

Positive calculation of Gauss-Kluge projection

高斯-克吕格投影的正算



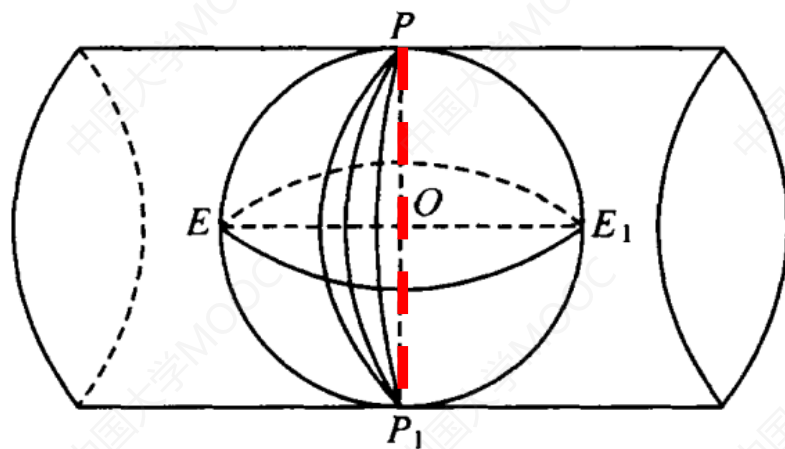
中国人民解放军战略支援部队 信息工程大学—李响副教授

PLA Strategic Support Force Information Engineering University——A/Prof. Xiang Li

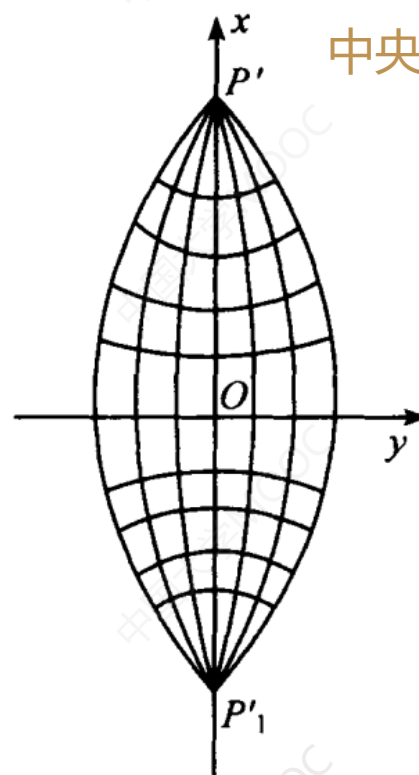
- 德国奥格斯堡大学访问学者和青年科学家，地理信息世界特聘审稿专家，测绘学报等核心期刊审稿人，高校GIS论坛十大新锐人物。
- 主要研究方向地理信息系统平台及其应用，主持国家自然科学基金，国家重点研发（子课题）等课题多项，获省部级科技进步二等奖2项，三等奖1项，部门理论成果一等奖1项，高校GIS论坛“优秀教学成果”奖1项。
- 出版和翻译著作6部，近5年，以第一作者或通讯作者发表论文16篇，发明专利2项，软件著作权3项。

高斯-克吕格投影的正算

Positive calculation of Gauss-Kluge projection



中央子午线



中央经线投影

赤道投影



高斯-克吕格投影的正算

Positive calculation of Gauss-Kluge projection

椭球长半轴 a

椭球短半轴 b

椭球扁率 $\alpha = (a - b) / a$

已知长半轴 a 和扁率 α ，计算出短半轴 b ：

$$b = a(1 - \alpha)$$

椭球第一偏心率 $e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$

椭球第二偏心率 $e' = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}}$

$$e'^2 = e^2 / (1 - e^2)$$

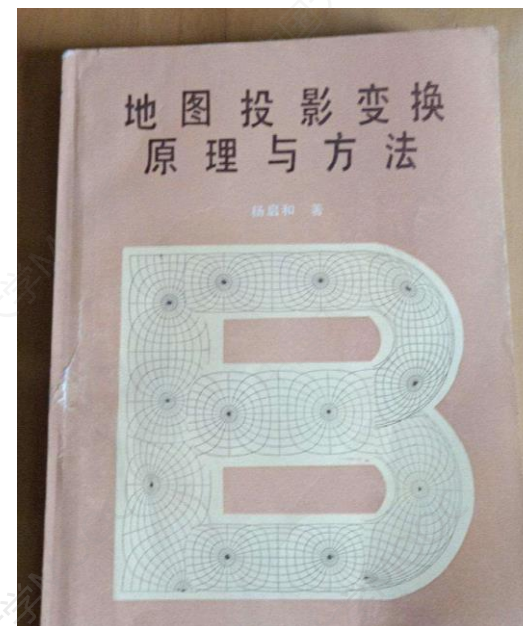
高斯-克吕格投影的正算

Positive calculation of Gauss-Kluge projection



高斯-克吕格投影的正算公式根据投影条件推导而来：

- (1) 中央经线和地球赤道投影成为直线且为投影的对称轴；
- (2) 等角投影；
- (3) 中央经线上没有长度变形。





高斯-克吕格投影的正算

Positive calculation of Gauss-Kluge projection

已知点的地理坐标经度为 L ，纬度为 B ，求高斯平面直角坐标，注意横坐标 y ，纵坐标 x 的计算公式为：

$$\begin{aligned}x &= a_0 + a_2 l^2 + a_4 l^4 + a_6 l^6 \\y &= a_1 l + a_3 l^3 + a_5 l^5\end{aligned}$$

