

一个能去噪和保持真实感的各向异性扩散方程

林宙辰 石青云

(北京大学视觉与听觉信息处理国家重点实验室 北京 100871)

摘 要 提出了一个由各向异性扩散方程定义的非线性图像滤波算子. 与 Perona, Malik 和 Catté 等人提出的类似算子一样, 该算子能够去噪声, 而且性能很稳定. 另一方面, 它也能增强阶跃状强边缘并保持边缘的位置. 所不同的是, 它还能保持图像中有意义的较强的尖峰和窄边缘. 由于这几方面的性能, 处理后的自然图像看上去不但清晰度和对比度得到增强, 而且有意义的细节也得到保留, 很有层次感. 该算子特别适用于去除非纹理图像上均匀分布的噪声. 实验结果令人满意.

关键词 平滑, 增强, 尺度空间, 各向异性, 扩散方程.

分类号 TP391

AN ANISOTROPIC DIFFUSION EQUATION THAT CAN REMOVE NOISE AND KEEP NATURALNESS

LIN Zhou-Chen SHI Qing-Yun

(National Key Laboratory on Machine Perception, Peking University, Beijing 100871)

Abstract In this paper, a nonlinear image processing operator defined by an anisotropic diffusion equation is presented. Similar to the operators proposed by Perona, Malik and Catté *et al.*, it can remove noise and performs stably. It can also enhance step-like edges and keep the locality of them. What is different is that it is capable of keeping stronger peaks and thin edges. Due to these characteristics, not only the processed noisy images look much more clear and smooth, but also the details are kept, resulting in the naturalness. The new operator is very suitable for removing uniform noise on non-textured images. The experimental results are very satisfactory.

Keywords Smoothing, enhance, scale space, anisotropic, diffusion equations.

1 引 言

在图像处理和图像分析领域, 去除噪声是一个长期存在的问题. 早期的去噪算法一般是采用模板对原图像进行滤波. 这样做虽然能使噪声得到平滑, 付出的代价则是空间分辨率的下降, 这主要是由边缘的钝化引起的. 由于线性算子不能考虑图像的局部特性, 没有自适应功能, 因此要拥有良好的性能是

不太可能的. 近年来, 由非线性偏微分方程定义的非线性算子逐渐赢得重视. 该方法起源于计算机视觉发展早期, Marr 等人^[9,14]对在多尺度下进行图像分析的重要性的认识. 他们将原图像 I_0 与几个带不同参数 σ 的 Gauss 核 $G_\sigma(x, y)$ 作卷积, 以得到该图像在若干尺度下的平滑像. 后来, Witkin^[15]把 σ 从 0 连续变化到 ∞ , 提出了尺度空间概念. 不久, Koenderink^[7]和 Hummel^[6]指出: 求 I_0 和 G_σ 的卷积相当于求解如下的标准热传导方程:

本文 1998-11-30 收到, 修改文 1999-07-12 收到. 本课题得到国家自然科学基金重点项目(编号 69735020)资助. 林宙辰, 男, 1972 年生, 博士研究生, 主要研究领域为图像处理、计算机视觉. 石青云, 女, 1936 年生, 中国科学院院士, 主要研究领域为模式识别和图像处理.

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial t} = \Delta I \\ I|_{t=0} = I_0 \end{cases} \quad (1)$$

其中 $t = \frac{1}{2}\sigma^2$. 虽然其逆命题早已是偏微分方程的熟知结论, 其意义却非同小可. Koenderink 等人的工作最终为图像处理领域开辟了一条新途径. 随后非线性偏微分方程的引入, 产生了许多性能各异的非线性算子. 作为一种新工具, 人们往往可以根据需要设计非线性算子, 主要应用领域有边缘检测及去噪^[1,2,4,11,12]、形状分析和纹理分析^[10,13]等.

1990 年, Perona 和 Malik^[12]提出了如下的非线性各向异性扩散方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial t} = \nabla \cdot (g(\|\nabla I\|)\nabla I) \\ I|_{t=0} = I_0 \end{cases} \quad (2)$$

其中 $g(x)$ 是非负单调递减函数, $g(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$, 而且存在阈值 K_1 , 使得

$$(xg(x))' \begin{cases} > 0, & \text{当 } x < K_1 \\ = 0, & \text{当 } x = K_1 \\ < 0, & \text{当 } x > K_1 \end{cases}$$

