第1章 概　论

§1.1 基本概念

1.1.1 随机过程

设$(\Omega,\wp,P)$是概率空间，T 是直线上的参数集（可列或不可列的）。若对每一个 $t\in T$，$\xi(w,t)=\xi_t(w)$是随机变量，则称$\{\xi(w,t),t\in T\}$为该概率空间上的随机过程。

在固定时刻 t，$\xi(w,t)$是一个随机变量；对应每一个随机变量，有一个概率空间$(\Omega,\wp,P)$，即$\xi_t(w)=\xi(w,t)$是样本空间$w\in\Omega$内的一个随机变量。可用分布函数$F_t(x)=p\{\xi(w,t)<x\}$描述$\xi(w,t)$，这是一阶分布函数。

例 1.1 概率分布为$P\{x=0\}=1/2,\ \ P\{x=1\}=1/2$，于是概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{2}\delta(x)+\frac{1}{2}\delta(x-1)$$

1.1.2 概率密度函数（PDF: Probability Density Function）

$$f_t(x)=\frac{\partial F_t(x)}{\partial x}$$

1.1.3 二阶概率分布函数（CDF：Cumulative Distribution Function）

$$P\{\xi(w,t_1)<x_1,\xi(w,t_2)<x_2\}=F_{\xi(t)}(x_1,x_2;t_1,t_2)$$

相应地，PDF 为

$$f(x_1,x_2;t_1,t_2)=\frac{\partial F_{\xi(t)}(x_1,x_2;t_1,t_2)}{\partial x_1\partial x_2}$$

n 维 CDF 表示为

$$F_{\xi(t)}(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=P\{\xi(w,t_1)<x_1,\xi(w,t_2)<x_2,\cdots,\xi(w,t_n)<x_n\}$$

随 $n\to\infty$，可以获得对$\xi(w,t)$的统计特性起来越精确的描述。

1.1.4 四种重要的随机过程

时间：连续参数和离散参数；状态：连续和离散。

§1.2 举　例

例 1.2 一维随机游动：一质点在 X 轴上随机随动，$t=0$ 时在原点，$t=1,2,3,\cdots$ 时在 X 轴上正向或反向移动一个单位距离，正向移动概率 p，负向移动概率 q，$p+q=1$；在时刻 n，质点位置为 ξ，求 ξ 的概率分布。

解：ξ 是一个随机变量。在时刻 n，质点移动 n 次，设其中正向 m 次，负向 $n-m$ 次，则

$$P\{\xi=k\}=\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} p^m q^{n-m}$$

因为，

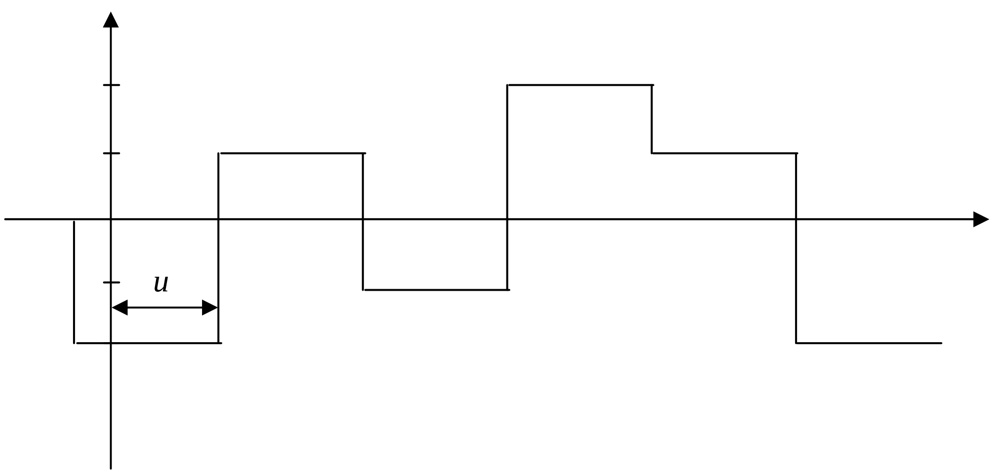
$$m\times(+1)+(n-m)\times(-1)=k \Rightarrow m=\frac{n+k}{2}$$

