学校代码：10730

分类号：O175　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　密级：公开

蘭州大學

硕　士　学　位　论　文

(学　术　学　位)

论文题目（中文）	二维特殊 Lagrangian 方程解的幂凸性
论文题目（外文）	Power convexity of solutions to a special Lagrangian equation in dimension two
作　者　姓　名	周歧
学　科　专　业	数学 • 基础数学
研　究　方　向	非线性椭圆偏微分方程
教　育　类　型	学历教育
指　导　教　师	张伟　副教授
论文工作时段	2022 年 3 月 至 2023 年 3 月
论文答辩日期	2023 年 5 月

校址：甘肃省兰州市城关区天水南路 222 号

二维特殊 Lagrangian 方程解的幂凸性

中 文 摘 要

对于给定凸区域上椭圆偏微分方程的边值问题, 边界的凸性是否会对解的凸性产生影响? 本文主要研究了二维特殊 Lagrangian 方程 Dirichlet 问题解的幂凸性. 关于完全非线性椭圆方程解的幂凸性问题, 之前已经知道了三维 2-Hessian 方程解的幂凸性, 我们现在给出了一个新的例子来继续充实这一主题. 证明的关键包含了微观凸性原理和形变方法. 具体地说, 本文主要结果如下:

令 Ω 为 $\mathbb{R}^2$ 中的有界光滑严格凸区域. 令 $\theta \in (0, \pi/2)$ 为常数. 设 $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ 为 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \arctan \lambda_1 + \arctan \lambda_2 = \theta & \text{在 } \Omega \text{ 中} \\ u = 0 & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \end{cases}$$

的唯一解, 其中 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ 为解的 Hessian 矩阵 D^2u 的特征值, 那么函数 $v = -\sqrt{-2u}$ 在 Ω 上是严格凸的.

关键词: 幂凸性; 特殊 Lagrangian 方程; 常秩定理

Power convexity of solutions to a special Lagrangian equation in dimension two

Abstract

Given an elliptic boundary value problem on a bounded convex domain in $\mathbb{R}^n$, does the solution inherit some convexity properties from the boundary? In this paper, we prove power convexity result of solution to Dirichlet problem of special Lagrangian equation in dimension two. This provides new example of fully nonlinear elliptic boundary value problem whose solution shares power convexity property previously only knew for 2-Hessian equation in dimension three. The key ingredients consist of microscopic convexity principles and deformation methods. More precisely, the main results of the paper are as follows.

Let Ω be a bounded, smooth, strictly convex domain in $\mathbb{R}^2$. Let $\theta \in (0, \pi/2)$ be a constant. Assume that $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ be the unique solution of Dirichlet problem

$$\begin{cases} \arctan \lambda_1 + \arctan \lambda_2 = \theta & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ are the eigenvalues of $D^2 u$. Then the function $v = -\sqrt{-2u}$ is strictly convex in Ω.

Key words: Power convexity; special Lagrangian equation; constant rank theorem

目　录

第一章 引言

对于给定 $\mathbb{R}^n$ 中有界凸区域上椭圆方程的边值问题, 我们想考虑边界的凸性是否会对解的凸性产生影响. 从上个世纪开始, 已经有很多人研究这一主题. 这个问题主要涉及到两个方面的内容: 分别是解的凸性和解的水平集的凸性. 本文主要讨论解的凸性问题. 接下来, 首先我们将回顾椭圆方程解的凸性问题的研究历史和现状, 然后简单回顾特殊 Lagrangian 方程的基本结果, 最后给出本文的主要结果.

1.1 椭圆偏微分方程解的凸性问题的研究历史和现状

凸性问题的研究由来已久, 早在上世纪二十年代, Caratheodory[2] 利用共形映射的方法证明了平面有界凸区域上 Green 函数的水平集是严格凸曲线. 1957 年, Gabriel[16] 得到了 3 维情形的相应结果. 随后, Lewis[32], Caffarelli-Spruck[14], Korevaar[28] 将 Gabriel 的方法推广到高维情形以及更一般的椭圆方程中. 关于解的水平集的凸性问题的讨论可以参见 [6, 19, 20, 35, 38, 49, 52].

关于解的凸性问题, 半个世纪以前, Makar-Limanov[39] 研究了扭转刚性问题, 他们得到如下结果

定理 1.1 (Makar-Limanov[39]) *令 Ω 为 $\mathbb{R}^2$ 中的有界光滑严格凸区域. 设 $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ 为 Dirichlet 问题*

$$\begin{cases} \Delta u = -2 & \text{在 } \Omega \text{ 中} \\ u = 0 & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上.} \end{cases} \tag{1.1}$$

的唯一解, 则函数 $v = -\sqrt{u}$ 在 Ω 上是严格凸的.

Acker-Payne-Philippin[1] 利用 Makar-Limanov 的方法研究了平面有界凸区域上 Laplace 算子第一 Dirichlet 特征函数的对数凹性, 即 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda_1 u = 0 & \text{在 } \Omega \text{ 中,} \\ u > 0 & \text{在 } \Omega \text{ 中,} \\ u = 0 & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上.} \end{cases}$$

的解 u 是对数凹的. 最近, Ma-Shi-Ye[36] 和 Jia-Ma-Shi[24] 利用这个技巧将扭转刚性问题和第一 Dirichlet 特征值问题解的凸性推广到高维情形.

上世纪八十年代, Korevaar[26, 27] 在一些拟线性椭圆方程解的凸性问题上有了一些突破. 具体而言, 设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一个有界凸区域, u 为相应边值问题的解, 他们引进测试函数

$$\mathcal{C}(x,y,\lambda)=u((1-\lambda)x+\lambda y)-(1-\lambda)u(x)-\lambda u(y), \tag{1.2}$$

其中 $(x,y,\lambda)\in\bar{\Omega}\times\bar{\Omega}\times[0,1]$. 显然 $\mathcal{C}(x,y,\lambda)$ 的非负性等价于 u 的凹性. 这种方法称为 Korevaar 凹性 (凸性) 极大值原理. 具体地说,

定理 1.2 (Korevaar[26]) *设 $u\in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$ 满足椭圆方程*

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(\nabla u)u_{ij}=f(u,\nabla u)\quad in\ \Omega,$$

其中函数 f 满足

$$\frac{\partial f}{\partial u}>0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\le 0.$$

则测试函数 (1.2) 不能在 $\bar{\Omega}\times\bar{\Omega}\times[0,1]$ 的内点处取得正的极大值.

后来, Kennington[25] 提出了一个改进版本, 可以得到更多的椭圆方程边值问题解的幂凹性. 特别地, Kennington 指出在高维情况下方程 (1.1) 解的 1/2 次幂是凹的, 且凹性指数 1/2 是最优的.

对于 p-Laplace 算子, 由于缺少解的正则性, 所以不能直接使用上面的凹性极大值原理. 但是根据合适的逼近理论, 也能够得到相应的凹性结果, 参见 [8, 41]. 1997 年, Alvarez-Lasry-Lions[3] 提出了一个新的方法, 即凸包络的方法, 能够建立 $\mathbb{R}^n$ 中有界凸区域上完全非线性二阶退化椭圆方程

$$F(x,u,\nabla u,D^2u)=0$$

粘性解的凸性. 具体地说,

定理 1.3 (Alvarez-Lasry-Lions[3]) *令 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中有界光滑凸区域, 设 $\mathcal{S}^n$ 为全体 $n\times n$ 阶实对称矩阵构成的集合, $F\in C(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathcal{S}^n)$ 为退化椭圆的, 即若 $A,B\in\mathcal{S}^n$, $A\ge B$, 则*

$$F(x,r,p,A)\le F(x,r,p,B).$$

设 $u\in C(\bar{\Omega})$ 满足方程

$$F(x,u(x),\nabla u(x),D^2u(x))=0\quad 在\ \Omega\ 中. \tag{1.3}$$

若 F 满足如下条件:

(1)F 满足逆凹条件, 即对任意的 $(x,r,p,Q)\in\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathcal{S}^n_{++}$, 其中 $\mathcal{S}^n_{++}$ 表示全体 $n\times n$ 阶实对称正定矩阵构成的集合, 有

$$(x,r,Q)\longmapsto F(x,r,p,Q^{-1})\text{为凹};$$

(2)F 满足比较原理, 即若 $u\in C(\bar{\Omega})$ 为方程 (1.3) 的下解, 下半连续函数 v 为方程 (1.3) 的上解, 则在 $\bar{\Omega}$ 中 $u\le v$.

