概率论与数理统计

主讲：四川大学 徐小湛教授

四川大学 徐小湛

我的QQ: 2243414853
微博: @川大徐小湛
微信: scuxuxz
Email: xuxzmail@163.com


第2讲 随机事件的关系与运算
四川大学 徐小湛

在上一讲

第 1 讲 随机试验 样本空间 随机事件

我们介绍了样本空间、样本点和事件的概念

这一讲我们来讲事件的运算

§1.2 样本空间 随机事件

（三）随机事件的关系与运算

QQ: 2243414853

回忆事件的概念

随机试验 E 的样本空间 S 的子集 A 称为 E 的随机事件，简称事件。

当 A 中某一个样本点出现时，就说事件 A 发生了。

由一个样本点 e 组成的单点集 $\{e\}$ 称为基本事件。

一般的事件是由基本事件复合而成的，而基本事件是不能再分解的事件。

一个事件 A 是样本空间 S 的一个子集，

因此事件之间的关系以及事件的运算可以用集合之间的关系和集合运算来处理。

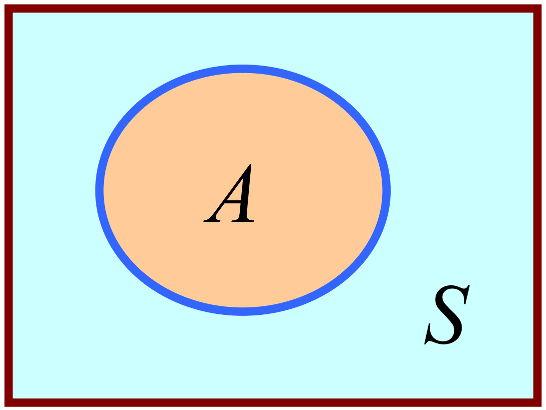
设试验 E 的样本空间为 S，而 A, B, A_k（$k=1, 2,\ldots$）是 S 的子集。

事件的图示

为直观起见，我们经常用图形来表示事件。

一般地，用一个平面上某个矩形区域表示必然事件或者整个样本空间 ***S***,

其中的一个子区域表示一具体的事件***A***.



事件间的关系

QQ: 2243414853

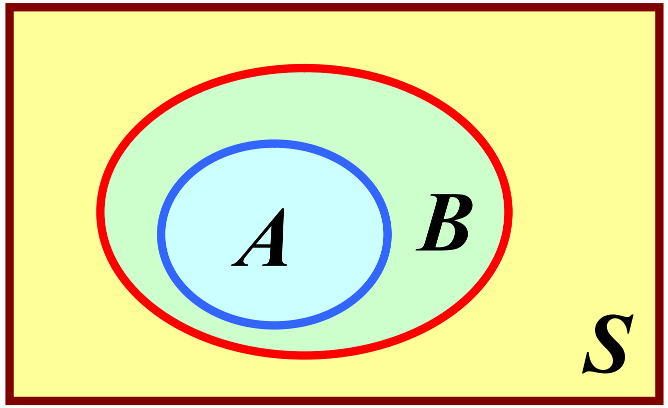
1. 事件的包含

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，即属于 A 的样本点也属于 B，则称事件 B **包含**事件 A，或称事件 A **包含于**事件 B

记作

$$B \supset A \quad \text{或} \quad A \subset B$$

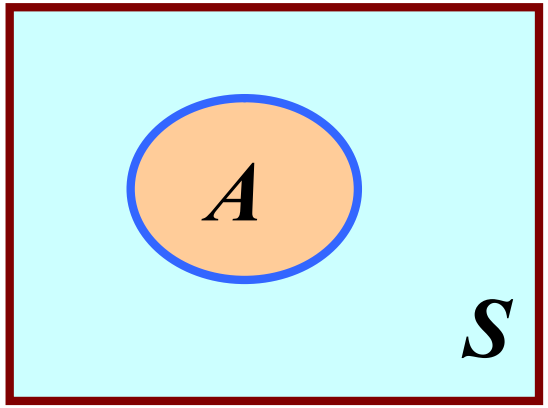
$A \subset B$



$A \subset B$ 的一个等价说法是：

若B不发生，则A也不会发生。

对任何事件A，都有 $\varnothing \subset A \subset S$



2. 事件的相等

如果事件 $\boldsymbol{A}$ 包含事件 $\boldsymbol{B}$ ($A \supset B$),
事件 $\boldsymbol{B}$ 也包含事件 $\boldsymbol{A}$ ($A \subset B$) ,
即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的样本点,
则称事件 $\boldsymbol{A}$ 与事件 $\boldsymbol{B}$ **相等**,
记作

$$A = B$$

即 $A = B \iff A \subset B$ and $B \subset A$

例如，

记 A=“考试及格”，B=“考试成绩为90分”

