

浮标系泊系统运动分析

摘 要

近浅海观测网的传输节点由浮标系统、系泊系统和水声通讯系统组成。本文主要针对浮标系统和系泊系统的受力及运动情况进行详细分析。

由于钢管、钢桶两端受力方向的不确定性,联系二者在受力分析时的相似性,当系统整体达到平衡时,应用多力矩平衡法,得到钢管和钢桶的力矩平衡方程。此外,根据竖直、水平方向受力平衡,列出受力平衡方程。由此得到吃水深度与钢管、钢桶倾角的关系。具体方程详见章节五。

锚链由多个无档普通链环连接而成,为确定其形状,我们采用静力分析法,建立悬链线模型刻画锚链悬链部分的特征。由于受到风力作用,悬链线初始角度不应为 0。利用锚链下端水平分力与风力的相等关系,联系受力平衡方程和力矩平衡方程,求解得到不同风速下钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状和浮标的游动区域半径,具体结果见表 2、3、4。

调节重物球质量时采用对重物球质量和吃水深度进行遍历搜索的方法,在钢桶倾角 $\leq 5^\circ$ 且锚链在锚点与海床的夹角 $\leq 16^\circ$ 的约束下求得重物球质量的最大值和最小值及二者对应的钢桶倾角、锚链在锚点与海床的夹角和吃水深度,具体结果见章节八。在遍历搜索过程中得到定理 1:在一定范围内,钢桶的倾角随重物球质量的增加而增加;当重物球质量增大到一定程度时,钢桶的倾角又会随重物球质量的增加而减小。

在原有受力及力矩平衡方程的基础上添加水流产生的力和力矩建立新的平衡方程,选取对 16m ~ 20m 不同的水深均适用的重物球质量作为计算标准,平衡方程结合悬链方程可解得水流速和风速同向时(该种情况下浮标的游动区域最广)的钢桶、钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域,具体结果见表 5 和图 13。

关键词: 系泊系统 多力矩平衡法 悬链线模型 遍历搜索

一、问题重述

1.问题背景

近浅海观测网的传输节点由浮标系统、系泊系统和水声通讯系统组成，其平面示意图如图 1 所示。系泊系统的设计问题就是确定锚链的型号、长度和重物球的质量，使得浮标的吃水深度和游动区域及钢桶的倾斜角度尽可能小。

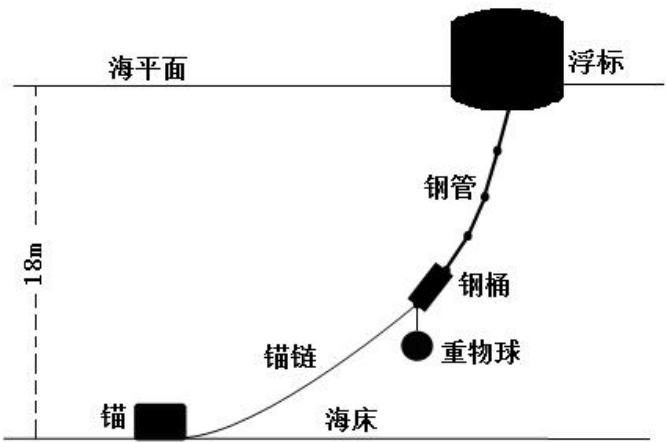


图 1 近浅海观测网点传输节点平面示意图

2.数据说明

浮标系统可简化为圆柱体，底面直径 2m、高 2m，浮标质量为 1000kg。

系泊系统由钢管、钢桶、重物球、电焊锚链和特制的抗拖移锚组成。钢管共 4 节，每节长度 1m，直径为 0.05m，每节钢管的质量为 10kg。锚链选用无档普通链环，近浅海观测网的常用型号及其参数见表 1。锚的质量为 600kg。要求锚链末端与锚的链接处的切线方向与海床的夹角不超过 16 度，否则锚会被拖行，致使节点移位丢失。

表 1 锚链型号和参数表

型号	每节链环的长度(mm)	单位长度的质量(kg/m)
I	78	3.2
II	105	7
III	120	12.5
IV	150	19.5
V	180	28.12

水声通讯系统安装在一个长 1m、外径 0.3m 的密封圆柱形钢桶内，设备和钢桶总质量为 100kg。钢桶上接第 4 节钢管，下接电焊锚链。钢桶竖直时，水声通讯设备的工作效果最佳。若钢桶倾斜，则影响设备的工作效果。钢桶的倾斜角度（钢桶与竖直线的夹角）超过 5 度时，设备的工作效果较差。为了控制钢桶的倾斜角度，钢桶与电焊锚链连接处可悬挂重物球。

近海风荷载可通过近似公式 $F = 0.625 \cdot S v^2$ (N) 计算，其中 S 为物体在风向法平面的投影面积 (m^2)， v 为风速 (m/s)。近海水流力可通过近似公式 $F = 374 \cdot S v^2$ (N) 计算，其中 S 为物体在水流速度法平面的投影面积 (m^2)， v 为水流速度 (m/s)。

3. 问题提出

问题一 某型传输节点选用 II 型电焊锚链 22.05m，选用的重物球的质量为 1200kg。现将该型传输节点布放在水深 18m、海床平坦、海水密度为 $1.025 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 的海域。若海水静止，分别计算海面风速为 12m/s 和 24m/s 时钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域。计算海面风速为 36m/s 时钢桶和各节钢管的倾斜角度、锚链形状和浮标的游动区域。

问题二 海面风速为 36m/s 时，调节重物球的质量，使得钢桶的倾斜角度不超过 5 度，锚链在锚点与海床的夹角不超过 16 度。

问题三 由于潮汐等因素的影响，布放海域的实测水深介于 16m~20m 之间。布放点的海水速度最大可达到 1.5m/s、风速最大可达到 36m/s。请给出考虑风力、水流力和水深情况下的系泊系统设计，分析不同情况下钢桶、钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域。

二、问题分析

1. 浮标、钢管、钢桶受力分析

钢管和钢桶本身的受力存在很大类似性，均受重力、浮力、两端的拉力的影响，浮标本身不存在倾角，所以将浮标与钢管 1 联系在一起进行受力分析。这样一来，我们可以将浮标、钢管、钢桶作为整体看成系泊系统的上半部分，在风速一定时，系泊系统本身会达到平衡状态，根据平衡，我们寻找到针对每个组件的受力平衡方程，选定力矩平衡点，找到针对每个物件的力矩平衡方程，从而建立

出钢管和钢桶的倾角与吃水深度的关系。

2. 锚链的静力分析——悬链线方程

首先明确存在风力作用时，悬链线下端所受张力与水平方向产生的夹角 α 一定不等于零。悬链线是一种具有均匀质地、完全柔性、能够无限延伸的链或索自由悬挂于两点时所形成的曲线。由于锚链本身存在拉伸且会受到流体的作用，一般活动式平台的锚链与理论上的悬链线某些方面存在差异，在使用悬链线方程描述锚链的特性时，忽略水流和浪潮对锚链产生的动力，不考虑锚链本身的弹性拉伸等因素的影响，以便能够更好的对锚链的形状进行拟合，而且能够很好的计算出悬链线的长度和锚链上端的张力。

3. 不同风速下钢桶钢管的倾角、锚链形状和浮标的游动区域

通过对浮标、钢管、钢桶进行受力分析列出钢管和钢桶的受力、力矩平衡方程，建立吃水深度与钢管、钢桶倾角的关系。由于悬链线下端所受张力与水平方向上的夹角等于浮标所受风的推力，联系受力平衡方程和力矩平衡方程，求解得到不同风速下钢桶和各节钢管的倾斜角度、浮标的游动区域半径。

