第四章 大数定理与中心极限

4.1 随机变量序列的两种收敛性

依概率收敛 $X_n \xrightarrow{P} X$
$P(|X_n - X| \geq \epsilon) \to 0(n \to \infty)$

> 依概率收敛满足四则运算

按分布收敛，弱收敛 $X_n \xrightarrow{L} X$
$\forall$ 连续点$x, \lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$

> 若$X_n \xrightarrow{P} X$，则$X_n \xrightarrow{L} X$、

> 当收敛于常数时，上面命题为充要条件

4.2 特征函数

特征函数：$\varphi(t) = E(e^{itX}), -\infty < t < +\infty$

> 常用的特征函数(定义计算):
> **单点分布** $P(X = a) = 1$
> $\varphi(t) = e^{ita}$
> **0-1分布** $P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}, x = 0, 1$
> $\varphi(t) = 1 - p + pe^{it}$
> **泊松分布**$P(\lambda)$
> $\varphi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$
> **均匀分布**$U(a, b)$
> $\varphi(t) = \frac{e^{ibt}-e^{iat}}{it(b-a)}$
> **标准正态分布**$N(0, 1)$
> $\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$
> **指数分布**$Exp(\lambda)$
> $\varphi(t) = (1 - \frac{it}{\lambda})^{-1}$

性质:
$|\varphi(t)| \leq \varphi(0) = 1$
$\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$
$Y = aX + b, \varphi_Y(t) = e^{ibt}\varphi_X(at)$
X, Y独立，$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$
$E(X^l)$存在，则$\varphi(t)$可求l次导，有$\varphi^{(k)}(0) = i^k E(X^k)$

> 常用特征函数(用性质求):
> **二项分布**$b(n,p)$
> $\varphi(t) = (pe^{it} + (1-p))^n$
> **正态分布**$N(\mu, \sigma^2)$
> $\varphi(t) = e^{i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
> **伽马分布**$Ga(n, \lambda)$
> $\varphi(t) = (1 - \frac{it}{\lambda})^{-n}$

特征函数的一致连续性
特征函数的非负定性

逆转公式

$$F(x_2) - F(x_1) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} \varphi(t) dt, x_1 < x_2$$

唯一性定理：征函数唯一决定分布函数

弱收敛的充要条件

$$F_n(x) \xrightarrow{w} F(x) \Leftrightarrow \varphi_n(t) \to \varphi(t)$$

4.3 大数定律

伯努利大数定律

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{S_n}{n} - p| < \varepsilon) = 1$$

> n重伯努利试验

> 将n重伯努利试验转化为相互独立的二点分布随机变量序列，伯努利大数定理的结论为：
>
> $$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(x_i)| < \epsilon) = 1$$

切比雪夫大数定律：两两不相关的随机变量序列方差存在，且有共同上界，则服从大数定理。

马尔可夫条件

$$\frac{1}{n^2}Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) \to 0$$

马尔可夫大数定律：随机变量序列满足马尔可夫条件，则服从大数定律。

辛钦大数定律：独立同分布的随机变量序列，数学期望存在，服从大数定律。

4.4 中心极限定理

林德伯格—莱维中心极限定理：
设$\{X_n\}$是独立同分布的随机变量序列，且$E(X_i) = \mu, Var(X_i) = \sigma^2 > 0$,记

$$Y_n^* = \frac{Y_n - E(Y_n)}{\sqrt{Var(Y_n)}}$$

,$\forall y$,有

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n^* \le y) = \Phi(y)$$

莫棣-拉普拉斯中心极限定理：
设n重伯努利试验中，事件A每次试验出现概率为p，记S_n为频数，记

$$Y_n^* = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

$\forall y$,有

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n^* \le y) = \Phi(y)$$

> 应用：n, y, β知二求一

林德伯格条件：$\forall \tau > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\tau^2 + B_n^2} \sum_{i=1}^{n} \int_{|x-\mu_i|>\tau B_n} (x-\mu_i)^2 p_i(x) dx = 0$$

林德博格中心极限定理:

设独立随机变量序列$\{X_n\}$满足林德伯格条件，则对任意的x,有

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{1}{B_n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_i) \le x) = \Phi(x)$$

李雅普诺夫中心极限定理

设独立随机变量序列$\{X_n\}$，若存在$\delta > 0$,满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{i=1}^{n} E(|X_i - \mu_i|^{2+\delta}) = 0$$

则对任意的x,有

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{1}{B_n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_i) \le x) = \Phi(x)$$