文中(见文献[12])建议的 $g(x)$ 有两种:

$$g(x) = e^{-(x/K)^2} \text{ 和 } g(x) = \frac{1}{1 + (x/K)^2}.$$

这样的方程能使零交叉点(即 $\Delta I = 0$)处, 当 $\|\nabla I\| > K_1$ 时, 梯度得到增强; 而当 $\|\nabla I\| < K_1$ 时, 由于扩散系数较大, 梯度就得到削弱. 因此, 图像经过多次迭代后只有强的阶跃状边缘和大面积的区

域保留下来, 区域内部非常光滑. 这虽然对检测主要的边缘很有利, 但图像看上去很不真实, 而且细节边缘(不是弱边缘!)也被抹杀. 这就抵消了该算子的优点, 因为强的、大范围的边缘总是容易检测的. 另外, 该算子有理论上的问题^[4], 主要是方程(2)解的适定性问题和噪声环境下性能的稳定性问题. 前者更多的是出于数学上的考虑, 后者却至关重要, 因为噪声的存在会使 $\|\nabla I\|$ 的估计偏大, 从而噪声不但不会被除去, 反而会被放大.

1992 年, Catté 等人^[4]提出把式(2)修改为

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial t} = \nabla \cdot (g(\|\nabla G_\sigma \times I\|)\nabla I) \\ I|_{t=0} = I_0 \end{cases} \quad (3)$$

并证明了解的适定性. 由于 $\|\nabla I\|$ 的估计改在平滑后的图像 $G_\sigma \times I$ 上获取, 相对比较可靠, 因此性能要优于 Perona 和 Malik 的算子. 但 Catté 等人的算子(下面简称为 Catté 算子)仍然不能保留细节边缘, 处理后的图像的真实感还是很差.

分析以上两个算子不能保留细节边缘和真实感的原因, 我们认为因为它们不能保持尖峰状边缘和窄边缘. 以一维信号为例, 从图 1 中可以看到: 尖峰被削平、宽度增大. 虽然边缘的锐度增大, 实际上对比度却下降了(感觉上的对比度增强是由于视错觉). 因此导致处理后的图像如刀劈斧削一般, 细小(或细长)的区域内部灰度一致, 甚至消失在周围的大区域之中. 本文提出的新算子就是针对去噪以及保持尖峰状边缘和窄边缘设计的, 同时还保留了以上两个算子的优点.

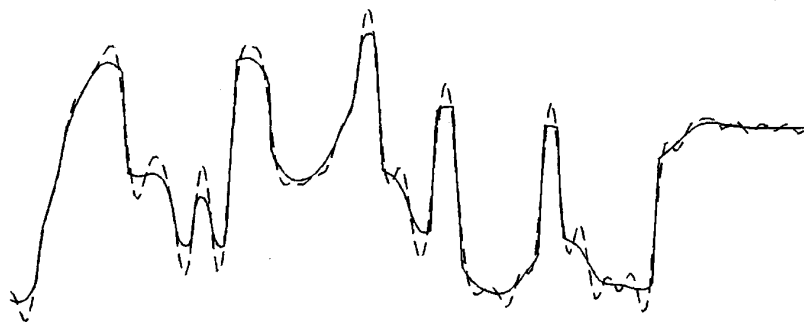


图 1 某信号(虚线)与用 Perona 和 Malik 的算子处理后的片段(实线)

2 新算子

进一步分析尖峰会被削平的原因, 无非是尖峰处 $\|\nabla I\| = 0$, 因此扩散系数最大, 自然很快就被摧毁. 为了保持尖峰, 就应当设法使该处的扩散系

数变得较小. 注意到尖峰处二阶导数往往是局部极大值, 而在零交叉点处, 二阶导数往往较小, 因此在 $g(x)$ 中, 把对 x 的贡献改为 $\|\nabla I\|^2 + I_{xx}^2 + I_{yy}^2$, 是很自然的想法. 同样, 考虑到一、二阶导数估计的准确性, 先磨光一下也是很必要的. 于是, 最终方程改写为

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial t} = \nabla \cdot (\tilde{g}(\|\nabla(G_\sigma \times I)\|^2 + \\ (G_\sigma \times I_{xx})^2 + (G_\sigma \times I_{yy})^2) \nabla I) \\ I|_{t=0} = I_0 \end{cases} \quad (4)$$

其中 $\tilde{g}=g(\sqrt{x})$. 由于 $\tilde{g}(x)>0$, 故由式(4)生成的尺度空间将不会产生新的极值点^[12]. 但仿照文献[5]中的分析可知, 由式(2)和(4)生成的尺度空间在梯度较大的地方都有可能产生虚假边缘. 当然, 在离散情况下, 这些可能产生的虚假边缘在视觉上不容易被觉察到.

