组合计数

diamond_duke

2019 年 12 月 14 日

- 组合数：从 n 个可区分的物品中选出 m 个的方案数，即 $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m! \times (n-m)!}$。这里，我们规定当 $n < m$ 时 $\binom{n}{m} = 0$。

- 组合数：从 n 个可区分的物品中选出 m 个的方案数，即 $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m! \times (n-m)!}$。这里，我们规定当 $n < m$ 时 $\binom{n}{m} = 0$。
- Pascal 公式：$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$。

- 组合数：从 n 个可区分的物品中选出 m 个的方案数，即 $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\times(n-m)!}$。这里，我们规定当 $n < m$ 时 $\binom{n}{m} = 0$。
- Pascal 公式：$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$。
- 二项式定理：$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$。

- 组合数：从 n 个可区分的物品中选出 m 个的方案数，即 $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m! \times (n-m)!}$。这里，我们规定当 $n < m$ 时 $\binom{n}{m} = 0$。
- Pascal 公式：$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$。
- 二项式定理：$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$。
- Lucas 定理：$\binom{n}{m} \bmod p = \prod \binom{n_i}{m_i} \bmod p$，其中 n_i, m_i 为 n, m 在 p 进制下的第 i 位。

组合恒等式

- $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$;

组合恒等式

- $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$;
- $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$;

组合恒等式

- $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$;
- $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$;
- $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} [2 \mid i] = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} [2 \nmid i] = 2^{n-1}$;

组合恒等式

- $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$；
- $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$；
- $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} [2 \mid i] = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} [2 \nmid i] = 2^{n-1}$；
- k 个非负整数变量和为 n 的方案数（插板法）：$\binom{n+k-1}{k-1}$；

组合恒等式

- $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$；
- $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$；
- $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} [2 \mid i] = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} [2 \nmid i] = 2^{n-1}$；
- k 个非负整数变量和为 n 的方案数（插板法）：$\binom{n+k-1}{k-1}$；
- $\sum_{i=0}^{m} \binom{n+i}{n} = \binom{n+m+1}{m}$；

组合恒等式

- $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$；
- $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$；
- $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i}[2 \mid i] = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i}[2 \nmid i] = 2^{n-1}$；
- k 个非负整数变量和为 n 的方案数（插板法）：$\binom{n+k-1}{k-1}$；
- $\sum\limits_{i=0}^{m} \binom{n+i}{n} = \binom{n+m+1}{m}$；
- $\sum\limits_{i=m}^{n} \binom{i}{m} = \binom{n+1}{m+1}$；

组合恒等式

- $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$;
- $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$;
- $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} [2 \mid i] = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} [2 \nmid i] = 2^{n-1}$;
- k 个非负整数变量和为 n 的方案数（插板法）：$\binom{n+k-1}{k-1}$;
- $\sum\limits_{i=0}^{m} \binom{n+i}{n} = \binom{n+m+1}{m}$;
- $\sum\limits_{i=m}^{n} \binom{i}{m} = \binom{n+1}{m+1}$;
- $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$;

组合恒等式

- $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$；
- $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$；
- $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} [2 \mid i] = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} [2 \nmid i] = 2^{n-1}$；
- k 个非负整数变量和为 n 的方案数（插板法）：$\binom{n+k-1}{k-1}$；
- $\sum_{i=0}^{m} \binom{n+i}{n} = \binom{n+m+1}{m}$；
- $\sum_{i=m}^{n} \binom{i}{m} = \binom{n+1}{m+1}$；
- $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$；
- $\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$。

常见数列

- 斐波那契数列：$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$，其中 $F_1 = F_2 = 1$。

常见数列

- 斐波那契数列：$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$，其中 $F_1 = F_2 = 1$。
- 错排数：

常见数列

- 斐波那契数列：$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$，其中 $F_1 = F_2 = 1$。
- 错排数：
  - 递推式：$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$；

常见数列

- 斐波那契数列：$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$，其中 $F_1 = F_2 = 1$。
- 错排数：
  - 递推式：$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$；
  - 通项式：$D_n = n! \sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{i!}$；

常见数列

- 斐波那契数列：$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$，其中 $F_1 = F_2 = 1$。
- 错排数：
  - 递推式：$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$；
  - 通项式：$D_n = n! \sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{i!}$；
  - 简化式：$D_n = \lfloor \frac{n!}{e} + 0.5 \rfloor$。