则方程 (1.3) 的解 u 是凸的.

特别地, 他们给出了 [25, 26, 27] 中结果的新证明. 这个方法也被推广到直接处理某些椭圆边值问题解的凸性, 以及 [7, 22] 中半线性椭圆方程组解的凸性. 最近, Crasta-Fragalà[15] 证明了

$$\begin{cases}\Delta_\infty u=-1 & \text{在 } \Omega \text{ 中},\\ \quad u=0 & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}\end{cases}$$

的唯一解是 3/4 凹的, 并且得到解是 C^1 光滑的.

另外一个处理解的凸性问题的工具被称为微观凸性方法 (也被称为常秩定理). 这个方法首先是由 Caffarelli-Friedman[11] 针对二维情况下的半线性椭圆方程提出的. 随后, Korevaar-Lewis[29] 得到了高维情况下的结果. 再结合形变理论, 他们重新证明了扭转函数是 1/2 凹的以及第一 Dirichlet 特征函数是对数凹的.

接下来我们简要叙述常秩定理的基本原理. 对于给定凸区域 Ω 上的某个椭圆方程, 若方程的解是唯一的, 则先在球上证明相应方程的解是严格凸的, 然后将区域由球连续形变到给定的凸区域 Ω. 若在形变过程中的某个时刻, 解不是严格凸的, 当建立了常秩定理之后, 则解在整个区域 Ω 上处处非严格凸的. 再由边界凸性估计 ([11], [27]) 可知解在边界附近为严格凸的, 从而可以导出矛盾.

关于常秩定理的应用, 可以参见 [5, 12, 17, 18, 33, 37, 45, 46].

最后我们需要特别指出的是 [37] 和 [33], 作者研究了 3 维欧氏空间中涉及 2-Hessian 算子 Dirichlet 问题解的幂凸性. 具体地, 他们考虑了如下方程,

$$\begin{cases}\sigma_2(D^2u)=1 & \text{在 } \Omega\subset\mathbb{R}^3 \text{ 中},\\ \qquad u=0 & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上},\\ \qquad u<0 & \text{在 } \Omega \text{ 中},\end{cases}\tag{1.4}$$

和

$$\begin{cases} \sigma_2(D^2u) = \Lambda(-u)^2 & \text{在 } \Omega \subset \mathbb{R}^3 \text{ 中}, \\ u = 0 & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \\ u < 0 & \text{在 } \Omega \text{ 中}. \end{cases}$$

其中,

$$\sigma_2(D^2u(x)) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3, \quad \text{在 } \Omega \subset \mathbb{R}^3 \text{ 中},$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 为 $D^2u(x)$ 的特征值. 他们分别证明了 $-\sqrt{-u}$ 和 $-\log(-u)$ 在 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 上是严格凸的. 作为应用, Liu-Ma-Xu[33] 得到了关于 2-Hessian 算子特征值的 Brunn-Minkowski 不等式.

为了叙述的严谨性, 我们给出幂凸性的定义. 设 α 为正实数, u 为定义在有界凸区域 Ω 上的非负函数, 若 u^α 为 Ω 上的凸函数, 则称 u 为 α-凸的. 特别地, 当 u 为常数时, 我们称 u 为 α-凸的, 其中 $\alpha = +\infty$; 当 $\log u$ 为凸函数时, 我们称 u 为 0-凸的.

在本文中, 我们证明了一类新的完全非线性椭圆方程解的幂凸性, 即特殊 Lagrangian 方程. 这意味着, 在完全非线性椭圆方程解的幂凸性课题中, 继 [37] 之后, 我们提供了一个新的具体的例子.

1.2 特殊 Lagrangian 方程

接下来我们简要回顾特殊 Lagrangian 方程

$$\sum_{i=1}^{n} \arctan \lambda_i = \theta, \quad |\theta| < \frac{n\pi}{2}, \quad n \geq 2 \tag{1.5}$$

的基本结果, 其中 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 为解的 Hessian 矩阵 D^2u 的特征值.

方程 (1.5) 最开始出现在 Calibrated 几何 [21] 的研究中. 如果复数

$$(1 + \sqrt{-1}\lambda_1)(1 + \sqrt{-1}\lambda_2) \cdots (1 + \sqrt{-1}\lambda_n)$$

为常数或 θ 为常数时, 则 Lagrangian 图 $(x, \nabla u(x)) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 被称为特殊的, 并且 Lagrangian 图为特殊的当且仅当梯度图 $(x, \nabla u(x))$ 是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 中的一个极小曲面.

当 $|\theta| > (n-2)\pi/2$ 时, 水平集

$$\Gamma_\theta = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^n : \lambda \text{ 满足方程 } \sum_{i=1}^{n} \arctan \lambda_i = \theta,\ n \geq 2 \right\}$$

为凸的, 我们称 $\theta=(n-2)\pi/2$ 为临界的. 对于临界和超临界情形, 即 $|\theta|\geq(n-2)\pi/2$, [48, 50, 51] 得到了方程 (1.5) 的内部 C^2 估计. 对于次临界情形 $|\theta|<(n-2)\pi/2$, Nadirashvili-Vlăduţ[40] 和 Wang-Yuan[47] 独立构造方程 (1.5) 的非正则解.

当 $|\theta|\geq(n-2)\pi/2$ 时, Lu[34] 在 ψ,ϕ 及 Ω 满足一定条件的情况下, 解决了如下 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\arctan\lambda_i=\psi & \text{在 } \Omega \text{ 中},\\ u=\phi & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}\end{cases}$$

解的存在性问题. 我们给出他们的存在性定理中的一个特殊情形如下,

定理 1.4 (Lu[34]) *令 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中的有界光滑严格凸区域. 令 $\theta\in[(n-2)\pi/2,(n-1)\pi/2)$ 为常数. 则 Dirichlet 问题*

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\arctan\lambda_i=\theta & \text{在 } \Omega \text{ 中},\\ u=0 & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}\end{cases}$$

有唯一解 $u\in C^\infty(\bar{\Omega})$.

1.3 本文的主要结果

下面是本文的主要结果, 本结果基于文献 Zhang-Zhou[53], 即二维特殊 Lagrangian 方程 Dirichlet 问题解的幂凸性. 具体地说,

定理 1.5 (Zhang-Zhou[53]) *令 Ω 为 $\mathbb{R}^2$ 中的有界光滑严格凸区域. 令 $\theta\in(0,\pi/2)$ 为常数. 设 $u\in C^\infty(\bar{\Omega})$ 为 Dirichlet 问题*

$$\begin{cases}\arctan\lambda_1+\arctan\lambda_2=\theta & \text{在 } \Omega \text{ 中},\\ u=0 & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上},\end{cases}\tag{1.6}$$

的唯一解, 其中 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)$ 为解的 Hessian 矩阵 D^2u 的特征值. 则函数 $v=-\sqrt{-2u}$ 在 Ω 上是严格凸的.

为了简单明了的了解如何利用常秩定理处理椭圆方程解的凸性问题, 在第二章, 我们将简要回顾文献 Makar-Limanov[39] 的结果 (**定理 1.1**), 即 2 维扭转刚性函数的幂凸性. 我们首先给出 Korevaar[27] 和 Caffarelli-Friedman[11] 建立的边界凸性估计, 然后利用强极值原理建立常秩定理, 并结合连续性方法得到**定理 1.1**的证明.

第三章, 我们将给出**定理 1.5**的证明. 我们首先对二维特殊 Lagrangian 方程利用强极值原理建立常秩定理, 然后利用连续性方法给出**定理 1.5**的证明, 即 $-\sqrt{-2u}$ 在 Ω 上严格凸的, 并说明凹性指数 1/2 为最优的. 具体地说, 对于函数 $v(x) = -(-2u(x))^{\alpha}$, 其中 $u(x)$ 为方程 (1.6) 的解, 我们找到区域 $\mathcal{C}$, 使得当 $\alpha > 1/2$ 时, $v(x)$ 在区域 $\mathcal{C}$ 上不为凸函数.