3 有选择的边缘增强性质

现在来粗略地(差不多是定性地)分析一下式(4)的有选择的边缘增强特性. 方程(4)的解的适定性暂不考虑, 因为我们只是把它看成一个非线性滤波器的分析设计手段, 最终要将它离散化求数值解, 而且要在有限步后停止. 仿照文献[12], 我们假设边缘平行于 y 方向, 且 $I_x > 0$. 忽略 y 方向的影响和卷积(因为它只是用来估计导数的), 就可把式(4)简化为

$$I_t = \frac{\partial}{\partial x}(\tilde{g}(u)I_x) = 2\tilde{g}'(u)(I_x + I_{xxx})I_x I_{xx} + \tilde{g}(u)I_{xxx} \quad (5)$$

其中 $u = (I_x)^2 + (I_{xx})^2$. 于是,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(I_x) &= \frac{\partial}{\partial x}(I_t) \\ &= 4\tilde{g}''(u)(I_x + I_{xxx})^2 I_x (I_{xx})^2 + \\ &\quad 2\tilde{g}'(u)(I_{xx} + I_{xxx})I_x I_{xx} + \\ &\quad 4\tilde{g}'(u)(I_x + I_{xxx})(I_{xx})^2 + \\ &\quad 2\tilde{g}'(u)(I_x + I_{xxx})I_x I_{xxx} + \tilde{g}(u)I_{xxxx}. \end{aligned}$$

因此在拐点 $I_{xx}=0$ 处(即 Marr 意义下的边缘位置),

$$\frac{\partial}{\partial t}(I_x) \Big|_{I_{xx}=0} = (2\tilde{g}'((I_x)^2)(I_x + I_{xxx})I_x + \tilde{g}((I_x)^2))I_{xxx}.$$

如果我们取定 $\tilde{g}(x) = e^{-x/K^2}$, 则上式变为

$$\frac{\partial}{\partial t}(I_x) \Big|_{I_{xx}=0} = e^{-(I_x/K)^2} (1 - 2(I_x + I_{xxx})I_x/K^2) I_{xxx}.$$

对较平滑的信号来说, $|I_{xxx}| \ll |I_x|$ 且在拐点处 $I_{xxx} < 0$, 因此 I_x 的变化趋势主要还是受 I_x 本身的大小控制的: 当 I_x 大于某一阈值 K_2 时, $\frac{\partial}{\partial t}(I_x) > 0$; 反之, 若 I_x 小于 K_2 时, 就有 $\frac{\partial}{\partial t}(I_x) < 0$.

另一方面, 可把上式改写成

$$\frac{\partial}{\partial t}(I_x) \Big|_{I_{xx}=0} = e^{-(I_x/K)^2} (1 - 2(I_x/K)^2) I_{xxx} -$$

万方数据

$$2e^{-(I_x/K)^2} I_x (I_{xxx}/K)^2.$$

如果对 Perona 和 Malik 的方程作同样分析, 就可以知道它的 $\frac{\partial}{\partial t}(I_x)$ 只有上式的第一项. 注意到上式第二项恒小于 0, 因此, 如果 I_x 小于 K_2 , 则新算子将使 I_x 衰减得更快; 而当 I_x 大于 K_2 时, 新算子将使 I_x 增强得慢一些, 这样尖峰的宽度就不会有明显增大, 而且 I_x 越大, 尖峰的宽度增大得就越少.

另外, 从式(5)很容易看到, 在尖峰 $I_x=0$ 处,

$$I_t|_{I_x=0} = \tilde{g}((I_{xx})^2)I_{xx} = e^{-(I_{xx}/K)^2} I_{xx}.$$

因为 $|I_{xx}| > 0$, 这就抑制了灰度值的减小.

综上, 我们可以得出结论: 在平坦区域, 新算子会比 Perona 和 Malik (或 Catté) 的算子稍快地平滑噪声; 而在强边缘处, 新算子虽有一定的增强, 但更倾向于保留原来的边缘; 尖峰或窄边缘能得到较好的保持. 因此, 处理后的图像不但看上去更清晰, 而且照样有真实感.

4 离散格式

以上几个方程实际计算时, 都采用绝热边界条件: $\frac{\partial I}{\partial n} = 0$.

我们对时间维度采用前向差分. 在第 $n+1$ 个时间步, 为了估计 ∇I^n , ∇I_{xx}^n 和 ∇I_{yy}^n , 需要求它们与 G_σ 的卷积. 由于卷积与空间导数的可交换性, 为节省计算量, 可以先求 $G_\sigma \times I^n$, 再对 $G_\sigma \times I^n$ 求相应导数. 正如在前言中提到的, 求 $G_\sigma \times I^n$ 相当于求方程(1)初值为 I^n , 在 $t = \frac{1}{2}\sigma^2$ 时的解, 因此算法显而易见, 在此略去.

