第四章 分离性公理

4.1 $T_0, T_1, T_2(Hausdorff)$空间

T_0空间:
设 X 是一个拓扑空间, $\forall x, y \in X$, $x \neq y$,$\exists U_x, s.t. y \notin U_x$ 或 $\exists U_y, s.t. x \notin U_y$

命题4.1.1: 设X 是 T_0 空间 $\iff x, y \in X$, $x \neq y$, 则 $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$.

T_1空间:
设 X 是一个拓扑空间, $\forall x, y \in X$, $x \neq y$,$\exists U_x, s.t. y \notin U_x$.

> 易知T_1空间是T_0的，反之不然
> 例子：$X = 0, 1, \mathcal{J} = \{\varnothing, \{0\}, A\}$

命题4.1.2:
设 X 是拓扑空间, 则以下条件等价:
(1) X是T_1的
(2) X的单点集是闭集
(3) X的有限子集是闭集

命题4.1.3:
设 X 是 T_1 的, 则 x 是 $A \subset X$ 的聚点 $\iff \forall U_x, U_x \cap A$ 是无限集。

命题4.1.4:
设 X 是 T_1 的, 则有限个点构成的序列 $\{x_i\}_{i \geq 1} \in X$ 收敛于 $x \in X \iff \exists N, s.t. \forall i \geq N$, $x_i = x$.

$T_2(Hausdorff)$空间:
设 X 是一个拓扑空间, $\forall x, y \in X$, $x \neq y$,$\exists U_x, U_y, s.t. U_x \cap U_y = \varnothing$.

> 易知T_2空间是T_1的，反之不然
> 例子：无限多个点的有限补空间。

命题4.1.5:
T_2空间收敛序列只有一个收敛点。

命题4.1.6：
收敛序列极限点唯一的第一可数空间是T_2的。

4.2 正则, 正规, T_3, T_4 空间

集合领域：
设 X 是拓扑空间, $A, U \subset X$, $A \subset int(U)$, 则称 U 是 A 的领域。

正则空间：
设 X 是拓扑空间, $x \in X$, 闭集 $A \subset X$, $x \notin A$, $\exists U_x, U_A, s.t. U_x \cap U_A = \varnothing$, 则称 X 正则。

命题4.2.1：
设 X 是拓扑空间, X 正则 $\iff$ $\forall x \in X$ 和 x 的开领域 U, $\exists x$ 的开领域 V, $s.t. \overline{V} = U$.

正规空间：
设 X 是拓扑空间, 闭集 $A, B \subset X$, $A \cap B = \varnothing$, $\exists U_A, U_B, s.t. U_A \cap U_B = \varnothing$, 则称 X 正规。

> 正规非正则的例子：
> $X = \{1, 2, 3\}$,
> $\mathcal{J} = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$

命题4.2.1：
设 X 是拓扑空间, X 正规 $\iff$ $\forall$ 闭集 $A \subset X$ 和 A 的开领域 U, $\exists A$ 的开领域 V, $s.t.$ $\overline{V} = U$.

> 正则且正规非T_0的例子：
> $X = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{J} = \{\varnothing, \{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

> T_2非正则, 非正规的例子：
> $\mathbb{R}$ 的通常拓扑 $\mathcal{J}$
> $K = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}_+\}$
> $\mathcal{J}_1 = \{G - E : G \in \mathcal{J}, E \in K\}$
> $(\mathbb{R}, \mathcal{J}_1)$为例子。

T_3 空间： 正则且T_1

T_4 空间： 正规且T_2

命题4.2.2： 度量空间是T_4的

4.3 Uryshon引理和Tietze扩张定理

Uryshon引理：
设 X 是一个拓扑空间, $[a,b]$ 是闭区间, 则 X 正规 $\iff$ X 中任意两个不交闭集 A,B, 存在连续的 $f:X\to[a,b]$, 使得 $f|_A=a, f|_B=b$.

命题4.3.1：
设 X 是 T_4 的, C 是 X 的连通子集, $|C|>1$, 则 C 是不可数集。

引理：
设 X 是一个正规空间, A 是 X 的一个闭子集, λ 是一个正实数, 则对于任何一个连续映射：
g： $A\to[-\lambda,+\lambda]$, 存在着一个连续映射：$g^*:X\to[-\frac{1}{3}\lambda,+\frac{1}{3}\lambda]$, 使得对于任何的 $a\in A$, 有 $|g(a)-g^*(a)|\leq\frac{2}{3}\lambda$

Tietze扩张定理：
设 X 是一个拓扑空间, $[a,b]$ 是闭区间, 则 X 正规 $\iff$ X 中不交闭集 A, 连续的 $f:A\to[a,b]$, 有一个连续映射 $g:X\to[a,b]$ 是 f 的扩张。

4.4 完全正则空间, Tychonoff空间

完全正则空间：
设 X 是拓扑空间, $x\in X$, 闭集$B\subset X$, $x\notin B$, 存在一个连续映射 $f:X\to[0,1]$, 使得 $f(x)=0$, $f|_B=1$, 则称 X 是完全正则空间。

Tychonoff空间： 完全正则的T_1空间

命题4.1.1： 完全正则空间是正则的。

> Tychonoff空间是T_3的。
> T_4空间是Tychonoff的。

命题4.1.2： 正则且正规的空间是完全正则空间。

Tychonoff定理： 正则的$Lindel\ddot{o}f$ 空间是正规的。

4.5 分离性公理的性质

性质4.5.1： 都有拓扑不变性

性质4.5.2： 除了正规和T_4都有遗传性质,这两个有闭子空间遗传性质。

性质4.5.3： 除了正规和T_4都有可积性质

4.6 可度量化空间

Hilbert空间H的子空间 l^2：

$$l^2 \triangleq \{\{a_n\}_{n\geq 1} : a_n \in \mathbb{R}, \forall m, \sum_{n=1}^{m} a_n^2 < \infty\}$$

- l^2 是度量空间
- l^2 可分
- l^2 完备

Uryshon嵌入定理：
设 X 是第二可数的T_3空间, 则 X 可嵌入拓扑 l^2.