19冬令营&省选线上集训Day5

2019.1.15

New Order

背景描述

给定一个长度为 n 的序列 $a[1..n]$，每次操作你可以选择一对相邻的数然后交换他们

现在定义一个序列是好的，当且仅当存在一个整数 $k \in [0, n]$，使得 $a[1..k]$ 是不降序列且 $a[k+1..n]$ 是不升序列

注意，这里 k 可以等于 0 或者 n，也就说如果 $a[1..n]$ 本身是不降序列或者不升序列的话，他也是好的

你需要进行最少次数的操作，使得 a 变成好的序列，求最少的操作次数

错误的结论

- 错误的结论：最优方案一定是对于某个 k 把 a[1..k] 排成升序，然后把 a[k+1..n] 排成降序

- 反例：样例3

暴力

- n<=16
- 枚举k，状压 dp 一下，交换次数就是排列的逆序对
- 期望得分：40分

贪心

- 考虑这个序列中最小的数是 a[i]
- 那么最后 a[i] 肯定是在最左边或者最右边
- 因为不管我们把 a[i] 放在哪，剩下的序列都是一样的，所以我们贪心地选择 a[i] 放哪就好了
- 时间复杂度：暴力模拟的话是 O(n^2)
- 期望得分：60分

优化

- 实际上就是要维护，一个数放最左和最右的话要交换几次
- a[i] 移动到最左边要交换的次数，就是左边比他大的数的个数
- 用个树状数组维护一下
- 注意 a[i] 相同的情况
- 时间复杂度：O(nlogn)，期望得分：100分

New Rank

背景描述

对于一个 $n \times m$ 的 01 矩阵 A，我们称呼他的秩为 $rank(A)$

01 矩阵的秩是这样计算的：

我们把矩阵的每一行看成一个 m 位的二进制数，于是一个矩阵可以看成 n 个数 $A_1, A_2..A_n$，其中 $A_i = \sum_{j=1}^{m} A_{i,j} \times 2^{j-1}$

定义集合 S 能表出整数 x，当且仅当存在 S 的一个子集 T 满足 T 中所有数的异或和为 x，例如 2 可以被 $\{1,3,4\}$ 表出，因为 $1\ xor\ 3 = 2$，特别地，0 可以被任何集合（包括空集）表出，因为空集的异或和为 0

对于一个集合 S，我们设 $f(S)$ 是最小的 S 的子集 T，满足 T 能表出 S 中任何一个数，如果存在多个满足条件的 T 则任取一个

例如 $f(\{1,2,3\}) = \{1,2\}$

现在我们定义 $rank(A) = |f(\{A_1, A_2..A_n\})|$

（以上就是模 2 域下的矩阵的秩的定义，也是线性基的定义）

定义矩阵 A 将 (i,j) 取反（也就是 0 变成 1，1 变成 0）后得到的矩阵是 $T(A,i,j)$

现在你需要求：$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} i \times j \times rank(T(A,i,j))$ 对 998244353 取模的值

简要题意

- 相当于要对一个模 2 下的矩阵，求出每个位置取反后矩阵新的秩
- 显然只修改一个位置的话秩只有可能+1，-1，不变
- 所以这题其实是个分类讨论题

暴力怎么写

- n,m<=6
- 根据题意模拟
- n,m<=50
- 根据题意模拟，用线性基相关的知识求秩，时间复杂度：$O(n^3m/32)$，努力一下可能能过70分
- 一行一行做，这样可以优化成 $O(n^3m/32)$，可以拿70分

一些简单的线性代数知识

- 基础行变换：
- 1. 交换两行
- 2. 一行减去另一行的 k 倍
- 基础行变换的本质是乘一个矩阵
- 例如交换 A 的第 i 行和第 j 行，设矩阵 B(i,j)=B(j,i)=1，对于 k!=i,k!=j, B(k,k)=1，其他地方都是 0
- 那么交换 A 的第 i 行和第 j 行后得到的矩阵是 BA
- 一行减去另一行同理

高斯消元求逆的原理

- 如何求一个矩阵 A 的逆?
- 我们知道做法是，对 A 高斯消元，同时维护矩阵 B，矩阵一开始是单位矩阵，每次对 A 做基础行变换时也对 B 做基础行变换，最后 A 变成单位矩阵后，B 就是 A 的逆
- 实际上假设对 A 做的基础行变换的矩阵是 X1,X2…XK
- 那么我们有 X(K)*X(K-1)*…X(1)*A=I
- 所以 X(K)*X(K-1)*…*X(1) 才是 A 的逆元
- 所以 A 的逆元就是对 I 依次做这些行变换

做法

- 那么这题怎么做呢?
- 首先我们假设 A 是行大于列的
- 我们把 A 高斯消元成最简形式，假设消完后是 BA
- 显然rank(BA)=rank(A)
- 且对 A(i,j) 取反相当于 BA 的第 j 列加上 B 的第 i 列
- 分类讨论一下就行了

New Set

背景描述

本题中的集合都是无重复元素的集合

定义一个集合 A 能将集合 X, Y 分离，当且仅当以下两个条件中的某一个满足了:

- $X \subseteq A$ 且 A 与 Y 的交为空
- $Y \subseteq A$ 且 A 与 X 的交为空

也就是说，A 是 X,Y 中某一个集合的超集，但是和另一个没交

给定 m 个集合 $A_1..A_m$，你需要求有多少个二元组 (X, Y)，满足 X, Y 是 $\{1, 2...n\}$ 的子集且 $|X| = |Y| = k$ 且 X 与 Y 的交为空，且至少存在一个 A_i 使得 A_i 能将 X, Y 分离

注意，当 $X \neq Y$ 时，(X, Y) 和 (Y, X) 被视为两个不同的二元组

由于方案数可能很大，你只需要输出答案对 $10^9 + 7$ 取模后的值

暴力

- n<=7：枚举 X,Y
- k<=1：枚举 X,Y
- 这样就有40了

暴力

- 考虑容斥
- 因为条件是至少一个 Ai 能分离 (X,Y)，我们容斥枚举一个 A 的集合 S，然后计算能被 S 中每一个分离的 (X,Y) 的个数
- 如何计算 (X,Y) 的对数呢，根据题目条件，A 能分离 (X,Y)，当且仅当 X,Y 中一个是 A 的子集，另一个跟 A 没有交
- 我们在枚举 S 中每个 A 是 X 的超集还是 Y 的超集
- 然后就可以大力统计了
- 时间复杂度：O(3^m*n)，期望得分：70分

标算

- 考虑上面那个暴力最后怎么算答案
- 假设 S 被分为 U+V，其中 U 中的 A 都是 X 的超集，且与 Y 无交，V 则相反
- 则可选的 X 是 U 的交的子集，且不能与 V 中任何一个集合有交
- 也就是说，如果 a 是 X 的一个元素，那么 a 是 U 中所有集合的元素，且不是 V 中任何一个集合的元素
- 我们可以通过数有几个元素满足条件来计算 (X,Y) 对数

标算

- 暴力的瓶颈是枚举 U,V，那么我们反其道而行之，枚举 a
- 对于 1..n 中的每个 a，我们预处理出包含 a 的 Ai 构成的集合是 f(a)
- 那么之前的暴力相当于：枚举 S=U+V，然后数有几个 a 满足 f(a)=U，几个 b 满足 f(b)=V
- 但是 a 的范围只有 1..n，所以有效的 U 只有 n 个
- 时间复杂度：O(2^m*n)，期望得分：100分