随机模拟方法与应用

Stochastic Simulation Methods and Its Applications

肖柳青 博士

lucyxiao@sjtu.edu.cn

PUB:SSMA_xiao@yeah.net

第6章模拟醉汉行走：随机游走模型

1. 布朗运动与扩散现象
2. 布朗运动的数学模型
3. 随机游走的应用

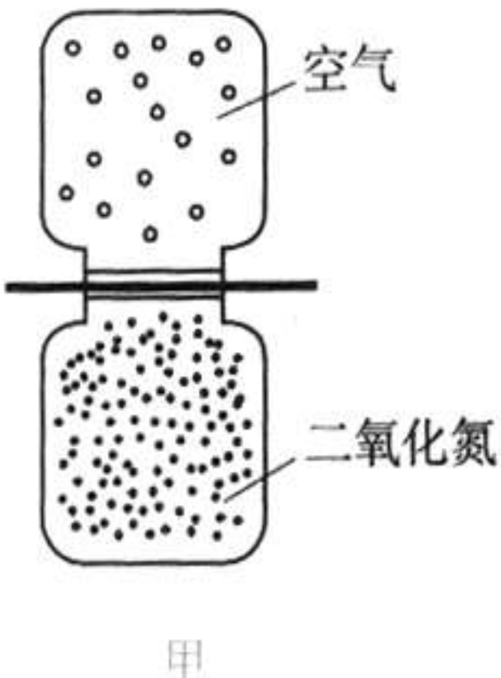
- 本章讲述一种特别直观的随机过程|随机游走，在上世纪初它被提出之后就得到了深入的研究并获得了广泛的应用。
- 本章将叙述如何用随机模拟的方法来实现随机游走，并对其结果进行分析。内容包括描述扩散过程的布朗运动、随机游走在金融领域中的应用、分析赌博游戏的性质并揭示其潜藏的危害。

1. 布朗运动与扩散现象

- 虽然马尔可夫链可以被认为是一个随机游走（在适当的状态空间），但随机游走并不一定是一个马尔可夫链。
- 例如，一个随机游走的下一步可能取决于前面步行的整个历史，像自回避随机游步就是这种情况，这已应用于高分子研究之中。
- 随机游动现象出现在许多领域：如粒子碰撞造成的悬浮花粉的布朗运动，在赌博问题中赌徒的财富变化（通常是输光的），在金融市场上证券价格的运动，等等。

分子的热运动

扩散现象



1、意义：它直接说明分子在做永不停息的无规则运动。

2、影响扩散现象的快慢因数：温度高，扩散现象越快。

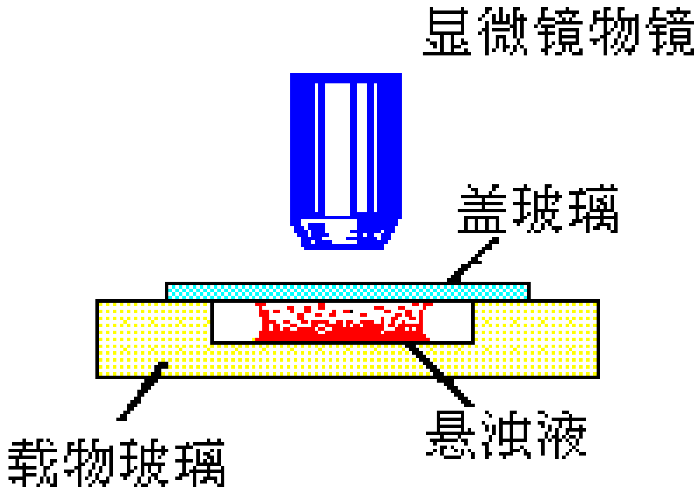
气体的扩散

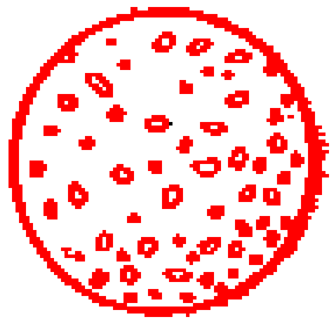
提问：还有没有其它的方法证实分子在做永不停息的无规则运动呢？

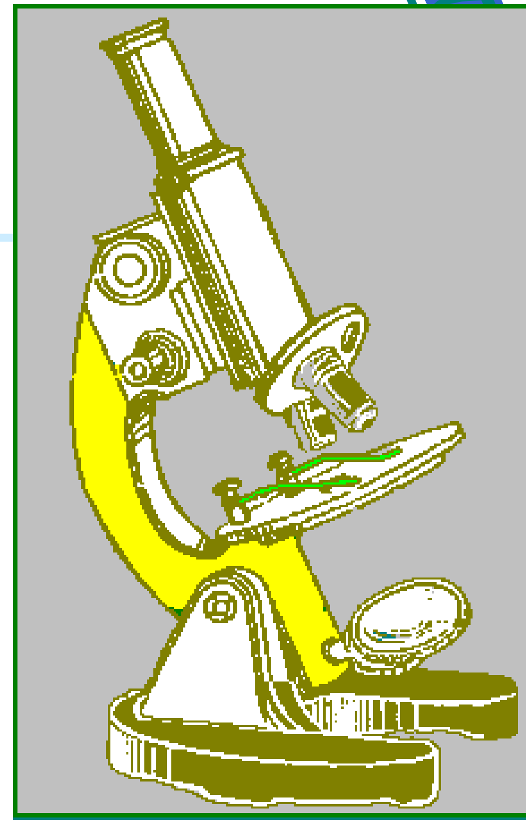
9.1.1 布朗运动

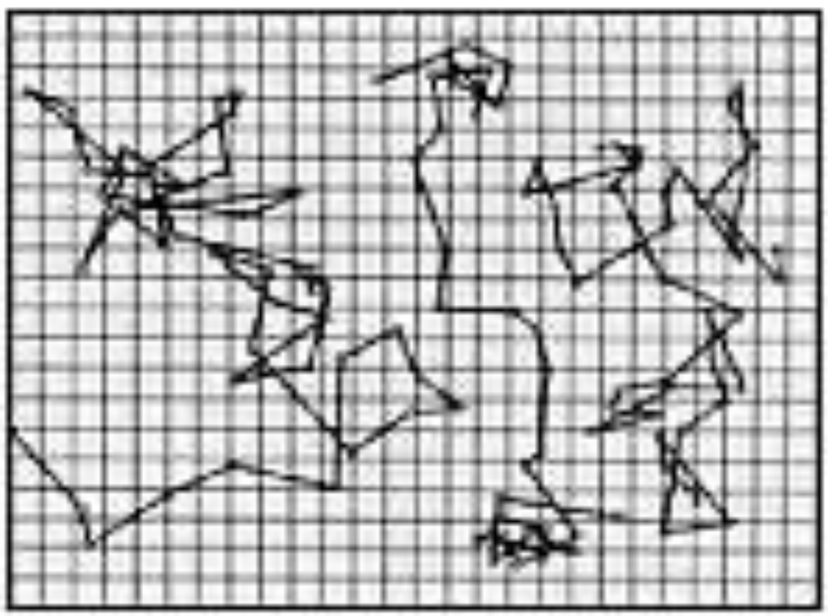
布朗是英国的一位植物学家。1827年布朗用显微镜观察植物的花粉微粒悬浮在静止水面上的形态时，却惊奇地发现这些花粉微粒在不停地做无规则运动。最后布朗把观察的对象扩大到一切物质的微小颗粒，结果发现，一切悬浮在液体中的微小颗粒，都会做无休止的不规则运动。

人们为了纪念布朗的这个发现，便把悬浮在液体中的花粉的无规则运动叫做布朗运动。









花粉微粒在做永不停息的无规则运动

布朗运动定义：

1、定义：是指悬浮在液体中的微粒的永不停息的无规则运动。

2、规律：

（1）悬浮的微粒越小，布朗运动越明显。

颗粒大了，布朗运动不明显，甚至观察不到运动。

（2）布朗运动随着温度的升高而愈加激烈。

3、布朗运动产生的原因——液体分子永不停息的无规则运动是产生布朗运动的原因。

外界因素的影响不是产生布朗运动的原因，只能是液体内部造成的。

由于液体分子在不停地做无规则运动，使得悬浮在液体中的微粒受到来自各个方向的液体分子的不平衡撞击，造成微粒运动的无规则运动，且永不停息。

4、意义：

布朗运动反映了（液体）分子运动的无规则性。

请注意：布朗运动不是指分子的运动。

布朗运动和扩散现象说明温度升高分子无规则运动加剧，也即分子热运动的平均动能增大。所以<u>温度是物体分子热运动的平均动能的标志</u>。（这就是温度的微观意义）而温度在宏观上的意义是表示物体冷热程度。