常见数列

- 斐波那契数列：$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$，其中 $F_1 = F_2 = 1$。
- 错排数：
  - 递推式：$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$；
  - 通项式：$D_n = n! \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{i!}$；
  - 简化式：$D_n = \lfloor \frac{n!}{e} + 0.5 \rfloor$。
- 卡特兰数：

常见数列

- 斐波那契数列：$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$，其中 $F_1 = F_2 = 1$。
- 错排数：
  - 递推式：$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$；
  - 通项式：$D_n = n! \sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{i!}$；
  - 简化式：$D_n = \lfloor \frac{n!}{e} + 0.5 \rfloor$。
- 卡特兰数：
  - 递推式：$C_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1}$；

常见数列

- 斐波那契数列：$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$，其中 $F_1 = F_2 = 1$。
- 错排数：
  - 递推式：$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$；
  - 通项式：$D_n = n! \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{i!}$；
  - 简化式：$D_n = \lfloor \frac{n!}{e} + 0.5 \rfloor$。
- 卡特兰数：
  - 递推式：$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1}$；
  - 通项式：$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$；

常见数列

- 斐波那契数列：$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$，其中 $F_1 = F_2 = 1$。
- 错排数：
  - 递推式：$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$；
  - 通项式：$D_n = n! \sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{i!}$；
  - 简化式：$D_n = \lfloor \frac{n!}{e} + 0.5 \rfloor$。
- 卡特兰数：
  - 递推式：$C_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1}$；
  - 通项式：$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$；
  - 另一个递推式：$C_n = \frac{2(2n-1)}{n+1} C_{n-1}$。

常见数列（续）

- 斯特林数：

常见数列（续）

- 斯特林数：
  - 第一类斯特林数：$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix}$;

常见数列（续）

- 斯特林数：
  - 第一类斯特林数：$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix}$；
  - 第二类斯特林数：$\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{Bmatrix} + m\begin{Bmatrix} n-1 \\ m \end{Bmatrix}$。

常见数列（续）

- 斯特林数：
  - 第一类斯特林数：$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix}$；
  - 第二类斯特林数：$\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{Bmatrix} + m\begin{Bmatrix} n-1 \\ m \end{Bmatrix}$。
  - 第二类斯特林数通项式：$\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix} = \frac{1}{m!} \cdot \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n$。
- 贝尔数：

常见数列（续）

- 斯特林数：
  - 第一类斯特林数：$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix}$；
  - 第二类斯特林数：$\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{Bmatrix} + m \begin{Bmatrix} n-1 \\ m \end{Bmatrix}$。
  - 第二类斯特林数通项式：$\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix} = \frac{1}{m!} \cdot \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n$。
- 贝尔数：
  - 与斯特林数的关系：$B_n = \sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$；

常见数列（续）

- 斯特林数：
  - 第一类斯特林数：$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix}$；
  - 第二类斯特林数：$\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{Bmatrix} + m\begin{Bmatrix} n-1 \\ m \end{Bmatrix}$。
  - 第二类斯特林数通项式：$\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix} = \frac{1}{m!} \cdot \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n$。
- 贝尔数：
  - 与斯特林数的关系：$B_n = \sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$；
  - 递推式：$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$。

常见数列（续）

- 斯特林数：
  - 第一类斯特林数：$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix}$；
  - 第二类斯特林数：$\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{Bmatrix} + m\begin{Bmatrix} n-1 \\ m \end{Bmatrix}$。
  - 第二类斯特林数通项式：$\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix} = \frac{1}{m!} \cdot \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n$。
- 贝尔数：
  - 与斯特林数的关系：$B_n = \sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$；
  - 递推式：$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$。
- 调和级数：$H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$，其中 γ 是欧拉常数，$\varepsilon_n \approx \frac{1}{2n}$。

自然数幂之和

- $S_k(n) = \sum_{i=1}^{n} i^k$。

自然数幂之和

- $S_k(n)=\sum\limits_{i=1}^{n} i^k$。$S_k(n)$ 是关于 n 的 $k+1$ 次多项式。

自然数幂之和

- $S_k(n)=\sum\limits_{i=1}^{n} i^k$。$S_k(n)$ 是关于 n 的 $k+1$ 次多项式。
- 拉格朗日插值：对于 k 次多项式函数 F 以及 $k+1$ 个点值 $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\cdots,(x_k,y_k)$，有 $F(x)=\sum\limits_{i=0}^{k} y_i\prod\limits_{i\neq j}\dfrac{x-x_j}{x_i-x_j}$。

