博弈·再放送

Part 0

- 动态规划与诈和

- 给一个无环有向图，一开始在某个点上有一个棋子，两个人人轮流动这个棋子，每次选择一条出边走出去，不能走的输。

- 求先手是否一定有必胜策略。

小题题

- 给你n*m的网格，(1,x), (x,1)的位置标着移到这个位置为胜或者负，然后有一个在(a,b)位置的棋子，Alice和Bob轮流移动，每次可以往左或者往上。
- n,m<=1e5

Solution

- 找规律可以发现两行两列之后每条对角线都是相同的。

AGC 002 E

- 有n堆糖，然后Alice和Bob轮流操作。
- 可以吃完最大的一堆，也可以每堆吃一个。
- 问谁能赢。
- n<=1e5, ai<=1e9

Solution

- 诈和好题。
- 还是每个对角线一样。

某个题

- 给定两个字符串s，t，Alice和Bob每次可以删掉s最前面或最后面的一个字符。若一个人操作后s变成了t的子串，该人输。求谁能赢。
- |s|, |t| <=1e6

Solution

- dp的形式和之前是差不多的。

k倍减法游戏

- k倍动态减法游戏：有一个整数S（>=2），先行者在S上减掉一个数x，至少是1，但小于S。之后双方轮流把S减掉一个正整数，但都不能超过先前一回合对方减掉的数的k倍，减到0的一方获胜。
- 问：谁有必胜策略。
- S<=1e6

Solution

- 三方->单调性优化到平方->数据结构优化到线性。

进一步的观察

- k=1的时候必败态为2的幂次，k=2的时候必败态为fibonacci数。
- 原因是先手一定能去到这个base下最后一个1，而后手取不到下一个1，并且保证后手取完之后，先手还能取到最后一个1。
- 所以我们希望构造一组base满足：
  - 所有数字都能用这个base里的数字表出。
  - 表示中前一项大于后一项的k倍。

- 令ai表示我们找到的基，bi表示a1, a2, …, ai能表出最大的数。

- 那么有a[i+1]=b[i]+1，b[i+1]=a[i+1]+b[j]其中j为最大的j满足a[j]*k<a[i+1]

ZROJ 807

- 有n堆石子，每次可以在一堆里面选，第一次至多选k个，之后每次选的不能超过前一次，取完者获胜。
- 问先手所有的必胜策略。

考虑策略：

1. 如果 $\sum_i a_i \equiv 1 \pmod 2$，先手取 1 个必胜；
2. 否则，先手最优一定取偶数个（否则留给对手总和为奇数的情况，自己必败），所以递归到 $K \leftarrow \lfloor \frac{K}{2} \rfloor, a_i \leftarrow \lfloor \frac{a_i}{2} \rfloor$。

解得先手必胜当且仅当对于某个 $t \le \log_2 K$，$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \frac{a_i}{2^t} \rfloor$ 模 2 和为 1，也即 $\oplus_i a_i \not\equiv 0 \pmod{2^{\lfloor \log_2 K \rfloor}}$。

定义 $\operatorname{lowbit}(x)$ 表示整除 x 的最大的 2 的幂。先手第一步能必胜的策略必定是取 $(2k+1) \cdot \operatorname{lowbit}(\oplus_i a_i)$ 个。枚举取的堆，假设是第 i 堆，考虑枚举取完之后另一个人面对的剩下的异或和的 lowbit，假设是 2^t，那么先手取的个数为 $a_i - (\oplus_{j \neq i} a_j) \oplus 2^t \pmod{2^{t+1}}$。由于必胜，后手不能取到 2^t，于是自己这次取的个数也必须小于 2^t。枚举 t 依次判断即可。注意处理 $t = \infty$（取完之后异或和归零）的情况。

综上，答案至多 $O(n \log a)$ 种。

时间复杂度：$O(n \log a)$

Part 1

- 平等博弈(SG函数)

SG函数应该大家都会把?

简单的算SG函数小练习

练习1

- 有一堆石子，两个人轮流取，每次可以取1到k个，谁不能动就算输，问谁会获胜。

Solution

- $sg(i)=i\%(k+1)$

练习2

- 有一堆石子，两个人轮流取，每次可以取l到r个，谁不能动就算输，问谁会获胜。

Solution

- 找规律，选取合适的l, r比如l=3, r=7。
- sg=[0,0,0,1,1,1,2,2,2,3,0,....]
- 容易发现sg(i)=i % (l+r) / l
- 一般来说，我们可以甚至需要找sg函数的规律。
- 因为sg函数的取值不容易直接思考，并且如果找到了规律一般都可以用数学归纳法证明。

练习3

- 有n堆石子。两个人轮流取，每次可以在一堆石子里面选取任意多的石头，或者把一堆石头分裂成两堆。谁不能操作算输。

Solution

- 一个游戏可以分裂成两个独立的游戏，而两个游戏的整体的sg值为这两个游戏分别的sg值异或起来。
- sg[i]=mex(sg[j],sg[j]^sg[i-j])
- {1,2,4,3,5,6,8,7,….}

练习4

- nim游戏，每次能拿掉一个因子。

Solution

- 找规律发现是__builtin_ctz(x)。

练习5

- nim游戏，每次能拿掉一个互质的数。

Solution

- Let $p_1 < p_2 < \ldots$ be the prime numbers. The nimber g_n of a pile with n stones is

$$g_n = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 0, & n \text{ even}, \\ k, & n \text{ odd and } p_k \text{ is the smallest prime dividing } n. \end{cases}$$

CF某题

- 有n个数1~n, 两个轮流选择数字删除，如果x被删除了，那么x^2, x^3, ...也要被一起删除。
- 问先手必胜还是后手必胜。
- n<=10^9

Solution

- 每个幂次(x, x^2,x^3, ..., x^k)都独立，所以可以看成独立的游戏。

- 每个游戏都只和数字的个数k有关，且这里的k<=30。

- 对于单独的k，可以使用状压dp求出sg值，由于k很小所以可以打表。

- 对于x>=sqrt(n)的k都等于1，可以直接判断。

- 时间复杂度O(sqrt(n) log n)