由于**Brown** 颗粒的质量远较液体的分子大，我们将颗粒看成是一个巨分子，它不停地受到周围环境中液体分子的碰撞，这种碰撞的频率为每秒10^{19}次，因此我们观察到的**Brown** 颗粒的运动是大量碰撞的涨落的结果，它是一种完全无规则的随机运动。

咖啡中的奶问题

我们要重新考虑从非平衡统计力学的角度出发，用它来说明系统接近平衡。

- 奶（水）分子由于无规则的碰撞会从一个地方移动到另一个地方，悬浮颗粒的移动则要慢得多。这种类似于随机游走的无规则移动被称为布朗运动，是一种扩散现象。

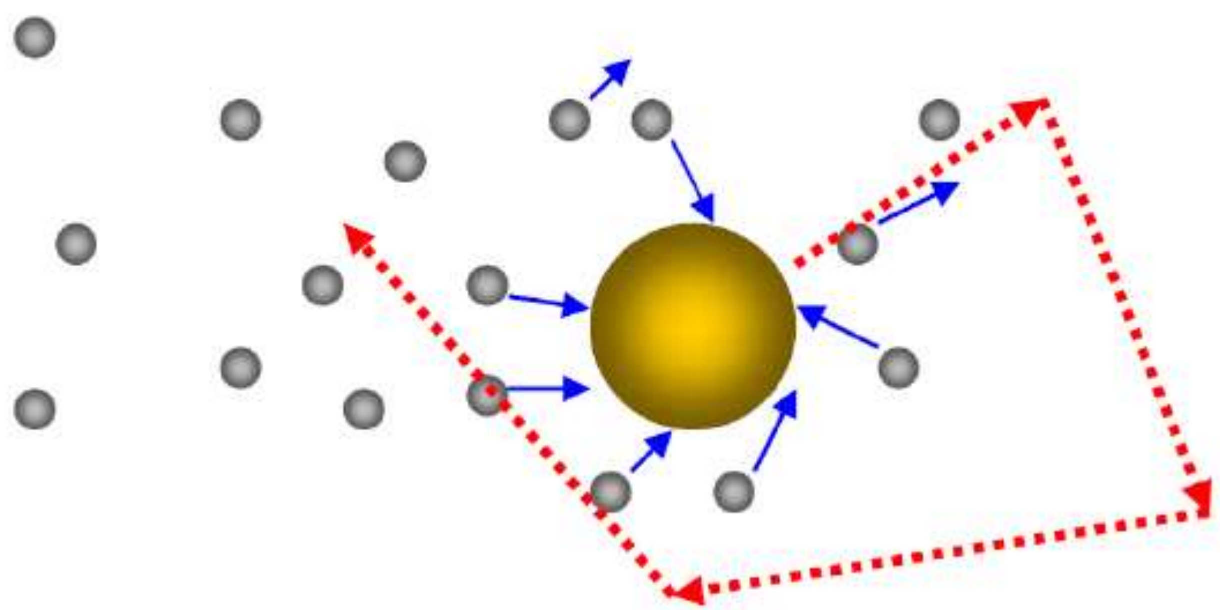


图 9.1　布朗运动示意图

- 为了简化研究，我们想象由单个粒子在一条实线的整数格点上随机游走。
- 粒子开始于原点并以概率p向右走1步，以概率$q = 1 - p$向左走1步，其中每步为单位长度。如果$p = q = 1/2$时，则可以用掷一枚均匀硬币来模拟。
- 例9.1 我们试验800000次随机游走了30步的情形，**Matlab**代码及结果显示如下。

Matlab代码：

```
nSteps=30;
nTrials=800000;
S=zeros(1,nTrials);
for j=1:nTrials
    x = 2*(rand(1,nSteps) < 0.5)-1;
    S(j) = sum(x);
end
hist(S,50,-25:1:25)
```

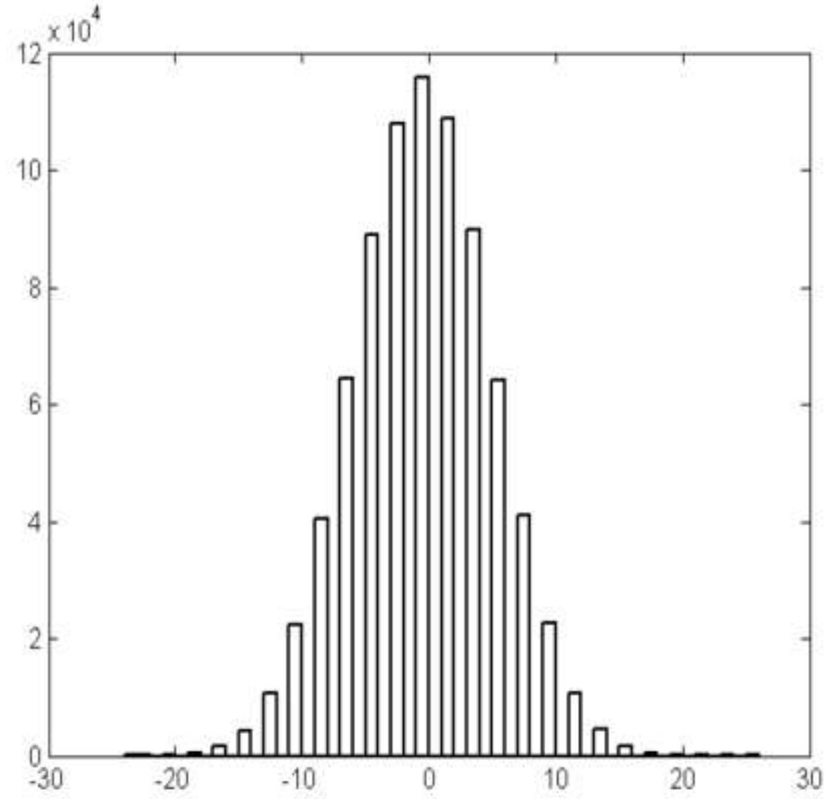
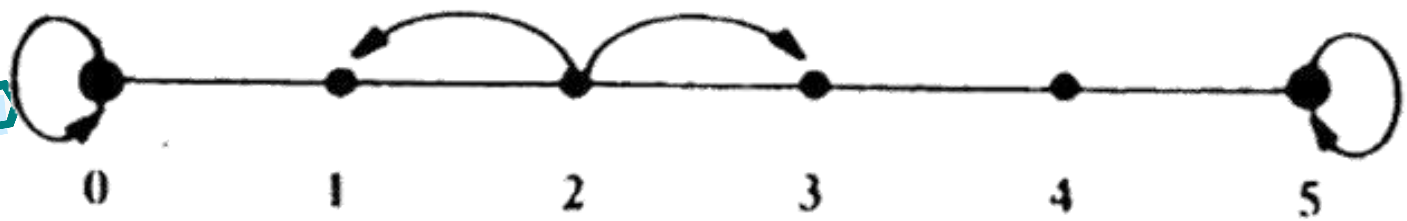


图 9.2　30步游走的800000次试验结果的直方图

9.1.2 随机游走的连续化

- 设：每个时间步是微小的 Δt
- 每一步的空间位移是 Δx
- 粒子从原点0出发，在一条直线上随机游走在每个时间步，粒子以概率p向右一步 Δx，或者以概率$q=1-p$向左一步 Δx,
- 经过n个时间步后，粒子将位于从$-n(\Delta x)$到
- $n(\Delta x)$的区间内。



- 令$P(m, n)$表示该粒子经过n个时间步（时间$t = n(\Delta t)$）后处在位置$x = m(\Delta x)$的概率，现在计算这概率$P(m, n)$。
- 设r为其中向右走的步数（$0 \le r \le n$），l为其中向左走的步数，则处在位置$m(\Delta x)$上就有关系式：
- $$m = r - l, \quad n = r + l$$
- r与l可写成

$$r = \frac{1}{2}(n + m), \qquad l = \frac{1}{2}(n - m)$$

- 然而，在n步中有向右走r次的可能方式数是从n中选出r的组合数，即

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- 那样就有 $$P(m,n) = C_n^r p^r q^{n-r}$$
- 这是一个二项分布。
- 接下来我们要确定这个分布的极限。

- 让我们先求出这分布的均值和方差。
- 由二项分布的性质，粒子位置的均值μ是
- $\mu = \mathrm{E}(m) = \mathrm{E}(2r - n) = 2\mathrm{E}(r) - n = (2p-1)n$
- 这是随机游走的漂移项。同理，粒子位置的方差是
- $\mathrm{var}(m) = \mathrm{var}(2r - n) = 4\mathrm{var}(r) = 4npq$
- 即其标准差σ为 $\sigma = \sqrt{\mathrm{var}(m)} = \sqrt{4npq}$
- 这是随机游走的标准差。若$p = q = 1/2$，则游走到达位置的均值是0，位置的偏离程度是$\sqrt{n}$

这表明粒子扩散的距离范围正比于时间的平方根，因此我们可以定义比率 $\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}$ 为粒子扩散系数。

