

# 动态规划选讲

diamond\_duke

2020 年 1 月 2 日

# 「SHOI2017」组合数问题

给定  $n, p, k, r$ , 求:

$$\left( \sum_{i=0}^{\infty} \binom{nk}{ik+r} \right) \bmod p \quad (1)$$

$$n \leq 10^9, \quad r < k \leq 50, \quad 2 \leq p \leq 2^{30} - 1。$$

给定一棵  $n$  个点的树，每个点有个权值。从 0 号点开始走，每次走到相邻的点，任何时候都可以结束。

走的过程中有一个快乐值，初始为 0，每当走到一个没有走到过的节点时，会加上这个点的权值。当快乐值小于 0 的时候会变成 0，最大化结束时的快乐值。

$n \leq 1000$ 。

给定长度为  $n$  的序列，定义一个区间的权值为使得  $a_i = a_j$  的有序对  $(i, j)$  的个数，将其分为  $k$  个不交区间，最小化权值和。  
 $n \leq 10^5$ ,  $k \leq 20$ 。

给定  $N$  个贝壳，贝壳  $i$  的大小为  $s_i$ 。每次从序列一端取下一段连续的贝壳，并选择一种贝壳的大小  $s_0$ 。如果这一段贝壳中大小为  $s_0$  的贝壳有  $t$  只，那么魔法可以把这一小段贝壳变成  $s_0 t^2$  只柠檬。最大化删完时柠檬总数。

$N, s_i \leq 10^5$ 。

# 「雅礼集训 2017 Day5」 珠宝

有  $N$  个物品，每个物品有重量  $C_i$  和价值  $V_i$ ，每个物品可以买至多一个。对于每个  $i \in [1, K]$ ，求重量不超过  $i$  时可以得到的最大价值。  
 $N \leq 10^6$ ， $K \leq 5 \times 10^4$ ， $C_i \leq 300$ ， $V_i \leq 10^9$ 。

设  $f(i)$  表示把  $i$  看成字符串后最长上升子序列的长度，给定  $l, r, k$ ，求满足  $f(i) = k$  ( $i \in [l, r]$ ) 的  $i$  的个数。  
 $1 \leq l \leq r \leq 10^{18}$ ,  $1 \leq k \leq 10$ 。

# 「BJOI2017」 机动训练

给定  $n \times m$  的网格，每个格子上有一个字符。  
定义一条  $s$  到  $t$  的路径是合法的，当且仅当：

- 路径上相邻两个点在八联通意义下相邻；
- 不自交；
- 每一步移动都向着不远离  $t$  的方向移动（横坐标以及纵坐标均不远离）。

定义一条路径的地形为其经过的字符排成一行。定义一条路径的权值为与之同地形的路径个数之和（含自身），求所有路径的权值和。

$n, m \leq 30$ 。



# TopCoder SRM 735 Div. 1 Hard

给定一个长度为  $n$  的序列  $b_1, b_2, \dots, b_n$ ，在此基础上构造了一个矩阵  $A$ ，满足  $A_{i,j} = b_i + b_j$ 。求  $A$  权值和最大的子正方形。  
 $n \leq 10^5$ 。

# 「SNOI2017」 遗失的答案

称  $[N]$  的一个子集是好的，当且仅当他们的 GCD 为  $G$  且 LCM 为  $L$ 。  
 $Q$  次询问，每次给出  $x$ ，问有多少个好的子集包含  $x$ 。  
 $N, G, L \leq 10^8, Q \leq 10^5$ 。

# 「SHOI2016」 成绩比较

一共有  $n$  个人和  $m$  门课，每门课有一个得分范围。  
我们称一个人碾压另一个人，当且仅当其每门课的分  
数都不低于另一个人。  
给定其中某人每门课的排名（排名为  $r$  指有  $r - 1$  个人分数严格高于他），求使他碾压恰好  $k$  个人的分数分布个数。  
 $n, m \leq 100$ ，得分范围  $\leq 10^9$ 。

# Boolean Bridges

对于  $n$  个点的有向图，记  $f(i, j)$  表示  $i$  是否可以走到  $j$ 。对于每个  $(i, j)$ ，会给出一个限制条件，形如如下三者之一： $f(i, j) \wedge f(j, i) = 1$ 、 $f(i, j) \vee f(j, i) = 1$ 、 $f(i, j) \oplus f(j, i) = 1$ 。求满足条件要求的最小边数。  
 $n \leq 47$ 。

# 一道例题

给定长度为  $n$  的序列，你可以选出其中一个不降的子序列。定义其价值为：数字之和去掉一个数字都没有选的区域个数，求最大价值。  
 $n \leq 10^6$ 。

# 「ZJOI2016」 线段树

给定数列  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，随机进行  $q$  次操作，每次随机选择区间  $[l, r]$ ，将它们改为这个区间的最大值，求最后每个数的期望。  
 $n, q \leq 400$ ， $a_i$  在  $[1, 10^9]$  中等概率随机生成。

# 「THUSC 2016」成绩单

给定序列，每次可以删去一段区间，若其中最大值为  $M$  而最小值为  $m$ ，  
则代价为  $a + b(M - m)^2$ ，求删完的最小代价。  
 $n \leq 50$ ， $a \leq 1500$ ， $b \leq 10$ ， $w_i \leq 1000$ 。

# 「ZJOI2017」仙人掌

给定一张  $n$  个点  $m$  条边的，无自环无重边的无向连通图，求加边后得到一个仙人掌的方案数。

有一堆测试点， $\sum n \leq 5 \times 10^5$ ， $\sum m \leq 10^6$ 。



给定序列  $A_1, A_2, \dots, A_N$ ，你要求出序列  $B_1, B_2, \dots, B_N$ ，满足：

- $B_i \leq A_i$ ；
- $B$  单调不降或单调不增；
- $B$  中只有不超过  $K$  个不同的取值。

最大化  $\sum_{i=1}^N B_i$ 。

$\sum N \leq 10^5$ ， $K \leq 50$ ，高度  $\leq 10^5$ 。

一个序列初始为空，你依次按照  $1 \sim n$  的顺序插入在头或尾。然后再每次从头或尾删除一个数字，直到删完。求所有得到的删数字的顺序中，第  $k$  个是 1 的方案数。

$k \leq n \leq 2000$ 。

求满足下列条件的序列序列  $(A_0, A_1, \dots, A_N)$  的个数：

- $A_i$  是长度为  $i$ ，由  $[1, K]$  组成的序列。
- $A_{i-1}$  是  $A_i$  的子序列。
- $A_i$  字典序比  $A_{i-1}$  大。

$N, K \leq 300$ 。

# Thank You!