QAQ

记思杰爷爷教我重新做人一事

by zhongyuwei

前言

- ~~微积分怎么还需要学啊，直接把求导公式背完不就完了吗~~

- James Stewart的Calculus
- 有些定义可能和普高教材冲突

目录

- 基本初等函数 & 一些概念
- 极限
- 无穷小量与一个重要极限
- 求导
- 积分
- 导数的应用
- 杂题

基本初等函数 & 一些概念

相信大家完全没有问题

基本初等函数

- 一次函数：$y = mx + b$
- 多项式：$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$
- 幂函数：$y = x^a$
- 三角函数
- 指数函数：$y = a^x$
- 对数函数：$y = \log_a x$
- 有理函数（分式）：$\frac{P(x)}{Q(x)}$，其中$P(x), Q(x)$是多项式
- 代数函数：对多项式进行代数运算（加、减、乘、除、开根）得到的函数

基本初等函数

- 平移
- 对称
- stretch and shrink
- 复合：$(f\circ g)(x)=f(g(x))$
- 作图：~~使用 Geogebra 即可~~
- 反函数：$f\left(f^{-1}(x)\right)=x$

指数函数

- 表达式a^b在b不为有理数时的意义（比如$2^{\sqrt{2}}$）？

指数函数

- 表达式a^b在b不为有理数时的意义（比如$2^{\sqrt{3}}$）？

- 令$A=\{\,a^x \mid x \in Q, x < b\,\}, B=\{\,a^x \mid x \in Q, x > b\,\}$
- 可以证明，存在唯一的一个实数q，满足q大于A中的所有数且q小于B中的所有数
- 于是我们规定$a^b=q$

- 参考Calculus Unlimited的第10章（第134页）

自然常数e

- 是一个确定的实数，近似值为2.71828182845……
- 是自然对数函数$\ln x$的底

邻域

- $U(a,\delta) = (a-\delta, a+\delta)$
- 去心邻域：$\dot{U}(a,\delta) = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$
- 有的地方可能会写为U°或者 $\mathring{U}$
- 左邻域：$(a-\delta, a)$
- 右邻域：$(a, a+\delta)$

三角不等式

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$
$$|c-a| \geq |c| - |a|$$

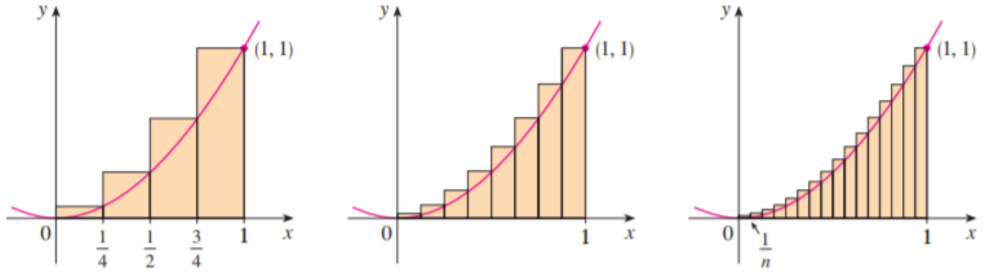
极限

~~没错就是卓说要压榨我们的那玩意~~

引入

- 为什么要研究无限？因为它尽管看似无理，但却“有意义”
- 举例：
  - 割圆法求圆的面积，当多边形的边数趋近于正无穷
  - 求一段函数曲线下方部分的面积
  - 瞬时速度
  - 求函数切线
  - ……
- “无限”存在吗？并不。但是，就像刚才的$2^{\sqrt{3}}$一样，我们可以强行规定一个点，让一个变化趋势在数轴上连续

引入：一些图片



IGURE 4

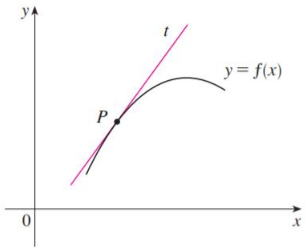


FIGURE 5
The tangent line at P

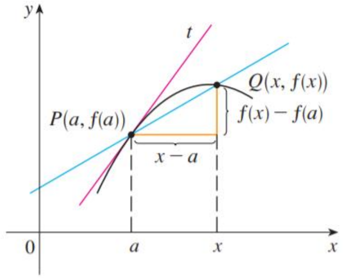


FIGURE 6
The secant line PQ

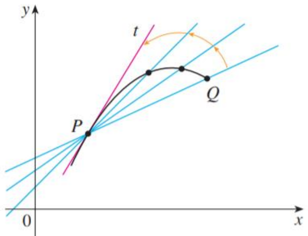
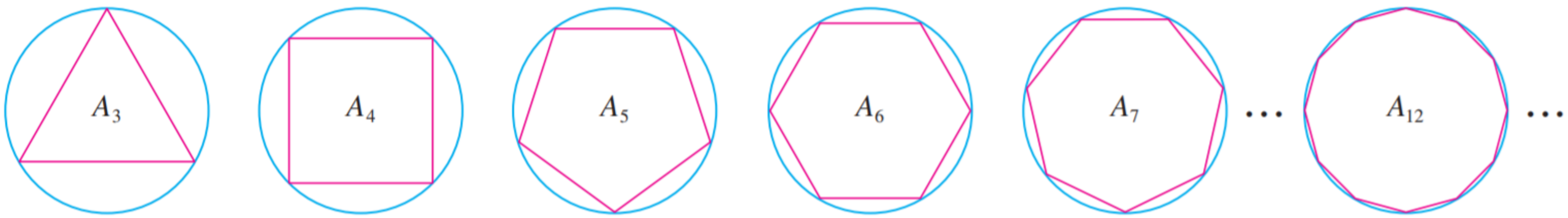


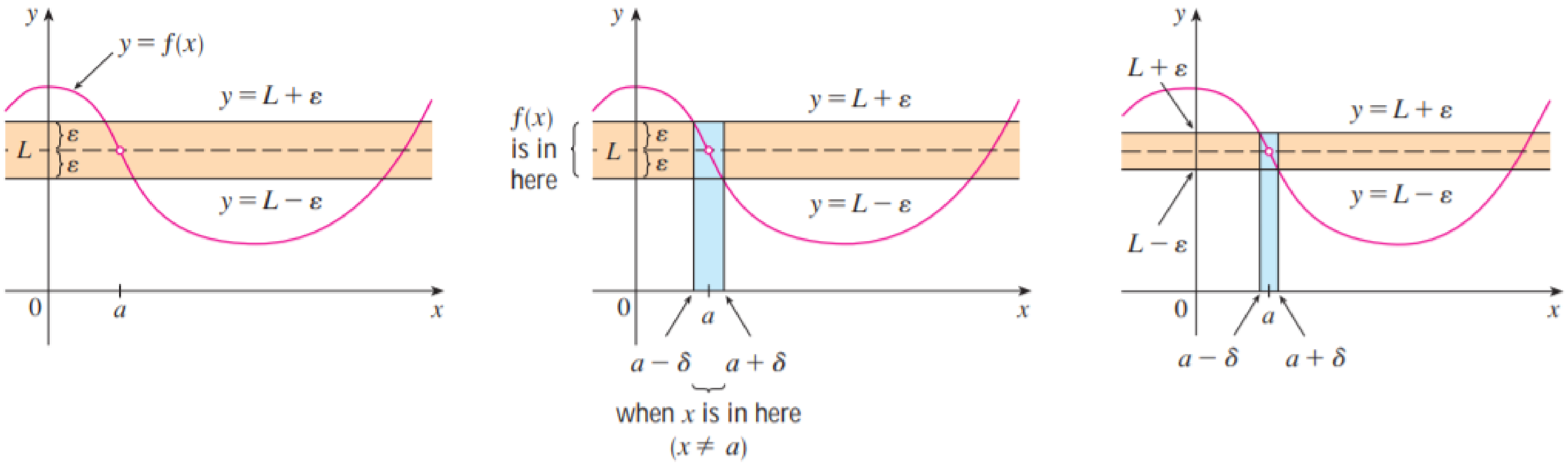
FIGURE 7
Secant lines approaching the tangent line

FIGURE 2



极限

- 极限的定义：设$f(x)$为定义在a的某**去心**邻域上的一个函数，则记$\lim_{x\to a} f(x) = L$若：对于任意$\varepsilon > 0$，都能够找到一个$\delta > 0$使得$0 < |x - a| < \delta \Leftrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$



极限

- $0 < |x - a| < \delta$也就意味着x可以在a的两侧;
- $\lim_{x \to a} f(x)$与$f(a)$无关，比如下面这张图:

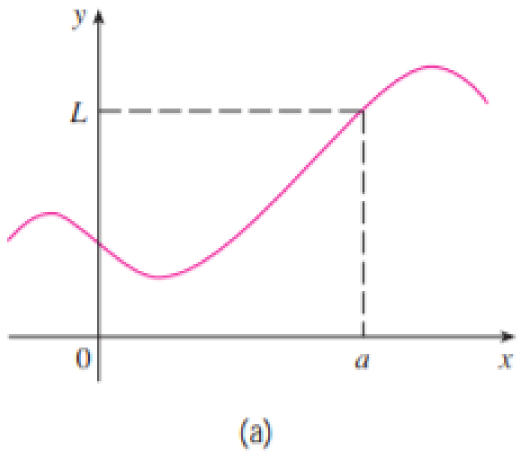


FIGURE 2 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ in all three cases

极限

- 极限有可能不存在，比如$\lim_{x\to 0}\sin\frac{\pi}{x}$

- 但是，如果极限存在，那么极限唯一

半极限

- 与极限定义类似，只是把邻域改成左邻域/右邻域
- 左极限：记$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$若对于任意$\varepsilon > 0$存在$\delta > 0$使得$0 < a - x < \delta \Leftrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$
- 右极限：记$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$若对于任意$\varepsilon > 0$存在$\delta > 0$使得$0 < x - a < \delta \Leftrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

无穷极限

- 可能是这样翻译的吧
- 反正英文是Infinite Limits

- 引入：试求出$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$

无穷极限

- 极限不存在，但是我们知道当$x \to 0$的时候$\frac{1}{x^2}$会不断变大
- 我们用符号$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$来表示这种情况
- 类似的符号还有$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$等等

- 注意：这组记号既不代表极限存在，也不代表$\infty, -\infty$是一个数！

无穷极限

- 试给无穷极限下一个$\varepsilon-\delta$的定义

无穷极限

- 记$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$若对于任意的$M > 0$存在一个$\delta > 0$满足$0 < |x - a| < \delta \Leftrightarrow f(x) > M$

- 我并不清楚这里为什么要求$M > 0$，如果有人会的话希望能苟富贵勿相忘教我一下 /kel

在无穷处的极限

- $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$或者$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$
- 分别要求$f(x)$是定义在(a, ∞)和$(-\infty, a)$上的函数

- $\varepsilon - \delta$的定义非常类似
  - 对于任意的ε，存在$M > 0$满足$x > M \Leftrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$，则称$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$

极限的四则运算

- 设c为一个常数，$\lim_{x\to a} f(x), \lim_{x\to a} g(x)$存在，则有：

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}[cf(x)] = c\lim_{x\to a} f(x)$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}, \text{if} \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$

证明们

- 从极限的定义出发去证明
- 以第一个为例:

$$|f(x)+g(x)-\varepsilon| = \left|\left(f(x)-\frac{\varepsilon}{2}\right)+\left(g(x)-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right| \leq \left|f(x)-\frac{\varepsilon}{2}\right|+\left|g(x)-\frac{\varepsilon}{2}\right|$$

- 练习:
  1. 证明$\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)$
  2. 证明$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, if $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

证明们

- 练习1. 答案:
  - 令$\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$以及$\lim\limits_{x\to a} g(x)=M$
  - $|f(x)g(x)-LM|=|g(x)(f(x)-L)+L(g(x)-M)|\le|g(x)||f(x)-L|+|L||g(x)-M|$
  - （上一步本质上是想办法让式子中出现$|f(x)-L|$和$|g(x)-M|$）
  - 存在$\delta_1>0$使得$0<|x-a|<\delta_1\Leftrightarrow|g(x)-M|<\frac{\varepsilon}{2(|L|+1)}$（取$|L|+1$而不是$|L|$是因为有可能$|L|=0$）
  - 存在$\delta_2>0$使得$0<|x-a|<\delta_2\Leftrightarrow|g(x)-M|<1$，此时$|g(x)|<1+|M|$
  - 存在$\delta_3>0$使得$0<|x-a|<\delta_3\Leftrightarrow|f(x)-L|<\frac{\varepsilon}{2(1+|M|)}$
  - $0<|x-a|<\min(\delta_1,\delta_2,\delta_3)\Leftrightarrow|g(x)||f(x)-L|+|L||g(x)-M|<\frac{\varepsilon}{2(1+|M|)}(1+|M|)+\frac{\varepsilon}{2(1+|L|)}|L|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

证明们

- 练习2. 答案
  - 令$\lim_{x\to a} f(x) = L$以及$\lim_{x\to a} g(x) = M$
  - 尝试证明$\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$:
    - $\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| = \left|\frac{M-g(x)}{Mg(x)}\right|$
    - 存在$\delta_1 > 0$使得$0 < |x-a| < \delta_1 \Leftrightarrow |g(x) - M| < \frac{|M|}{2}$，此时$\frac{|M|}{2} + |g(x)| > |M - g(x)| + |g(x)| \geq |M|$，即$|g(x)| > \frac{|M|}{2}$
    - 存在$\delta_2 > 0$使得$0 < |x-a| < \delta_2 \Leftrightarrow |g(x) - M| < \frac{|M|^2}{2}\varepsilon$
    - $0 < |x-a| < \min(\delta_1, \delta_2) \Leftrightarrow \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| = \left|\frac{M-g(x)}{Mg(x)}\right| < \frac{\frac{M^2}{2}\varepsilon}{\frac{M^2}{2}} = \varepsilon$

几个结论

1. $\lim_{x \to a} c = c$
2. $\lim_{x \to a} x = a$
3. 我证不来：$\lim_{x \to a} x^n = a^n$以及$\lim_{\mathrm{x} \to a} x^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}$，其中$n$为整数
4. 我证不来：对于指数函数，对数函数，幂函数，三角函数，如果$f(x)$在a处有定义，那么$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

（应该）可以直接用定义推出来

- 极限存在当且仅当左右极限存在且相等

- 应用:
  - 证明: $\lim_{x \to 0} |x| = 0$
  - 证明: $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$不存在
  - 分段函数相关计算

一个定理

- $f(x), g(x)$为定义在某$U^{\circ}(a)$上的函数，且对于所有$x \neq a$都有$f(x) = g(x)$，那么$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$