通过上述求解，同时还能得到悬链线下端受力与水平方向上的夹角、悬链线的竖直投影长和水平投影长。通过这三项指标可以简单地对刻画出锚链的形状。

4. 重物球质量的调节

将钢桶倾角 ≤ 5 度且锚链在锚点与海床的夹角 ≤ 16 度作为约束条件，对重物球质量和吃水深度进行遍历搜索，求得重物球质量的最大值和最小值及二者对应的钢桶倾角、锚链在锚点与海床的夹角和吃水深度。

5. 考虑风力、水流力和水深情况下的系泊系统设计

在原有受力及力矩平衡方程的基础上添加水流产生的力和力矩建立新的平衡方程组，选取对 $16m \sim 20m$ 不同的水深均适用的重物球质量作为计算标准，平衡方程结合悬链方程可解得水流速和风速同向时（该种情况下浮标的游动区域最广）的钢桶、钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域。

三、模型假设

基于本文内容，我们做出如下假设：

- 1.假设海底为刚性和水平的，对躺底锚链无摩擦力作用。
- 2.假设海水中所有系泊组件都是缓慢移动的，所以由于主体运动在系泊索上产生的拖拽力可以忽略不计。
- 3.假设钢桶下方所受锚链的拉力与钢桶的方向平行，也即该拉力与竖直方向的夹角等于钢桶与竖直方向上的夹角 θ_5 。
4. 在使用悬链线方程描述锚链的特性时，忽略水流和浪潮对锚链产生的动力，不考虑锚链本身的弹性拉伸等因素的影响。

四、符号说明

符号	符号说明	单位
$m_{\text{浮标}}$	浮标的质量	(kg)
$m_{\text{钢管}}$	钢管的质量	(kg)
$m_{\text{钢桶}}$	钢桶的质量	(kg)
$m_{\text{重球}}$	重球的质量	(kg)
$V_{\text{浮标}}$	浮标浸入水中的体积	(m^3)
$V_{\text{钢管}}$	钢管的体积	(m^3)
$V_{\text{钢桶}}$	钢桶的体积	(m^3)
$F_{\text{风}}$	近海风载荷	(N)
ρ	海水密度	(kg/m^3)
g	重力系数	(N/kg)
l	钢管的长度	(m)
h	浮标高度	(m)

S	吃水深度	(m)
F_{xn}	第 n 个节点的拉力在水平方向的分力	(N)
F_{yn}	第 n 个节点的拉力在竖直方向的分力	(N)
$f_{\text{静}}$	海床对锚的静摩擦力	(N)
$\theta_{1\sim 4}$	1 至 4 根钢管的倾斜角度	(度)
θ_5	钢桶的倾斜角度	(度)
α	锚链下端所受力与海床的夹角	(度)

五、浮标、钢管、钢桶受力分析与力矩方程

1. 钢管和钢桶受力的类似性

钢管和钢桶在平衡的系泊系统中的受力情况有很大的相似性，从上到下将钢管依次记为钢管 1、钢管 2、钢管 3、钢管 4，我们分析钢管 1 的受力情况如图 2 所示。

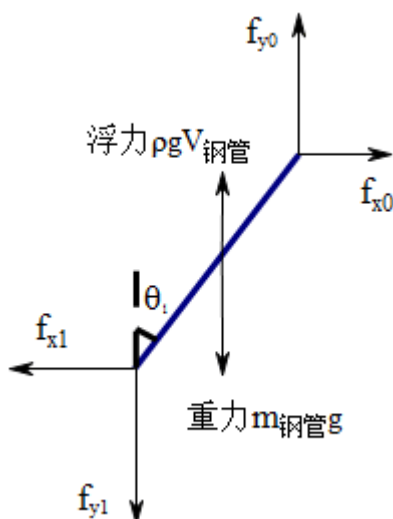


图 2 钢管 1 的受力分析图

借助图 2，我们可以清晰地看到钢管 1 受到重力 $m_{\text{钢管}1}g$ 、浮力 $\rho g V_{\text{钢管}1}$ 和两个端点力，由于钢管在端点处的受力方向不确定，我们将这两个力分解成竖直方向和水平方向上的分量，用 F_{yi} 、 F_{xi} 来表示。 θ_i 表示钢管 1 与竖直方向上的夹角。

同样的钢管 2、钢管 3、钢管 4 的受力情况与钢管 1 类似。

钢桶由于受到锚链给它的一个斜向左下方方向未知的拉力和钢管 4 给它的斜向右上方的方向未知的拉力，自身的重力和浮力也存在，故力的性质与钢管的相同，所以下文中我们将用同样的方法分析钢桶的受力情况。

2.浮标的受力与钢管 1 结合

考虑到浮标与竖直方向夹角为零，若将它单独拿出做受力分析，列出力矩平衡方程，意义不大。所以我们将浮标的受力与钢管 1 的受力相结合，以便在寻找力矩平衡方程时，浮标所受力不至于被舍弃，这样就成功的将风力、吃水深度与钢管与竖直方向的夹角建立联系，浮标与钢管 1 受力分析图如图 3 所示。

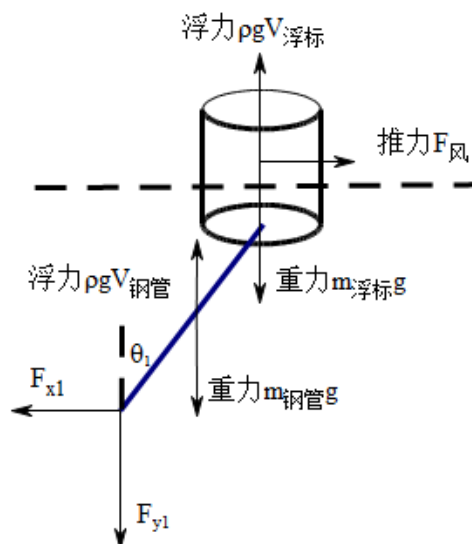


图 3 钢管 1 与浮标的受力分析图

3.系泊系统力矩平衡点选取

在对浮标、钢管、钢桶进行多力矩平衡分析时，力矩平衡点合理的选取便显得十分重要。我们画出浮标系统个重要节点的力分解图，如图 4 所示。

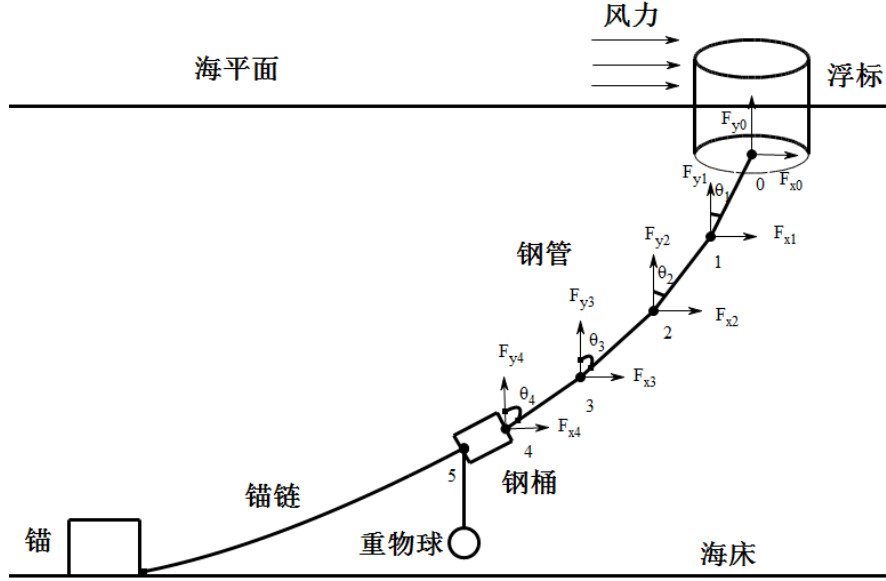


图4 系泊系统部分节点受力分解图

我们对从浮标到钢桶的每个节点进行标号，并对部分节点处所受力进行分解。因为这些力方向未知，而钢管、钢桶的倾角又是待求参数，为了将这些未知方向的力与待求倾角相联系，将力分解成竖直方向的和水平方向的，这样，便于应用倾角寻找各分力的力臂。

