第三章 有关可数性的公理

3.1 第一、二可数空间

领域基:
设 X 是拓扑空间,$x \in X$,记 $\mathcal{N}_x$ 是点 x 的领域的全体。设 $\mathcal{V}_x \subset \mathcal{N}_x$, 若 $\mathcal{V}_x$ 中有 x 充分小的领域, 则 $\mathcal{V}_x$ 是 x 的一个领域基。

第一可数空间(A_1空间):
设 X 是一拓扑空间, $\forall x \in X$, x 有一个可数领域基。

> 命题: 度量空间是第一可数空间。

命题3.1.1:
X 是第一可数空间 $\iff$ $\forall x \in X$, x 有一个单调递减的可数领域基。

> 不是第一可数空间的例子：不可数集的可数补拓扑空间。

第二可数空间(A_2空间):
设 X 是拓扑空间, X 有一可数拓扑基。

命题3.1.2: 第二可数空间是第一可数的。

> 逆命题不成立，例子：不可数离散空间。

命题3.1.3: 第一(二)可数是拓扑不变性。

可遗传性: 拓扑空间的某种性质其开子空间(闭子空间)也有这种性质。

> 局部连通性是开子空间可遗传性

命题3.1.4: 第一(二)可数是可遗传性质。

命题3.1.5: $X \times Y$第一(二)可数 $\iff$ X, Y第一(二)可数

命题3.1.6: 设 X 第一可数, $A \subset X$,$x \in X$, 则 x 是 A 的聚点 $\iff$ $\exists x_n \in A - \{x\}$, $s.t. x_n \to x(n \to \infty)$.

命题3.1.7: 设 X 第一可数, $x \in X$,$f: X \to Y$, 则 f 在 x 连续 $\iff$ $\forall x_n \to$

$x, f(x_n) \to f(x)(n \to \infty)$

3.2 可分空间

稠密：
设 X 是一个拓扑空间, $A \subset X$, 如果 $\forall$ 非空开集 U, $U \cap A \neq \varnothing$, 则称 A 在 X 中稠密。

命题3.2.1： A 在 X 中稠密 $\iff \bar{A} = X$

命题3.2.2：
设 X 第一可数, $A \subset X$, 则 A 是 X 的稠密子集 $\iff \forall x \in X, \exists \{x_n\}_{n \geq 1} \in A$, $s.t. x_n \to x(n \to \infty)$.

命题3.2.3：
设 X 是一个拓扑空间, A 是 X 的稠密子集. 又设 $f, g : X \to \mathbb{R}$ 连续. 若 $f|_A = g|_A$, 则 $f = g$.

可分空间：
设 X 是一个拓扑空间, 如果 X 有一个可分的稠密子集, 则称 X 可分。

命题3.2.4： 第二可数空间是可分的。

> 逆命题不成，例：Sorgenfrey直线

> **推论：** 第二可数的子空间是可分的。

重要例子：
设 $(X, \mathcal{J})$ 是一个拓扑空间, $\infty \notin X$, 记 $X^* = X \cup \{\infty\}$.
给 X^* 定义如下拓扑： $U \in \mathcal{J}^* \iff U = \varnothing$ 或 $\exists V \in \mathcal{J}, s.t. U = V \cup \{\infty\}$.
X^* 具有以下性质：
(1) $\{\infty\}$ 在 X^* 中稠密
(2) X^* 第二可数 $\iff X$ 第二可数
(3) X 是 X^* 的子空间
由此可得：

- 可分空间不一定是第二可数的
- 可分空间的子空间不一定可分

命题3.2.5： 可分度量空间是第二可数的。

> 推论：可分度量空间的子空间是可分的。

命题3.2.6： 设 X 是度量空间, 则 X 可分 $\iff X$ 第二可数。

> 不可分的度量空间的例子：
> $l^{\infty} \xlongequal{\Delta}$ 有界数列全体, $d(x,y) = sup_{x\geq 1}|x_n - y_n|$

命题3.2.7： 可分空间有拓扑不变性。

命题3.2.8： 可分空间有有限可积性。

3.3 $Lindel\ddot{o}f$ 空间

覆盖：
设 $\mathscr{A}$ 是一个集族, B 是一个集合, 如果 $\cup_{A\in\mathscr{A}} A \supset B$, 则称 $\mathscr{A}$ 是 B 的一个覆盖。

$Lindel\ddot{o}f$ **空间：**
设 X 是一个拓扑空间, 若其任意一个开覆盖都有可数子覆盖, 则称 X 为 $Lindel\ddot{o}f$ 空间。

命题3.3.1： 第二可数空间是$Lindel\ddot{o}f$ 空间。

> 第二可数空间的子空间是$Lindel\ddot{o}f$ 空间。

> 逆命题不成立，例：不可数集的可数补空间。

命题3.3.2： $Lindel\ddot{o}f$ 的度量空间是第二可数空间。

命题3.3.3： $Lindel\ddot{o}f$ 是拓扑不变性。

命题3.3.4： $Lindel\ddot{o}f$ 是闭子空间遗传性。

> 子空间遗传性不成立的例子：
> 设 X 是一个不可数集, $z \in X$, 令 $X_1 = X - \{z\}$
> 定义X的拓扑：$\mathscr{J} = 2^{X_1} \cup \{U \subset X : z \in U$且$U^c$可数$\}$.

> 有限可积性不成立的例子：Sorgenfrey平面

命题3.3.5： 设拓扑空间 X 的每一个子空间都是$Lindel\ddot{o}f$ 空间, 如果 $A \subset X$ 是一个不可数集, 则 $A \cap d(A) \neq \varnothing$.