一个定理-练习

1. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$
2. $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}{t}$
3. $\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{1}{t\sqrt{1+t}}-\frac{1}{t}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to -6}\frac{2x+12}{|x+6|}$
5. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2-|x|}{2+x}$

一个定理-练习答案

1. 2
2. 1 （分子有理化）
3. $-\frac{1}{2}$ （分子有理化）
4. 不存在 （分别求左右极限）
5. 1 （令$\delta < 2$）

另一个定理

- $f(x), g(x)$为定义在某$U^{\circ}(a)$上的函数，且对于所有$x \neq a$都有$f(x) \geq g(x)$，那么$\lim_{x \to a} f(x) \geq \lim_{x \to a} g(x)$
- 把≥换成>也是成立的

- 练习：证明上面的命题
- 提示：考虑如何证明$\forall x \neq a, f(x) > 0 \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) > 0$

另一个定理

- $f(x), g(x)$为定义在某$U^{\circ}(a)$上的函数，且对于所有$x \neq a$都有$f(x) \geq g(x)$，那么$\lim\limits_{x \to a} f(x) \geq \lim\limits_{x \to a} g(x)$
- 证明:
  - 考虑反证法
  - 设$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$，$\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$，假设$M > L$
  - $\lim\limits_{x \to a}[f(x) - g(x)] = L - M$
  - 则存在$\delta > 0$满足$0 < |x - a| < \delta \Leftrightarrow \left|\left(f(x) - g(x)\right) - (L - M)\right| < M - L$
  - 因此 $f(x) - g(x) - (L - M) \leq \left|\left(f(x) - g(x)\right) - (L - M)\right| < M - L$
  - 也就是 $f(x) - g(x) < 0$，与条件矛盾

夹逼定理

- 若$f(x), g(x), h(x)$为定义在某$U^{\circ}(a)$上的函数，$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$且已知$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$，那么$\lim_{\mathrm{x} \to a} g(x) = L$

夹逼定理

- 证明:
  - 不可以用上一个定理证明，因为上一个定理要求$f(x), g(x)$在a处的极限存在，但是这个定理只要求$f(x), h(x)$的极限存在，我们可以**由此推出$g(x)$的极限存在**。可以参考StackExchange上的这个回答
  - 对于任意的ε:
    - 存在δ_1使得$0 < |x - a| < \delta_1 \Leftrightarrow -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$
    - 存在δ_2使得$0 < |x - a| < \delta_2 \Leftrightarrow -\varepsilon < h(x) - L < \varepsilon$
    - 此时有$-\varepsilon < f(x) - L \leq g(x) - L \leq h(x) - L < \varepsilon$，也就是$-\varepsilon < g(x) - L < \varepsilon$
  - 所以$\lim_{x \to a} g(x) = L$

夹逼定理-练习

证明:

1. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\right) = 1$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i+n^2}} = 1$

夹逼定理-练习答案

1. $-1 \leq \sin x \leq 1$
2. $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$
3. $\frac{n}{\sqrt{1+n^2}} \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i+n^2}} \leq \frac{n}{\sqrt{n+n^2}}$

连续性

- 如果$\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$，则称$f(x)$在$a$处**连续**
- 左连续：$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$
- 右连续：$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$
- 如果对于一个区间中的每个a，都有$f(x)$在a处连续（如果a是端点且$f(x)$在另一边没有定义，就只要求左/右连续），那么就称$f(x)$**在这个区间上连续**

- 从图像上看，连续函数的图像可以一笔画完

定理们

- 若f, g是在a处连续的函数，c是一个常量，那么以下函数都是连续函数：
  - $f+g$
  - $f-g$
  - cf
  - fg
  - $\frac{f}{g}(\text{if } g(a) \neq 0)$
- 证明可以直接用极限的四则运算法则

定理们

- 若$f(x)$在b处连续，并且$\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$，那么$\lim\limits_{x\to a} f\big(g(x)\big)=f\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right)$
- 也就是说lim 可以从外面挪到一个连续函数的里面去
- 推论：若$g(x)$在a处连续且$f(x)$在$g(a)$处连续，那么$f\circ g$在a处连续

- 练习：证明第一个命题

定理们

- 令$b = \lim_{x \to a} g(x)$
- 对于任意给定的ε：
  - 存在$\delta_1 > 0$使得$0 < |x - b| < \delta_1 \Leftrightarrow |f(x) - f(b)| < \varepsilon$
  - 存在$\delta_2 > 0$使得$0 < |x - a| < \delta_2 \Leftrightarrow |g(x) - b| < \delta_1$
  - 于是$0 < |x - a| < \delta_2 \Leftrightarrow \left|f\big(g(x)\big) - f(b)\right| < \varepsilon$
- 证毕

介值定理

- 如果f在区间$[a,b]$上连续，$f(a) \neq f(b)$，N为$f(a),f(b)$之间的任意一个数（不含$f(a),f(b)$），则存在$c \in (a,b)$使得$f(c) = N$

- 我证不来 /kel

又一个定理

- 如果定义在区间(a, b)上的函数$f(x)$是连续函数，那么$f^{-1}(x)$也是连续函数

- 证明：用介值定理说明$f(x)$在(a, b)上严格单调（这是反函数存在的条件）

结论

- 以下函数在其定义域内都是连续函数：
  - 幂函数
  - 指数函数，对数函数
  - 三角函数，反三角函数

- 证明：请使用~~谷歌~~百度优先搜索 /xyx

结论

- $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$
- $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^r}=0$，对于任意的$r>0$
- $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$
- $\lim_{x\to\infty}\tan^{-1}x\ =\frac{\pi}{2}$，以及$\lim_{x\to-\infty}\tan^{-1}x=-\frac{\pi}{2}$
- ……

- ~~推导留作练习~~

练习

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-x)$
3. $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{3-x}$
5. $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t}+t^2}{2t-t^2}$
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{3x}-e^{-3x}}{e^{3x}+e^{-3x}}$
7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-e^x}{1+2e^x}$
8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+cx}-1}{x}$
9. 已知$|f(x)| \le x^2$恒成立，求证
    1. $f(0)=0$
    2. $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=0$

练习答案

1. $\frac{3}{5}$ (上下同时除以x^2)
2. ∞ (相当于$x(x-1)$)
3. 0
4. $-\infty$
5. -1
6. 1
7. $-\frac{1}{2}$
8. $\frac{c}{3}$
9. 使用夹逼定理

题外话-自然常数e

- 复利问题:
  - 年利率为1
  - 一年发一次利息：$(1+1)^1$
  - 一年发两次利息：$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$
  - ……
  - 一年发n次利息：$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
- 定义式：$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
- 年利率为x时:
  - $\exp(x)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}x}=e^x$

无穷小量与一个重要极限

something f**king interesting ☺

重要极限： $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

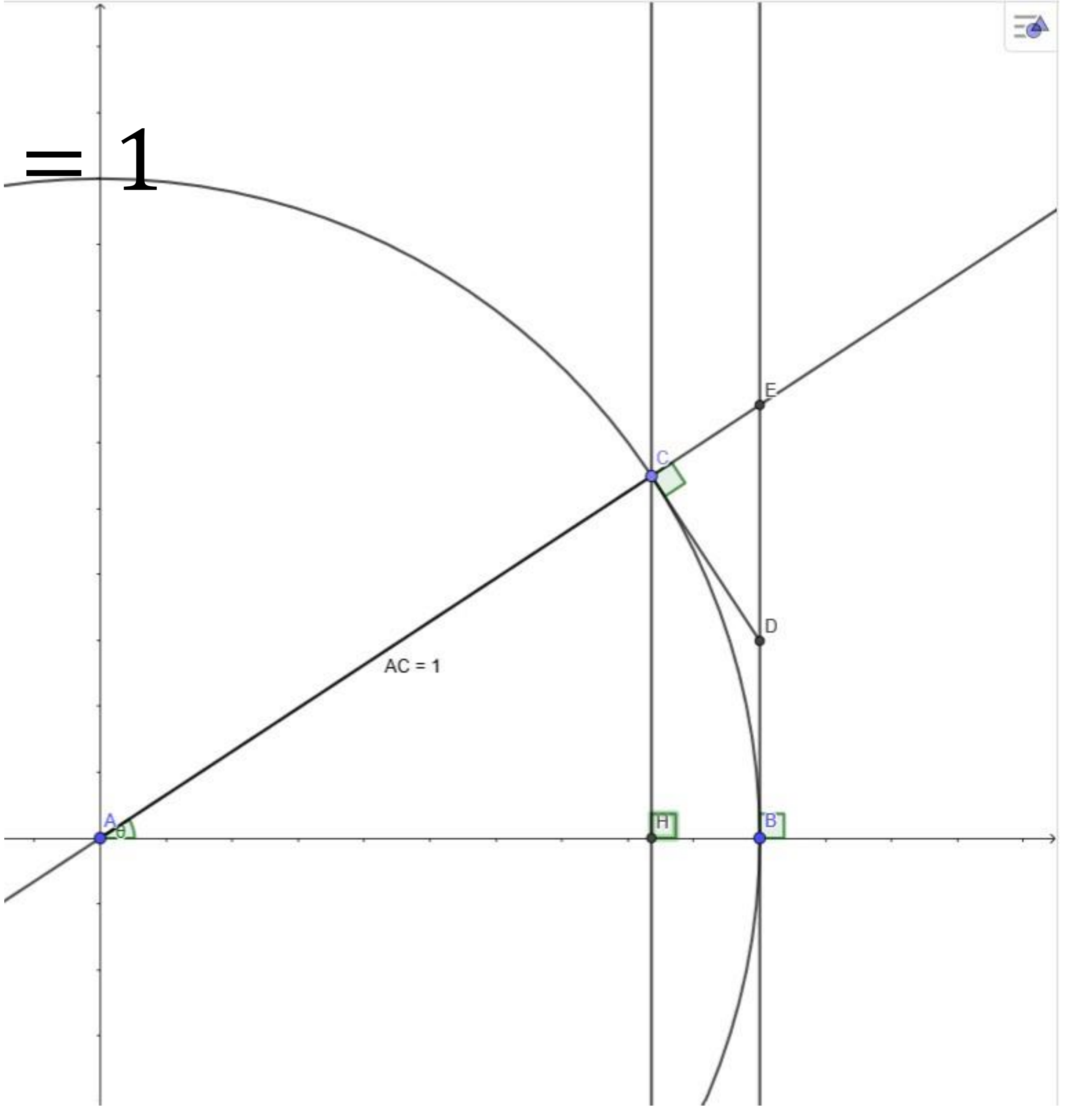
1. $\cos x<\frac{\sin x}{x}$

如图，$\odot A$ 是单位圆，AC 为一条过 A 的射线，它与 x 轴正方向的夹角为 θ。则：

- $\theta=\overset{\frown}{BC}$（由弧度制的定义得）
- $\sin\theta=CH$
- $\tan\theta=EB$

于是$\theta=\overset{\frown}{BC}<CD+DB<ED+DB=EB=\tan\theta$

$\therefore\theta<\tan\theta\Rightarrow\theta<\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\Rightarrow\cos\theta<\frac{\sin\theta}{\theta}$

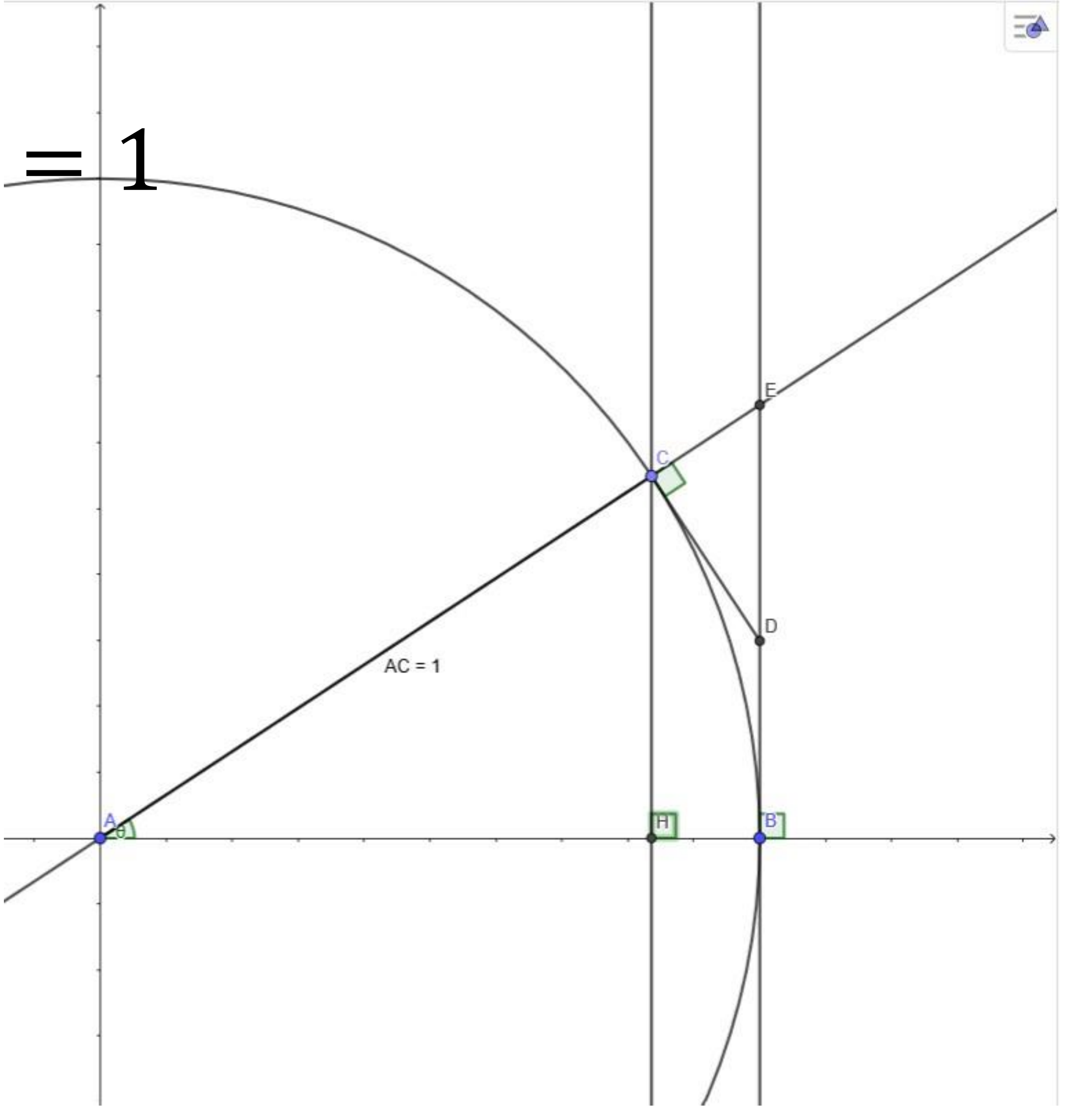


重要极限： $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

2. $\frac{\sin x}{x}<1$

由图可得：

$$\sin\theta = CH < BC < \widehat{BC} = \theta$$
$$\therefore \sin\theta < \theta$$
$$\Rightarrow \frac{\sin\theta}{\theta} < 1$$