于是，

$$P\{\xi=k\}=\begin{pmatrix} n \\ \frac{n+k}{2} \end{pmatrix} P^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}}$$

此外，还有二维随机游动，向上、向下或向做、向右随机地移动。

例 1.3 脉冲数字信号，脉宽 T_0 为常数，脉冲幅度 $\xi(t)$ 是随机变量，可能取值 $(\pm2,\pm1)$，取四个值的概率均 1/4。不同周期内的脉冲幅度相互独立，初始脉冲沿 u 是在 $(0,T_0)$ 内均匀分布的随机变量，求 $\xi(t_1)$ 与 $\xi(t_2)$ 间的联合 PDF。



解：① 当 $|t_1-t_2|\ge T_0$ 时，$\xi(t_1)$ 和 $\xi(t_2)$ 肯定不处于同一个脉冲内，$\xi(t_1)$ 和 $\xi(t_2)$ 相互独立，所以联合 PDF 为

$$f_{\xi_{t_1},\xi_{t_2}}(x_1,x_2)=\left[\sum_{i=\pm1;\pm2}\frac{1}{4}\delta(x_1-i)\right]\left[\sum_{j=\pm1;\pm2}\frac{1}{4}\delta(x_2-j)\right]$$

② $|t_1-t_2|<T_0$ 时，$\xi_1(t_1)$和$\xi(t_2)$处于不同脉冲内（记为事件C），也可以处于同一脉冲内（记为事C^C），且 $P(C)+P(C^c)=1$。因此，联合PDF为

$$f_{\xi_{t_1},\xi_{t_2}}(x_1,x_2)=f_{\xi_{t_1},\xi_{t_2}|C}(x_1,x_2|C),P(C)+f_{\xi_{t_1},\xi_{t_2}|C^c}(x_1,x_2|C^c)P(C^c)$$

其中，

$$\begin{cases}f_{\xi_{t_1},\xi_{t_2}|C}(x_1,x_2|C)=\left[\sum\limits_{i=\pm1;\pm2}\frac{1}{4}\delta(x_1-i)\right]\left[\sum\limits_{j=\pm1,\pm2}\frac{1}{4}\delta(x_2-j)\right]\\ f_{\xi_{t_1},\xi_{t_2}|C^c}(x_1,x_2|C^c)=\left[\sum\limits_{i=\pm1,\pm2}\frac{1}{4}\delta(x_1-i)\right]\delta(x_2-x_1)\end{cases}$$

设 $t_1<t_2$，且 θ 为 t_2 所在脉冲的前沿，于是 θ 是 $[t_2-T_0,t_2]$ 上均匀分布的随机变量。因此，$P(c)$ 为 θ 在 $[t_1,t_2]$ 上出现的概率。于是

$$\begin{cases}P(C)=\int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{T_0}du=\frac{t_2-t_1}{T}\quad(t_1<t_2)\quad \text{即}\frac{|t_2-t_1|}{T}\\ P(C^c)=1-P(C)=1-\frac{|t_2-t_1|}{T}\end{cases}$$

于是，$|t_1-t_2|<T_0$ 的联合概率密度函数为

$$f_{\xi_{t_1},\xi_{t_2}}(x_1,x_2)=\left[\sum_{i=\pm1;\pm2}\frac{1}{4}\delta(x_1-i)\right]\left[\sum_{j=\pm1,\pm2}\frac{1}{4}\delta(x_2-j)\right]\frac{|t_2-t_1|}{T}+$$
$$\left[\sum_{i=\pm1,\pm2}\frac{1}{4}\delta(x_1-i)\right]\delta(x_2-x_1)\left[1-\frac{|t_2-t_1|}{T}\right]$$

例 1.4 设 $\xi(t)=A\cos(wt+\phi)$ $(-\pi\le\phi\le\pi)$。其中，A 是常数，w 是常数，ϕ 是均匀分布于 $(-\pi,\pi)$ 间的一个随机变量。求在 t 时刻 $\xi(t)$ 的 PDF $f_{\xi_t}(x)$。

