

# 图神经网络导论

## 图卷积神经网络

授课教师：周晟

浙江大学 软件学院

2021.11

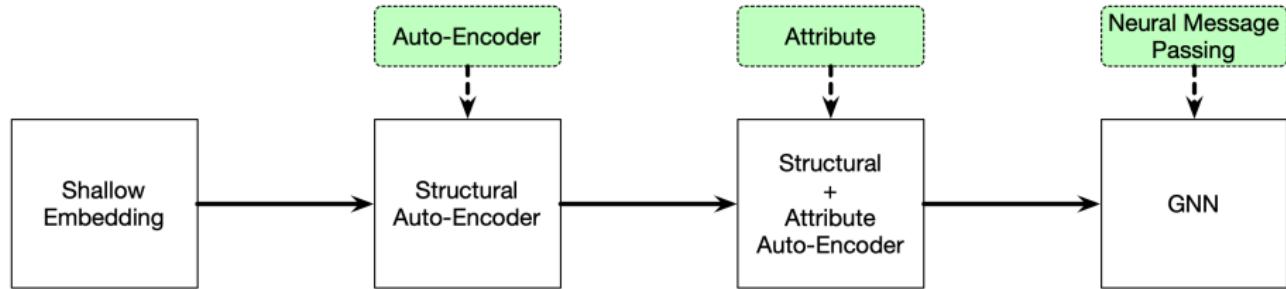


# 课程内容

- ① 上节课回顾
- ② 数学基础
  - 基变换
  - 特征值特征向量
- ③ 卷积
  - 生活中的卷积
  - 数学上的卷积
  - 计算机视觉上的卷积
- ④傅立叶变换
  - 卷积与傅立叶变换
- ⑤ 图傅立叶变换
- ⑥ 卷积图神经网络实例



# 上节课回顾



图神经网络发展历史

## 图神经网络的设计

- ① Aggregation
- ② Update

What? How? Why?

## 1 上节课回顾

## 2 数学基础

- 基变换
- 特征值特征向量

## 3 卷积

- 生活中的卷积
- 数学上的卷积
- 计算机视觉上的卷积

## 4 傅立叶变换

- 卷积与傅立叶变换

## 5 图傅立叶变换

## 6 卷积图神经网络实例



# 内积与正交基

向量的内积操作讲两个向量映射为实数：

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n)^\top = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

以二维空间为例，向量的内积可以理解为两个向量的模长乘积乘以两个向量的夹角余弦：

$$A \cdot B = |A||B| \cos(a) = |A| \cos(a)|B|$$

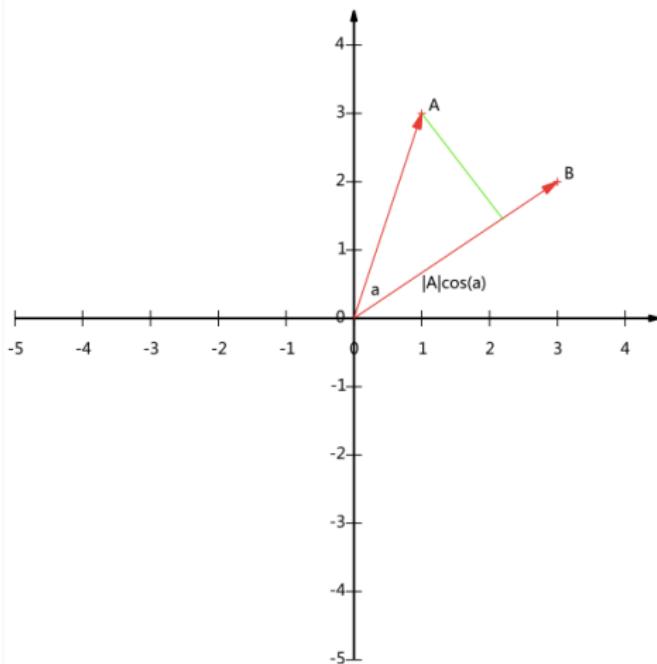
其中  $|A|$  是向量  $A$  的模（标量长度）， $a$  是两个向量之间的夹角。 $|A|\cos(a)$  称为向量  $A$  投影的矢量长度。

## 标量长度与矢量长度

标量长度总是大于等于 0，值就是线段的长度；而矢量长度可能为负，其绝对值是线段长度，而符号取决于其方向与标准方向相同或相反。

# 内积与正交基

二维空间中的内积操作：



## 基向量

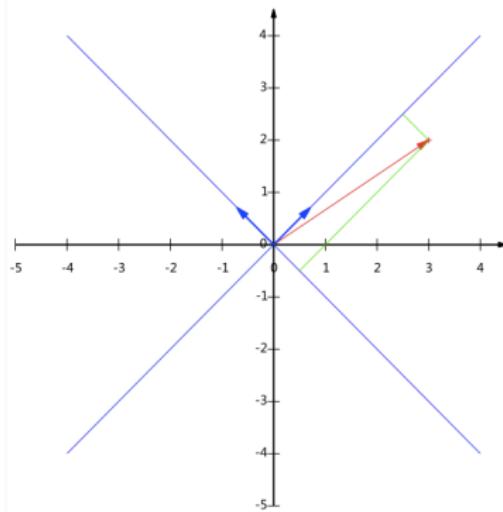
如果向量  $B$  的模为 1，则向量  $A$  和向量  $B$  的内积等于  $A$  向  $B$  所在直线投影的矢量长度。此时向量  $B$  也称为基向量。



## 向量的内积操作

# 内积与正交基

要准确描述向量，首先要确定一组基，然后给出在基所在的各个直线上的投影值。任何两个线性无关（不在同一直线上）的二维向量都可以成为一组基，但是我们通常选取正交的一组向量作为基，也称为正交基。



二维空间中的两组正交基



# 基变换

对于原空间的一个向量，如果用在使用新基表示的空间中重新描述该向量，只需将基向量对应的矩阵成一原向量，就可以作为基变换之后新的坐标。单向量的基变换：

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

多向量的基变换：

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{2} & 4/\sqrt{2} & 6/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



# 特征值特征向量

## 特征值特征向量

如果非 0 向量  $x$  可以满足如下的条件：

$$Ax = \lambda x$$

则该向量  $x$  称为矩阵  $A$  的特征向量， $\lambda$  称为  $x$  对应的特征值。

特征分解：

$$\begin{aligned} A &= V \operatorname{diag}(\lambda) V^{-1} \\ A &= \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i v_i^T \end{aligned}$$