沙雕题

- 有一个1*n的纸条，两个人轮流在格子里画×。
- 谁画了连续的三个×获胜。

Solution

- 一个格子如果填入，那么周围两格都不能放。
- 所以转化成两边独立的游戏，然后求sg值即可。

SPOJ COT3

- 有一个有根树，每次可以选择一个节点，然后把它到根的路径全部删除。问谁会赢。
- n<=1e5

Solution

- sg[x]表示子树x的sg值，枚举删除哪个点，整个树被拆成若干个子树，把这些子树的sg值异或起来然后取mex即可。
- 线段树合并。

PE 306

- 1*n的长条，每个人轮流拿连续两个，求sg值。

Solution

- 1120311033224052233011302110452740
- 1120311033224455233011302110453748
- 1120311033224455933011302110453748
- 1120311033224455933011302110453748

CF 新年的睿智题

- 两个小老弟玩游戏，若干行，每行有三个棋子。
- Alice可以选择一行将左边一个或者两个棋子往右移d步。Bob可以将右边一个或者两个棋子往左移d步。
- 要求移完之后棋子之间顺序不变，要求d是素数或者两个素数的乘积。
- 问谁能赢。
- 1e5行，每行棋子坐标范围在1e5之内。

Solution

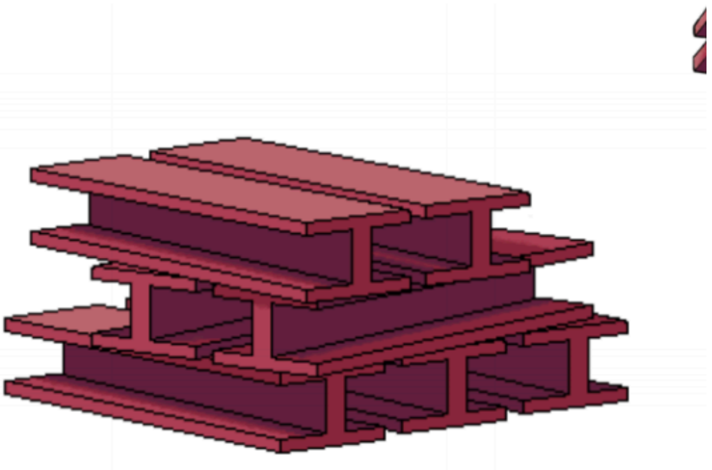
- bitset一哈
- 难度全在读题上。

一个数据结构题

- 一个点x可以走到[lx,rx]这段中的一个，求sg值。
- 本质上是一个区间mex问题。

Solution

- 离线，按r排序。
- 然后搞一个线段树记一下每个数出现的最右边的位置。
- 找一个前缀使得min>l。



CF 102341 G

- 有若干堆这样的东西，然后它是stable当且仅当：
  - 每一层至少有一块
  - 如果一层有只有一块，那么一定在中间
  - 不存在相邻的两层都只有一块。
- 然后两个人轮流拿，问谁能赢。
- n<=20

Solution

- 容易发现如果变成了101, 010，那么就再也不能动了。
- 所以变成很多段，然后记一下两头是什么。

TCO Semifinal 19

Alice and Bob have *n* bags, each containing some, possibly zero, positive integers: ones, twos, threes, and fours. They play a game using these bags. Alice goes first, and then they alternate turns. In one turn, a player first selects exactly one of the bags. Then she or he removes some non-empty subset of numbers whose sum is divisible by four. Whoever is not able to make a move, loses.

The number of ones, twos, threes and fours in bag number i is **a**[i], **b**[i], **c**[i] and **d**[i], respectively. For each of the 2^n - 1 non-empty subsets of bags, consider the game played with only these bags. Determine how many of these games are won by Alice if they both play optimally.

Solution

- sg值为将这个集合分成最多个和为4的倍数的集合，可以用贪心计算。
- 答案使用高斯消元。

N阶nim

N 阶 Nim 游戏：有 k 堆石子，各包含 $x_1,x_2\ldots x_k$ 颗石子。双方玩家轮流操作，每次操作选择其中非空的若干堆，至少一堆但不超过 N 堆，在这若干堆中的每堆各取走其中的若干颗石子（1 颗，2 颗…甚至整堆），数目可以不同，取走最后一颗石子的玩家获胜。

结论：当且仅当在每一个不同的二进制位上，$x_1,x_2\ldots x_k$ 中在该位上 1 的个数是 N+1 的倍数时，后手方有必胜策略，否则先手必胜。

CCPC Harbin 2019 G

- 这是一道阅读理解题。
- 有若干堆石头，两个人在玩一个2阶nim。
- Bob觉得这游戏太垃圾，所以希望能在游戏开始选择一个非空子集玩。
- 有一个商店，每天会加一组大小为ai,ai的两堆石头，费用为bi。
- Alice会在商店里选出一个子集，使得Alice必胜，并且费用尽量大。
- n <=5e5, ai<=1e18，在线询问。

Solution

- 说了这么多，实际上就要找一个在模三意义下线性无关的组，使得和最大。
- 然后使劲bitset一下。

Nim3

- 有n堆石头，三个人轮流玩nim。
- 谁拿了最后一步是第一名，倒数第二步是第二名，倒数第三步是第三名。
- 每个人都想玩使得自己的名次最高。

Solution

- 如果所有数字写成二进制表示，然后每位做模3的加法，加起来等于0，那么最后一个玩家获胜。
- 虽然看起来很假，但好像是对的。
- 判断第一个玩家能否获胜只需要看能不能移到必胜态。
- 否则就是B赢。

