专家和材料的情况简介

《数学制图学原理》由老一辈制图学家、地图投影专家吴忠性教授、杨启和教授合著， 1989 年 6 月由测绘出版社出版。吴忠性教授，1936 年毕业于“中央陆地测量学校”地图制图专业，从 1952 年到 1992 年撰写了多本测绘学方面的著作和 70 多篇论文。杨启和教授在地图投影、特别是地图投影变换有着高深的造诣，其中他的《地图投影变换原理与方法》学术专著修订本译成英文，在英国出版。

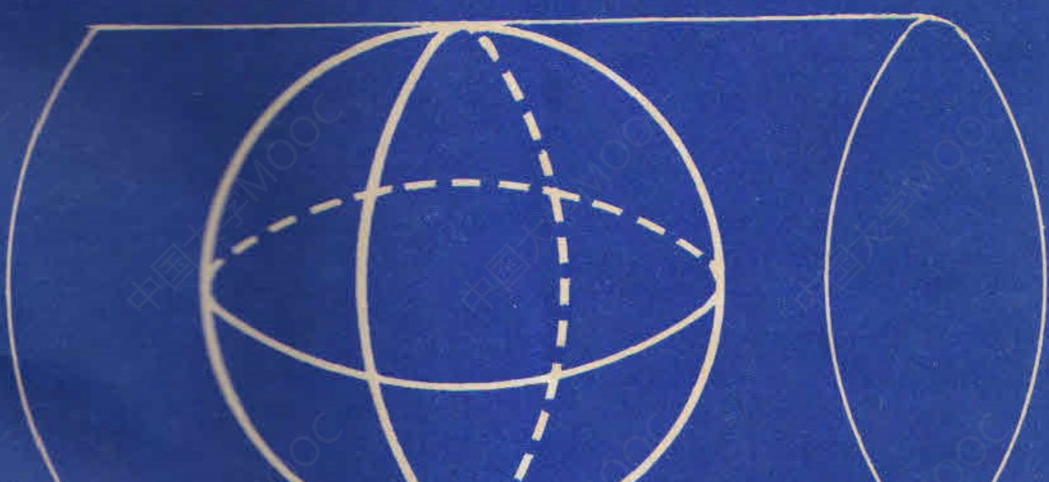
《数学制图学原理》这本书获国家教委优秀教材奖，该教材的“第八章 高斯-克吕格投影及其衍生投影”，第一节详细介绍和讨论了高斯-克吕格投影的原理，至今读来能够感受到老一辈专家对这个领域认识的深度和对待科研的严谨。感谢吕晓华教授（师承杨启和教授）借阅书籍给我，让我能够得以重新看到原版的教材，得以分享部分篇章给大家，最后向老一辈专家表示致敬。

2022 年 2 月 10 日 李响 郑州

高等学校教材

数学制图学原理

吴忠性 杨启和编著



测绘出版社

第八章　高斯-克吕格投影及其衍生投影

引　言

前面各章所讨论的地图投影多用之于小比例尺地图（个别的投影也可以用之于大比例尺地图），本章所讨论的地图投影专门用之于大比例尺地图——地形图，即国家基本地图。这种地图由于它在国民经济建设和军事的地形保障上均具有重要意义，对地图投影精度的要求应是很高的。具体地讲，从方向上来说，应是正确的，即没有投影的角度变形，如此才能保持图上的地物轮廓与实地具有相似性，地物与地物之间的关系位置与实地一致，对于长度来说，点与点间的距离应基本正确，有误差应在允许的范围之内。那末，具有什么性质的地图投影才能满足地形图这些要求呢？不难理解应该是等角投影。因为等角投影没有角度变形，图上的方向是正确的，变形椭圆不是椭圆而是圆，说明在较小范围内图上的形状与实地是相似的，故地物之间的方向和关系位置是正确的。在长度方面，如投影区域较大，就难保证长度变形不超出允许范围，但我们可以采取分带投影的办法，即用同一投影的方法，一个区域一个区域进行投影。投影范围受到限制，则长度变形就不会太大，从而即能保证点与点之间距离与实地相比误差不大。