## 1 上节课回顾

## 2 数学基础

- 基变换
- 特征值特征向量

## 3 卷积

- 生活中的卷积
- 数学上的卷积
- 计算机视觉上的卷积

## 4 傅立叶变换

- 卷积与傅立叶变换

## 5 图傅立叶变换

## 6 卷积图神经网络实例



# 生活中的卷积



## 抛骰子游戏

抛两个质地均匀的骰子，  
总数为 8 的概率是多少？

离散卷积：抛骰子游戏



# 生活中的卷积

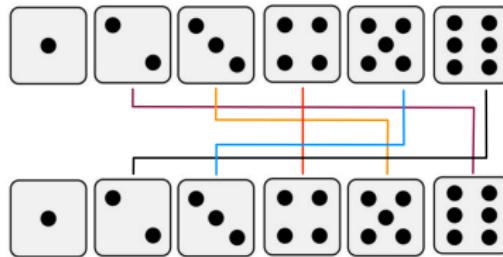


离散卷积：抛骰子游戏

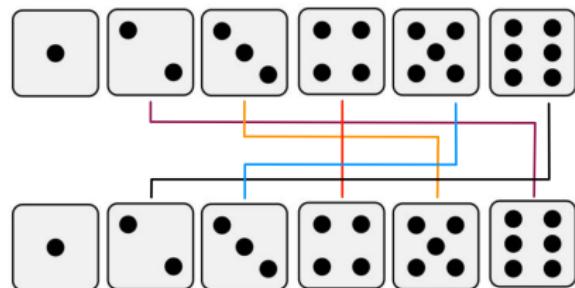
## 抛骰子游戏

抛两个质地均匀的骰子，  
总数为 8 的概率是多少？

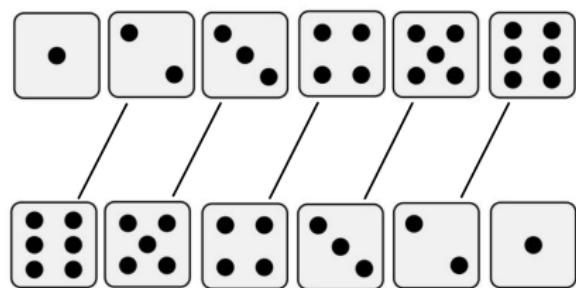
$$\sum_{m=2}^6 f(8-m)g(m)$$



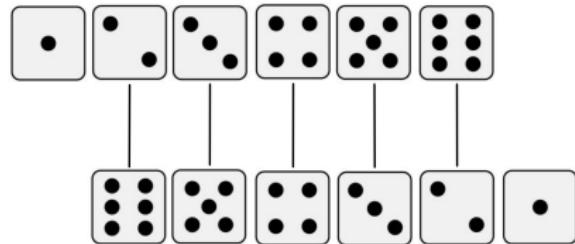
# 生活中的卷积



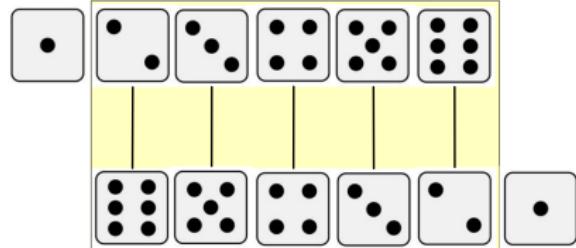
解



卷



移



积

# 生活中的卷积



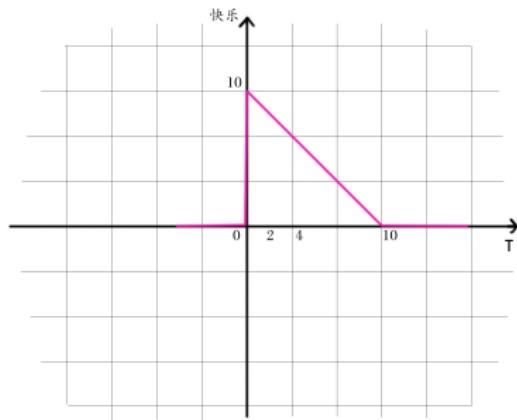
肥宅快乐问题

## 肥宅快乐问题

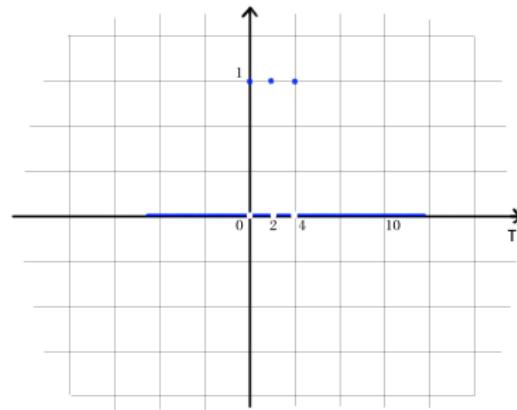
如果喝一口肥宅水，可以让快乐指数瞬间增加了 10 点，但是快乐指数马上开始下降，并在 10 分钟后消失。

若张三每 2 分钟喝一口，他在第 8 分钟的快乐指数是多少？

# 生活中的卷积



快乐消失曲线  $10 - t$



间隔的快乐



# 生活中的卷积

张三在第 8 分钟的快乐指数：

$$h(8) = [10 - (8 - 0)] + [10 - (8 - 2)] + [10 - (8 - 4)]$$

张三在小于 10 的任意时刻  $t$  的快乐指数：

$$h(t) = [10 - (t - 0)] + [10 - (t - 2)] + [10 - (t - 4)]$$

定义函数  $f(t) = 1, t = 0, 2, 4$  和  $g(t) = 10 - t$ , 张三的快乐指数为：

$$h(T) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(T-t)dt$$



# 生活中的卷积

快乐函数：

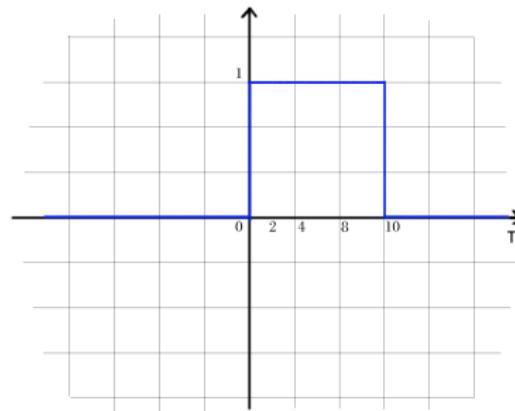
$$h(T) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(T-t)dt$$