阶梯nim

- 有n堆石子。两个人轮流取，每次可以在第i堆石子里面选取若干石头放到i-1堆里面。谁不能操作算输。

Solution

- 只需要看第2堆,第4堆,第6堆...石子异或起来是否等于0。
- 因为如果移动奇数编号的石子，那么下一个可以模仿他的行为。

ZROJ 628

- 你有一个$1 * n$的棋盘，你要在上面放上k个普通棋子和一个特殊棋子，要求每个格子至多只能放上一个格子。

- Alice和Bob轮流进行游戏，每次可以选择将一个棋子往左移若干格，当然不能跳过其他的棋子或者占用其他棋子的格子，也可以移除当前棋盘上相对位置最左边的一个棋子。移除了特殊棋子的玩家为胜者。

- 求有多少种初始状态，先手可以必胜，由于答案很大，输出对10^9+7取模的值。

- n<=1e18, k<=8000

猜规律

- 特殊硬币在最左边的时候必胜。
- 我们发现最后两个硬币之间的间隔修改了改不回去，导数第二第三个之间是可以改回去的。
- 把去掉操作看做放在0的位置上，也就是前面有一个-1的硬币。
- 可以猜测和这些硬币之间的间隔的nim有关。

猜规律

- 打表发现只有k是偶数并且特殊硬币是左边第二个时候有反例。
- 当k是偶数，并且特殊硬币是左边第二个的时候，把第一个拿掉就输了，所以第一段的间隔需要-1。
- 总的规律就是首先特殊硬币是第一个就特判。
- 否则就是从最后一个硬币开始隔着一个往前的间隔的xor值。
- 如果k是偶数，当特殊硬币不在第二个的时候，第一段减一。

简单的证明

- 对于一个必胜态，也就是xor起来不等于0，根据nim知识一定能把xor的值移成0。
- 并且如果k是奇数，我们只关心第(2i-1)和(2i)的间隔，也就是只会移(2i)的，所以动最左边的硬币。
- 如果k是偶数，我们只关心第(2i)和(2i+1)的间隔，只会移动(2i+1)，如果特殊硬币不在第二位，那么没问题。
- 如果特殊硬币在第二位，那么我们算的是第一枚硬币与0的间隔，所以不会移出去。

- 对于必败态，也就是xor起来等于0。
- 如果我们没有移除硬币，那么剩下的xor起来一定不为0，或者可以模仿。
- 如果k是奇数，我们移除了第一个硬币，第二个硬币间隔变大，xor起来不为0。
- 如果k是偶数，我们移除了第一个硬币，等价于把第一堆石子取成0。

数数

- 统计必败态。
- 对于奇数，就是xor起来=0，然后*(c-1)。
- 对于偶数，特判第2个是特殊硬币，就是n个里面放c个。
- 否则可以理解成n+1个里面放c个，然后第一位必须留空，也就是减去n个里面放c-1个。

数数

- 这样就可以比较轻松的得到一个O(n^3)的dp。
- n个里面放c个，相当于找c+1个数，总和为n-c，其中(c+1)/2个数xor起来为0。

数数

- 按2的幂次从大到小选，dp[i][s]表示考虑完了二进制前i位，剩下的和是s，枚举这一位填几个1，最后剩下的数字用组合数算一下。

- 时间复杂度是O(map都能跑得过)。

- O(n log n k)。

数数

- 改成数位dp，从高位填下来，把所有的数字放在一起考虑。
- 朋友你听说过hnoi 梦幻岛宝珠么?
- dp[i][j]表示考虑前i位，剩下j*2^i次，容易发现我们只需要考虑j<=c就行了，否则一定用不完。
- 枚举这一位xor要等于0的那些数填多少个1，其他的数填多少个1。

数数

- 如果你瞎写，那么时间复杂度O(log n*k^3)。
- 可以用FFT优化一下，O(k log k log n)

翻硬币

- n枚硬币排成一排，有的正面朝上，有的反面朝上。我们从左开 始对硬币按1~n编号。
- 两个人轮流根据某些约束翻硬币（如：每次只能翻一或两枚，或者每次只能翻连续的几枚），但他所翻动的硬币中，最右边的必须是 从正面翻到反面。
- 谁不能翻谁输。

Solution

- 局面的sg值为局面中每个正面朝上的棋子单一存在时的sg值的异或和。
- 翻硬币可以直接脑补成给这些堆加入硬币。
- 因为如果一个堆有了两个硬币，那么这两个硬币的sg值异或起来也是0，相当于没有硬币。

翻硬币

- 只能翻连续不超过3个。
- 那么sg[i]=mex(0, sg[i-1], sg[i-1]^sg[i-2])
- 高维情况同理。

CF 494 E

- 有一个n*n的棋盘，其中染黑了m个矩形，剩下的是白的。
- 你在上面玩翻硬币，只能翻长度不超过k的正方形。
- 求胜负状态。
- n<=1e9, m<=1e5

Solution

> If we calculated the first values of $g_{i,j}$ one can see a pattern in the Grundy numbers. Then one can prove that $g_{i,j} = min(lowest\_bit(i), lowest\_bit(j), greatest\_bit(k))$ where $lowest\_bit(x) =$ the maximum power of 2 which is
> $greatest\_bit(x) =$ the maximum power of 2 which is not greater than x.