自然数幂之和

- $S_k(n) = \sum\limits_{i=1}^{n} i^k$。$S_k(n)$ 是关于 n 的 $k+1$ 次多项式。
- 拉格朗日插值：对于 k 次多项式函数 F 以及 $k+1$ 个点值 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_k, y_k)$，有 $F(x) = \sum\limits_{i=0}^{k} y_i \prod\limits_{i \neq j} \dfrac{x - x_j}{x_i - x_j}$。
- 斯特林数：$S_k(n) = \dfrac{(n+1)^{\underline{k+1}}}{k+1} - \sum\limits_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-i} \cdot \begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix} \cdot S_i(n)$。

自然数幂之和

- $S_k(n)=\sum\limits_{i=1}^{n} i^k$。$S_k(n)$ 是关于 n 的 $k+1$ 次多项式。
- 拉格朗日插值：对于 k 次多项式函数 F 以及 $k+1$ 个点值 $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\cdots,(x_k,y_k)$，有 $F(x)=\sum\limits_{i=0}^{k} y_i \prod\limits_{i\neq j}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$。
- 斯特林数：$S_k(n)=\frac{(n+1)^{\underline{k+1}}}{k+1}-\sum\limits_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-i}\cdot\begin{bmatrix}k\\i\end{bmatrix}\cdot S_i(n)$。
- 伯努利数：$\frac{x}{e^x-1}=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{B_i}{i!}x^i$。

自然数幂之和

- $S_k(n)=\sum\limits_{i=1}^{n} i^k$。$S_k(n)$ 是关于 n 的 $k+1$ 次多项式。
- 拉格朗日插值：对于 k 次多项式函数 F 以及 $k+1$ 个点值 $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\cdots,(x_k,y_k)$，有 $F(x)=\sum\limits_{i=0}^{k} y_i \prod\limits_{i\neq j}\dfrac{x-x_j}{x_i-x_j}$。
- 斯特林数：$S_k(n)=\dfrac{(n+1)^{\underline{k+1}}}{k+1}-\sum\limits_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-i}\cdot\begin{bmatrix}k\\i\end{bmatrix}\cdot S_i(n)$。
- 伯努利数：$\dfrac{x}{e^x-1}=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\dfrac{B_i}{i!}x^i$。
- 伯努利多项式：$\sum\limits_{i=0}^{\infty}\dfrac{\beta_i(t)}{i!}\cdot x^i=\dfrac{x}{e^x-1}\cdot e^{tx}$。

自然数幂之和

- $S_k(n)=\sum_{i=1}^{n} i^k$。$S_k(n)$ 是关于 n 的 $k+1$ 次多项式。
- 拉格朗日插值：对于 k 次多项式函数 F 以及 $k+1$ 个点值 $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\cdots,(x_k,y_k)$，有 $F(x)=\sum_{i=0}^{k} y_i \prod_{i\neq j}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$。
- 斯特林数：$S_k(n)=\frac{(n+1)^{\underline{k+1}}}{k+1}-\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-i}\cdot\begin{bmatrix}k\\i\end{bmatrix}\cdot S_i(n)$。
- 伯努利数：$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{B_i}{i!}x^i$。
- 伯努利多项式：$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\beta_i(t)}{i!}\cdot x^i=\frac{x}{e^x-1}\cdot e^{tx}$。
- $S_k(n)=\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}\cdot(n+1)^i\cdot B_{k+1-i}$。

自然数幂之和

- $S_k(n)=\sum_{i=1}^{n} i^k$。$S_k(n)$ 是关于 n 的 $k+1$ 次多项式。
- 拉格朗日插值：对于 k 次多项式函数 F 以及 $k+1$ 个点值 $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\cdots,(x_k,y_k)$，有 $F(x)=\sum_{i=0}^{k} y_i\prod_{i\neq j}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$。
- 斯特林数：$S_k(n)=\frac{(n+1)^{\underline{k+1}}}{k+1}-\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-i}\cdot\begin{bmatrix}k\\i\end{bmatrix}\cdot S_i(n)$。
- 伯努利数：$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{B_i}{i!}x^i$。
- 伯努利多项式：$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\beta_i(t)}{i!}\cdot x^i=\frac{x}{e^x-1}\cdot e^{tx}$。
- $S_k(n)=\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}\cdot(n+1)^i\cdot B_{k+1-i}$。令 $n=0$，则 $\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}B_i=0$。