$$A=\{x\,|\,60\le x\le 100\}\quad B=\{90\}\ \Rightarrow A\supset B$$

记C=“至少有50人排队”，D=“至少有30人排队”

$$C=\{50,51,\ldots\}\quad D=\{30,31,\ldots\}\Rightarrow C\subset D$$

抛两颗骰子，两颗骰子出现的点数分别记为 x和 y.
记 E=“$x+y$为奇数”，F=“两次的骰子点数奇偶性不同”

$$\Rightarrow E=F$$

事件的运算

QQ: 2243414853

3. 事件的并（和）

两个事件 A 与 B 至少有一个发生，即 “A 或 B”，是一个事件，

称为事件 A 与事件 B 的并 (和)，

它是由属于 A 或 B 的所有样本点构成的集合，

记作

$$A \bigcup B \quad 或 \quad A+B$$

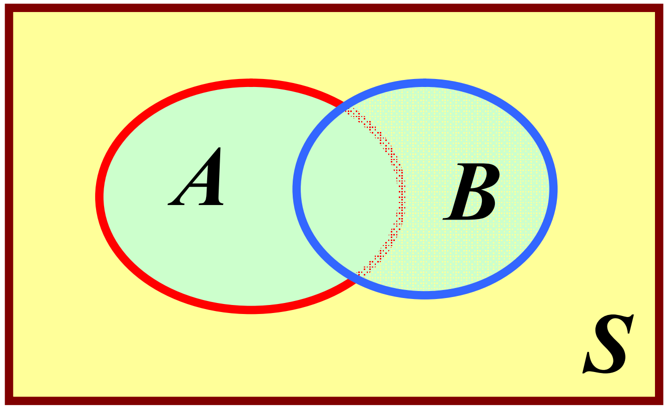
A 与 B 的和事件

$$A \bigcup B = \{x \mid x \in A \ \ 或 \ x \in B\}$$

$A \cup B$ 发生当且仅当

A, B 中至少有一个发生。

$A \bigcup B$



事件的并(和)可以推广到有限或可列个事件。

n个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 中至少有一个发生的事件称为这些事件的和事件,

记作 $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$

或 $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \sum_{k=1}^{n} A_k$

可列个事件 $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$中至少有一个发生的事件称为这些事件的和事件,

记作 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 或 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$

4. 事件的交（积）

两个事件 A 与 B 同时发生，即 "A 且 B"，
是一个事件，
称为事件 A 与事件 B 的交 (积)，
它是由同时属于 A 和 B 的样本点构成的集合，
记作

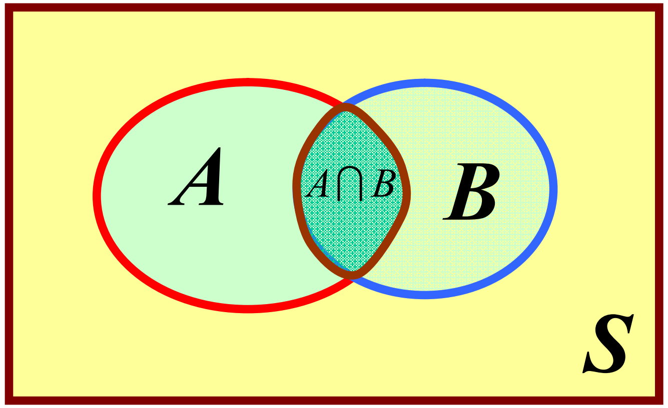
$$A \cap B \quad \text{或} \quad AB$$

A 与 B 的积事件

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \text{且}\ x \in B\}$$

AB 发生当且仅当
A和B 同时发生。

$A \cap B$



事件的交 (积) 也可以推广到有限或可列个事件。

n个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 中同时发生的事件称为这些事件的**积事件**，记作

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k \quad \text{或} \quad A_1 A_2 \cdots A_n$$

可列个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ 同时发生的事件称为这些事件的**积事件**，

记作 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$

5. 对立事件 (逆事件)

如果每一次试验中，事件 A 与事件 B 必有一个发生，但又不能同时发生，

则称事件 A 与事件 B 为对立事件 **opposite event**

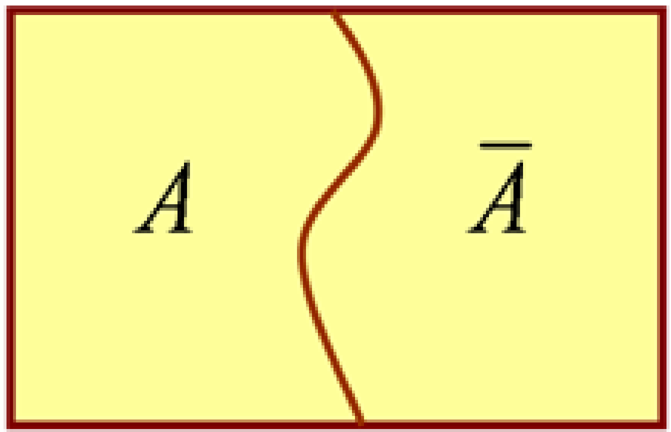
也称 A 与 B 为互逆事件 **complement event**

事件 A 的对立事件（逆事件）叫“A逆，非A”，记作

$\overline{A}$ “A逆、A非、A bar”