- ①  $h(T)$  表示张三在  $T$  时刻的快乐度
- ②  $f(t)$  表示喝可乐的信号，也就是行为
- ③  $g(t)$  表示快乐程度的信号，也就是后果

如果一个函数表示行为，另一个函数表示后果，卷积公式得到的就是所有行为  $f$  在效果函数  $g$  的作用下产生的后果。



# 生活中的卷积



连续的可乐

连续的快乐

假设究极肥宅李四在  $0 - 10$  分钟内一直在喝可乐，那么他在第 8 分钟的快乐度有多少？

# 生活中的卷积

- 我们同样可以写出计算式：

$$h(8) = \int_0^8 [10 - (8 - t)] dt$$

- 拓展到任意时刻  $T$

$$h(T) = \int_0^T [10 - (T - t)] dt$$

- $T \leq 10$  时，用  $f(t) = 1, t \in [0, T]$ ,  $g(t) = (10 - t)$  来表达：

$$h(T) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(T - t)dt$$



## 1 上节课回顾

## 2 数学基础

- 基变换
- 特征值特征向量

## 3 卷积

- 生活中的卷积
- 数学上的卷积
- 计算机视觉上的卷积

## 4 傅立叶变换

- 卷积与傅立叶变换

## 5 图傅立叶变换

## 6 卷积图神经网络实例



# 数学上的卷积

## 卷积的定义

卷积是一种定义在两个函数  $f, g$  上的数学操作  $(f * g)(n) :$

### ① 连续卷积:

$$(f * g)(n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(n - \tau)d\tau$$

### ② 离散卷积:

$$(f * g)(n) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)g(n - \tau)$$

卷积的三个基本操作: 翻转, 滑动, 叠加

# 数学上的卷积

$$(f * g)(n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(n - \tau)d\tau$$

- **卷**: 先对  $g$  函数进行翻转，相当于在数轴上把  $g$  函数做个轴对称，也就是卷积的“卷”的由来。
- **积**: 在连续情况下，积指的是对两个函数的乘积求积分，在离散情况下就是加权求和，为简单起见就统一称为积。



## 1 上节课回顾

## 2 数学基础

- 基变换
- 特征值特征向量

## 3 卷积

- 生活中的卷积
- 数学上的卷积
- 计算机视觉上的卷积

## 4 傅立叶变换

- 卷积与傅立叶变换

## 5 图傅立叶变换

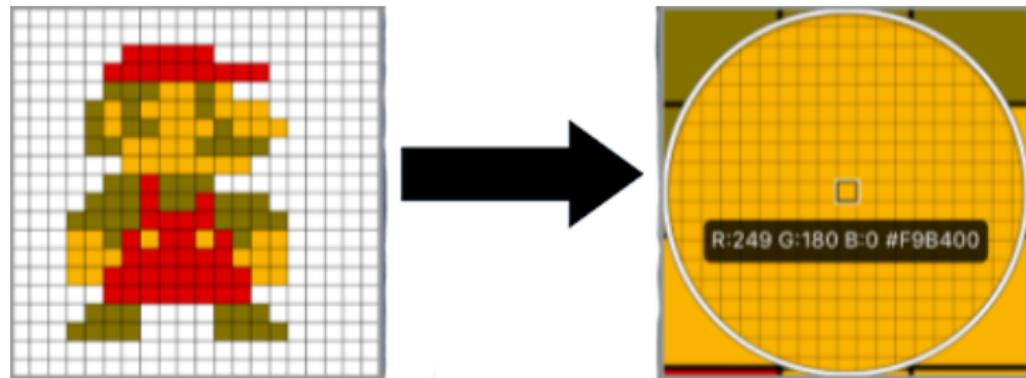
## 6 卷积图神经网络实例



# 计算机视觉上的卷积

## 计算机视觉训练问题

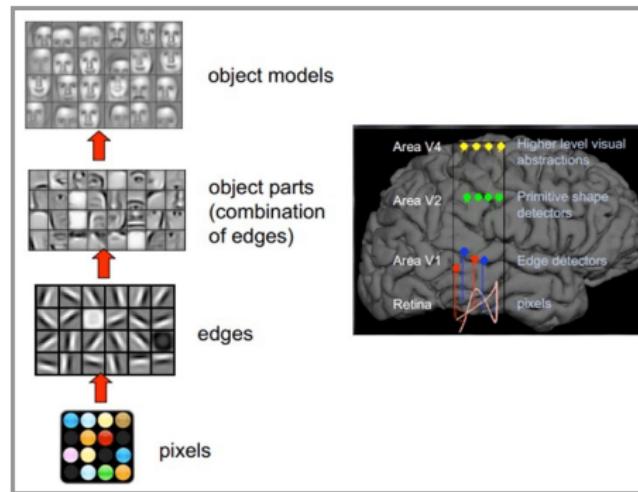
- ① 全连接神经网络参数过多，难以训练
- ② 像素间矢量位置关系容易丢失
- ③ 与人类视觉原理难以匹配



# 计算机视觉上的卷积

## 人类的视觉原理

从原始信号摄入开始（瞳孔摄入像素 Pixels），接着做初步处理（大脑皮层某些细胞发现边缘和方向），然后抽象（大脑判定，眼前的物体的形状，是圆形的），然后进一步抽象（大脑进一步判定该物体是只气球）。



