泰勒展开

标签（空格分隔）：数论

资料

一个比较详细的介绍
一个微积分的推导
一个我没有看懂的推导
知乎上一个提了拉格朗日中值定理的回答
知乎上一个使用了柯西中值定理的证明

泰勒公式推导

简单来说，如果我们知道某一个函数在某一个点的取值，以及在这个点的各阶导数的取值，我们就可以通过泰勒公式构造出一个多项式，从而近似地得到这个点附近的点的这个函数取值。

对于函数$f(x)$，我们已经知道$f(x_0)$以及f在x_0处的$1,2,3\cdots n$阶导数。我们需要构造一个关于x的多项式P，使得$P(x)$的取值尽可能地接近$f(x)$。

考虑$P(x)$满足什么条件它才能够和$f(x)$比较接近：

- $P(x_0)$应该等于$f(x_0)$
- 在x_0这个点，两个函数的切线的斜率应该相等，也就是他们的一阶导数相等。
- 在x_0这个点，两个函数的曲率也应该相等，也就是他们的二阶导数也应该相等。
- $\cdots$
- 在x_0这个点，两个函数的$1,2,3\cdots n$阶导数都应该相等。

我们设$P(x)=\sum_{i=0}^{n}A_i(x-x_0)^i+R_n(x)$，最后的$R_n(x)$是余项，也就是误差。那么根据前面的推导我们可以知道：

- $P(x_0)=A_0=f(x_0)$
- $P'(x_0)=1\cdot A_1=f'(x_0)$（次数高于1的项此时因为$x-x_0=0$所以取值都是0；取值低于1的项因为求导已经没有了）
- $P''(x_0)=1\cdot 2\cdot A_2=f''(x_0)$

- $P'''(x_0) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot A_3 = f'''(x_0)$
- $\cdots$
- $P^{(n)}(x_0) = n! A_n = f^{(n)}(x_0)$

于是我们得到了$A_i = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$。

因此我们有了泰勒公式：

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i + R_n(x)$$

当$x_0 = 0$的时候这就是麦克劳林公式：

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i + R_n(x)$$

一些常用函数的泰勒展开

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$
$$\ln(1+x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}(i-1)!}{i!} x^i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i} x^i$$
$$\sin(x) = \frac{\cos(0)}{1!}x^1 - \frac{\sin(0)}{2!}x^2 - \frac{\cos(0)}{3!}x^3 + \frac{\sin(0)}{4!}x^4 \cdots$$
$$= \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 \cdots$$

---

upd 2020.1.15

余项的估计

1. 函数$c \cdot \frac{x^n}{n!}$的n阶导数是c。
2. 对于连续且可以求$n+1$阶导的函数$f(x)$，以及某两个点a, b，令$y = cx^{n+1}$过$(a, f(a)), (b, f(b))$，则至少存在一个点$\theta \in (a, b)$，满足$\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} = c$。（拉格朗日中值定理的推广？我不会证）

3. $R_n(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$，如果把$R_n(x)$看做一个关于$x$的函数，将$f(x)$泰勒展开为$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$，就可以得到$R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$。
4. 必然存在一个点$\theta \in (a, x)$，满足$R_n(x) - R_n(a) = \frac{R_n^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$，也就是$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$。
5. 所以，如果某个M满足$M \geq |R_n^{(n+1)}(\theta)|, \theta \in (a, x)$，那么就可以得到$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$