因为重物球对于钢桶而言，非必要时候是不需要的，所以重物球所在节点也就是节点5 我们可以灵活应用，在该点寻找解题的思路。所以，为了与钢桶相一致，也为了解题方便，我们选取每根钢管的下方节点作为当前钢管的力矩平衡点。

4.浮标、钢管、钢桶的受力平衡方程以及力矩平衡方程

(1)第1根钢管加浮标

竖直方向受力平衡：

$$\rho g V_{\text{钢管1}} + \rho g V_{\text{浮标}} - m_{\text{浮标}} g - m_{\text{钢管1}} g - F_{y1} = 0 \quad (1)$$

水平方向受力平衡：

$$F_{\text{风}} - F_{x1} = 0 \quad (2)$$

力矩平衡：

$$\begin{aligned} & \rho g V_{\text{钢管1}} \cdot \frac{l}{2} \sin \theta_1 + \rho g V_{\text{浮标}} \cdot l \sin \theta_1 \\ & = m_{\text{浮标}} g \cdot l \sin \theta_1 + m_{\text{钢管1}} g \cdot l \sin \theta_1 + F_{\text{风}} \left(l \cos \theta_1 + S + \frac{H-S}{2} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

(2)第 1 根钢管

竖直方向受力平衡:

$$\rho g V_{\text{钢管1}} + F_{y0} - m_{\text{钢管1}} g - F_{y1} = 0 \quad (4)$$

水平方向受力平衡:

$$F_{x1} - F_{x0} = 0 \quad (5)$$

力矩平衡:

$$\rho g V_{\text{钢管1}} \cdot \frac{l}{2} \sin \theta_1 + F_{y0} \cdot l \sin \theta_1 - m_{\text{钢管1}} g \cdot \frac{l}{2} \sin \theta_1 - F_{x0} \cdot l \cos \theta_1 = 0 \quad (6)$$

(3)第 2 根钢管:

竖直方向受力平衡:

$$\rho g V_{\text{钢管2}} + F_{y1} - m_{\text{钢管2}} g - F_{y2} = 0 \quad (7)$$

水平方向受力平衡:

$$F_{x2} - F_{x1} = 0$$

(8)

力矩平衡:

$$\rho g V_{\text{钢管2}} \cdot \frac{l}{2} \sin \theta_2 + F_{y1} \cdot l \sin \theta_2 - m_{\text{钢管2}} g \cdot \frac{l}{2} \sin \theta_2 - F_{x1} \cdot l \cos \theta_2 = 0 \quad (9)$$

(4)第 3 根钢管:

竖直方向受力平衡:

$$\rho g V_{\text{钢管3}} + F_{y2} - m_{\text{钢管3}} g - F_{y3} = 0 \quad (10)$$

水平方向受力平衡:

$$F_{x3} - F_{x2} = 0 \quad (11)$$

力矩平衡:

$$\rho g V_{\text{钢管3}} \cdot \frac{l}{2} \sin \theta_3 + F_{y2} \cdot l \sin \theta_3 - m_{\text{钢管3}} g \cdot \frac{l}{2} \sin \theta_3 - F_{x2} \cdot l \cos \theta_3 = 0 \quad (12)$$

(5)第 4 根钢管:

竖直方向受力平衡:

$$\rho g V_{\text{钢管4}} + F_{y3} - m_{\text{钢管4}} g - F_{y4} = 0 \quad (13)$$

水平方向受力平衡:

$$F_{x3} - F_{x4} = 0 \quad (14)$$

力矩平衡：

$$\rho g V_{\text{钢管4}} \cdot \frac{l}{2} \sin \theta_4 + F_{y3} \cdot l \sin \theta_4 - m_{\text{钢管4}} g \cdot \frac{l}{2} \sin \theta_4 - F_{x3} \cdot l \cos \theta_4 = 0 \quad (15)$$

(6)钢桶：

竖直方向受力平衡：

$$\rho g V_{\text{钢桶}} + F_{y4} - m_{\text{钢桶}} g - m_{\text{重物球}} g - F_{y5} = 0 \quad (16)$$

水平方向受力平衡：

$$F_{x4} - F_{x5} = 0 \quad (17)$$

力矩平衡：

$$\rho g V_{\text{钢桶}} \cdot \frac{l}{2} \sin \theta_5 + F_{y4} \cdot l \sin \theta_5 - m_{\text{钢桶}} g \cdot \frac{l}{2} \sin \theta_5 - m_{\text{重物球}} g \cdot \frac{h}{2} \sin \theta_5 - F_{x4} \cdot l \cos \theta_5 = 0$$

(18)

六、锚链的静力分析——悬链线方程

悬链线是一种具有均匀质地、完全柔性、能够无限延伸的链或索自由悬挂于两点时所形成的曲线。由于锚链本身存在拉伸且会受到流体的作用，一般活动式平台的锚链与理论上的悬链线某些方面存在差异，在使用悬链线方程描述锚链的特性时，忽略水流和浪潮对锚链产生的动力，不考虑锚链本身的弹性拉伸等因素的影响，以便能够更好的对锚链的形状进行拟合，而且能够很好的计算出悬链线的长度和锚链上端的张力。

1.建立悬链线直角坐标系

建立悬链线直角坐标系，原点建在锚链恰离开水平面时点，其中 T_0 表示该点所受的力，与水平方向夹角为 α ， K 表示 T_0 水平方向上的分力， T_1 表示悬链上端所受的力。

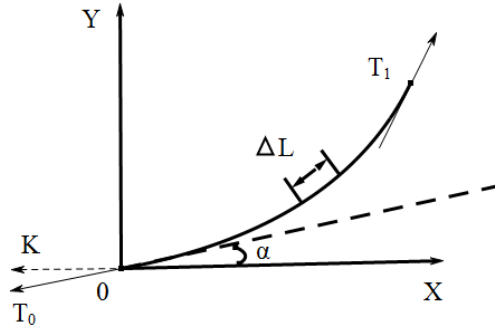


图 5 悬链线平面直角坐标系

2.建立悬链线方程

任取悬链线长度为 ΔL 的微元,如图 5 中所示的 ΔL ,该微元受力情况如图 6 所示。

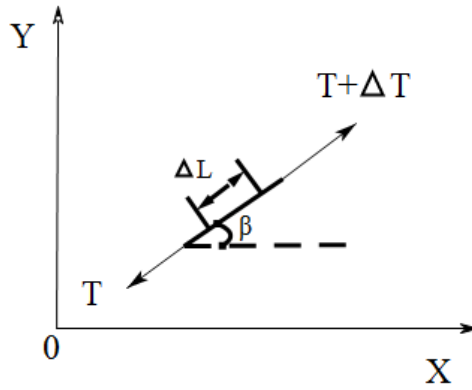


图 6 微元受力分析

微元两端张力为 T 和 $T + \Delta T$,其作用线与 x 轴成 β 角,水中自重为 $q\Delta L$, q 为锚链单位长度的质量。张力 $T + \Delta T$ 可以表示成关于悬链线长 L 的连续函数,那么二者在 x 、 y 轴上的投影也为连续函数,把这两个投影分别展开成泰勒级数,并略去二阶微量后,可得到