本章所要说明的高斯-克吕格投影及其衍生的投影都是等角投影。现在世界上许多国家大比例尺地形图都用这种投影，我国的国家基本地图亦用这种投影。从当前来说，它是一种应用很广范的地图投影，为此，我们在此专门列了一章而加以论述，以便对这种投影有比较深刻的理解。但本书是属于探讨地图投影原理性质的，对这种投影的具体应用和计算方法，都未涉及，读者如有进一步了解这些问题的必要，可参阅已出版的其它地图投影书籍。

第一节　高斯-克吕格投影

高斯-克吕格投影的几何概念，假想有一个椭圆柱与地球椭球面上某一经线相切，椭圆柱的中心轴位于赤道面上，按等角投影的条件将地球椭球面投影于椭圆柱面上。投影结果，相切的经线（即中央经线）和赤道投影成互相垂直的直线，为投影的坐标轴，其它经线和纬线投影为对称于这两个轴的曲线，如图 8-1 所示。

本投影最早为德国学者高斯所创造，他在汉诺威陆地测量（1821～1825 年）成果中用过这种投影，并在他的高等测量讲义中给出它的公式，但高斯从未发表过该投影的理论和公式证明。本投影的理论第一部著作是德国学者史赖伯（O.Schreiber）于 1866 年发表的，题为“汉诺威陆地测量投影的理论”。到了 1912 年德国学者克吕格发表了“地球椭球面在平面上的等角投影”著作，对高斯-史赖伯公式加以进一步扩充，推演出它的计

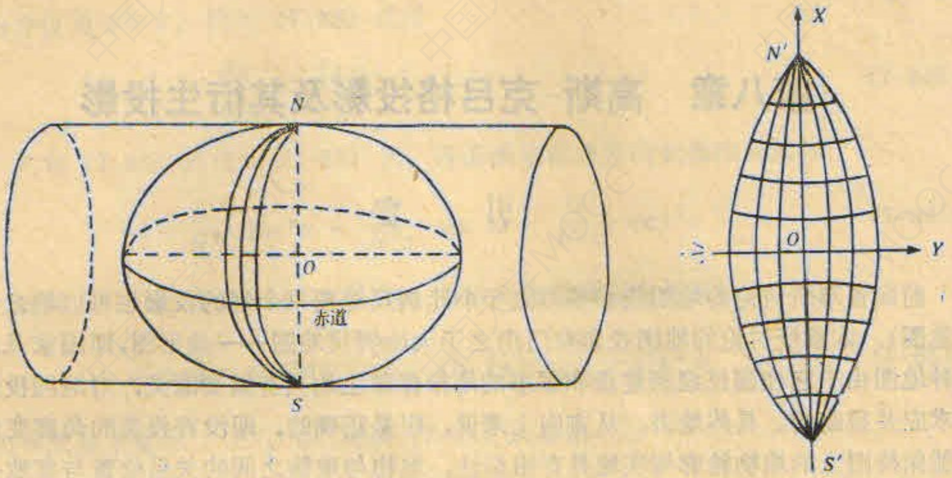


图 8-1

算公式，因此，以后本投影即称为高斯-克吕格投影。也有简称为高斯投影。

这种投影是根据下列三个条件而建立的。

（1）中央经线和赤道被投影为互相垂直的直线，且为投影的对称轴；

（2）具有等角投影的性质；

（3）中央经线投影后保持长度不变。

现在推求这种投影的公式。

由高等数学和第四章所讨论的等角投影理论知，若有两个已知曲面 s_1 和 s_2 的弧长元素能化为等量坐标 ξ、η 及 $\overline{\xi}$、$\overline{\eta}$ 所表示的形式，如

$$ds_1^2=\lambda_1^2(d\xi^2+d\eta^2),\quad ds_2^2=\lambda_2^2(d\overline{\xi}^2+d\overline{\eta}^2)$$