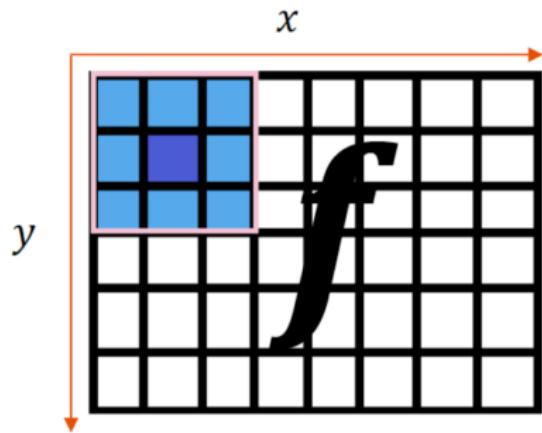
# 计算机视觉上的卷积

## 卷积神经网络的设计动机

- ① 平移不变性 (translation invariance): 不管检测对象出现在图像中的哪个位置，神经网络的前面几层应该对相同的图像区域具有相似的反应，即为“平移不变性”。
- ② 局部性 (locality): 神经网络的前面几层应该只探索输入图像中的局部区域，而不过度在意图像中相隔较远区域的关系，全局的特征依靠堆叠的多层卷积进行抽样。



# 计算机视觉上的卷积



$g(1,1)$	$g(0,1)$	$g(-1,1)$
$g(1,0)$	$g(0,0)$	$g(-1,0)$
$g(1,-1)$	$g(0,-1)$	$g(-1,-1)$

$$\begin{aligned} h(1,1) = & f(0,0)g(1,1) + f(1,0)g(0,1) + f(2,0)g(-1,1) \\ & + f(0,1)g(1,0) + f(1,1)g(0,0) + f(2,1)g(-1,0) \\ & + f(0,2)g(1,-1) + f(1,2)g(0,-1) + f(2,2)g(-1,-1) \end{aligned}$$

# 计算机视觉上的卷积

$$h(x, y) = (f * g)(x, y) = \sum_{m,n} f(x - m, y - n)g(m, n)$$

# 从图像卷积到图卷积

## 图像卷积的成功

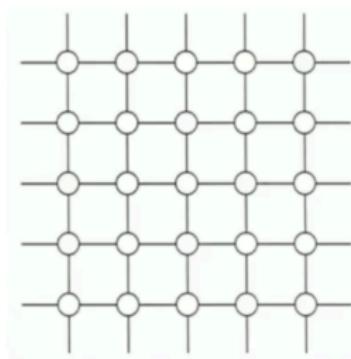
- ① 平移不变性（一举多得）
- ② 矢量信息保留（图像数据特点）

## 卷积用于图数据

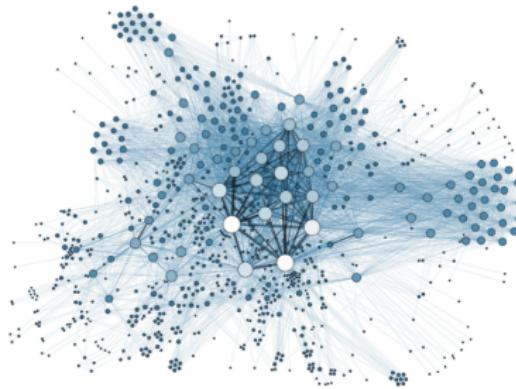
- ① 共享结构特征（一举多得）
- ② 排列不变性（图数据特点）



# 从图像卷积到图卷积



Grid-like network



Irregular network

## 图卷积的困难

- ① 节点没有顺序（排列不变性）
- ② 节点邻居没有固定个数（难以定义统一的特征提取函数）

## ① 上节课回顾

## ② 数学基础

- 基变换
- 特征值特征向量

## ③ 卷积

- 生活中的卷积
- 数学上的卷积
- 计算机视觉上的卷积

## ④ 傅立叶变换

- 卷积与傅立叶变换

## ⑤ 图傅立叶变换

## ⑥ 卷积图神经网络实例



# 卷积与傅立叶变换

## 傅立叶变换的定义

傅立叶变换是一种将时域信号转换为频域信号的线性积分变换：

$$\hat{f}(v) = \int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-2\pi i vt} dt$$

经过傅立叶变换得到的函数  $\hat{f}$  称为原函数  $f$  的频谱，在许多情况下，傅里叶变换是可逆的，即可通过  $\hat{f}$  得到其原函数  $f$ 。



# 生活中的傅立叶变换



高音甜 中音准 低音沉

时域信号难以直接分析出高、中、低音，他是怎么做到的？



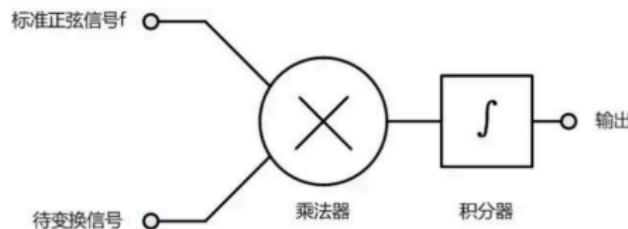
# 傅立叶变换

## 傅立叶变换的假设

任何连续周期信号可以由一组适当的正弦曲线组合而成。

## 正弦函数的特性：正交性

任意两个不同频率的正弦波的乘积，在两者的公共周期内的积分等于零。



## 基于傅立叶变换的滤波器<sup>1</sup>

<sup>1</sup><https://kknews.cc/education/p6qjkxp.html>

# 傅里叶变换

欧拉公式：

$$e^{i\theta} = i \sin \theta + \cos \theta$$

$$e^{i\pi} = -1$$

$(\cos \theta, i \sin \theta)$  是复平面上单位圆上的点

把  $\theta = -2\pi f t$  代入， $f$  代表频率， $t$  代表时间。为了区分函数  $f()$  与频率  $f$ ，我们把频率记作  $v$

# 傅里叶变换

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-2\pi i v t} dt$$

## 傅立叶变换的三层操作

- ①  $e^{-2\pi i v t}$ : 用时间和频率描述的复平面上的**单位向量**, 负号表示该向量随时间朝顺时针转动
- ②  $f(t)$  表示作用于单位向量的变换
- ③  $\int_{t_1}^{t_2} () dt$  表示对作用之后的向量的积分

# 傅里叶变换

信号的变换



# 傅里叶变换

# 傅里叶变换

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-2\pi i v t} dt$$

- 在上述例子中，傅里叶变换的第二层将一个余弦函数按照频率  $f$  “卷”了起来，成为复平面上的一朵花（一条曲线）
- 不难发现，傅里叶变换是对单个函数的先“卷”后“积”，而卷积是对两个函数中的一个先“卷”后“积”，他们之间难道有什么关系吗？



# 卷积与傅里叶变换

傅里叶变换：将时间的函数转化为频率的函数

$$\mathcal{F}\{f\}(v) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)e^{-2\pi i vt} dt$$