张力 $T + \Delta T$ 在 x 轴上的投影为:

$$T \cos \beta + \frac{d(T \cos \beta)}{dL} \cdot \Delta L \quad (19)$$

在 y 轴上的投影为:

$$T \sin \beta + \frac{d(T \sin \beta)}{dL} \cdot \Delta L \quad (20)$$

微元的受力平衡方程式为:

$$\sum F_x = T \cos \beta + \frac{d(T \cos \beta)}{ds} \cdot \Delta L - T \cos \theta \beta = 0 \quad (21)$$

$$\Sigma F_y = T \sin \beta + \frac{d(T \sin \beta)}{dL} \cdot \Delta L - T \sin \beta - q \cdot \Delta L = 0 \quad (22)$$

由式(21)、(22)，我们可以得出如下形式的微分方程：

$$y'' = \frac{1}{p} \sqrt{1 + y'^2} \quad (23)$$

式中： $p = \frac{K}{q}$ ， K 表示 T_0 的水平分力， q 表示锚链单位长度的质量。

由图 5 我们还还可以得出以下关系式：

$$y(0) = 0 \quad (24)$$

$$y'(0) = \tan \beta \quad (25)$$

利用式(24)、(25)两个边界条件求解微分方程(23)，可得一般状态下的悬链线方程为：

$$y = p \cdot ch \frac{x}{p} + \ln(\tan \alpha + \sec \alpha) - p \cdot \sec \alpha \quad (26)$$

其中，

y 表示悬链线在竖直方向上的投影高度；

x 表示悬链线在水平方向上的投影长度；

$p = \frac{K}{q}$ ， K 表示 T_0 的水平分力， q 表示锚链单位长度的质量；

α 表示悬链线下端所受力与 x 轴的夹角。

根据临界条件 $L(0) = 0$ ，积分便可得到悬链线的长度 L 的表达式：

$$\begin{aligned} dL &= \sqrt{1 + y'^2} dx \\ &= \sqrt{1 + sh^2 \left[\frac{x}{p} + \ln(\tan \alpha + \sec \alpha) \right]} dx \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} L &= \int dL \\ &= p \cdot sh \left[\frac{x}{p} + \ln(\tan \alpha + \sec \alpha) \right] - p \cdot \tan \alpha \end{aligned} \quad (28)$$

其中，

L 表示悬链线的长度；

y 表示悬链线在竖直方向上的投影高度；

x 表示悬链线在水平方向上的投影长度；

$p = \frac{K}{q}$, K 表示 T_0 的水平分力, q 表示锚链单位长度的质量；

α 表示悬链线下端所受力与 x 轴的夹角。

悬链线的张力 T 的表达式为:

$$T = K \cdot \sqrt{1 + y'^2} = K \cdot ch \left[\frac{x}{a} + \ln(\tan \alpha + \sec \alpha) \right] \quad (29)$$

其中,

L 表示悬链线的长度；

y 表示悬链线在竖直方向上的投影高度；

x 表示悬链线在水平方向上的投影长度；

$p = \frac{K}{q}$, K 表示 T_0 的水平分力, q 表示锚链单位长度的质量；

α 表示悬链线下端所受力与 x 轴的夹角。

七、不同风速下系泊系统各项指标求解

假设海水静止,也就是说忽略水流对系泊系统的作用力,理论上,系泊系统在风速为 0 的情况下,整体处于竖直状态,锚链拖地,如图 7 中的状态 1 所示。

一定风向下,风速逐渐增大,浮标因受到风的推力发生运动,锚链逐渐脱离海床,从状态 1 到状态 2,再到状态 3,直至系泊系统达到平衡,整体处于静止状态,如图 7 中状态 4 所示。

一定风向下,固定的风速使得系泊系统发生偏移,风速较小时,整体偏移程度较小,钢管、钢桶与竖直方向偏角较小,相反,风速较大时,钢管、钢桶与竖直方向的夹角则会变大,此时需要增加重物球调节钢桶的倾角(钢桶与竖直方向的夹角),使得钢桶的倾角小于 5 度,保证钢桶内的水声通讯设备的效果在理想的范围内。

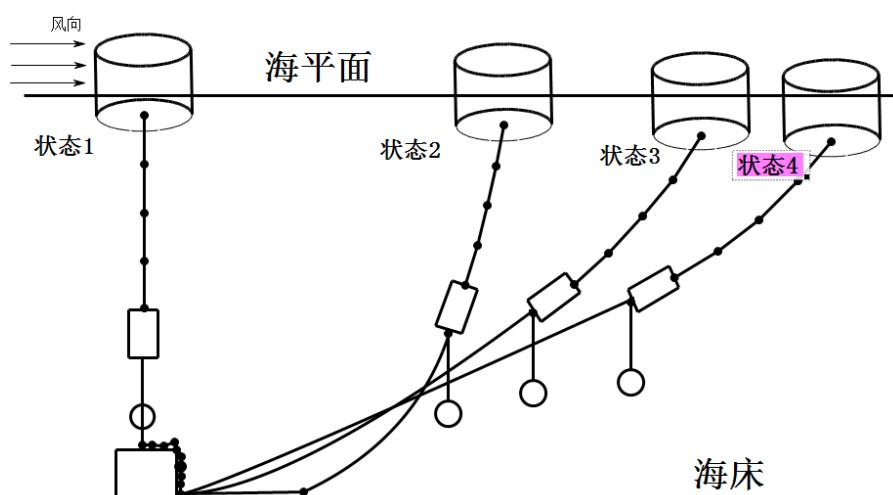


图 7 系泊系统运动示意图

在章节五中，我们讨论了第一根钢管加浮标、四根钢管和钢桶的受力情况，得出每个组件水平方向和竖直方向的受力平衡方程。选取每个组件的下端作为力矩平衡点，进行多力矩平衡分析，得出每个组件的力矩平衡方程。采用公式迭代法建立起吃水深度 h 与钢管、钢桶竖直方向夹角 (θ_1 、 θ_2 、 θ_3 、 θ_4 、 θ_5) 的关系式。这里，我们提出一个重要假设，假设钢桶下方所受锚链的拉力与钢桶的方向平行，也即该拉力与竖直方向的夹角等于钢桶与竖直方向上的夹角 θ_5 。若将钢桶以上部分视作一个整体，钢桶以下部分视作另一个整体，便可以将钢桶下方节点，也就是图 4 中的节点 5 视作连接上下两个部分的关键节点。这一重要假设有利于我们寻找解题的突破口，将吃水深度、各组件的倾角与锚链的悬链线方程建立联系，进而求解出不同风速下钢桶和各节钢管的倾斜角度 (θ_1 、 θ_2 、 θ_3 、 θ_4 、 θ_5)、锚链形状、浮标的吃水深度 S 和游动区域 R 。

1. 风速为 $12m/s$ 时系泊系统各项指标求解

选用的重物球的质量为 $1200kg$ ，在风速为 $12m/s$ 的情况下，我们在计算前可以粗略估测到此时的风速应不足以使系泊系统整体发生大的偏移，也就是说。钢管和钢桶的倾角（它们与竖直方向上的夹角）应该不是很大。

