数数

容斥原理

- 列出题目中的n个条件。
- 求满足这n个条件中每一个的方案的个数。
- 枚举这些条件的所有2^n个集合。
- 考虑一个集合x，令不满足x中所有条件的方案有A个。
- 如果x的大小是奇数，给答案减去A，不然给答案加上A。

欧拉函数

- 求1~n之间与n互质的数的个数。

Solution

- 枚举每个因子放与不放。

经典题目

- N个变量xi，每个变量满足0<=xi<=Ci。
- 求sum x=A的解的数量。
- N<=10。

Solution

- 经典的容斥原理，考虑不满足xi<=Ci，那么就是xi>Ci。
- 然后从A里面减去即可，使用排列组合计算。

- 容斥原理就是因为反过来更加容易统计所以考虑反过来的情况。

Hyperrectangle

- 求一个l1,l2,…,ld 的超立方体，被超平面x1+x2+…+xd<=s截的体积。
- 每一维边长为不超过300的整数。
- d<=300

Solution

- 如果只有$x_1+x_2+\ldots+x_d<=s$，那么体积为$s^d/d!$
- 考虑每一维不满足为$x_i>=l_i$，容斥即可。
- dp[i][l]表示考虑了前i维，不满足的和为l的总系数。

SetAndSet

- 有n个数，n<=50，要分成非空的两组，对每组把所有数and起来。要使得结果一样。
- 比如{1,2,3,4}，那么{1,2},{3,4}的分组是合法的，
- 因为1 and 2 = 0 ,3 and 4 = 0。
- 每个数<=2^20。

Solution

- 每一位独立，分析每一位的情况。
- 对于每一位，所有有1的不能全都在一起。
- 这样的条件只有20个。
- 每个条件的反面为全部连在一起，可以使用并查集解决。

小星星

- 问将一个n个点的树嵌入到n个点的图中的方案。
- n<=18。

Solution

- 可以把描述改成将树中的点映射到图中的点，使得映射之后的集合是全集。
- 使用容斥原理就可以转化成枚举子集S, 使得映射过去的集合在S内。
- 这个可以用简单的树形dp解决，dp[u][v]表示子树u对应的点v。
- 时间复杂度O(2^n n^3)。

经典问题

- 将n分解成k个不为1的因子，求方案数。
- n=p1^e1*p2^e2*...*pm^em, 其中sum ei<=10^5, m<=10。

Solution

- 先转化成分解成k个可以为1的因子的方案数。
- 然后容斥。

Repair the Artwork

- 给你一个由012构成的序列，你每次可以选择一段子区间，变成0。
- 要求m次操作之后，所有的2都还在，所有的1都没了。

经典问题

- 每次产生S的概率为p(S)，并问全集的期望步数。
- |U|<=20

Solution

- 考虑概率与容斥结合能得到期望的容斥。
- $E(S)=\sum_{T \text{ in } S, T\neq S}(-1)^{|S|-|T|-1}/(1-p(T))$
- p(T)表示所有子集在T内的概率。

RandomPaintingOnABoard

- n*m的棋盘，每个位置有$p_{i,j}$。
- (i,j)被选中的概率为$p_{i,j}/S$。
- 至少几轮后每一行一列至少一个被选中。
- nm<=150,0<=$p_{i,j}$<=9

Solution

- 直接枚举复杂度太高。
- 不妨设n<=m，那么n<=12。
- 枚举n之后每列的贡献已知，并且很小。
- 可以使用dp计算。

Endless Spin

- 有长度为n的区间，每次随机选择一段染黑，问期望多少次全部染黑。
-

HamiltonianPaths

- 你有一个k个点的图G1，你将它复制了n份，得到一个图G2，然后取补图得到G2’。
- 现在为G2’中的哈密尔顿回路的数目。
- k<=14, n<=50000

Solution

- 问题转化为某些边不能走过的方案数。
- 所以考虑容斥变成走了c条不合法的边的方案数。
- 假设一个图里面走过了d条不合法边，组成了e条有向的链，定向完之后就可以将这e条链缩起来，对答案的贡献是(-1)^d，也就是权值是(-1)^d。
- 如果最后还剩f个点，那么方案数为f!。
- 所以要求出每个图缩完之后剩g个点的权值和，然后使用FFT求出n个点剩f个点的方案。
- 接着考虑如何求每个子图的权值和。

Solution

- 先对于每个子集S求出路径为S的路径条数，这个是简单的状压dp。
- 然后用子集dp，求出dp[S][e]表示集合S，有e条路径的权值和。
- 然后就做完了。
- 时间复杂度O(3^k k+2^k k^2+nk log (nk))

