地球物理反问题的逆时偏移算法

答辩人：方少峰

指导教师：陈志明

中国科学院 计算数学与科学工程研究所

2018年5月17号

目录

1 研究动机

2 半空间无相位数据障碍物成像问题

3 Pekeris开波导障碍物成像问题

4 总结与展望

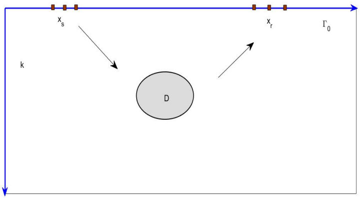
目录

1. 研究动机
2. 半空间无相位数据障碍物成像问题
3. Pekeris开波导障碍物成像问题
4. 总结与展望

半空间逆散射问题

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 n(x) u = -\delta_{x_s}(x), & in \quad \mathbb{R}^2_+ \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2} = 0, & on \quad \Gamma_0 \\ \sqrt{r}\left(\dfrac{\partial u}{\partial r} - iku\right) \to 0, & as \quad r \to \infty, \quad r = |x| \end{cases}$$

其中$n(x)-1$为支集在障碍物D上的有界函数。



散射问题：

令$u^i(x,x_s) = N_k(x,x_s)$为入射场，其中$N(x,y) = \Phi_k(x,y) + \Phi_k(x,y')$为半空间Neumann格林函数，然后求解散射场$u^s(x,x_s) = u(x,x_s) - u^i(x,x_s)$。

逆散射问题：

1. 通过在Γ_0上接受到的散射数据，构建算法来确定障碍物D 的位置、大小和形状。
2. 通过在Γ_0上接受到的无相位数据，构建算法来确定障碍物D 的位置、大小和形状。

常见算法分类与介绍

直接成像法

- 线性采样法(LSM)，分解法(Factorization method)，点源法(Point source method)
- MUSIC成像算法(MUltiple SIgnal Classification)
- 叠前深度偏移(Prestack depth migration)，逆时偏移算法

特点

可以直接成像，计算速度快，但较难给出定量的介质参数信息，且严格的数学理论并不完善

迭代法

- 微分相似优化算法(Differential semblance optimization)
- 全波形反演(Full waveform inversion)
- 逐步线性化算法(Recursive linearization algorithm)

特点

可以得到定量信息，但是需要先验信息，计算耗时，收敛性分析困难

逆时偏移算法(Reverse Time Migration)

基于波动方程反传播和时逆的想法，能够对复杂地质构造进行有效成像，被广泛应用，但是之前的理论分析需要高频渐进假设或者几何光学近似。

逆时偏移算法：数学理论框架

全空间声波、电磁波及弹性波：

1. Chen J, Chen Z, Huang G. *Reverse time migration for extended obstacles: acoustic waves [J]*. Inverse Problems. 2013, 29(8):645-648
2. Chen J, Chen Z, Huang G. *Reverse time migration for extended obstacles: Electromagnetic waves[J]*. Scientia Sinica, 2015, 29(8):085005.
3. Chen Z, Huang G. *Reverse time migration for extended obstacles: Elastic waves (in Chinese)[J]*. Science China Mathematics, 2015, 45(8):1103-1114.

平板声波闭波导：

1. Chen Z M, Huang G H. *Reverse time migration for reconstructing extended obstacles in planar acoustic waveguides[J]*. Science China Mathematics, 2015, 58(9):1811-1834.

声波半空间：

1. Chen Z, Huang G. *Reverse time migration for reconstructing extended obstacles in the half space[J]*. Inverse Problems, 2015, 31(5):055007 (19pp).

扩展：无相位成像算法

1. Chen Z, Huang G. *Phaseless Imaging by Reverse Time Migration: Acoustic Waves[J]*. Numerical Mathematics Theory Methods and Applications, 2017, 10(1):1-21.

逆时偏移算法：基本思想

算法 (半空间逆时偏移算法)

设$u^s(x_r, x_s)$为在接受点$x_r \in \Gamma_0^d$上所接受到的由点源$x_s \in \Gamma_0^d$ 所激发的散射场。其中$\Gamma_0^d := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 \in (-d, d), x_2 = 0\}$，$s = 1, 2, \ldots, N_s$，$r = 1, 2, \ldots, N_r$。然后算法具体实现分为如下两步：