- 来一手矩形并。

翻硬币

- 有一棵有根树，每个节点上有一个硬币。
- 每次可以选择一个正面的硬币，然后在他的所有后代中选择一个子集翻转。
- 谁不能动算输。

Solution

- 每个硬币是独立的，证明同上。
- 只需要求出每个点的sg值即可。
- 通过归纳可得每个点的sg值为2^(到最深叶子的距离)。

砍树游戏

- 给定一一棵有根树，两个人人轮流操作，每次可以选择一一条边删掉它，然后扔掉根不不在的那个连通块，无法操作的输

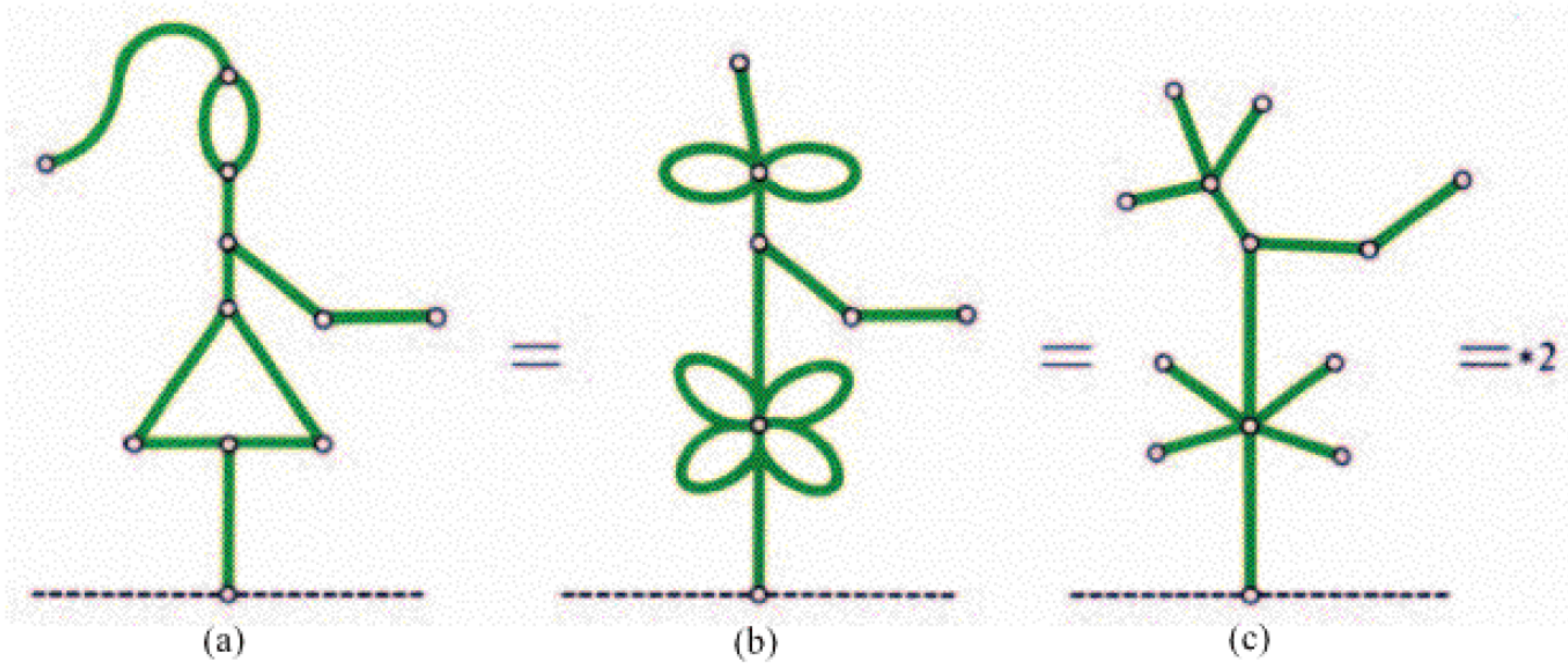
Solution

- 所有儿子sg+1异或起来。

砍树游戏ex

- 给定一棵有根树，每条边可能是重边。
- 两个人人轮流操作，每次可以选择一条边删掉它，然后扔掉根不不在的那个连通块，无法操作的输

Fusion Principle



- 你可以把一个环上的边捏起来。
- 可以做任意图。

CCPC qhd 2019 I

- 有一棵有根树，每次选择可以选择一个叶子集合删掉。
- 问先手能不能删完。

Solution

- 必败当且仅当所有分叉长度都是偶数。

Anti-SG

- 对于任意一个Anti-SG游戏，如果我们规定当局面中所有的单一游戏的SG值为0时，游戏结束(操作的人失败)，则先手必胜当且仅当：
- （1）游戏的SG函数不为0且游戏中某个单一游戏的SG函数大于1。
- （2）游戏的SG函数为0且游戏中没有单一游戏的SG函数大于1。

Nim積

$$\mathcal{G}(a,b) = \mathrm{mex}\left\{\mathcal{G}(a',b) \overset{*}{+} \mathcal{G}(a,b') \overset{*}{+} (a',b')\right\}$$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	2	3	1	8	10	11	9	12	14	15	13	4	6	7	5
0	3	1	2	12	15	13	14	4	7	5	6	8	11	9	10
0	4	8	12	6	2	14	10	11	15	3	7	13	9	5	1
0	5	10	15	2	7	8	13	3	6	9	12	1	4	11	14
0	6	11	13	14	8	5	3	7	1	12	10	9	15	2	4
0	7	9	14	10	13	3	4	15	8	6	1	5	2	12	11
0	8	12	4	11	3	7	15	13	5	1	9	6	14	10	2
0	9	14	7	15	6	1	8	5	12	11	2	10	3	4	13
0	10	15	5	3	9	12	6	1	11	14	4	2	8	13	7
0	11	13	6	7	12	10	1	9	2	4	15	14	5	3	8
0	12	4	8	13	1	9	5	6	10	2	14	11	7	15	3
0	13	6	11	9	4	15	2	14	3	8	5	7	10	1	12
0	14	7	9	5	11	2	12	10	4	13	3	15	1	8	6
0	15	5	10	1	14	4	11	2	13	7	8	3	12	6	9