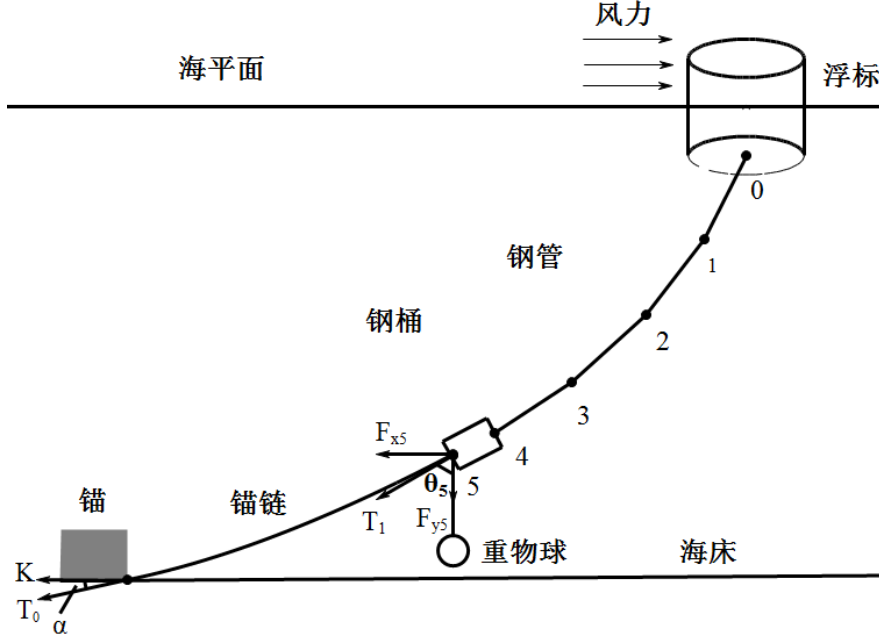


图 7 节点 5 受力分解图

如图 7 所示，钢桶下端所受力 T_1 的方向与钢桶倾斜的方向一致，故 T_1 与竖直方向的夹角与钢桶相同，为 θ_5 。将 T_1 分解成水平方向的分力 F_{x5} 、竖直方向的分力 F_{y5} ，由于锚链整体受力平衡，则其上各种水平分量的合力为 0。换言之可表示为，锚链下端所受张力 T_0 在水平方向的分力 K 与 F_{x5} 大小相等，方向相反，即：

$$K = F_{x5} \quad (30)$$

对于锚而言，锚水平方向受力平衡，即：

$$f_{\text{静}} = K \quad (31)$$

其中， $f_{\text{静}}$ 表示海床对锚的静摩擦力。

将系泊系统看成一个整体，整体水平方向受力平衡，近海风载荷 $F_{\text{风}}$ 与锚的静摩擦力 $f_{\text{静}}$ 相等，即：

$$F_{\text{风}} = f_{\text{静}} \quad (32)$$

由平衡方程(30)、(31)、(32)，我们可以推出：

$$F_{\text{风}} = F_{x5} \quad (33)$$

由于风力 F_{x5} 与吃水深度 S 有关, 锚链上端受力的水平分力 F_{x5} 与钢桶在竖直方向的夹角有关, 所以平衡方程(33)建立起吃水深度 S 与钢桶夹角 θ_5 的函数关系。

由于海水深度 18 米, 用倾角、悬链线高度 y 、吃水深度 S 表示海水深度为:

$$S + \cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3 + \cos \theta_4 + \cos \theta_5 + y = 18 \quad (34)$$

联立受力平衡方程和力矩平衡方程(1)~(18), 悬链线方程(26)、(27)、(28)、吃水深度 S 与钢桶夹角 θ_5 的函数关系式(33), 和海水高度表达式(34), 可解出:

①悬链线宽度 $x = 9.3958m$ 、悬链线高度 $y = 12.178m$;

②近海风载荷 $F_{\text{风}} = 218.52N$;

③ $\alpha = 9.5285$ 度;

除此之外, 还可以得出钢桶和各节钢管的倾斜角度、浮标的吃水深度、游动区域以及锚链的大致形状。钢桶和各节钢管的倾斜角度、浮标的吃水深度、游动区域具体数值见表 2。

表 2 海面风速为 12m/s 时待求参数值

指标	θ_1 (度)	θ_2 (度)	θ_3 (度)	θ_4 (度)	θ_5 (度)	S (米)	R (米)
数值	0.8366	0.841	0.8454	0.8499	1.9959	0.786	9.4887

表 2 中, θ_i 表示第 i 根钢管的倾角, 即钢管与竖直方向的夹角, 其中 $i = 1, 2, 3, 4$;

θ_5 表示钢桶的倾角, 即钢桶与竖直方向的夹角;

S 表示浮标的吃水深度;

R 表示浮标的游动半径。

对于浮标而言, 因为风的速度恒定, 所以悬浮在海中的浮标不论向其周围任何方向游动, 它受力平衡点所组成的轨迹应当是一个圆。所以在已知浮标游动半径 R 的情况下, 浮标的游动区域便是以 $R = 9.4887m$ 为半径的圆形区域。

根据悬链线下端与水平方向的夹角 α 、悬链线宽度 x 、悬链线高度 y , 我们可以大致画出浮标的形状如图 8 所示。

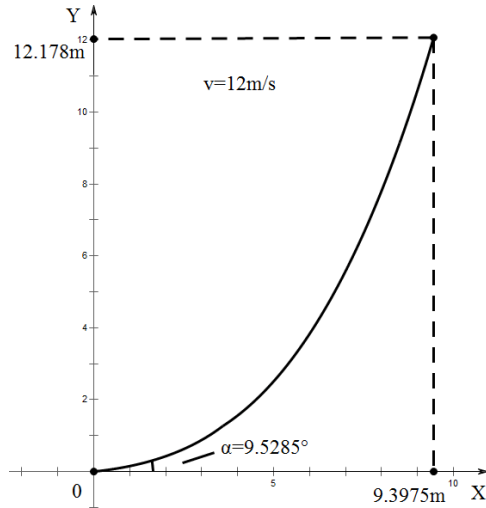


图 8 海风速度为 12m/s 时锚链形状

2. 风速为 24m/s 时系泊系统各项指标求解

选用的重物球的质量为 1200kg，在风速为 24m/s 的情况下，我们在计算前可以粗略估测到此时的风速会使得重物球的作用开始发挥，钢桶因重物球的作用倾角可能还是会很小，而钢管的倾角较之 12m/s 时倾角会有所增加。

按照风速为 12m/s 求系泊系统各项指标的思路，我们计算出

①悬链线宽度 $x=14.057m$ 、悬链线高度 $y=12.0320m$ ；

②近海风载荷 $F_{\text{风}}=732.96N$ ；

③ $\alpha=16.53$ 度；

除此之外，还可以得出钢桶和各节钢管的倾斜角度、浮标的吃水深度、游动区域以及锚链的大致形状。钢桶和各节钢管的倾斜角度、浮标的吃水深度、游动区域具体数值见表 3。

表 3 海面风速为 24m/s 时待求参数值

指标	θ_1 (度)	θ_2 (度)	θ_3 (度)	θ_4 (度)	θ_5 (度)	S (米)	R (米)
数值	1.9848	1.9922	1.9996	2.0071	2.8236	0.982	15.2455

表 3 中， θ_i 表示第 i 根钢管的倾角，即钢管与竖直方向的夹角，其中 $i=1,2,3,4$ ；

θ_5 表示钢桶的倾角，即钢桶与竖直方向的夹角；

S 表示浮标的吃水深度；

R 表示浮标的游动半径。

在已知浮标游动半径 R 的情况下，浮标的游动区域便是以 $R=15.2455m$ 为半径的圆形区域。

根据悬链线下端与水平方向的夹角 α 、悬链线宽度 x 、悬链线高度 y ，我们可以大致画出浮标的形状如图 9 所示。

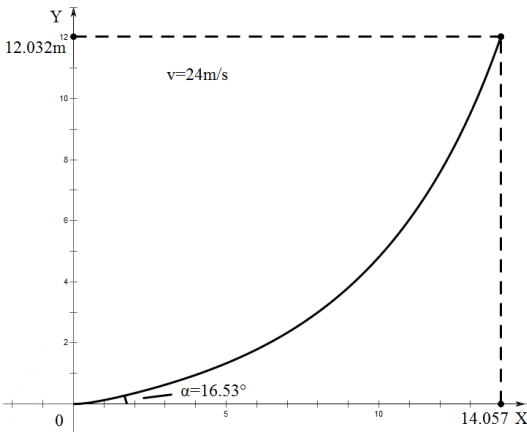


图 9 海风速度为 24m/s 时锚链形状

3.风速为 36m/s 时系泊系统各项指标求解

选用的重物球的质量为 1200kg，在风速为 36m/s 的情况下，此时我们要考虑的问题是锚链下端所受力与水平方向的夹角是否会大于 16 度，我们应找到该角度等于 16 度时同等重物球时所能承受的最大风速。

