSquare

- 有一个n*n的矩阵，要选一些数。
- 要求每行每列选的数都是奇数，并且这些数的乘积是完全平方数。
- n<=20,数字大小不超过10^9。
-

solution

- $x_{i,j}$表示选或不选。
- 每行每列选奇数个可以列出方程。
- 乘积为完全平方数对每个质因子列方程。
- 求方程组解的个数。
- 高斯消元+bitset优化。

SquareOfSquareMatrix

- 求n*n的01矩阵A数量，其中某些位置已经填上了1，要求A*A是零矩阵。
- n<=500。

solution

- 看成一个有向图，不存在从一个点走两步到另一个点。
- 也就是不存在一个点既有出边又有入边。
- 假设有p个点已经连了出边，q个点已经连了入边，已经连了m条边。
- 枚举剩下点中连出边的点个数。

$$\sum_{i=0}^{n-p-q} \binom{n-p-q}{i} 2^{p(n-p-i)-m} (2^{n-p-i} - 1)^m$$

AquaparkPuzzle

- 有|c|个景点，第i个的代价为c_i。
- 共有k天，每天可以游览总代价不超过m的子集。
- 问每个景点至少被访问两次的方案数。
- $|c|<=11,k<=10^6$。

solution

- 暴力
- 首先枚举访问不超过1次的子集，进行容斥。
- 那么仅考虑这些不超过1次的景点即可。
- 假设有n个，考虑各种暴力算法。

solution

- 暴力子集卷积倍增，时间复杂度O(3^nlog k)

PermutationCounts

- 求1到n排列个数满足当且仅当p在pos数组中，有$p_k<p_{k+1}$。
- $n<=10^6$，pos中数的个数不超过2000。
- n=5,pos={3}
- {3,2,1,5,4},{4,2,1,5,3},{4,3,1,5,2},{4,3,2,5,1},{5,2,1,4,3},{5,3,1,4,2},{5,3,2,4,1},{5,4,1,3,2},{5,4,2,3,1}
-

solution

- pos将数列划分成了若干段，要求每段递减。
- 比如pos={3}，那么有$p_1>p_2>p_3,p_4>p_5$。
- 同时要求$p_3<p_4$。
- 如果不考虑这个限制，那么假设序列被划分成$x_1,x_2,\ldots,x_t$，那么方案就相当于将n个数划分成t个集合，第i个集合大小为x_i。
- 那么方案数为$n!/(x_1)!(x_2)!\ldots(x_t)!$。

solution

- 容斥这些$p_k<p_{k+1}$的限制。
- 如果不满足就有$p_k>p_{k+1}$,也就是相邻两段被合并起来。
- n=6,pos={1,3}时，答案就是6!/1!/2!/3!-6!/3!/3!-6!/1!/5!+6!/6!。
- 最后被划分成j块对答案贡献为$(-1)^{|pos|+j+1}$。

solution

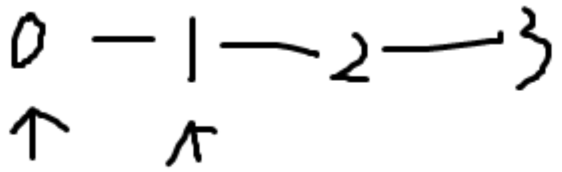
- 提出n!，使用dp计算。
- dp_i做完1到i后的权值。
- 为了方便，将0和n加入到pos中。

$$dp_i = -\sum_{j=0}^{i-1} dp_j/(pos_i - pos_j)!$$

- 最后乘上n!。

TwoEntrances

- 有一个n个房间的房子形成树结构，并且房子有两个入口s_1,s_2。
- 有n个家具标号为0到n-1,要放入对应的房间中。
- 一个房间被放入家具就不能继续通过。
- 问有多少种可行的顺序。
- n<=3000



- 可行的顺序为{3,2,1,0},{3,2,0,1},{3,0,2,1},{0,3,2,1}

solution

- 考虑倒着移除家具。
- 首先考虑一个入口的情况。
- 如果两棵子树大小为s_1,s_2,方案为p_1,p_2。
- 那么合并后的方案数为 $p_1p_2\binom{s_1+s_2}{s_1}$
- 于是可以dp，令dp_v表示子树v的方案数。
- 更一般的有方案数为 $\frac{n!}{\prod_{v\in V} size_v}$ ，$size_v$表示v子树大小。

solution

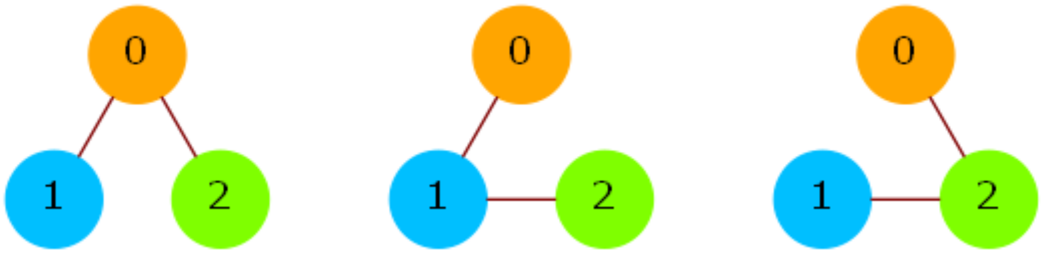
- 考虑两个入口之间的路径，那么任何状态下剩下的子树是连续的。
- 记$dp_{l,r}$表示当前剩下的是第l个到第r个子树。
- 考虑当前拿掉l，将第l个子树的方案和$dp_{l+1,r}$的方案合并，r同理。

solution

- 也可以考虑最后路径上剩下的边，把它割开变成两个子树。

Fragile

- 求n个点的有标号图k个桥的图个数。
- n<=50。
- n=3,k=2



solution

- 大致思路，首先只要考虑n个点k条桥的连通图的个数，不连通只要背包背一下。
- 首先求出n个点连通图个数。
- 任意图减去不连通的图个数。
- 枚举最小点所在连通块的大小然后算一下。
- 然后考虑k>=1的情况算一下。
- 然后从连通图中减去就得到了k=0的答案。

solution

$$b_{n,k} = \sum b_{n',k'} * b_{n-n',k-1-k'} \binom{n-2}{n'-1} \binom{n}{2} / k$$

- 考虑固定一条边为桥，然后分成两个部分。