$$\overline{A}=\{x\in S\,|\,x\notin A\}$$

A 与 $\overline{A}$ 对立



逆运算的性质

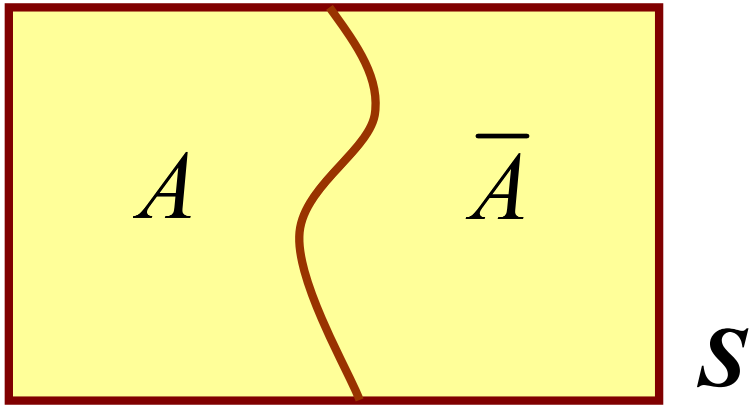
$$A \cap \overline{A} = A\overline{A} = \varnothing$$

两者不能同时发生

$$A \cup \overline{A} = S$$

两者必有一个发生

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\left(\overline{A}\right)} = A$$