解：在时刻 t，$\xi(t)$ 对应的随机变量 ξ_t 与 ϕ 的关系为

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{\xi_t}{A}\right) - wt \qquad (-A \le \xi_t \le A)$$

由

$$\frac{d\phi}{d\xi_t} = \frac{-1}{A\sqrt{1-(\xi_t / A)^2}}$$

于是可得

$$f_{\xi_t}(x) = 2 f_\phi(\phi)\left|\frac{d\phi}{d\xi_t}\right| = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - {x_1}^2}}, \quad A \le x \le A$$

由此可见，$\xi(t)$的 PDF 与 t 无关，是一级平稳过程。

例 1.5 设$\xi(t)$同例 1.4，求t_1和t_2间的联合PDF。

解：首先，将联合概率密度函数分解为

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = f(x_1, t_1) f(x_2, t_2 | x_1, t_1)$$

其中，

$$x_1 = A\cos(wt_1 + \theta),\ x_2 = A\cos(wt_2 + \theta)$$

所以，

$$x_2 = A\cos[w(t_2 - t_1) + \cos^{-1}\frac{x_1}{A}] = \alpha$$

或

$$x_2 = A\cos[w(t_1 - t_2) + \cos^{-1}\frac{x_1}{A} = \beta$$

$f(x_1, t_1)$在例 1.4 中给出。该过程是可预测过程，在x_1和t_1给定条件下，t_2时刻取值x_2的概率为 1，所以

$$f(x_2, t_2 | x_1, t_1) = \delta(x_2 - \alpha) + \delta(x_2 - \beta)$$

因此，

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - {x_1}^2}}[\delta(x_2 - \alpha) + \delta(x_2 - \beta)]$$

由此可见，这是一个二阶平稳过程。

例 1.6 在例 1.4 中的$\xi(t)$，若 A 也是个随机变量，服从瑞利分布

$$f_A(y)=\begin{cases} y\exp(-y^2/2)\,, & y>0 \\ 0 & ,\ \text{其它} \end{cases}$$

并且 A 与 ϕ 之间相互独立。求二维联合 PDF。

解：由于 A 与 ϕ 相互独立，所以

$$f_{A,\phi}(a,\phi)=f_A(a)f_\phi(\phi)=\frac{ae^{-a^2/2}}{2\pi}$$

设辅助变量 $Y=A\sin(wt+\theta)$，原随机变量 $X=A\cos(wt+\theta)$。雅可比为

$$J=\left|\frac{\partial(X,Y)}{\partial(A,\phi)}\right|=\begin{bmatrix} \cos(wt+\theta) & \sin(wt+\theta) \\ -a\sin(wt+\theta) & a\cos(wt+\theta) \end{bmatrix}=a$$

于是，

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{|J|}f_{A,\phi(a,\phi)}=\frac{e^{-a^2/2}}{2\pi}$$

其中，$a^2=x^2+y^2$。所以，

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\quad,\quad(-\infty<x,y<+\infty)$$

由此可见，$\xi(t)$ 相差 $\pi/2$ 相位的两点间的联合 PDF 是联合正态分布的。做边缘积分可得

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X,Y}(x,y)dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,(-\infty<x<+\infty)$$

一维 PDF 是正态的（这与教材（陆）p.35 习题 4 的结果一致）。下面求二维 PDF，设

$$\begin{cases} x_1=A\cos(wt_1+\theta) \\ x_2=A\cos(wt_2+\theta) \end{cases}$$

雅可比为

$$|J|=\left|\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial A,\phi}\right|=\begin{bmatrix} \cos(wt_1+\theta) & \cos(wt_2+\theta) \\ -a\sin(wt_2+\theta) & -a\sin(wt_2+\theta) \end{bmatrix}=a\left|\sin[w(t_2-t_1)]\right|$$

所以，

$$f_{t_1,t_2}(x_1,x_2)=\frac{1}{|J|}f_{A,\phi}(a,\phi)=\frac{ae^{-a^2/2}}{2\pi}$$