AtCoder Regular Contest 102 E

有 N 个**不可区分**的 K 面骰子，对于每个 $i = 2, 3, \cdots, 2K$，求有多少种方案使得：任意两个骰子朝上的面要么相同，要么和不为 i。答案对 998244353 取模。
$2 \leq N \leq 2000$，$1 \leq K \leq 2000$。

容斥原理

容斥原理

要计算几个集合并集的大小，我们要先将所有单个集合的大小计算出来，然后减去所有两个集合相交的部分，再加回所有三个集合相交的部分，再减去所有四个集合相交的部分，依此类推，一直计算到所有集合相交的部分。写成公式如下：

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left(\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}|A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}|\right) \tag{1}$$

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{S\subseteq[n]}(-1)^{|S|}\left|\bigcap_{i\in S}\overline{A_i}\right| \tag{2}$$

容斥原理

要计算几个集合并集的大小，我们要先将所有单个集合的大小计算出来，然后减去所有两个集合相交的部分，再加回所有三个集合相交的部分，再减去所有四个集合相交的部分，依此类推，一直计算到所有集合相交的部分。写成公式如下：

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left(\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\left|A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right|\right) \tag{1}$$

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{S\subseteq[n]}(-1)^{|S|}\left|\bigcap_{i\in S}\overline{A_i}\right| \tag{2}$$

另外还有一个拓展——$\min-\max$ 容斥：

$$\max\{S\} = \sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|+1}\min\{T\} \tag{3}$$

AtCoder Regular Contest 101 E

给定 N 个点的树，你需要把这些点分成 $\frac{N}{2}$ 组，每组恰好 2 个点，且每个点在至多一组中。
称一个分组方案是好的，当且仅当：如果我们把每对点的最短路上的边都打上标记，最后每条边都被标记了。
求好的分组方案数。答案对 10^9+7 取模。
$2 \le N \le 5000$，N 是偶数。

AtCoder Regular Contest 096 E

求有多少个子集族，满足：

- 其中任意一个子集都是 $[n]$ 的子集；
- 任意两个子集互不相同；
- $1, 2, \cdots, n$ 都在其中至少出现了 2 次。

答案对 M 取模。

$2 \leq N \leq 3000, 10^8 \leq M \leq 10^9 + 9$，$M$ 是质数。

AtCoder Regular Contest 093 F

有 2^N 个人打锦标赛，他们的过程是随机一个排列，然后按照这个排列站好。每轮是第 $2i-1$ 个人和第 $2i$ 的人比赛，败者淘汰。
你是 1 号选手，你碰到 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 会输，碰到剩下的会赢。如果比赛和你无关，那么编号小的赢。
求有多少个排列，能够使你最后赢。答案对 10^9+7 取模。
$1 \leq N \leq 16, 0 \leq M \leq 16, 2 \leq A_i \leq 2^N$。

【集训队作业 2018】小 Z 的礼物

给定 $n \times m$ 的方格，每个格子里面有一个礼物，其中某些礼物是小 Z 喜欢的。
每次小 Z 会等概率随机地得到某两个相邻的格子中的礼物（得到的礼物可能再次得到），求得到所有小 Z 喜欢的礼物的时间的期望。
$n \le 6$，$m \le 100$。

下降幂

定义

下降幂 $n^{\underline{m}} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$。

下降幂

定义

下降幂 $n^{\underline{m}} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$。

定理

$$n^m = \sum_{i=0}^{m} \left\{ {m \atop i} \right\} n^{\underline{i}} \tag{4}$$

上升幂

定义

上升幂 $n^{\overline{m}} = n(n+1)(n+2)\cdots(n+m-1)$。

上升幂

定义

上升幂 $n^{\overline{m}} = n(n+1)(n+2)\cdots(n+m-1)$。

定理

$$x^{\overline{n}} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k \tag{5}$$

斯特林反演

定理 (斯特林反演)

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} g(k) \iff g(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \left[{n \atop k} \right] f(k) \tag{6}$$