Nim积

- Nim积有结合律，交换律，对Nim和(xor)有分配律。

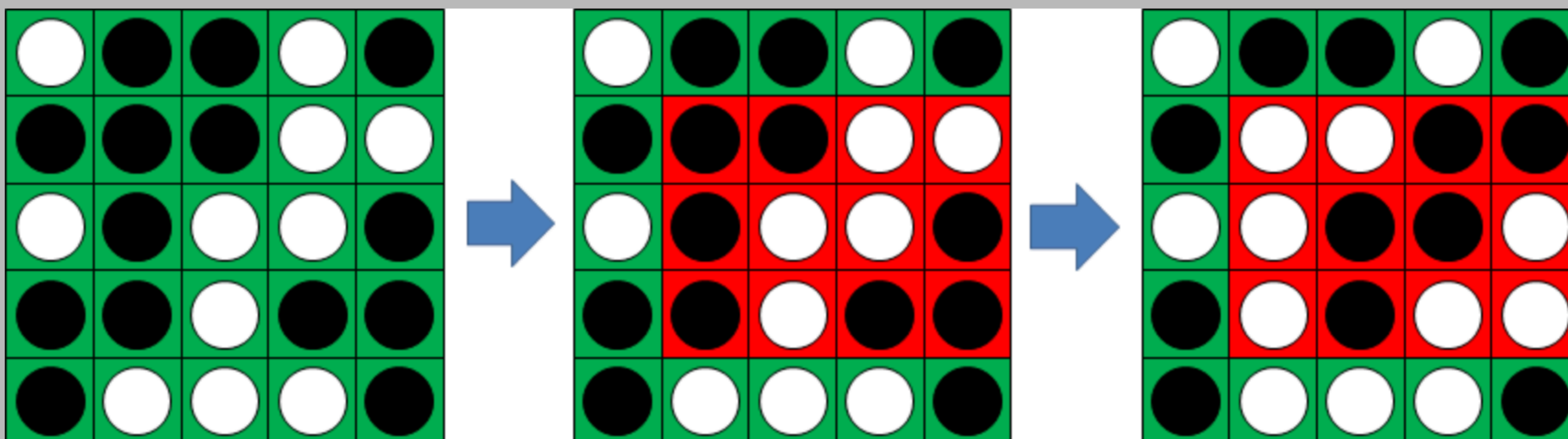
```
int nim(int x,int y);
int _nim(int x,int y){
    if(!x||!y)return 1<<(x+y);
    int &F=f[x][y];
    if(F!=-1)return F;
    int ret=1,e=1;
    for(int i=0;i<16;++i)
        if(((x^y)>>i)&1)e*=1<<(1<<i);
        else if((x>>i)&1)ret=nim(ret,3*(1<<(1<<i))/2);
    return F=nim(ret,e);
}

int nim(int x,int y){
    if(x<2||y<2)return x*y;
    int ret=0;
    for(int i=0;i<16;++i) if((x>>i)&1)
        for(int j=0;j<16;++j) if((y>>j)&1)
            ret^=_nim(i,j);
    return ret;
}
```

小练习

- 翻硬币，可以翻转以这个点为右下角的矩形。

PE459

- the upper right corner of the rectangle contains a white disk
- the rectangle width is a perfect square (1, 4, 9, 16, ...)
- the rectangle height is a triangular number (1, 3, 6, 10, ...)



Players alternate turns. A player wins by turning the grid all black.

Let W(N) be the number of winning moves for the first player on a N by N board with all disks white, assuming perfect play.
W(1) = 1, W(2) = 0, W(5) = 8 and W(10^2) = 31395.

Solution

- 求出每行每列单独的sg值，然后乘一下。

Boring Game

- 有一个n*n的棋盘，其中染黑了m个矩形，剩下的是白的。
- 你在上面玩翻硬币。
- 求胜负状态。
- n<=1e9, m<=1e5

Solution

- 扫描线+nim积。
-

cf 102341 L

Firstly, choose some other tuple B (the multiset doesn't have to necessarily contain any copy of B), such that B also contains n non-negative integers and each element of B is strictly smaller than the **corresponding** element of A; that is, $B_i < A_i$ for each $i = 1, 2, \ldots, n$. Nextly, a single copy of A is removed from the multiset. Then, for each **non-empty** subset X of integers from 1 to n, we add C_X to the multiset. C_X is a tuple such that $(C_X)_i = B_i$ if $i \in X$, or $(C_X)_i = A_i$ otherwise. For example, if $A = (3, 7)$ and $B = (0, 2)$, then the tuples $(0, 7)$, $(3, 2)$ and $(0, 2)$ will be added to the multiset. Notice that $2^n - 1$ distinct tuples are always added in this step.

The player which is unable to make a move loses.

It wasn't easy for Latias and Latios to decide what multiset should be the starting one. As they happened to have an $n \times n$ matrix M consisting of integers, they agreed to create a multiset containing $n!$ tuples. For each permutation σ of the integers from 1 to n, the tuple $(M_{1,\sigma(1)}, M_{2,\sigma(2)}, \ldots, M_{n,\sigma(n)})$ is added to the multiset.

Latias goes first and then the players keep moving alternately. We can prove that the described game is finite, so it's always possible to determine the winner. Your task is to decide who will win assuming that both players play optimally.

Solution

- 注意到nim实际上是一个2^64的域，也就是存在逆元。
- 所以就冲一下高斯消元。

CF 1314 F

- 求nim积意义下的离散对数。
- 范围2^64

Solution

- 出一个垃圾题分两步：给一个域，实现一下Pohlig-hellman
- 难点是CF没有int128

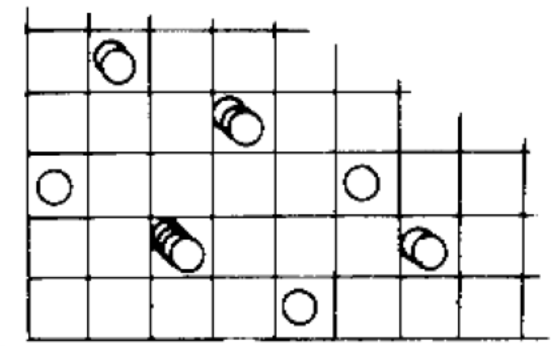
Welter Game

- 你有n堆石子，你要玩nim，要求不能有石子个数相同。
- https://atcoder.jp/contests/kupc2015/tasks/kupc2015_l

Solution

- 很遗憾这是个结论题。
- [a|b]=(a xor b)-1
- 每次删除最匹配的数对，也就是模2^k同余，其中k最大的数对。
- [a|b|c|d|…]=[a|b] xor [c|d] xor …
- 三堆石子必败的充要条件是(a+1) xor (b+1) xor (c+1)==0

