



拓扑空间与连续映射

1.1 拓扑空间的定义

度量公理:

设 X 是非空集合, $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}, \forall x, y, z \in X$,有

(1) (正定性) $d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(2) (对称性) $d(x, y) = d(y, x)$

(3) (三角不等性) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$

则称 d 为 X 的一个度量。

开集公理:

设 X 是一个非空集合, $\mathcal{J} \subset X$, 如果:

(1) $X, \emptyset \in \mathcal{J}$

(2) $A, B \in \mathcal{J}$, 则 $A \cap B \in \mathcal{J}$

(3) 设 $\mathcal{J}_1 \subset \mathcal{J}$, 则 $\bigcup_{A \in \mathcal{J}_1} A \in \mathcal{J}$

则称 \mathcal{J} 为 X 的一个拓扑。

拓扑空间与开集的定义:

设 X 是一个非空集合, $\mathcal{J} \subset X$, 如果 \mathcal{J} 满足开集公理, 则称 \mathcal{J} 为 X 的一个拓扑, \mathcal{J} 中的元是 X 上的开集, (X, \mathcal{J}) 是拓扑空间。

问题1.1.1: 对于一个非空集合 X , 只有一个拓扑吗? (答案显然是NO)

例: 设 X 是一个非空集合:

(1) $\mathcal{J} = 2^X$ (幂集) \rightarrow 离散拓扑空间

(2) $\mathcal{J} = \{\emptyset, X\} \rightarrow$ 平凡拓扑空间

(3) $\mathcal{J} = \{\emptyset, A, A^c, X\} (A \subset X, A \neq \emptyset)$

一些拓扑的符号: \mathcal{J}_e (欧氏拓扑), \mathcal{J}_d (度量拓扑)

1.2 拓扑空间中的点集

由开集诱导出的一系列定义

设 (X, \mathcal{J}) 是拓扑空间,

领域: $x \in X, U \subset X$, 如果存在开集 V , 使得 $x \in V \subset U$, 则称 U 是 x 的领域。

内点: $x \in X$, 如果存在 x 的领域 U , 使得 $U \cap X^c = \emptyset$, 则称 x 是 X 的内点。

内部: 全体内点构成的集合, 记作 $\text{int}(E)$ 。

聚点: $x \in X$, 如果任取 x 的领域 U , 使得 $U \cap (X - \{x\}) \neq \emptyset$, 则称 x 是 X 的聚点。

导集: 全体聚点构成的集合, 记作 $d(E)$ 。

孤立点: $x \in X$, 如果存在 x 的领域 U , 使得 $U \cap (X - \{x\}) = \emptyset$, 则称 x 是 X 的孤立点。

边界点: $x \in X$, 如果任取 x 的领域 U , 使得 $U \cap X \neq \emptyset$ 且 $U \cap X^c \neq \emptyset$, 则称 x 是 X 的聚点。

边界: 全体边界点构成的集合, 记作 $\partial(E)$ 。

闭包: 集合和其导集的并, 记作 \overline{E} 。

闭集: 补集是开集的集合。

点集的一些性质:

(1) $V \in \mathcal{J} \Leftrightarrow \forall x \in V, V$ 是 x 的领域。

(2) E 是闭集 $\Leftrightarrow d(E) \subset E$ 。

(3) 集合的内部是含于集合最大的开集, 集合的闭包是包含集合最小的闭集。

由拓扑空间中的点集, 可以定义以下两种拓扑:

有限补拓扑

设 X 是非空集合, 设 X 的子集 $\mathcal{J} = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X : A^c \text{是有限集}\}$, 易证 \mathcal{J} 是 X 的拓扑, 称 \mathcal{J} 为 X 的有限补拓扑, 称 (X, \mathcal{J}) 为有限补拓扑空间。

可数补拓扑

设 X 是非空集合, 设 X 的子集 $\mathcal{J} = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X : A^c \text{是可数集}\}$, 易证 \mathcal{J} 是 X 的拓扑, 称 \mathcal{J} 为 X 的可数补拓扑, 称 (X, \mathcal{J}) 为可数补拓扑空间。

连续映射的定义:

设 X 和 Y 是两个拓扑空间, $f : X \rightarrow Y$, 如果 Y 中每一个开集 U 的原像 $f^{-1}(U)$ 是 X 的开集, 则称 f 连续。

同胚的定义:

设 X 和 Y 是两个拓扑空间, 如果 $f : X \rightarrow Y$ 是一个双射, 并且 f 和 f^{-1} 连续, 则称 f 是一个同胚映射, 称 X 和 Y 同胚。

同胚是一个等价关系。

由此提出**拓扑学的研究内容**:

- (1) 判断两个拓扑空间是否同胚
- (2) 可度量化空间

1.3 映射诱导拓扑

由连续映射, 我们可以诱导出以下拓扑:

- (1) 设 X 是一个非空集合, Y 是一个拓扑空间, $f: X \rightarrow Y$, 给 X 定义一个极小拓扑, $\mathcal{J} = \{f^{-1}(V) : V \in \mathcal{J}_Y\}$, 使得 f 连续.
- (2) 设 X 是一个拓扑空间, Y 是一个非空集合, $f: X \rightarrow Y$, 给 Y 定义一个极大拓扑 $\mathcal{J} = \{V : f^{-1}(V) \in \mathcal{J}_X\}$, 使得 f 连续.

以上两个命题易证, 由此可引出以下空间的拓扑:

子空间拓扑

设 X 是一个拓扑空间, $A \subset X$, 定义包含映射:

$$i: A \rightarrow X, i(x) = x, x \in A.$$

则使 i 连续的 A 的极小拓扑为 $\mathcal{J} = \{i^{-1}(V) : V \in \mathcal{J}_X\} = \{V \cap A : V \in \mathcal{J}_X\}$, 则称 (A, \mathcal{J}) 为 X 的拓扑子空间, \mathcal{J} 为 A 关于 X 的子空间拓扑.

子空间拓扑的性质:

- (1) $U \in \mathcal{J}_A \Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{J}_X, s.t. U = V \cap A$.
- (2) U 是 A 的闭子集 $\Leftrightarrow \exists X$ 的闭子集 $V, s.t. U = V \cap A$.
- (3) (遗传性质) 设 $A \subset B \subset X$, 则 A 关于 X 的子空间拓扑 = A 关于的 B 子空间拓扑.

证明: (1), (2)由子空间拓扑的定义易得.

$$(3): \mathcal{J}_A^B = \{V \cap A : V \in \mathcal{J}_B\} = \{V \cap B \cap A : V \in \mathcal{J}_X\} = \{V \cap A : V \in \mathcal{J}_X\} = \mathcal{J}_A^X.$$

乘积空间拓扑

设 X_1 和 X_2 是两个拓扑空间, 投影映射 $\rho_i: X_1 \times X_2 \rightarrow X_i, i = 1, 2$. 则使投影映射 ρ_1, ρ_2 连续的极小拓扑的拓扑子基为 $\mathcal{S} = \{U \times V : U \in \mathcal{J}_{X_1}, V \in \mathcal{J}_{X_2}\}$.

命题 1.3.1:

设 X, Y, Z 为拓扑空间, 则 $f: X \rightarrow Y \times Z$ 连续 $\Leftrightarrow \rho_1 \circ f, \rho_2 \circ f$ 连续

命题 1.3.2

设 X, Y, Z 为拓扑空间, 则 $(X \times Y) \times Z$ 与 $X \times Y \times Z$ 同胚.

商空间拓扑

设 X 拓扑空间, \sim 为 X 上的一个等价关系, X/\sim 是商集,映射 $\pi : X \rightarrow X/\sim$,则使映射 π 连续的极大拓扑为 $\mathcal{J} = \{V \in X/\sim : \pi^{-1}(V) \in \mathcal{J}_X\}$.

命题 1.3.3

设 X 和 Y 为拓扑空间,映射 $f : X \rightarrow Y$ 满射,由此定义等价关系 \sim ,则 X/\sim 与 Y 同胚.

1.4 拓扑基与拓扑子基

拓扑基的定义:

设 X 是拓扑空间, $\mathcal{B} \subset X$,如果:

- (1) $\cup_{B \in \mathcal{B}} B = X$.
- (2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \forall x \in B_1 \cap B_2, \exists B \in \mathcal{B}, s.t. x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

则称 \mathcal{B} 为 X 的一个拓扑基.