斯特林反演

定理 (斯特林反演)

$$f(n)=\sum_{k=0}^{n}\left\{ n \atop k \right\} g(k) \iff g(n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\left[n \atop k \right] f(k) \tag{6}$$

引理 (反转公式)

$$\sum_{k=m}^{n}(-1)^{n-k}\left[n \atop k \right]\left\{ k \atop m \right\}=[m=n] \tag{7}$$

$$\sum_{k=m}^{n}(-1)^{n-k}\left\{ n \atop k \right\}\left[k \atop m \right]=[m=n] \tag{8}$$

斯特林反演

定理 (斯特林反演)

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} g(k) \iff g(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \left[{n \atop k} \right] f(k) \tag{6}$$

引理 (反转公式)

$$\sum_{k=m}^{n} (-1)^{n-k} \left[{n \atop k} \right] \left\{ {k \atop m} \right\} = [m = n] \tag{7}$$

$$\sum_{k=m}^{n} (-1)^{n-k} \left\{ {n \atop k} \right\} \left[{k \atop m} \right] = [m = n] \tag{8}$$

引理

$$x^{\underline{n}} = (-1)^n (-x)^{\overline{n}} \quad , \quad x^{\overline{n}} = (-1)^n (-x)^{\underline{n}} \tag{9}$$

【2018 雅礼集训】方阵

给定 $n \times m$ 的矩阵，每个格子填上 $[1, c]$ 中的数字，求任意两行、两列均不同的方案数。
$n, m \leq 5000$。

一道例题

给定 n 个节点的树，从某个点出发开始随机游走：在点 u 时，有 p_u 的概率留在原地，否则等概率的向相邻的点移动，直到移动到 1 号点停下。
求从每个点出发直至停下，所花费的时间的 k 次方的期望。
$n \le 10^5$，$k \le 10^5$，$n \cdot k \le 10^6$。

另一道例题

求 N 个点的带标号无向图的联通块数 K 次幂之和。
$N \leq 10^5$，$K \leq 15$，测试数据组数 10^5。

【清华集训 2017】生成树计数

在一个 s 个点的图中，存在 $s-n$ 条边，使图中形成了 n 个连通块，第 i 个连通块中有 a_i 个点。
现在我们需要再连接 $n-1$ 条边，使该图变成一棵树。对一种连边方案，设原图中第 i 个连通块连出了 d_i 条边，那么这棵树 T 的价值为：

$$\mathrm{val}(T) = \left(\prod_{i=1}^{n} {d_i}^m\right)\left(\sum_{i=1}^{n} {d_i}^m\right)$$

求出所有可能的生成树的价值之和，对 $998,244,353$ 取模。
$n \le 3 \times 10^4$，$m \le 30$。

【清华集训 2017】生成树计数 Solution

定义 (Prufer 序列)

***Prufer* 序列**，是由一棵树唯一地产生的序列：对于树 T，其顶点为 $\{1, 2, \cdots, n\}$。在第 i 步，去掉标号最小的叶子，并把 *Prufer* 序列的第 i 项设为该叶子的**相邻顶点**的标号。则 *Prufer* 序列显然是唯一的，而且长为 $n-2$。