其中，

$$A^2=\frac{x_1^2+x_2^2-2x_1x_2\cos[w(t_1-t_2)]}{\sin^2[w(t_1-t_2)]}$$

于是，

$$f_{t_1,t_2}(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi}\exp[-\frac{x_1^2+x_2^2-2x_1x_2\cos w(t_1-t_2)}{2}]\Big/\left|\sin^3[w(t_1-t_2)]\right|$$

其中，$-\infty<x_1<+\infty$，$-\infty<x_2<+\infty$。由此可见，$\xi(t)$是二级平稳。

例 1.7 如例 1.3 的脉冲信号，若脉冲幅度服从正态分布$N(0,\sigma^2)$，且不同周期内幅度相互独立，求二维联合概率密度函数。

解：当$|t_1-t_2|>T_0$时，两个时刻肯定处于不同的周期内，即相互统计独立。于是

$$f(x_1,x_2;t_1,t_2)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp[-\frac{x_1^2+x_2^2}{2\sigma^2}]$$

当$|t_1-t_2|<T_0$时

$$f(x_1,x_2;t_1,t_2)=(1-\frac{|t_1-t_2|}{T})\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{x_1^2}{2\sigma^2}}\delta(x_2-x_1)+\frac{|t_1-t_2|}{T}\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp[-\frac{x_1^2+x_2^2}{2\sigma^2}]$$

由此可见，一维虽然是正态的，但是二维不一定是正态的。

§ 1.3 随机过程的数字特征

1.3.1 均值（数学期望）

$$\mu_\xi(t_1)=E\{\xi(t_1)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{\xi(t_1)}(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_\xi(x,t_1)dx$$

这种平均叫“集平均”。表示$\xi(t)$在t_1时刻的“摆动中心”。

1.3.2 方差和标准差（均方根差）

$$\begin{aligned}\sigma_\xi^2(t_1)=D\{\xi(t_1)\}&=E\left\{[\xi(t_1)-\mu_\xi(t_1)]^2\right\}\\&=E\left\{[\xi(t_1)]^2\right\}-[E\{\xi(t_1)\}]^2\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-\mu_\xi(t_1)]^2f_\xi(x,t_1)dx\end{aligned}$$

$\sigma_\xi^2(t_1)$叫方差（二阶中心矩），$\sigma_\xi(t_i)$叫“标准差”或“均方根差”。表示$\xi(t)$在t_1时刻对于均值$\mu(t_1)$的偏离程度。

1.3.3 自相关函数

$$R_{\xi\xi}(t_1,t_2)=E\{\xi(t_1)\xi(t_2)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x_1x_2\,f_{\xi(t_1)\xi(t_2)}(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2$$

这是“二阶混合原点矩”。

1.3.4 自协方差函数

$$\begin{aligned}C_{\xi\xi(t_1,t_2)}&=E\{[\xi(t_1)-\mu_\xi(t_1)][\xi(t_2)-\mu_\xi(t_2)]\}\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[x_1-\mu_\xi(t_1)][x_2-\mu_\xi(t_2)]f_{\xi(t_1)\xi(t_2)}(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2\\&=Cov(\xi(t_1),\xi(t_2))\end{aligned}$$

当$t_1=t_2$时，

$$C_{\xi\xi}(t_1,t_2)=\sigma_\xi^2(t_1)=E\{[\xi(t_1)]^2\}-[\mu_\xi(t_1)]^2$$

这是“二阶混合中心矩”。

1.3.5 相关性

两个随机变量$(\xi_1和\xi_2)$间的相关程度由相关系数r衡量，其定义为

$$r=\frac{Cov(\xi_1,\xi_2)}{\sqrt{D(\xi_1)D(\xi_2)}}=\frac{E\{[\xi_1-E\{\xi_1\}][\xi_2-E\{\xi_2\}]\}}{\sqrt{E\{[\xi_1-E\{\xi_1\}]^2\}E\{[\xi_2-E\{\xi_2\}]^2\}}}$$

