Problem A

杜振宇
Peiking University

题意

- 有一个无限循环的序列$x_1, x_2, \ldots$，循环节为n 。
- 对这个序列进行1次操作，会使得操作后的序列$x_i' = x_i + x_{i+1}$,有q次询问，每次给定$n\ ,m, k, i, v$，求当序列的循环节为n，初始只有$x_i = v$，其他$x_j = 0$（$i, j \le n,$），操作k以后，$x_m (m \le n)$的值。

- 对每次对不同的质数p取模且保证n次单位根存在。
- $k_i \le 2 * 10^9, p_i \le 2\ * 10^9, \sum n_i \le 10^6$

$n=2$

- 每次要求的是所有奇数项或者所有偶数项的组合数之和，答案为2^{k-1}。

n互不相同且$k \le 10^6$

- 生成函数走一波，发现是要求所有i模n为定值的C(k,i)之和。
- 暴力求和，复杂度由调和级数保证

令w表示n次单位根，构造生成函数：

$F_i(w) = \sum_{i=1}^{n} x_i w^{n-i}$

那么显然$F_i(w) = (1+w)F_{i-1}(w) \Rightarrow F_k(w) = (1+w)^k F_0(w)$。

一般情况

令w表示n次单位根

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{k}{i+jn} &= \sum_{v=0}^{k}\binom{k}{v}\frac{\sum_{j=0}^{n-1}(w^{v-i})^j}{n}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}w^{-ij}\sum_{v=0}^{k}\binom{k}{v}w^{vj}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}w^{-ij}(1+w^j)^k\end{aligned}$$

暴力枚举求和就行了，复杂度$O(n\log k)$

部分分&得分估计

- $n = 2$帮助选手发现求相邻组合数的性质，只需要写一个快速幂。
- n, k较小的情况，如果选手想到用单位根的性质来推导生成函数，并知道调和级数的性质，就能做出来。
- 满分的情况，需要选手比较熟悉单位根反演能够想到用单位根反演来化简式子。

- 总体来说，在单位根反演日益noip的今天，这道题很简单，应该很多选手能得到前两个部分分。
- 集训队选手应该有一半以上能满分。
- 不知道这道题能不能再加强一点。。

总结

- 这是一道较为简单的计数问题，需要选手掌握生成函数及单位根反演。
- 代码量比较小，细节少，坑点不多。
- 定位大概在D2T1或者D1T2（其实我感觉是D1T1）。
- 感觉适合区域赛这种对部分分没要求的，因为实在没啥好给的部分分。。。