傅里叶逆变换：将频率的函数转化回时间的函数

$$\mathcal{F}\{f\}^{-1}(t) = \int_{t_1}^{t_2} f(v)e^{2\pi i vt} dv$$

卷积：

$$h(n) = (f * g)(n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(n - \tau)d\tau$$

傅立叶变换与卷积的数学形式惊人相似！



# 卷积与傅里叶变换

$$\begin{aligned} h(n) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(n - \tau)d\tau \\ \mathcal{F}\{f * g\}(v) &= \mathcal{F}\{h\}(v) \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(n)e^{-2\pi i n \cdot v} dn \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(\tau)g(n - \tau)e^{-2\pi i n \cdot v} d\tau dn \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(\tau) \left( \int_{\mathbb{R}} g(n - \tau)e^{-2\pi i n \cdot v} dn \right) d\tau \end{aligned}$$

此处进行了一次“交换积分次序”



# 卷积与傅里叶变换

代入  $y = n - \tau; dy = dn$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f * g\}(v) &= \int_{\mathbb{R}} f(\tau) \left( \int_{\mathbb{R}} g(y) e^{-2\pi i(y+\tau) \cdot v} dy \right) d\tau \\&= \int_{\mathbb{R}} f(\tau) e^{-2\pi i\tau \cdot v} \left( \int_{\mathbb{R}} g(y) e^{-2\pi iy \cdot v} dy \right) d\tau \\&= \int_{\mathbb{R}} f(\tau) e^{-2\pi i\tau \cdot v} d\tau \int_{\mathbb{R}} g(y) e^{-2\pi iy \cdot v} dy \\&= \mathcal{F}\{f\}(v) \cdot \mathcal{F}\{g\}(v)\end{aligned}$$

最后对等式的两边同时作傅里叶逆变换  $\mathcal{F}^{-1}$ ，得到

$$f * g = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f\} \cdot \mathcal{F}\{g\}\}$$



# 图卷积

$$f * g = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f\} \cdot \mathcal{F}\{g\}\}$$

两个函数的卷积可以写成傅里叶变换的形式。

这个公式能否帮助我们定义图上的卷积操作？

## 图上的卷积

- ① 定义图上的傅立叶变换/逆变换
- ② 定义图上的信号  $f$
- ③ 定义图上的操作  $g$  (学习目标)

# 图傅里叶变换

- 用  $w$  表示  $2\pi v$ , 傅立叶变换可转化为:

$$\mathcal{F}[f(t)] = \int f(t)e^{-iwt}dt$$

- $e^{-iwt}$  是复平面上的一个旋转向量 (基向量), 傅立叶变换等价于信号  $f(t)$  在该基向量上投影的积分
- 基向量  $e^{-iwt}$  与图数据有何关系?

基向量  $e^{-iwt}$  是图拉普拉斯矩阵的特征向量!



# 拉普拉斯算子

## 拉普拉斯算子

一个函数的拉普拉斯算子定义为函数梯度 ( $\nabla f$ ) 的散度 ( $\nabla \cdot$ )，即

$$\Delta f = \nabla^2 f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

- 一个  $n$  元函数的梯度为  $\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i}, i = 1, \dots, n \right\}$
- 一个矢量  $\{F_{x_i}, i = 1, \dots, n\}$  的散度为  $\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_{x_i}}{\partial x_i}$

将拉普拉斯算子作用于  $e^{-iwt}$ ， $\Delta e^{-iwt} = \frac{\partial^2 e^{-iwt}}{\partial t^2} = ?$



# 图傅里叶变换-拉普拉斯算子

- 将拉普拉斯算子作用于  $e^{-iwt}$  上，也就是求二阶导数，有

$$\Delta e^{-iwt} = \frac{\partial^2 e^{-iwt}}{\partial t^2} = -w^2 e^{-iwt}$$

- 拉普拉斯算子本质上是一种变换，可以用矩阵表示
- 根据广义特征方程  $Ax = \lambda x$ ,  $e^{-iwt}$  就是拉普拉斯算子对应的变换矩阵  $A$  的特征向量。

拉普拉斯算子对应的变换矩阵  $A$  是什么？



# 图相关矩阵定义：邻接矩阵

邻接矩阵，记作  $W$ ，有时也记作  $A$ ， $i, j$  位置的元素表示第  $i$  个节点和第  $j$  个节点的权重或连通信息

$$W = A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



# 图相关矩阵定义：度矩阵

度矩阵  $D$ , 仅对角线上有元素, 第  $i$  行表示第  $i$  个节点的度

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$



# 图相关矩阵定义：拉普拉斯矩阵

拉普拉斯矩阵的定义为： $L = D - W$

$$L = D - W = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L = D - W = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$



# 从拉普拉斯算子到拉普拉斯矩阵

拉普拉斯矩阵：

$$L = D - W$$

下面我们考虑离散拉普拉斯算子。离散函数的导数如下所示

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= f'(x) = f(x+1) - f(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= f''(x) \approx f'(x) - f'(x-1) \\ &= f(x+1) + f(x-1) - 2f(x)\end{aligned}$$



# 拉普拉斯算子-拉普拉斯矩阵

二维离散函数的二阶导数如下：

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\&= f(x+1, y) + f(x-1, y) - 2f(x, y) \\&\quad + f(x, y+1) + f(x, y-1) - 2f(x, y) \\&= f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) + f(x, y-1) - 4f(x, y)\end{aligned}$$

二阶导数等于其在所有自由度上进行一次运动之后获得的增益的和。二维离散函数的自由度分别是  $x, y$  两个维度的  $+1$  和  $-1$  共四个方向。

# 拉普拉斯矩阵

## 图上的自由度

给定一个有  $n$  个节点的图，在离散的图上，从  $i$  节点出发的一次运动可以到达任意邻居。若该图为无权图，则所有邻居到达概率一致，若该图为有权图，则可达概率与权重成正比。

设  $f$  函数的定义域为离散的  $1, 2, \dots, n$ ，用  $f_i$  表示  $f$  在  $i$  节点处的取值。

根据图上自由度的定义，图上的拉普拉斯算子定义如下：

$$\Delta f_i = \sum_{j=1}^n w_{ij} (f_i - f_j) = d_i f_i - \sum_{j=1}^n w_{ij} f_j$$