重要极限： $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

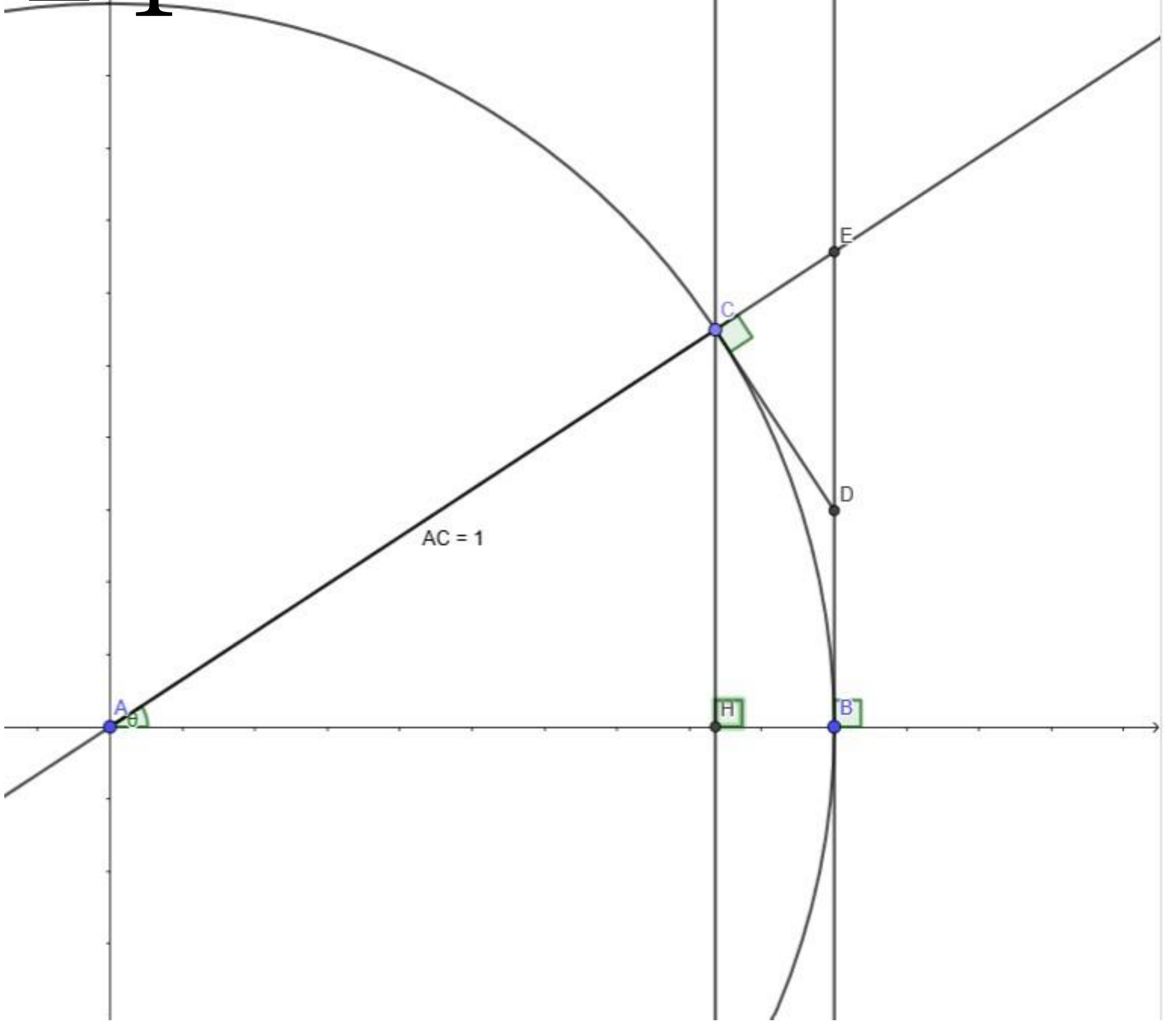
3. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

由夹逼定理可证

$$\cos\theta<\frac{\sin\theta}{\theta}<1$$

$$\lim_{\theta\to 0}\cos\theta=1$$

$$\lim_{\theta\to 0}1=1$$



推论

- 在$x \to 0$的过程中：
  - $x \sim \sin x$
  - $x \sim \tan x$（考虑$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$）
  - $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$

- 证明：$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$

推论

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}\\
=&2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\\
=&2\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(\cos x+1)}\\
=&2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(\cos x+1)}\\
=&2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\\
=&2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\\
=&1
\end{aligned}
$$

无穷小量-定义

- 以 0 为极限的变量
- 如$\lim_{x \to 0} \sin x$, $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}$

- 注：
  - 无穷小量是对于自变量的**某一特定变化过程**而言的
  - 无穷小量不是一个“很小的常量”，但常数 0 例外（$\lim 0 = 0$）

计算性质

- **有限个**无穷小量的和/差也是无穷小量
- 有限个无穷小量的乘积也是无穷小量
- 无穷小量与有界量的乘积也是无穷小量
- 无穷小量除去极限不为0的变量仍然是无穷小量

- 1，2，4可以直接用极限的四则运算法则推导
- 练习：证明第三条

计算性质-证明

- 设$\lim_{x\to a} f(x) = 0$，$|g(x)| \le M$为一个有界的变量
- 那么对于任意的$\varepsilon > 0$，存在δ满足$0 < |x - a| < \delta \Leftrightarrow |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$
- 也就意味着$|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon$

无穷小量的商

- 两个无穷小量的和、差、积都是无穷小量，但是它们的商却不一定

- 设α, β为自变量某一变化过程中两个无穷小量
- 若$\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$，则称$\alpha$为$\beta$的高阶无穷小量（或$\beta$为$\alpha$的低阶无穷小量）
- 若$\lim \frac{\alpha}{\beta} = A$（$A$为一个常数），则称$\alpha$为$\beta$的同阶无穷小量；若$A = 1$，则称$\alpha$为$\beta$的等价无穷小量，记为$\alpha \sim \beta$

替换定理

- 求两个无穷小量之**比**的极限的时候，可以用它们的等价无穷小量之比来代替
- 设$\alpha, \beta, \alpha', \beta'$为关于自变量某一变化趋势的无穷小量且$\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$，且$\lim \frac{\alpha'}{\beta'}$存在，则$\lim \frac{\alpha}{\beta}$存在且$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \left(\frac{\alpha' \beta' \alpha}{\beta' \beta \alpha'} \right) = \lim \left(\frac{\alpha'}{\beta'} \right) \lim \left(\frac{\beta'}{\beta} \right) \lim \left(\frac{\alpha}{\alpha'} \right) = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}$
- 替换定理只能用在两个无穷小量相除的情况，对于**两个无穷小量相加减的情况不能用替换定理**，如$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \frac{1}{2}$

练习

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$

练习

1. $\frac{3}{2}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{u}{\sin u} = \lim\limits_{u \to 0} \frac{u}{\sin u} = 1$

求导

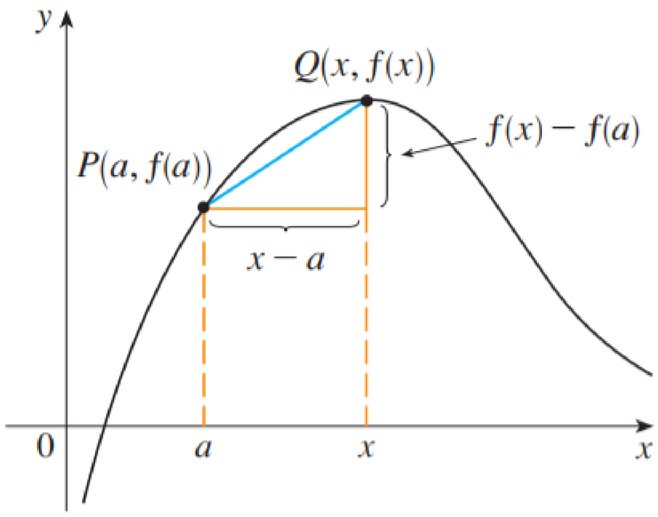
我只会求倒数哦^_^

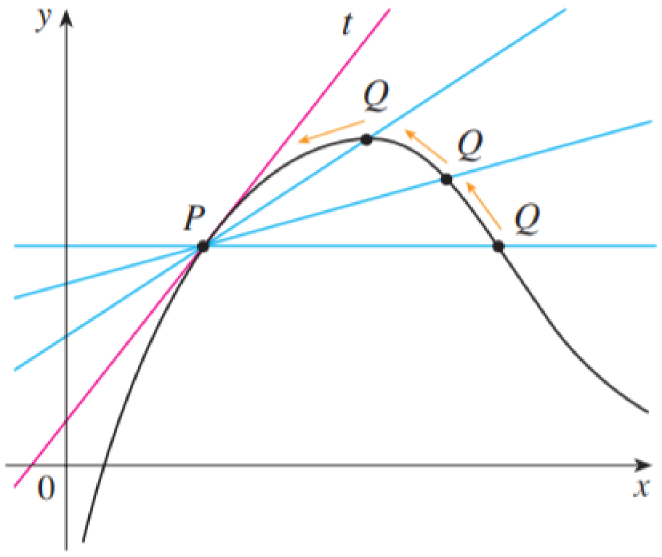
切线问题

- 求$y = x^2 - 1$在$(1,0)$这个位置的切线的斜率
- 相信大家都会解一元二次方程

- 但方程并不是一个很好的描述切线的方法，并且有时候很难解，比如说：
  - 求$y = x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 3$在$(0,-3)$这个位置的切线的斜率？
  - 求$y = \tan x$在$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$处的斜率？

切线问题





- 考虑用近似值逼近！
- 右图为让Q逼近P
- 一个很自然的想法：$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$
- 当然，也可以写作：$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
- 你可以认为我们重新定义了“切线”，但是这种定义和原来通过几何的定义是等价的，因为你可以考虑在$x > a$所得到的值和$x < a$所得到的值之间有唯一一个实数

瞬时速度问题

- 高一物理教我们用包含t_0的一个很短的时间区间的平均速度来估算t_0的瞬时速度
- 这个和前面的斜率问题是等价的（你可以想象区间的左端点和右端点逐渐逼近t_0）

导数

- 因为很常用，所以这种极限有一个特殊的名字：导数
- 定义**函数$\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{a}$处的导数**为$f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
- 也可以写作$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

- 导数可以表示切线的斜率、瞬时速度、瞬时的变化率……

- 小练习：利用你的极限知识，求$f'(1)$，其中$f(x)=x^2-1$

导数

- 注意到导数$f'(a)$可以看作一个关于a的函数
- 定义**函数$\boldsymbol{f}$的导数**为$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
- 求一个函数的导数的过程叫做**求导**

导数的记号

- 导数：$f'(x)=y'=\frac{dy}{dx}=\frac{df}{dx}=\frac{d}{dx}f(x)=Df(x)=D_xf(x)$
- 有个很有用的记号：$\frac{dy}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$
- $f(x)$在a处的导数 $f'(a)=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}=\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}$

  (代码长这样：

```
f'(a)=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}=\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}
```

可导

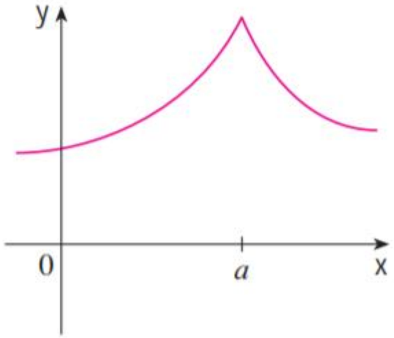
- 如果函数f在a处的导数存在，则称$\boldsymbol{f}$**在**$\boldsymbol{a}$**处可导**
- 称$\boldsymbol{f}$**在开区间**$\boldsymbol{I}$**上可导**，当且仅当f在I中的每一个点处都可导

一个定理

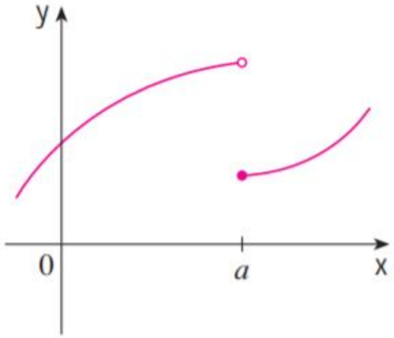
- 如果f在a处可导，那么f在a处连续
- 注意逆命题不一定成立，反例是$f(x) = |x|$，$a = 0$

- 证明：
  - $\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) - f(a) = 0$
  - 利用极限的乘法法则算$\lim_{x\to a}(x - a) \cdot f'(a)$

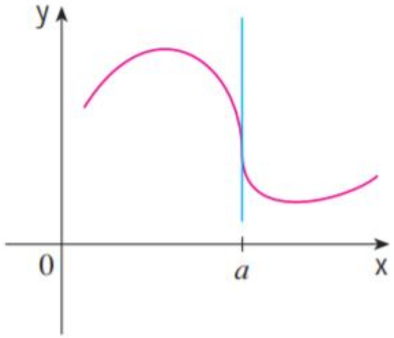
How Can a Function Fail to Be Differentiable



(a) A corner



(b) A discontinuity



(c) A vertical tangent

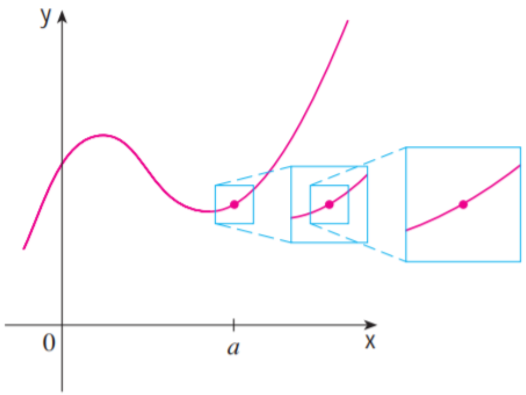


FIGURE 8
f is differentiable at a.

