$$R_a=\frac{a_e\sqrt{1-e^2}}{1-e^2\sin^2 B} \tag{2-17}$$

由此可知，地球椭球面上任一点的平均曲率半径等于该点子午圈曲率半径 M 和卯酉圈曲率半径 N 的几何中数。由于 M、N 均为纬度 B 的增函数，所以平均曲率半径 R_a 也是纬度 B 的增函数。

由式(2-17)，当 $B=0$ 时，R_a 值最小，为 $a_e\sqrt{1-e^2}$；当 $B=\frac{\pi}{2}$ 时，R_a 值最大，为 $\frac{a_e}{\sqrt{1-e^2}}$。在地球球体情况下，R_a 等于地球半径 R。

2.5　经线弧长和纬线弧长

2.5.1　经线弧长

经线弧长就是子午线椭圆的弧长。如图 2-13 所示，设子午线上一点 A 纬度为 B，在同一子午线上取邻近点 A_1，其纬度为 $B+\mathrm{d}B$，弧段 $AA_1=\mathrm{d}S_m$，两点间的纬差为 $\mathrm{d}B$。

由于 A 与 A_1 点非常接近，可以视作半径为 M 的圆弧，故其弧长微分公式为

$$\mathrm{d}S_m=M\mathrm{d}B \tag{2-18}$$

则由纬度 B_1 至 B_2 的经线弧长的积分表达式为

$$S_m=\int_{B_1}^{B_2}M\mathrm{d}B=\int_{B_1}^{B_2}\frac{a_e(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 B)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}B$$

即

$$S_m=a_e(1-e^2)\int_{B_1}^{B_2}(1-e^2\sin^2 B)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}B \tag{2-19}$$

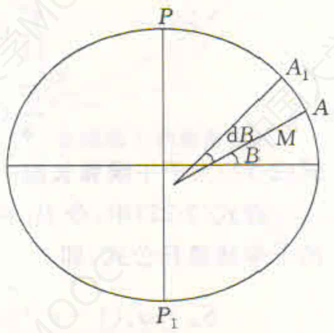

图 2-13　地球椭球面上的经线微分弧长

为便于积分，将式(2-19)的被积函数按二项式级数展开，则有

$$(1-e^2\sin^2 B)^{-\frac{3}{2}}=1+\frac{3}{2}e^2\sin^2 B+\frac{15}{8}e^4\sin^4 B+\frac{105}{48}e^6\sin^6 B+\frac{945}{384}e^8\sin^8 B+\frac{693}{256}e^{10}\sin^{10} B+\cdots \tag{2-20}$$

将式(2-20)中 $\sin B$ 的指数形式化为倍角函数，应用

$$\left.\begin{aligned}
\sin^2 B&=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2B\\
\sin^4 B&=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2B+\frac{1}{8}\cos 4B\\
\sin^6 B&=\frac{5}{16}-\frac{15}{32}\cos 2B+\frac{3}{16}\cos 4B-\frac{1}{32}\cos 6B\\
&\vdots
\end{aligned}\right\}$$

代入式(2-20)并整理得

$$(1-e^2\sin^2 B)^{-\frac{3}{2}}=A'-B'\cos 2B+C'\cos 4B-D'\cos 6B+E'\cos 8B-\cdots \tag{2-21}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}A'&=1+\frac{3}{4}e^2+\frac{45}{64}e^4+\frac{175}{256}e^6+\frac{11\,025}{16\,384}e^8+\cdots\\B'&=\frac{3}{4}e^2+\frac{15}{16}e^4+\frac{525}{512}e^6+\frac{2\,205}{2\,048}e^8+\cdots\\C'&=\frac{15}{64}e^4+\frac{105}{256}e^6+\frac{2\,205}{4\,096}e^8+\cdots\\D'&=\frac{35}{512}e^6+\frac{315}{2\,048}e^8+\cdots\\E'&=\frac{315}{16\,384}e^8+\cdots\\&\vdots\end{aligned}\right\}$$

将式(2-21)的被积函数代入式(2-19)并积分得

$$\begin{aligned}S_m=a_e(1-e^2)\Big[&A'(B_2-B_1)-\frac{B'}{2}(\sin 2B_2-\sin 2B_1)+\\&\frac{C'}{4}(\sin 4B_2-\sin 4B_1)-\frac{D'}{6}(\sin 6B_2-\sin 6B_1)+\\&\frac{E'}{8}(\sin 8B_2-\sin 8B_1)-\cdots\Big]\end{aligned} \tag{2-22}$$

式(2-22)为子午线弧长的一般公式，B_1、B_2 均以弧度为单位。

在式(2-22)中，令 $B_1=0$、$B_2=B$，则得到在地图投影计算中用得最多的由赤道至纬度 B 的子午线弧长公式，即

$$S_m=a_e(1-e^2)\left[A'B-\frac{B'}{2}\sin 2B+\frac{C'}{4}\sin 4B-\frac{D'}{6}\sin 6B+\frac{E'}{8}\sin 8B-\cdots\right] \tag{2-23}$$

式(2-23)对于克拉索夫斯基椭球体可写成如下实用公式，即

$$S_m=6\,367\,558.497B-16\,036.48\sin 2B+16.828\sin 4B-0.022\sin 6B \tag{2-24}$$

由于地球椭球体扁率的影响，子午线上各点的曲率半径随着纬度升高而增大。因此，纬差1°的经线弧长也随着纬度的升高而变长。纬差1°的经线弧长在赤道地区约为110.6 km，在两极地区约为111.7 km。

对于地球球体，子午线是大圆弧，其由0至 φ 的子午线弧长公式为

$$S_m=R\varphi \tag{2-25}$$

2.5.2 纬线弧长

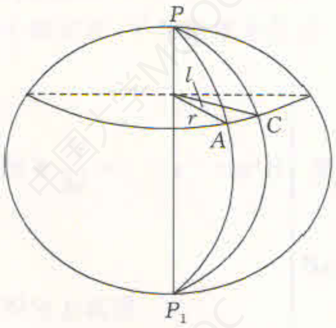

图 2-14 地球椭球面上的纬线弧长

设同一纬线上有两点 A 和 C，如图 2-14 所示，其经度分别为 L_1 和 L_2，A、C 两点的经差用 l 表示，$l=L_2-L_1$。

纬线弧长用 S_p 表示，由于纬线圈是圆，则 AC 弧的长度为

$$S_p=rl=N\cos B\cdot l \tag{2-26}$$

式中，l 以弧度为单位。