$l = L - L_0$ l 为所求点的经度 L 相对中央子午线 L_0 的经差

$a_0 = X$ X 表示中央子午线上地理坐标纬度等于 B 的点到赤道的子午线弧长



高斯-克吕格投影的正算

Positive calculation of Gauss-Kluge projection

$$a_1 = N \cos B \quad \bullet \quad N \text{ 为卯酉圈的曲率半径 } N = a/W, \quad W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}$$

$$a_2 = \frac{1}{2} N \cos^2 B t, \quad t = \tan B$$

$$a_3 = \frac{1}{6} N \cos^3 B (1 - t^2 + n^2), \quad n^2 = e'^2 \cos^2 B$$

$$a_4 = \frac{1}{24} N \cos^4 B (5 - t^2 + 9n^2 + 4n^4)$$

$$a_5 = \frac{1}{120} N \cos^5 B (5 - 18t^2 + t^4 + 14n^2 - 58n^2 t^2)$$

$$a_6 = \frac{1}{720} N t \cos^6 B (61 - 58t^2 + t^4 + 270n^2 - 330n^2 t^2)$$



高斯-克吕格投影的正算

Positive calculation of Gauss-Kluge projection

X——中央子午线上地理坐标纬度等于B的点到赤道的子午线弧长

$$X = a(1 - e^2)(A_0B + A_2\sin 2B + A_4\sin 4B + A_6\sin 6B + A_8\sin 8B + A_{10}\sin 10B)$$

$$A_0 = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \frac{11025}{16384}e^8 + \frac{43659}{65536}e^{10}$$

$$A_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + \frac{525}{512}e^6 + \frac{2205}{2048}e^8 + \frac{72765}{65536}e^{10}\right)$$

$$A_4 = \frac{1}{4}\left(\frac{15}{64}e^4 + \frac{105}{256}e^6 + \frac{2205}{4096}e^8 + \frac{10395}{16384}e^{10}\right)$$

$$A_6 = -\frac{1}{6}\left(\frac{35}{512}e^6 + \frac{315}{2048}e^8 + \frac{31185}{131072}e^{10}\right)$$

$$A_8 = \frac{1}{8}\left(\frac{315}{16384}e^8 + \frac{3465}{65536}e^{10}\right)$$