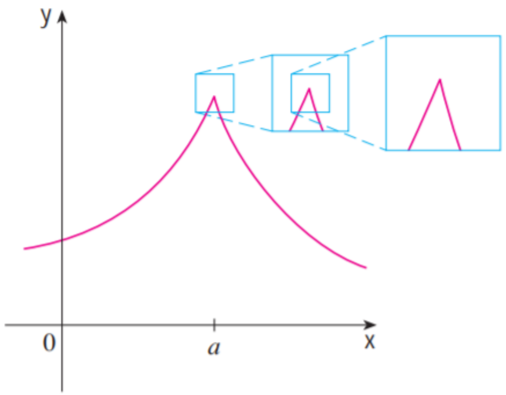


FIGURE 9
f is not differentiable at a.

高阶导数 Higher Derivative

- 二阶导：$(f')' = f''$，也可以写作$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$或者$y''$
- 类似的，三阶导是$f''', y''', \frac{d^3y}{dx^3}$
- n阶导是$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$

导数的运算

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c \cdot \frac{d}{dx}f(x)$$
$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x)$$
$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

可以从定义和极限的运算法则出发进行证明

导数的运算

$$\Delta(uv) = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot v + \Delta u \cdot \Delta v$$

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\frac{d}{dx}(uv) = \lim_{\Delta x \to 0} u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + 0 \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$$

导数的运算

$$\Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v}{(v + \Delta v)v}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{(v + \Delta v)v} = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\dfrac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\dfrac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

多项式求导

- 已知$f(x) = x^n (n \in \mathbb{Z})$，求证：$f'(x) = nx^{n-1}$

多项式求导

证明1：

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}$$

证明2：

$$(x+h)^n - x^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i h^{n-i} - x^n = nx^{n-1}h + \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n}{i} x^i h^{n-i}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{nx^{n-1}h + \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n}{i} x^i h^{n-i}}{h} = nx^{n-1} + \lim_{h \to 0} \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n}{i} x^i h^{n-i-1} = nx^{n-1} + 0$$

$$\therefore f'(x) = nx^{n-1}$$

指数函数求导

$$f(x) = a^x$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x f'(0)$$

可以证明当$a = e$时$f'(0) = 1$（参考这个视频）

所以$(e^x)' = e^x$

指数函数求导

- 换元，令$y = e^h - 1$，那么$\ln(y+1) = h$
- 发现当$h \to 0$的时候$y \to 0$
- 那么$\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\ln(y+1)} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{\ln\left((y+1)^{\frac{1}{y}}\right)} = \frac{1}{\ln(\lim\limits_{y\to 0}(y+1)^{\frac{1}{y}})} = \frac{1}{\ln e} = 1$

三角函数求导

1. 复习： $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

2. 求证： $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

三角函数求导

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\theta-1}{\theta}\\
=&\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\theta-1}{\theta}\cdot\frac{\cos\theta+1}{\cos\theta+1}\\
=&\lim_{\theta\to 0}\frac{-\sin^2\theta}{\theta(\cos\theta+1)}\\
=&-\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\cos\theta+1}\\
=&-1\cdot\frac{0}{1+1}=0
\end{aligned}
$$

三角函数求导

- ~~背就完了~~
- 可以发现，所有的co-函数的导数都带负号
- 练习：证明$\sin x$, $\cos x$, $\tan x$的求导公式（其它的可以看这里）

DERIVATIVES OF TRIGONOMETRIC FUNCTIONS

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \qquad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

三角函数求导

$$
\begin{aligned}
&(\sin x)' \\
=&\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \\
=&\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\sin h\cos x-\sin x}{h} \\
=&\sin x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} \\
=&\cos x
\end{aligned}
$$

三角函数求导

$$
\begin{aligned}
&(\cos x)' \\
=&\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} \\
=&\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h} \\
=&\cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}-\sin x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} \\
=&-\sin x
\end{aligned}
$$

三角函数求导

$$
\begin{aligned}
&(\tan x)' \\
=&(\frac{\sin x}{\cos x})' \\
=&\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} \\
=&\sec^2 x
\end{aligned}
$$

链式法则

- 求导：$f\big(g(x)\big)$
- 一个十分合理的想法是$f(u)$关于u的变化率× u关于x的变化率就是$f(u)$关于x的变化率，即$\Big[f\big(g(x)\big)\Big]' = f'\big(g(x)\big)g'(x)$
- 这样写会更加直观一些：$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$（尽管这并没有考虑到$\Delta u = 0$的情况）

链式法则

- 如果g在x处可导且f在$g(x)$处可导，则$F = f \circ g$在x处可导且$F'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$
- （Leibniz的记号）如果$y = f(u)$和$u = g(x)$都可导，那么$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$

- 完整的证明又长又烦所以略了~~（其实是因为我不会）~~
- 可以参考 James Stewart Calculus 3.4 的最后一段 HOW TO PROVE THE CHAIN RULE

链式法则的应用

- 求证：$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$

隐函数求导

例题：$x^2 + y^2 = 25$，求y'

两边同时求导

$$2x + 2y \cdot y' = 0$$

$$y' = \frac{-2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

你可能会觉得这个结果看起来很奇葩，不过你可以把y'看作从(x, y)到切线斜率的一个映射

隐函数求导

例题：$y=\sin^{-1}x$，求y'

$$\sin y = x$$

两边同时求导，得

$$\cos y \cdot y' = 1$$

$$y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\sin^{-1}x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

反三角函数求导公式

- 推导方式都是一样的，可以参考我的这篇博客

DERIVATIVES OF INVERSE TRIGONOMETRIC FUNCTIONS

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\csc^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

练习

求导：

1. $x^3 + y^3 = 6xy$
2. $\sin(x+y) = y^2 \cos x$

答案

求导

1. $y' = \frac{2y-x^2}{y^2-2x}$
2. $y' = \frac{y^2\sin x+\cos(x+y)}{2y\cos x-\cos(x+y)}$

对数函数求导

- 求$(\ln x)'$

对数函数求导

$$y = \ln x$$
$$e^y = x$$

两边同时求导，得

$$e^y \cdot y' = 1$$
$$y' = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

此外，$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

幂函数求导！

- 求证：当$n \in \mathbb{R}$，$(x^n)' = nx^{n-1}$

幂函数求导|

$$y = x^n$$

$$\ln y = n \ln x$$

$$\frac{1}{y} y' = n \frac{1}{x}$$

$$y' = n \frac{y}{x} = n x^{n-1}$$

你已经完全会求导了 | review

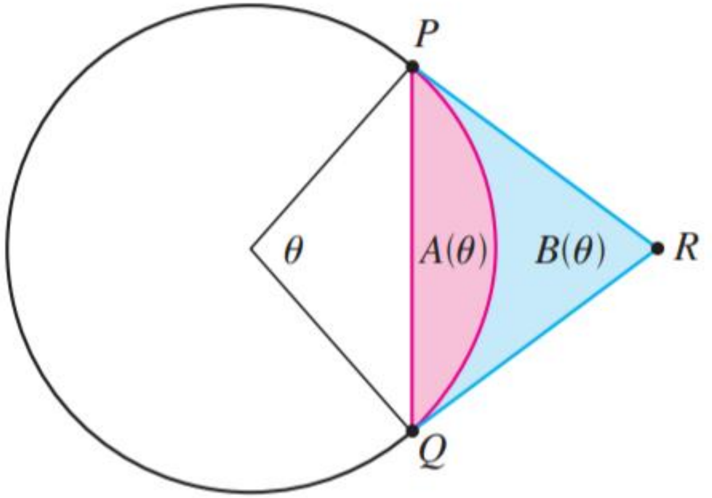
- 加减乘除
- 链式法则
- 隐函数求导
- 三角函数及其反函数的求导公式
- 幂函数、指数函数、对数函数的求导公式

练习-第一组

1. $\lim_{x\to 0} x\cot x$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x+\tan x}$
4. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan x}{\sin x-\cos x}$
5. $(\sin(\cos(\tan x)))'$
6. 如右图

An arc PQ of a circle subtends a central angle θ as in the figure. Let $A(\theta)$ be the area between the chord PQ and the arc PQ. Let $B(\theta)$ be the area between the tangent lines PR, QR, and the arc. Find

$$\lim_{\theta\to 0^+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}$$



答案

1. 1
2. 3
3. $\frac{1}{2}$（上下同时除$\sin x$）
4. $-\sqrt{2}$（$1-\tan x = \frac{1}{\cos x}(\cos x - \sin x)$）
5. $-\cos(\cos(\tan x)) \cdot \sin(\tan x) \cdot \sec^2 x$

答案

6. $A(\theta)=\frac{r^2}{2}\theta-\frac{r^2}{2}\sin\theta, B(\theta)=r^2\tan\frac{\theta}{2}-\frac{r^2}{2}\theta$

错误解法：原式= $\lim\limits_{\theta\to0^+}\frac{\theta-\sin\theta}{2\tan\frac{\theta}{2}-\theta}=\lim\limits_{\theta\to0^+}\frac{\theta-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\tan\frac{\theta}{2}-\theta}=\lim\limits_{\theta\to0^+}\frac{\frac{\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}-2\cos\frac{\theta}{2}}{2\ 1/(\cos\frac{\theta}{2})-\frac{\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}}=$

$\lim\limits_{\theta\to0^+}\frac{1-\cos\frac{\theta}{2}}{\sec\frac{\theta}{2}-1}=1$

错误的原因：带入$\frac{\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}=2$

极限符号可以从连续函数的外面到里面去，但是不能够只带入一部分然后再把极限符号拿出来

正确的解法需要用到洛必达法则，最终的答案是2

再放送

- 求极限的技巧
  - $\infty \cdot \infty = \infty$
  - $\infty + c = \infty,\ \infty + \infty = \infty$
  - $0 + 0 = 0,\ \ 0 - 0 = 0,\ 0 \cdot 0 = 0$
  - 但是，$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty$为不定式，不能直接带入求值
- 极限符号可以从连续函数的外面到里面去，是指类似于这样的形式

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$$

- $\lim\limits_{x \to a} \frac{\left(\lim\limits_{x \to a} f(x)\right)}{g(x)}$是不对的，比如$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = \frac{2}{3} \neq 1$

练习-第二组

1. $\left(x^{\sqrt{x}}\right)'$
2. $\left(\dfrac{x^{\frac{3}{4}}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}\right)'$

答案

1. $\ln y = \sqrt{x}\ln x \Rightarrow \frac{1}{y}y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\ln x + \sqrt{x}\frac{1}{x} \Rightarrow y' = y\left(\frac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}\right)$
2. 有两种做法
   1. $\ln y = \frac{3}{4}\ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 5\ln(3x+2) \Rightarrow \frac{1}{y}y' = \frac{3}{4}\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}2x - 5\frac{1}{3x+2}3 \Rightarrow y' = y\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right)$
   2. $x^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}\ln x}$，然后用链式法则做即可

指数增长/减少

- 假设你现在有一群兔子，你想知道它们繁殖一次之后会有多少只兔子
- 一个很合理的想法就是增加的兔子数量和当前的兔子数量成正比
- 也就是$\frac{dy}{dt} = ky$
- 这个方程唯一解是$y = y(0)e^{kt}$

- 放射性物质的衰减也有类似的方程，只是k是个负常数

Linear Approximations

- $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$
- 道理想必大家都懂

- 高次的情况就是泰勒展开，可以自行查阅资料了解

微分 differential

- A. 书上的定义：dx, dy都是differential；dx看作自变量，dy看作因变量，定义$dy = f'(x)dx$。注意区分于$\Delta x, \Delta y$，可参考这个视频
- B. 我的口胡（不保证正确）：
  - dy相当于是$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y$，当然也等于$\lim\limits_{\Delta y \to 0} \Delta y$
  - dx相当于是$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x$，当然也等于$\lim\limits_{\Delta y \to 0} \Delta x$
  - 显然单独谈论dy, dx, dt之类的是没有意义的，你只够比较它们的比值，也就是“变化速率的比值”；
  - （好像这样就联系上了求导的记号$\frac{dy}{dx}$
  - 所以会有式子$dy = f'(x)dx$（这个也会联系上积分里面的换元积分法

反导函数 antiderivative

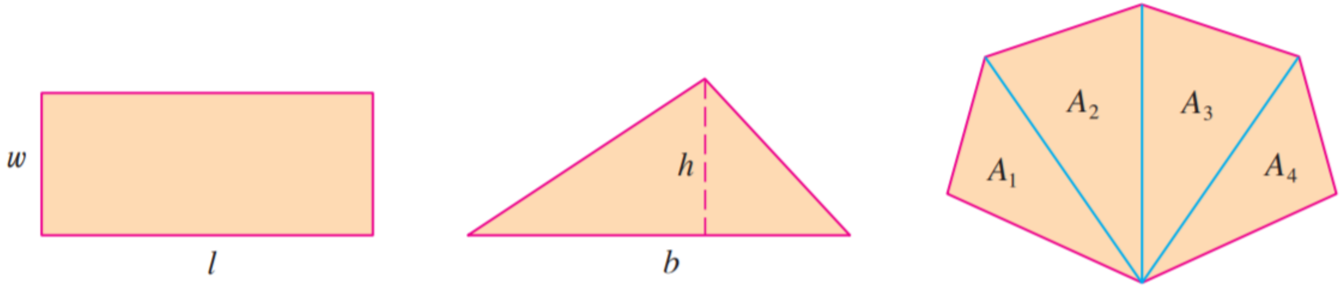
- 如果对于区间I内的任意x都有$F'(x) = f(x)$，那么就称F为f在I上的反导函数
- 可以证明，$f(x)$的所有的反导函数的差都是常数
- 所以$f(x)$在区间I的所有反导函数都可以写成$F(x) + C$

积分

我怀疑你游戏打多了并且我有证据

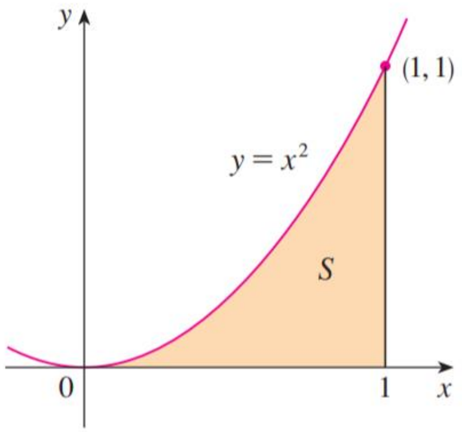
面积？

- 还记得小学学的“面积”吗？



$A = lw$　　$A = \frac{1}{2}bh$　　$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

- 但是，对于边缘是弧线的图形，它的面积又是什么？
- 联系求导的知识，考虑用矩形分割逼近。



面积?