第二章 二维扭转刚性函数的幂凸性

在这一章, 我们证明 Makar-Limanov[39] 的结果, 即给出二维扭转刚性函数的幂凸性. 具体地说,

定理 2.6 (Makar-Limanov[39]) *令 Ω 为 $\mathbb{R}^2$ 中的有界光滑严格凸区域. 设 $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ 为 Dirichlet 问题*

$$\begin{cases} \Delta u = -2 & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u = 0 & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}. \end{cases}$$

的唯一解, 则函数 $v = -\sqrt{u}$ 在 Ω 上是严格凸的.

为了简化计算, 我们首先对记号做一些说明, 本文后续将直接使用这些记号.

设 $h(x)$ 和 $k(x)$ 为区域 $\mathcal{O}$ 上的函数, 若存在正常数 C_1, 使得

$$h(x) - k(x) \le C_1(|\nabla\phi(x)| + \phi(x))$$

成立, 其中 $\phi(x) = \det D^2 v(x)$, 则记为 $h(x) \lesssim k(x)$; 若 $h(x) \lesssim k(x)$ 且 $k(x) \lesssim h(x)$, 则记为 $h(x) \sim k(x)$; 若上述不等式对任意的 $x \in \mathcal{O}$ 都成立, 且 C_1 是关于 $\phi(x)$ 及其高阶导数的一致常数, 则记为 $h \lesssim k$; 若 $h \lesssim k$ 且 $k \lesssim h$, 则记为 $h \sim k$.

我们再给出一个椭圆偏微分方程中众所周知的结果——强极值原理.

令 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中的有界光滑区域, 考虑二阶椭圆算子

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{ij}(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_i(x) + c(x)u(x),$$

其中 $a_{ij}(x), b_i(x), c(x) \in C(\bar{\Omega})$, 且 $a_{ij}(x)$ 满足

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \lambda|\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda > 0,$$

L 称为 Ω 上的严格椭圆算子.

定理 2.7 (强极值原理) *令 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中的有界光滑区域, 设 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. 若在区域 Ω 中, $Lu \ge 0$, $c(x) \le 0$, 且 $u(x)$ 在 Ω 内部达到最大值, 则 $u(x)$ 在整个 Ω 上为常数.*

下面我们先建立一个边界凸性估计, 即 Korevaar[27], Caffarelli-Friedman[11] 得到的结果, 为了保证本文证明的完整性, 我们将给出其完整证明. 随后, 我们利用强极值原理 (**定理 2.7**) 建立常秩定理, 并结合连续性方法从而得到**定理 2.6**的证明.

2.1 边界凸性估计

本节的证明基于文献 Korevaar[27].

引理 2.1 (Korevaar[27]) 令 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中的有界光滑严格凸区域. 令 $u \in C^2(\bar{\Omega})$ 满足

$$u < 0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 中}, \quad u = 0, \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 中}, \quad \nabla u \cdot \nu > 0, \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上},$$

其中 ν 为 $\partial\Omega$ 上的内法向量. 则存在 $\varepsilon > 0$ 使得函数 $v = -(-u)^\alpha (0 < \alpha < 1)$ 在区域 $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$ 上是严格凸的, 其中

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \mathrm{d}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

证明: 为了说明 v 在 $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$ 上为严格凸函数, 只需证明: 对任意的 $x \in \Omega \setminus \Omega_\varepsilon$, $D^2 v(x)$ 为正定矩阵. 直接计算有,

$$D^2 v(x) = -\alpha(\alpha-1)(-u)^{\alpha-2} \nabla u \cdot (\nabla u)^T + \alpha(-u)^{\alpha-1} D^2 u,$$

其中 $(\nabla u)^T = (u_1, \cdots, u_n)$.

显然矩阵 $\nabla u \cdot (\nabla u)^T$ 为半正定矩阵, 事实上, 任取 $\eta = (\eta_1, \cdots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\eta(\nabla u)(\nabla u)^T \eta^T = |\eta \nabla u|^2 \geq 0.$$

若 $x \in \partial\Omega$, 由于在边界 $\partial\Omega$ 上, $\nabla u \cdot \nu > 0$, 则 $\nabla u = k\nu$, $k > 0$, 从而在边界 $\partial\Omega$ 上,

$$\eta(\nabla u)(\nabla u)^T \eta^T > 0 \quad \text{当且仅当 } \eta \text{ 不为 } \partial\Omega \text{ 上的切向量.}$$

事实上, 若 η 为边界上的切向量, 又 $\nabla u = k\nu$, 则

$$\eta(\nabla u)(\nabla u)^T \eta^T = 0.$$

另一方面, 若 $x \in \partial\Omega$, 则矩阵 $D^2 u(x)$ 在所有的切向上均为正定的.

我们考虑边界 $\partial\Omega$ 的邻域上的法向量场 $\nu(x)$ (可将 $\partial\Omega$ 上法向量 $\nu(x)$ 光滑变化到 $\partial\Omega$ 的邻域上). 此时在边界的邻域上, 若 $\eta \cdot \nu(x) = 0$, 则称 η 为切向, 其他方向称为非切向.

由于 $D^2 u(x)$ 为连续的, 若方向 η 充分接近切向, 且 $x \in \Omega \setminus \Omega_\varepsilon$ (ε 充分小), 则 $D^2 u(x)$ 在 η 方向上正定, 从而 $\alpha(-u)^{\alpha-1} D^2 u$ 在 η 方向上正定.

由于

$$\lim_{u \to 0^-} \frac{\alpha(-u)^{\alpha-1}}{-\alpha(\alpha-1)(-u)^{\alpha-2}} = \lim_{u \to u^-} \frac{1}{1-\alpha}(-u) = 0,$$

则取充分窄的 $\Omega\setminus\Omega_\varepsilon$, 使得 $\frac{\alpha(-u)^{\alpha-1}}{-\alpha(\alpha-1)(-u)^{\alpha-2}}$ 充分小. 再取 ∇u 足够接近法向, 使得对于除了充分接近切向以外的其他任意方向 η, 有

$$-\alpha(\alpha-1)(-u)^{\alpha-2}\eta(\nabla u)\cdot(\nabla u)^T\eta^T>\alpha(-u)^{\alpha-1}\eta(D^2u)\eta^T.$$

综上所述, $D^2v(x)$ 在 $\Omega\setminus\Omega_\varepsilon$ 上为正定的. □

2.2 定理 2.6 的证明

这一节我们将给出**定理 2.6**的证明. 证明的思路简要如下: 我们首先考虑区域为单位球 B_1 时方程 (2.1) 的解, 验证其为严格凸函数. 然后将区域由单位球形变到给定的严格凸区域 Ω, 我们假设在形变中的某一时刻 t_0 处解在某一点是凸的, 但非严格凸. 为了寻求矛盾 (一旦找到矛盾, 则 v 在 Ω 上为严格凸函数), 我们建立常秩定理, 即在 t_0 时刻解在整个区域上是处处非严格凸的. 最后结合**引理 2.1**可知这是不可能的, 从而导出矛盾.

下面给出**定理 2.6**的详细证明.

证明: 令 $v=-\sqrt{u}$, 则有

$$u_i=2vv_i,\quad u_{ij}=2vv_{ij}+2v_iv_j,\quad i,j=1,2$$

且

$$\Delta u=2v\Delta v+2|\nabla v|^2,$$

从而

$$\Delta v=-\frac{1+|\nabla v|^2}{v},$$

即 v 为 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}\Delta v=-\frac{1+|\nabla v|^2}{v} & 在\ \Omega\ 中,\\ v<0 & 在\ \Omega\ 中\\ v=0 & 在\ \partial\Omega\ 上\end{cases}\tag{2.1}$$

的唯一解.

我们分两步完成定理的证明.

第一步: 连续性方法.

我们考虑如下区域的形变

$$\Omega_t = (1-t)B_1 + t\Omega, \quad 0 \le t \le 1,$$

其中 B_1 为单位球, Ω 为给定的有界光滑严格凸区域. 当 $t=0$ 时, $\Omega_0 = B_1$; 当 $t=1$ 时, $\Omega_1 = \Omega$. 根据凸体几何的理论, 我们知道 B_1 可以通过 $\{\Omega_t\}_{0\le t\le 1}$ 光滑形变得到 Ω, 其中任意的区域 Ω_t 均为有界光滑严格凸区域.