$$A_{10} = -\frac{1}{10}\left(\frac{693}{131072}e^{10}\right)$$



高斯-克吕格投影的正算

Positive calculation of Gauss-Kluge projection

高斯-克吕格投影前后角度无变形，但长度存在变形，而距中央子午线越远，长度变形越大。

◆ 有效办法 —— 分带投影

6度分带

- 比例尺1:2.5万到1:50万的地形图采用的是6度带
- 中央子午线 L_0 和带号 n 的关系为： $L_0=6n-3$

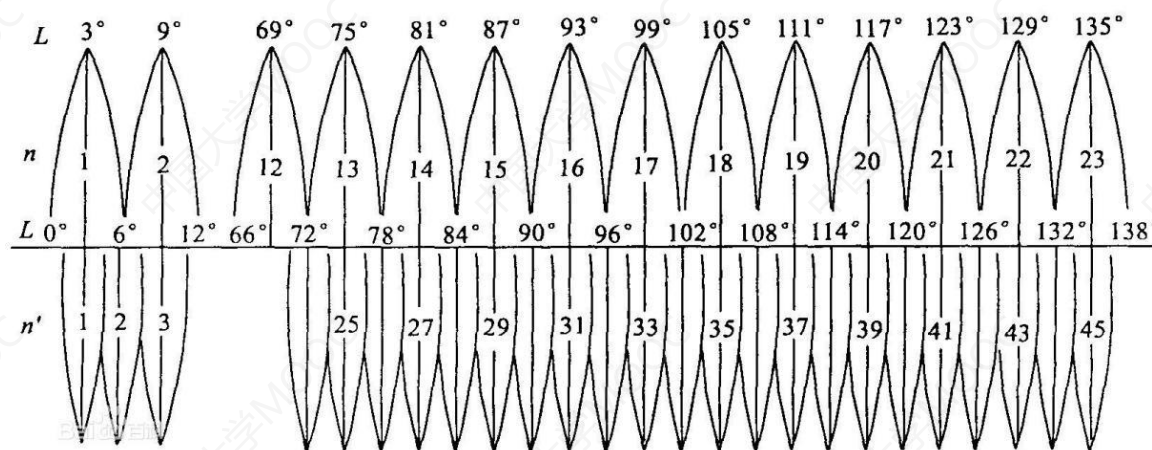
高斯-克吕格投影的正算

Positive calculation of Gauss-Kluge projection

高斯-克吕格投影前后角度无变形，但长度存在变形，而距中央子午线越远，长度变形越大。

◆ 有效办法 —— 分带投影

3度分带



- 1:1万及更大比例尺的地图采用3度分带
- 3度的带号 n' 与中央子午线 L_0 的关系为: $L_0=3n'$



高斯-克吕格投影的正算

Positive calculation of Gauss-Kluge projection

高斯平面直角坐标系纵轴为X，横轴为Y。

带号

+y+500km

- 举例：20带的点P 横坐标 $P_y = -105734.8\text{m}$

高斯投影的自然坐标

→ $P_y = \underline{20}394265.2\text{m}$

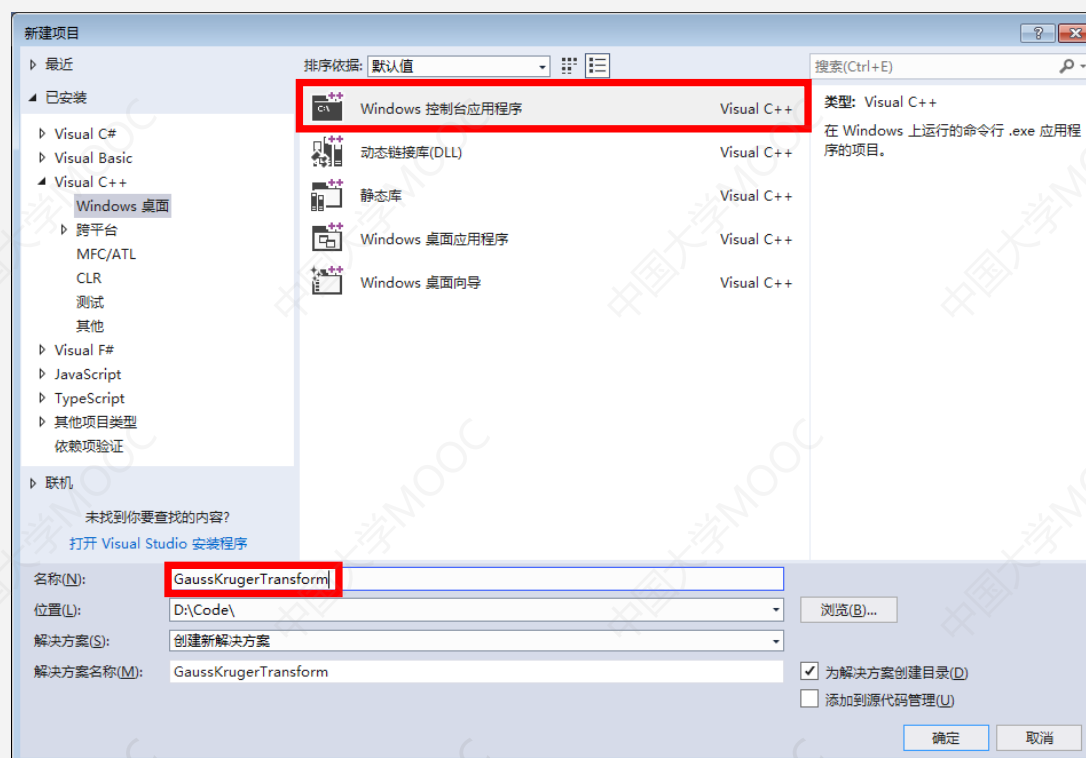
高斯投影的通用坐标



高斯-克吕格投影的正算

Positive calculation of Gauss-Kluge projection

在Visual Studio 2017平台中，新建一个Windows控制台程序，将该项目命名为GaussKrugerTransform。





高斯-克吕格投影的正算

Positive calculation of Gauss-Kluge projection

新建一个椭球类，用于存储椭球参数，选择该工程，右键，选择“添加” - “类...”，将该椭球类命名为Ellipsoid。

添加类

类名(L): Ellipsoid

.h 文件(F): Ellipsoid.h ...

.cpp 文件(P): Ellipsoid.cpp ...

基类(B):

访问(A): public

其他选项:

☐ 虚拟析构函数(V)

☐ 内联(I)

☐ 托管(M)

确定 取消

高斯-克吕格投影的正算

Positive calculation of Gauss-Kluge projection



在Ellipsoid类里添加相应的变量来存储椭球参数

存储椭球的第一、第二偏心率平方

```
private:
    //长半轴
    double m_a;

    //短半轴
    double m_b;

    //扁率
    double m_alpha;

    //第一偏心率平方
    double m_ec;

    //第二偏心率平方
    double m_ecc;
```




高斯-克吕格投影的正算

Positive calculation of Gauss-Kluge projection

默认设置椭球的构造函数:

```
Ellipsoid::Ellipsoid()  
{  
    //GCS2000椭球, a = 6378137 alpha=1/298.257222101  
    m_a = 6378137.000;  
    m_alpha = 1 / 298.257222101;  
  
    Evaluate();  
}
```

```
void Ellipsoid::Evaluate()  
{  
    m_b = m_a * (1 - m_alpha);  
    m_ec = 1 - pow(m_b, 2) / pow(m_a, 2);  
    m_ecc = m_ec / (1 - m_ec);  
}
```

采用GCS2000坐标系，只需要设置好长轴a以及扁率alpha。

Evaluate的函数具体的实现

高斯-克吕格投影的正算

Positive calculation of Gauss-Kluge projection



增加一个有参的构造函数：

```
Ellipsoid::Ellipsoid(double a, double invAlpha)
{
    this->a = a;
    this->alpha = 1 / invAlpha;
    Evaluate();
}
```

为了用户传参方便，传入长半轴a和扁率的倒数。

```
Ellipsoid& operator=(const Ellipsoid& obj)
{
    m_a = obj.m_a;
    m_b = obj.m_b;
    m_alpha = obj.m_alpha;
    m_ec = obj.m_ec;
    m_ecc = obj.m_ecc;
    return *this;
}
```

为了便于椭球的拷贝，重载一个=号操作。



高斯-克吕格投影的正算

Positive calculation of Gauss-Kluge projection

添加类

类名(L):
GaussKrugerProj

.h 文件(E):
GaussKrugerProj.h ...