Burnside 引理

Burnside 引理

Burnside 引理用于计算本质不同的染色方案数，其中我们认为本质相同为可以通过若干置换之一得到的。它断言，方案数即为在不同置换下不动点的个数平均值。

Burnside 引理

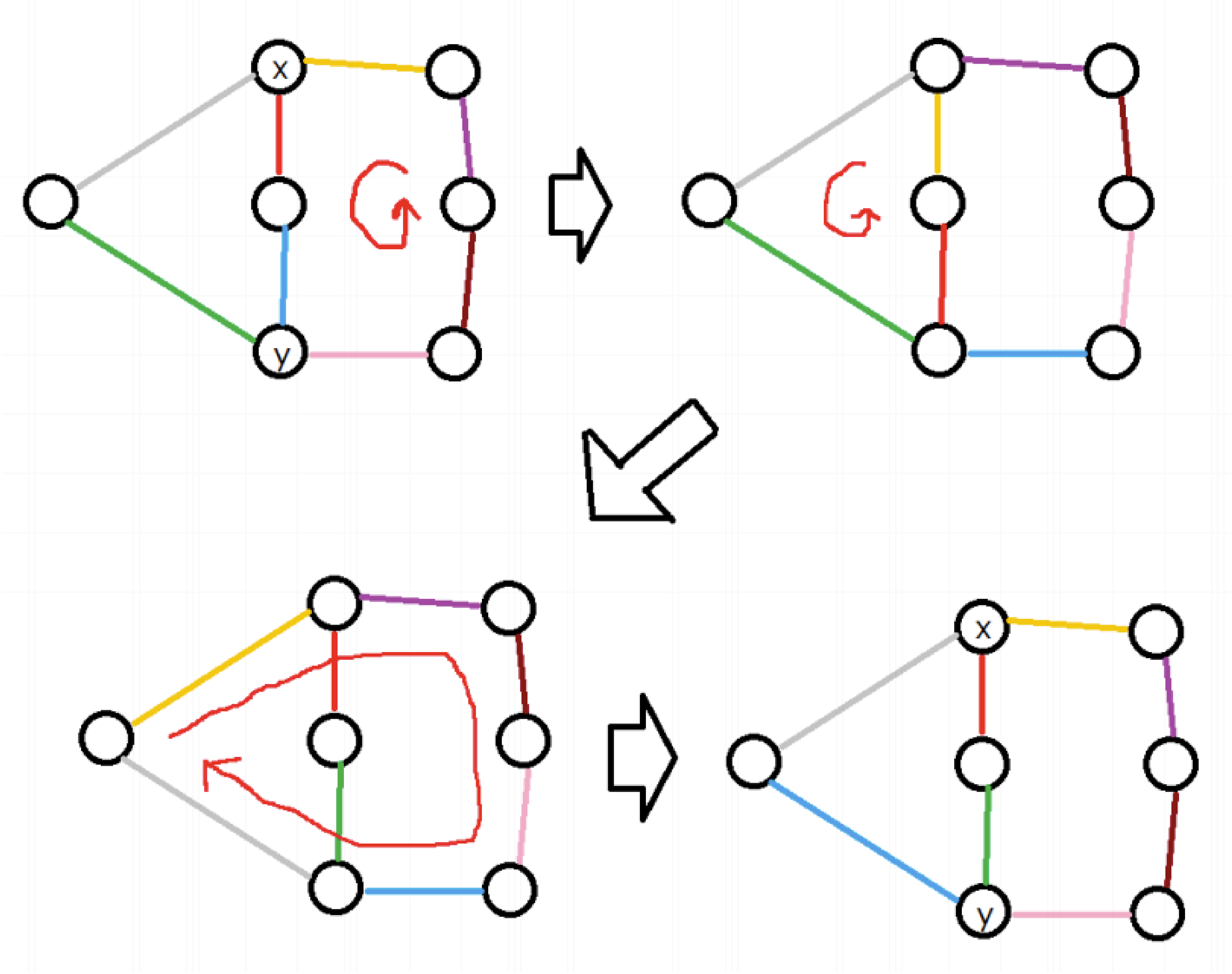
Burnside 引理用于计算本质不同的染色方案数，其中我们认为本质相同为可以通过若干置换之一得到的。它断言，方案数即为在不同置换下不动点的个数平均值。
用群论的语言说，设 G 是一个有限群，作用在集合 X 上。对每个 $g \in G$，令 X^g 表示 X 中在 g 作用下的不动元素。则我们断言，轨道数 $|X/G|$ 由如下公式给出：

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|. \tag{10}$$

AtCoder Regular Contest 062 F

给出无向图 $G = (V, E)$，对边染 K 种颜色之一。
一个环上面的边旋转后得到的染色方案视为相同，求不同的染色方案数。
$1 \leq N \leq 50$，$1 \leq M \leq 100$，$1 \leq K \leq 100$。

AtCoder Regular Contest 062 F Solution



无向图计数

求恰好 n 个点的本质不同的无向图个数对质数 P 取模的结果。
允许自环不允许重边。
$1 \leq n \leq 45$。

欧拉图计数

求不超过 n 个点的，存在欧拉回路的，本质不同的无向图个数对质数 P 取模的结果。
允许自环不允许重边。
$1 \leq n \leq 45$。

HDU 6402

求在面对换、面翻转操作下本质不同的大小为 $n \times m \times p$ 的三维 $0/1$ 数组的个数对 $998\ 244\ 353$ 取模的结果。
$1 \le n, m, p \le 13$。

Thank You!