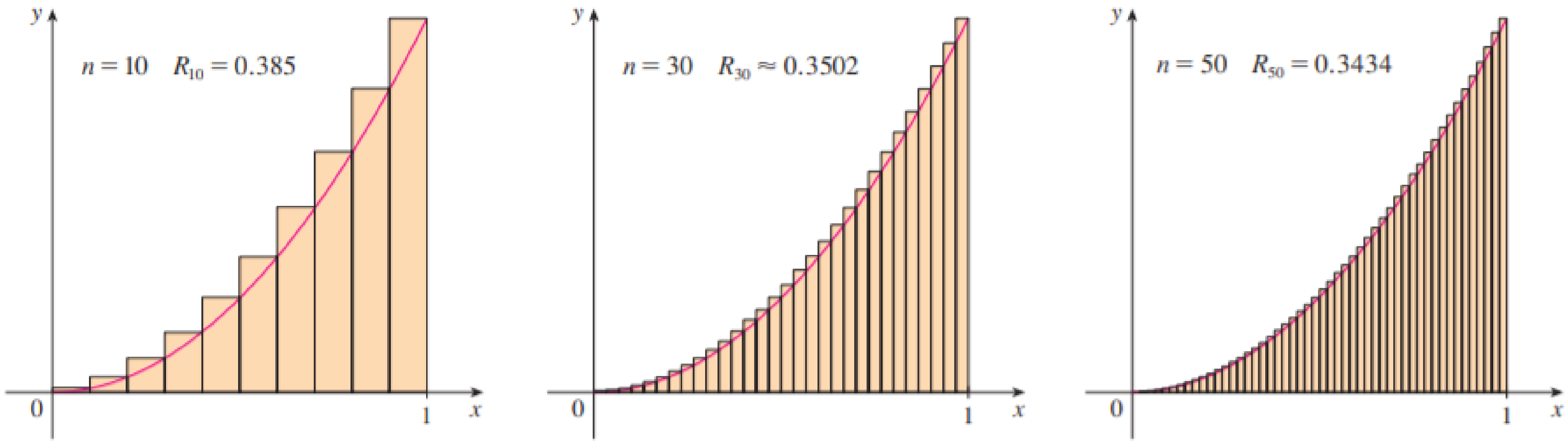


FIGURE 8

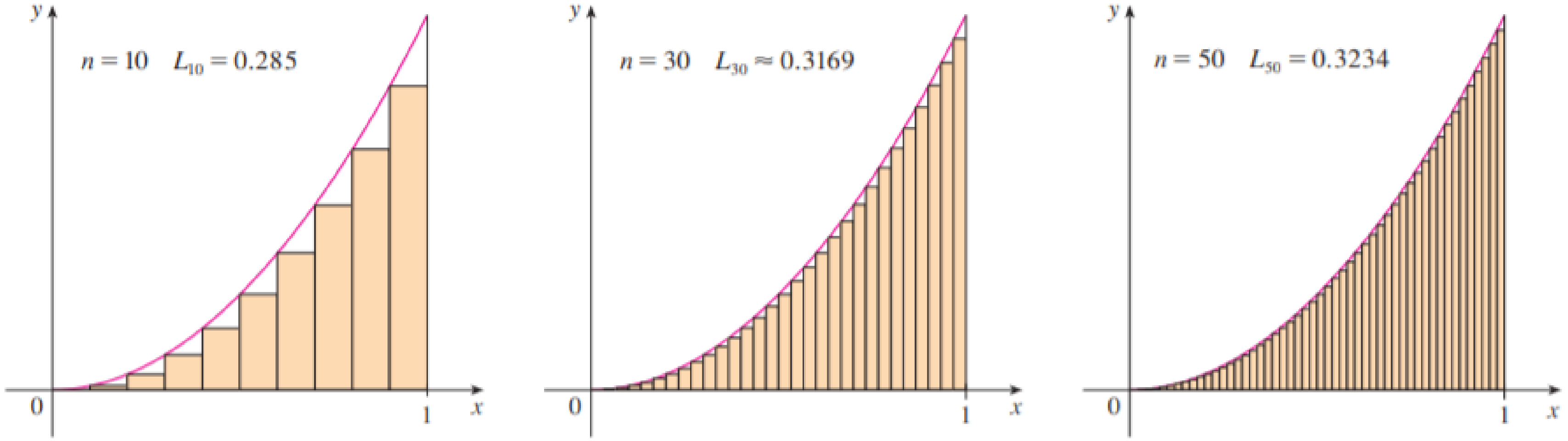


FIGURE 9

- 数学表达式?

黎曼和

- 定义一个区间$[a,b]$的**分割**P为一个有限的点列$a < x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，每个闭区间$[x_i, x_{i+1}]$叫做一个**子区间**
- 定义**取样分割**：在分割之后，从每个子区间取出一个取样点$x_i \leq t_i \leq x_{i+1}$
- 定义$\lambda = \max(x_{i+1} - x_i)$
- 如果分割P是在分割Q的基础上加入了一些x_i和t_i，那么就称P是Q的**精细化分割**
- **黎曼和**：$\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i)$

黎曼积分

- 黎曼积分就是当分割的λ越来越小的时候黎曼和趋向的极限
- 定义1：S是$f(x)$在闭区间$[a,b]$上的黎曼积分，当且仅当对于任意的$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$使得任意一个$\lambda \leq \delta$的取样分割的黎曼和与S的差的绝对值小于ε
- 定义2：S是$f(x)$在闭区间$[a,b]$上的黎曼积分，当且仅当对于任意的$\varepsilon > 0$，存在一个取样分割，使得任意一个比它精细的取样分割的黎曼和与S的差的绝对值小于ε
- 这两个定义的等价的，参考wiki Riemann_integral

黎曼可积

- f在$[a, b]$的黎曼积分存在，则称f是黎曼可积的
- 一个充分不必要条件：f在$[a, b]$只有有限个不连续点

- 我没看懂的充要条件：f在$[a, b]$黎曼可积当且仅当不连续点的集合的Lebesgue测度为0
- 请自行~~google~~百度

定积分

- 定积分是一类很有用的极限
- 设f是定义在$[a,b]$上的函数，我们把$[a,b]$分成n的等长的子区间，每个子区间的长度是$\Delta x=\frac{b-a}{n}$，令x_i^*为第i个区间内的任意取样点，则f从a到b的**定积分**为

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

- 如果这个极限存在，就称$\boldsymbol{f}$**在**$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$**上可积**

定积分的记号

- $\int$ 是用来告诉你“要积分啦”
- dx, dt, du什么的是用来告诉你自变量是谁的
- 更加深入的理解是，dx, dt, du表示微分
- 参考youtube上的这个视频

定积分的几何意义

- 在x轴上方的部分的面积-在x轴下方的部分的面积

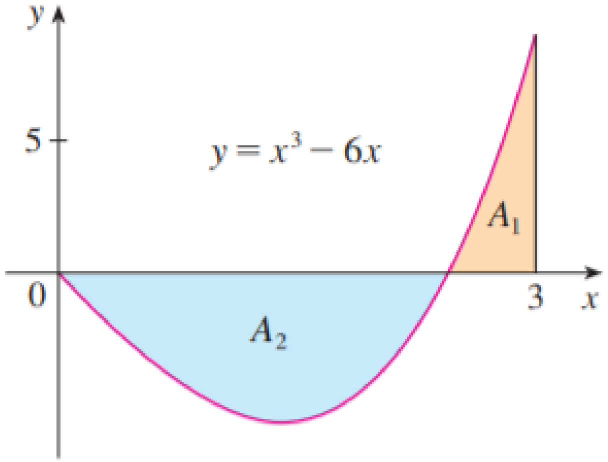


FIGURE 6
$\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx = A_1 - A_2 = -6.75$

小练习

1. 求$\int_0^1 x^2dx$
2. 求$\int_1^3 e^x dx$（不用算出结果
3. 证明：$\int_a^b x^2dx = \frac{b^3-a^3}{3}$

- Hint：
  - $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
  - $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{i(i+1)(2i+1)}{6}$
  - $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

小练习

1. $\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}$
2. $\int_1^3 e^x dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} e^{1+\frac{2i}{n}} \frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \frac{e^{3+\frac{2}{n}} - e^{1+\frac{2}{n}}}{e^{\frac{2}{n}}-1}$

   Now we ask the computer algebra system to evaluate the limit:

$$\int_1^3 e^x\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \cdot \frac{e^{(3n+2)/n} - e^{(n+2)/n}}{e^{2/n} - 1} = e^3 - e$$

3. 众所周知证明题的答案叫做略。

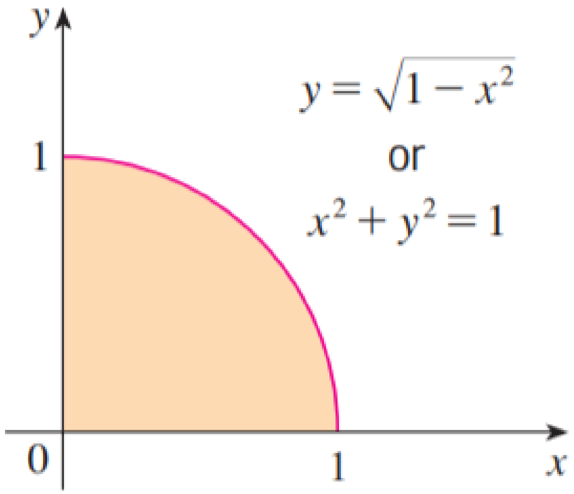
大练习

1. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$
2. $\int_{-5}^5 \left(x-\sqrt{25-x^2}\right)dx$

- 提示：考虑几何意义

大练习

1. 如图，答案是$\frac{\pi}{4}$
2. $\frac{25}{2}\pi$



定积分的性质

- 定义：$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)\,dx$，其中$a < b$
- 此外，$\int_a^a f(x)dx = 0$
- 下面的性质的证明可以考虑展开成$\sum$

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a), \quad \text{where c is any constant}$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx, \quad \text{where c is any constant}$$

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

If $f(x) \geqslant 0$ for $a \leqslant x \leqslant b$, then $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

If $f(x) \geqslant g(x)$ for $a \leqslant x \leqslant b$, then $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

If $m \leqslant f(x) \leqslant M$ for $a \leqslant x \leqslant b$, then

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$

引入

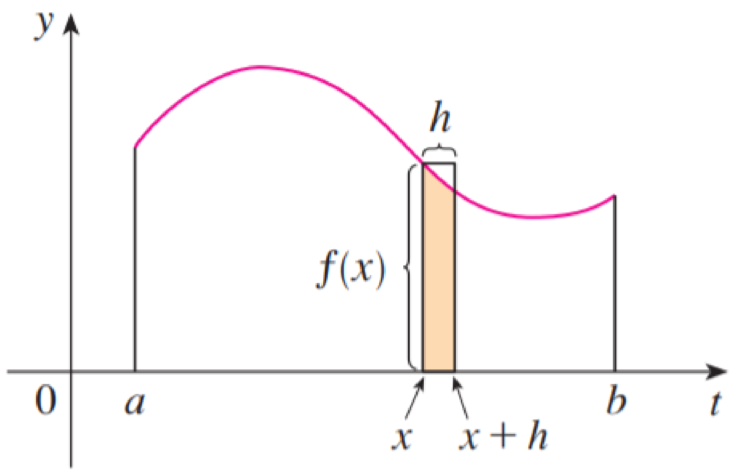
(a) Draw the line $y = 2t + 1$ and use geometry to find the area under this line, above the t-axis, and between the vertical lines $t = 1$ and $t = 3$.

(b) If $x > 1$, let $A(x)$ be the area of the region that lies under the line $y = 2t + 1$ between $t = 1$ and $t = x$. Sketch this region and use geometry to find an expression for $A(x)$.

(c) Differentiate the area function $A(x)$. What do you notice?

引入

- 定义$g(x) = \int_a^x f(t)dt$
- 那么$g(x+h) - g(x) \approx f(x)h$
- 所以$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \approx f(x)$
- 猜测$\lim\limits_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f(x)$



微积分基本定理-第一部分

- 如果f在$[a,b]$上连续，那么$g(x)=\int_a^x f(t)dt\ ,(a\leq x\leq b)$在$[a,b]$上连续且在$(a,b)$上可导，且$g'(x)=f(x)$

证明

- 根据定义有$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)dt$
- 现在考虑$h>0$的情况
- 设$f(u)$为$f(x)$在$[x,x+h]$的最小值，$f(v)$为$f(x)$在$[x,x+h]$的最大值
- 根据定积分的性质，有$f(u)h\le\int_x^{x+h}f(t)dt\le f(v)h$
- 也就是$f(u)\le\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)dt\le f(v)$；这个结论在$h<0$的时候也可以同理证明
- 根据夹逼定理有$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)dt=f(x)$

微积分基本定理-第二部分

- 如果f在$[a,b]$上连续，那么$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$，其中$F$是$f$的任意反导函数
- 这里的$F(b)-F(a)$也可以写作 $F(x)\Big]_a^b$ $F(x)\Big|_a^b$ $[F(x)]_a^b$
- 证明:
  - 对于$g(x) = \int_a^x f(t)dt$显然成立，因为$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^a f(x)dx = g(b) - g(a)$
  - 而其它的任意$F(x)$都满足其和$g(x)$的差为常数，$F(b) - F(a) = (g(b) + C) - (g(a) + C) = g(b) - g(a)$

不定积分

- $f(x)$的每一个反导函数都可以叫做f的不定积分，记为$\int f(x)dx$
- 例如：$\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C$
- 而对于像$f(x)=\frac{1}{x^2}$这样的函数，每个区间上的积分常数都可以不同，所以其一般形式应为

$$\int \frac{1}{x^2}dx=\begin{cases}-\frac{1}{x}+C_1\ (x>0)\\ -\frac{1}{x}+C_2\ (x<0)\end{cases}$$

很卡哇伊的一道题 ^_^

What is wrong with the following calculation?

$$\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1}\Bigg]_{-1}^{3} = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$$

很卡哇伊的一道题 ^_^

- 首先，注意到$f(x) \geq 0$，所以这个答案不可能是对的
- 微积分基本定理只能对连续函数应用，而$f(x)$在$x = 0$处并不连续
- 事实上，$\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2}\, dx$不存在