且 $\lambda_1^2(\xi,\ \eta)>0$，$\lambda_2^2(\overline{\xi},\ \overline{\eta})>0$，则 s_1 和 s_2 有相互等角投影的关系，s_1 等角投影于 s_2 的一般公式为

$$\overline{\xi}+i\overline{\eta}=f_1(\xi+i\eta) \tag{8-1}$$

式中 f_1 在投影区域内系解析函数，其意即谓 $\overline{\xi}$、$\overline{\eta}$ 对 ξ、η 有偏导数存在，且满足下列柯西-黎曼微分方程

$$\frac{\partial\overline{\xi}}{\partial\xi}=\frac{\partial\overline{\eta}}{\partial\eta},\quad \frac{\partial\overline{\xi}}{\partial\eta}=-\frac{\partial\overline{\eta}}{\partial\xi} \tag{8-2}$$

今将上述两曲面间的等角投影理论应用于地球椭球表面与平面上，则可求出地球椭球面与平面之间的等角投影关系。

设地球椭球面上的弧长元素为 ds，则

$$ds^2=M^2dB^2+r^2dl^2$$

或
$$ds^2=r^2\left(\frac{M^2}{r^2}dB^2+dl^2\right)$$

引入下列符号

q 称为等量纬度。

从而写出地球椭球面上用等量坐标表示的弧长元素公式为

$$ds_{面}^2 = r^2(dq^2 + dl^2) \tag{8-5}$$

相应地在平面上用等量坐标表示为

$$ds_{平}^2 = (dx^2 + dy^2) \tag{8-6}$$

于是地球椭球面等角投影于平面上的一般公式为

$$x + iy = f(q + il) \tag{8-7}$$

而且此式应满足柯西-黎曼微分方程

$$\frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\partial y}{\partial l}, \quad \frac{\partial x}{\partial l} = -\frac{\partial y}{\partial q} \tag{8-8}$$

式中　x、y 坐标轴取自中央经线和赤道的投影，因此，当 $l=0$ 时，$y=0$，故（8-7）式应变为

$$x_0 = f(q) \tag{8-9}$$

x_0 系 x 轴上某点的纵坐标。

又因中央经线投影后长度不变，故该点的纵坐标值与该点至赤道的实地经线弧长相等，即

$$x_0 = f(q) = s \tag{8-10}$$

式中　s 为某点由赤道至纬度 B 的经线弧长。

由于高斯-克吕格投影的实际应用，其制图区域东西两侧经差不大，故 l 为一微量，将（8-7）式按泰勒级数展成 l 的幂级数，并顾及到（8-9）式，得

$$x + iy = f(q) + il\frac{df(q)}{dq} + \frac{(il)^2}{2!}\frac{d^2f(q)}{dq^2} + \frac{(il)^3}{3!}\frac{d^3f(q)}{dq^3} + $$

$$+ \frac{(il)^4}{4!}\frac{d^4f(q)}{dq^4} + \frac{(il)^5}{5!}\frac{d^5f(q)}{dq^5} + \cdots\cdots$$

或

$$x + iy = s + i\frac{ds}{dq}l - \frac{1}{2}\frac{d^2s}{dq^2}l^2 - \frac{i}{6}\frac{d^3s}{dq^3} + \frac{1}{24}\frac{d^4s}{dq^4}l^4 +$$

$$+ \frac{i}{120}\frac{d^5s}{dq^5}l^5 + \cdots\cdots$$

比较上式两端虚实部分，得

$$x = s - \frac{1}{2}\frac{d^2s}{dq^2}l^2 + \frac{1}{24}\frac{d^4s}{dq^4}l^4 - \frac{1}{720}\frac{d^6s}{dq^6}l^6 + \cdots\cdots \tag{8-11}$$

$$y = \frac{ds}{dq} l - \frac{1}{6} \frac{d^3 s}{dq^3} l^3 + \frac{1}{120} \frac{d^5 s}{dq^5} l^5 - \cdots\cdots \tag{8-12}$$