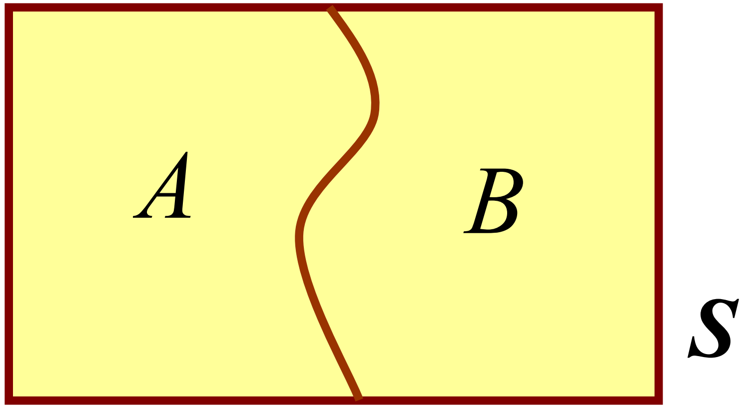
B与**A**对立当且仅当

$$A \cup B = S$$

两者必有一个发生

且 $AB = \varnothing$

两者不能同时发生



例如

在抛一颗骰子的试验中，

样本空间 S={1, 2, 3, 4, 5, 6}

出现奇数点的事件 A={1, 3, 5}

与出现偶数点的事件 B={2, 4, 6}

是对立事件： $B=\overline{A}$

S

A

B

6. 事件的差

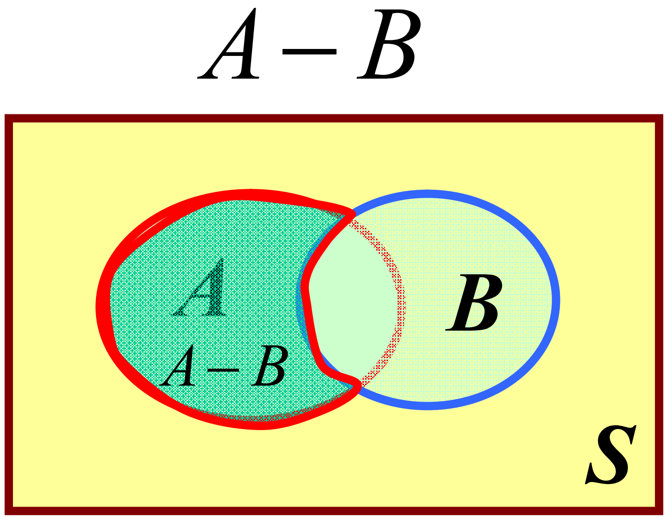
事件 A 发生，而事件 B 不发生的事件称为事件 A 与事件 B 的差，

记作

$$A-B \quad \text{“}A\text{差}B\text{”}$$

$A-B$ 是由属于A 但不属于 B 的样本点构成的集合：

$$A-B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$$



显然 $A-B=A\overline{B}$ $\quad A-B=A-AB$ $\quad \overline{A}=S-A$

7. 互不相容事件（互斥事件）

如果事件 A 与事件 B 不能同时发生，

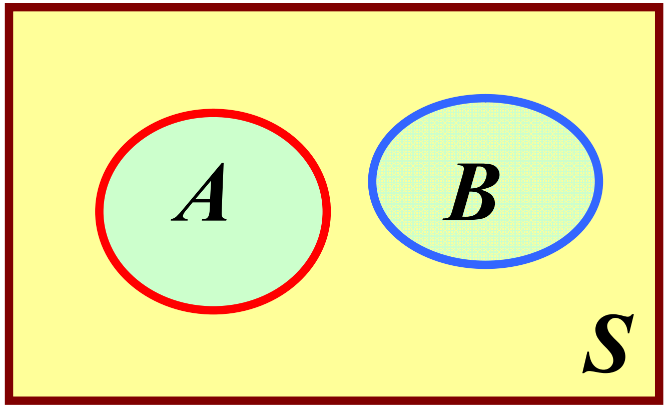
则称事件 A 与事件 B 互不相容 **incompatible**

(或称它们互斥) **mutually exclusive**

互不相容的事件没有公共的样本点：

$$AB = \varnothing$$

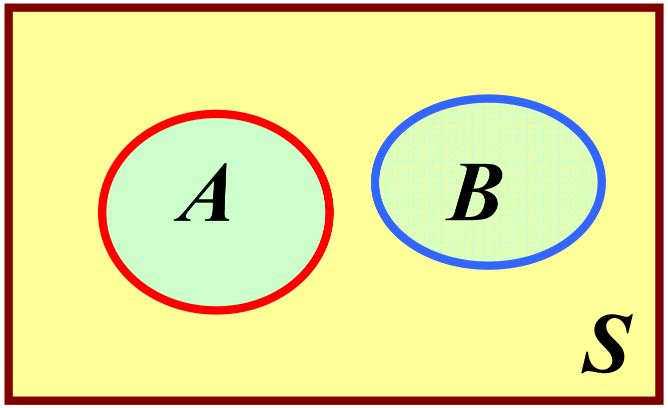
A与B互斥



事件 A 与事件 B 互不相容的充分必要条件是

$$A \subset \overline{B}$$

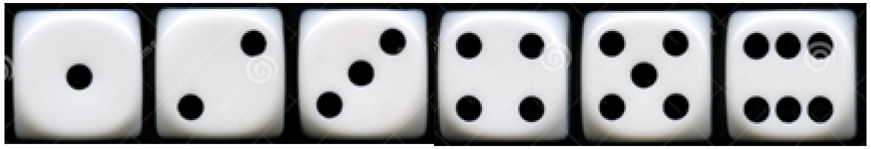
A与B互斥



$$AB = \varnothing$$

显然，基本事件两两互不相容。