当区域 Ω 为单位球 B_1 时,

$$v_0(x) = -\sqrt{\frac{1-|x|^2}{2}}, \quad x \in B_1$$

为 Dirichlet 问题 (2.1) 的唯一解. 显然 v_0 为 B_1 上的严格凸函数. 事实上, 我们有

$$v_{0,ij}(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{1-|x|^2}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} ((|1-|x|^2)\delta_{ij} + x_i x_j),$$

从而 $D^2 v_0(x)$ 为正定矩阵.

假设 v_t 为 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta v = -\frac{1+|\nabla v|^2}{v} & \text{在 } \Omega_t \text{ 中}, \\ \qquad v < 0 & \text{在 } \Omega_t \text{ 中}, \\ \qquad v = 0 & \text{在 } \partial\Omega_t \text{ 上}, \end{cases}$$

的唯一解. 当 $t=0$ 时, v_0 在 $\Omega_0 = B_1$ 上为严格凸函数. 假设当 $t \longrightarrow t_0 \in (0,1]$ 时, v_{t_0} 在 Ω_{t_0} 上为凸函数, 但不是严格凸函数, 即在 Ω_{t_0} 中某一点 x_0 处有 $\operatorname{rank}(D^2 v_{t_0}(x_0)) = 1$. 我们想说明这个是不可能的, 从而当 $t=1$ 时, $D^2 v_1 = D^2 v$ 在 Ω 上为正定矩阵, 即 $v(x)$ 在 Ω 上为严格凸函数.

第二步: 常秩定理.

为了说明上述的“不可能”, 我们需要建立常秩定理, 即 v_{t_0} 在 Ω_{t_0} 上为凸函数, 则 $\operatorname{rank}(D^2 v_{t_0}(x)) \equiv 1$, $\forall x \in \Omega_{t_0}$. 这时, 结合**引理 2.1** (边界凸性估计), 从而找到矛盾. 事实上, 由**引理 2.1**知 v_{t_0} 在 $\partial\Omega_{t_0}$ 附近是严格凸的, 即 $\operatorname{rank}(D^2 v_{t_0}(x)) = 2$, $\forall x \in \Omega_{t_0} \setminus \Omega_{t_0,\varepsilon}$, 又 $\operatorname{rank}(D^2 v_{t_0}(x)) = 1$, $\forall x \in \Omega_{t_0}$. 因此得到了最终的结果.

下面我们将建立常秩定理.

假设 $v(x) \in C^\infty(\Omega)$ 为方程 (2.1) 的凸解, 设 $x_0 \in \Omega$ 使得

$$l = \min_{x\in\Omega} \operatorname{rank}(D^2 v(x)) = \operatorname{rank}(D^2 v(x_0)).$$

我们需要说明

$$\mathrm{rank}(D^2v(x)) \equiv l, \quad \forall x \in \Omega.$$

若 $l=0$, 则 $D^2v(x)$ 为零矩阵, 从而 $v(x)$ 不满足方程 (2.1); 若 $l=2$, 则结论是平凡的. 因此我们只需考虑 $l=1$ 的情形.

定义集合

$$\Omega^* = \{x \in \Omega \mid \mathrm{rank}(D^2v(x)) = 1\}.$$

根据连续性, 则 Ω^* 为 Ω 中的闭集. 接下来需要说明 Ω^* 为 Ω 中的开集. 对于 Ω^* 中的任意一点 x_0, 取充分小的邻域 $\mathcal{O}$, 记 $\phi(x) = \det D^2v(x)$, 则有

$$\phi(x_0) = 0, \qquad \phi(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{O}.$$

根据强极值原理 (**定理 2.7**), 若建立如下估计

$$\Delta\phi(x) \leq C(|\nabla\phi| + \phi) \quad 在\ \mathcal{O}\ 中, \tag{2.2}$$

则

$$\phi(x) \equiv 0 \quad 在\ \mathcal{O}\ 中,$$

从而 Ω^* 为 Ω 中的开集, 故 $\Omega = \Omega^*$, 即

$$\mathrm{rank}(D^2v(x)) = l, \quad \forall x \in \Omega.$$

接下来问题的关键在于建立估计 (2.2).

首先固定一点 $x \in \mathcal{O}$, 选取合适的正交坐标系, 使得 $D^2v(x)$ 为对角矩阵, 且满足

$$v_{11}(x) \geq v_{22}(x) \geq 0.$$

我们下面的计算将在固定的点 $x \in \mathcal{O}$ 上进行. 由于 $D^2v(x)$ 为对角矩阵, 则

$$0 \sim \phi = v_{11}v_{22}.$$

由于 $v(x)$ 为凸函数且 $D^2v(x)$ 在 x_0 处的秩为 1, 则不妨设 $\Delta v(x) \geq c$, 其中 c 为正常数, 从而 $v_{11}(x) \geq \frac{c}{2}$, 故

$$v_{22} \sim 0.$$

对 $\phi(x)$ 求一阶导数, 则有

$$0 \sim \phi_i = v_{11i}v_{22} + v_{11}v_{22i} \sim v_{11}v_{22i}, \quad i = 1, 2,$$

从而

$$v_{22i} \sim 0, \quad i = 1, 2.$$

对 $\phi(x)$ 求二阶导数, 则有

$$\phi_{ij} \sim v_{11} v_{22ij} - 2v_{12i} v_{12j},$$

从而

$$\Delta\phi \sim v_{11} \sum_{i,j=1}^{2} v_{22ii} - 2 \sum_{i,j=1}^{2} v_{12i}^2. \tag{2.3}$$

记 $f(\nabla v, v) = -\frac{1+|\nabla v|^2}{v}$, 则 (2.3) 式可写为

$$\Delta\phi \sim v_{11} D_{22} f - 2v_{112}^2. \tag{2.4}$$

对 $f(\nabla v, v)$ 关于变量 x_2 分别求一、二阶导数, 有

$$D_2 f = f_v v_2 + f_{v_p} v_{p2} \sim f_v v_2,$$

及

$$\begin{aligned} D_{22} f = & f_{vv} v_2^2 + f_{vv_p} v_{p2} v_2 + f_v v_{22} \\ & + f_{v_p v} v_2 v_{p2} + f_{v_p v_q} v_{p2} v_{q2} + f_{v_p} v_{p22} \\ \sim & f_{vv} v_2^2. \end{aligned} \tag{2.5}$$

由于 $f(\nabla v, v) = \Delta v = v_{11} + v_{22}$, 则

$$D_2 f = v_{112} + v_{222} \sim v_{112},$$

从而

$$v_{112} \sim f_v v_2, \tag{2.6}$$

因此结合 (2.5) 和 (2.6), (2.4) 可写为

$$\Delta\phi \sim v_{11} f_{vv} v_2^2 - 2f_v^2 v_2^2 = (f f_{vv} - 2f_v^2) v_2^2.$$

由于 $f(\nabla v, v)$ 关于变量 v 是凹的, 又

$$\left(\frac{1}{f}\right)_\nu = -\frac{f_\nu}{f^2},$$

及

$$\left(\frac{1}{f}\right)_{vv} = -\frac{f_{vv}}{f^2} + \frac{2f_v^2}{f^3} = -\frac{1}{f^3}(f f_{vv} - 2f_v^2),$$

从而
$$\Delta\phi \sim -v_2^2 f^3 \left(\frac{1}{f}\right)_{vv} \leq 0.$$
因此我们得到了估计 (2.2). 从而建立了常秩定理.

综上所述, 我们完成了**定理 2.6**的证明.