按照风速为 12m/s 求系泊系统各项指标的思路，我们计算出：

- ①悬链线宽度 $x=26.8341m$ 、悬链线高度 $y=13.728m$ ；
- ② $\alpha=8.2279$ 度；

除此之外，还可以得出钢桶和各节钢管的倾斜角度、浮标的吃水深度、游动区域以及锚链的大致形状。钢桶和各节钢管的倾斜角度、浮标的吃水深度、游动区域具体数值见表 4。

表 4 海面风速为 36m/s 时待求参数值

指标	θ_1 (度)	θ_2 (度)	θ_3 (度)	θ_4 (度)	θ_5 (度)	S (米)	R (米)
数值	16.6491	19.6491	20.0822	20.3057	80.3183	0.5240	30.1863

表 4 中， θ_i 表示第 i 根钢管的倾角，即钢管与竖直方向的夹角，其中 $i=1,2,3,4$ ；

θ_5 表示钢桶的倾角，即钢桶与竖直方向的夹角；

S 表示浮标的吃水深度；

R 表示浮标的游动半径。

在已知浮标游动半径 R 的情况下，浮标的游动区域便是以 $R=13.175m$ 为半径的圆形区域。

根据悬链线下端与水平方向的夹角 α 、悬链线宽度 x 、悬链线高度 y ，我们可以大致画出浮标的形状如图 10 所示。

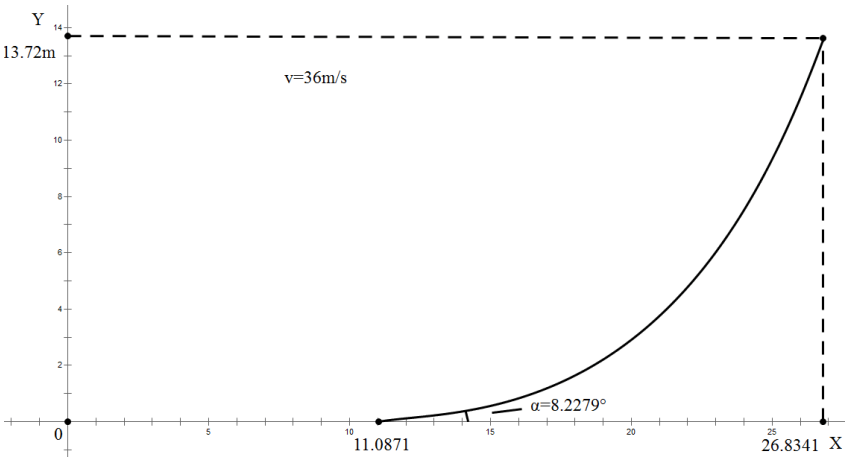


图 10 海风速度为 36m/s 时锚链形状

从表 4 中的数据和图 10 中锚链的形状我们发现了问题。表 4 中我们可以看到钢桶的倾角 θ_5 明显非常大，很不合理。而浮标的游动半径 R 居然长达 30.1863m，显然长于系泊系统的总长度。海风速度为 24m/s 时，锚链末端与锚的链接处的切线方向与海床的夹角 $\alpha=16.53$ 度，超过 16 度，锚会被拖行，致使节点移位丢失。由于悬链线方程是以未发生移动时的锚为原点建立的，而当锚链末端与锚的链接处的切线方向与海床的夹角超过 16 度时，悬链线方程因为原点位置不改变，发生位移的系泊系统中的悬链线便不能用原方程进行表示，所以风速大于 24m/s 时，或者说风速为 36m/s 时，利用悬链线方程计算出的系泊系统各参数会产生较大误差。

八、重物球质量的调节

在章节七中，对于不同的海风速度，将浮标的吃水深度、钢管和钢桶的倾角

和锚链的悬链线方程相结合，解出钢桶和各节钢管的倾斜角度、浮标的吃水深度和游动区域半径，还可以刻画出锚链形状。在风速逐渐增大的过程中，锚链末端与锚的链接处的切线方向与海床的夹角在 24m/s 的时候便已超过 16 度，使得锚被拖动，致使节点位移无效。为了解决类似的夹角或倾角过大的问题，可以调节重物球的质量，使得钢桶的倾斜角度不超过 5 度，锚链在锚点与海床的夹角不超过 16 度。

在海面风速为 36m/s 的情况下，钢桶的倾角明显大于 5 度，如表 4 中 θ_5 所示，此时，通讯系统的效果非常糟糕，因此需要在钢桶下方增加重物球以调节钢桶倾角。

为此，我们按照下述方法对重物球的范围进行求解：

- ①约束条件：钢桶的倾角 $\theta_5 \leq 5$ 度且锚链在锚点与海床的夹角 $\alpha \leq 16$ 度；
- ②重物球的质量在[1200,8000]进行遍历搜索；
- ③对于每一个确定的重物球的质量，对吃水深度 S 在[0,2]进行遍历搜索；
- ④建立吃水深度 S 与钢桶的倾角 θ_5 和锚链在锚点与海床的夹角 α 的函数关系式；
- ⑤重物球质量 8000 作为重物球质量下线 M_L ，重物球质量 1200 作为重物球质量上线 M_H ，如果给定的重物球质量 $M_0 \leq M_L$ ，令 $M_L = M_0$ ；如果给定的重物球质量 $M_0 \geq M_H$ ，令 $M_H = M_0$ ；如此迭代下去；
- ⑥输出 M_L 、 M_H ，结束。

根据上面的遍历搜索方法，最终可得到重物球质量的最大值 $= M_H$ ，为 5585kg，此时的钢桶的倾角 $\theta_5 = 5$ 度，吃水深度 $S = 1.063m$ ；重物球质量的最小值 $= M_L$ ，为 1830kg，此时的钢桶的倾角 $\theta_5 = 4.972$ 度，锚链在锚点与海床的夹角 $\alpha = 14.4928$ 度，吃水深度 $S = 0.766m$ 。

在对重物球的质量进行遍历求解的过程中，我们根据大量的数据分析，在海水静止，只考虑风速的假设条件下得到如下定理：

定理 1：在一定范围内，钢桶的倾角 θ_5 随重物球质量的增加而增加；当重物球质量增大到一定程度时，钢桶的倾角 θ_5 又会随重物球质量的增加而减小。

九、考虑风力、水流力和水深情况下的系泊系统设计

1.考虑水流力的受力平衡方程和力矩平衡方程的建立

借助上文章节四中所应用的受力分析方法，将浮标与钢管 1 作为整体进行受力和力矩分析，基于钢管和钢桶受力情况的类似性，将钢桶和钢管视作系泊系统的上半部分，将情况特殊的锚链视作系泊系统的下半部分，而钢桶下端的受力点作为连接系泊系统上下两部分的承接点。基于上文中的讨论，加入水流力对浮标、钢管、钢桶的作用力，建立受力平衡方程和力矩平衡方程如下：

①第 1 根钢管加浮标：

竖直方向受力平衡：

$$\rho g V_{\text{钢管1}} + \rho g V_{\text{浮标}} - m_{\text{浮标}} g - m_{\text{钢管1}} g - F_{y1} = 0 \quad (35)$$