Infinite Nimber



(a) board

$*\omega\times 5$	$*(\omega\times 5+1)$	$*(\omega\times 5+2)$					
$*\omega\times 4$	$*(\omega\times 4+1)$	$*(\omega\times 4+2)$	$*(\omega\times 4+3)$				
$*\omega\times 3$	$*(\omega\times 3+1)$	$*(\omega\times 3+2)$	$*(\omega\times 3+3)$	$*(\omega\times 3+4)$	$*(\omega\times 3+5)$		
$*\omega\times 2$	$*(\omega\times 2+1)$	$*(\omega\times 2+2)$	$*(\omega\times 2+3)$	$*(\omega\times 2+4)$	$*(\omega\times 2+5)$	$*(\omega\times 2+6)$	
$*\omega$	$*(\omega+1)$	$*(\omega+2)$	$*(\omega+3)$	$*(\omega+4)$	$*(\omega+5)$	$*(\omega+6)$	$*(\omega+7)$
0	$*1$	$*2$	$*3$	$*4$	$*5$	$*6$	$*7$

(b) values

Two-dimensional Nim uses a quarter-infinite board (Fig. 6(a)) and a finite number of counters of which any number can be on the same square. A counter may be moved any distance *leftwards* in its own row, or to *any* position in any *lower* row. The values shown in Fig. 6(b) are all the nimbers of the form

$$*(\omega \times a + b)\,.$$

Of course, there is a three-dimensional version with typical value

$$*\left(\omega^2 \times a + \omega \times b + c\right).$$

不严谨分析

- 一个点能到达所有$a_0*w^0 + a_1*w^1 + \ldots + a_k*w^k$，那么就是$w^{(k+1)}$，高阶无穷大。

例题

You are given an infinity board with d dimensions and n tokens on the board. You can regard the coordinate of each token as a d-dimension vector. The coordinate of i-th token is $(x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,d})$.

Alice and Bob take turns playing, starting with Alice. In each turn, the player chooses a token with coordinate $(x_1, x_2, \ldots, x_d)$and move to a valid cell $(y_1, y_2, \ldots, y_d)$. The cell is valid iff $y_1, y_2, \ldots, y_d > 0$ and $x > y$ in the lexicographic order. For example, you can move from $(2, 2, 2)$ to $(2, 1, 100)$ or $(1, 100, 1)$.

A player loses if he cannot make a move on his turn. Determine the winner if both players play optimally.

Solution

- Bob wins iff 对于所有维度，每个人减一异或起来都为0

CF 1149 E

- 有一个DAG，每次你可以选择一个点，减小这个点的点权，然后修改它的所有后继的权值。
- 问先手必胜策略。

Solution

- 记这个点的深度M(u)=mex(M(v))

- sg值为w^(M(u)) * h(u)

Part 2

- 非平等博弈(surreal number)。
- 看老夫从掏一手WC讲课课件。
- 不出意外，它鸽了。

Tree

- 有一棵树，Alice可以选择一个任意点染黑，然后Alice和Bob可以任选一个与Alice点相邻的点染上自己的颜色。

Solution

- 考虑树形dp。
- 一个叶子是{0|0}=*，否则就是{儿子的和|0}。
- 如果儿子是奇数个*，那么这个节点的值变成down。
- 所以先手会走向小于0的态，后手会走向0，节点的值始终小于0。
- 先手必胜当且仅当每个点的儿子都是偶数。

CF 1033G

- 有若干堆石子，alice可以拿掉A个，bob可以拿掉B个，问Alice/Bob先手，谁赢。

Solution

1. $0 \leq v_i' < a$: As neither Alice nor Bob can make a move, this is a zero game ($P = 0$).
2. $a \leq v_i' < b$: Alice can take at least one move in this pile, and Bob none. This is a strictly positive game ($P > 0$).
3. $b \leq v_i' < 2a$: If either of the players makes a move, it changes to a zero game. This is thus a fuzzy game ($P||0$). Note that this interval may be empty.
4. $\max(2a, b) \leq v_i' < a + b$: If Alice makes a move, she can turn this game into a positive game for her. Bob can turn this into a zero game. This is a fuzzy game ($P||0$).

As we see, there are no negative games. Hence, in the combined game, we can ignore the zero games in our calculation (type 1) and if there is at least one positive game (type 2), the game is won for Alice. If there is at least one game of type 4 and Alice starts, or at least two games of type 4, Alice can always play one of them to make herself a positive game, thus winning. Otherwise, it is always optimal to play in a game of type 3 or 4 if there is one, and the game is subsequently turned into a zero game. The parity of the number of these games thus determines whether the starting player wins or loses.

Part 3

- 杂题

经典题

- 你有一个无向图，Alice和Bob轮流移棋子，不能移到相同的点上。
- 问先手是否必胜。
- NOI 2011兔兔与蛋蛋

Solution

- 看是否一定在最大匹配上。

经典题2

- 你有一个二分图，Alice和Bob轮流移棋子，不能移相同的边。
- 问先手是否必胜。
- https://codeforces.com/gym/100886/problem/B

Solution

- 对于右边的点，如果存在左边的一个点集S满足每个点度数都是偶数，那么必胜。

- 所以只需要判v这个点所在的行在不在其他点的线性基里面即可。

CF 1147 F

- 有一个n*n的二分图，每条边有边权，边权两两不同。
- Alice一开始可以选择increase或decrease，那么Bob选择另一种。Alice将棋子放到一个节点上，然后Bob选择一条边走。
- 然后Alice和Bob开始博弈，每个人选择一条边走，要求边权满足选的关系，并且不能走经过的点。
- 首先你要选先手还是后手，然后找一个必胜策略。

Solution

- 首先可以猜一下Bob必胜。
- 假设Alice选了increasing，并且放在左边，那么我们要找一个匹配。
- 假设w->x->y->z，那么有(x,y)>(w,x)，且(y,z)<(x,y)。
- 所以可以找一个稳定婚姻，就一定不会有NTR的case。