小练习

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^3}{n^4}$

2. 已知 $C(t)=\frac{1}{t}\left[A+\int_0^t f(s)ds\right]$，
求证：对于满足$C(T)=f(T)$
的T，$C'(t)=0$

3. $\int\left(x^2+1+\frac{1}{x^2+1}\right)dx$

4. $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{dr}{\sqrt{1-r^2}}$

5. $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{t^2-1}{t^4-1}dt$

答案

1. $\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$
2. $C(t)t = A + \int_0^t f(s)ds \Rightarrow$
   $C'(t)t + C(t) = f(t) \Rightarrow$
   $C'(t) = \frac{1}{t}\big(f(t) - C(t)\big) = 0$
3. $\frac{x^3}{3} + x + \tan^{-1} x + C$
4. $[\sin^{-1} x]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\pi}{3}$
5. $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{t^2+1} dt = [\tan^{-1} x]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\pi}{6}$

换元积分法

- 其实就是链式法则的逆

$$\int f'\big(g(x)\big)g'(x)dx = f\big(g(x)\big) + C$$

- 也可以把dx看作微分来解释
- 设$u = g(x)$，因为$du = g'(x)dx$（也就是$du = \frac{du}{dx} \cdot dx$）
- 所以$\int f'\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int f'(u)du = f(u) + C$

举个栗子

$$\int 2x\sqrt{1-x^2}\,dx$$

令$u = 1 - x^2$，则$du = 2x\,dx$

那么

$$\int 2x\sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

再举个栗子

$$\int x^3 \cos(x^4+2)\,dx$$

令$u = x^4 + 2$，则$du = 4x^3dx$

$$\int x^3 \cos(x^4+2)\,dx = \frac{1}{4}\int \cos u\,du = \frac{1}{4}\sin u + C$$

$$= \frac{1}{4}\sin(x^4+2) + C$$

定积分的换元积分

如果g'在$[a,b]$连续，且f在$u=g(x)$构成的区间上连续，那么

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

这样做的好处在于省去了最后x带回u的步骤

简单的证明:

- 令F为f的反导函数，则$F\big(g(x)\big)$是$f\big(g(x)\big)g'(x)$的一个不定积分
- 显然$\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)dx=\Big[F\big(g(x)\big)\Big]_a^b=F\big(g(b)\big)-F\big(g(a)\big)$
- 而另一方面，$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du=[F(u)]_{g(a)}^{g(b)}=F\big(g(b)\big)-F\big(g(a)\big)$

简单的栗子

- 求$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$

- 令$u = \ln x$，则$du = \frac{1}{x} dx$
- $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_0^1 u\, du = \frac{1}{2}$

练习题

1. $\int x^5\sqrt{1+x^2}\,dx$
2. $\int \tan x\,dx$
3. $\int (x+1)\sqrt{2x+x^2}dx$
4. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$
5. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$
6. $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}dx$
7. $\int \frac{1+x}{1+x^2}dx$
8. $\int x(2x+5)^8dx$

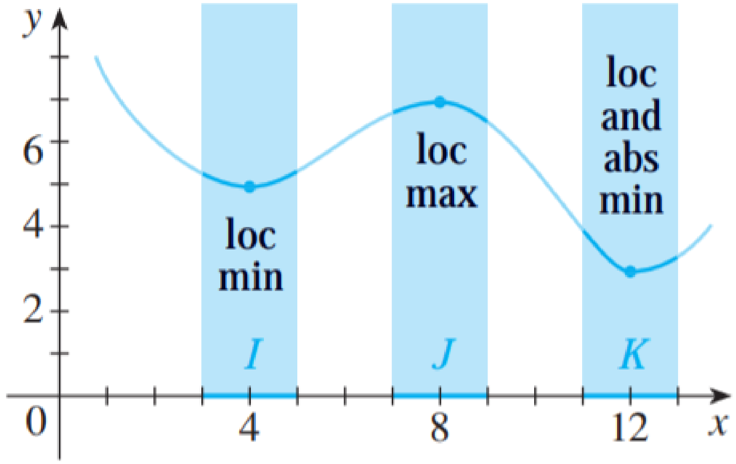
答案

1. $u = 1 + x^2$; $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} - 2 \cdot \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right) + C$
2. $u = \cos x\,; -\ln u + C = -\ln|\cos x| + C$
3. $u = x^2 + 2x$; $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$
4. $u = \sqrt{x}$; $\cos \mathrm{u} + \mathrm{C}$
5. $u = \sin x\,; -\frac{1}{u} + C$
6. $u_1 = \cos x\,, u_2 = 1 + u_1^2; -\ln|u_2| = -\ln|1 + \cos^2 x|$
7. $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x + \frac{1}{2}\ln|1 + x^2|$
8. $u = 2x + 5, dx = \frac{1}{2}du; \int \frac{u-5}{2}u^8 \frac{1}{2}du = \frac{1}{40}u^{10} - \frac{5}{36}u^9 + C$

导数的应用

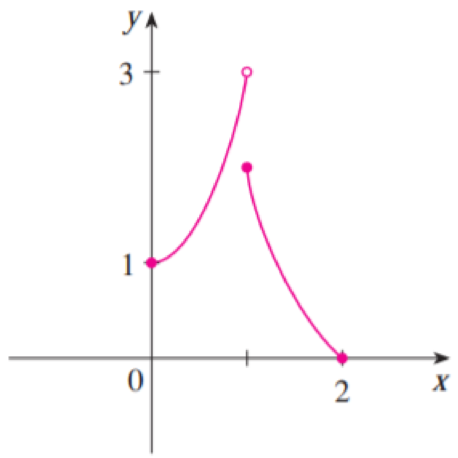
咕了。

最值问题-定义



- f为定义在D上的一个函数
- 如果$\forall x \in D$有$f(x) \leq f(c)$，那么称$f(c)$为f的绝对/全局最大值
- 如果$\forall x \in D$有$f(x) \geq f(c)$，那么称$f(c)$为f的绝对/全局最小值
- 如果存在一个包含c的开区间，使得所有在这个开区间内的x都满足$f(x) \leq f(c)$，那么称$f(c)$是一个相对/局部最大值
- 如果存在一个包含c的开区间，使得所有在这个开区间内的x都满足$f(x) \geq f(c)$，那么称$f(c)$是一个相对/局部最小值

最值定理 Extreme Value Theorem



- 最大值可能不存在，比如右图
  (右图中的函数取值有上确界)

- 最值定理：如果f为定义在闭区间$[a,b]$上的连续函数，那么区间内存在两个数c,d，满足$f(c)$为全局最大值，$f(d)$为全局最小值
- 最值定理的条件是充分不必要的

费马引理

- 设函数f在x_0的某邻域$U(x_0)$内有定义，在x_0处可导，并且对于任意的$c \in U(x_0)$有$f(c) \leq f(x_0)$，那么$f'(x_0) = 0$
- 设函数f在x_0的某邻域$U(x_0)$内有定义，在x_0处可导，并且对于任意的$c \in U(x_0)$有$f(c) \geq f(x_0)$，那么$f'(x_0) = 0$
- 费马引理是判断一个值是否是局部最值的必要不充分条件（即便$f'(c)$存在！反例是$f(x) = x^3, c = 0$）

- 感性理解就是，如果$f'(x_0)$不等于0，那么从x_0往左走或者往右走会让函数值变大/变小

费马引理-证明

- 下面证明$f(x_0)$为局部最大值的情况
- 因为f在x_0处可导，所以$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
- 由于$f(x_0)$是局部最大值，所以$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\leq 0, \lim_{h\to 0^-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geq 0$
- 所以$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$

临界值

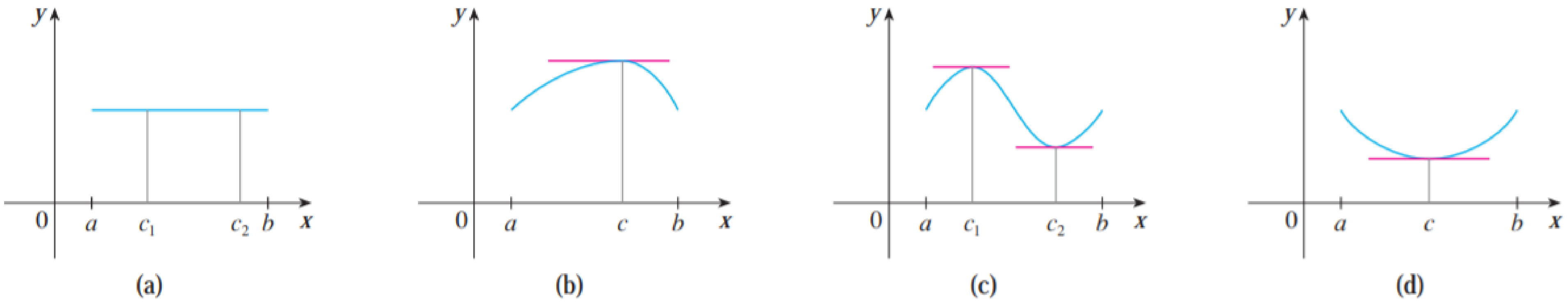
- 如果c在f的定义域内且$f'(c)$不存在或者$f'(c) = 0$，那么称c为f的一个**临界值**
- 如果c是f的局部最大值/最小值，那么c一定是f的一个临界值；反之不一定成立

求f在$[a, b]$上的最值

1. 求出f在所有临界值的取值
2. 求出f在区间端点的取值
3. 这些取值中最大的就是全局最大值，最小的就是全局最小值

罗尔定理 Rolle's Theorem

- 如果f是满足下面条件的一个函数
  - f在$[a, b]$上连续
  - f在(a, b)上可导
  - $f(a) = f(b)$
- 那么存在一个$c \in (a, b)$，满足$f'(c) = 0$



证明

分情况讨论：

- $f(x)=k$：显然成立
- 存在某个$x\in(a,b)$，$f(x)>f(a)$：根据最值定理，$f(x)$在$[a,b]$一定有全局最大值；而且根据条件，全局最大值一定位于开区间(a,b)内，是一个局部最大值，所以全局最大值处$f(x)$的导为0
- 存在某个$x\in(a,b)$，$f(x)<f(a)$：证明同上，全局最小值处的导为0

一个小应用

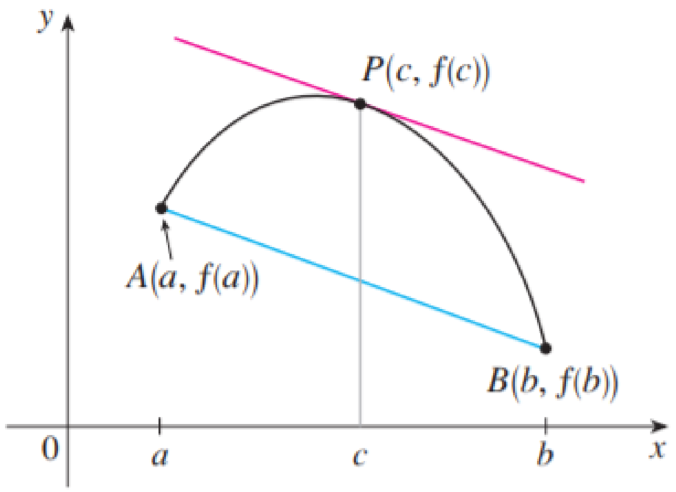
- 证明$x^3 + x - 1 = 0$恰好只有一根

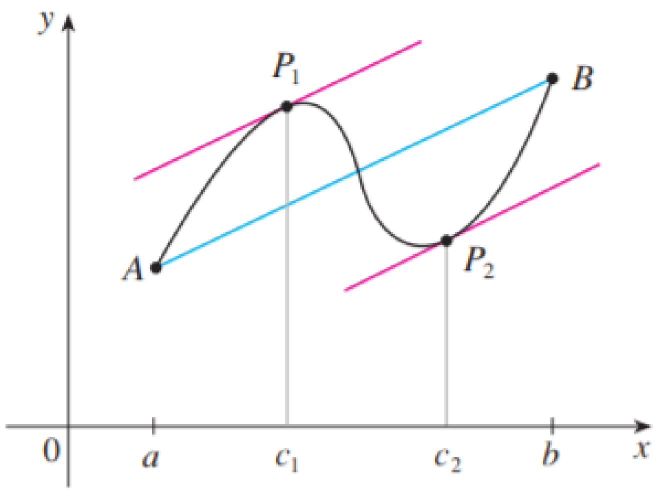
一个小应用

- 证明$x^3 + x - 1 = 0$恰好只有一根
- 分为两步：
  - 存在根（$f(0) < 0, f(1) > 0$）
  - 不存在多于一个根（罗尔定理）

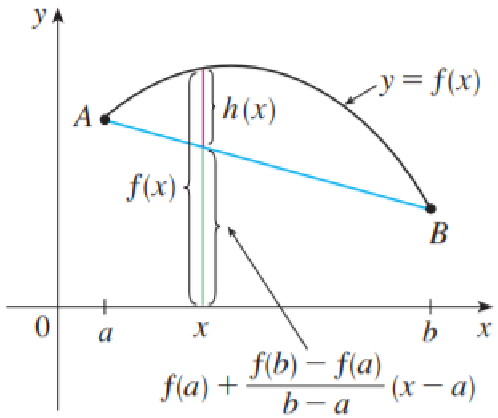
中值定理 The Mean Value Theorem

- 如果f是满足下面条件的一个函数:
  - f在$[a,b]$上连续
  - f在(a,b)上可导
- 那么存在$c \in (a,b)$满足$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$





中值定理-证明



- 定义一个新函数：

$$h(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right),$$

- 显然h在$[a,b]$上连续且在(a,b)上可导且$h(a)=h(b)=0$
- 所以存在$c \in (a,b)$满足$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$，也就是说 $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

一个定理

- 如果对于所有的$x \in (a,b)$都有$f'(x) = 0$，那么f在(a,b)上是一个常函数

- 证明：令x_1, x_2为(a,b)中的任意两个数且$x_1 < x_2$，那么存在$c \in (x_1, x_2)$满足$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0$，所以$f(x_1) = f(x_2)$

推论

- 如果对于所有的$x \in (a,b)$都有$f'(x) = g'(x)$，那么在(a,b)上f和g的差是常量，即$f(x) = g(x) + c$

- 证明：令$F(x) = f(x) - g(x)$，可证得$F(x)$为常函数

小练习

- 证明：$\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}$
- 其中：
  - $\tan^{-1}x$的值域是$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
  - $\cot^{-1}x$的值域是$(0,\pi)$

