Notes of CLF & CBF

Introductions

Control Lyapunov Function和Control Barrier Function常应用于safety-critical control problems。作用分别是stability和set invariance。

Method

对于一个时不变的control affine system，其形式为：

$$\dot{x} = f(x) + g(x)us$$

其中$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，$g : \mathbb{g}^n \to \mathbb{R}^{n*m}$，假设$x_e = 0$是平衡点。

CLF

设$V(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$是一个连续可微的函数，如果存在常数$c > 0$，有

（1）$\Omega_c := \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq c\}$，V(x)的一个sublevel set是有界的。

（2）$V(x) > 0$ for all $s \in \mathbb{R}^n \backslash \{x_e\}$，$\quad V(x_e) = 0$（正定）

（3）$\inf_{u \in U} \dot{V}(x, u) < 0$ for all $x \in \Omega_c \backslash \{x_e\}$（负定）

那么V(x)是一个Control Lyapunov Function，每个在Ω_c中的状态都会渐进稳定至x_e

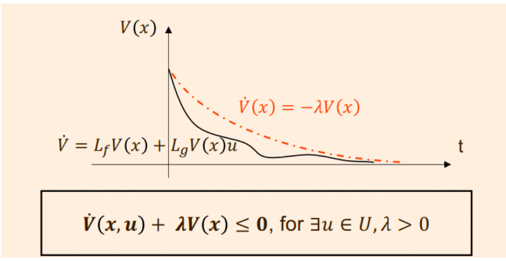
V(x)的微分可以表示为$\dot{V}(x, u) = \nabla V(x) \cdot \dot{x} = \nabla V(x) \cdot f(x) + \nabla V(x) \cdot g(x)u$
$= L_f V(x) + L_g V(x)u$

由于上面的式子只表示了CLF的稳定性，没有表达其稳定速度，于是有了Exponentially Stabilizing Control Lyapunov Function。

如果存在常数$\lambda > 0$，有

$$\inf_{u \in U} \dot{V}(x, u) + \lambda V(x) \leq 0$$

那么V(x)就是一个exponentially stabilizing CLF，λ是其decay rate的上界。



CBF

设$B(x) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$是一个连续可微方程，它的zero-superlevel set为C。对于所有$x \in \partial C$，$\nabla B(x) \neq 0$，上式中的C满足：

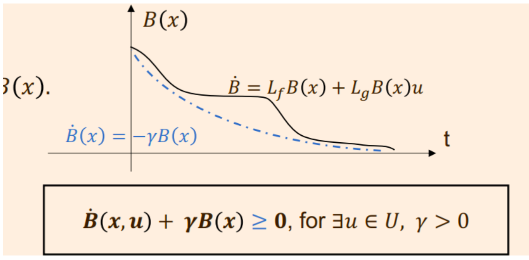
$$
\begin{aligned}
\mathcal{C} &= \{x \in D \subset \mathbb{R}^n : B(x) \geq 0\} \\
\partial\mathcal{C} &= \{x \in D \subset \mathbb{R}^n : B(x) = 0\} \\
\operatorname{Int}(\mathcal{C}) &= \{x \in D \subset \mathbb{R}^n : B(x) > 0\}
\end{aligned}
$$

如果存在一个扩展类$\mathcal{K}_\infty$函数α，满足：

$$\sup_{u \in U} [L_f B(x) + L_g B(x) u] + \alpha(B(x)) \geq 0$$

那么对于所有$x \in D$，$B(x)$是一个CBF，若符合上述的约束，那么集合C就是一个安全集合(safe set)。

常常将$\alpha()$取为常数γ，于是其就变为decay rate的下界。



在另一种情况下，若

$$\inf_{x \in \operatorname{Int}(\mathcal{C})} B(x) \geq 0, \quad \lim_{x \to \partial\mathcal{C}} B(x) = \infty$$

则control barrier function的条件变为：

$$\inf_{u \in U} [L_f B(x) + L_g B(x) u] \leq \alpha\left(\frac{1}{B(x)}\right)$$

这时候的cbf可能更符合某些情况。

CBF-CLF-QP

可以使用二次规划(QP)来解决CBF-CLF控制问题，cost如下所示

$$\underset{u\text{: control input } \delta\text{:slack variable}}{\operatorname{argmin}} \quad \left(u - u_{\text{ref}}\right)^T H \left(u - u_{\text{ref}}\right) + p\delta^2$$

满足以下约束：

$$
\begin{gathered}
L_f V(x) + L_g V(x) u + \lambda V(x) \leq \delta \\
L_f B(x) + L_g B(x) u + \gamma B(x) \geq 0 \\
u \in U
\end{gathered}
$$