I_x 和 I_y 的逼近采用前向或后向差分均可, 但不能使用中心差分, 因为这样会使尖峰处 $\|\nabla(G_\sigma \times I)\|^2 + (G_\sigma \times I_{xx})^2 + (G_\sigma \times I_{yy})^2$ 的值减小, 从而对保持尖峰不利. 最后, 计算格式为

$$I_{i,j}^{n+1} = I_{i,j}^n + \lambda(C_N \cdot D_N I_{i,j}^n + C_S \cdot D_S I_{i,j}^n + C_E \cdot D_E I_{i,j}^n + C_W \cdot D_W I_{i,j}^n) \quad (6)$$

其中,

$$D_N I_{i,j}^n = I_{i-1,j}^n - I_{i,j}^n, D_S I_{i,j}^n = I_{i+1,j}^n - I_{i,j}^n,$$

$$D_E I_{i,j}^n = I_{i,j+1}^n - I_{i,j}^n, D_W I_{i,j}^n = I_{i,j-1}^n - I_{i,j}^n,$$

$$C_N = \tilde{g}(\|(\nabla \bar{I}^n)_{i-1,j}\|^2 + \alpha_{i,j}^n),$$

$$C_S = \tilde{g}(\|(\nabla \bar{I}^n)_{i+1,j}\|^2 + \alpha_{i,j}^n),$$

$$C_E = \tilde{g}(\|(\nabla \bar{I}^n)_{i,j+1}\|^2 + \alpha_{i,j}^n),$$

$$C_W = \tilde{g}(\|(\nabla \bar{I}^n)_{i,j-1}\|^2 + \alpha_{i,j}^n),$$

$$\bar{I}^n = G_\sigma \times I^n,$$

$$\alpha_{i,j}^n = [((\bar{I}^n)_{xx})_{i,j}]^2 + [((\bar{I}^n)_{yy})_{i,j}]^2,$$

$$\lambda = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = \Delta t,$$

$$((\bar{I}^n)_{xx})_{i,j} = (\bar{I}^n)_{i,j-1} - 2(\bar{I}^n)_{i,j} + (\bar{I}^n)_{i,j+1},$$

$$((\bar{I}^n)_{yy})_{i,j} = (\bar{I}^n)_{i-1,j} - 2(\bar{I}^n)_{i,j} + (\bar{I}^n)_{i+1,j}.$$

式(6)稳定的充分条件为 $0 < \lambda \leq 0.25$, 而且当 λ 满足此条件时, 容易证明 $m \leq I_{i,j}^{n+1} \leq M$, 其中 $m = \min \{I_{i,j}^n, I_{i-1,j}^n, I_{i+1,j}^n, I_{i,j-1}^n, I_{i,j+1}^n\}$, $M = \max \{I_{i,j}^n, I_{i-1,j}^n, I_{i+1,j}^n, I_{i,j-1}^n, I_{i,j+1}^n\}$, 因此去噪后的图像将不会产生新的极值点.

5 实验结果

以上格式要付诸实用, 须确定三个参数: K , 尺度 σ 和停止时间 T . 尺度 σ 取 0.8 左右为宜^[10]. 太小的 σ 会使 $G_\sigma \times I$ 不够平滑; 而太大的 σ 也会使导数的估计出现大的偏差, 因为 Gauss 核会使极值点发生漂移. K 的选取仍参照 Canny^[3] 的直方图估计法: 先求得 $\|\nabla(G_\sigma \times I)\|$ (注意: 不是 $\|\nabla(G_\sigma \times I)\|^2 + (G_\sigma \times I_{xx})^2 + (G_\sigma \times I_{yy})^2$!) 的累计直方图, K 就设为总像素

85—90% 处的 $\|\nabla(G_\sigma \times I)\|$ 值, 不必每个时间步都设一次. 停止时间应视噪声水平而定. 噪声越强, T 应当越大. 对 T 的详细讨论请参见文献[8].

实验通过处理加不同程度均匀分布噪声的 Lena 图像来比较新算子和 Catté 算子的性能(为了看得更清楚, 只显示中间 4/9 的部分). 图 2 是原图, 图 3 是处理结果. 图 3 左边一列是加均匀分布噪声的 Lena 图像, 中间一列是 Catté 算子的处理结果, 右边一列是新算子的处理结果. 可以看到, 新算子的确能很好地平滑平坦区域并保持有意义的边缘(请注意瞳孔、睫毛和帽上的装饰物). 即使噪声很强, 新算子的处理效果仍然很好. 而经 Catté 算子处理的图像难以看到细节.