.cpp 文件(P):
GaussKrugerProj.cpp ...

基类(B):

访问(A):
public

其他选项:
☐ 虚拟析构函数(V)
☐ 内联(I)
☐ 托管(M)

确定 取消

高斯-克吕格投影的正算

Positive calculation of Gauss-Kluge projection



四个主要的参数：

- 椭球参数
- 中央经线
- 投影带号
- 投影带

```
private:
    Ellipsoid m_ellipsoid;
    double m_L0;           // 投影中央经线;
    int m_zoneNo;          // 投影带号
    int m_zoneInterval;    // 投影6度带或3度带
```



高斯-克吕格投影的正算

Positive calculation of Gauss-Kluge projection

默认选择北京所在的投影带，20带，采用6度带，这里也隐藏了一个细节，由于椭球默认是GCS2000的，所以该投影默认的地理坐标系是基于GCS2000。因此定义了一个私有函数ComputeL0来计算投影的中央经线L0。

```
GaussKrugerProj::GaussKrugerProj()  
{  
    // 默认是20带，6度带。  
    m_zoneInterval = 6;  
    m_zoneNo = 20;  
    ComputeL0();  
}
```



高斯-克吕格投影的正算

Positive calculation of Gauss-Kluge projection

L0通过带号和6度带或者3度带，来计算出来的，如果既不是6度带，也不是3度带，则会出现问题，使用断言来提醒。

```
void GaussKrugerProj::ComputeL0()
{
    if (m_zoneInterval == 6)
    {
        m_L0 = m_zoneInterval * m_zoneNo - 3;
    }
    else if (m_zoneInterval == 3)
    {
        m_L0 = 3 * m_zoneNo;
    }
    else
        assert(false);
}
```


高斯-克吕格投影的正算

Positive calculation of Gauss-Kluge projection



还有一个构造函数需要传椭球参数：

```
GaussKrugerProj::GaussKrugerProj(Ellipsoid ellipsoid, int zoneNo, int zoneInterval /* = 6 */)
{
    this->m_ellipsoid = ellipsoid;
    this->m_zoneInterval = zoneInterval;
    this->m_zoneNo = zoneNo;
    ComputeL0();
}
```

高斯-克吕格投影的正算

Positive calculation of Gauss-Kluge projection



GaussKrugerProj类投影正算返回两种坐标

```
public:  
    // 获得高斯平面直角坐标系的自然坐标  
    bool GetXY(double B, double L, double&x, double &y);  
  
    // 获得高斯平面直角坐标系的通用坐标  
    bool GetCommonXY(double B, double L, double&x, double &y);
```



高斯-克吕格投影的正算

Positive calculation of Gauss-Kluge projection

GetXY的实现

```
// step1 参数变量准备  
// 经纬度, 度转弧度  
double rB = DTOR(B);  
double rL = DTOR(L);  
double rL0 = DTOR(m_L0);  
// 经差  
double rl = rL - rL0;  
// 椭球参数  
double a = m_ellipsoid.GetA();  
double ec = m_ellipsoid.GetEC();  
double ecc = m_ellipsoid.GetECC();
```

角度计算以弧度为单位



高斯-克吕格投影的正算

Positive calculation of Gauss-Kluge projection

// step 2 计算子午线弧长X

```
double Ac = 1 + 3 / 4.0 * ec + 45 / 64.0 * pow(ec, 2) + 175 / 256.0 * pow(ec, 3) + 11025 / 16384.0 * pow(ec, 4) + 43659 / 65536.0 * pow(ec, 5);  
double Bc = 3 / 4.0 * ec + 15 / 16.0 * pow(ec, 2) + 525 / 512.0 * pow(ec, 3) + 2205 / 2048.0 * pow(ec, 4) + 72765 / 65536.0 * pow(ec, 5);  
double Cc = 15 / 64.0 * pow(ec, 2) + 105 / 256.0 * pow(ec, 3) + 2205 / 4096.0 * pow(ec, 4) + 10395 / 16384.0 * pow(ec, 5);  
double Dc = 35 / 512.0 * pow(ec, 3) + 315 / 2048.0 * pow(ec, 4) + 31185 / 131072.0 * pow(ec, 5);  
double Ec = 315 / 16384.0 * pow(ec, 4) + 3465 / 65536.0 * pow(ec, 5);  
double Fc = 693 / 131072.0 * pow(ec, 5);  
double M0 = a * (1 - ec);  
double A0 = Ac * M0;  
double A2 = -1 / 2.0 * Bc * M0;  
double A4 = 1 / 4.0 * Cc * M0;  
double A6 = -1 / 6.0 * Dc * M0;  
double A8 = 1 / 8.0 * Ec * M0;  
double A10 = -1 / 10.0 * Fc * M0;  
double X = A0 * rB + A2 * sin(2 * rB) + A4 * sin(4 * rB) + A6 * sin(6 * rB) + A8 * sin(8 * rB) + A10 * sin(10 * rB);
```