$\square$

第三章　特殊 Lagrangian 方程 Dirichlet 问题解的幂凸性

在这一章, 我们给出本文的主要定理, 即给出二维特殊 Lagrangian 方程解的幂凸性. 本章内容主要基于文献 Zhang-Zhou[53]. 具体地说,

定理 3.8 (Zhang-Zhou[53]) 令 Ω 为 $\mathbb{R}^2$ 中的有界光滑严格凸区域. 令 $\theta \in (0, \pi/2)$ 为常数. 设 $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ 为 *Dirichlet* 问题

$$\begin{cases} \arctan\lambda_1 + \arctan\lambda_2 = \theta & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u = 0 & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \end{cases} \tag{3.1}$$

的唯一解, 其中 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ 为解的 *Hessian* 矩阵 D^2u 的特征值. 则函数 $v = -\sqrt{-2u}$ 在 Ω 上是严格凸的.

首先我们给出证明的框架如下:

- 第一步: 建立形变引理, 见**引理 3.2**;
- 第二步: 利用形变引理建立常秩定理, 见**定理 3.9**;
- 第三步: 利用边界凸性估计, 得出矛盾, 见**引理 2.1**.

为了简便起见, 我们需要对记号做一些说明.

$$\begin{aligned} F^{ij} &= \frac{\partial F}{\partial v_{ij}}, & F^{v_p} &= \frac{\partial F}{\partial v_p}, & F^{v} &= \frac{\partial F}{\partial v}, \\ F^{ij,kl} &= \frac{\partial^2 F}{\partial v_{ij}\partial v_{kl}}, & F^{ij,v_p} &= \frac{\partial^2 F}{\partial v_{ij}\partial v_p}, & F^{ij,v} &= \frac{\partial^2 F}{\partial v_{ij}\partial v}, \\ F^{v_p,v_q} &= \frac{\partial^2 F}{\partial v_p\partial v_q}, & F^{v_p,v} &= \frac{\partial^2 F}{\partial v_p\partial v}, & F^{v,v} &= \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}. \end{aligned}$$

3.1　常秩定理

本节我们将给出重要工具——常秩定理的证明.

对于二维特殊 Lagrangian 方程

$$\arctan\lambda_1 + \arctan\lambda_2 = \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$$

我们可写为

$$\det D^2 u + \cot\theta \Delta u - 1 = 0. \tag{3.2}$$

令 $v = -\sqrt{-2u}$, 则有

$$u_i = -vv_i, \quad u_{ij} = -vv_{ij} - v_i v_j, \quad i,j = 1,2$$

且

$$\Delta u = -v\Delta v - |\nabla v|^2,$$

$$\det D^2 u = v^2 \det D^2 v + v|\nabla v|^2 \Delta v - v\sum_{i,j} v_i v_j v_{ij}.$$

因此方程 (3.2) 可写为

$$v^2 \det D^2 v + v|\nabla v|^2 \Delta v - v\sum_{i,j} v_i v_j v_{ij} - \cot\theta v\Delta v - \cot\theta |\nabla v|^2 - 1 = 0. \tag{3.3}$$

即 v 为 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} F(D^2 v, \nabla v, v) = 0 & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ v = 0 & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \end{cases} \tag{3.4}$$

的唯一解, 其中

$$\begin{aligned} F(D^2 v, \nabla v, v) =& v^2 \det D^2 v + v|\nabla v|^2 \Delta v - v\sum_{i,j} v_i v_j v_{ij} \\ & - \cot\theta\ v\Delta v - \cot\theta\ |\nabla v|^2 - 1. \end{aligned}$$

首先, 我们给出一个重要的引理, 即形变引理, 该引理在证明常秩定理的过程中起到了关键性作用.

引理 3.2 (形变引理) *令 Ω 为 $\mathbb{R}^2$ 中的任意区域, $v \in C^4(\Omega)$ 为方程 (3.3) 的凸解. 令 $\phi(x) = \det D^2 v(x)$, $x \in \Omega$. 若 $v(x)$ 的 Hessian 矩阵 $D^2 v(x)$ 在一些点 $x_0 \in \Omega$ 处的秩为最小秩 1, 则存在 x_0 的邻域 $\mathcal{O}$ 以及不依赖于 ϕ 的正常数 c, C, 使得在 $\mathcal{O}$ 中如果 $\Delta v \geq c/2$, 则有*

$$\sum_{i,j} F^{ij}\phi_{ij} \leq C(|\nabla\phi| + \phi)$$

成立.

证明: 由于 $v(x)$ 为凸函数且 $D^2v(x)$ 在 $x_0 \in \Omega$ 处的秩为 1, 则可假设 $\Delta v(x_0) \geq c$, 其中 c 为正常数. 根据连续性, 则存在 x_0 的邻域 $\mathcal{O}$, 使得 $\Delta v(x) \geq c/2$, $x \in \mathcal{O}$. 为了简化计算, 我们使用第二章规定的记号.

现固定 $x \in \mathcal{O}$, 通过选取合适的正交坐标系, 使得 $D^2v(x)$ 为对角矩阵, 且满足 $v_{11}(x) \geq v_{22}(x) \geq 0$. 由于 $\Delta v(x) \geq c/2$, $x \in \mathcal{O}$, 则有

$$v_{11}(x) \geq \frac{c}{4}.$$

接下来我们的计算将在固定的点 $x \in \mathcal{O}$ 上进行. 由于 $D^2v(x)$ 为对角矩阵, 则

$$0 \sim \phi = v_{11}v_{22}.$$

由于 $v_{11} \geq c/4$, 则

$$v_{22} \sim 0. \tag{3.5}$$

对 ϕ 求一阶导数并结合 (3.5), 则有

$$0 \sim \phi_i = v_{11i}v_{22} + v_{11}v_{22i} \sim v_{11}v_{22i}, \quad i = 1, 2,$$

从而还有

$$v_{22i} \sim 0, \quad i = 1, 2. \tag{3.6}$$

继续对 ϕ 求二阶导数并结合 (3.5) 及 (3.6), 则有

$$\begin{aligned} \phi_{ij} &= v_{11ij}v_{22} + v_{11i}v_{22j} + v_{11j}v_{22i} + v_{11}v_{22ij} - 2v_{12i}v_{12j} \\ &\sim v_{11}v_{22ij} - 2v_{12i}v_{12j}. \end{aligned}$$

从而得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_{11}}\sum_{i,j} F^{ij}\phi_{ij} &\sim \sum_{i,j} F^{ij}v_{22ij} - \frac{2}{v_{11}}\sum_{i,j} F^{ij}v_{12i}v_{12j} \\ &\triangleq \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2. \end{aligned} \tag{3.7}$$

对于 I_1, 我们对方程 $F(D^2v, \nabla v, v) = 0$ 关于变量 x_2 求两次导数, 则有

$$0 = \sum_{i,j} F^{i,j}v_{ij2} + \sum_p F^{v_p}v_{p2} + F^v v_2, \tag{3.8}$$

和

$$\begin{aligned}0=&\sum_{i,j,k,l}F^{ij,kl}v_{ij2}v_{kl2}+\sum_{i,j,p}F^{ij,v_p}v_{ij2}v_{p2}+\sum_{i,j}F^{ij,v}v_{ij2}v_2+\sum_{i,j}F^{ij}v_{ij22}\\&+\sum_{p,i,j}F^{v_p,ij}v_{p2}v_{ij2}+\sum_{p,q}F^{v_p,v_q}v_{p2}v_{q2}+\sum_{p}F^{v_p,v}v_{p2}v_2+\sum_{p}F^{v_p}v_{p22}\\&+\sum_{i,j}F^{v,ij}v_2v_{ij2}+\sum_{p}F^{v,v_p}v_2v_{p2}+F^{v,v}v_2^2+F^vv_{22}.\end{aligned}\tag{3.9}$$

我们继续使用 (3.5) 和 (3.6), 则 (3.8) 及 (3.9) 可写为

$$\begin{aligned}&0\sim F^{11}v_{112}+F^vv_2,\\&0\sim F^{11,11}v_{112}^2+2F^{11,v}v_{112}v_2+\sum_{i,j}F^{ij}v_{ij22}+F^{v,v}v_2^2.\end{aligned}$$

从而得到

$$v_2\sim-\frac{1}{F^v}F^{11}v_{112},\tag{3.10}$$

$$\sum_{i,j}F^{ij}v_{ij22}\sim-F^{11,11}v_{112}^2-2F^{11,v}v_{112}v_2-F^{v,v}v_2^2.\tag{3.11}$$