例如，在抛一颗骰子的试验中，



基本事件：{1}，{2}，{3}，{4}，{5}，{6}

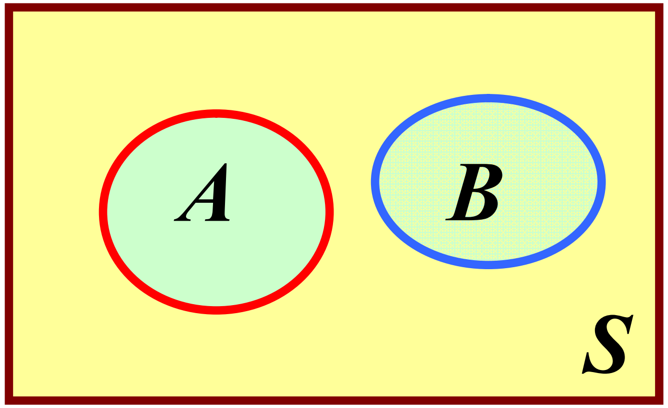
两两互不相容。

又如，出现大于3的点的事件 $A=\{4, 5, 6\}$

与出现小于3的点的事件 $B=\{1, 2\}$

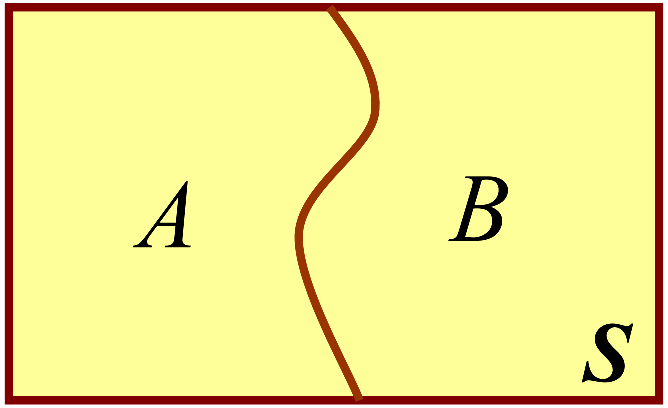
是互不相容的：$AB=\varnothing$

A与B互斥



$$AB=\varnothing$$

A与B对立



$$AB=\varnothing \quad \text{and } A\cup B=S$$

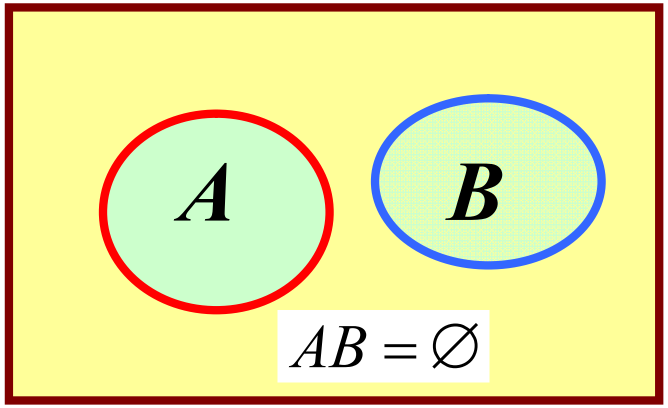
对立事件一定互不相容，

但互不相容事件未必对立。

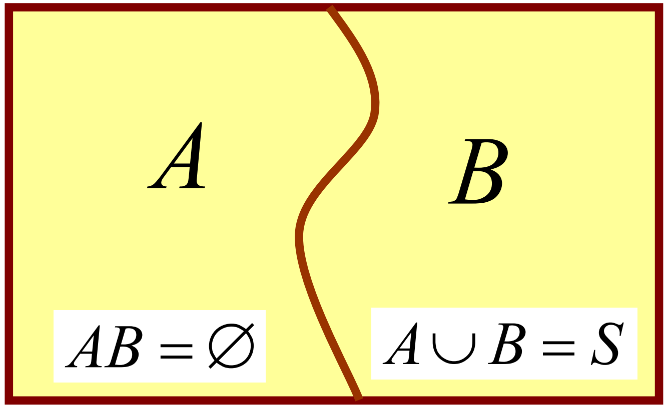
互逆一定互斥

互斥未必互逆

A与B互斥



A与B对立



对立事件一定互不相容，但互不相容事件未必对立。

例如，在抛一颗骰子的试验中，
样本空间 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$。

出现大于3的点的事件 $A=\{4, 5, 6\}$ 与出现小于3的点的事件 $B=\{1, 2\}$ 是互不相容的: $AB=\varnothing$
但它们不是对立的：$A\bigcup B \neq S$

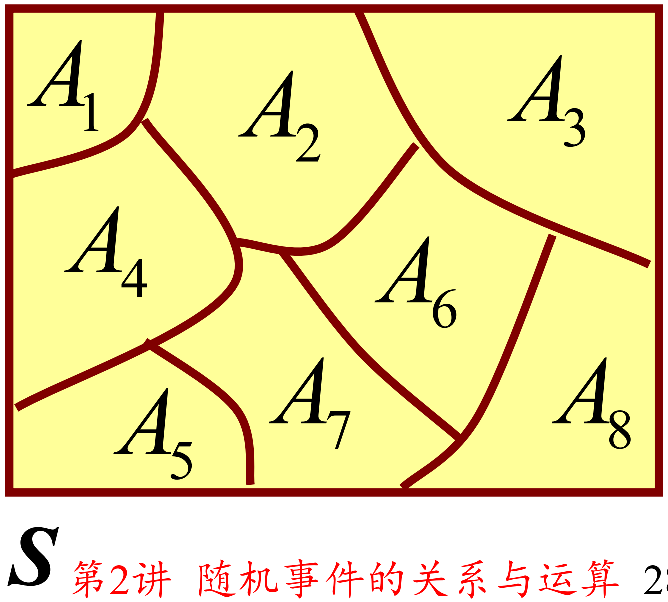
8. 完备事件组

如果事件 $A_1,\ldots,A_n$ 两两互不相容，并且

$$A_1 \cup \ldots \cup A_n = S$$

则称 $A_1,\ldots,A_n$ 是一个完备事件组。

每一次试验中，完备事件组中有且仅有一个事件发生。



例1 掷一颗骰子，观察出现的点数。

事件 A 表示"奇数点",

事件 B 表示"点数小于5",

事件 C 表示"小于6 的偶数点".