补集思想

正难则反。

满足条件的=全部的-不满足条件的。

容斥原理可以看成补集思想的一部分。

经典问题

- 有一个完全图每条边红黑染色。
- 求同色三角形个数。

Solution

- 转化成求异色三角形的个数。

连通图的数量

- 连通图的数量=图的总数-不连通图的数量。
- 不连通图的数量可以计算！
- 欧拉图的数量也能相同的方法计算。

CF 53E Dead Ends

- 给一个n个点的图，求它有多少生成树，使得恰好有k个叶子。
- n<=10

Solution

- 首先我们枚举一个集合S，令这些点为叶子，然后对于剩下的点求出生成树个数。
- 把这些叶子添到剩下的点里面，可以在$O(n^3)$的时间复杂度求出叶子包含集合S的方案。
- 然后使用容斥求出恰好为S的方案。
- 时间复杂度$O(2^n n^3+3^n)$。

不相交路径

- N<=150的有向无环简单图，求a到b，c到d且他们不相交的路径的对数。

Solution

- 考虑这两个位置第一次相交在u，那么可以a->u->c, b->u->d变成b->u->c, a->u->d。
- 所以答案为dp[a][c]*dp[b][d]-dp[b][c]*dp[a][d]
- 答案为Det(g(i,j)), g(i,j)为起点i到终点j的路径数。

经典题

- 在d维空间中，你要从(x1,x2,...,xn)走到(y1,y2,....,yn)，每一步可以增加一维分量。
- 要求走的过程中，坐标始终是不降的。

PE 427

- 对于一个序列S，令L(S)表示S中最长的值相同的子串的长度。
- 令f(n)表示对于所有n^n个长度为n每个数值都在1到n之间序列的L值总和。
- 求f(7.5e6)。

- 首先转化为求L(S)>=1, L(S)>=2, ...的方案然后相加。
- 接着转化为L(S)<=k的方案，也就是每段都不超过k的方案。
- 考虑容斥用求dp(i)=n*dp(i-1)-(n-1)*dp(i-k-1)
- 具体的意义为随便放减去放完这个刚好矛盾的方案数。
- 这个递推式可以枚举k+1的步数，然后在O(n/k)的时间复杂度完成。
- 所以总的时间复杂度为O(n log n)

线性性

- 一般在求期望中使用E(X+Y)=E(X)+E(Y)
- 在组合计数的时候也可以使用。
- 具体就是考虑每个元素对答案的贡献。

Constellation

- n个点，每个点有一定概率出现。
- 问凸包期望面积。
- n<=50

Solution

- 考虑每个点对的贡献。
- 求出这条有向边的概率。
- 这条有向边在凸包上当且仅当所有点都在这条边的一侧。

TrianglePainting

- 有n个三角形，每个三角形p的概率出现。
- 求这些三角形minkowski和面积的期望。
- n<=2500

Solution

- 首先分析minkowski和的形态，就是把所有边按斜率串起来。
- 考虑一条边的贡献，只需要知道起点的期望。

Orienteering

- 一个n*m网格图，里面有一个四联通块构成了树，其他都是障碍。
- 有不超过300个checkpoint。
- 随机选取k个checkpoint，求通过这k个点最短路径的期望。
- n,m<=50

Solution

- 最短路径为虚树的边权和*2-直径。
- 虚树的边权和考虑每条边的贡献。
- 记p_i表示选k个checkpoint都在大小为i子集的概率。
- 假设这条边两端的子树大小为l,r。
- 那么概率为$1-p_l-p_r$。
- 直径考虑i,j这条边为直径的概率。
- 看每个点能不能在这个树上，注意直径相同的情况。