小练习

- 证明1：令$f(x) = \cot^{-1} x + \tan^{-1} x$，则$f'(x) = 0$，所以$f(x)$是常函数，带入$x = 1$即可得证
- 证明2（不保证正确）：$\forall \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \cot \alpha = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right); \forall \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \tan(\alpha) = \cot\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

递增/递减测试 Increasing/Decreasing Test

- 如果在一个区间内有$f'(x) > 0$，那么f在这个区间内递增
- 如果在一个区间内有$f'(x) < 0$，那么f在这个区间内递减

- 证明：利用中值定理，和上一个定理类似

小小练习

- 求出$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$在哪些区间里递增，在哪些区间里递减

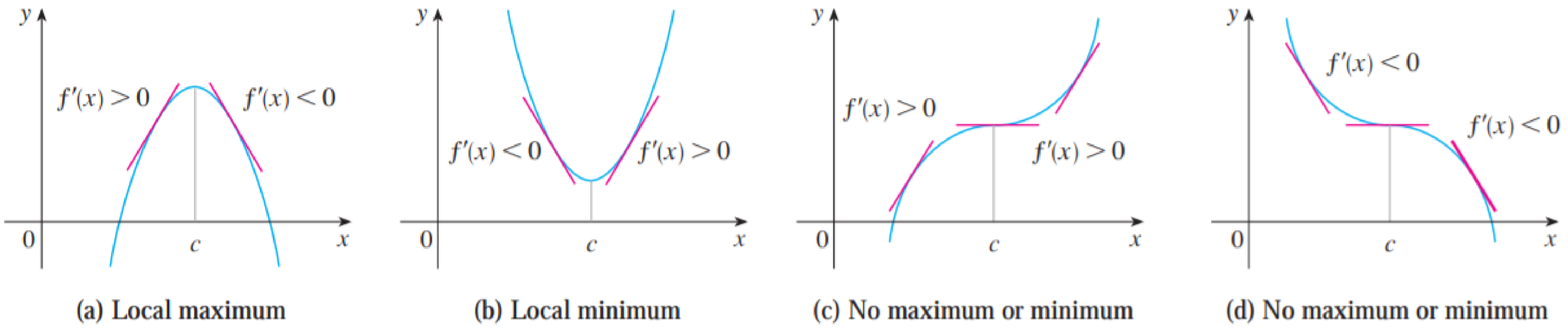
小小练习

- $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2) = 12x(x-2)(x+1)$

Interval	$12x$	$x-2$	$x+1$	$f'(x)$	f
$x < -1$	$-$	$-$	$-$	$-$	decreasing on $(-\infty, -1)$
$-1 < x < 0$	$-$	$-$	$+$	$+$	increasing on $(-1, 0)$
$0 < x < 2$	$+$	$-$	$+$	$-$	decreasing on $(0, 2)$
$x > 2$	$+$	$+$	$+$	$+$	increasing on $(2, \infty)$

一阶导数测试 The First Derivative Test

- c为连续函数f的一个临界值
  - 如果在c这个位置，f'从正的变成了负的，那么f在c有局部最大值
  - 如果在c这个位置，f'从负的变成了正的，那么f在c有局部最小值
  - 如果在c这个位置，f'没有变号，那么f在c既不是局部最大值也不是局部最小值
- 第三种情况的一个栗子：$f(x) = x^3, c = 0$



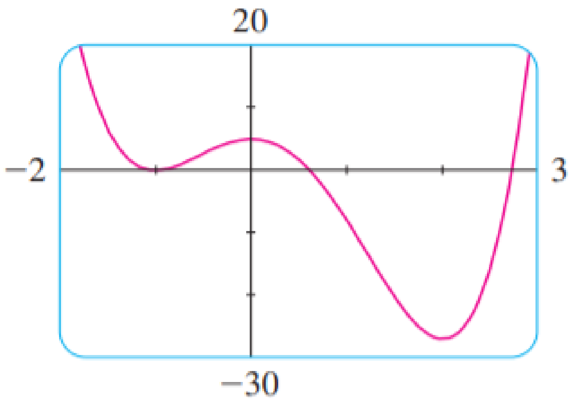
证明（目害古月）

- 肯定能找出一个c的邻域，只包含了c这一个临界值
- 如果f'在c处从正的变成了负的，那么这意味着在c的左边f递增，在c的右边f递减，于是可以推出$f(c)$为局部最大值
- 逆命题：如果$f(c)$为局部最大值，由于这个邻域内不包含其它的临界值了，所以c的左边要么递增要么递减，c的右边也要么递增要么递减；但是如果左边递减或者右边递增的话，显然就不满足$f(c)$为局部最大值这一条件了。所以c的左边f递增（也就是导数大于0），c的右边f递减（也就是导数小于0）

小小小练习

- 求出$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$的局部最值

小小小练习

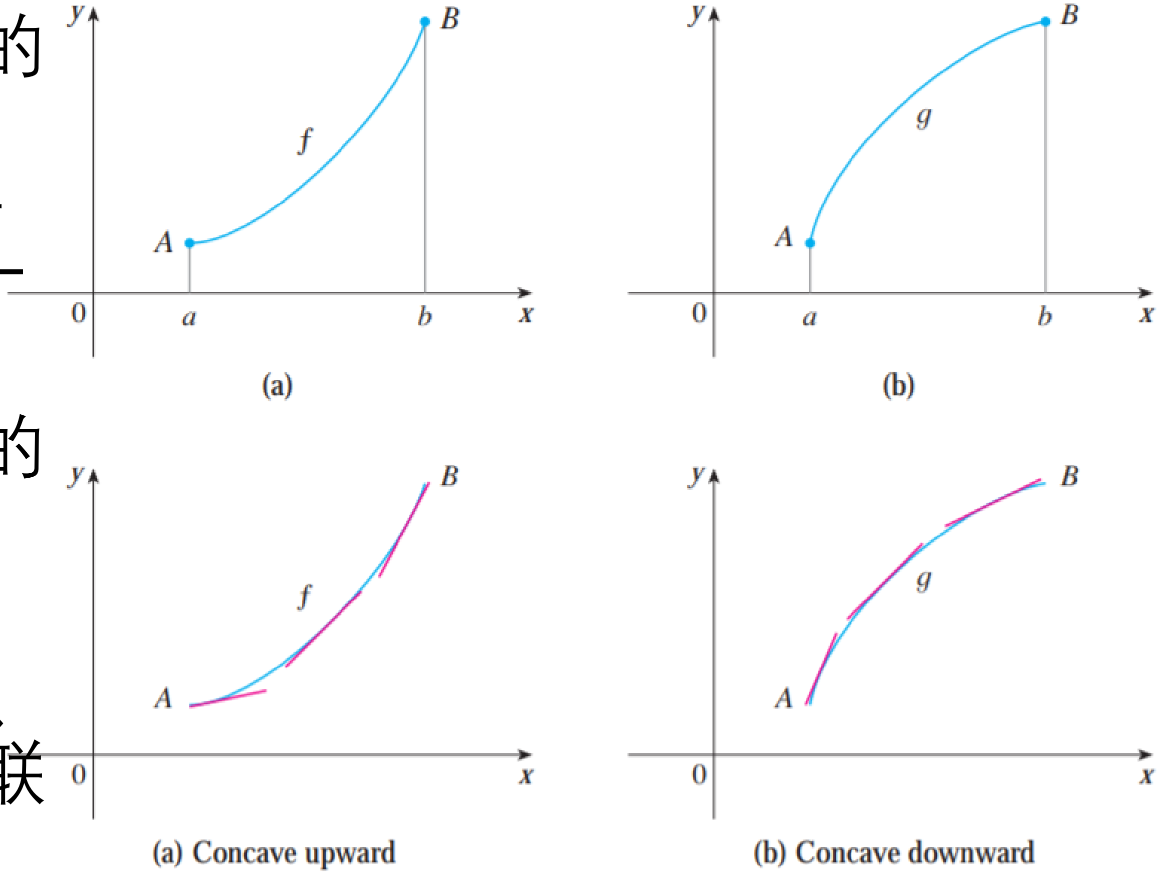


Interval	$12x$	$x-2$	$x+1$	$f'(x)$	f
$x < -1$	−	−	−	−	decreasing on $(-\infty, -1)$
$-1 < x < 0$	−	−	+	+	increasing on $(-1, 0)$
$0 < x < 2$	+	−	+	−	decreasing on $(0, 2)$
$x > 2$	+	+	+	+	increasing on $(2, \infty)$

The graph of f shown in Figure 2 confirms the information in the chart.

秃-定义

- 如果f的图象在它在区间I中的所有的切线的上方，那么称f在区间I**上凹(concave upword)**【也可以用数学语言描述为$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$】
- 如果f的图象在它在区间I中的所有的切线的下方，那么称f在区间I**下凹(concave downword)**；
- 注：上凸、下凸、上凹、下凹、凸、凹在不同的地方定义不太一样，请联系上下文理解



凸性测试 Concavity Test

- $\forall x \in I, f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$在$I$上凹
- $\forall x \in I, f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$在$I$下凹

- ~~根据图形的形状易证~~

证明-$f''(x) > 0$

考虑$a > x$的情况

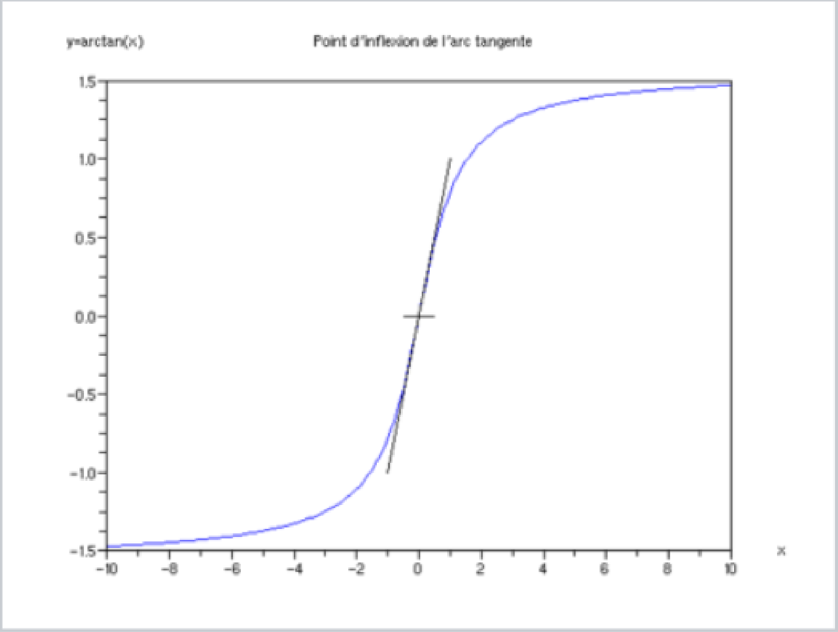
由中值定理得

$$\exists c \in (x, a), f'(c) = \frac{f(a) - f(x)}{a - x}$$
$$\forall x \in I, f''(x) > 0 \Rightarrow f'(a) > f'(c)$$
$$\Rightarrow f'(a)(a - x) > f'(c)(a - x) = f(a) - f(x)$$
$$\Rightarrow f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$$

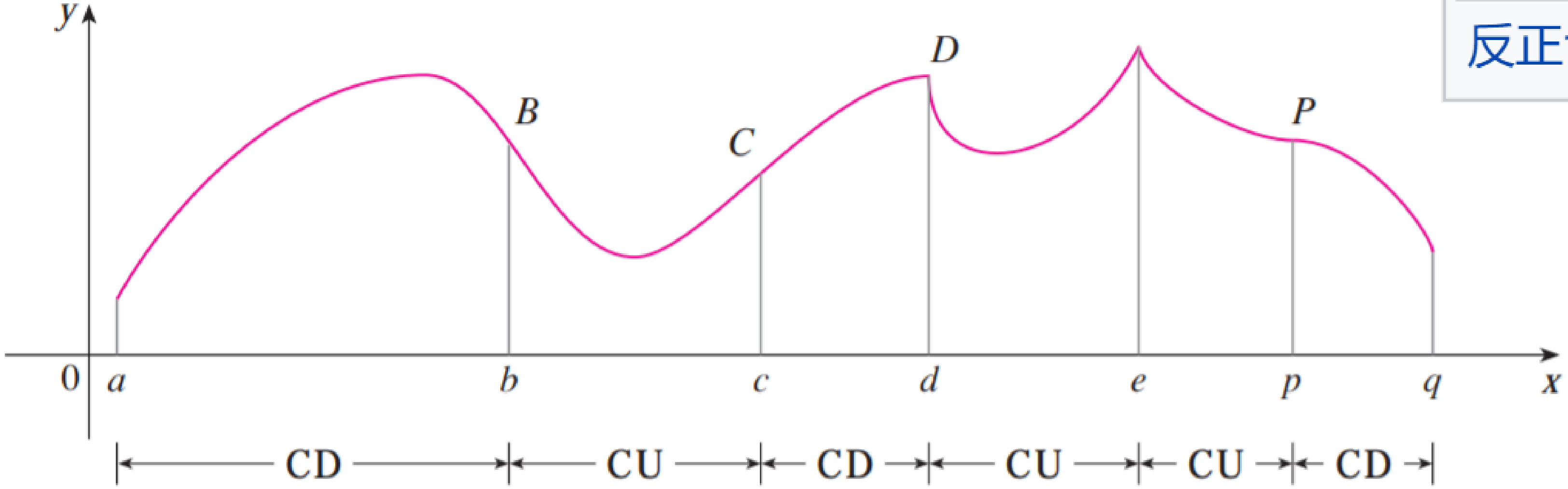
$a < x$的情况可以同理证明

拐点 inflection point

- 连续函数f从上凹变到下凹或从下凹变到上凹的点
- 使切线穿过函数图象的点
- 二阶导变号的点



反正切函数的拐点



二阶导数测试 The Second Derivative Test

- 函数f在c的某邻域内连续
  - 如果$f'(c) = 0$且$f''(c) > 0$，那么f在c处有局部最小值
  - 如果$f'(c) = 0$且$f''(c) < 0$，那么f在c处有局部最大值