1. 反传播：对$s = 1, 2, \ldots, N_s$，计算反传播场
$$v_b(z, x_s) = \frac{|\Gamma_0^d|}{N_r} \sum_{r=1}^{N_r} \frac{\partial \Phi_k(x_r, z)}{\partial x_2(x_r)} \overline{u^s(x_r, x_s)}, \quad \forall z \in \Omega.$$
2. 互相关：对$z \in \Omega$，计算成像函数
$$I_d(z) = \mathrm{Im}\left\{ \frac{|\Gamma_0^d|}{N_s} \sum_{s=1}^{N_s} \frac{\partial \Phi_k(x_s, z)}{\partial x_2(x_s)} v_b(z, x_s) \right\}.$$

将反传波场$v_b(z, x_s)$代入到成像函数$I_d(z)$，可得
$$I_d(z) = \mathrm{Im}\left\{ \frac{|\Gamma_0^d||\Gamma_0^d|}{N_s N_r} \sum_{s=1}^{N_s} \sum_{r=1}^{N_r} \frac{\partial \Phi_k(x_s, z)}{\partial x_2(x_s)} \frac{\partial \Phi_k(x_r, z)}{\partial x_2(x_r)} \overline{u^s(x_r, x_s)} \right\}, \quad \forall z \in \Omega.$$

逆时偏移算法：成像函数

成像函数

若令$N_s, N_r \to \infty$，则上式可看做对如下积分的近似。

$$I_{\mathrm{RTM}}(z) = \mathrm{Im}\int_{\Gamma_0^d}\int_{\Gamma_0^d}\frac{\partial\Phi_k(x_s,z)}{\partial x_2(x_s)}\frac{\partial\Phi_k(x_r,z)}{\partial x_2(x_r)}\overline{u^s(x_r,x_s)}ds(x_r)ds(x_s),\quad \forall z\in\Omega.$$

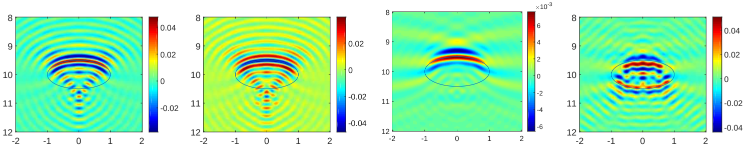
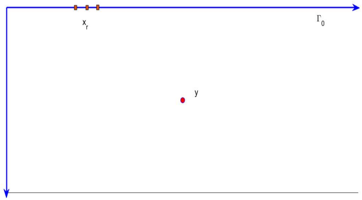


Figure: 半空间逆时偏移算法测试：椭圆型障碍物，从左到右依次为声软障碍物、声硬障碍物、阻抗边界障碍物以及可穿透障碍物，波数$k = 4\pi$，以及$N_r = N_s = 512$。

逆时偏移算法：点扩散函数

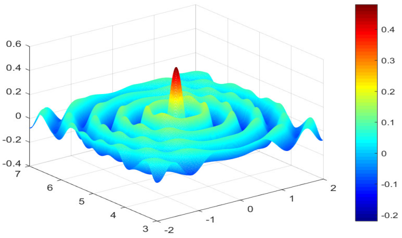


点源问题

设源点$y \in \mathbb{R}^2_+$，然后令$x_r, r = 1, 2, \ldots, N_r$ 为均匀分布在Γ_0^d 上的N_r 个接收点，如何通过在Γ_0^d 上接收到的由点y激发而在点x_r 处接收到的数据：

$$\{N_k(x_r, y); r = 1, 2, \ldots, N_r\},$$

来确定源点y的具体位置？



有限孔穴点扩散函数：

$$J_d(z, y) := \int_{\Gamma_0^d} \frac{\partial G_k(x_r, z)}{\partial x_2} \overline{N_k(x_r, y)} ds(x_r)$$

其中

$$\begin{aligned} G_k(x, y) &:= \Phi_k(x, y) - \Phi_k(x, y'), \\ N_k(x, y) &:= \Phi_k(x, y) + \Phi_k(x, y') \end{aligned}$$

左图为：$-\mathrm{Im}\, J_d(z, y)$，其中$d = 50, k = 4\pi, y = (0, 5), z \in [-2, 2] \times [3, 7]$

目录

1 研究动机

2 半空间无相位数据障碍物成像问题

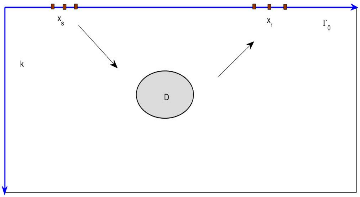
3 Pekeris开波导障碍物成像问题

4 总结与展望

半空间逆散射问题

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 n(x) u = -\delta_{x_s}(x), & in \quad \mathbb{R}^2_+ \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2} = 0, & on \quad \Gamma_0 \\ \sqrt{r}\left(\dfrac{\partial u}{\partial r} - \mathrm{i}ku\right) \to 0, & as \quad r \to \infty, \quad r = |x| \end{cases}$$

