连通空间

2.1 连通空间

提出以下问题:
$Q1:[0,1]$ 与 $[0,1]\cup[2,4]$ 同胚?
$Q2:[0,1)$ 与 $(0,1)$ 同胚?
$Q3:\mathbb{R}^1$ 与 $\mathbb{R}^2$ 同胚?

连通空间的定义:
设X是拓扑空间，若存在开集A,B，$A\cap B=\varnothing, A\cup B=X$,则$X$称不连通；否则称$X$连通。

连通空间的等价定义:
X连通 $\Leftrightarrow X$不含既开又闭的非空真子集。

> 例1：$[0,1]\cup(2,4]$ 不连通
> 例2：实数空间$\mathbb{R}$连通

连通子集的定义
设X是拓扑空间，$A\subset X$, A 是连通的，则称 A 是 X 的连通子集。

命题 2.1.1:
设X是拓扑空间，Z是X的连通子集，若$Z\subset A\subset\overline{Z}$，则$A$是连通的，特别地，若$Z$连通，则$\overline{Z}$连通。

> 证明:
> 假设A是不连通的，则存在非空开集B,C,使得$B\cap C=\varnothing$且$B\cup C=A$。
> 又$Z\subset A\subset\overline{Z}$，由子空间拓扑的遗传性质，得$Z\cap B$和$Z\cap C$是开集。
> 又$(Z\cap B)\cap(Z\cap C)=\varnothing$，$(Z\cap B)\cup(Z\cap C)=A$,则$Z$不连通，矛盾!
> 所以A是连通的。

命题 2.1.2:
设X是拓扑空间，$\{A_n\}_{n\in I}$是X的连通子空间，且$\cap_{n\in I}A_n\neq\varnothing$，则$\cup_{n\in I}A_n$连通。

命题 2.1.3:
设X是一个拓扑空间,$\forall x,y\in X,\exists X$的连通子集$C_{xy},s.t.\ x,y\in C_{xy}$,则$X$连通.

命题 2.1.4：

设$f:X\to Y$是连续满射,X联通,则Y连通。特别地，连通性拓扑不变性质。

拓扑不变性质：

拓扑空间的性质，其任何一个连续映射下的像也具有

可商性质：

拓扑空间的性质，其任何一个商空间也具有

命题2.1.5：

$X\times Y$连通$\iff X,Y$连通

> 推论:$\mathbb{R}$的子集A连通$\iff A$是区间

> 例题：
> 设$f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$是一个同胚映射，则$f(0)=0.$

中间值定理：

设X是一连通空间,$f:X\to\mathbb{R}$连续,则非(X)是$\mathbb{R}$中的一个区间。

不动点定理：

设$f:[0,1]\to[0,1]$连续,则$\exists z,s.t.f(z)=z$。

Borusk-Ulam定理：

设$f:S^1\to\mathbb{R}$连续, $\exists x,-x,s.t.f(x)=f(-x)$。

命题2.1.6：

$n>1$维欧式空间$\mathbb{R}^n$的子集$\mathbb{R}^n-\{0\}$是一个连通子集。

命题2.1.7：

$\mathbb{R}^2$与$\mathbb{R}$不同胚。

2.2 连通分支

目的：X不连通→极大连通子集的并

点连通：

设X是一个拓扑空间, $x,y\in X$,如果有一连通子集包含 x,y 则称点 x,y 连通。

> 点连通关系是等价关系

连通分支:
每一个点连通等价类称为连通分支

定理2.2.1:
设X是一个拓扑空间, C是X的连通分支,则:
(1) 如果Y是X的连通子集, $Y\cap C\neq\varnothing$, 则$Y\subset C$
(2) C是一个连通子集
(3) C是一个闭集

> 一般来说，连通分支不一定是开集，如$\mathbb{Q}$的连通分支是单点集。

可积性质:
拓扑空间中每一个坐标空间具有性质蕴含着积空间有此性质

定理2.2.2: 连通性是可积性质。

2.3 局部连通空间

目的: 什么样的拓扑空间的连通分支是开集

局部连通空间:
设X是一个拓扑空间, $x\in X$, 如果 x 的每一个领域都包含着某一个连通的领域 V, 则称 X 在点 x 局部连通。若 X 在其每一个点都是局部连通的,则称 X 是局部连通空间。

> 连通不一定局部连通
>
> > 例：拓扑正弦曲线:$X\overset{\Delta}{=\!=}\{(x,sin\frac{1}{x}):x\in(0,\frac{2}{\pi}]\}\cup(0\times[-1,1])$

> 局部连通不一定连通
>
> > 例：$[0,1]\cup[2,4]$

命题2.3.1:
设 X 是局部连通空间, C 是 X的一个连通分支，则 C 是开集。

命题2.3.2：
设 X 是局部连通空间, 其有一个基每个元素都是连通的。

> 推论：
> 设 X 是局部连通空间, $\mathscr{B}$ 是 X 的全体连通开集, 则 $\mathscr{B}$ 是拓扑基。

命题2.3.3：
局部连通是拓扑不变性质。

命题2.3.4：
$X\times Y$局部连通 $\Longleftrightarrow X,Y$局部连通

2.4 路连通空间

路：
设 X 是拓扑空间, 连续 $f:[0,1]\to X$ 叫做 X 中的一条路，$f(0)$ 和 $f(1)$ 是路的起点和终点。当 $x=f(0),y=f(1)$ 则称 f 是 X 中 x 到 y 的一条路。

> 路连通关系是等价关系

路连通空间：
设 X 是拓扑空间, 如果 $\forall x,y\in X$, $\exists X$ 中的一条路, 则称 X 是路连通的。

命题2.4.1： 路连通空间是连通的。

> 反之，连通空间不一定是路连通的
>
> > 例子：拓扑正弦曲线

> 路连通空间不一定是局部连通空间
>
> > 例子：$X\xlongequal{\Delta}\{0\}\times[0,1]\cup[0,1]\times\{0\}\cup(\cup_{n\geq 0}\{\frac{1}{2^n}\}\times[0,1])$

> 局部连通空间不一定是路连通空间
>
> > 例子：离散拓扑空间

命题2.4.2： 路连通是拓扑不变性质。

命题2.4.3：

$X \times Y$路连通 $\Longleftrightarrow X, Y$路连通

黏结引理：

设 X 是拓扑空间, A, B 是 X 的开(闭)子集, 满足 $X = A \cup B$,又设 Y 是一个拓扑空间, $f : A \to Y$,$g : B \to Y$ 连续且$f|_{A \cap B} = g|_{A \cap B}$, 则 $h(x) = \begin{cases} f(x), x \in A \\ g(x), x \in B \end{cases}$ ，连续。

路连通分支： 路连通关系的等价类

命题2.4.4： $\mathbb{R}^n$ 中的连通开集是路连通的。