- 这个测试在$f''(c)$不存在或者$f''(c) = 0$的时候会不工作

咳咳。。。！

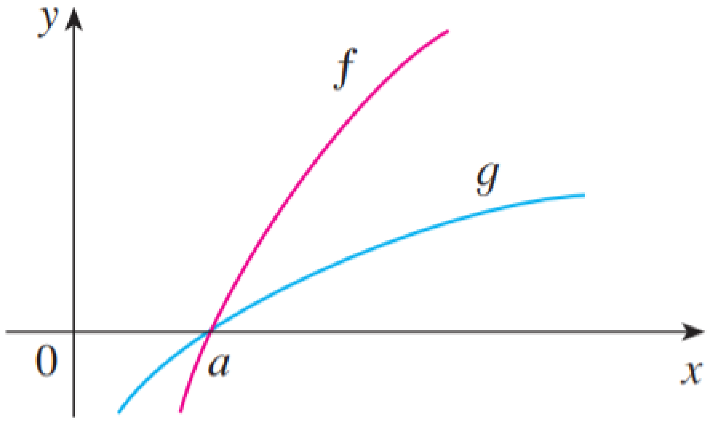
- 刚才说了的这一堆测试（凸性测试，一/二阶导数测试）除了用来求极值/推性质之外，还有一个作用就是方便作图
- 作图的技巧们：
  - 定义域
  - 与坐标轴的交点
  - 对称（奇偶性、周期性）
  - 渐近线
  - 增减性
  - 局部最值
  - 凹凸性/拐点
- ~~这么麻烦干嘛直接Geogebra不就完了~~

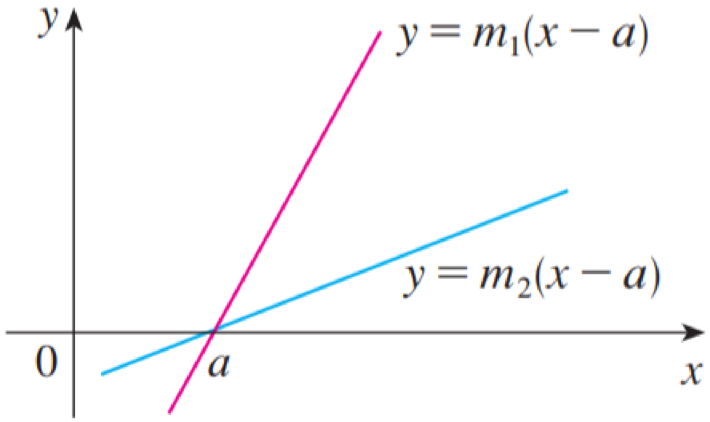
不定式 Indeterminate Forms

- ~~to + verb~~
- 指按照极限的规则带入之后未能有足够的信息确定极限值
- 比如$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{0}{0}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}$等等
- 摘自wiki：常见的不定式有$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, 1^\infty, \infty-\infty, 0^0, \infty^0$

引入

- 对于右下图中的两条直线，对于任何一个a附近的x，$\frac{m_1(x-a)}{m_2(x-a)}=\frac{m_1}{m_2}$；所以$\lim\limits_{x\to a}\frac{m_1(x-a)}{m_2(x-a)}=\frac{m_1}{m_2}$
- 而对于f,g这样的曲线，只要放大的倍数足够，它们的形状就会趋近于右下图中的两条直线
- 所以合理猜想$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$





洛必达法则 L'Hôpital's rule

- 如果下列条件成立：
  - 在a的某去心邻域上，f, g可导且$g'(x) \neq 0$
  - $\lim_{x\to a} f(x) = 0 \wedge \lim_{x\to a} g(x) = 0$或者$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty, \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$
- 那么$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$（在右侧的极限存在或为无穷的情况下）

- 注：洛必达法则对半极限或无穷处的极限也成立

对特殊情况的证明

- 下面证明$\frac{0}{0}$的情况
- 如果$f(a) = g(a) = 0$，那么$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$
- 对于$f(a), g(a)$不等于0或不存在的情况，可以定义两个函数

$$F(x) = \begin{cases} f(x)\ (x \neq a) \\ 0\ (\ x = a) \end{cases}, G(x) = \begin{cases} g(x)\ (x \neq a) \\ 0\ (\ x = a) \end{cases}$$

- 利用$\lim\limits_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$可以得证
- 对于在无穷处的极限，可以用$t = \frac{1}{x}$替代掉，也就是$\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}$

其它的不定式

- 不定乘积：$fg = \frac{f}{\frac{1}{g}} = \frac{g}{\frac{1}{f}}$
- 不定幂：$f^g = e^{g\ln f}$
- 下图截自维基百科

0^0	$\lim_{x\to c} f(x) = 0^+, \lim_{x\to c} g(x) = 0$	$\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = \exp \lim_{x\to c} \frac{g(x)}{1/\ln f(x)}$	$\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = \exp \lim_{x\to c} \frac{\ln f(x)}{1/g(x)}$
1^∞	$\lim_{x\to c} f(x) = 1, \ \lim_{x\to c} g(x) = \infty$	$\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = \exp \lim_{x\to c} \frac{\ln f(x)}{1/g(x)}$	$\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = \exp \lim_{x\to c} \frac{g(x)}{1/\ln f(x)}$
∞^0	$\lim_{x\to c} f(x) = \infty, \ \lim_{x\to c} g(x) = 0$	$\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = \exp \lim_{x\to c} \frac{g(x)}{1/\ln f(x)}$	$\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = \exp \lim_{x\to c} \frac{\ln f(x)}{1/g(x)}$

练习题

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$
2. $\lim\limits_{x \to \pi^-} \frac{\sin x}{1 - \cos x}$
3. $\lim\limits_{x \to 0^+} (1 + \sin 4x)^{\cot x}$
4. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$

练习题

5. 如果 a, b, c, d 为常数且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax^2+\sin bx+\sin cx+\sin dx}{3x^2+5x^4+7x^6} = 8$，求$a+b+c+d$

6. a取何值时下式成立：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = e$

7. 如图

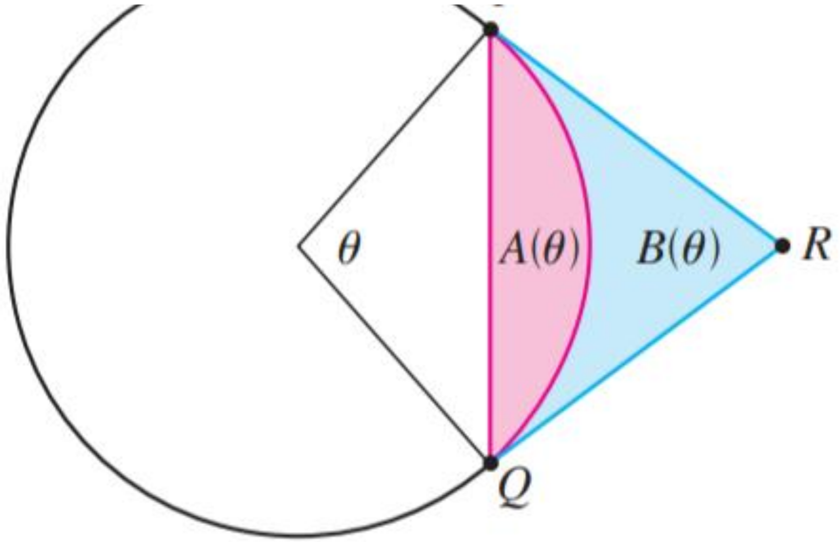
Let $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx$, where $a_1, a_2, \ldots, a_n$ are real numbers and n is a positive integer. If it is given that $|f(x)| \leqslant |\sin x|$ for all x, show that

$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leqslant 1$$

练习题

8. An arc PQ of a circle subtends a central angle θ as in the figure. Let $A(\theta)$ be the area between the chord PQ and the arc PQ. Let $B(\theta)$ be the area between the tangent lines PR, QR, and the arc. Find

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}$$



参考答案

1. $\frac{1}{3}$（P304）
2. 0
3. e^4
4. 1
5. 杰哥说是$a = 24$，$b + c + d = 0$ 具体见下一页 ~~（两个观察：~~
   1. ~~如果~~$\cancel{a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, \cdots a_n \neq 0}$~~，那么~~$\cancel{\sin a_1 x + \sin a_2 x + \cdots \sin a_n x}$~~与~~$\cancel{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)x}$~~是等价无穷小量~~
   2. ~~如果~~$\cancel{\sin bx + \sin cx + \sin dx}$~~被替换成了~~$\cancel{(b + c + d)x}$~~且~~$\cancel{b + c + d \neq 0}$~~，那么极限不存在；对于~~$\cancel{b, c, d}$~~中有~~$\cancel{= 0}$~~的数的情况也是同理~~
6. 杰哥说是 $\frac{1}{2}$（取对数之后是 $0 \cdot \infty$ 型，可以用洛必达）
7. 考虑$\lim\limits_{x \to 0} \left| \frac{f(x)}{x} \right|$

参考答案

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+\sin bx+\sin cx+\sin dx}{3x^2+5x^4+7x^6}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{ax^2}{3x^2+5x^4+7x^6}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin bx+\sin cx+\sin dx}{3x^2+5x^4+7x^6}$$

第一个式子就是 $\frac{a}{3}$

第二个式子：$\lim_{x\to 0}\frac{\sin bx+\sin cx+\sin dx}{3x^2+5x^4+7x^6}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{b\cdot\cos bx+c\cdot\cos cx+d\cdot\cos dx}{6x+20x^3+42x^5}$$ （洛必达法则）

$$=\frac{b\lim_{x\to 0}\cos bx+c\cdot\lim_{x\to 0}\cos cx+d\lim_{x\to 0}\cos dx}{\lim_{x\to 0}6x+20x^3+42x^5}$$

$$=\frac{b+c+d}{0}$$

当 $b+c+d\neq 0$ 时，毫无疑问这个式子会趋近于 ∞ 或 $-\infty$

原式就不可能 $=8$

所以必然有 $b+c+d=0$，此时

$$\lim_{x\to 0}\frac{b\cos bx+c\cos cx+d\cos dx}{6x+20x^3+42x^5}$$ 仍为 $\frac{0}{0}$ 形不定式

由洛必达法则得 $\lim_{x\to 0}\frac{-b^2\sin bx-c^2\sin cx-d^2\sin dx}{6+60x^2+210x^4}$

$$=\frac{-0-0-0}{6+0+0}=\frac{0}{6}=0$$

∴有 $\begin{cases}\frac{a}{3}+0=8\\ b+c+d=0\end{cases}$ 恒成立，

∴ $a+b+c+d=24$

参考答案

8. $A(\theta)=\frac{r^2}{2}\theta-\frac{r^2}{2}\sin\theta$,

$B(\theta)=r^2\tan\frac{\theta}{2}-\frac{r^2}{2}\theta$

原式= $\lim\limits_{\theta\to0^+}\frac{\theta-\sin\theta}{2\tan\frac{\theta}{2}-\theta}=$

$\lim\limits_{\theta\to0^+}\frac{\theta-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\tan\frac{\theta}{2}-\theta}$

$$\lim_{x\to0}\frac{x-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}-x}$$

$$=\lim_{x\to0}\cos\frac{x}{2}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}-x\cos\frac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}$$ （直接用洛必达法则）

$$=2\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{x\sin\frac{x}{2}}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x\sin\frac{x}{2}}$$

$$=2$$

杂题

都是原题

0

- x是一个在$[0,1]$中随机的变量，x取值为某个$c \in [0,1]$的概率正比于c^2
- 求$E(x)$

0

- 设$f(c)=P(x\le c)$
- 那么$f(c)=\frac{\int_0^c t^2dt}{\int_0^1 t^2dt}$（可以考虑用几何概型去理解）
- 求出$\int_0^1 f(x)dx$就是答案

1

- 第i个人的分数是$[l_i, r_i]$中的随机实数
- 问每个人排在某一名的概率

- 数据范围是$O\left(poly(n)\right)$可以过

1

- 如果取模的话，可以用微积分算
- 设$f_i(x)$为恰好有i个人的分数小于等于x的概率，显然是个分段函数并且每段都是多项式
- 对$f_i(x)$积分就能得到答案
- 可惜这样在不取模的时候会炸精度
- 标算是计算每个人最终在某个区间且这个区间内总共有k个人的概率，此时对于任意一个$j \in [1, k]$，这个人排名为j的概率是$\frac{1}{k}$
- 这样可以避开对次数很大的多项式积分

2

- source: CF1153F
- 有一个长度为l的线段
- 每次操作会随机选择两个端点（在$[0, l]$中独立随机两个实数），然后覆盖一次这两个端点之间的线段
- 求操作n次后被覆盖了至少k次的部分的期望长度
- $1 \leq k \leq n \leq 2000, 1 \leq l \leq 10^9$
- 答案对998244353取模

2

- 首先这个l显然是来逗你玩的，算出线段长度为1的答案然后乘上l即可
- 一个坐标为x的点被覆盖了正好m次的概率是（考虑几何概型）
$$f(x)=\binom{n}{m}\left(2x(1-x)\right)^m\left(1-2x(x-1)\right)^{n-m}$$
- 那么答案就是
$$\int_0^1 \sum_{m\geq k}\binom{n}{m}\left(2x(1-x)\right)^m\left(1-2x(x-1)\right)^{n-m}dx$$

2

- 实际上有个简单好写（难理解）得多的方法
- 在$l = 1$的时候，被覆盖了大于等于k次的区间长度等价于随机选择一个点，这个点被覆盖了大于等于k次的概率
- 这样就转化成了要独立随机选择$2n + 1$个点，被覆盖的次数显然只与这$2n + 1$个点的排列方式有关，显然每种可能的排列方式出现的概率是一样的
- 这样就转化成了离散的问题
- dp即可
- [我的代码]

3

- source: CF566C

给一棵树，树上点有点权w_u，边有边权。定义$dis(u,v)$为$u \to v$的路径上所有边的边权的和。定义$f(u,v) = dis^{\frac{3}{2}}(u,v)$，定义$g(u) = \sum_{v \in [1,n]} w_v f(u,v)$。你需要求出$g(u)$最小值，以及达到这个最小值的点。

$n \le 2 \times 10^5, 0 \le w_u \le 10^8, 1 \le l_i \le 10^3$

3

- 首先把距离的定义扩展到边上的任意一个点
- 当u固定、v在某一条路径上移动的时候，$f(u,v)$显然是个严格下凸的函数
- 凸函数带正权值求和之后仍然是凸函数，所以$g(u)$（在任意一条路径上移动的时候）是严格下凸的
- 所以可以直接爬山，实现的方式是点分，每次看往某个子树里面走会不会变优秀
- 显然最多只会有一个子树满足走进去之后会严格更优秀，否则就违背了严格下凸的性质（不能有多个局部最小值）

3

- 判断往某个子树内走是否会变优秀可以用导数
- 顺便提一句，这题边分不得，因为在加虚边的时候会破坏严格凸性
- 我的代码