用集合的列举表示法表示下列事件:

$$S, A, B, C, A\cup B, B-A,$$

$$B-\overline{C}, AB, AC, \overline{A}\cup B$$

掷一颗骰子的试验，观察出现的点数。

事件 A 表示"奇数点", 事件 B 表示"点数小于5", 事件 C 表示"小于6 的偶数点".

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$A = \{1,3,5\}$$

$$B = \{1,2,3,4\}$$

$$C = \{2,4\}$$

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$$

$$B - A = \{2,4\}$$

$$B - \overline{C} = \{2,4\}$$

$$AB = \{1,3\}$$

$$AC = \varnothing$$

$$\overline{A} \cup B = \{1,2,3,4,6\}$$

例2 从一批产品中每次取出一个产品进行检验(每次取出的产品不放回), 事件A_i表示第 i次取到合格品 (i=1, 2, 3). 试用事件的运算符号表示下列事件:

三次都取到了合格品;
三次中至少有一次取到合格品;
三次中恰有两次取到合格品;
三次中最多有一次取到合格品.

从一批产品中每次取出一个产品进行检验(每次取出的产品不放回), 事件A_i表示第 i 次取到合格品(i=1,2,3). 试用事件的运算符号表示下列事件:

三次全取到合格品: $A_1 A_2 A_3$

三次中至少有一次取到合格品: $A_1 \cup A_2 \cup A_3$

三次中恰有两次取到合格品:

$$A_1 A_2 \overline{A_3} \cup A_1 \overline{A_2} A_3 \cup \overline{A_1} A_2 A_3$$

三次中至多有一次取到合格品:

$$\overline{A_1}\,\overline{A_2} \cup \overline{A_1}\,\overline{A_3} \cup \overline{A_2}\,\overline{A_3}$$

事件的运算律

由于事件是用样本空间中的集合来定义的，

事件的运算也是用集合的运算来定义的，

因此事件的运算律与我们熟悉的集合的运算律相同。

设 A，B，C 为事件，则有

(1) 交换律

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{或} \quad A+B = B+A$$

$$A \cap B = B \cap A \quad \text{或} \quad AB = BA$$

(2) **结合律**

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C\overset{记}{=}A\cup B\cup C$$

或 $$A+(B+C)=(A+B)+C=A+B+C$$

$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C=A\cap B\cap C$$

或 $$A(BC)=(AB)C=ABC$$

(3) 分配律

$$A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$$

并对交的分配律

或 $$A+BC=(A+B)(A+C)$$

和对积的分配律

$$A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$$

交对并的分配律

或 $$A(B+C)=AB+AC$$

积对和的分配律

(4) 德摩根律（对偶原理）

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$ 并的非等于非的交

或 $$\overline{A + B} = \overline{A}\,\overline{B}$$ 和的非等于非的积

“*A*或*B*都不发生”等价于“非*A*和非*B*都发生”

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$ 交的非等于非的并

或 $$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$$ 积的非等于非的和

“*A*与*B*不同时发生”等价于“非*A*, 非*B*至少有一个发生”

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

证明 $x \in \overline{A \cup B} \quad \Leftrightarrow x \notin A \cup B$

$\Leftrightarrow x \notin A$ and $x \notin B$

$\Leftrightarrow x \in \bar{A}$ and $x \in \bar{B}$

$\Leftrightarrow x \in \bar{A} \cap \bar{B}$

$$\therefore \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

(4) 德摩根律（对偶原理）

$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B} \qquad \overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$$

可以推广到有限个和可列个事件：

$$\overline{\bigcup_{i\in I}A_i}=\bigcap_{i\in I}\overline{A_i}$$

并的非等于非的交

$$\overline{\bigcap_{i\in I}A_i}=\bigcup_{i\in I}\overline{A_i}$$

交的非等于非的并

奥古斯都·德·摩根

Augustus De Morgan

英国 数学家、逻辑学家

1806-1871

童年

德·摩根生于印度马德拉斯管辖区。其父在东印度公司工作，母亲是James Dodson（曾编制反对数表）的后代。德·摩根七个月大时，举家迁回英国。

奥古斯都·德·摩根

十岁时，父亲去世，她母亲带他搬到英国西部。其数学才华一直未被发现，直至十四岁时，一位家庭的朋友意外发现他精心绘制的尺规作图。

德·摩根有一目失明。于是他求学时期没有参与任何体育活动，因此被同学取笑。

德·摩根的母亲是英国教会的活跃分子，寄望儿子成为牧师。而他的中学老师，毕业于牛津大学奥里尔学院的Mr Parsons，是个擅长古典文学多于数学的人。可是德·摩根都不受这些长辈的影响。