- 现在我们来考虑概率分布的极限情况，这里仅限于$p = q = 1/2$的情形。
- 我们再次根据中心极限定理，可知应有

$$P(m,n) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(m-\mu)^2}{2\sigma^2}} \Delta m = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{m^2}{2n}} \Delta m$$

将$m = \frac{x}{\Delta x}$和$n = \frac{t}{\Delta t}$代入上式，则有

$$P(m,n) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{m^2}{2n}} \Delta m = \frac{1}{\sqrt{2\pi t (\Delta x)^2/\Delta t}} e^{-\frac{x^2}{2t(\Delta x)^2/\Delta t}} \Delta x$$

- 让我们过渡到连续的情形，令$\Delta x, \Delta t \to 0$，且设扩散系数$D = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} > 0$是一个常量，则相应的分布密度函数为

$$p(x,t) = \frac{P(m,n)}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2Dt}}$$

- 其中扩散系数D取决于液体的粘滞性质和温度。

- 可以验证，这个函数***p*(*x*, *t*)**满足一维扩散方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} \\ p(x,0) = \delta(x) \end{cases}$$

- 其中***δ*(*x*)**是狄拉克函数。这一结果由爱因斯坦于**1905**年在研究布朗运动的论
- 文中首先给出。

9.1.3 常返性

- 我们已经看到随机游走的标准差以$\sqrt{n}$在不断地随时间增大，这表明粒子的游走范围在不断地扩大。
- 人们可能会认为粒子可能几乎是一去不返了，但对于1 维和2维的随机游动，结果却并非如此。
- 事实上可以证明，当$n \to \infty$时随机游走的粒子将以概率1最终会回到原出发点。这个属性被称为常返性，满足该属性的随机游走称为常返的。

- 以$q0$记为从原点出发沿无限长直线随机游走永不返回的概率，则返回原点的概率为$p0 = 1 - q0$。类似地，以qi记从点$x = i$出发的随机游走永不返回的概率。
- 很显然，对于无限长直线来说，各点的不返回概率都是相同的，即$qi = q, \forall i$。
- 进一步看，由于粒子只有向左、右两个方向之一移动，故粒子向右不返回的概率与向左不返回的概率相等，即$q/2$。由于这种左右方向的对称性，那么粒子从原点出发，它向右不返回的概率是$q0/2$。

- 下一步，该粒子必处在$x = 1$。再下一步，它可能以概率1/2向左不返回，但这时它将回到原点，不然的话它将以概率1/2向右到达$x = 2$。这样，它们应该满足如下的概率关系：

$$\frac{q_0}{2} = \frac{1}{2}\frac{q_1}{2}$$

- 由此递推下去，我们可写出

$$\frac{q_0}{2} = \frac{1}{2}\frac{q_1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{q_2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{q_3}{2}\right)\right) = \cdots = \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{q_n}{2}\right) \rightarrow$$

- 因此，这就证明了：$p0 = 1 - q0 = 1$。

9.2 布朗运动的数学模型

- 定义**9.1 (**布朗运动**)** 设W_t是一个随时间t变化的随机变量（这里t为连续变量），如果它满足下面三个条件的话，则它是一个**1**维布朗运动：

(1) $W_0 = 0$;

(2) 对于$0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，增量$W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_3} - W_{t_2}, \cdots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$是互相独立的;

(3) 对于$0 \le s < t$，$W_t - W_s$是均值为0方差为$c(t-s)$的正态分布，其中$c > 0$是一个固定的常数。当$c = 1$时，它称为标准布朗运动。

一个d维正态分布密度函数是

$$f(\mathbf{x},\mu,\Sigma)=\frac{1}{\sqrt{|\Sigma|\,(2\pi)^{d}}}e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^{T}\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)}$$

其中μ是d维的均值向量，Σ是$d\times d$阶的协方差矩阵。Matlab给出了生成一个多维正态随机向量的函数，其格式如下：

R = **mvnrnd**(MU, SIGMA, N)

这函数输出N个d维正态分布的随机向量，存放在$N\times d$阶矩阵R中。其中：

MU是这分布的$1\times d$维均值的向量，

SIGMA是这分布的$d\times d$阶协方差矩阵。

例 9.2 我们以一个2维布朗运动为例，假设它的两个分量之间是不相关的，$W_t - W_s$的协方差矩阵是$\begin{pmatrix} 2(t-s) & 0 \\ 0 & 2(t-s) \end{pmatrix}$。为了能模拟它的运动轨迹，我们用单位步长来离散化时间。在每个时间步该布朗运动的随机位移服从这个2维正态分布，亦即这成为一个2维（正态）随机游走。我们给出模拟这个2维布朗运动的Matlab程序。图9.3(a)给出了模拟了1000步的2维布朗运动的轨迹。图9.3(b)显示了在500次试验下该布朗运动当1000步游走轨迹的末端位置，可见这些点的散布状况基本是关于原点对称的。

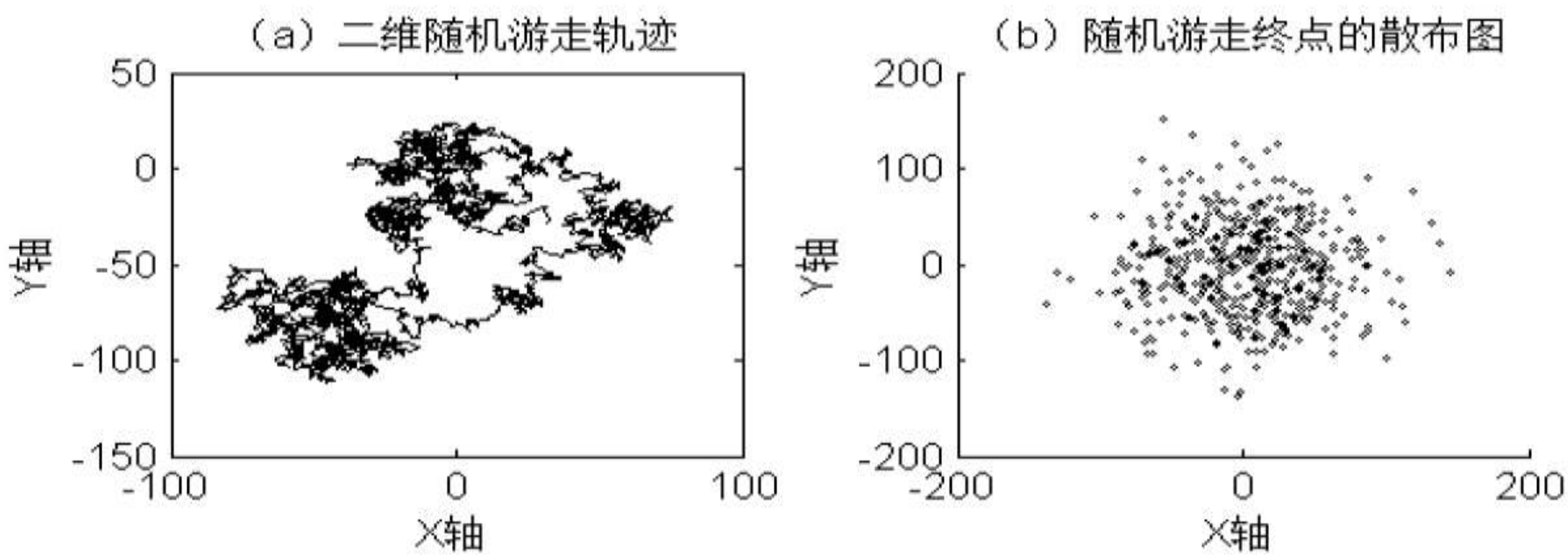


图 9.3　模拟布朗运动的二维随机游走（1000个时间步）

模拟上面二维布朗运动的Matlab：

```
sig=2;                    % 方差系数
nSteps = 1000;    % 游走的步数
MU=[0  0];    SIGMA=[sig  0;  0  sig];
rng('shuffle')
R = mvnrnd(MU,SIGMA,nSteps);
x(1)=0;    y(1)=0;    % 出发的原点
for  i=2:nSteps
      x(i)=x(i-1)+R(i,1);
      y(i)=y(i-1)+R(i,2);
end
figure(1)
plot(x,  y);
title('二维随机游走轨迹');
xlabel('X轴');    ylabel('Y轴');
nWalks = 500;    % 重复试验次数
Endx=zeros(nWalks,1);     Endy=zeros(nWalks,1);
```

```
for j=1:nWalks
    R = mvnrnd(MU,SIGMA,nSteps);
    x(1)=0; y(1)=0;
    for i=2:nSteps
        x(i)=x(i-1)+R(i,1);
        y(i)=y(i-1)+R(i,2);
    end
    Endx(j) = x(nSteps);
    Endy(j) = y(nSteps);
end
% 画随机游走终点的散布图
figure(2);
scatter(Endx, Endy, 3);
title('随机游走终点的散布图');
xlabel('X轴'); ylabel('Y轴');
```