将 (3.10) 代入 (3.11), 则得到

$$\mathrm{I}_1=\sum_{i,j}F^{ij}v_{ij22}\sim\left[-F^{11,11}+\frac{2}{F^v}F^{11,v}F^{11}-\frac{1}{(F^v)^2}F^{v,v}(F^{11})^2\right]v_{112}^2.\tag{3.12}$$

对于 I_2, 利用 (3.6), 则

$$\mathrm{I}_2\sim-\frac{2}{v_{11}}F^{11}v_{112}^2.\tag{3.13}$$

从而结合 (3.12) 及 (3.13), 得到

$$\frac{1}{v_{11}}\sum_{i,j}F^{ij}\phi_{ij}\sim\left[-F^{11,11}+\frac{2}{F^v}F^{11,v}F^{11}-\frac{1}{(F^v)^2}F^{v,v}(F^{11})^2-\frac{2}{v_{11}}F^{11}\right]v_{112}^2.\tag{3.14}$$

接下来我们计算 (3.14). 对方程

$$\begin{aligned}F(D^2v,\nabla v,v)=&v^2\det D^2v+v|\nabla v|^2\Delta v-v\sum_{i,j}v_iv_jv_{ij}\\&-\cot\theta\ v\Delta v-\cot\theta\ |\nabla v|^2-1.\end{aligned}$$

直接求导, 则有

$$\begin{aligned}F^{11} &= v^2 v_{22} + v|\nabla v|^2 - v v_1^2 - \cot\theta\ v \sim v v_2^2 - \cot\theta\ v,\\ F^{v} &= 2v \det D^2 v + |\nabla v|^2 \Delta v - \sum_{ij} v_i v_j v_{ij} - \cot\theta\ \Delta v\\ &\sim v_2^2 v_{11} - \cot\theta\ v_{11},\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}F^{11,11} &= 0,\\ F^{11,v} &= 2v v_{22} + |\nabla v|^2 - v_1^2 - \cot\theta \sim v_2^2 - \cot\theta,\\ F^{v,v} &= 2\det D^2 v \sim 0.\end{aligned}$$

将上述各项代入 (3.14), 则有

$$\frac{1}{v_{11}} \sum_{i,j} F^{ij}\phi_{ij} \sim 2\left(\frac{1}{F^v}F^{11,v} - \frac{1}{v_{11}}\right) F^{11} v_{112}^2 \sim 0,$$

因而

$$\sum_{i,j} F^{ij}\phi_{ij} \le C(|\nabla\phi| + \phi).$$

故得到引理的证明. □

然后, 我们利用形变引理 (**引理 3.2**) 证明本节主要结论——常秩定理.

定理 3.9 (常秩定理) *令 Ω 为 $\mathbb{R}^2$ 中的任意区域, $v \in C^4(\Omega)$ 为方程 (3.3) 的凸解. 则 $v(x)$ 的 Hessian 矩阵 $D^2v(x)$ 在 Ω 上是常秩的, 即对任意的 $x \in \Omega$, $\mathrm{rank}(D^2v(x))$ 为常数.*

证明: 记

$$l = \min_{x\in\Omega} \mathrm{rank}(D^2 v(x)).$$

显然, l 的取值只能有 0, 1 和 2. 根据方程 (3.3), 我们知道 l 是不能为 0 的. 事实上, 若 $l = 0$, 则 $D^2v(x)$ 为零矩阵, 从而 $v(x)$ 不满足 (3.3) 式. 若 $l = 2$, 则结论是平凡的. 所以我们只需考虑 $l = 1$ 的情形.

假设存在 $x_0 \in \Omega$, 使得 $\mathrm{rank} D^2 v(x_0) = 1$. 定义集合

$$\Omega^* = \{x \in \Omega \mid \mathrm{rank}(D^2 v(x)) = 1\}.$$

根据连续性知 Ω^* 为 Ω 中的闭集. 接下来需要说明 Ω^* 为开集. 对于 Ω^* 中的任意一点 x_0, 取充分小的邻域 $\mathcal{O}$, 从而我们有

$$\phi(x_0) = 0, \qquad \phi(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{O}.$$

根据**引理 3.2**, 结合强极值原理 (**定理 2.7**) 知 $\phi(x) \equiv 0, \forall x \in \mathcal{O}$, 从而 Ω^* 为开集. 因此, $\Omega^* = \Omega$, 即在 Ω 上 $\mathrm{rank}(D^2 v(x))$ 为常数. □

3.2 定理 3.8 的证明

本节我们结合常秩定理 (**定理 3.9**), 利用连续性方法证明**定理 3.8**. **定理 3.8**的证明是标准的, 最早的参考文献可见 Caffarelli-Friedman[11], 或见 [29, 33, 37].

现在我们来证明**定理 3.8**.

证明: 首先我们注意到当区域 Ω 为单位球 B_1 时, 则

$$v_0(x) = -\sqrt{\tan\frac{\theta}{2}(1-|x|^2)}, \quad x \in B_1$$

为 Dirichlet 问题 (3.4) 的唯一解. 显然, v_0 为 B_1 上的严格凸函数.

我们考虑如下的区域的形变

$$\Omega_t = (1-t)B_1 + t\Omega, \quad 0 < t < 1,$$

其中 Ω 为任意的有界光滑严格凸区域. 显然, 当 $t = 0$ 时, $\Omega_0 = B_1$, 当 $t = 1$ 时, $\Omega_1 = \Omega$. 根据凸体几何的理论, 我们知道 B_1 可以通过 $\{\Omega_t\}_{0\leq t\leq 1}$ 光滑形变得到 Ω, 其中任意的区域 Ω_t 均为有界光滑严格凸区域.

假设 v_t 为 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} F(D^2 v, \nabla v, v) = 0 & \text{在 } \Omega_t \text{ 中}, \\ v = 0 & \text{在 } \partial\Omega_t \text{ 上}, \end{cases}$$

的解, 其中

$$\begin{aligned} F(D^2 v, \nabla v, v) =& v^2 \det D^2 v + v|\nabla v|^2 \Delta v - v\sum_{i,j} v_i v_j v_{ij} \\ & - \cot\theta\ v\Delta v - \cot\theta\ |\nabla v|^2 - 1. \end{aligned}$$

根据特殊 Lagrangian 方程的先验估计, 我们得到了 $\| v_t \|_{C^\infty(\Omega_t)}$ 的一致估计, 它的界只依赖于 θ 和区域 Ω 的形状.

一方面, 由于 v_0 为严格凸函数, 则当 $\delta > 0$ 充分小时, 对所有的 t 满足 $t \in (0,\delta)$ 时, 有 v_t 也是严格凸函数; 另一方面, 若对所有的 $t \in (0,t^*)(0 < t^* < 1)$, 有 v_t 在 Ω_t 上为严格凸函数, 则 v_{t^*} 在 Ω_{t^*} 上为凸函数.

我们现在假设 v_1 在 $\Omega_1 = \Omega$ 不是严格凸函数, 则存在某一时刻 $t_0 \in (0,1)$, 使得 t_0 为 v_t 为凸函数但不为严格凸函数的第一时刻. 这与**定理 3.9**(常秩定理) 和**引理 2.1**(边界凸性估计) 矛盾. 事实上, 由于 v_{t_0} 在 Ω_{t_0} 上为凸函数但不为严格凸函数, 则不妨设 $D^2v(x_0)$ 为半正定矩阵, 从而 $\mathrm{rank}(D^2v_{t_0}(x_0)) = 1$, 依**定理 3.9**知, 对任意的 $x \in \Omega_{t_0}$, $\mathrm{rank}(D^2v_{t_0}(x)) = 1$. 由**引理 2.1**知, $v_{t_0}(x)$ 在区域 $\Omega_{t_0} \setminus \Omega_{t_{0_\varepsilon}}$ 上为严格凸的, 其中 $\Omega_{t_{0_\varepsilon}} = \{x \in \Omega_{t_0} \mid \mathrm{d}(x,\partial\Omega_{t_0} > \varepsilon\}$. 矛盾!