大学教育

1823年，16岁的他进入剑桥大学三一学院，与乔治·皮库克和威廉·修艾尔成为终身的好朋友。德·摩根受皮库克影响，引起了对代数和逻辑的兴趣。

他主要的娱乐是笛。

(5) 其他运算律

$A \cup A = A$ 或 $A + A = A$

$A \cap A = A$ $AA = A$

等幂律

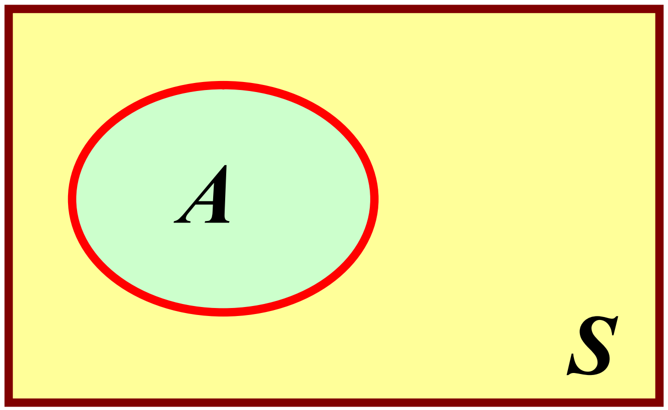
$A \cup S = S$ $A + S = S$

$A \cap S = A$ $AS = A$

$A \cup \varnothing = A$ $A + \varnothing = A$

$A \cap \varnothing = \varnothing$ $A\varnothing = \varnothing$

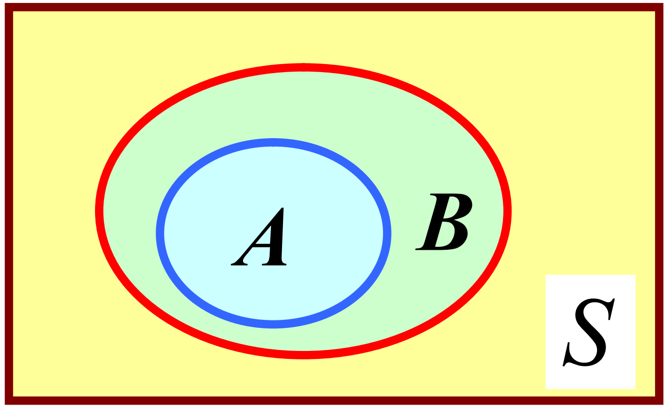
0-1律



(5) 其他运算律

若 $A \subset B$ 则 $A \bigcup B = B$

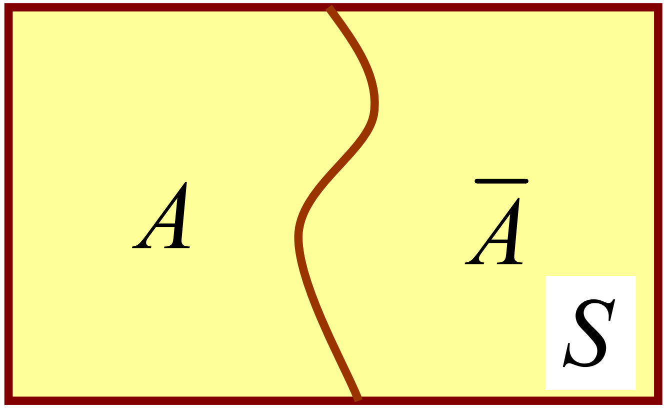
吸收律 $A \bigcap B = A$



$$A \bigcap \overline{A} = A\overline{A} = \varnothing$$

互补律

$$A \bigcup \overline{A} = A + \overline{A} = S$$



$$\overline{\overline{A}} = A$$ **双重否定律**

例3 设某学生考试，记 $A=$ {数学及格}，

$B=$ {英语及格}， 则

$A\bigcup B=$ {数学、英语至少有一科及格}

$AB=$ {数学、英语都及格}

$\overline{A\bigcup B}=\bar{A}\bar{B}=$ {数学、英语都不及格}

$\bar{A}\bigcup\bar{B}=\overline{AB}=$ {数学、英语至少有一科不及格}

$\bar{A}B=$ {英语及格，但数学不及格}

例4 一名射手连续向某个目标射击三次。事件 A_i 表示该射手第 i 次射击时击中目标(i=1,2,3).