Color

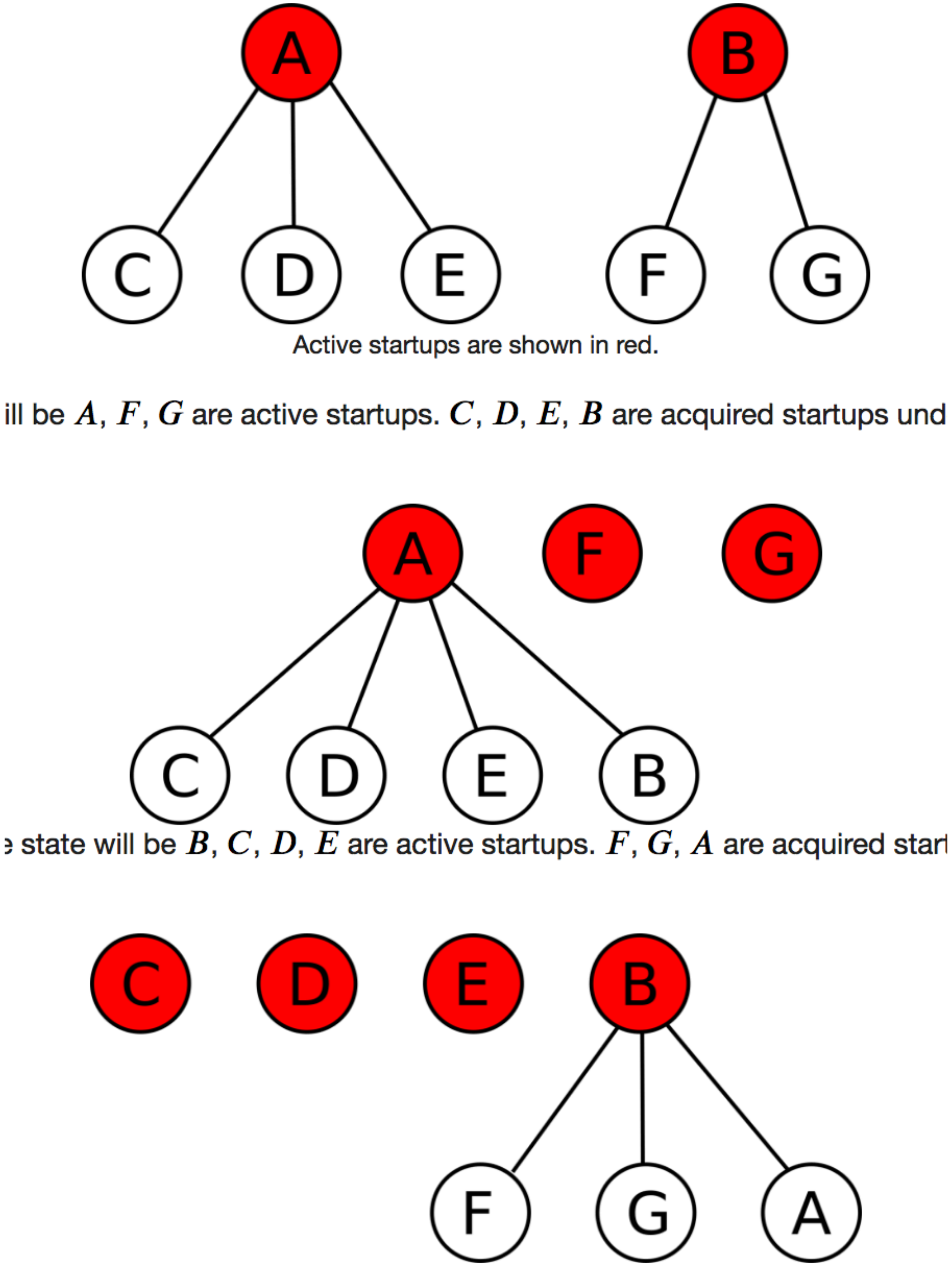
- 你有n种球，每种球有c_i个，每次可以随机选出两个球，然后把前一个球的种类改成后一个。
- 问全都改成相同需要的时间。

Color

- 你有n种球，每种球有c_i个，每次可以随机选出两个球，然后把前一个球的种类改成后一个。
- 问全都改成相同需要的时间。

Company Acquisitions

- 有若干个公司。
- 每个公司可能是根节点
- 也可能依附于某个根节点。
- 每次随机选两个根节点。
- 然后进行操作。
- 问期望多少步还剩一个节点。



Solution

- 假设每个东西对答案的贡献独立的。
- 记$c(x)$表示有x个子公司对答案的贡献。
- 我们有$c(x)+c(y)=1+1/2(c(x+1)+y*c(0))+ 1/2(c(y+1)+x*c(0))$
- 可以分离变量得到$c(x)=1/2(c(x+1)+x*c(0))$
- $c(n-1)=0$。

Burnside引理

- X在置换G作用下的轨道等于每个置换群下不动元素的和除掉G的大小。

经典问题

- k种颜色给n个元素项链染色，问循环同构意义下的方案数
- n,k<=10^9

Solution

- 先考虑每个置换，得到循环节k。
- 方案数就是k^d。
- 然后使用欧拉函数等方法优化。

BZOJ 1004

- 有n张牌，要染上R个红色，G个绿色，B个蓝色。
- 问在某个置换群G下本质不同的方案数。
- n<=60, |G|<=60

Solution

- 求出连通块，变成3维背包。

经典问题

- 将一个n个点的图k染色，求本质不同的染色方案。
- $n<=50$, $k<=10^9$

Solution

- 置换群太大，可以枚举拆分。
- 然后求出置换的数量和等价类，进行计算。

经典问题

- 令$n=p_1^{e_1}*p_2^{e_2}*...*p_m^{e_m}$，求将n表达成k个不降的因子的乘积的方案数。
- $k<=25$, $m<=50$, $e<=100$