因此, 我们得到了主定理的证明. □

3.3 一个注记

最后我们给出一个例子来说明凹性指数为 1/2 是最优的. 具体地说, 对于函数 $v(x) = -(2u(x))^\alpha$, 其中 $u(x)$ 为方程 (3.1) 的解, 我们找到区域 $\mathcal{C}$, 使得当 $\alpha > 1/2$ 时, $v(x)$ 在区域 $\mathcal{C}$ 上不为凸函数. 对于 Dirichlet 问题 (1.1) 和 (1.4), Kennington[25] 和 Ma-Xu[37] 也分别给出了相应的例子来说明凹性指数 1/2 是最优的.

我们定义开锥

$$\mathcal{C} = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < ax_2\}, \tag{3.15}$$

其中 $a \in (0,1)$ 且满足 $\cot\theta > 2a/(1-a^2)$. 令 $\Omega \subset \mathcal{C}$ 为一个有界凸区域, 并且 $y = (0,0)$ 在边界 $\partial\Omega$ 上, $z = (0,1)$ 在区域 Ω 上. 定义

$$w(x) = \frac{A(x_1^2 - a^2x_2^2)}{2},$$

其中 $A > 0$ 满足方程

$$a^2A^2 - \cot\theta(1-a^2)A + 1 = 0.$$

通过计算我们可以得到, w 满足

$$\begin{cases} \arctan\lambda_1(D^2w) + \arctan\lambda_2(D^2w) = \theta, & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ w \le 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}. \end{cases}$$

由于 u 为 Dirichlet 问题 (3.1) 的解, 根据比较定理, 则在 Ω 上 $w \leq u$. 特别地, 对任意的 $t \in (0,1)$, 则有

$$-\frac{Aa^2t^2}{2} = w(tz) \leq u(tz) \leq 0,$$

从而若 $\alpha > 1/2$, 则

$$\lim_{t\to 0^+} t^{-\frac{1}{\alpha}} u(tz) = 0.$$

为了说明凹性指数是 1/2 为最优的, 我们不妨假设当 $\alpha > 1/2$ 时 $-(-u)^\alpha$ 为凸函数, 则

$$-(-u)^\alpha((1-t)y+tz) \leq -(1-t)(-u)^\alpha(y) - t(-u)^\alpha(z) = -t(-u)^\alpha(z),$$

其中我们利用了 $y=(0,0)$ 和 $z=(0,1)$. 上式说明了 $t^{-\frac{1}{\alpha}}u(tz) \leq u(z) < 0$. 这与

$$\lim_{t\to 0^+} t^{-\frac{1}{\alpha}} u(tz) = 0$$

产生矛盾! 因此, 凹性指数是 1/2 为最优的, 即对于 $-(-u)^\alpha$, 当 $\alpha = 1/2$ 时为凸的, 当 $\alpha > 1/2$ 时不为凸.

综上所述, 我们找到了区域 $\mathcal{C}$, 当 $\alpha > 1/2$ 时, $v(x)$ 在区域 $\mathcal{C}$ 上不为凸函数, 因此说明了凹性指数为 1/2 是最优的.

第四章 总结与展望

本文主要研究了二维特殊 Lagrangian 方程解的幂凸性. 第一章, 我们简要回顾了椭圆方程解的凸性问题的研究历史和现状; 第二章, 我们介绍了二维扭转刚性函数的幂凸性; 第三章, 我们给出本文重要结果, 利用常秩定理得到二维特殊 Lagrangian 方程解的幂凸性.

对于第三章的结果, 我们希望能够得到高维特殊 Lagrangian 方程解的幂凸性. 具体地说, 设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中的有界光滑严格凸区域, 令 $\theta \in ((n-2)\pi/2, (n-1)\pi/2)$ 为常数, 设 $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ 为 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \arctan \lambda_i = \theta & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u = 0 & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \end{cases}$$

的唯一解, 其中 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 为解的 Hessian 矩阵 D^2u 的特征值. 我们希望得到函数 $v = -\sqrt{-2u}$ 在 Ω 上是严格凸的.

对于完全非线性椭圆方程而言, Ma-Xu[37] 和 Liu-Ma-Xu[33] 分别建立了三维欧氏空间中涉及 2-Hessian 算子 Dirichlet 问题解的幂凸性, 类似的, 我们希望能够得到高维的结果. 例如, 我们考虑高维欧氏空间 2-Hessian 方程 Dirichlet 问题解的幂凸性. 具体地说, 设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中的有界光滑严格凸区域, 设 $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ 为 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \sigma_2(D^2u) = 1 & \text{在 } \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ 中}, \\ u = 0 & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \\ u < 0 & \text{在 } \Omega \text{ 中}. \end{cases}$$

我们希望得到函数 $v = -\sqrt{-u}$ 在 Ω 上是严格凸的. 再继续, 我们考虑高维欧氏空间 2-Hessian 方程特征值问题解的对数凹性. 具体地说, 设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中的有界光滑严格凸区域, 设 $u \in C^\infty(\Omega) \cap C^{1,1}(\bar{\Omega})$ 为特征值为问题

$$\begin{cases} \sigma_2(D^2u) = \Lambda(-u)^2 & \text{在 } \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ 中}, \\ u = 0 & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \\ u < 0 & \text{在 } \Omega \text{ 中}. \end{cases}$$

我们希望得到函数 $v = -\log(-u)$ 在 Ω 上是严格凸的.

本文的结果主要是利用常秩定理结合连续性方法得到的, 同样的, Ma-Xu[37] 和 Liu-Ma-Xu[33] 也是利用常秩定理建立解的凸性. 正如我们第一章所介绍的, Alvarez-Lasry-Lions[3] 提出了凸包络的方法, 也能得到一些有界凸区域上完全非线性二阶退化椭圆方程解的凸性. 我们希望能够利用凸包络的方法得到 [37] 和 [33] 中高维情形的结果.

参考文献

[1] Acker, A.; Payne, L. E.; Philippin, G. *On the convexity of level lines of the fundamental mode in the clamped membrane problem, and the existence of convex solutions in a related free boundary problem.* Z. Angew. Math. Phys. 32 (1981), no. 6, 683–694.

[2] Ahlfors, Lars V. *Conformal invariants. Topics in geometric function theory.* Reprint of the 1973 original. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2010. xii+162 pp.

[3] Alvarez, Olivier; Lasry, J.-M.; Lions, P.-L. *Convex viscosity solutions and state constraints.* J. Math. Pures Appl. (9) 76 (1997), no. 3, 265–288.

[4] Bhattacharya, Arunima *The Dirichlet problem for Lagrangian mean curvature equation.* https://arxiv.org/abs/2005.14420, 2020, 17pp.

[5] Bian, Baojun; Guan, Pengfei *A microscopic convexity principle for nonlinear partial differential equations.* Invent. Math. 177 (2009), no. 2, 307–335.

[6] Bianchini, Chiara; Longinetti, Marco; Salani, Paolo *Quasiconcave solutions to elliptic problems in convex rings.* Indiana Univ. Math. J. 58 (2009), no. 4, 1565–1589.

[7] Bianchini, Massimiliano; Salani, Paolo *Power concavity for solutions of nonlinear elliptic problems in convex domains.* Geometric properties for parabolic and elliptic PDE's, 35–48, Springer INdAM Ser., 2, Springer, Milan, 2013.

[8] Borrelli, William; Mosconi, Sunra; Squassina, Marco *Concavity properties for solutions to p-Laplace equations with concave nonlinearities.* https://arxiv.org/abs/2111.14801, 2021, 20pp.

[9] Brascamp, Herm Jan; Lieb, Elliott H. *On extensions of the Brunn-Minkowski and Prékopa-Leindler theorems, including inequalities for log concave functions, and with an application to the diffusion equation.* J. Functional Analysis 22 (1976), no. 4, 366–389.

[10] Bryan, Paul; Ivaki, Mohammad N.; Scheuer, Julian *Constant rank theorems for curvature problems via a viscosity approach.* Calc. Var. Partial Differential Equations 62 (2023), no. 3, Paper No. 98, 19 pp.

[11] Caffarelli, Luis A.; Friedman, Avner *Convexity of solutions of semilinear elliptic equations.* Duke Math. J. 52 (1985), no. 2, 431–456.

[12] Caffarelli, Luis; Guan, Pengfei; Ma, Xi-Nan *A constant rank theorem for solutions of fully nonlinear elliptic equations.* Comm. Pure Appl. Math. 60 (2007), no. 12, 1769–1791.