# 图傅里叶变换

$$\Delta f_i = \sum_{j=1}^n w_{ij} (f_i - f_j) = d_i f_i - \sum_{j=1}^n w_{ij} f_j$$

对应的变换矩阵为：

$$\Delta f = \begin{pmatrix} \Delta f_1 \\ \vdots \\ \Delta f_n \end{pmatrix} = (D - W)f = Lf$$

因此对于图信号来说，拉普拉斯算子与拉普拉斯矩阵有相同的作用。



# 拉普拉斯矩阵

## 拉普拉斯矩阵的性质

① 对称矩阵

$$L = L^T$$

② 半正定

$$x^T L x \geq 0$$

半正定性决定了拉普拉斯矩阵一定存在  $N$  个相互正交的特征向量  
(正交基)



# 拉普拉斯矩阵半正定性

$$\begin{aligned}x^T L x &= x^T D x - x^T A x = \sum_{i=1}^n d_i x_i^2 - \sum_{i,j=1}^n x_i x_j A_{ij} \\&= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n d_i x_i^2 - 2 \sum_{i,j}^n x_i x_j A_{ij} + \sum_{j=1}^n d_j x_j^2 \right) \\&= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n A_{ij} \right) x_i^2 - 2 \sum_{i,j}^n x_i x_j A_{ij} + \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n A_{ji} \right) x_j^2 \right) \\&= \frac{1}{2} \left( \sum_{i,j=1}^n A_{ij} x_i^2 - 2 \sum_{i,j=1}^n x_i x_j A_{ij} + \sum_{j,i=1}^n A_{ji} x_j^2 \right) \\&= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} (x_i^2 - 2x_i x_j + x_j^2) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} (x_i - x_j)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

# 从拉普拉斯算子到拉普拉斯矩阵

## 拉普拉斯矩阵的特征向量

前述已证明,  $e^{-iwt}$  是拉普拉斯算子对应的变换矩阵的特征向量, 因此  $e^{-iwt}$  是上述定义的拉普拉斯矩阵的特征向量。

$e^{-iwt}$  可通过特征分解求得:

$$L = U \Lambda U^T$$

其中

$$U = [u_1, \dots, u_n]$$

表示特征向量

$$\Lambda = \text{diag} ([\lambda_1, \dots, \lambda_n])$$

表示特征值



## 1 上节课回顾

## 2 数学基础

- 基变换
- 特征值特征向量

## 3 卷积

- 生活中的卷积
- 数学上的卷积
- 计算机视觉上的卷积

## 4 傅立叶变换

- 卷积与傅立叶变换

## 5 图傅立叶变换

## 6 卷积图神经网络实例



# 图傅立叶变换

## 图上的卷积

- ① 定义图上的信号  $f$ : 每个节点的特征
- ② 定义图上的操作  $g$ : 拉普拉斯矩阵的特征向量
- ③ 定义图上的傅立叶变换/逆变换: 变换后的邻居特征的求和

图傅立叶变换:

$$\hat{x} = \mathcal{G}\mathcal{F}\{f\}(\lambda_l) = \sum_{i=1}^n f(i)u_l(i)^T = U^T x$$

$$x = (f(1) \dots f(n)) \in \mathbb{R}^n$$

图傅立叶逆变换

$$x = \mathcal{I}\mathcal{G}\mathcal{F}\{\hat{f}\}(i) = \sum_{l=0}^{n-1} \hat{f}(\lambda_l) u_l(i) = U \hat{x}$$



# 图傅里叶变换

图傅立叶变换矩阵形式定义：

$$\hat{x} = U^T x$$

图傅立叶逆变换矩阵形式定义：

$$x = U \hat{x}$$

在理解  $U$  是图拉普拉斯矩阵的特征向量之前，我们先把  $U$  看作一个普通的向量，那么图傅里叶变换的实质就是对节点的特征向量做了一次线性变换，而这个线性变换包含了图拓扑的信息

# 图上的卷积

- 已知卷积可以写成傅里叶变换的形式

$$f * g = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f\} \cdot \mathcal{F}\{g\}\}$$

- 已知图傅里叶变换及其逆变换：

$$\mathcal{G}\mathcal{F}\{x\} = U^T x \quad , \quad \mathcal{IG}\mathcal{F}\{x\} = U x$$

- 图卷积公式则呼之欲出：

$$x * y = U (U^T x \cdot U^T y)$$

$U^T y$  去哪了？



# 图傅里叶变换-卷积

$$x * y = U \left( U^T x \cdot U^T y \right)$$

通过简单的恒等变换：

$$U^T y = [\theta_0, \dots, \theta_{n-1}]^T$$

$$g_\theta = \text{diag} ([\theta_0, \dots, \theta_{n-1}])$$

图上的卷积可以表示为：

$$x * y = U \left( (U^T x) \odot (U^T y) \right)$$

$$x * y = U g_\theta U^T x$$



# 图傅里叶变换与图卷积

$$x * y = \textcolor{red}{U} g_{\theta} \textcolor{green}{U}^T x$$

图卷积操作可以通过如下的变换实现：

- ① 图信号的傅立叶变换，从时域转化为频域

$$\mathcal{G}\mathcal{F}\{x\} = \textcolor{green}{U}^T x$$

- ② 频域基变换操作

$$g_{\theta} = \text{diag}([\theta_0, \dots, \theta_{n-1}])$$

- ③ 傅立叶逆变换

$$\mathcal{I}\mathcal{G}\mathcal{F}\{x\} = \textcolor{red}{U} x$$



## ① 上节课回顾

## ② 数学基础

- 基变换
- 特征值特征向量

## ③ 卷积

- 生活中的卷积
- 数学上的卷积
- 计算机视觉上的卷积

## ④ 傅立叶变换

- 卷积与傅立叶变换

## ⑤ 图傅立叶变换

## ⑥ 卷积图神经网络实例



# Spectral GCN

$$x * y = U g_\theta U^T x$$

- [Bruna et al., 2013] 中的谱图卷积神经网络：

$$x_{k+1,j} = h \left( \sum_{i=1}^{f_k} U F_{k,i,j} U^T x_{k,i} \right)$$
$$j = 1, \dots, f_{k+1}$$