9.2.2 布朗运动的标度不变性

- 一个有趣的现象是布朗运动的这种轨迹模式呈现所谓的标度不变性。这里的标度是指模拟中采用的时间步的间隔长短，我们可以缩短或者放大时间步长重新进行模拟，所获得的轨迹图有相同的模式，这说明它们展示出相同的特性。这种情况就像人们在变焦镜下看东西一样。

在数学上，这种标度不变性是指：对于任何$\alpha \neq 0$，$\alpha^{-1}W_{\alpha^2 t}$也是一个布朗运动。这点从定义9.1立即可以获证。注意，将一个布朗运动反一个符号，即$-W_t$，它的实质并无改变。

9.2.3 布朗运动的常返性

- 前面已经指出：1维和2维格点上的对称随机游走具有常返性，即游走一定会返回到原点。它似乎也具有像马尔可夫链所展示出的遍历性。
- 2维布朗运动也是常返的。但这里的常返性的含义不是指精确的逐点返回，而是指以概率1返回原点的一个任意小的邻域，不一定都返回到原点。同理，它的遍历性也是意味着它将以概率1到达平面上的任意邻域。
- 然而，在3维或者更高维的空间里的随机游走和布朗运动的常返性不再成立。这时的返回概率小于1，那将意味着有一定的概率它不会再回来了。这原因是因为随着空间维数的增加，游走的自由度也随之增加，好似“天马行空”那样自由。

9.3 随机游走金融期权的应用

- 历史上在1900年，法国数学家巴施里耶（**Louis Bachelier**，右图）在他的博士学位论文中引进了三个现代金融的基本概念：能减少风险的期权（一种金融产品）；有效市场假设；应用布朗运动来描述证券价格的变化。在那时代他的论文是太超前了，当时他的论文没有获得重视而被人遗忘。

9.3.1 金融期权定价

- 期权是金融市场上的一种衍生产品，衍生意味着它的存在和价值依赖于另一项金融资产的状况，该金融资产被称为标的资产，如股票、债券、外币等。这些标的资产在金融市场上的价格是随机变化的，是一种风险资产。
- 期权产品就是为此目的而设计的金融产品。期权就是透过给予人们买或者卖一项资产的选择权利来实现避险的功能。因为对于标的资产价格走势的判断有看涨和看跌两种情况，所以期权也相应地分为看涨期权和看跌期权。

期权(option)与类似期权的证券

1. 定义（期权(option)）

期权又称选择权（是期货合约买卖选择权的简称），是一种能在未来某特定时间以特定价格买入或卖出一定数量的具有一定价值的资产的权利。是套期保值和投机的重要工具，已成为投资组合专家的基本工具。

期权合约是为给予期权买方在合约到期前或到期时以规定的价格购买或销售一定数量某种资产的权利而签订的合约。

2. 追溯历史

- 期权合约交易的最早记录出现在《圣经》中。为了娶到拉班(**Laban**)的女儿，雅各布(**Rachel Jacob**)签订了一个“期权”协议——如果雅各布为拉班工作**7**年，那么他有权娶拉班的女儿。用期权的语言来说，雅各支付的期权费为**7**年劳动的价值。
- 公元前1200年的古希腊和古腓尼基国的贸易中就已经出现了期权交易的雏形，只不过当时条件下不可能对其有深刻认识。

期权的思想萌芽也可以追溯到公元前1800年的《汉穆拉比法典》。

有记载的最早利用期权进行投机的是古希腊天文学家、哲学家泰利斯(**Thales**，公元前**624-546**年)。根据亚里斯多德(**Aristotle**)记载，泰利斯凭借自己星相方面的知识在冬天就知道来年的橄榄会丰收。尽管他没有多少资金，他还是大量买进橄榄压榨设备的使用权，由于没有人与他竞争，因此价格非常低。第二年，橄榄果然大获丰收，对橄榄压榨设备的需求迅速上升，泰利斯于是出售期权合约，从而获得丰厚利润。

- 在经历了1929年10月的股市暴跌以及随之而来的大萧条以后，美国通过立法加强了对证券市场的监管，1933年通过了证券法，1934年通过了证券交易法，并且根据后一部法创立了证券与交易委员会(SEC)作为这两部法律的实施、执行机构，从而确立了它作为证券市场监管机构的地位。
- SEC成立以后，除了整治股票、债券市场以外，还着手评估期权市场。由于SEC把重点放在了20年代的股票期权市场操纵事件上，期权市场的前景一片黯淡。SEC最初起草的法案提出决定取缔期权市场。

- 国会因此举行听证会，著名的期权经纪人**Herbert Filer**被期权经纪人协会派去回答有关期权的问题。在听证会上有人问他：

“如果只有12.5%的期权被执行，那么其余87.5%购买期权的投资者不是拿钱打水漂了吗？”

Filer回答道：“不，先生。如果你为你的房子保了火灾险，而你家的房子并没有着火，你会认为你购买保险的支出是打水漂了吗？”

Filer强有力的辩论说服了国会，拯救了美国的期权业。美国证券交易委员会的最终总结认为，并非所有的期权交易都被操纵，只要使用得当，期权是一种有价值的投资工具。

- 公认的期权定价理论的始祖是法国数学家巴舍利耶(LouisBachelier, 1900年)
- 令人难以理解的是,长达半个世纪之久巴舍利耶的工作没有引起金融界的重视,直到**1964**年，美国著名经济学家萨谬尔森（**Paul Samuelson**）重发现了他的工作，并在原基础上做了修正和推广，期权定价问题开始受到重视。

- 1973年芝加哥委员会期权交易所创建了第一个用上市股票进行看涨期权交易的集中市场，1977年看跌期权也出现在交易所内。

- 在1973年，两位年轻的美国人布莱克（**Fischer Black**）和肖尔斯（**Myron Scholes**）发表了关于期权定价的著名论文，论文的发表也是几经周折。同年，期权正式在芝加哥交易所获得上市。**1997**年度的诺贝尔经济学奖被授予了肖尔斯和莫顿（**Robert Merton**）

- 1983年1月，芝加哥商业交易所提出了S&P　500股票指数期权，纽约期货交易所也推出了纽约股票交易所股票指数期货期权交易。

- 目前，外汇期货期权交易主要集中在国际货币市场；短期利率期货期权交易集中在芝加哥商业交易所，中长期利率期货期权交易集中在芝加哥商品交易所。

期权的相关概念

（1）从买卖双方来说

- 买权（或看涨期权，call）：是指期权的买方享有在规定的有效期限内按某一具体的敲定价格买进某一特定数量的相关资产的权利，但不同时负有必须买进的义务。

- 卖权（或看跌期权，put）：是指期权的买方享有在规定的有效期限内按某一具体的敲定价格卖出某一特定数量的相关资产的权利，但不同时负有必须卖出的义务。

（2）按标的资产分类：

- 商品期权：农副产品、工业原材料、能源产品等
- 金融期权：股票、指数、利率、外汇等

（3）从执行时间来看

- 美式期权：是指在到期日和到期日之前都可以执行的期权。
- 欧式期权：是指只有在到期日方可执行的期权。

期权的基本术语

- 执行价（预定价）：预先敲定的价格
- 到期日（失效日）：期权合约的失效日
- 买权（call）、卖权（put）
- 美式期权（C、P表示买权与卖权）、欧式期权（c、p表示买权与卖权）
- 期权费（权力金）：期权的买方支付的期权价格，即买方为获得期权而付给期权卖方的费用 。
- 履约保证金：期权卖方必须存入交易所用于履约的财力担保。
- 期权价格差：是指不同执行价格或到期时间的两个或两个以上买权（或卖权）的组合，有些期权是多头，有些期权是空头。