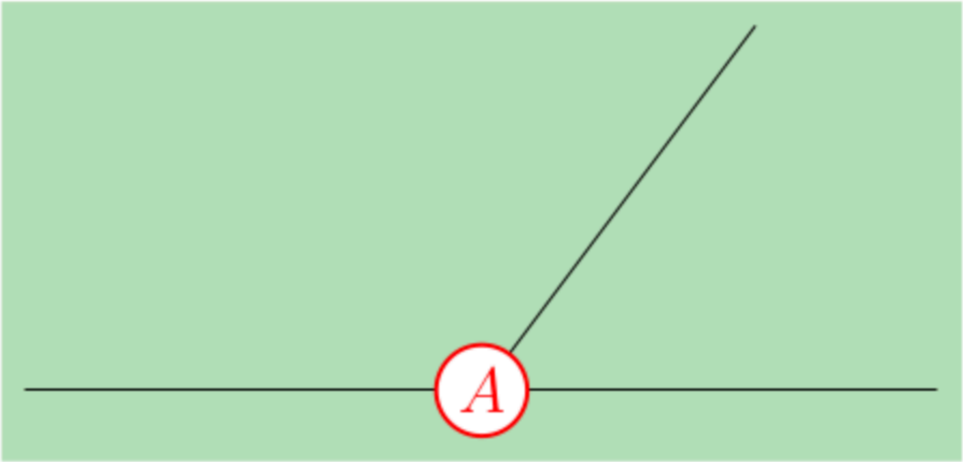
CF 1110 G

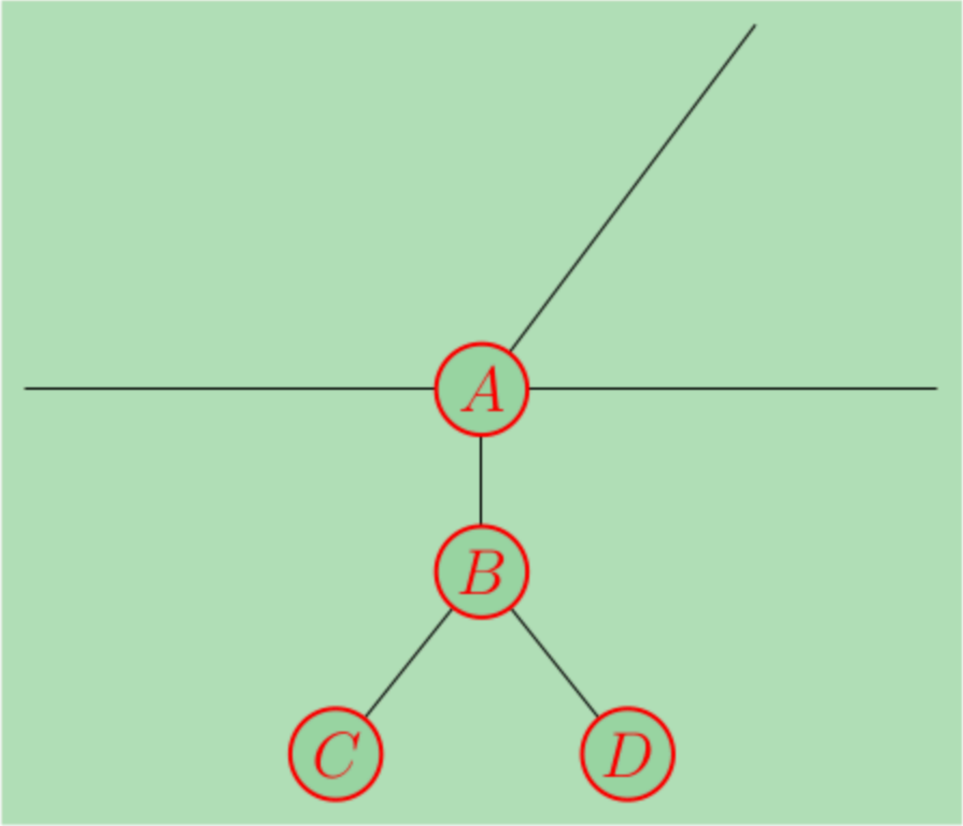
- Alice和Bob在树上下三子棋，树上已经放了一些Alice的棋子，问Alice先手是否必胜。

Solution

- 考虑没有Alice的棋子。
- 如果有个点度数=4，必胜。如果一条链必败。
- 如果存在三度点并且有1,2,2的形状，必胜。
- 如果三度点连出了两个叶子+一条链，必败。
- 只剩一种情况。

Solution





- 等价，所以判断奇偶即可。

FHC 2016 Final C

- 有一个2n个点m条边的有向图，两个人轮流操作，Alice选择12中一个点染黑一个点染白，Bob选择将34中一个点染黑一个点染白，依次类推。
- 如果最后不存在一个条边从黑点连向白点，那么Alice获胜，否则Bob获胜。

Solution

- 可以写成2SAT，然后前面是quantifiers。无解当且仅当
  - An existential node is in the same strongly connected component as its complement node.
  - An existential node i is in the same strongly connected component as a universal node j, such that j's associated quantifier is within the scope of i's quantifier (in other words, $i < j$).
  - A universal node is reachable from another universal node.