高斯-克吕格投影的正算

Positive calculation of Gauss-Kluge projection

// step 3 计算卯酉圈的曲率半径N

```
double W = sqrt(1 - ec * sin(rB) * sin(rB));
```

```
double N = a / W;
```

// step 4 计算其他参与计算的参数

```
double n2 = ecc * cos(rB) * cos(rB);
```

```
double t = tan(rB);
```

// step 5 高斯平面直角坐标系的自然坐标

// step 5.1 计算系数

```
double a0 = X;
```

```
double a1 = N * cos(rB);
```

```
double a2 = 1 / 2.0 * N * pow(cos(rB), 2) * t;
```

```
double a3 = 1 / 6.0 * N * pow(cos(rB), 3) * (1 - pow(t, 2) + n2);
```

```
double a4 = 1 / 24.0 * N * pow(cos(rB), 4) * (5 - pow(t, 2) + 9 * n2 + 4 * pow(n2, 2));
```

```
double a5 = 1 / 120.0 * N * pow(cos(rB), 5) * (5 - 18 * pow(t, 2) + pow(t, 4) + 14 * n2 - 58 * n2 * pow(t, 2));
```

```
double a6 = 1 / 720.0 * N * pow(cos(rB), 6) * (61 - 58 * pow(t, 2) + pow(t, 4) + 270 * n2 - 330 * n2 * pow(t, 2)) * t;
```

// step 5.2 计算x, y

```
x = a0 + a2 * pow(rl, 2) + a4 * pow(rl, 4) + a6 * pow(rl, 6);
```

```
y = a1 * rl + a3 * pow(rl, 3) + a5 * pow(rl, 5);
```

```
return true;
```

高斯-克吕格投影的正算

Positive calculation of Gauss-Kluge projection



进一步将y坐标按照带号以及规定的500公里进行偏移

```
bool GaussKrugerProj::GetCommonXY(double B, double L, double&x, double &y)
{
    bool res;
    res = GetXY(B, L, x, y);
    if (res)
    {
        x = x;
        y = y + m_zoneNo * 1000000 + 500000;
        return res;
    }
    else return false;
}
```




高斯-克吕格投影的正算

Positive calculation of Gauss-Kluge projection

以北京的2000坐标下的坐标来进行验证

```
int main()
{
    double x, y;

    GaussKrugerProj proj;
    std::cout << "以北京为例 (39.892, 116.068)，高斯平面直角坐标系的自然坐标为" << std::endl;
    proj.GetXY(39.892, 116.068, x, y);
    std::cout << std::fixed << std::setprecision(3) << x << "," << y << std::endl;
    std::cout << "以北京为例 (39.892, 116.068)，高斯平面直角坐标系的通用坐标为" << std::endl;
    proj.GetCommonXY(39.892, 116.068, x, y);
    std::cout << std::fixed << std::setprecision(3) << x << "," << y << std::endl;
}
```

Microsoft Visual Studio 调试控制台

```
以北京为例 (39.892, 116.068)，高斯平面直角坐标系的自然坐标为
4417953.224,-79712.948
以北京为例 (39.892, 116.068)，高斯平面直角坐标系的通用坐标为
4417953.224,20420287.052
```



高斯-克吕格投影的正算

Positive calculation of Gauss-Kluge projection

在QGIS当中作进一步验证

省会城市-高斯克吕格投影20带+WGS84 — Features Total: 34, Filtered: 34, Selected: 0

	name	id	X	Y	GKProjX	GKProjY	GCS2000Y	GCS2000X
1	乌鲁木齐	0	-1338765	5350750	18131098	5290345	43.782	87.576
2	拉萨	0	-1333828	3793165	17956995	3585048	29.710	91.163
3	西宁	0	-279540	4434872	19135046	4160825	36.593	101.797
4	兰州	0	-124534	4378886	19288847	4083212	36.119	103.584
5	成都	0	-92111	3787126	19253047	3472112	30.714	104.035
6	重庆	0	147657	3651115	19480526	3308563	29.479	106.519
7	贵阳	0	169316	3313278	19466205	2969333	26.457	106.668
8	昆明	0	-235661	3146373	19049045	2840037	24.969	102.727
9	银川	0	98654	4646408	19555047	4330007	38.598	106.167
10	西安	0	358864	4186486	19759368	3823625	34.276	108.967
11	南宁	0	345611	2895799	19597105	2543532	22.748	108.234
12	海口	0	593061	2585683	19802316	2222941	19.970	110.346
13	广州	0	872638	2984462	20113433	2569844	23.183	113.226
14	长沙	0	786102	3543592	20101827	3123927	28.170	112.947
15	南昌	0	1068406	3631865	20391789	3171241	28.652	115.893
16	福州	0	1446357	3399343	20724780	2886621	26.071	119.246