“公平的”期权费应该是多少？

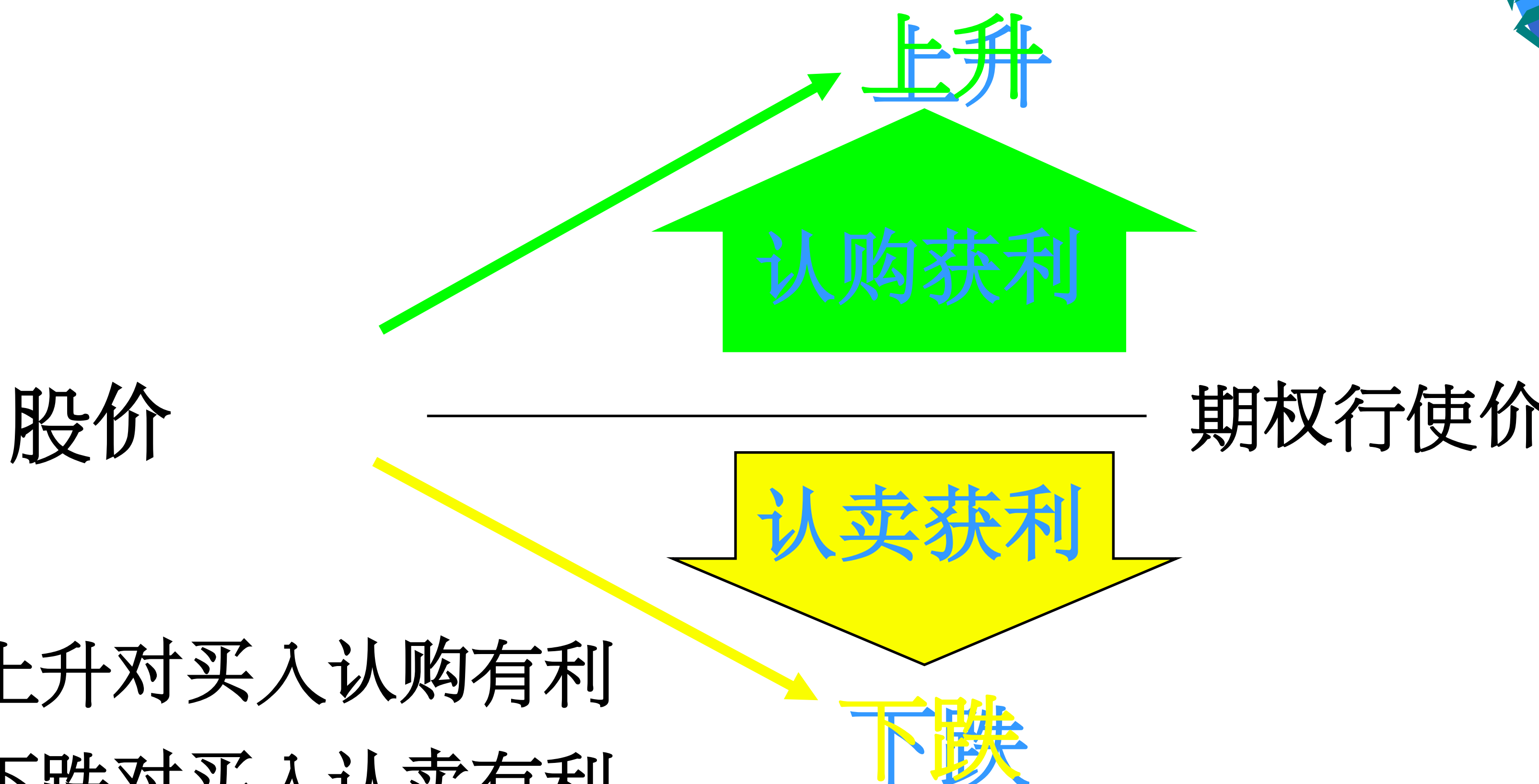
- **期权的有效期一般短于1年。当然，期权到期之后合约即终止。而其中的固定价格是指期权的执行价或敲定价，它锁定了未来交易该资产的价格。出售方收取的费用被称为期权费或者期权溢价。**
- **所谓的期权定价就是确定这个期权费“公平的”应该是多少？**

