随机模拟方法与应用

Stochastic Simulation Methods and Its Applications

肖柳青 博士

lucyxiao@sjtu.edu.cn

PUB:SSMA_xiao@yeah.net

第9 章模拟醉汉行走：随机游走模型

9.4 从随机游走看赌徒的破产

- 简单的随机游走模型可以应用于研究赌博问题，人们可以看到一个赌徒的财富随着时间的兴衰，通常的结局是走向破产。
- 事实上，概率论的起源就是研究赌博问题，历史上可追溯到费马（**Pierre Fermat**）和帕斯卡（**Blaise Pascal**）讨论赌博问题的通信。

9.4.1 游戏的玩法

- 假设赌徒下注1个单位的钱（如1元）与庄家打赌，以概率p赢庄家和以概率$q = 1 - p$输给庄家。
- 假设赌徒开始有x单位的钱，设$X(t)$是随机变量，表示赌徒在时间t时的财富，$X(0) = x$，在赌了一局后，赌徒的财富将分别增加或减少一个单位，即以概率p增加为$X(1) = x + 1$和以概率q减少为$X(1) = x - 1$，以此类推。

- 与股价的游走类似，在这个游戏中游走不能低于0，否则赌徒就破产了。
- 同样，庄家也拥有有限的资金，在游戏开始时他有h个单位的钱，
- 记:$H(t)$ 为庄家在时间t 时的财富
- 游戏双方的钱之和是常数$a = x + h$。
- 庄家和赌徒的财富命运是有差异
- $$H(t) = a - X(t)$$
- 如果$X(t) = a$，那么庄家破产，游戏则终止。

- 只要条件$0 < X(t) < a$成立，游戏继续进行，直到这条件被违背的第一时间时游戏终止。一个重要问题是:
- 游戏能否无限期地进行下去?
- 答案是否定的，只要足够的时间，不是赌徒破产就是庄家破产。这种情况是以概率为1发生。
- 我们可以简单证明如下（提醒一下读者，我们这里的结果均以概率来评判）。

- 容易看出，如果游戏是公平的，即p = 1/2，则每局比赛后赌徒财富的期望值等于原始财富。例如

$$\mathbf{E}(X(1)) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{2}(x-1) = x$$

$$\mathbf{E}(X(2)) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 (x+2) + 2\frac{1}{2}\frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 (x-2) = x, \cdots$$

- 具有这种期望值守恒性质的随机过程被称为鞅（**martingale**）。
- 进一步，我们从第**9.1**节知道，离开起点的随机游走的路径长度正比于 $\sqrt{t}$ 。由此我们可以预计一个赌徒或庄家玩到破产的时间。

一些概念：

- 事件域，σ代数;
- (Ω, , P)概率空间；
- σ代数流：{ $_n$, $n\geq0$}
- 适应： 过程{X_n, $n\geq0$}关于 { $_n$, $n\geq0$} 适应 ；
- 鞅 ：

一些概念：

- 事件域，σ代数;
- $(\Omega, \ , P)$概率空间；
- σ代数流：$\{\ _n, n\geq 0\}$
- 适应： 过程$\{X_n, n\geq 0\}$关于$\{\ _n, n\geq 0\}$ 适应；
- 鞅 ：

$\{\ _n, n\geq 0\}$是 上一子σ代数流；

$\{X_n, n\geq 0\}$一随机过程，如果：

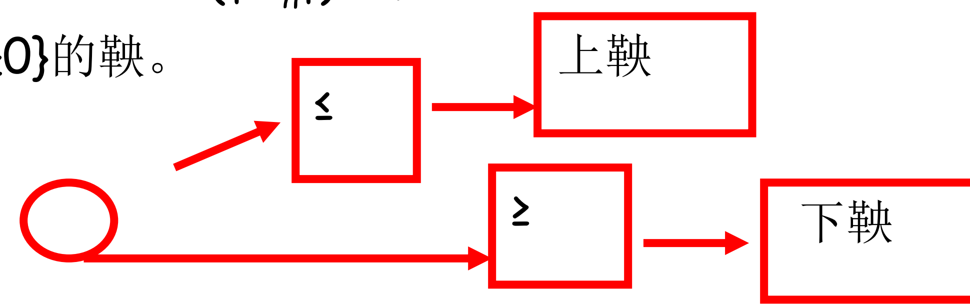
☆ $\{X_n\}$关于$\{\ _n\}$适应，

☆ 对任意的n,有

$E(|X_n|)<\infty$;

$$E(X_{n+1}/\ _n) = X_n,$$

则称$\{X_n, n\geq 0\}$为关于$\{\ _n, n\geq 0\}$的鞅。



二、一些例子

例1．设 $\{X_n, n\geq 1\}$是一族零均值的独立随机变量序列，且$E(|X_n|)<\infty$;
令

$$S_0 = 0; \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k; \qquad {}_n = \sigma\{X_1, \ldots, X_n\};$$