图 2 Lena 图像原图



图 3 新算子和 Catté 算子的性能比较

注:图 3 中,加噪声机制是逐点加在 $[-\beta, \beta]$ 上均匀分布(即服从 $U[-\beta, \beta]$)的随机性,由 Photo-shop 完成。(a)是由 Lena 图像加 $U[-15, 15]$ 噪声得到的;(d)中的噪声为 $U[-30, 30]$;(g)中的噪声为 $U[-50, 50]$ 。中间一列是 Catté 算子的处理结果,右边一列是新算子的处理结果。(b),(c)停止时间是 $T=2$;(e),(f) $T=3$;(h) $T=3$,若 T 值再大,图像将更模糊;(i) $T=5$ 。

6 讨 论

本文在 Perona 和 Malik 以及 Catté 等人工作的基础上作了改进。新的各向异性扩散方程在计算扩散系数时多考虑了二阶导数,并在与 Gauss 核卷积后的图像上估计各阶导数,结果不但能有效地去除噪声、略微增强边缘并保持边缘位置,而且能保持图像中的尖峰和窄边缘,使处理后的图像不但清晰度和对比度都大大增加,而且看上去真实自然。

均匀分布的噪声和高斯噪声是图像处理中两种最常见的噪声类型。新算子最适合于去除非纹理图像上的均匀分布的噪声,对不太强的高斯噪声效果也相当理想。如果高斯噪声很强,则在处理后的图像上将留下一些孤立的斑点,这是因为高斯噪声往往是颗粒状的,而新算子对尖峰状的边缘有保留倾向。如果用新算子处理某些纹理较强的图像,有时视觉效果并不太好。如 Barbara 图像处理,裤子、头巾和桌布上的条纹显得支离破碎,条纹和这些部位的平坦部分的反差较大(但如果用 Catté 算子处理,则只能在头巾上看到极少量的条纹)。这是因为纹理是在较大范围上才具有的统计特性,而新算子只善于保持局部细节,掌握不了图像大范围上的信息。

如果希望算子是旋转不变的,可以在式(4)第一个方程右端 $\tilde{g}(\cdot)$ 的变数中再加一项 $2(G_x \times I_{xy})^2$,但实验发现处理结果在视觉上看不出什么差异。本文的工作要做得更精细,可以考虑阈值 K 的自适应估计。

参 考 文 献

- 1 Alvarez L, Lions P L, Morel J M. Image selective smoothing

and edge detection by nonlinear diffusion II. *SIAM J Numerical Analysis*, 1992, 29(3):845-866

- 2 Alvarez L, Mazorra L. Signal and image restoration using shock filters and anisotropic diffusion. *SIAM J Numerical Analysis*, 1994, 31(2):590-605
- 3 Canny J. A computational approach to edge detection. *IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1986, 8(6):679-698
- 4 Catté F et al. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion. *SIAM J Numerical Analysis*, 1992, 29(1):182-193
- 5 丛 舸. 计算机视觉中的非线性尺度空间理论[博士学位论文]. 中国科学院自动化研究所, 北京, 1997
- 6 Hummel R A. Representations based on zero-crossings in scale-space. In: Proc IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, Miami Beach, FL, 1986. 204-209
- 7 Koenderink J. The structure of images. *Biological Cybernetics*, 1984, 50:363-370
- 8 林宙辰, 石青云. An anisotropic diffusion PDE for noise reduction and thin edge preservation. In: Proc Tenth International Conference on Image Analysis and Processing, Venice, Italy, 1999
- 9 Marr D. Vision, San Francisco, CA: Freeman, 1982
- 10 Niessen W et al. A general framework for geometry-driven evolution equations. *International J Computer Vision*, 1997, 21(3):187-205
- 11 Osher S, Rudin L I. Feature-oriented image enhancement using shock filters. *SIAM J Numerical Analysis*, 1990, 27(4):919-940
- 12 Perona P, Malik J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1990, 12(7):629-639
- 13 Bart M. ter Haar Romeny eds. Geometry-Driven Diffusion in Computer Vision. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1994
- 14 Rosenfeld A, Thurston M. Edge and curve detection for visual scene analysis. *IEEE Trans on Computers*, 1971, C-20:562-569
- 15 Witkin A. Scale-space filtering. In: International Joint Conference on Artificial Intelligence, Karlsruhe, West Germany, 1983. 1091-1021