Begonnen am	Montag, 7. November 2022, 17:09
Status	Beendet
Beendet am	Dienstag, 8. November 2022, 22:28
Verbrauchte Zeit	1 Tag 5 Stunden
Bewertung	**1,30** von 1,50 (**86,67**%)

Frage **1**
Richtig
Erreichte Punkte 0,10 von 0,25
Frage markieren

Es wird Ihnen die Teilnahme an dem folgenden Glücksspiel angeboten:

Für 1 € Einsatz werfen Sie 2 faire, 12-seitige Würfel.

Würfeln Sie die Augensumme 24, bekommen Sie 30€, für eine 23 gibt es einen Preis von 6€ für Sie.

Welchen (Netto-)Gewinn erwarten Sie sich von diesem Spiel?

Hinweis: Sie müssen bei dieser Frage unabhängig von Ihrer Spracheinstellungen den Punkt (".") als Dezimaltrenner verwenden, damit die Lösung von Moodle richtig interpretiert wird!

-0.708 ✔

Die Antwort ist richtig.

Die Wahrscheinlichkeit, eine 24 zu würfeln, beträgt $p_1 = \frac{1}{144}$, mit einem Nettogewinn von $g_1 = 29$€, für die 23 sind es $p_2 = \frac{2}{144}$ und $g_2 = 5$€, für alle anderen Augensummen ist die Wahrscheinlichkeit $p_3 = \frac{141}{144}$ mit einem 'Gewinn' von $g_3 = -1$€.

Der Erwartungswert ist $\sum_i p_i \cdot g_i = -0.708$

Frage **2**
Richtig
Erreichte Punkte 0,20 von 0,25
Frage markieren

Die Ubahn fährt im 11 Minuten Takt.

Wenn man zu einem zufällig gewählten Zeitpunkt zur Ubahnstation kommt, ist die Wartezeit X eine Zufallsvariable, die alle Werte zwischen 0 und 11 annehmen kann.

Die zugehörige Verteilungsfunktion ist gleichverteilt.

Finden Sie die Verteilungsfunktion der zugehörigen standardisierten Zufallsvariable Z!

$F(z) = 0 \quad , \text{ wenn } z \leq$ -3^(1/2) ✔

$F(z) =$ (z+3^(1/2))/(2*3^(1/2)) , wenn -3^(1/2) < z < 3^(1/2) ✔

$F(z) = 1 \quad , \text{ wenn } z \geq$ 3^(1/2) ✔

Hinweis: Hier ist eine algebraische Formel als Lösung gefragt, diese kann Variablen, arithmetische Operatoren (zB. +,-,*,/,**) sowie einfache Funktionen (zB. sin(), cos(), sqrt(), log(), exp(), usw.) beinhalten. Im Zweifel bitte diese verwenden statt zu runden! Vergessen Sie bitte auch nicht auf entsprechende Klammersetzung! Sie müssen bei dieser Frage unabhängig von Ihrer Spracheinstellungen den Punkt (".") als Dezimaltrenner verwenden, damit die Lösung von Moodle richtig interpretiert wird!

Die Antwort ist richtig.

Die Verteilungsfunktion von X ist

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } x \leq 0 \\ \frac{1}{11}\, x, & \text{wenn } 0 < x < 11 \\ 1, & \text{wenn } x \geq 11 \end{cases}.$$

Die entsprechende standardisierte Zufallsvariable ist $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, mit $\mu = \frac{11}{2} = 5.5$ und $\sigma = \frac{11}{2\sqrt{3}} \approx 3.18$,

daraus ergibt sich $x = \sigma z + \mu$ und $F(z) = \frac{1}{11}x = \frac{1}{11}(\sigma z + \mu) = \frac{1}{11}\frac{11(z+\sqrt{3})}{2\sqrt{3}} = \frac{(z+\sqrt{3})}{2\sqrt{3}}$.

Für die Grenzen:

$x = \frac{11(z+\sqrt{3})}{2\sqrt{3}} = 0 \implies z = -\sqrt{3}$

und $x = \frac{11(z+\sqrt{3})}{2\sqrt{3}} = 11 \implies z = \sqrt{3}$

also

$$F(z) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } z \leq -\sqrt{3} \\ \frac{(z+\sqrt{3})}{2\sqrt{3}}, & \text{wenn } -\sqrt{3} < z < \sqrt{3} \\ 1, & \text{wenn } z \geq \sqrt{3} \end{cases}.$$

Frage **3**
Richtig
Erreichte Punkte 0,25 von 0,25
Frage markieren

In einer Fabrik treten immer wieder Störungen der Maschinen auf.

Die Zufallsvariable X=*Anzahl der Störungen pro Tag* nimmt die Werte $x_0, .., x_3 = 0, 1, 2, 3$ an, mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $p_0 = 0.08$, $p_1 = 0.42$, $p_2 = 0.42$ bzw. $p_3 = 0.08$.

Die Kosten für die Reparatur (in 100€) sind gegeben durch

$g(x) = 5 - \frac{3}{3+x}$

Wie hoch sind die Kosten, die im Schnitt pro Tag anfallen (auf 3 Nachkommastellen)?