期权的作用

（1）期权投资的特点

– 交易对象是一种权利；
– 交易双方所享受的权利和承担的义务不一样
– 期权投资者能够以有限的风险达到保值的目的。

（2）保值（保险）

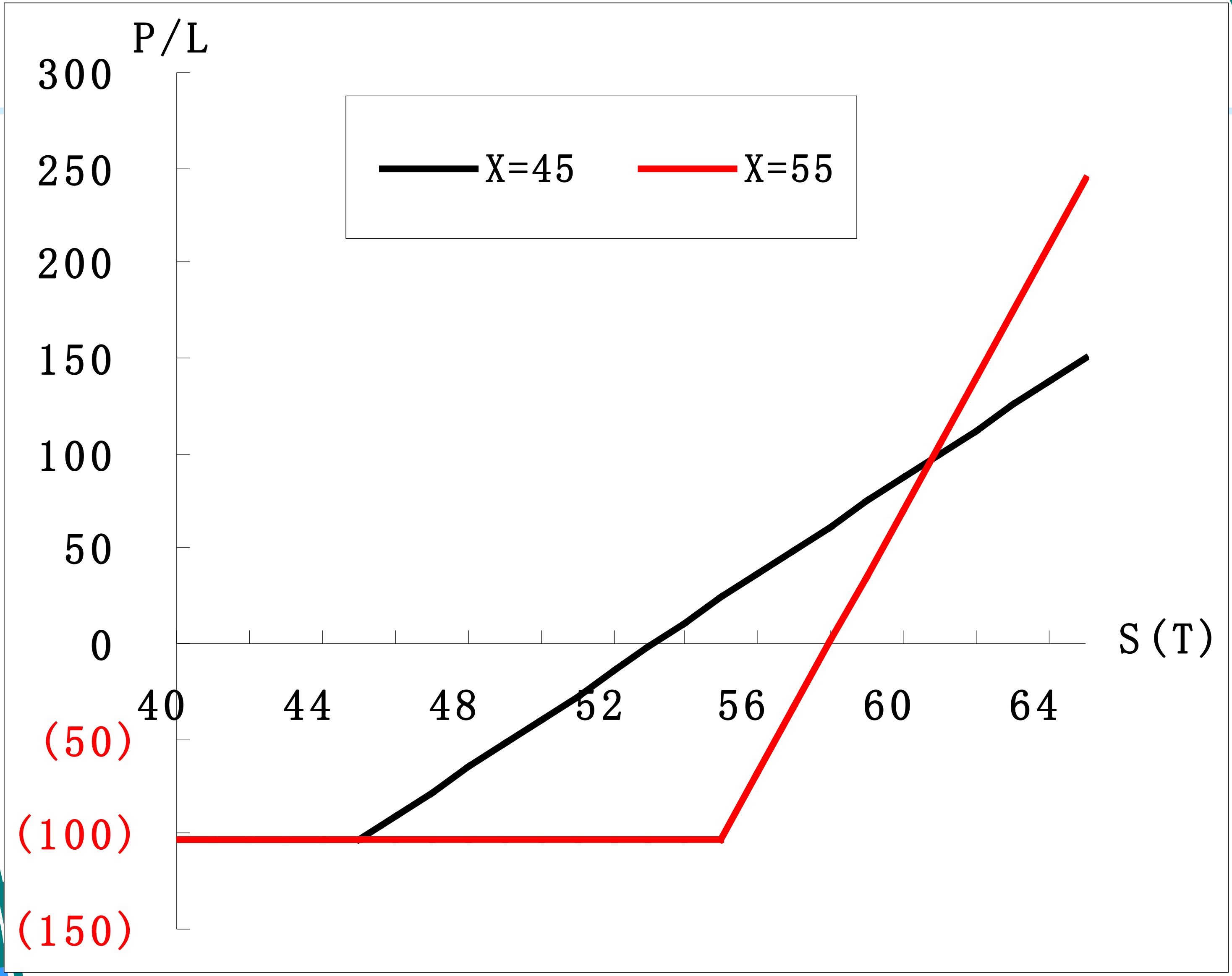


股价上升对买入认购有利

股价下跌对买入认卖有利

（3）投机

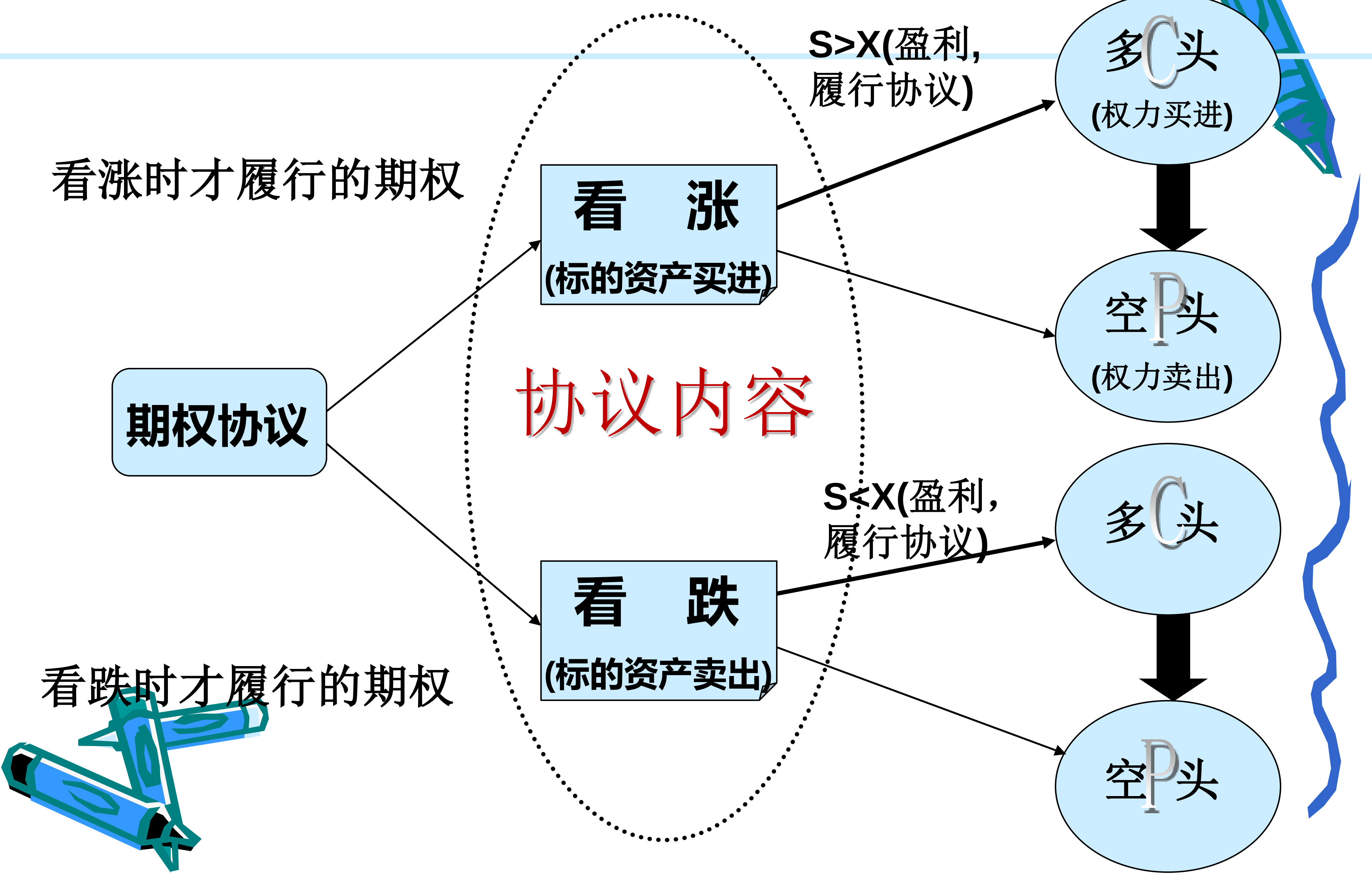
- 购买虚值状态的买权的风险要比实值状态的更高，投机性更强。
- 例子：
  - 无风险利率为6%；
  - 标的股票的市场价格等于50美元；
  - 波动率等于30%；
  - 期限为半年；
  - 执行价格分别为45美元和55美元。
  - 执行价较低的为实值买权，执行价较高的为虚值买权。考虑两种投资方案，初始投资都等于100美元，分别购买这两种期权，并持有到期。



P/L
300
250
200
150
100
50
0
(50)
(100)
(150)
X=45
X=55
S(T)
40
44
48
52
56
60
64

- 相对于购买实值状态的买权而言，购买虚值状态的买权支付的期权费少，但股价需要上涨更多才能盈利。
- 在投资额相同的情况下，投资者可以购买的虚值状态的期权的数量多于实值状态的买权数量。
- 如果股票价格上涨的幅度足够大的话，那么购买虚值状态的买权将获得更高的利润。但是，如果股票价格上涨的幅度不够或者股价下跌，那么购买虚值状态的买权蒙受的损失更大。

期权的四种头寸



看涨时才履行的期权
看跌时才履行的期权
期权协议
协议内容
看　涨
(标的资产买进)
看　跌
(标的资产卖出)
S>X(盈利,
履行协议)
S<X(盈利,
履行协议)
多C头
(权力买进)
空P头
(权力卖出)
多C头
空P头

期权的风险特征

- 在忽略交易费用的条件下，期权的多方和空方的损益之和恒等于零，用对策论的术语来说，期权交易是零和博奕。
- 期权式单边风险工具，它只保护价格向一个方向变化。
- 在期权到期日，