水平方向受力平衡：

$$F_{\text{风}} + F_{\text{水0}} + F_{\text{水1}} - F_{x1} = 0 \quad (36)$$

力矩平衡：

$$\begin{aligned} F_{\text{水0}} \left(l \cos \theta_1 + \frac{1}{2} S \right) + F_{\text{水1}} \cdot \frac{l}{2} \cos \theta_1 + m_{\text{钢管1}} g \cdot \frac{l}{2} \sin \theta_1 + m_{\text{浮标}} g \cdot l \sin \theta_1 + \\ F_{\text{风}} \left(l \cos \theta_1 + S + \frac{H-S}{2} \right) = \rho g V_{\text{钢管1}} \cdot \frac{l}{2} \sin \theta_1 + \rho g V_{\text{浮标}} \cdot l \sin \theta_1 \end{aligned} \quad (37)$$

②第 i 根钢管 ($i=1,2,3,4$)， $i=0$ 时代表浮标：

竖直方向受力平衡：

$$\rho g V_{\text{钢管}i} + F_{y0} - m_{\text{钢管}i} g - F_{yi} = 0 \quad (38)$$

水平方向受力平衡：

$$F_{\text{风}} + F_{\text{水}i} - F_{xi} = 0 \quad (39)$$

力矩平衡：

$$\rho g V_{\text{钢管}i} \cdot \frac{l}{2} \sin \theta_i + F_{yi} \cdot l \sin \theta_i - m_{\text{钢管}i} g \cdot \frac{l}{2} \sin \theta_i - F_{\text{水}i} \cdot \frac{l}{2} \cos \theta_i - F_{xi} \cdot l \cos \theta_i = 0 \quad (40)$$

钢桶：

竖直方向受力平衡：

$$\rho g V_{\text{钢桶}} + F_{y4} - m_{\text{钢桶}} g - m_{\text{重物球}} g - F_{y5} = 0 \quad (41)$$

水平方向受力平衡：

$$F_{x4} + F_{\text{水1}} - F_{x5} = 0 \quad (42)$$

力矩平衡：

$$\begin{aligned} F_{\text{水5}} \cdot \frac{l}{2} \cos \theta_5 + m_{\text{钢桶}} g \cdot \frac{l}{2} \sin \theta_5 + m_{\text{重物球}} g \cdot \frac{h}{2} \sin \theta_5 + \\ F_{x4} \cdot l \cos \theta_5 = \rho g V_{\text{钢桶}} \cdot \frac{l}{2} \sin \theta_5 + F_{y4} \cdot l \sin \theta_5 \end{aligned} \quad (43)$$

2.重物球质量的选择

在重物球质量的选择方面，理论上，重物球的重量应该对 $16m \sim 20m$ 不同的水深均适用。

我们首先考虑不同水深的情况下，钢桶倾角 θ_5 与重物球重力的关系，见图 11、12。为了将钢桶倾角 θ_5 控制在 5 度以内，此时重物球的重力又恰好适用于 $16m \sim 20m$ 内的不同水域，这样的点出现在图 11 和图 12 的左边。因此，我们选取重物球重量为 $10000N$ 作为标准，用于后面的计算。

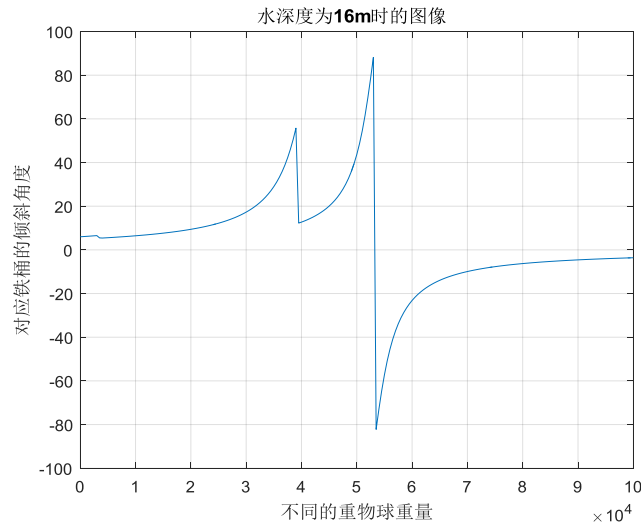


图 11 水深 16 米钢桶倾角与重物球重力的关系

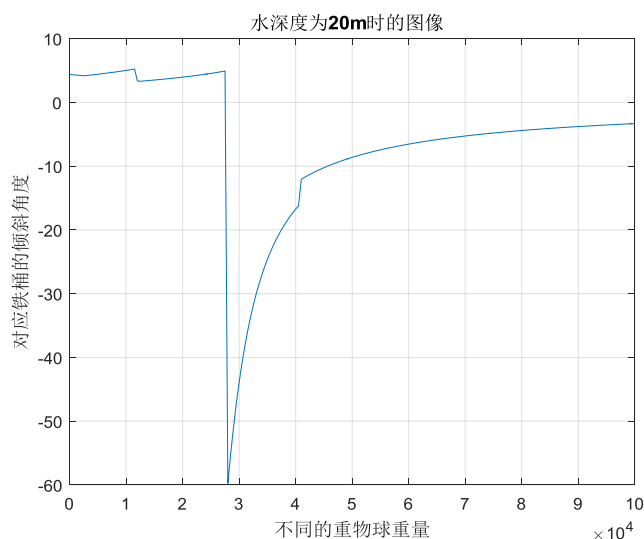


图 12 水深 20 米钢桶倾角与重物球重力的关系

3. 钢桶钢管的倾角、锚链形状、浮标的吃水深度和游动区域

在确定了重物球质量后，将考虑了水流力的受力平衡方程和力矩平衡方程与章节六的悬链线方程相结合，为了寻找到浮标的游动区域，考虑使风向和水流向方向相同，此时对应的浮标的游动区域应是最大的。这样便可很快的求出此时钢桶钢管的倾角、浮标的吃水深度和游动区域，结果如表 5 所示。

表 5 风向和水向同方向时各项指标的具体数值

指标	θ_1 (度)	θ_2 (度)	θ_3 (度)	θ_4 (度)	θ_5 (度)	S (米)	R (米)
数值	0.13	0.1302	0.1304	0.1306	0.4887	1.9410	7.5232

表 5 中， θ_i 表示第 i 根钢管的倾角，即钢管与竖直方向的夹角，其中 $i=1,2,3,4$ ；

θ_5 表示钢桶的倾角，即钢桶与竖直方向的夹角；

S 表示浮标的吃水深度；

R 表示浮标的游动半径。

此外，我们还可以求出：

①悬链线在竖直方向上的投影长： $y = 9.0515m$

②悬链线在水平方向上的投影长： $x = 6.5056m$

③ $\alpha = 5.0340$ 度

④近海风载荷: $F_{\text{风}} = 95.58N$

⑤水流力: $F_{\text{水}} = 3266.7N$

依据①、②、③, 可以画出锚链的形状, 如图 13 表示。

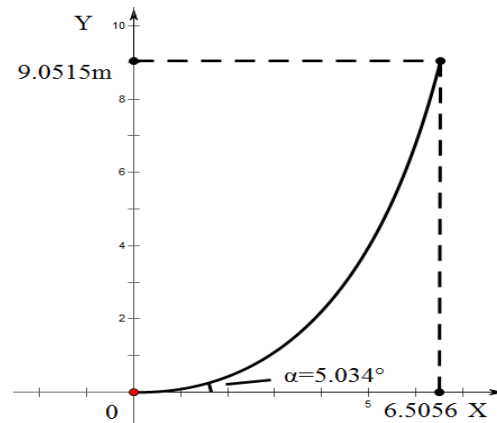


图 13 风力与水流力同向时的锚链形状

十、模型的评价与改进

1.模型的优点

(1)本文在对系泊系统进行受力分析时, 考虑到钢桶和各节钢管受力情况的类似性, 便把他们放在一起进行类似分析。

(2)选取钢桶下端的受力点作为连接钢管和锚链的作用点, 起到了承上启下的作用。

(3)考虑到浮标本身倾角为 0, 将其与钢管 1 视作整体进行受力平衡分析和多力矩平衡分析, 有效的在吃水深度和倾角间建立了联系。

(4)本文通篇将系泊系统中的各个力均分解为水平方向的和竖直方向上的, 避免了因如钢管两端受力方向未知而对将来的求解造成的困扰。此外, 考虑到端点力方向的不确定性, 应用多力矩平衡分析法较之简单的受力分析所构造的平衡方程更科学。

