第一章 随机事件与概率

1.1 随机事件及其运算

随机现象：在一定条件下，并不总是出现相同结果的现象

确定性现象：只有一个结果的现象

统计规律性：随机现象的各种结果会表现出一定的规律性

随机试验(E)：对在相同的条件下重复的随机现象的观察，记录和实验

样本点：随机试验的每一个可能得结果

样本空间($S or \Omega$)：随机试验的所有样本点构成的集合

> 离散样本空间：样本点的个数为有限个或可列个
> 连续样本空间：样本点的个数为无限不可列个

随机事件：某些样本点构成的集合，用大写字母A,B,C...表示

> 基本事件：样本空间的单点集
> 必然事件：样本空间的全集
> 不可能事件：样本空间的最小子集，即空集

> 事件的三种表示：语言，集合，随机变量

随机变量：表示随机现象的变量，用大写字母X,Y,Z...表示

事件的关系：包含，相等，互不相容(互斥)

> 对立事件一定会互斥事件，反之不然

事件的运算：并，交，差，补(对立事件)

> 并：A和B至少有一个发生
> 交：A和B都发生
> 差：A发生B不发生

> $A-B=A\bar{B}$
> $A=AB\cup A\bar{B}$

事件运算性质:交换，结合，分配，德摩根律

事件域：设Ω是一样本空间，$\mathscr{F}$为Ω的某些子集所组成的集合类，如果$\mathscr{F}$满足:
$(1)\Omega\in\mathscr{F}$
(2)若$A\in\mathscr{F}$,则$\bar{A}\in\mathscr{F}$
$(3)A_n\in\mathscr{F},n=1,2,3,...$,则$\cup_{n\geq 1}A_n\in\mathscr{F}$
则称$\mathscr{F}$为一事件域，又称为σ代数，其中的元称之为事件。

> 在概率论中，$(\Omega,\mathscr{F})$称之为可测空间

> **Borel事件域**

> 基本事件未必都是事件

样本空间的分割:对样本空间Ω，如果有n个事件$D_1,D_2,...,D_n$满足：D_i互补相容且
$\cup_{i=1}^{n}D_i=\Omega$
则称n个事件$D_1,D_2,...,D_n$为样本空间Ω的一个分割，也可以是可列个事件。

1.2 概率的定义及其确定方法

直观定义：事件出现的可能性大小
统计定义：事件在大量重复试验下出现频率的稳定值
概率的公理化定义：设Ω为一样本空间，$\mathscr{F}$为事件域，如果任意事件$A\in\mathscr{F}$,定义在$\mathscr{F}$上的一实值函数$P(A)$满足:**(1)非负性 (2)正则性 (3)可累可加性**，则称$P(A)$为事件A的概率，称三元素$(\Omega,\mathscr{F},P)$为概率空间。

> 非负性：$A\in\mathscr{F}$,则$P(A)\geq 0$
> 正则性：$P(\Omega)=1$
> 可列可加性：若$\{A_i\}_{i\geq 1}$互不相容，则$P(\cup_{i\geq 1}A_i)=\sum_{i\geq 1}P(A_i)$

排列与组合：乘法原理，加法原理

确定概率的方法:

(1) 频率法：概率是频率的稳定值
(2) 古典法: 运用排列组合(抽样模型，放回抽样，彩票问题，盒子模型，生日问题)
(3) 几何法: 几何概率(会面问题，比丰投针问题，贝特朗奇论)
(4) 主观法

1.3 概率的性质

(1) $P(\varnothing)=0$

> 概率为0的事件不一定是不可能事件

概率的可加性:
(2) **有限可加性**
(3) **对立事件公式**：$P(A)=1-P(\bar{A})$

概率的单调性：
(4) 若$A\supset B$,则$P(A-B)=P(A)-P(B)$
(5) **单调性**: 若$A\supset B$，则$P(A)\geq P(B)$

> 逆命题不成立

(6) $P(A-B)=P(A)-P(AB)$

概率的加法公式:
(7) **加法公式**: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$
(8) **次可加性**: $P(A\cup B)\leq P(A)+P(B)$

概率的连续性:

> 单调事件序列的极限事件
> 概率的上连续与下连续

(8) 若P是$\mathscr{F}$上满足正则性的非负集合函数，则它具有可列可加性的充要条件是(1)它是有限可加的，(2)它是下连续(上连续)的

1.4 条件概率

定义：设A和B是样本空间Ω中的两事件，若$P(B) > 0$,则称
$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$
为在B发生下A发生的概率，简称条件概率。

> 计算方法：(1)压缩样本空间 (2)定义法

乘法公式：
(1) 若$P(B) > 0$，则$P(A) = P(A|B)P(B)$
(2) 若$P(A_1A_2A_3...A_{n-1}) > 0$，则$P(A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n) = P(A_1)P(A_1|A_2)P(A_3|A_1A_2)...P(A_n|A_1A_2A_3...A_{n-1})$

> 罐子模型

全概率公式
设$B_1, B_2, ..., B_n$为样本空间Ω的一个分割，若$P(B_i) > 0$,则对事件A有
$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)$

> 简单形式:
> $P(A) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})$

贝叶斯公式
设$B_1, B_2, ..., B_n$为样本空间Ω的一个分割，若$P(A) > 0, P(B_i) > 0$,则
$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A|B_j)}$.

1.5 独立性

定义：若$P(AB) = P(A)P(B)$则称A与B独立。

> 多个事件有两两独立和相互独立。

伯努利(Bernoulli)试验