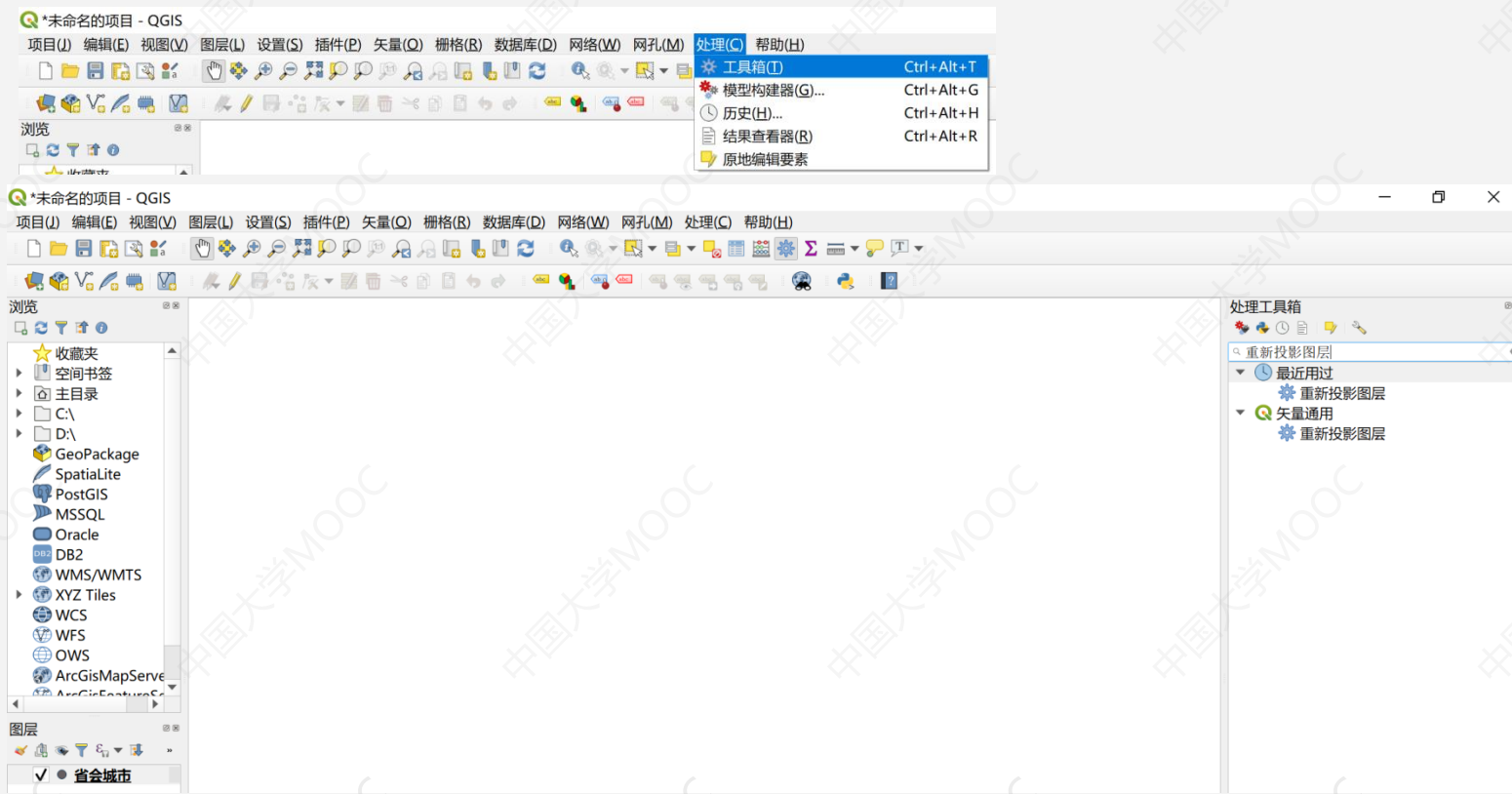
Show All Features

高斯-克吕格投影的正算

Positive calculation of Gauss-Kluge projection



使用QGIS提供的投影变换工具对数据进行坐标变换

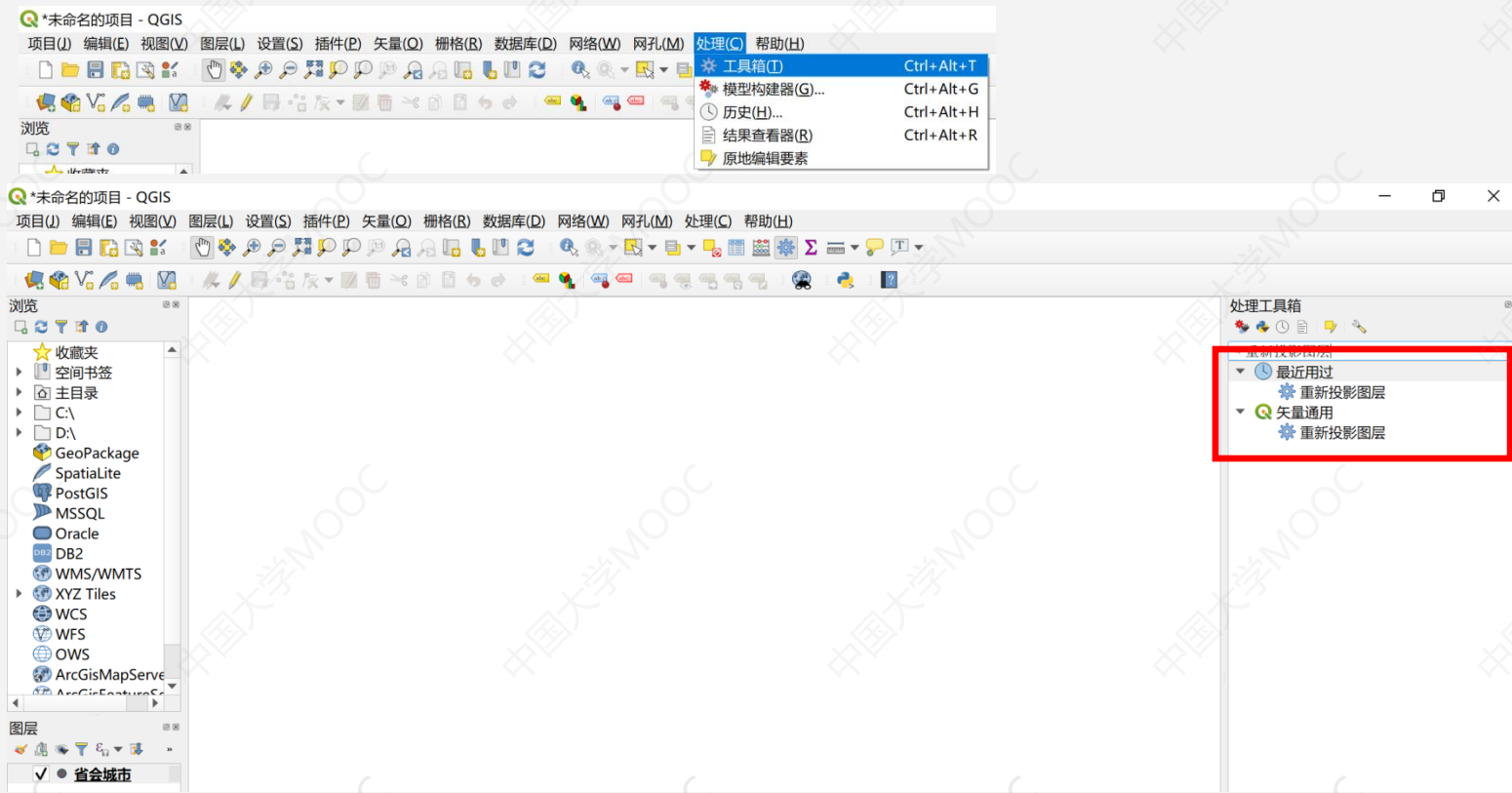


高斯-克吕格投影的正算

Positive calculation of Gauss-Kluge projection



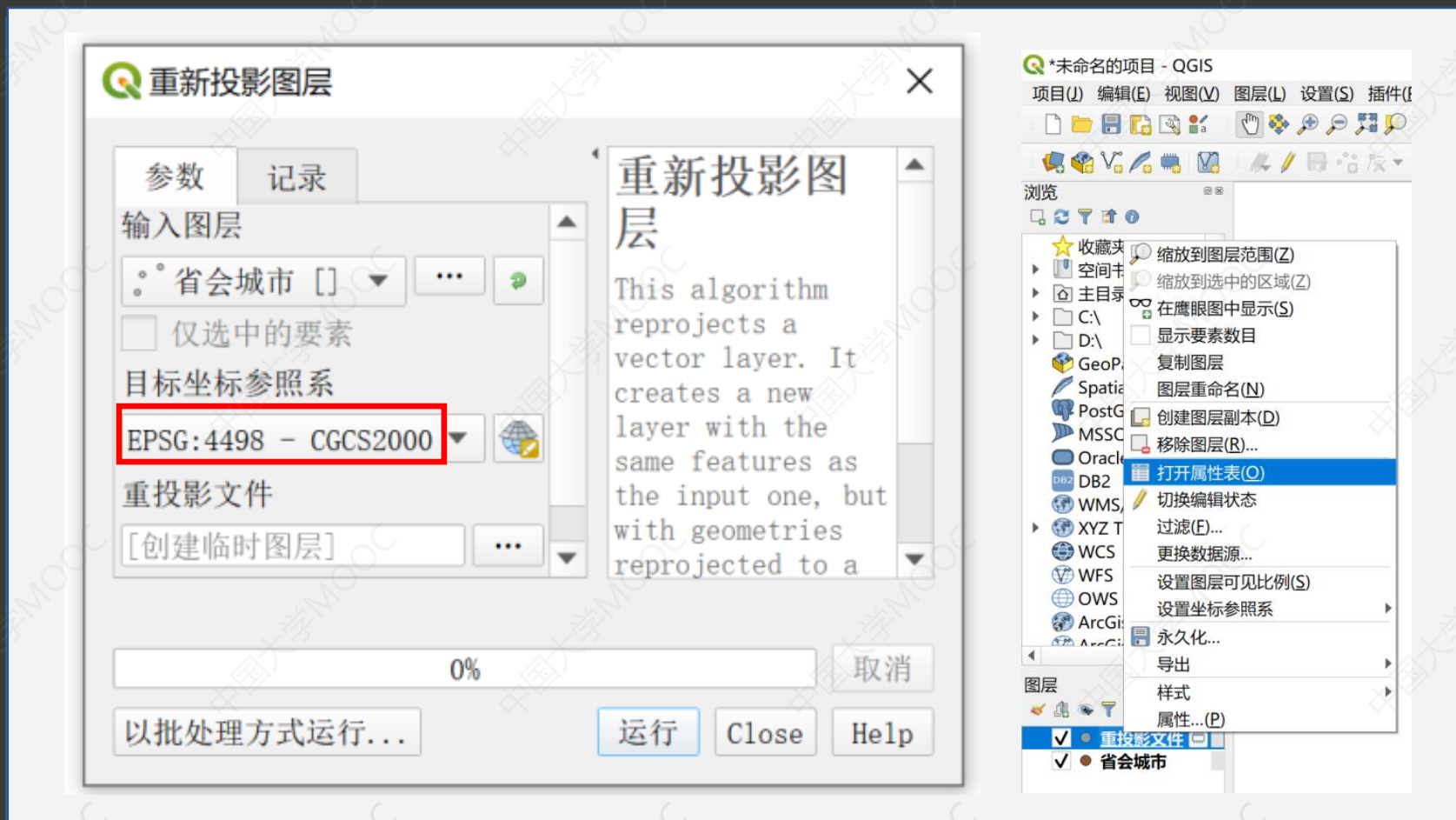
使用QGIS提供的投影变换工具对数据进行坐标变换





高斯-克吕格投影的正算

Positive calculation of Gauss-Kluge projection





高斯-克吕格投影的正算

Positive calculation of Gauss-Kluge projection

打开字段编辑器新建字段GKProjX

重投影文件 :: 要素总计: 34, 过滤了: 34, 选中: 0

打开字段计算器(Ctrl+I)

	name	id	X	Y
1	合肥	0	1146755	4000180
2	武汉	0	879697	3823309
3	郑州	0	775723	4271401
4	南京	0	1284948	4050817
5	银川	0	98654	4646408
6	昆明	0	-235661	3146373
7	南宁	0	345611	2895799
8	西安	0	358864	4186486
9	香港	0	974205	2908154
10	广州	0	872638	2984462
11	北京	1	913088	4849294

显示所有要素

字段计算器

☐ 仅更新0个选中的要素

☒ 新建字段 ☐ 更新现有的字段

☐ 新建虚拟字段

输出字段名称: GKProjX

输出字段类型: 小数(类型)

