球面距离证明及其计算公式推导

作者：尹秀腾（互联网空间数据挖掘研究小组，geodatamining(非公众号)）
审校: 互联网空间数据挖掘研究小组，geodatamining(非公众号)

一、证明球面上大圆劣弧最短

如图 1 所示，O 为球心，球半径为 R，$\odot$ O为过 A、B 的大圆，半径为 R，$\odot$ O′为过 A、B 的一个小圆，半径为 r，A、B 为球面上不在同一直径上的两点；将$\odot$ O和$\odot$ O′画在一个平面内，设$\angle AOB = 2\alpha$，$\angle AO'B = 2\alpha'$.，则有过 AB 的大圆弧长$L = 2\alpha R$，过 AB 的小圆弧长$l = 2\alpha' r$。

$$\frac{L}{l} = \frac{2\alpha R}{2\alpha' r} = \frac{\alpha R}{\alpha' r} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

又有$AB = 2R\sin\alpha = 2r'\sin\alpha'$，即

$$\frac{R}{r} = \frac{sin\alpha'}{sin\alpha} \qquad (2)$$

将（2）代入（1）得

$$\frac{L}{l} = \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \frac{sin\alpha'}{sin\alpha} = \frac{\frac{sin\alpha'}{\alpha'}}{\frac{sin\alpha}{\alpha}} \ldots \quad (3)$$

设$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$,则

$$f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot [x - \tan(x)]}{x^2}$$

由题设可知 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，故 $\tan(x) > x$，即$f'(x) < 0$，即f(x)在$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$单调递减

$$\frac{L}{l} = \frac{f(\alpha')}{f(\alpha)}$$

显然$\alpha' > \alpha$，故$f(\alpha') < f(\alpha)$，故$\frac{L}{l} < 1$，即$L < l$，故大圆劣弧最短。

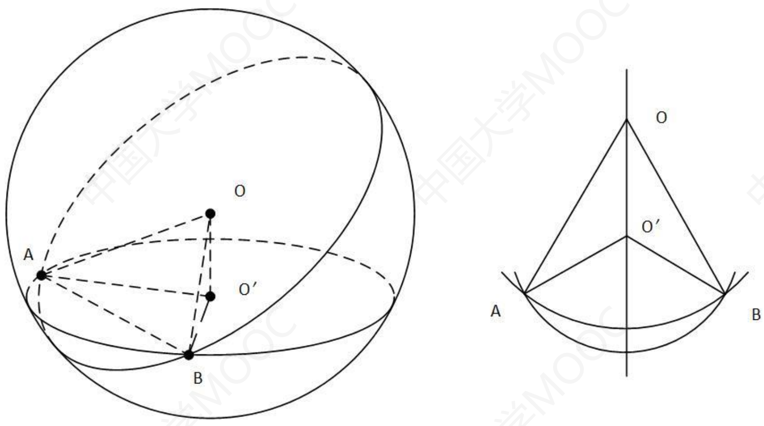

图 1

二、球面距离公式推导

如图 2 所示，设球半径为 R，$A(\alpha_1, \beta_1)$、$B(\alpha_2, \beta_2)$为球面上两点，其中α_1、α_2为点的经度数，β_1、β_2为点的纬度数，过 A、B 两点的大圆劣弧所对的圆心角为θ，则有

$$\theta = \arccos\left[\cos(\alpha_1 - \alpha_2)\, cos\beta_1 cos\beta_2 + sin\beta_1\beta_2\right]$$

A、B 两点间的球面距离为

$$L = R\theta = R\arccos[\cos(\alpha_1 - \alpha_2)\, cos\beta_1 cos\beta_2 + sin\beta_1\beta_2$$

推导：$\odot O_1$与$\odot O_2$分别为过 A、B 的纬度圈。过 A、C 的大圆，过 B、D 的大圆分别为 A、B 的经度圈，经度圈与纬度圈所在的平面互相垂直，做$AE \perp$ 面O_2BC，垂足 E 位于O_2C上，连结 EB、AB，则

$$AE^2 = {O_1O_2}^2 = (OO_1 - OO_2)^2 = (Rsin\beta_1 - Rsin\beta_2)^2 = R^2(sin\beta_1 - sin\beta_2)^2$$

在$\triangle O_2BE$中，由余弦定理有：

$$\begin{aligned} BE^2 &= O_2E^2 + O_2B^2 - 2O_2E \cdot O_2Bcos(\alpha_1 - \alpha_2) \\ &= O_1A^2 + O_2B^2 - 2O_1A \cdot O_2Bcos(\alpha_1 - \alpha_2) \\ &= (Rcos\beta_1)^2 + (Rcos\beta_2)^2 - 2Rcos\beta_1 \cdot Rcos\beta_2 \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \\ &= R^2[cos^2\beta_1 + cos^2\beta_2 - 2cos\beta_1 \cdot cos\beta_2 \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2)] \end{aligned}$$

那么

$$AB^2 = AE^2 + BE^2 = R^2[2 - 2\sin\beta_1 \cdot \sin\beta_2 - 2cos\beta_1 \cdot cos\beta_2 \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2)]$$

又

$$AB^2 = (2Rsin\frac{\theta}{2})^2 = 4R^2 sin^2\frac{\theta}{2} = 2R^2(1 - cos\theta)$$

故

$$\cos\theta = \cos(\alpha_1 - \alpha_2)\, cos\beta_1 cos\beta_2 + sin\beta_1 sin\beta_2$$

从而

$$\theta = \arccos\left[\cos(\alpha_1 - \alpha_2)\, cos\beta_1 cos\beta_2 + sin\beta_1\beta_2\right]$$

$$L = R\theta = R\arccos[\cos(\alpha_1 - \alpha_2)\, cos\beta_1 cos\beta_2 + sin\beta_1\beta_2$$

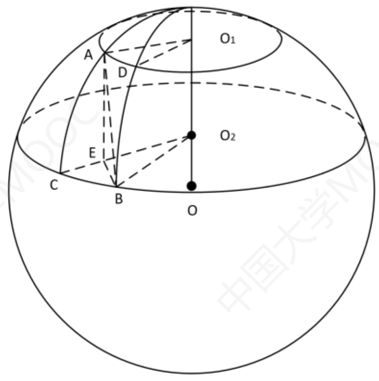

图 2