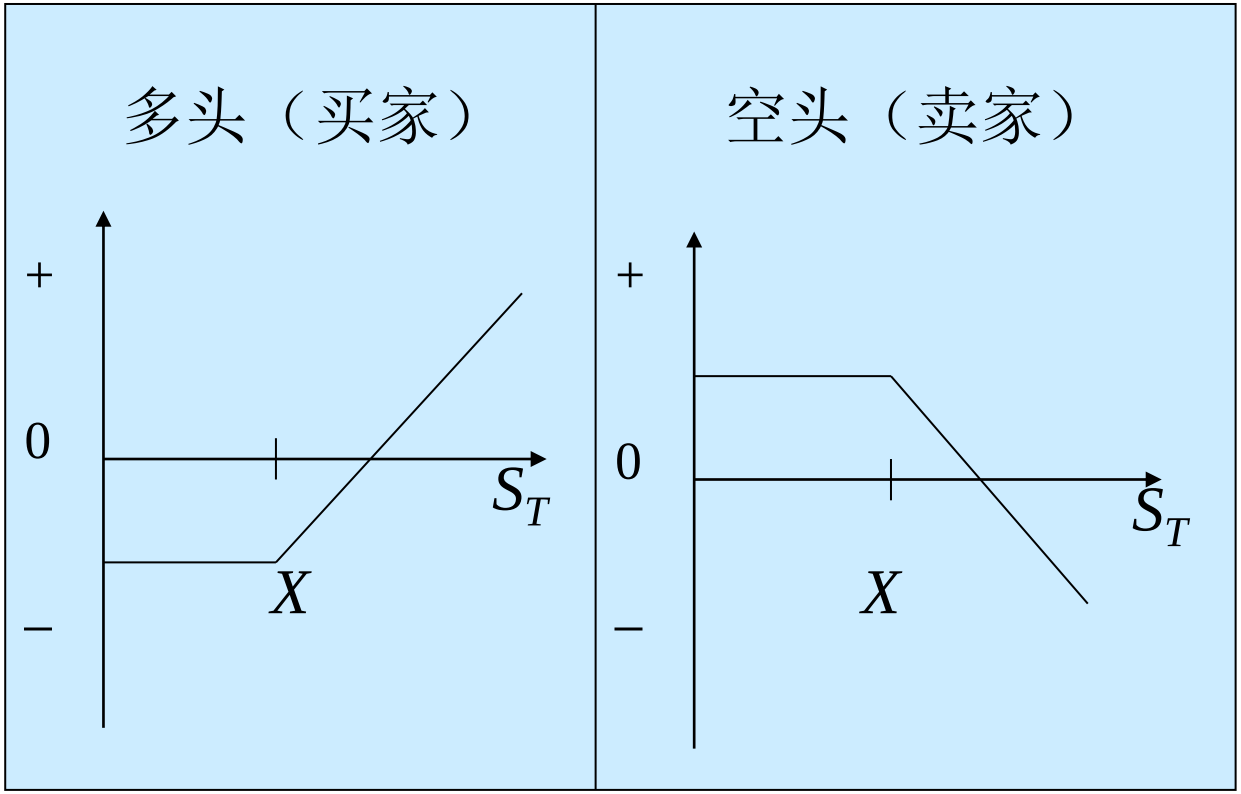
  买权多头的支付= $\max(S_T - X, 0)$

  买权空头的支付=- $\max(S_T - X, 0)$

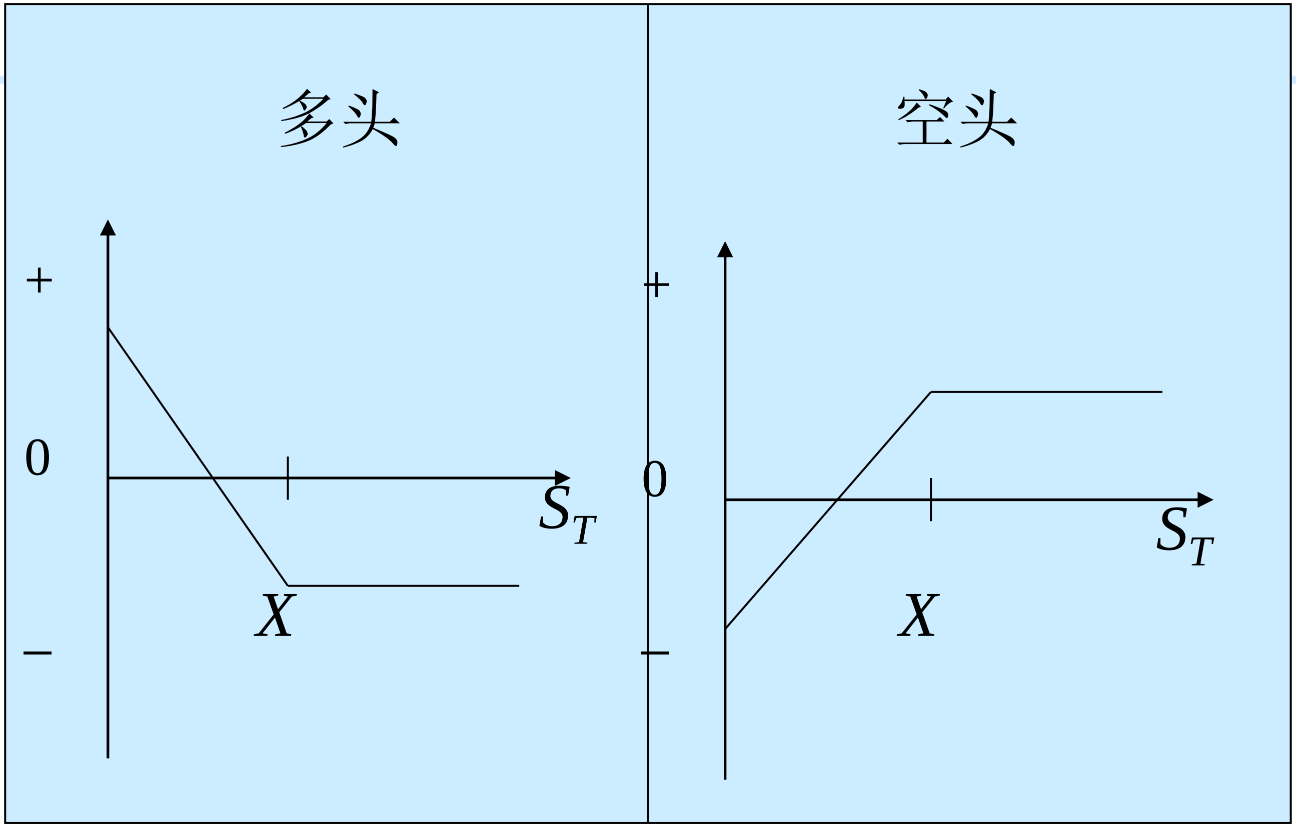
  卖权多头的支付= $\max(X - S_T, 0)$

  卖权空头的支付=- $\max(X - S_T, 0)$

买权、卖权在到期时的损益状态图



买权



卖权

- 例如，假设现在通用电气的股票价格是每股32美元，如果从现在到未来三个月内，每股价格跌破25美元，则持有通用电气股票的某公司就可能破产，因此该公司不妨购买一份看跌期权来避险。
- 该期权约定他在未来三个月内能够以每股25美元的敲定价出售这些股票。这样该期权就像是一份保险一样：如果股票的市场价格保持不变或上涨，则公司不会执行该期权直至期权到期；否则，如果在未来三个月内市场价格低于了敲定价，那么公司就选择执行该期权防止了破产的发生。

- 当然，期权的出售方是有风险的，出售方可能要以每股25美元的价格买进那些股票，而该股票的市场价格已低于了25美元，或许每股20美元，甚至更少。所以，出售方必须收取期权持有人一定的期权费以承担这种风险。如果期权未被执行，则出售方就能将期权费作为利润。

- 例如，假设某制药公司的股票现价为每股79美元，但该公司一直在努力试制新药，预期不久的将来可能获得国家药监局的批准。
- 如果成功，公司的股价将飙升。看到了获益的可能性，投机者买入了从现在至四个月的以敲定价每股85美元购买一定数量的该公司股票的看涨期权。

- 假如公司获得成功，其股价攀升至每股92美元，投机者将执行期权而获利每股7元的利润。
- 假如失败，则股价大跌（即使稍有回升也不可能在这期间超过85美元），那么期权是不会被执行的。
- 因此，投机者花费了少量的期权费作为成本，换来了盈利的机会。

- 在该看涨期权的情况下，出售方承担股票的市场价格高于85美元的敲定价的风险。
- 例如，当市场价已涨到每股92美元时，但为了履行合同须以敲定价出售它。
- 考虑到这种风险，出售方应该收取的期权价格是多少？

如何给予期权一个公平合理的定价呢？

- 这个问题的解决必须借助于随机过程的数学理论，从而开创了数理金融学研究的时代。那样，随机模拟也就可以应用来解决这一问题。

期权定价的基本方法

- 期权定价的首要问题是如何来刻画标的资产的价格变化，即用合适的数学模型来模拟标的资产的价格变化。
- 为了理解的方便，我们后面假设标的资产是股票。
- 股票价格变化的随机性是众所周知的事实，那么它呈现何种随机性质呢？重要的概念是由尤金·法玛（**Eugene Fama**）给出的所谓有效市场假说：

有效市场假说：

- 假设**9.1** 在一个有效市场上，股票的价格已经反映了所有已知的信息，因此在很短的时间间隔内股价的变动是完全随机的。
- 事实上，这个假设说的是：股价的相对变化率（回报）服从正态分布，即股票的回报是一个布朗运动。

- 设S_t是股票在t时刻的市场价格； Δt是单位时间，譬如一天；以$\Delta S_t = S_{t+\Delta t} - S_t$表示在此期间价格的变动。这样，股价的相对变化率是$\Delta S_t/S_t$，于是我们可以写出股价的基本演化方程为
- $$\frac{\Delta S_t}{S_t} = \mu \Delta t + \sigma \Delta W_t \quad (9.4)$$
- 其中$W_t = W_{t+\Delta t} - W_t$是标准布朗运动的随机变量；$\mu$和$\sigma$是股价变化的特征参数，分别被称为漂移率和波动率。

- 遵循（9.4）方程的股价演化被称为几何布朗运动，也称为伊藤（It^o）过程。这里增加漂移项μt 的原因是因为股票的基本价值一般会有一定的增长性（公司业绩的增长）。
- 假如股价无随机性，即$W_t = 0$，则$S_t = \mu S_t \Delta t$，则股价以μ为增长率呈指数地增长（因为可以解出$S_t = S_0 e^{\mu t}$）。但是，μ的数值通常是难以估计的。然而巧合的是，读者很快会看到μ在期权定价中居然不起任何作用。波动率σ是期权定价中的一个非常重要的因素。它反映股价的波动幅度，它的数值可以从股价的历史数据中用简单的统计公式估计出来。

几何布朗运动的模拟

- 为了模拟几何布朗运动的运动轨迹，我们从正态分布抽取W_t的样本（随机序列），由（9.4）式计算ΔS_t，得下一步的股票价格S_{t+1}，即$S_{t+1}=St+\Delta St$，以此类推地不断向前迭代。
- 因为$W_t \sim N(0, t)$，所以可以将方程（9.4）改写为

$$\Delta S_t = \mu S_t \Delta t + \sigma S_t \sqrt{\Delta t}\varepsilon$$

这里$\varepsilon \sim N(0,\ 1)$，

2. 风险中性定价

- 期权定价必须是“公平的”，这到底是什么意思呢？
- 公平性意味着：“天底下没有免费午餐”，“天上不会掉馅饼”。投资者不能不承担风险而赚钱，即不能无风险套利。这与市场的有效性是一致的。
- 事实上，“不能无风险套利”是期权定价的关键所在，称为“无风险套利均衡原理”。

- 布莱克和肖尔斯发现用卖出一份期权和买入一定份额的标的资产就可以构成一个无风险的资产组合，那么这个资产组合的收益率必须等于其他无风险资产（如政府债券）的收益率。
- 具体地说，设无风险政府债券的利率（即收益率）为r，看涨期权的价格为f。显然，这个期权的价格一定依赖于股票（标的资产）价格S和时间t，即是函数$f(S, t)$。具体写出就是：

$$\Pi = -f + \frac{\Delta f}{\Delta S} S$$

- 其中$\Delta f/\Delta S$就是购买股票的份额数。无风险套利均衡原理要求这个资产组合的收益率（回报）等于r，亦即有

$$\frac{\Delta \Pi}{\Pi} = r\Delta t$$

- 根据伊藤给出的计算公式（伊藤公式）：

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial f}{\partial S}\Delta S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(\Delta S)^2$$

- 上面的伊藤公式实际上是将函数f作泰勒展开到二阶无穷小的式子。

- 而由（9.5）式，我们有

$$(\Delta S)^2 = (\mu S \Delta t + \sigma S \sqrt{\Delta t} \varepsilon)^2 \approx \sigma^2 S^2 \varepsilon^2 \Delta t$$

另外由于$E(\varepsilon^2) = 1$，我们可近似地认为$\varepsilon^2 \approx 1$

$$(\Delta S)^2 \approx \sigma^2 S^2 \Delta t$$

代入有

$$\Delta\Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S}\Delta S = -\left(\frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial f}{\partial S}\Delta S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(\Delta S)^2\right) + \frac{\partial f}{\partial S}\Delta S$$

$$= -\frac{\partial f}{\partial t}\Delta t - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(\Delta S)^2 = r\Pi\Delta t = -rf\Delta t + rS\frac{\partial f}{\partial S}\Delta t$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf$$

- 这就是著名的布莱克–肖尔斯方程。这个方程中漂移率μ确实消失了，取而代之的是无风险利率r，这被称为风险中性定价。

- 同时，我们从上面地推导过程中看到该资产组合的变化为

$$\Delta\Pi = -\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right)\Delta t$$