(2)的等价描述:

$$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \exists \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}, s.t. B_1 \cap B_2 = \cup_{B \in \mathcal{B}_1} B.$$

定理 1.4.1:

设 \mathcal{B} 是拓扑空间 X 的开集族, \mathcal{B} 是的一个基 \iff 对于每一个 x 和 x 的每一个领域 $U_x, \exists V_x \in \mathcal{B}, s.t. V_x \subset U_x$.

生成拓扑:

设 X 是非空集合, \mathcal{B} 为 X 的一个拓扑基,设 X 的子集 $\mathcal{J} = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X : \exists \mathcal{B}_A \subset \mathcal{B}, s.t. A = \cup_{B \in \mathcal{B}_A} B\}$, 易证 \mathcal{J} 是 X 的拓扑, 称 \mathcal{J} 为 \mathcal{B} 生成的拓扑.

拓扑子基的定义

设 X 是拓扑空间, $\mathcal{S} \subset X$,如果: $\cup_{S \in \mathcal{S}} S = X$.

则称 \mathcal{S} 为 X 的一个拓扑子基.

生成拓扑基:

设 X 是非空集合, \mathcal{S} 为 X 的一个拓扑子基,设 X 的子集 $\mathcal{B} = \{S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n : S_j \in \mathcal{S}, 0 \leq j \leq n\}$,易证 \mathcal{B} 是 X 的拓扑基,称 \mathcal{B} 为 \mathcal{S} 生成的拓扑基,由 \mathcal{B} 生成的拓扑也称为由 \mathcal{S} 生成的拓扑.

命题1.4.1:

设 X 和 Y 是两个拓扑空间, Y 的拓扑由子基 \mathcal{S} 生成, $f : X \rightarrow Y$,则 f 连续 $\iff \forall V \in$

$\mathcal{S}, f^{-1}(V) \in \mathcal{I}_X$.

证明:

" \Rightarrow :" 由连续的定义, 易证.

" \Leftarrow :" $\forall U \in \mathcal{I}_Y, \exists \mathcal{B}_U \subset \mathcal{B}_Y, s.t. U = \cup_{B \in \mathcal{B}_U} B$.

$\forall B \in \mathcal{B}_U$, 又 \mathcal{I}_Y 由 \mathcal{S} 生成, 则 $\exists \{S_i\}_{0 \leq i \leq n} \subset \mathcal{S}, s.t. \cap_{i=0}^n S_i = B$.

又 $f^{-1}(S_i) \in \mathcal{I}_X$, 则 $f^{-1}(B) = f^{-1}(\cap_{i=0}^n S_i) \in \mathcal{I}_X$, 则 $f^{-1}(U) = f^{-1}(\cup_{B \in \mathcal{B}_U} B) \in \mathcal{I}_X$.

所以 f 连续.

1.5 拓扑空间中的序列

定义 1.5.1:

设 X 是一个拓扑空间, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 的一个点列, $x_0 \in X$, 如果 $\forall x_0$ 的邻域 $U, \exists N, \forall n > N$, 有 $x_n \in U$, 则称 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 x_0 , 记为 $x_n \rightarrow x_0 (n \rightarrow \infty)$.

同一点列收敛的点不唯一 (例: 平凡拓扑空间)

命题 1.5.2:

设 X 是一拓扑空间, $x \in X, X - \{x\}$ 中有一点列收敛于 x , 则 x 是聚点.

命题 1.5.3:

设 X 是不可数集 给 X 定义可数补拓扑, 则 $\exists x_0 \in X, s.t. x_n \rightarrow x_0 (n \rightarrow \infty) \iff \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是最终常点列.

推论: 在这个空间中, 若 A 是不可数集, 则每个点 $x \in A$ 都是聚点.

命题 1.5.4:

设 X 是拓扑空间, $x_0 \in X, f$ 连续, 若 f 在 x_0 连续, 则 $\forall x_n \rightarrow x_0$, 有 $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

逆命题不一定成立.