[13] Caffarelli, Luis; Nirenberg, Louis; Spruck, Joel. *The Dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations. III. Functions of the eigenvalues of the Hessian.* Acta Math. 155 (1985), no. 3-4, 261–301.

[14] Caffarelli, Luis; Spruck, Joel *Convexity properties of solutions to some classical variational problems.* Comm. Partial Differential Equations 7 (1982), no. 11, 1337–1379.

[15] Crasta, Graziano; Fragalà, Ilaria *On the Dirichlet and Serrin problems for the inhomogeneous infinity Laplacian in convex domains: regularity and geometric results.* Arch. Ration. Mech. Anal. 218 (2015), no. 3, 1577–1607.

[16] Gabriel, R. M. *A result concerning convex level surfaces of 3-dimensional harmonic functions.* J. London Math. Soc. 32 (1957), 286–294.

[17] Guan, Pengfei; Ma, Xi-Nan *The Christoffel-Minkowski problem. I. Convexity of solutions of a Hessian equation.* Invent. Math. 151 (2003), no. 3, 553–577.

[18] Guan, Pengfei; Ma, Xi-Nan; Zhou, Feng *The Christofel-Minkowski problem. III. Existence and convexity of admissible solutions.* Comm. Pure Appl. Math. 59 (2006), no. 9, 1352–1376.

[19] Guan, Pengfei; Xu, Lu *Convexity estimates for level sets of quasiconcave solutions to fully nonlinear elliptic equations.* J. Reine Angew. Math. 680 (2013), 41–67.

[20] Hamel, François; Nadirashvili, Nikolai; Sire, Yannick *Convexity of level sets for elliptic problems in convex domains or convex rings: two counterexamples.* Amer. J. Math. 138 (2016), no. 2, 499–527.

[21] Harvey, Reese; Lawson, H. Blaine, Jr. *Calibrated geometries.* Acta Math. 148 (1982), 47–157.

[22] Ishige, Kazuhiro; Nakagawa, Kazushige; Salani, Paolo *Power concavity in weakly coupled elliptic and parabolic systems.* Nonlinear Anal. 131 (2016), 81–97.

[23] Jia, Xiaohan; Ma, Xi-Nan; Shi, Shujun *Convexity estimates for Green' s function and the first eigenfunction of Laplace operator.* To appear on Potential Anal.(2023)

[24] Jia, Xiaohan; Ma, Xi-Nan; Shi, Shujun *Remarks on convexity estimates for solutions of the torsion problem.* To appear on Sci. China Math. (2023), 18pp.

[25] Kennington, Alan U. *Power concavity and boundary value problems.* Indiana Univ. Math. J. 34 (1985), no. 3, 687–704.

[26] Korevaar, Nicholas J. *Capillary surface convexity above convex domains.* Indiana Univ. Math. J. 32 (1983), no. 1, 73–81.

[27] Korevaar, Nicholas J. *Convex solutions to nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems.* Indiana Univ. Math. J. 32 (1983), no. 4, 603–614.

[28] Korevaar, Nicholas J. *Convexity of level sets for solutions to elliptic ring problems.* Comm. Partial Differential Equations 15 (1990), no. 4, 541–556.

[29] Korevaar, Nicholas J.; Lewis, John L. *Convex solutions of certain elliptic equations have constant rank Hessians.* Arch. Rational Mech. Anal. 97 (1987), no. 1, 19–32.

[30] Kulczycki, Tadeusz *On concavity of solutions of the Dirichlet problem for the equation* $(-\Delta)^{1/2}\varphi = 1$ *in convex planar regions.* J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 19 (2017), no. 5, 1361–1420.

[31] Langford, Mat; Scheuer, Julian *Concavity of solutions to degenerate elliptic equations on the sphere.* Comm. Partial Differential Equations 46 (2021), no. 6, 1005–1016.

[32] Lewis, John L. *Capacitary functions in convex rings.* Arch. Rational Mech. Anal. 66 (1977), no. 3, 201–224.

[33] Liu, Pan; Ma, Xi-Nan; Xu, Lu *A Brunn-Minkowski inequality for the Hessian eigenvalue in three-dimensional convex domain.* Adv. Math. 225 (2010), no. 3, 1616–1633.

[34] Lu, Siyuan *On the Dirichlet problem for Lagrangian phase equation with critical and supercritical phase.* https://arxiv.org/abs/2204.05420, 2022, 16pp.

[35] Ma, Xi-Nan; Ou, Qianzhong; Zhang, Wei *Gaussian curvature estimates for the convex level sets of p-harmonic functions.* Comm. Pure Appl. Math. 63 (2010), no. 7, 935–971.

[36] Ma, Xi-Nan; Shi, Shujun; Ye, Yu *The convexity estimates for the solutions of two elliptic equations.* Comm. Partial Differential Equations 37 (2012), no. 12, 2116–2137.

[37] Ma, Xi-Nan; Xu, Lu *The convexity of solution of a class Hessian equation in bounded convex domain in* $\mathbb{R}^3$. J. Funct. Anal. 255 (2008), no. 7, 1713–1723.

[38] Ma, Xi-Nan; Zhang, Wei *Superharmonicity of curvature function for the convex level sets of harmonic functions.* Calc. Var. Partial Differential Equations 60 (2021), no. 4, Paper No. 141, 12 pp.

[39] Makar-Limanov, L. G. *The solution of the Dirichlet problem for the equation* $\Delta u = -1$ *in a convex region.* Mat. Zametki 9 (1971), 89–92.

[40] Nadirashvili, Nikolai; Vlăduţ, Serge *Singular solution to special Lagrangian equations.* Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire 27 (2010), no. 5, 1179–1188.

[41] Sakaguchi, Shigeru *Concavity properties of solutions to some degenerate quasilinear elliptic Dirichlet problems.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 14 (1987), no. 3, 403–421 (1988).

[42] Salani, Paolo *Convexity of solutions and Brunn-Minkowski inequalities for Hessian equations in* $\mathbb{R}^3$. Adv. Math. 229 (2012), no. 3, 1924–1948.

[43] Schneider, Rolf *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory.* Second expanded edition. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 151. Cambridge University Press, Cambridge, 2014, xxii+736 pp.

[44] Sun, Fanrong; Xu, Lu *A quantitative constant rank theorem for quasiconcave solutions to fully nonlinear elliptic equations.* J. Differential Equations 317 (2022), 685–705.

[45] Székelyhidi, Gábor; Weinkove, Ben *On a constant rank theorem for nonlinear elliptic PDEs.* Discrete Contin. Dyn. Syst. 36 (2016), no. 11, 6523–6532.

[46] Székelyhidi, Gábor; Weinkove, Ben *Weak Harnack inequalities for eigenvalues and constant rank theorems.* Comm. Partial Differential Equations 46 (2021), no. 8, 1585–1600.

[47] Wang, Dake; Yuan, Yu *Singular solutions to special Lagrangian equations with subcritical phases and minimal surface systems.* Amer. J. Math. 135 (2013), no. 5, 1157–1177.

[48] Wang, Dake; Yuan, Yu *Hessian estimates for special Lagrangian equations with critical and supercritical phases in general dimensions.* Amer. J. Math. 136 (2014), no. 2, 481–499.

[49] Wang, Xu-Jia *Counterexample to the convexity of level sets of solutions to the mean curvature equation.* J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 16 (2014), no. 6, 1173–1182.

[50] Warren, Micah; Yuan, Yu *Explicit gradient estimates for minimal Lagrangian surfaces of dimension two.* Math. Z. 262 (2009), no. 4, 867–879.

[51] Warren, Micah; Yuan, Yu *Hessian and gradient estimates for three dimensional special Lagrangian equations with large phase.* Amer. J. Math. 132 (2010), no. 3, 751–770.

[52] Zhang, Ting; Zhang, Wei *Gaussian curvature estimates for the convex level sets of minimal graphs revisited.* J. Differential Equations 316 (2022), 270–289.

[53] Zhang, Wei; Zhou, Qi *Power Convexity of Solutions to a Special Lagrangian Equation in Dimension Two.* J. Geom. Anal. 33 (2023), no. 4, 135.