现求 $\frac{ds}{dq}$，$\frac{d^2 s}{dq^2}$，……等导数。

因
$$\frac{ds}{dq} = \frac{ds}{dB} \Big/ \frac{dq}{dB}$$

而
$$\frac{ds}{dB} = M, \quad \frac{dq}{dB} = \frac{M}{r}$$

所以
$$\frac{ds}{dq} = r = N \cos B \tag{8-13}$$

又
$$\frac{d^2 s}{dq^2} = \frac{d}{dB}\left(\frac{ds}{dq}\right)\frac{dB}{dq}$$

而
$$\frac{d}{dB}\left(\frac{ds}{dq}\right) = \frac{dr}{dB} = -M \sin B$$

所以
$$\frac{d^2 s}{dq^2} = \frac{d}{dB}\left(\frac{ds}{dB}\right)\frac{dB}{dq} = -r \sin B = -N \sin B \cos B \tag{8-14}$$

又
$$\frac{d^3 s}{dq^3} = \frac{d}{dB}\left(\frac{d^2 s}{dq^2}\right)\frac{dB}{dq}$$

而
$$\frac{d}{dB}\left(\frac{d^2 s}{dq^2}\right) = -r \cos B - \sin B \frac{dr}{dB} = -r \cos B + M \sin^2 B$$

所以
$$\frac{d^3 s}{dq^3} = (-r \cos B + M \sin^2 B)\frac{r}{M} = -N \cos^3 B\left(\frac{N}{M} - \mathrm{tg}^2 B\right)$$

但
$$\frac{N}{M} = \frac{1 - e^2 \sin^2 B}{1 - l^2} = \frac{1}{1 - e^2} - \frac{e^2}{1 - e^2} \sin^2 B$$

$$= 1 + e'^2 - e'^2 \sin^2 B = 1 + e'^2 \cos^2 B$$

引用符号
$$e'^2 \cos^2 B = \eta^2$$

于是
$$\frac{N}{M} = 1 + \eta^2 \tag{8-15}$$

所以
$$\frac{d^3 s}{dq^3} = -N \cos^3 B(1 - \mathrm{tg}^2 B + \eta^2) \tag{8-16}$$

仿此，求得四次以下的导数如下

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^4 s}{dq^4} &= N\sin B\cos^3 B(5-\mathrm{tg}^2 B+9\eta^2+4\eta^4)\\
\frac{d^5 s}{dq^5} &= N\cos^5 B(5-18\,\mathrm{tg}^2 B+\mathrm{tg}^4 B+14q^2-58\eta^2\mathrm{tg}^2 B)\\
\frac{d^6 s}{dq^6} &= -N\sin B\cos^5 B(61-58\,\mathrm{tg}^2 B+270\eta^2-330\eta^2\mathrm{tg}^2 B\\
&\qquad +200\eta^4-232\eta^4\mathrm{tg}^2 B)
\end{aligned}\right\} \tag{8-17}$$

将以上各阶导数自六阶起略去 η^4 项，代入（8-11）及（8-12）式中，并将 l 化为秒弧，得

$$x=s+\frac{l^2}{2\rho^2}N\sin B\cos B+\frac{l^4}{24\rho^4}N\sin B\cos^3 B(5-\mathrm{tg}^2 B+9\eta^2+4\eta^4)$$

$$+\frac{l^6}{720\rho^6}N\sin B\cos^5 B(61-58\,\mathrm{tg}^2 B+\mathrm{tg}^4 B-330\eta^2\mathrm{tg}^2 B)+\cdots\cdots \tag{8-18} *$$

$$y=\frac{l}{\rho}N\cos B+\frac{l^3}{6\rho^3}N\cos^3 B(1-\mathrm{tg}^2 B+\eta^2)+\frac{l^5}{120\rho^5}N\cos^5 B(5-18\,\mathrm{tg}^2 B$$