Solution

- 不降可以理解成本质不同的方案数。
- 枚举拆分计算因子个数。
- 然后使用dp计算每个因子的方案。

Boolean 3-array

- 求三维本质不同的01数组的个数。
- 要求可以交换第一/二/三维，翻转第一/二/三维。
- n<=13

经典问题

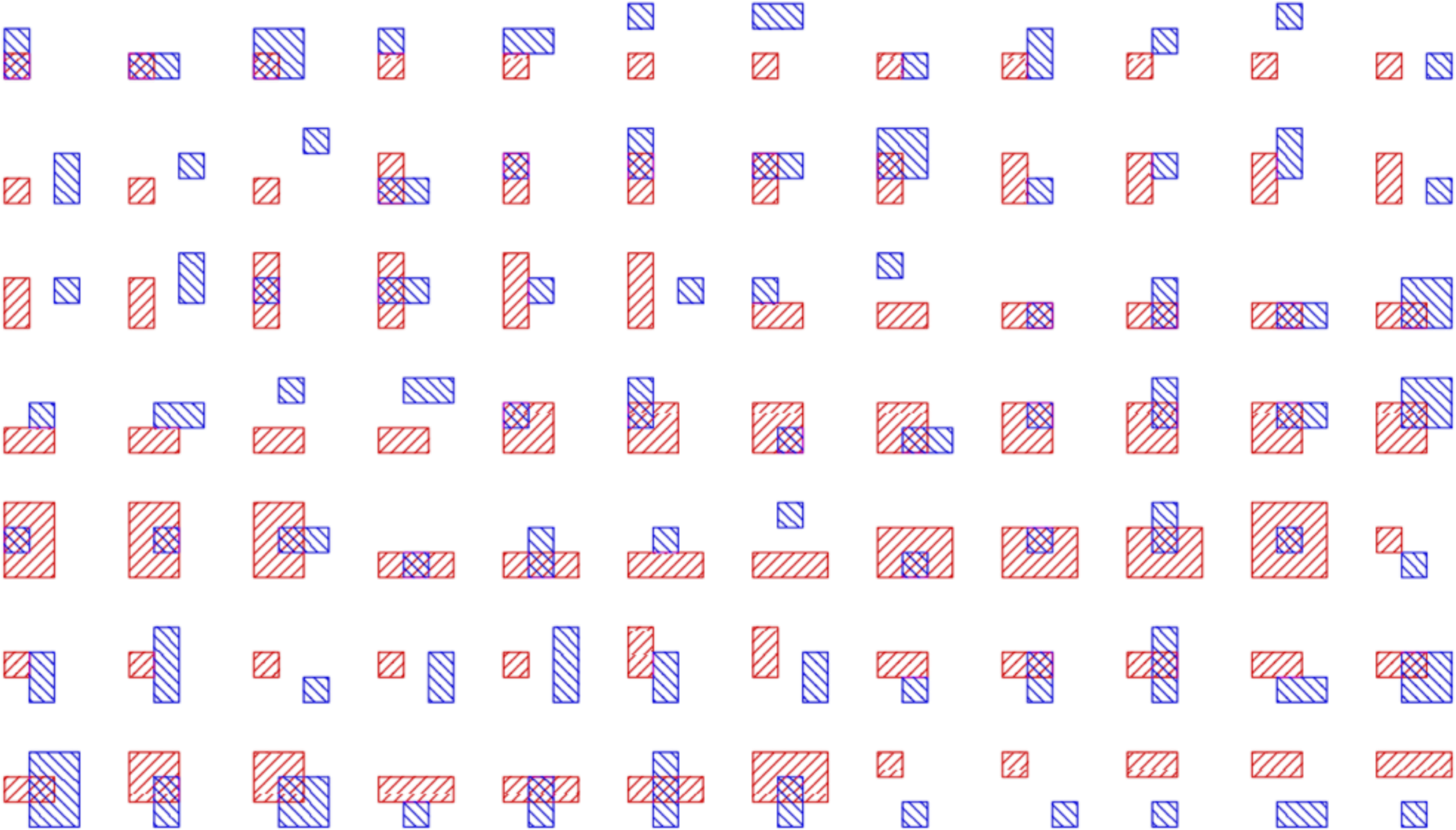
- 令$n=p_1^{e_1}*p_2^{e_2}*...*p_m^{e_m}$，求将n表达成k个上升的因子的乘积的方案数。
- $k<=25, m<=50, e<=100$

Solution

- 魔改一下burnside引理。

IPSC 2018 C

- 平面上选择 n 个不同矩形，问本质不同的取法数
- 如果两个方案是相同的当且仅当离散化之后一样
- $n \le 5000$，输出 1 到 n 的所有解



Solution

- 求出一维，然后减去等价的情况。