（1） 当$|r|=1$时，ξ_1和ξ_2之间存在线性关系，即$\xi_2=a\xi_1+b$。因此，ξ_1和ξ_2的联合概率密度函数为

$$\begin{aligned}f_{\xi_1\xi_2}(x_1,x_2)&=f_{\xi_2|\xi_1}(x_2|\xi_1=x_1)f_{\xi_1}(x_1)\\&=f_{\xi_1}(x_1)\delta(x_2-(ax_1+b))\end{aligned}$$

（2） 当r=0时，ξ_1和ξ_2之间“不相关”，是指不存在线性关系，但可以存在其它的非线性关系，因此不一定是独立的；

（3） 当$0\le|r|<1$时，ξ_1与ξ_2线性无关。（线性无关不一定是“不相关”）。

1.3.6 一组随机变量间的相关性

设有一组随机变量$\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$，其相关矩阵$\bar{R}$的元素$R_{ij}=E\{\xi_i\bar{\xi}_j\}$。由$R(\xi_i\xi_j)$的非负定性（定理 1.2）可知，对于任意$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\bar{\lambda}_jR_{ij}\geq 0$$

也就是$E\left\{\left|\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2+\cdots+\lambda_n\xi_n\right|^2\right\}\geq 0$。（见 P.123 来至 P.14 首证明）

（1） 若存在一组不全为零的$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，使$E\left\{\left|\lambda_1\xi_1+\cdots+\lambda_n\xi_n\right|^2\right\}=0$则称$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$线性相关。

（2） 若只有当$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$时，$E\left\{\left|x_1\xi_1+\cdots+\lambda_n\xi_n\right|^2\right\}$才等于 0，则称$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$线性无关。

实际上，当$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$线性无关时，它们的相关矩阵为正定阵，线性相关时为奇异阵，即$|R|=0$。对于协方差阵也是这样。对于两个随机变量ξ_i和ξ_j,，线性相关时$|r|=1$；但是，线性无关并不一定是“不相关”，线性无关与$0\leq|r|<1$对应。

例如，$\xi_1=\cos\theta$和$\xi_2=\cos(\theta+\alpha)$（α为常数，$\theta$~ U（0，2π）），则$r_{\xi_1\xi_2}=\cos\alpha$；当$\alpha=0$或$\pi$时$|r|=1$，即$\xi_1$与$\xi_2$线性相关；当$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$时，$r=0$，$\xi_1$与$\xi_2$不相关，即不存在线性关系，然而存在非线性关系$\xi_1^2+\xi_2^2=1$。

1.3.7 正交

若$E\{\xi_1\xi_2\}=0$，则ξ_1与ξ_2正交。而不相关是$Cov(\xi_1,\xi_2)=0$，即$E\{\xi_1\xi_2\}-E\{\xi_1\}E\{\xi_2\}$ =0。因此，若ξ_1和ξ_2中至少有一个为零均值，则$E\{\xi_1\xi_2\}=0$，即由“不相关”可得“正交”。

例 1.8 $\xi(t)=A\cos(wt+\theta)$，$\theta\sim U(-\pi,\pi)$；A，w为常数。求$\xi(t)$的均值和相关函数。

解：首先，均值为

$$E\{\xi(t)\}=\int_{-\pi}^{\pi}A\cos(wt+\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta=\frac{A}{2\pi}\sin(wt+\theta)\Big|_{-\pi}^{\pi}=0$$

为常数，与 t 无关。

$$R_{\xi\xi}(t_1,t_2)=E\{\xi(t_1)\xi(t_2)\}$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}A^2\cos(wt_1+\theta)\cos(wt_2+\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta$$

$$=\frac{A^2}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(wt_1+wt_2+2\theta)+\cos(wt_1-wt_2)]d\theta$$

