拓扑空间与连续映射

1.1 拓扑空间的定义

度量公理：
设X是非空集合,d：$X\times X\to\mathbb{R},\forall x,y,z\in X$,有
(1) (正定性) $d(x,y)\ge 0,d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$
(2) (对称性) $d(x,y)=d(y,x)$
(3) (三角不等性) $d(x,y)\le d(x,z)+d(y,z)$
则称d为X的一个度量。

开集公理：
设X是一个非空集合,$\mathcal{J}\subset X$，如果：
(1) $X,\varnothing\in\mathcal{J}$
(2) $A,B\in\mathcal{J}$,则$A\cap B\in\mathcal{J}$
(3)设$\mathcal{J}_1\subset\mathcal{J}$, 则 $\cup_{A\in\mathcal{J}_1}A\in\mathcal{J}$
则称$\mathcal{J}$为X的一个拓扑。

拓扑空间与开集的定义：
设X是一个非空集合,$\mathcal{J}\subset X$,如果 $\mathcal{J}$ 满足开集公理，则称 $\mathcal{J}$ 为 X 的一个拓扑, $\mathcal{J}$ 中的元是X上的开集，$(X,\mathcal{J})$ 是拓扑空间。

问题1.1.1: 对于一个非空集合X，只有一个拓扑吗？（答案显然是NO）

> 例：设X是一个非空集合：
> (1) $\mathcal{J}=2^X(\text{幂集})\to$ 离散拓扑空间
> (2) $\mathcal{J}=\{\varnothing,X\}\to$ 平凡拓扑空间
> (3) $\mathcal{J}=\{\varnothing,A,A^c,X\}(A\subset X,A\ne\varnothing)$

> 一些拓扑的符号：$\mathcal{J}_e$ (欧氏拓扑)，$\mathcal{J}_d$（度量拓扑）

1.2 拓扑空间中的点集

由开集诱导出的一系列定义

设$(X,\mathcal{J})$是拓扑空间，
领域： $x\in X$，$U\subset X$，如果存在开集V，使得$x\in V\subset U$，则称 U 是 x 的领域。
内点： $x\in X$，如果存在 x 的领域U，使得$U\cap X^c=\varnothing$，则称 x 是 X 的内点。
内部： 全体内点构成的集合，记作 $int(E)$。
聚点： $x\in X$，如果任取 x 的领域U，使得$U\cap(X-\{x\})\neq\varnothing$，则称 x 是 X 的聚点。
导集： 全体聚点构成的集合,记作 $d(E)$。
孤立点： $x\in X$，如果存在 x 的领域U，使得$U\cap(X-\{x\})=\varnothing$，则称 x 是 X 的孤立点。
边界点： $x\in X$，如果任取 x 的领域U，使得$U\cap X\neq\varnothing$ 且 $U\cap X^c\neq\varnothing$，则称 x 是 X 的聚点。
边界： 全体边界点构成的集合,记作 $\partial(E)$。
闭包： 集合和其导集的并，记作 $\overline{E}$。
闭集： 补集是开集的集合。

点集的一些性质:
(1) $V\in\mathcal{J}\Leftrightarrow\forall x\in V$，$V$ 是 x 的领域。
(2) E 是闭集$\Leftrightarrow$ $d(E)\subset E$。
(3) 集合的内部是含于集合最大的开集，集合的闭包是包含集合小的最闭集。

由拓扑空间中的点集，可以定义以下两种拓扑：

> **有限补拓扑**
> 设X是非空集合，设X的子集$\mathcal{J}=\{\varnothing\}\cup\{A\subset X: A^c$是有限集$\}$，易证$\mathcal{J}$是$X$的拓扑，称$\mathcal{J}$为$X$的有限补拓扑，称$(X,\mathcal{J})$为有限补拓扑空间。
> **可数补拓扑**
> 设X是非空集合，设X的子集$\mathcal{J}=\{\varnothing\}\cup\{A\subset X: A^c$是可数集$\}$，易证$\mathcal{J}$是$X$的拓扑，称$\mathcal{J}$为$X$的可数补拓扑，称$(X,\mathcal{J})$为可数补拓扑空间。

连续映射的定义:
设X和Y是两个拓扑空间,$f:X\to Y$,如果Y中每一个开集U的原像$f^{-1}(U)$是中X的开集,则称f连续.