其中$n(x)-1$为支集在障碍物D上的有界函数。



散射问题：

令$u^i(x,x_s) = N_k(x,x_s)$为入射场，其中$N_k(x,y) = \Phi_k(x,y) + \Phi_k(x,y')$为半空间Neumann格林函数，然后求解散射场$u^s(x,x_s) = u(x,x_s) - u^i(x,x_s)$。

逆散射问题：

1. 通过在Γ_0上接受到的散射数据，构建算法来确定障碍物D的位置、大小和形状。
2. 通过在Γ_0上接受到的无相位数据，构建算法来确定障碍物D的位置、大小和形状。

求解算法

算法 (半空间无相位逆时偏移算法)

设$|u(x_r,x_s)| = |u^s(x_r,x_s)+u^i(x_r,x_s)|$ 为我们在接收点$x_r\in\Gamma_0^d$出采集的无相位总场数据，其源点为$x_s\in\Gamma_0^d$，并令Ω为采样区域。

1. 反传播：对于$s=1,\ldots,N_s$，计算反传播场

$$v_b(z,x_s)=\frac{|\Gamma_0^d|}{N_r}\sum_{r=1}^{N_r}\frac{\partial\Phi_k(x_r,z)}{\partial x_2(x_r)}\Delta(x_r,x_s),\quad \forall z\in\Omega.$$

其中

$$\Delta(x_r,x_s)=\frac{|u(x_r,x_s)|^2-|u^i(x_r,x_s)|^2}{u^i(x_r,x_s)}.$$

2. 互相关: 对于$z\in\Omega$, 计算成像函数

$$I_d(z)=\mathrm{Im}\left\{\frac{|\Gamma_0^d|}{N_s}\sum_{s=1}^{N_s}\frac{\partial\Phi_k(x_s,z)}{\partial x_2(x_s)}v_b(z,x_s)\right\}.$$

将反传波场$v_b(z,x_s)$代入到成像函数$I_d(z)$，可得

$$I_d(z)=\mathrm{Im}\left\{\frac{|\Gamma_0^d||\Gamma_0^d|}{N_sN_r}\sum_{s=1}^{N_s}\sum_{r=1}^{N_r}\frac{\partial\Phi_k(x_s,z)}{\partial x_2(x_s)}\frac{\partial\Phi_k(x_r,z)}{\partial x_2(x_r)}\Delta(x_r,x_s)\right\},\quad \forall z\in\Omega.$$

算法比较

若令$N_s, N_r \to \infty$，则上式可看做对如下积分的近似。

$$I_{\mathrm{RTM}}^{\mathrm{Phaseless}}(z) = \mathrm{Im}\int_{\Gamma_0^d}\int_{\Gamma_0^d} \frac{\partial \Phi_k(x_s,z)}{\partial x_2(x_s)}\frac{\partial \Phi_k(x_r,z)}{\partial x_2(x_r)}\Delta(x_r,x_s)ds(x_r)ds(x_s),\quad \forall z\in\Omega.$$

观察到

$$\Delta(x_r,x_s) = \overline{u^s(x_r,x_s)} + \frac{|u^s(x_r,x_s)|^2}{u^i(x_r,x_s)} + \frac{u^s(x_r,x_s)\overline{u^i(x_r,x_s)}}{u^i(x_r,x_s)}.$$

据此可得

$$\begin{aligned}
I_{\mathrm{RTM}}^{\mathrm{Phaseless}}(z) &= \mathrm{Im}\int_{\Gamma_0^d}\int_{\Gamma_0^d} \frac{\partial \Phi_k(x_s,z)}{\partial x_2(x_s)}\frac{\partial \Phi_k(x_r,z)}{\partial x_2(x_r)}\overline{u^s(x_r,x_s)}ds(x_r)ds(x_s) \\
&\quad +\mathrm{Im}\int_{\Gamma_0^d}\int_{\Gamma_0^d} \frac{\partial \Phi_k(x_s,z)}{\partial x_2(x_s)}\frac{\partial \Phi_k(x_r,z)}{\partial x_2(x_r)}\frac{|u^s(x_r,x_s)|^2}{u^i(x_r,x_s)}ds(x_r)ds(x_s) \\
&\quad +\mathrm{Im}\int_{\Gamma_0^d}\int_{\Gamma_0^d} \frac{\partial \Phi_k(x_s,z)}{\partial x_2(x_s)}\frac{\partial \Phi_k(x_r,z)}{\partial x_2(x_r)}\frac{u^s(x_r,x_s)\overline{u^i(x_r,x_s)}}{u^i(x_r,x_s)}ds(x_r)ds(x_s) \\
&:= I_{\mathrm{RTM}}(z) + \mathrm{I}_2(z) + \mathrm{I}_3(z)
\end{aligned}$$