试用文字叙述下列事件:

$$A_1+A_2;\ \overline{A_2};\ A_1+A_2+A_3;$$

$$A_1A_2A_3;\ A_3-A_2;\ A_3\overline{A_2};\ \overline{A_1+A_2};$$

$$\overline{A_1}\,\overline{A_2};\ \overline{A_2}+\overline{A_3};\ \overline{A_2A_3};$$

$$A_1A_2+A_1A_3+A_2A_3$$

解

$A_1 + A_2$:前两次至少有一次击中

$\overline{A}_2$:第二次未击中

$A_1 + A_2 + A_3$:三次中至少一次击中

$A_1 A_2 A_3$:三次都击中

$A_3 - A_2 = A_3 \overline{A}_2$:第三次击中但第二次未击中

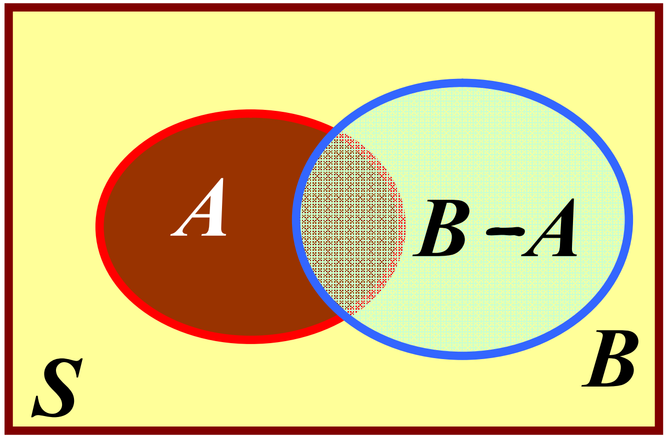
$\overline{A_1 + A_2} = \overline{A}_1 \overline{A}_2$:前两次均未击中

$\overline{A}_2 + \overline{A}_3 = \overline{A_2 A_3}$:后两次至少有一次未击中

$A_1 A_2 + A_1 A_3 + A_2 A_3$:三次射击至少两次中

例5 证明：

$$A\cup B = A\cup(B-A)$$



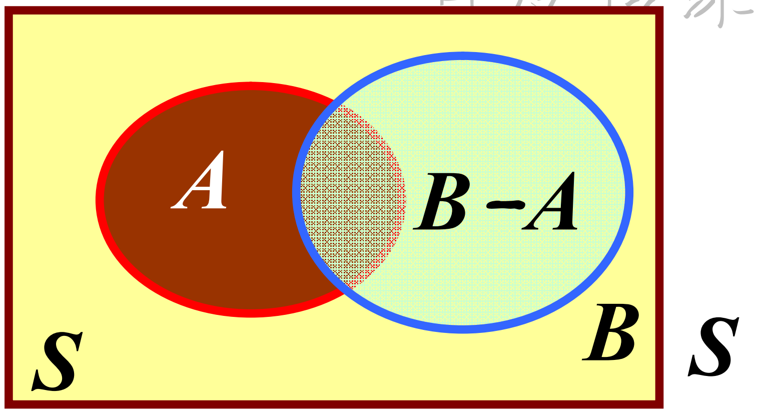
（和事件的互斥分解）

证 $A\cup(B-A) = A\cup(B\overline{A})$

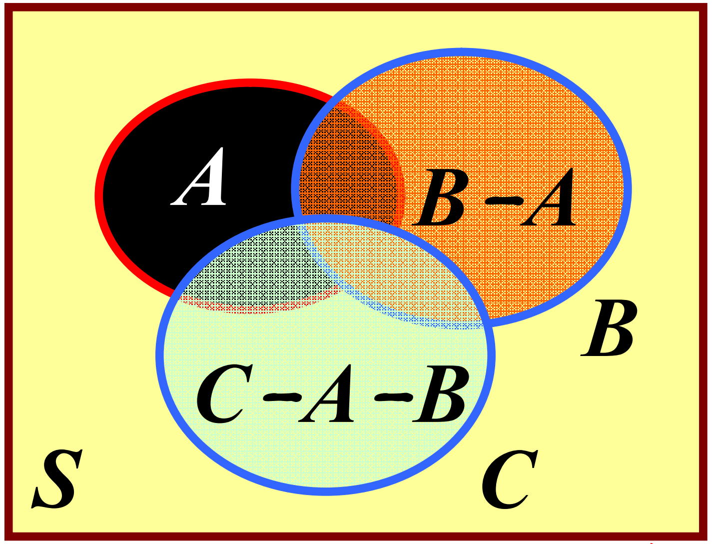
$$= (A\cup B)(A\cup\overline{A}) = (A\cup B)S = A\cup B$$

和事件的互斥分解

$$A \cup B = A \cup (B - A)$$



同理 $A \cup B \cup C = A \cup (B - A) \cup (C - A - B)$



请看下一讲

第 3 讲 频率与概率

本课程的视频在百度传课
http://www.chuanke.com
在百度传课搜：徐小湛

本课程主要参考教材

浙江大学 第四版

四川大学 徐小湛

我的QQ: 2243414853

微博: @川大徐小湛

微信: scuxuxz

Email: xuxzmail@163.com