2.模型的缺点

在最后考虑风力、水流力和水深的系泊系统构建中, 仅仅考虑了风向与水流方向相同的极端情况, 为对普通情况的系泊系统进行具体分析。

3.模型的改进

应用包括水流力在内的受力平衡方程和力矩平衡方程，找出水流力与风向、水深、吃水深度的关系，结合悬链线方程，分析不同情况下的钢桶和钢管的倾斜角度、锚链形状、浮标吃水深度和游动区域范围。

参考文献

- [1] 胡灵斌，唐军. 悬链线方程求解及其应用. 船舶，2004 年 2 月，第 1 期.
- [2] 王丹，刘佳欣. 一般状态下悬链方程的应用. 船海工程，2007 年 6 月，第 36 卷，第 3 期.
- [3] 潘斌，高捷，陈小红，陈家鼎. 浮标系泊系统静力计算. 重庆交通学院学报，1997 年 3 月，第 16 卷，第 1 期.
- [4] 袁梦，范菊，朱仁传，缪国平. 基于悬链线理论的系泊系统势能. 上海交通大学学报，2001 年 4 月，第 45 卷，第 4 期.
- [5] 王磊，单点系泊系统的动力学研究. 中国海洋大学硕士学位论文. 2012 年.
- [6] 郑瑞杰. 锚泊系统动力分析 . 大连理工大学硕士学位论文. 2006 年.
- [7] 唐友刚，张素侠，张若瑜，刘海笑. 深海系泊系统动力特性研究进展. 海洋工程，2008 年 2 月，第 26 卷，第 1 期.
- [8] 刘海笑，黄泽伟. 新型深海系泊系统及数值分析技术. 海洋技术，2007 年 6 月，第 26 卷，第 2 期.
- [9] 邢富冲. 悬线弛垂度的计算方法. 数学的实践与认识，2004 年 11 月，第 34 卷，第 11 期.
- [10] 杜度，李方，马骋，张纬康. 潮流与风对单点系泊系统运动稳定性的影响研究. 海军工程大学学报，2007 年 10 月，第 19 卷，第 5 期.

附录

附录 1: 计算不同风速下钢桶钢管的倾角、锚链形状和浮标的游动区域(MATLAB)

```
E0=1000;  
H=0;  
for h=[0.5:0.001:1]  
g=9.8;  
p=1.025*1000;  
M1=1000*g;  
B2=p*g*0.025*0.025*pi;  
M2=10*g;  
B6=p*g*0.15*0.15*pi;
```

```

M6=100*g;
M0=3000*g;
L0=22.05;
M7=L0*7*g;
M8=600*g;
B1=(p*g*1*1*pi)*h;
V=36;
F=0.625*2*(2-h)*(V^2);
a=F/(7*9.8);
F0=B1-M1;
F1=F0+B2-M2;
F2=F1+B2-M2;
F3=F2+B2-M2;
F4=F3+B2-M2;
F5=F4+B6-M0-M6;
G1=F/(F0+0.5*B2-0.5*M2);
G2=F/(F1+0.5*B2-0.5*M2);
G3=F/(F2+0.5*B2-0.5*M2);
G4=F/(F3+0.5*B2-0.5*M2);
G5=F/(F4+0.5*B6-0.5*M0-0.5*M6);
m1=atan(G1);
m2=atan(G2);
m3=atan(G3);
m4=atan(G4);
m5=atan(G5);
y1=18-cos(m1)-cos(m2)-cos(m3)-cos(m4)-cos(m5)-h;
y2=sqrt((F5/(cos(m5)*F))^2-1)
if y2<18    %ym=[ym y2];
E=abs(y1-y2);
    if E<E0
        E0=E;
        H=h;
    end
end
end
E0
H

```

附录 2：调节重物球质量 (MATLAB)

```

E0=1000;
H=0;
g=9.8;
p=1.025*1000;
M1=1000*g;
B2=p*g*0.025*0.025*pi;

```

```

M2=10*g;
B6=p*g*0.15*0.15*pi;
M6=100*g;
L0=22.05;
M7=L0*7*g;
M8=600*g;
V=36;
MH=1200;
ML=6000;
for M0=[5000:1:5700]
    M0;
    for h=[0.5:0.001:1]
        B1=(p*g*1*1*pi)*h;
        F=0.625*2*(2-h)*(V^2);
        a=F/(7*9.8);
        F0=B1-M1;
        F1=F0+B2-M2;
        F2=F1+B2-M2;
        F3=F2+B2-M2;
        F4=F3+B2-M2;
        F5=F4+B6-M0-M6;
        G1=F/(F0+0.5*B2-0.5*M2);
        G2=F/(F1+0.5*B2-0.5*M2);
        G3=F/(F2+0.5*B2-0.5*M2);
        G4=F/(F3+0.5*B2-0.5*M2);
        G5=F/(F4+0.5*B6-0.5*M0-0.5*M6);
        m1=atan(G1);
        m2=atan(G2);
        m3=atan(G3);
        m4=atan(G4);
        m5=atan(G5);
        y1=18-cos(m1)-cos(m2)-cos(m3)-cos(m4)-cos(m5)-h;
        y2=sqrt((F5/(cos(m5)*F))^2-1);
        if y2<18
            %ym=[ym y2];
            E=abs(y1-y2);
            if E<E0
                E0=E;
                H=h;
            end
        end
    end
end
E0;
H;

```

```

h=H;
B1=(p*g*1*1*pi)*h;
F=0.625*2*(2-h)*(V^2);
a=F/(7*9.8);
F0=B1-M1;
F1=F0+B2-M2;
F2=F1+B2-M2;
F3=F2+B2-M2;
F4=F3+B2-M2;
F5=F4+B6-M0-M6;
G1=F/(F0+0.5*B2-0.5*M2);
G2=F/(F1+0.5*B2-0.5*M2);
G3=F/(F2+0.5*B2-0.5*M2);
G4=F/(F3+0.5*B2-0.5*M2);
G5=F/(F4+0.5*B6-0.5*M0-0.5*M6);
m1=atan(G1);
m2=atan(G2);
m3=atan(G3);
m4=atan(G4);
m5=atan(G5);
t=abs(m5*180/pi)
y1=18-cos(m1)-cos(m2)-cos(m3)-cos(m4)-cos(m5)-h;
y2=sqrt((F5/(cos(m5)*F))^2-1);
n1=2*atan((2*L0*a + 2*(((L0^2 + a^2 - y^2)*(L0^2 + 9*a^2 - y^2))/4)^(1/2))/(L0^2 + 3*a^2 +
2*a*y - y^2));
n2=2*atan((2*L0*a - 2*(((L0^2 + a^2 - y^2)*(L0^2 + 9*a^2 - y^2))/4)^(1/2))/(L0^2 + 3*a^2 +
2*a*y - y^2));
aphla1=abs(n1*180/pi-90);
aphla2=abs(n2*180/pi-90);
if aphla1<aphla2
    n=aphla1;
else
    n=aphla2;
end
n;
if t<5
    if n<16
        if M0<=ML
            ML=M0;
        end
        if M0>=MH
            MH=M0;
        end
    end
end

```

end
end
ML;
MH;