- $h$  表示非线性激活函数



## 谱域图卷积的缺陷

- ① 计算拉普拉斯矩阵的特征值特征向量时间复杂度高，尤其是在大规模图数据上。
- ② 频域卷积无约束，容易丢失结构信息

无约束频域卷积丢失结构信息：

$$G_\theta(L) = \cos(L) = I - \frac{L^2}{2!} + \frac{L^4}{4!} \dots$$

当  $L$  的幂次足够大时，每个节点将与网络中的所有节点共享信号。



谱域图卷积操作的恒等变换：

$$y = g_\theta(L)x = g_\theta(U\Lambda U^T)x = Ug_\theta(\Lambda)U^Tx$$

- 而 Chebyshev 网络就是把  $g_\theta(\Lambda)$  近似为切比雪夫多项式的 K 阶截断：

$$g_\theta(\Lambda) \approx \sum_{k=0}^K \theta_k T_k(\tilde{\Lambda}), \tilde{\Lambda} = 2\Lambda_n/\lambda_{\max} - I_n$$

- 采用切比雪夫多项式是因为它可以循环递归求解。为了避免特征值分解，我们可将上述改写为关于  $L$  的函数如下：

$$y = U \sum_{k=0}^K \theta_k T_k(\tilde{\Lambda}) U^T x = \sum_{k=0}^K \theta_k T_k(\tilde{L}) x, \tilde{L} = 2L/\lambda_{\max} - I_n$$

## 换一种更清晰的写法

$$g_{\beta}(\Lambda) = \sum_{k=0}^K \beta_k \Lambda^k \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

- 因为  $U\Lambda^k U^T = (U\Lambda U^T)^k = \tilde{L}^k, \quad \tilde{L} = \frac{2}{\lambda_{\max}} L - I_N$
- 卷积公式就可以写成

$$\mathbf{x} *_G \mathbf{y} = \mathbf{U} g_{\beta}(\Lambda) \mathbf{U}^T \mathbf{x} = \sum_{k=0}^K \beta_k \tilde{L}^k \mathbf{x}$$



# Spectral GCN VS ChebyNET 异同

- 不再需要特征向量分解
- 时间复杂度从  $O(n^2)$  降到了  $O(|E|)$

$$\mathbf{x} *_G \mathbf{y} = \mathbf{U} g_\theta(\Lambda) \mathbf{U}^T \mathbf{x} = \sum_{k=0}^K \beta_k \tilde{L}^k \mathbf{x}$$

- 卷积的范围仅限于距离中心节点  $k$  跳的邻居节点范围内



$$\mathbf{x} *_G \mathbf{y} = \mathbf{U} g_{\theta}(\Lambda) \mathbf{U}^T \mathbf{x} = \sum_{k=0}^K \beta_k \tilde{L}^k \mathbf{x}$$

- 设定  $k = 1$  那卷积公式可以简化为

$$\mathbf{x} *_G \mathbf{y} \approx \beta'_0 \mathbf{x} + \beta'_1 (L - I_N) \mathbf{x}$$

- 进一步减少参数

$$\beta = \beta'_0 = \beta'_1$$

$$\mathbf{x} *_G \mathbf{y} \approx \beta (L) \mathbf{x}$$



- 设定  $k = 1$ , 也就是只考虑一阶邻居信息, 卷积公式可以简化为:

$$\mathbf{x} *_{\mathcal{G}} \mathbf{y} \approx \beta(L) \mathbf{x}$$

- 当图中每个节点的表示不是单独的标量而是一个大小为  $C$  的向量时, 可以使用其变体进行处理:

$$Z = LX\Theta$$

- 其中,  $\Theta \in \mathbb{R}^{C \times F}$  表示参数矩阵,  $Z \in \mathbb{R}^{N \times F}$  为相应的卷积结果。此时, 每个节点的节点表示被更新成了一个新的  $F$  维向量, 该  $F$  维向量包含了相应的一阶邻居上的信息。



$$Z = LX\Theta$$

- 再加上非线性激活函数，我们可以得到图卷积网络的最终公式：

$$H^{(l+1)} = \sigma(LH^{(l)}W^{(l)})$$

- 其中，第  $l$  层网络的输入为  $H^{(l)} \in \mathbb{R}^{N \times D}$  (初始输入为  $H^{(0)} = X$ )， $N$  为图中的节点数量，每个节点使用  $D$  维的特征向量进行表示。



$$H^{(l+1)} = \sigma(LH^{(l)}W^{(l)})$$

- 这样做有什么问题？



# 归一化拉普拉斯

- 采用加法规则时，对于度大的节点特征越来越大，而对于度小的节点却相反，这可能导致网络训练过程中梯度爆炸或者消失的问题
- 所以我们需要对  $L$  进行归一化：**定义** 归一化拉普拉斯如下：

$$\hat{L}_{sym} = \hat{D}^{-1/2} \hat{A} \hat{D}^{-1/2}$$

$$\hat{A} = A + I$$

$$\hat{D} = D + I$$

- 简单的归一化方法： $\hat{D}^{-1} \hat{A}$
- 但是这样得到的矩阵是非对称阵
- 所以使用  $\hat{D}^{-1/2} \hat{A} \hat{D}^{-1/2}$



# 归一化拉普拉斯

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \hat{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$



# 图傅里叶变换

$$\hat{D}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\hat{D}^{-1}\hat{A} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$



# 图傅里叶变换

$$\hat{D}^{-1}\hat{A} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

该矩阵不满足拉普拉斯矩阵的对称性和半正定！

## 解决方案

对  $\hat{A}$  左乘  $\hat{D}^{-1/2}$ , 右乘  $\hat{D}^{-1/2}$ , 得到  $\hat{D}^{-1/2}\hat{A}\hat{D}^{-1/2}$ 。

这样既得到了近似的归一化也保持了矩阵对称性。(左乘是行变换, 右乘是列变换。)

# 图傅里叶变换

$$\hat{D}^{-1/2} \hat{A} \hat{D}^{-1/2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{4}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{4}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{4}\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{4}\sqrt{4}} & \frac{1}{\sqrt{4}\sqrt{4}} & \frac{1}{\sqrt{4}\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{4}\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{4}\sqrt{4}} & \frac{1}{\sqrt{4}\sqrt{4}} & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{4}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{4}} & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{4}} & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$