Moscow Region 2019 I

- 你有一个n段的分段线性函数(0,x0), (1,x1), (2,x2)…
- Alice和Bob玩游戏，他们会选择两个参数A和eps，一开始T=A, Alice选择一个0到n之间的实数x，然后Bob会选择一个满足|x’-x|<=T，然后令T=T-eps。
- 当T<=0时游戏结束，Alice想让数字尽量小，Bob想让数字尽量大。
- 问eps趋向于0的时候，最后数字是多大。
- n<=1e5

Solution

- 你从未见过的连续的博弈题。
- 我可能曾经会做过，但是忘了，留给读者自行思考。

PE 690

- 给你一个图，然后有Tom和Jerry两个人，每天早上Tom选择一个点检查是否有Jerry，每天下午Jerry会移动到一个相邻的点。

- 问最坏情况下Jerry是不是一定会被抓到。

Solution

- 存在一条链，每个点到这个链的距离不超过2。

【NFLSPC #2】Pekopeko

- 有一个n*n的棋盘，上面有障碍，有一个棋子。
- 然后Alice可以放障碍，Bob会将向四相邻的格子移动一格。
- 问Alice能不能让Bob的棋子移不出去。

Solution

注意只有靠近边界的格子兔子才能成功逃脱。此时可以对兔子的策略将格子的类型分类讨论，但是作者尚不清楚实现细节是否繁琐，所以这里暂不讨论。这里有一个简单的通过此题的方法，不过前提是你需要有一个能计算9×9规模的程序。

我们发现对于$n > 9$的情况，除去边界外，边上只剩下宽度为1的通道。我们考虑将这个通道的长度缩到1。假设我们缩左边的通道（用|表示）：

```
11111
11111
11110
11100
||000
||000
||000
||000
||000
11100
11110
11111
11111
```

缩完以后应该长这样（用A和B表示通道缩成的两个格子）：

```
11111
11111
11110
11100
BA000
11100
11110
11111
11111
```

我们发现兔子经过通道时一定只有一种决策可以进行（走向没走过的那个方向），若通道格子旁边的边界格子中没有障碍，那么放障碍的人也一定需要放一个障碍。

若通道中有障碍物，那么这个通道将无法通过，可以将其等价地表示为A=X。

若通道中没有障碍物，则考虑通道边界上的障碍物个数，若有一个障碍物可以将其等价地表示为A=., B=X（这是为了方便计算与边界障碍物相邻的格子作为起点时的答案），若有大于一个障碍物可以将其等价地表示为A=X。

Solution

以下是一些优化方法：

优化1

记忆化搜索。即遇到重复的局面不重复计算。注意这对于多组测试数据的题目有很好的效果。

优化2

兔子不会走向它走过的格子。否则，它从某个局面（第一次走到那个格子的局面）走到了比它更劣的局面（走重复的格子的局面），这一定是不优的。

优化3

当兔子紧贴最外圈时，若最外圈中相邻的格子中没有障碍，那么放障碍的人一定要放一个障碍在那里。

优化4

除了优化3中的情况，放障碍的人一定不会将障碍放在最外圈。因为这样不如将障碍往棋盘内的方向移一格。

优化5

关于结束条件判断的优化：若兔子不存在一条路径可以走到边界，就宣布兔子被围住。

优化6

考虑改变搜索的顺序。兔子的策略可以优先选择离边界最近的方向走。

优化7

考虑改变搜索的顺序。放障碍的策略可以优先选择$(2,2),(n-1,2),(2,m-1),(n-1,m-1)$这些角上的格子，还有与兔子相邻的格子。

优化8

关于结束条件判断的优化：对于每一个格子，我们可以给它分配一个格挡的方向，当兔子进入时就令它下个回合无法走向那个方向。这里我们并不设置障碍物。注意这相当于削弱了放障碍的人，而削弱放障碍的人并不影响我们宣布兔子被围住。我们考虑这种规则下哪些格子是兔子可以逃脱的。首先边界上的格子是可以逃脱的。若一个格子相邻至少有两个可以逃脱的格子，那么它也是可以逃脱的。我们可以用bfs实现这个过程。

优化9

对于空棋盘，若兔子一开始就无法逃脱，那么兔子以后永远不会进入这个格子。

CF 794E

- 有n个数，每次可以拿开头或者结尾。
- Alice想要剩下的数最大，Bob想要最小。
- 问最后是哪个数。

Solution

- 假设我们二分了答案。Alice要拿1，Bob要拿0。
- 然后我们观察一下dp数组，跑一层之后每个主对角线是一样的。
- n is even and one of the two middle numbers is 1.
- n is odd, the middle digit is 1 and at least one of the digits beside the middle digit is 1 (unless n=1, for which first players wins when the only carrot is labelled 1)

CF 388C

- 有若干排石子，每排石子都有若干堆。
- Alice可以选一排，拿最左边的，Bob可以选一排，拿最右边的。
- 最大化自己的石子总数。

Solution

- 如果都是偶数的话，那么两人会各拿一半，因为Alice能保证自己的分>=左边的一半，Bob能保证自己>=右边的一半。
- 否则按顺序从大到小拿中间的。

AGC 010 F

- 你有一棵树，每个节点有若干个石头。
- Alice，Bob玩游戏，你一开始可以放一个棋子在某个节点，然后每次操作在棋子所在的节点移除一个石头，然后移向相邻的节点，谁不能动算输。
- 问每个位置是否为必胜态。
- n<=3000

Solution

- 当Au>Av的时候那么你能强行把棋子推到v节点。
- 如果v是必败态，那么u就是必胜态。
- 否则u一定是必败态。

AGC 026F

- 有n个盒子，每个盒子里面有ai的分数。
- 轮流移动，选择一个与上一步选择的盒子相邻的并且没被选的盒子，如果没有选择那么就任选一个。
- Alice和Bob都想要最大化自己的分数。

Solution

- 将它黑白染色，如果n是偶数，那么先手至少能拿到max(B,W)，后手至少能拿到min(B,W)。
- 否则先手还是至少能拿到B的分数，并且先手如果选了个B的格子，那么后手至少能拿到W。

Solution

- 所以我们写出暴力的式子，dp[l][r]表示l,r这段区间最多能拿多少。
- 我们要么直接那W-B，要么枚举一个B，然后dp下去。
- 整理式子，二分答案，等价于判是否可达。

PA 2009 Terminal

- 有n个石子，Alice和Bob轮流选，每次可以选一堆与0相邻的石子，最大化自己的分数。
- n<=1e6

Solution

- 如果都是递减，那么一定从大到小选。
- 否则将a<=b>=c换成a+c-b，然后两头如果a>=b，那么直接根据奇偶性分配。