同胚的定义:
设X和Y是两个拓扑空间,如果$f:X\to Y$是一个双射，并且f和f^{-1}连续,则称f是一个同胚映射，称X和Y同胚.

> 同胚是一个等价关系.

> 由此提出**拓扑学的研究内容:**
> (1) 判断两个拓扑空间是否同胚
> (2) 可度量化空间

1.3 映射诱导拓扑

由连续映射，我们可以诱导出以下拓扑:
(1) 设X是一个非空集合,Y是一个拓扑空间,$f: X \to Y$,给X定义一个极小拓扑,$\mathscr{J} = \{f^{-1}(V): V \in \mathscr{J}_Y\}$,使得$f$连续.
(2) 设X是一个拓扑空间,Y是一个非空集合,$f: X \to Y$,给Y定义一个极大拓扑$\mathscr{J} = \{V: f^{-1}(V) \in \mathscr{J}_X\}$,使得$f$连续.

以上两个命题易证,由此可引出以下空间的拓扑:
子空间拓扑
设X是一个拓扑空间,$A \subset X$,定义包含映射:
$i: A \to X, i(x) = x, x \in A.$
则使i连续的A的极小拓扑为$\mathscr{J} = \{i^{-1}(V): V \in \mathscr{J}_X\} = \{V \cap A: V \in \mathscr{J}_X\}$,
则称$(A, \mathscr{J})$为X的拓扑子空间,$\mathscr{J}$为A关于X的子空间拓扑.

> 子空间拓扑的性质:
> $(1) U \in \mathscr{J}_A \Leftrightarrow \exists\, V \in \mathscr{J}_X, s.t.\, U = V \cap A.$
> $(2) U$是A的闭子集$\Leftrightarrow \exists\, X$的闭子集$V, s.t.\, U = V \cap A.$
> (3)(遗传性质)设$A \subset B \subset X$,则A关于X的子空间拓扑 $=$ A 关于的B子空间拓扑.
>
> > 证明: $(1), (2)$由子空间拓扑的定义易得.
> > $(3): \mathscr{J}_A^B = \{V \cap A: V \in \mathscr{J}_B\} = \{V \cap B \cap A: V \in \mathscr{J}_X\} = \{V \cap A: V \in \mathscr{J}_X\} = \mathscr{J}_A^X.$

乘积空间拓扑
设X_1和X_2是两个拓扑空间,投影映射$\rho_i = X_1 \times X_2 \to X_i, i = 1, 2.$则使投影映射$\rho_1, \rho_2$连续的极小拓扑的拓扑子基为$\mathscr{S} = \{U \times V: U \in \mathscr{J}_{X_1}, V \in \mathscr{J}_{X_2}\}.$

> **命题 1.3.1:**
> 设X, Y, Z为拓扑空间，则$f: X \to Y \times Z$连续$\Leftrightarrow$ $\rho_1 \circ f, \rho_2 \circ f$连续

> **命题 1.3.2**
> 设X, Y, Z为拓扑空间,则$(X \times Y) \times Z$与$X \times Y \times Z$同胚.

商空间拓扑
设X拓扑空间,$\sim$为X上的一个等价关系,$X/_{\sim}$是商集,映射$\pi : X \to X/_{\sim}$,则使映射π连续的极大拓扑为$\mathcal{J} = \{V \in X/_{\sim} : \pi^{-1}(V) \in \mathcal{J}_X\}$.

> **命题 1.3.3**
> 设X和Y为拓扑空间,映射$f : X \to Y$满射,由此定义等价关系$\sim$,则$X/_{\sim}$与Y同胚.

1.4 拓扑基与拓扑子基

拓扑基的定义:
设X是拓扑空间,$\mathscr{B} \subset X$,如果:
$(1)\ \cup_{B\in\mathscr{B}} B = X.$
$(2)\forall B_1, B_2 \in \mathscr{B}, \forall x \in B_1 \cap B_2, \exists B \in \mathscr{B}, s.t.\ x \in B \subset B_1 \cap B_2.$
则称$\mathscr{B}$为X的一个拓扑基.