$$=\frac{A^2}{2}\cos[w(t_1-t_2)]=\frac{A^2}{2}\cos w\tau$$

由此可见，只与时间差 $\tau(\tau=t_1-t_2)$ 有关。称之为“宽平稳随机过程”。

例 1.9 随机电报信号 $\xi(t)$

（1） 在任何时刻 t，$\xi(t)$ 取值为 0 或 1，概率均为 1/2。

（2） 每个状态的持续时间是随机的，若在 T 时内波形的变化次数 μ 服从泊松分布，即

$$P\{\mu=k\}=\frac{(\lambda T)^k}{K!}e^{-\lambda T}\qquad(\lambda>0\,,T>0)$$

其中，λ代表单位时间内波形的平均变化次数。

（3）$\xi(t)$ 取何值与变化次数 μ 相互统计独立。

求：$\xi(t)$ 的均值和自相关函数。

解：（1）均值为

$$E\{\xi(t)\}=1\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

（2） 相关函数为

$$R_{\xi\xi}(t_1,t_2)=E\{\xi(t_1)\xi(t_2)\}$$

$$=\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}i\times j\times P\{\xi(t_1)=i,\xi(t_2)=j\}$$

$$=P\{\xi(t_1)=1,\xi(t_2)=1\}$$

因为

$$P\{\xi(t_1)=1,\xi(t_2)=1\}=P\{\xi(t_1)=1,\mu=\text{偶次}\}$$

由$\xi(t)$与μ 相互统计独立可得

$$P\{\xi(t_1)=1,\xi(t_2)=1\}=P\{\xi(t_1)=1\}P\{\mu=\text{偶次}\}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=\text{偶数}}\frac{[\lambda(t_2-t_1)]^k}{k!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[\lambda(t_2-t_1)]^k}{k!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[-\lambda(t_2-t_1)]^k}{k!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}\right]$$

$$=\frac{1}{4}e^{-\lambda(t_2-t_1)}[e^{\lambda(t_2-t_1)}+e^{-\lambda(t_2-t_1)}]$$

$$=\frac{1}{4}\left[1+e^{-2\lambda(t_2-t_1)}\right]\qquad(t_1<t_2)$$

当$t_1>t_2$时，可得

$$\frac{1}{4}\left[1+e^{-2\lambda(t_1-t_2)}\right]$$

因此，相关函数为

$$R_{\xi\xi}(t_1,t_2)=\frac{1}{4}\left[1+e^{-2\lambda|\tau|}\right]$$

协方差函数为

$$C_{\xi\xi}(t_1,t_2)=R_{\xi\xi}(t_1,t_2)-\mu_{\xi}(t_1)\mu_{\xi}(t_2)=\frac{1}{4}e^{-2\lambda|\tau|}$$

所以，随机电报信号是“宽平稳随机过程”。

※ 注：其中利用了e^x在$x_0=0$点的秦勒展开展开$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$。

※ 注：秦勒展开 $f(x)=f(x_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-x_0)^n}{n!}f_{(x_0)}^{(n)}$

1.3.8 互相关函数(Cross-Correlation Fuction)

$$R_{\xi\eta}(t_1,t_2)=E\{\xi(t_1)\eta(t_2)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf_{\xi\eta}(x,y,t_1,t_2)dxdy$$

1.3.9 互协方差函数 (Cross-Covariance Fuction)

$$C_{\xi\eta}(t_1,t_2)=R_{\xi\eta}(t_1,t_2)-\mu_{\xi}(t_1)\mu_{\eta}(t_2)$$

若$C_{\xi\eta}(t_1,t_2)=0$，则

$$E\{\xi(t_1)\eta(t_2)\}=\mu_{\xi}(t_1)\mu_{\eta}(t_2)=E\{\xi(t_1)\}E\{\eta(t_2)\}$$

则$\xi(t)$和$\eta(t)$是“统计不相关”或“不相关”的。由此可见，相互统计独立的两个随机过程，若它们的二阶矩都存在，则它们必然是不相关的。反之不一定成立。对于正态过程，不相关等价于统计独立。