Hinweis: Bitte geben Sie diese ebenfalls in 100€ an! Sie müssen bei dieser Frage unabhängig von Ihrer Spracheinstellungen den Punkt (".") als Dezimaltrenner verwenden, damit die Lösung von Moodle richtig interpretiert wird!

4.313 ✔

Die Antwort ist richtig.

Gesucht ist der Erwartungswert der Kosten, also $E(g(X)) = \sum_i g(x_i)p_i = 4.313$.

Frage **4**
Richtig
Erreichte Punkte 0,25 von 0,25
Frage markieren

Die Lebensdauer (in Jahren) eines Smartphone-Akkus kann durch eine Exponentialverteilung mit

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-1.1x}, & \text{wenn } x > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

beschrieben werden.

Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz der Lebensdauer.

Geben sie Ihre Antwort auf 3 Nachkommastellen an!

Hinweis: Sie müssen bei dieser Frage unabhängig von Ihrer Spracheinstellungen den Punkt (".") als Dezimaltrenner verwenden, damit die Lösung von Moodle richtig interpretiert wird!

$\mu =$

0.909 ✔

$\sigma^2 =$

0.826 ✔

Die Antwort ist richtig.

Der Erwartungswert ist allgemein $\mu = E(X) = \int_0^\infty x f(x) \mathrm{d}x$, für die Exponentialverteilung entspricht das $\frac{1}{k} = 0.909$,

und die Varianz $\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 \ = \frac{1}{k^2} = 0.826$

Frage **5**
Richtig
Erreichte Punkte 0,25 von 0,25
Frage markieren

Bei einem Glücksspiel wird, mit jeweils der selben Wahrscheinlichkeit, eines von 3 Losen gezogen.

Die zugehörigen Gewinne sind 5, 45, 100 €.

Welcher Gewinn ist, bei sehr vielen Spielen, durchschnittlich zu erwarten?

50 ✔

Wie groß ist die Varianz?

1516.667 ✔

Hinweis: Sie müssen bei dieser Frage unabhängig von Ihrer Spracheinstellungen den Punkt (".") als Dezimaltrenner verwenden, damit die Lösung von Moodle richtig interpretiert wird!

Die Antwort ist richtig.

Jedes Los wird mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ gezogen.

Der Erwartungswert ist also $\mu = \frac{1}{3}\sum_i x_i = 50$.

Die Varianz ist $\sigma^2 = \mathrm{E}(X^2) - \mu^2 = \frac{1}{3}\sum_i X_i^2 - \mu^2 = 1516.67$

Frage **6**
Richtig
Erreichte Punkte 0,13 von 0,13
Frage markieren

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- [x] a. Der Erwartungswert einer Zufallsvariable ist linear. ✔
- [x] b. Für zwei unabhängige Zufallsvariablen X,Y gilt: $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$ ✔
- [ ] c. Für zwei stetige Zufallsvariablen X,Y gilt: $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$
- [x] d. Für alle Zufallsvariablen X,Y gilt $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ ✔
- [ ] e. Der Erwartungswert ist immer die häufigste Realisation der Zufallsvariable
- [ ] f. Für eine Zufallsvariable X mit Dichtefunktion f(x) gilt für eine beliebige reelle Zahl a: $E(aX) = f(a)$
- [ ] g. Der Erwartungswert einer Funktion einer Zufallsvariable ist identisch der Funktion angewandt auf den Erwartungswert: $E(g(X)) = g(E(X))$

Die Antwort ist richtig.

Frage **7**
Richtig
Erreichte Punkte 0,13 von 0,13
Frage markieren

Die Zufallsvariable X=*Augensumme bei Wurf eines 14-seitigen Würfels* hat Erwartungswert $\mu = 7.5$ und Varianz $\sigma^2 = 16.25$.

Sie würfeln sehr, sehr, sehr oft und halten die Ergebnisse X_i in einer Tabelle fest.

Nun berechnen Sie daraus das arithmethische Mittel $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_i^n X_i$, wobei n die Anzahl der Würfe ist.

Wie verhält es sich nun, mit wachsender Anzahl der Würfe, mit Erwartungswert und Varianz dieser neuen Zufallsvariable?

Hinweis: Sie müssen bei dieser Frage unabhängig von Ihrer Spracheinstellungen den Punkt (".") als Dezimaltrenner verwenden, damit die Lösung von Moodle richtig interpretiert wird!

$\mathrm{E}(\bar{X}) =$

7.5 ✔

$\mathrm{Var}(\bar{X}) \approx$

0 ✔

Die Antwort ist richtig.

Nach dem Gesetz der großen Zahlen konzentriert sich die Verteilung des arithmetischen Mittels der Ergebnisse $\bar{X} = \sum_i^n X_i$ bei sehr vielen Wiederholungen n stark um den Erwartungswert der Zufallsvariablen X, sofern diese unabhängig und identisch verteilt sind - das ist hier der Fall.

Der Erwartungswert ist, wie immer beim arithmetischen Mittel, $\mathrm{E}(\bar{X}) = \mu = 7.5$.

Die Varianz wird mit steigender Anzahl der Wiederholungen immer kleiner: nach n Würfen ist $\mathrm{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ und geht mit steigendem n gegen 0.