> (2)的等价描述:
> $\forall B_1, B_2 \in \mathscr{B}, \exists \mathscr{B}_1 \subset \mathscr{B}, s.t.\ B_1 \cap B_2 = \cup_{B\in\mathscr{B}_1} B.$

拓扑基的等价定义
设 X 是拓扑空间, $\mathscr{B} \subset X$, $\forall U \in \mathcal{J}_X$,$\exists \mathscr{B}_U \subset \mathscr{B}$,$s.t.\ \cup_{B\in\mathscr{B}_U} B = U$, 则称$\mathscr{B}$ 为拓扑基。

> **定理 1.4.1:**
> 设$\mathscr{B}$是拓扑空间X的开集族,$\mathscr{B}$是的一个基 $\iff$ 对于每一个x和x的每一个领域
> $U_x, \exists V_x \in \mathscr{B}, s.t.\ V_x \subset U_x.$

> **生成拓扑:**
> 设X是非空集合,$\mathscr{B}$为X的一个拓扑基,设X的子集$\mathcal{J} = \{\varnothing\} \cup \{A \subset X : \exists \mathscr{B}_A \subset \mathscr{B}, s.t.\ A = \cup_{B\in\mathscr{B}_A} B\}$，易证$\mathcal{J}$是$X$的拓扑，称$\mathcal{J}$为$\mathscr{B}$生成的拓扑.

拓扑子基的定义
设X是拓扑空间,$\mathscr{S} \subset X$,如果: $\cup_{S\in\mathscr{S}} S = X.$
则称$\mathscr{S}$为X的一个拓扑子基.

> **生成拓扑基:**
> 设X是非空集合,$\mathscr{S}$为X的一个拓扑子基,设X的子集$\mathscr{B} = \{S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n\text{:}\ S_j \in \mathscr{S}, 0 \le j \le n\}$,易证$\mathscr{B}$是$X$的拓扑基,称$\mathscr{B}$为$\mathscr{S}$生成的拓扑基,由$\mathscr{B}$生成的拓扑也称为由$\mathscr{S}$生成的拓扑.

> **命题1.4.1:**
> 设X和Y是两个拓扑空间,Y的拓扑由子基$\mathscr{S}$生成,$f:X\to Y$,则f连续$\Leftrightarrow\forall V\in\mathscr{S}, f^{-1}(V)\in\mathcal{J}_X$.
>
> > 证明:
> > "$\Rightarrow$:" 由连续的定义,易证.
> > "$\Leftarrow$:" $\forall\, U\in\mathcal{J}_Y,\ \exists\,\mathscr{B}_U\subset\mathscr{B}_Y, s.t.\ U=\cup_{B\in\mathscr{B}_U}B.$
> > $\forall\, B\in\mathscr{B}_U$,又$\mathcal{J}_Y$由$\mathscr{S}$生成,则 $\exists\{S_i\}_{0\leq i\leq n}\subset\mathscr{S}, s.t.\ \cap_{i=0}^n S_i=B.$
> > 又$f^{-1}(S_i)\in\mathcal{J}_X$，则$f^{-1}(B)=f^{-1}(\cap_{i=0}^n S_i)\in\mathcal{J}_X$，则$f^{-1}(U)=f^{-1}(\cup_{B\in\mathscr{B}_U}B)\in\mathcal{J}_X$.
> > 所以f连续.

1.5 拓扑空间中的序列

定义 1.5.1:
设X是一个拓扑空间,$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是X的一个点列,$x_0\in X$,如果$\forall x_0$的领域$U,\exists N,\forall n>N$,有$x_n\in U$,则称$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛于x_0,记为$x_n\to x_0(n\to\infty)$.

> 同一点列收敛的点不唯一（例：平凡拓扑空间）

命题 1.5.2:
设X是一拓扑空间,$x\in X, X-\{x\}$中有一点列收敛于x,则x是聚点.

命题 1.5.3:
设X是不可数集 给X定义可数补拓扑，则$\exists x_0\in X, s.t.\ x_n\to x_0(n\to\infty) \iff \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.是最终常点列.

> 推论：在这个空间中,若A是不可数集,则每个点$x\in A$都是聚点.

命题 1.5.4:
设X是拓扑空间,$x_0\in X, f$连续,若f在x_0连续,则$\forall x_n\to x_0$,有$f(x_n)\to f(x_0)$.

> 逆命题不一定成立.