提示：如果问题的陈述不能完全满足解题条件，那么你可以做出某些假设。但是，这些假设必须是合理的，而且你也需要在作业中对这些假设给出清晰地说明和解释。

原则：你必须**独立完成**本课程的所有作业，除了课程设计内容之外，本课程没有需要小组协作完成的作业。一般来说，你可以与同学们讨论完成作业过程中遇到的问题，但是作业的具体解决方法（包括作业本身）必须是自己独立完成的。

问题 1：（30 分）

在一维模式特征空间的两类问题中，两类模式的概率密度分布函数分别为$\mathcal{N}\left(0,\sigma^2\right)$和$\mathcal{N}\left(1,\sigma^2\right)$。试证明最小平均风险的分类阈值为$x_0=\frac{1}{2}-\sigma^2\ln\frac{C_{12}\Pr\left(\omega_2\right)}{C_{21}\Pr\left(\omega_1\right)}$，其中假设$C_{11}=C_{22}=0$。

问题 2：（70 分）

1. 生成两个各包含$N=1000$个二维随机矢量的数据集合$\mathbf{X}$和$\mathbf{X}'$。数据集合中随机矢量来自于三个分布模型，它们分别满足均值矢量$\mathbf{m}_1=[1,1]^{\mathrm{T}}$、$\mathbf{m}_2=[4,4]^{\mathrm{T}}$和$\mathbf{m}_3=[8,1]^{\mathrm{T}}$和协方差矩阵$\mathbf{S}_1=\mathbf{S}_2=\mathbf{S}_3=2\mathbf{I}$，其中$\mathbf{I}$是$2\times2$的单位矩阵。在生成数据集合$\mathbf{X}$时，假设来自三个分布模型的先验概率相同；而在生成数据集合$\mathbf{X}'$时，鲜艳概率分别为 0.6、0.3 和 0.1。
2. 分别画出所生成的两个数据集合中随机矢量的散布图。
3. 在两个数据集合上分别应用“似然率测试规则”、“贝叶斯风险规则”（其中$C_{12}=2$，$C_{13}=3$，$C_{23}=2.5$，$C_{11}=C_{22}=C_{33}=0$，$C_{21}=C_{31}=C_{32}=1$）、“最大后验概率规则”和“最短欧氏距离规则”进行模式分类实验，给出实验过程设计和实验结果。
4. 对每个数据集合给出上述每种分类规则的分类错误率，分析结果并给出你的结论。