输出字段长度: 10 精度: 3

表达式 函数编辑器

搜索... 显示帮助

row number

- 变量
- 操作符
- 地图
- 地图图层
- 地图图层
- 几何图形
- 记录和属性
- 聚合
- 模糊匹配
- 日期和时间
- 数学

群组 操作符

该组包含操作符, 如+ - *

输出预览: 18131098.096889947

您正在编辑该图层中的信息, 但该图层目前处于非编辑模式。若单击确定, 将自动打开编辑模式。

OK Cancel Help



高斯-克吕格投影的正算

Positive calculation of Gauss-Kluge projection

添加字段GKProjY

重投影文件 :: 要素总计: 34, 过滤了: 34, 选中: 0

abc name = [Symbol]					
	name	X	Y	GKProjX	GKProjY
1	澳门	919574	2873685	20144262.895	2458293.411
2	北京	913088	4849294	20420256.949	4417945.630
3	成都	-92111	3787126	19253047.446	3472112.326
4	福州	1446357	3399343	20724780.104	2886620.732
5	广州	872638	2984462	20113433.464	2569843.755
6	贵阳	169316	3313278	19466204.867	2969332.662
7	哈尔滨	1594408	5626207	21245011.622	5106725.708
8	海口	593061	2585683	19802316.264	2222941.028
9	杭州	1448781	3884575	20806111.019	3361053.418
10	合肥	1146755	4000180	20524772.500	3523949.318

显示所有要素



高斯-克吕格投影的正算