$$+\mathrm{tg}^4 B+14\eta^2-58\eta^2\mathrm{tg}^2 B)+\cdots\cdots \tag{8-19} *$$

在这些公式中略去 l 六次以上各项的原因，是因为这些值不超过 0.005m。$\rho=206\,264.18''$。

现在再求高斯-克吕格投影的平面子午线收敛角。

如图 8-2 所示，设 a 点为椭球面上 A 点在平面上的投影点，ns 为通过 A 点的经线在平面上的投影线。$a\omega$ 为通过 A 点的纬线在平面上的投影线，ab 为平行于纵轴的直线，ae 为平行于横轴的直线，γ 为平面上子午线的收敛角，等于在 a 点上直线 ab 与经线 an 所组成的角。

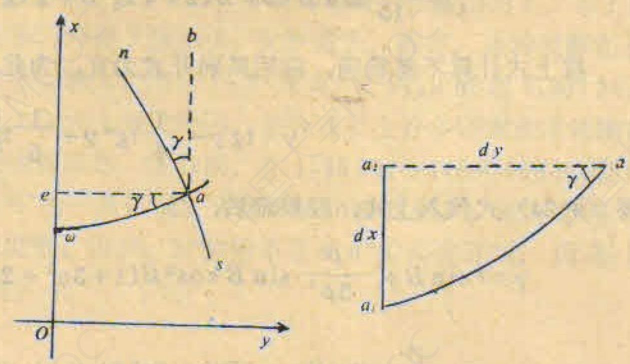


图 8-2

显然，γ 角亦等于纬线 $a\omega$ 与直线 ae 所组成的角。在纬线 $a\omega$ 上有一 a_1 点，与 a 十分接近，a 与 a_1 两点的坐标差为 dx 和 dy，从原素 $\triangle aa_1a_2$ 得

$$\mathrm{tg}\,\gamma=\frac{dx}{dy} \tag{8-20}$$

为了便于微分，我们将（8-20）式改写为

* 此式乘以 0.999 6 即美国所采用的通用横墨卡托投影，简称 UTM 投影。

$$\operatorname{tg}\gamma=\frac{dx}{dl}\Big/\frac{dy}{dl} \tag{8-21}$$

由 (8-18) 式及 (8-19) 式，知

$$\frac{dx}{dl}=lN\sin B\cos B+\frac{l^3}{6}N\sin B\cos^3 B(5-\operatorname{tg}^2 B+9\eta^2+4\eta^4)$$

$$+\frac{l^5}{120}N\sin B\cos^5 B(61-58\operatorname{tg}^2 B+\operatorname{tg}^4 B) \tag{8-22}$$

$$\frac{dy}{dl}=N\cos B+\frac{l^2}{2}N\cos^3 B(1-\operatorname{tg}^2 B+\eta^2)+\frac{l^4}{24}N\cos^5 B(5-$$

$$-18\operatorname{tg}^2 B+\operatorname{tg}^4 B) \tag{8-23}$$

从而有

$$\frac{1}{\frac{dy}{dl}}=\frac{1}{N\cos B}\left[1-\frac{l^2}{2}\cos^2 B(1-\operatorname{tg}^2 B+\eta^2)+\frac{l^4}{24}\cos^4 B(1+6\operatorname{tg}^2 B+5\operatorname{tg}^4 B)\right]$$

故 (8-21) 式可写为

$$\operatorname{tg}\gamma=l\sin B+\frac{l^3}{3}\sin B\cos^2 B(1+\operatorname{tg}^2 B+3\eta^2+2\eta^4)$$

$$+\frac{l^5}{15}\sin B\cos^4 B(2+4\operatorname{tg}^2 B+2\operatorname{tg}^4 B) \tag{8-24}$$

按上式计算不易精确，应用其展开式为宜，为此，我们写出反正切的函数级数，即

$$\gamma=\operatorname{tg}\gamma-\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\gamma+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5\gamma-\cdots\cdots$$