例 1.10 $w(t)=\xi(t)+\eta(t)$，求$w(t)$的均值和相关函数。

解：（1）均值为

$$E\{w(t)\}=E\{\xi(t)+\eta(t)\}=E\{\xi(t)\}+E\{\eta(t)\}$$

（2）相关函数为

$$\begin{aligned}R_{ww}(t_1,t_2)&=E\{[\xi(t_1)+\eta(t_1)][\xi(t_2)+\eta(t_2)\}\\&=E\{\xi(t_1)\xi(t_2)\}+E\{\xi(t_1)\eta(t_2)\}+E\{\eta(t_1)\xi(t_2)\}+E\{\eta(t_1),\eta(t_2)\}\\&=R_{\xi\xi}(t_1,t_2)+R_{\xi\eta}(t_1,t_2)+R_{\eta\xi}(t_1,t_2)+R_{\eta\eta}(t_1,t_2)\end{aligned}$$

1.3.10 复随机变量

设η、ξ为同一概率空间（$\Omega,\Re,P$）上的两个取实数值的随机变量，并设$\zeta=\eta+j\xi$，则称ζ为该概率空间上的一个复随机变量。

$$E\{\zeta\}=E\{\eta+j\xi\}=E\{\eta\}+jE\{\xi\}$$

方差为

$$\begin{aligned}D\{\zeta\}&=E\{|\zeta-E\{\zeta\}|^2\}=E\{(\zeta-E\{\zeta\})\overline{(\zeta-E\{\zeta\})}\}\\&=E\{(\eta-E\{\eta\})^2\}+E\{(\xi-E\{\xi\})^2\}\end{aligned}$$

1.3.11 复随机过程

设$\{\eta(t)\}$和$\{\xi(t)\}$是一对随机过程，并具有相同的参数，$\{\eta(t)\}$和$\{\xi(t)\}$具有相同的概率空间，则$\zeta(t)=\eta(t)+j\xi(t)$称为复随机过程。均值为

$$E\{\zeta(t)\}=E\{\eta(t)\}+jE\{\xi(t)\}$$

相关函数为

$$R_{\zeta\zeta}(t_1,t_2)=E\left\{\zeta(t_1)\overline{\zeta(t_2)}\right\}=E\left\{[\eta(t_1)+j\xi(t_1)]\overline{[\eta(t_2)+j\xi(t_2)]}\right\}$$

例 1.11 复随机过程

$$\xi(t)=\sum_{k=1}^{N}\eta_k e^{jw_k t}$$

$\eta_k(k=1,\cdots,N)$ 是相互统计独立的正态分布 $\mathrm{N}(0,\sigma_k^2)$ 的随机变量，w_k 为常数。求 $\xi(t)$ 的均值和相关函数。

解：首先，该复随机过程可以分解为

$$\xi(t)=\sum_{k=1}^{N}\eta_k e^{jw_k t}=\sum_{k=1}^{N}\eta_k\cos w_k t+j\sum_{k=1}^{N}\eta_k\sin w_k t$$

因此，均值为

$$E\{\xi(t)\}=\sum_{k=1}^{N}E\{\eta_k\}\cos w_k t+j\sum_{k=1}^{N}E\{\eta_k\}\sin w_k t=0$$

相关函数为

$$\begin{aligned}R_{\xi\xi}(t_1,t_2)&=E\left\{\xi(t_1)\overline{\xi(t_2)}\right\}\\&=E\left\{\left(\sum_{k=1}^{N}\eta_k e^{jw_k t_1}\right)\left(\overline{\sum_{i=1}^{N}\eta_i e^{jw_i t_2}}\right)\right\}\\&=\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}E\{\eta_k\eta_i\}e^{jw_k t_1-jw_i t_2}\end{aligned}$$

因为 η_k 与 η_i 相互独立，当 $k\neq i$ 时，$E\{\eta_k\eta_i\}=E\{\eta_k\}E\{\eta_i\}=0$；当 $k=i$ 时，$E\{\eta_k\eta_i\}=E\{\eta_k^2\}$。所以，

$$R_{\xi\xi}(t_1,t_2)=\sum_{k=1}^{N}\sigma_k^2 e^{jw_k(t_1-t_2)}=\sum_{k=1}^{N}\sigma_k^2 e^{jw_k\tau}$$

因此，$\xi(t)$ 是宽平稳过程。