验证$\{S_n, n\geq 0\}$为关于 $\{\ {}_n, n\geq 0\}$的鞅。

证：

(1) S_n 关于 ${}_n$可测；

(2) $E(|S_n|)<\infty$;

(3) 对任意的n,有$E(S_{n+1}/\ {}_n) = S_n$。

例2 博弈 （倍赌问题）

- 设 $\{X_n, n\geq 1\}$独立同分布，均服从参数为0.5的两点分布。
  - 可将这些变量看为掷一枚硬币的结果。
    - ☆如果出现正面，则赌徒盈利为赌金的一倍；
    - ☆如果出现反面，则赌徒全部输掉赌金。
- 设赌徒下赌注的原则为：
    - ☆如果赢，则停止赌博；
    - ☆如果输，下次赌金为上次赌金的二倍；
- 设 W_n表示第n次赌博赌徒赢的钱(负数为输的钱)
- $\quad_n = \sigma\{X_1, \ldots, X_n\}$;

求$E(W_{n+1} | \quad_n)$? ?

- 过程分析：
  - 设最初资本为1元
  - 赌金： 1 2 4 …… 2^n 2^{n+1} ……
  - 赢利 1 | 4-3 | 8-7 | …… 1 | 1 | ……
  - 亏损 1 2+1 3+4 …… 2^n-1 2^{n+1} -1…… W_n
- 显然，$W_n=1$时，$W_{n+m}=1$，任意m
- 否则，$W_n= -(2^n-1)$

g $P(W_{n+1}=1 \mid W_n=-(2^n-1))=P(X_n=1)=1/2;$

g $P(W_{n+1}=-(2^{n+1}-1) \mid W_n=-(2^n-1))=P(X_n=-1)=1/2;$

g $$\boxed{E(W_{n+1} \mid \mathrm{F}_n)}=\begin{cases} =E(W_{n+1} \mid W_n=-(2^n-1))=-(2^n-1)=\boxed{W_n} \\ =E(W_{n+1} \mid W_n=1)=1=\boxed{W_n} \end{cases}$$

例3 博弈 （赌金选择）

- 若赌徒策略不为倍赌原则，所用策略(即所下的赌金)依赖于前面的结果，即第n次赌金为$b_n=b_n(X_1, \dots, X_n)$;

☆第一次赌资b_1任意，不超过初始资本W_0, 则：

☆如果赢，就赢到b_n；如果输，就输b_n；

☆如果输，下次赌金为上次赌金的二倍；

- 设W_0表示赌徒初始资本， W_n表示第n次赌博后赌徒的资本， $_n= \sigma\{X_1, \dots, X_n\}$;
- 求 E（$W_{n+1}|$ $_n$）。

$$W_1 = z_0 + b_1 X_1; \quad W_2 = z_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 = W_1 + b_2 X_2; \quad \cdots\cdots$$

$$W_n = z_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i X_i = W_{n-1} + b_n X_n. \qquad \boxed{E(W_{n+1} \mid \mathrm{F}_n) = W_n.}$$

说明：

如果每次赌博的输赢机会相等，输赢资本额度相等，则赌博是公平的。即：不论赌徒采取什么样的赌博策略，都不可能使赌博变成有利于自己的赌博。

公平！！

经济、金融中定价的基本原则！

- 这个游戏中的财富演化就相当于在1维的有限区间上的随机游走，它的游走将结束在该区间的任意一个端点上，这两个端点就好像吸收壁一样。
- 这样的结果会发生吗？
- 设Wx是赌徒以x单位的初始资金玩到破产的概率，
- 设Zx是庄家破产的概率
- 只要我们能证明$Wx + Zx = 1$，那就表明游戏是不能无限期地玩下去的。

- 现在固定a，我们来推导Wx和Zx的递推关系式。
- 如果赌徒输掉第一局比赛，他将持有$x-1$单位的资金再开始游戏，破产的概率是 $Wx-1$；同样如果他赢了第一局比赛，他将持有$x+1$单位的资金又开始游戏，破产的概率是$Wx+1$。故我们有关系式：

$$W_x = qW_{x-1} + pW_{x+1}, \qquad x = 2, 3, \cdots, a-2$$

如果赌徒从$x=1$单位的资金开始游戏，一旦输了则他就立即破产，即

$$W_1 = q + pW_2$$

- 如果赌徒从$x = a - 1$单位的资金开始游戏，一旦赢了则庄家就立即破产，而这时他破产的概率必然为0，从而有

$$W_{a-1} = qW_{a-2}$$

- 注意： $W_0 = 1, \quad W_a = 0$
- 类似地，关于Zx的递推方程式是一样的。不同的是它们的边界条件，$Z_0 = 0, Z_a = 1$