# 图傅里叶变换

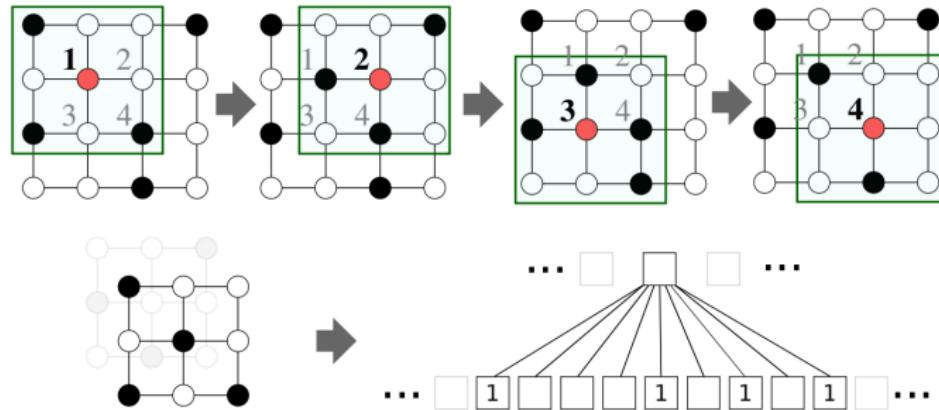
$$H^{(l+1)} = \sigma \left( \tilde{D}^{-\frac{1}{2}} \tilde{A} \tilde{D}^{-\frac{1}{2}} H^{(l)} W^{(l)} \right)$$

等价于：

$$h_v = f \left( \frac{1}{|\mathcal{N}(v)|} \sum_{u \in \mathcal{N}(v)} Wx_u + b \right), \quad \forall v \in \mathcal{V}$$



# 空域图卷积



## 直接类比图像卷积的图卷积方法

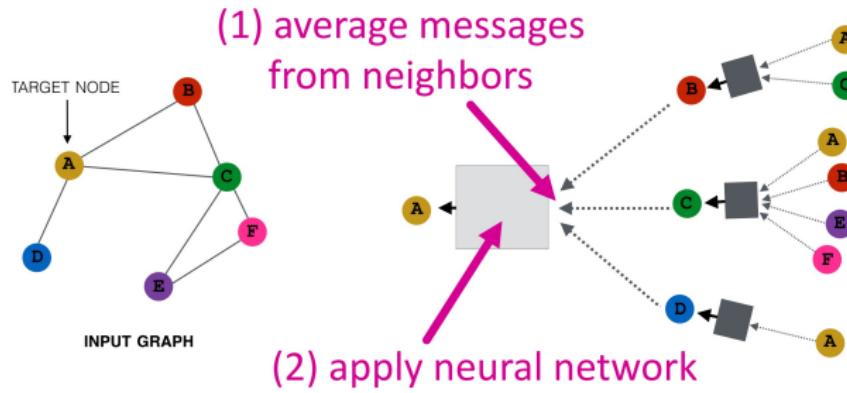
- ① 通过临近关系，选择固定数量的“邻居节点”
  - ② 通过临近关系，对“邻居节点”进行排序
  - ③ 固定数量和序列的“邻居节点”上进行卷积



# 空域图卷积

在 GraphSAGE 的每一层，都执行两个操作：

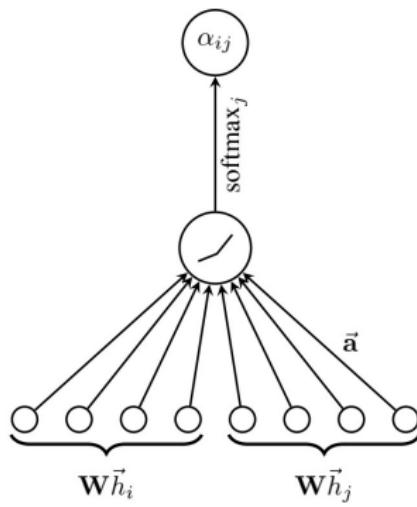
- ① 从邻居节点中聚集特征
- ② 通过神经网络生成目标节点的特征



Permutation Invariant VS. Ordering!



$$\alpha_{ij} = \frac{\exp(\text{LeakReLU}(\vec{a}^T [\vec{W}\vec{h}_i || \vec{W}\vec{h}_j]))}{\sum_{k \in \mathcal{N}_i} \exp(\text{LeakyReLU}(\vec{a}^T [\vec{W}\vec{h}_i || \vec{W}\vec{h}_k]))}$$

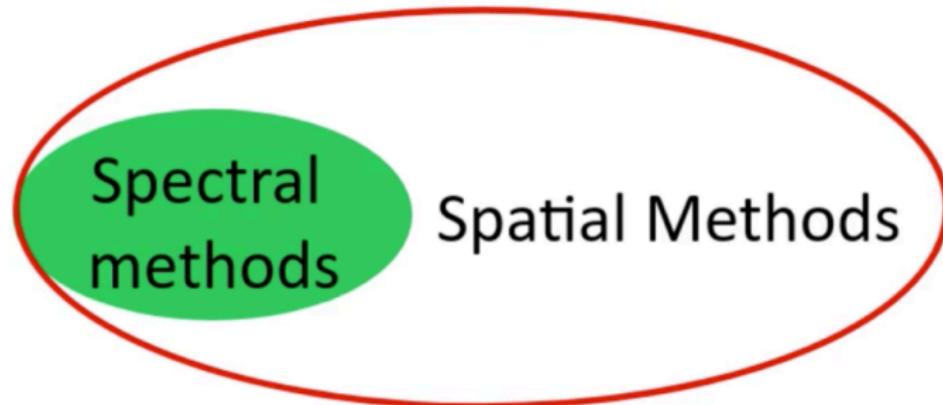


# 频域图卷积与空域图卷积

## 频域图卷积与空域图卷积

频域图卷积是空域图卷积的特例：

$$(f \star g)(x) = \sum_{j=1}^J g_j D_j(x) f$$



# References I

- Bruna, J., Zaremba, W., Szlam, A., and LeCun, Y. (2013). Spectral networks and locally connected networks on graphs. *arXiv preprint arXiv:1312.6203*.
- Tang, S., Li, B., and Yu, H. (2019). Chebnet: Efficient and stable constructions of deep neural networks with rectified power units using chebyshev approximations. *arXiv preprint arXiv:1911.05467*.