数值测试：不同形状的可穿透障碍物

基本参数设置

设$D \subset \Omega$，其中$\Omega = [-2, 2] \times [8, 10]$为采样区域；$h = 10$，其中$h = dist(\Omega, \Gamma_0)$；$d = 50$为孔穴半径；$x_s, s = 1, 2, \dots, N_s$ 和$x_r, r = 1, 2, \dots, N_r$ 分别为在$\Gamma_0^d := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 \in (-d, d), x_2 = 0\}$上均匀分布的源点和接收点。

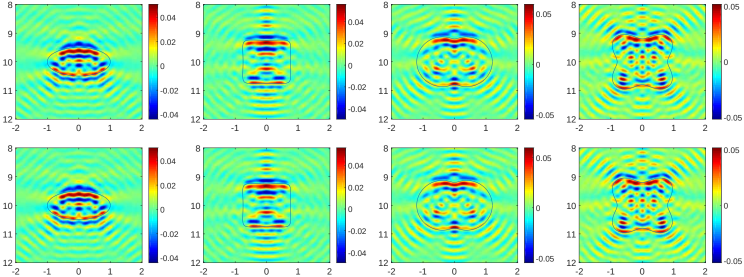


Figure: 数值算例：不同形状的可穿透障碍物，其中第一行为半空间无相位成像算法，第二行为半空间逆时偏移算法。参数为：$k = 4\pi$, and $N_s = 512$, $N_r = 512$。

数值测试：不同边界类型的障碍物

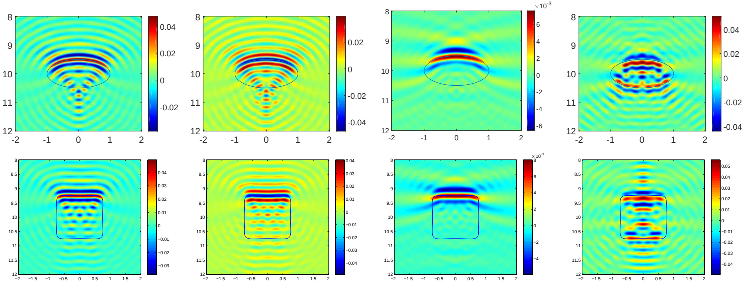


Figure: 数值算例：不同类型的椭圆型障碍物，从左到右依次为声软障碍物、声硬障碍物、阻抗边界障碍物和可穿透障碍物，第一、行分别为椭圆型和方形障碍物。参数为：$k = 4\pi$, and $N_s = 512$, $N_r = 512$。

数值算例：抗噪性和多频测试

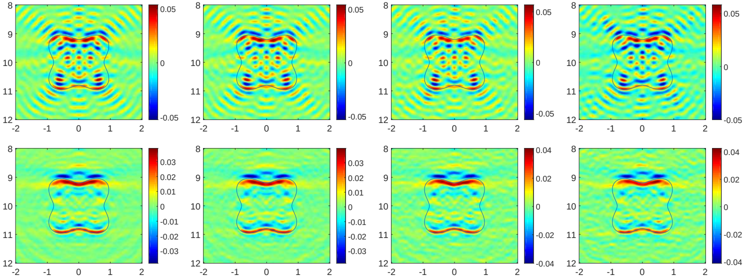


Figure: 数值测试：带噪音数据的可穿透障碍物成像，噪音水平从左到右依次为为：$\mu = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$。第一行是单频测试结果，第二行为多频叠加结果。

注 (带有高斯噪音的接收数据)

$$|u|_{noise} = |u| + v_{noise}, \text{ 其中 } v_{noise} = \mu \max |u| \epsilon, \quad \epsilon \sim N(0,1).$$

数值算例：多个障碍物

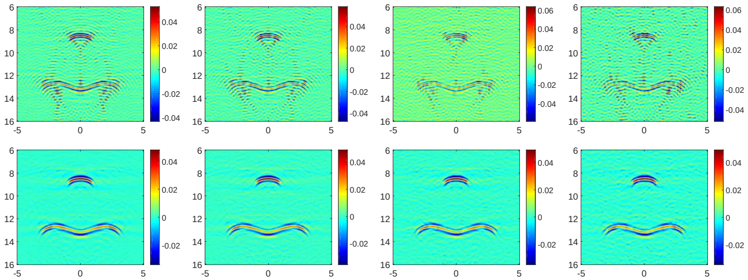


Figure: 数值算例：带噪音数据的两个声软障碍物成像，噪音水平从左到右依次为：$\mu = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$。第一行是单频测试结果，第二行为多频叠加结果。