Positive calculation of Gauss-Kluge projection

以同样的方式再将该重新投影文件的投影变换为EPSG:4490 - China Geodetic Coordinate System 2000，并生成坐标属性：

重投影文件 :: 要素总计: 34, 过滤了: 34, 选中: 0

name	X	Y	GKProjX	GKProjY	CGCS2000Y	CGCS2000X
1 澳门	919574	2873685	20144262.895	2458293.411	22.185	113.552
2 北京	913088	4849294	20420256.949	4417945.630	39.892	116.068
3 成都	-92111	3787126	19253047.446	3472112.326	30.714	104.035
4 福州	1446357	3399343	20724780.104	2886620.732	26.071	119.246
5 广州	872638	2984462	20113433.464	2569843.755	23.183	113.226
6 贵阳	169316	3313278	19466204.867	2969332.662	26.457	106.668
7 哈尔滨	1594408	5626207	21245011.622	5106725.708	45.693	126.566
8 海口	593061	2585683	19802316.264	2222941.028	19.970	110.346
9 杭州	1448781	3884575	20806111.019	3361053.418	30.331	120.182
10 合肥	1146755	4000180	20524772.500	3523949.318	31.838	117.262
11 呼和...	556278	4916846	20065286.058	4541786.273	40.895	111.842

显示所有要素

谢谢观看