- 上面方程是一个差分方程，线性常系数差分方程的理论告诉我们，方程的形式解是$W_x = b^x$
- 其中b为常数，代入可得

$$b^{x-1}(-q+b-pb^2)=0$$

- 求解b的二次方程式，并注意$q=1-p$，得

$$b=\frac{1\pm\sqrt{1-4pq}}{2p}=\frac{1\pm(1-2p)}{2p}$$

- 如果$p\neq\frac{1}{2}$时，差分方程的两个不同特解是：

$$W_x=1\text{和}W_x=\left(\frac{q}{p}\right)^x$$

- 通解是

$$W_x=A+B\left(\frac{q}{p}\right)^x$$

- 其中A和B为待定常数。由边界条件$W_0 = 1$，$W_a = 0$，即可求得

$$W_x = \frac{(q/p)^a - (q/p)^x}{(q/p)^a - 1}$$

- 当$p = q = 1/2$时，关于b的二次方程是重根，根为$b = 1$，方程的两个独立的特解是：$W_x = 1$和$W_x = x$，则通解是$W_x = A + Bx$，由边界条件有

$$W_x = 1 - \frac{x}{a}$$

同理对Z_x的差分方程重复同样的步骤可得

$$Z_x = \frac{(q/p)^x - 1}{(q/p)^a - 1}, \qquad p \neq \frac{1}{2}$$

- 而按照游戏的公平原则，我们得到

$$Z_x = \frac{x}{a}, \qquad p = \frac{1}{2}$$

- 正如预料的那样，我们证得：

$$W_x + Z_x = 1,\ \forall x$$

- 这意味着赌徒从任何数量的赌本***x***开始，要么是赌徒破产，要么是庄家破产，这种情况发生的概率为1。亦即，这两事件之一是一定会发生的。

9.4.2 公平游戏财富过程的鞅方法解

- 所谓公平游戏的玩家财富随机过程是一个鞅，即在上面游戏中是当$p = 1/2$时的情形。
- 现在，我们用鞅的性质来求解这个财富过程。如果赌博游戏是一个公平的游戏，W_x表示赌徒的破产概率，那么该赌徒财富的最终期望值是

$$W_x 0 + (1 - W_x)a = (1 - W_x)a$$

- 由于初始财富为x，我们利用鞅的性质，即有

$$(1 - W_x)a = x$$

- 我们再次获得前面同样的结果：$W_x = 1 - \frac{x}{a}$

9.4.3 关于赌博的真相

- 通常情况下，赌博的庄家比赌徒有更多的钱，因此在一个公平的游戏中，庄家破产的概率是非常小的。
- 例如，假设玩家开始有10,000元，同时庄家有1,000,000 元，庄家破产的概率是

$$\frac{10,000}{1,000,000+10,000}=0.0099$$

- 约1‰；这样看，赌徒的破产的概率几乎高达
- 1 − 0.0099 = 0.9901，即为99%。

- 人们必须明白，游戏是永远不会公平的，通常采用的是美式轮盘赌（**roulette**）的打红获胜方式，获胜概率是$\boldsymbol{p}$ **= 18/38 = 0.474**，而$\boldsymbol{q}$ **= 1 − $\boldsymbol{p}$ =0.526**。庄家的破产概率是

$$Z_x = \frac{(q/p)^x - 1}{(q/p)^a - 1} = \frac{(0.526/0.474)^{10000} - 1}{(0.526/0.474)^{101000} - 1} \approx 3.96 \times 10^{-45208}$$

- 那么显而易见，赌徒破产的概率高达几乎百分百，太惨了！

- 即使非常保守地假设，$p = 0.4999$，只有偏离公平性万分之一喔，那么庄家破产的概率又是多少？
- 再从上式可算出，它是1.89×10^{-174}，还是极微小啊！
- 由此可见，即使对公平游戏作最微小的手脚都会给赌徒产生极其严重的后果。
- 当然，在赌场里庄家的机关和陷阱还不止于此，尝试与庄家较劲的后果一定是悲惨的。我们的告诫是：没有侥幸，远离赌博！

9.4.4 游戏的预期持续时间

- 方差$\sqrt{t}$ 给出了一个赌博游戏可能持续多长时间的平均水平，而其精确值并不难推出。
- 设$T(x)$表示从初始的x财富直到一方破产的期望时间，并假设游戏是公平的。
- 如前面推导的那样，我们有递推关系：

$$T(x) = 1 + \frac{1}{2}T(x+1) + \frac{1}{2}T(x-1), \quad 1 < x < a$$

- 其边界条件是：$T(0) = T(a) = 0$。
- 这个差分方程是非齐次的，将上面方程写为