将 (8-24) 式代入上式，经整理后，得

$$\gamma=l\sin B+\frac{l^3}{3\rho^2}\sin B\cos^2 B(1+3\eta^2+2\eta^4)+$$

$$+\frac{l^5}{15\rho^4}\sin B\cos^4 B(2-\operatorname{tg}^2 B) \tag{8-25}$$

由上式看来，当 $l=0$ 时，$\gamma=0$，当 l 愈大，γ 角愈大；当 $B=0°$时，$l=0$，当 B 愈大，γ 角愈大。在经差 6°分带中，在中国境内，γ 角最大值约在 $\pm 2°50'$左右。

最后再求高斯-克吕格投影的长度比公式。

设在地球椭球面上纬线微分弧长为 ds'_n，则

$$ds_n^2=r^2dl^2$$

其在投影平面上相应的纬线微分线段为 ds'_n，则

$$ds_n'^2=dx^2+dy^2$$

故长度比μ为

$$\mu^2=\frac{ds_n'^2}{ds_n^2}=\frac{dx^2+dy^2}{r^2dl^2}=\frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{dx}{dl}\right)^2+\left(\frac{dy}{dl}\right)^2\right] \tag{8-26}$$

将（8-22）式和（8-23）式平方，并略去其5次以上各项，则有

$$\left(\frac{dx}{dl}\right)^2=l^2r^2\sin^2B+\frac{l^4}{3}r^2\sin^2B\cos^2B(5-\mathrm{tg}^2B)+\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{dy}{dl}\right)^2=r^2+l^2r^2\cos^2B(1-\mathrm{tg}^2B+\eta^2)+\frac{l^4}{3}r^2\cos^4B(2-6\,\mathrm{tg}^2B+\mathrm{tg}^4B)$$

代入（8-26）式，则有

$$\mu^2=1+l^2\cos^2B(1+\eta^2)+\frac{l^4}{3}\cos^4B(2-\mathrm{tg}^2B)$$

求此方程式两端的根时，顾及已知公式

$$\sqrt{1+z}=1+\frac{1}{2}z-\frac{1}{8}z^2+\cdots\cdots$$

且据上述精度的幂次，则有

$$\mu=1+\frac{l^2}{2\rho^2}\cos^2B(1+\eta^2)+\frac{l^4}{24\rho^4}\cos^4B(5-4\,\mathrm{tg}^2B) \tag{8-27}$$

由（8-27）式看来，当$l=0$或$y=0$时，$\mu=1$，即在中央经线上长度比为1，当l愈大或y愈大，则μ亦愈大，又当B愈小，亦即y值愈大，μ亦愈大，因此，这种投影在低纬度地区及离中央经线两侧愈远，长度比愈大。当在$l=3°$及$B=0°$时，μ值达1.001 38。

这种投影采取分带投影的方法用之于大比例尺地图，当今世界上许多国家基本地图都用这种投影，我国国家基本地图亦用这种投影。在我国，在1:25 000～1:500 000比例尺中，由经度零度起自西向东每隔经差6°为一投影带。大于1:25 000比例尺，采用经差3°分带，并规定中央经线的经度均为整度数，因此，3°分带不是从0°的经线开始，而是从1°30′的经线开始。

第二节　双标准经线等角横圆柱投影

双标准经线等角横圆柱投影在几何概念上与高斯-克吕格投影不同的是：椭圆柱不是切在地球椭球面上而是割在地球椭球中。因此，中央经线不是等长而是缩短了，相割两条经线与实地等长，并规定它在中央经线两侧经差$\pm l_1$上。且要求中央经线缩短不是按一个常数缩短，而是随各点而异，在低纬度地区缩短多一些，高纬度地区缩短少一些，在极点处长度比等于1。这样中央经线长度比则是纬度B的函数，设其为$F(B)$。这是李国藻提出来的，他的主要意图，是想改变高斯-克吕格投影在低纬度地区精度的不足。

现求这种投影的公式。