- 它已不含随机项（即是确定性的），所以我们说这个资产组合是无风险的。这种资产的组合方式在金融交易中被称为风险对冲。
- 布莱克和肖尔斯在期权定价方法里巧妙运用了风险对冲的交易思想，这一思想方法成为为其他金融衍生产品建立定价方程的重要技巧。

期权的到期价值

- 欧式期权，期权到期时的价值为

$$V = \max(S_T - K, 0)$$

- S_T是到期日股票的价格，这就是欧式看涨期权的边界条件。
- 这是期权在到期日那天的价值，然而我们要知道的是期权目前的价值，这就要按无风险利率将这期望值贴现到现在，即期权的价格是

$$P = \mathrm{e}^{-rT} V$$

- 随机模拟方法可以按照（9.5）式直接模拟标的资产（股票）的价格演化路径是一项简单的工作。
- 根据模拟的价格路径，人们就可计算出期权执行时的盈利（不执行的盈利为零）。由于这盈利不是现在而是在将来某时刻实现的，所以还需要将此盈利贴现到现在的时刻（因为货币有时间价值：未来得到的钱拿到现在来看是要打折扣的），这个贴现值就是在这种价格路径下的期权的收益

- 类似于前面统计力学的系综平均的方法，人们就可以通过大量的重复试验来估计期权收益的期望值，这个期望值作为期权的价格。
- 期权到期价值的期望值由下式来估计：

$$\hat{V} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\max(S_T(i) - K, 0)$$

- 由（9.5）式中的系数σ可以从股价历史数据中通过估计来获得，所以模拟还需要解决系数μ的确定问题。前面得出的风险中性定价提示我们，可以用r来取代μ。因为这种替代完全不影响推导出的布莱克{肖尔斯方程，当然边界条件或终值条件与它无关。另外，金融知识告诉我们，无风险利率r也是贴现率。这也体现了风险中性的意义：人们对股价的增长不持任何偏好，认为它和其他无风险资产价值的增长是一样的。

影响期权价值的因素

- 股票价格
- 执行价
- 距离到期的时间
- 波动率
- 无风险利率
- 股票红利

因　素	欧式期权		美式期权	
	买 权	卖 权	买 权	卖 权
股票价格	正	负	正	负
执行价	负	正	负	正
距离到期的时间	不确定	不确定	正	正
波动率	正	正	正	正
无风险利率	正	负	正	负
股票红利	负	正	负	正

- 波动率：波动率越大，标的股票潜在的上涨和下跌幅度越大。由于期权对股价向不利方向变动进行保护，因此，波动率增加对期权的影响总是有利的。
- 无风险利率：无风险利率对期权价值的影响是比较复杂的。影响来自两个方面，一方面，股票价格的期望增长率随着利率的上升而上升；另一方面，利率上升将提高贴现率，降低未来现金流的现值。对于卖权来说，这两种作用都是不利的，因此，利率越高，卖权的价值越低。对于买权来说，前一种作用是有利的，后一种作用是不利的。可以证明，前一种作用相对于后一种作用占优，因此，利率越高，买权的价值越高。

- 例9.3 设一个欧式看涨期权，有效期为$T = 90$天，其标的资产为某一股票。该股票的当前价格是$S_0 = 20$元，其波动率的估计是每年$\sigma = 60\%$，敲定价被定为$K = 25$ 元。已知目前的无风险利率是每年3.10%。那么该期权的价格是多少呢？

欧式看涨期权Matab程序

```
nDays=90;
dt=1/365.0; % 以年为时间单位
T=nDays*dt ; % 到期时间
S0=20; % 初始股价
K=25; % 敲定价
r=0.031; % 无风险利率
sigma = .6; % 波动率
expTerm = r*dt;
stddev = sigma*sqrt(dt);
nTrials = 100000;
value=0;
for j=1:nTrials
    n = randn(1, nDays); % 标准正态分布的随机数数组
    S = S0;
    for i=1:nDays
        dS = S*(expTerm + stddev*n(i));
        S = S + dS;
    end
    S90(j) = S; % 记下每次试验的结果
    value = value + max(S-K, 0);
end
value = value/nTrials; % 期望值
Price = exp(-r*T)*value % 贴现
hist(S90, 0:.5:65)
```

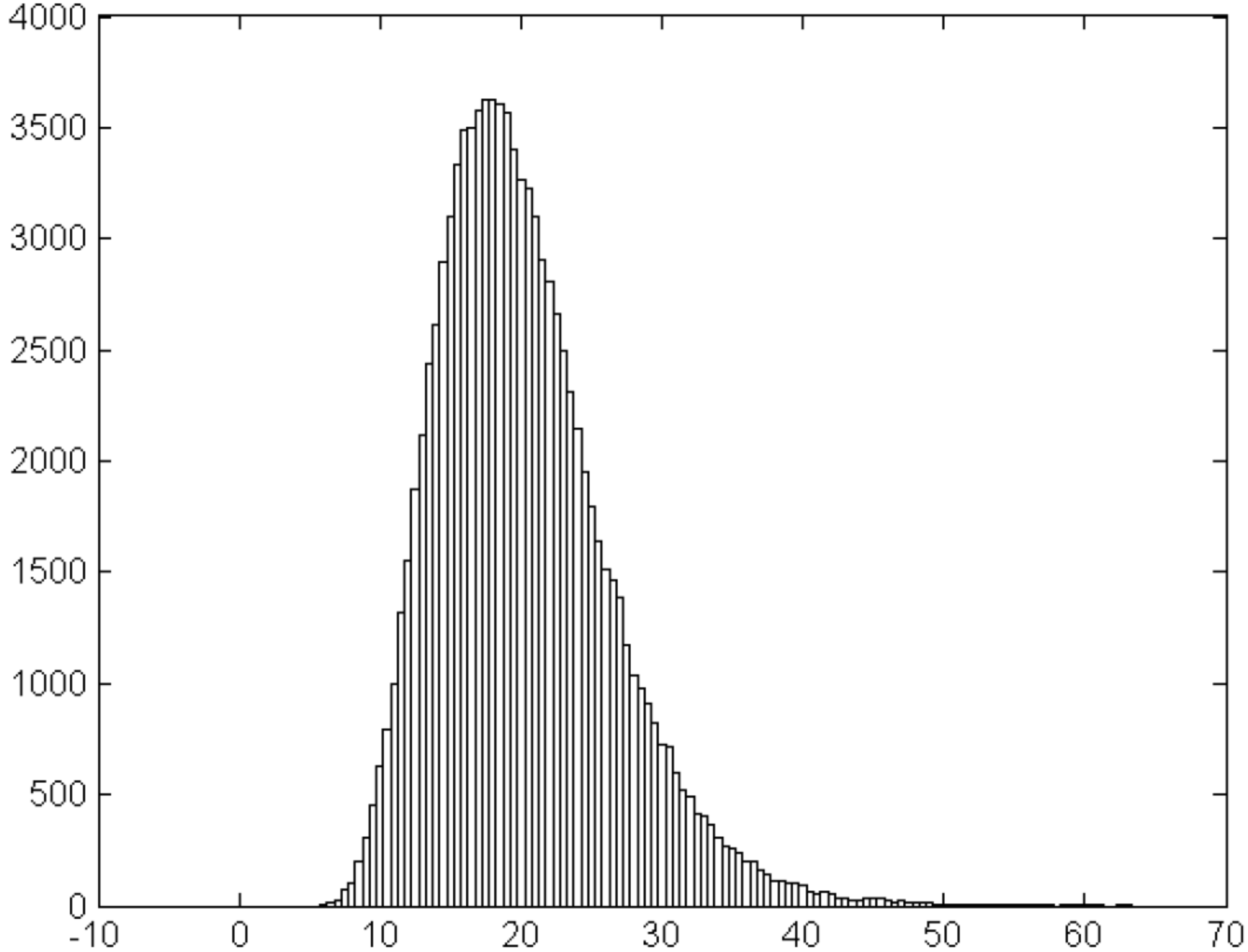


图 9.4　第90天股价的直方图

- 我们对（9.5）式做N次重复模拟试验给出第90天该股票的可能价格。我们不能说哪个价格将来会实现，但我们可以画直方图来看价格的分布状况。
- 图9.4显示了$N = 100000$次试验得出的价格直方图。
- 我们看到，到期时的股票价格S90分布在6元至60元范围之间。这不是正态分布，而是对数正态分布，所以价格是不会出现0或者负值的。
- 我们运行程序得到期权价格的模拟结果是0.9054，由布莱克-肖尔斯公式算出这个看涨期权价格的精确值是0.9056。这个结果与精确值的误差已很小。为了减小误差，人们可以尝试多次运行上面程序，然后取它们的平均值作为结果。


你有问题吗?
引言
认识随机模拟
学点概率论
MATLAB
MCMC
系综原理
应用马氏链
统计热力学
模拟退火法
排队论原理
哈哈懂啦!