分辨率分析证明思路

目标：建立成像函数$I_{\mathrm{RTM}}^{\mathrm{Phaseless}}(z)$的分辨率分析

$$I_{\mathrm{RTM}}^{\mathrm{Phaseless}}(z) = I_{\mathrm{RTM}}(z) + \mathrm{I}_2(z) + \mathrm{I}_3(z)$$

注 (半空间RTM成像函数I_{RTM}的分辨率分析)

对任意的$z\in\Omega$，令$\psi(y,z)$为如下问题的散射解

$$\Delta_y \psi(y,z) + k^2 n(y)\psi(y,z) = -k^2(n(y)-1)\overline{F(z,y)} \quad in \quad \mathbb{R}^2.$$

则我们有，对任意的$z\in\Omega$,

$$I_{\mathrm{RTM}}(z) = -\frac{1}{4}\mathrm{Im}\int_D k^2(1-n(y))(\psi(y,z)+\overline{F(z,y)})\overline{F(z,y)}dy + W_{\hat{I}}(z),$$

其中$|W_{\hat{I}}(z)| \le C(1+kd_D)^4((kh)^{-1/2}+h/d)$，关于$z\in\Omega$一致成立。

函数$F(z,y) := -\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_0^\pi e^{\mathrm{i}k(z_1-y_1)\cos\theta+\mathrm{i}k(z_2-y_2)\sin\theta}d\theta$具有如下性质：

存在某个与k无关的常数C使得，

$$|F(z,y)| \le C[(k|z-y|)^{-1/2} + (k|z-y|)^{-1}], \quad \forall z,y\in\Omega.$$

算法分辨率分析

定理 (无相位逆时偏移算法的分辨率分析)

设Ω[a]为采样区域，若$|u(x_r,x_s)| = |u^s(x_r,x_s)+u^i(x_r,x_s))|$为所测量的散射总场的无相位数据，其中$u^s(x,x_s)$ 是以$u^i(x,x_s)=N_k(x,x_s)$ 为入射场的散射解，则我们有

$$I_{\mathrm{RTM}}^{\mathrm{phaseless}}(z) = I_{\mathrm{RTM}}(z) + R_{\mathrm{RTM}}^{\mathrm{phaseless}}(z), \quad \forall z \in \Omega,$$

其中

$$\left| R_{\mathrm{RTM}}^{\mathrm{phaseless}}(z) \right| \leq C(1+\|\mathbb{S}\|)^2 (kh)^{-1/2}, \quad \forall z \in \Omega.$$

其中常数$C>0$ 可能依赖于kd_D 和$\|n(\cdot)\|_{L^\infty(D)}$，但是与$k,h,d_D$无关。

[a] 关于采样区域Ω的假设：$|y_1-z_1| \leq Ch$，$z_2 \leq Ch$，$\forall y,z \in \Omega$，其中$h=dist(\Omega,\Gamma_0)$

注 ($\mathbb{S}$为正问题的解算子)

$\mathbb{S}: L^2(D) \to H^1(D)$,

$$w = \mathbb{S}g$$

其中$w \in H^1(D)$ 为对应于入射场$g \in L^2(D)$的散射场，其满足如下方程：

$$\Delta w + k^2 n(x) w = k^2(1-n(x))g \ \ in\ \ \mathbb{R}_+^2, \quad \frac{\partial w}{\partial x_2} = 0 \ \ on\ \ \Gamma_0,$$

目录

1 研究动机

2 半空间无相位数据障碍物成像问题

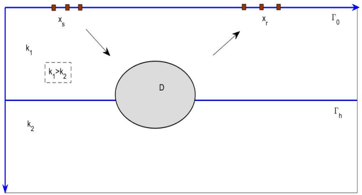
3 Pekeris开波导障碍物成像问题

4 总结与展望

Pekeris开波导模型

$$\begin{cases} \Delta u + k(x)^2 n(x) u = -\delta_{x_s}(x), & in \quad \mathbb{R}^2_+ \\ [u(\cdot, x_s)]_{\Gamma_h} = \left[\frac{\partial u(\cdot, x_s)}{\partial \nu}\right]_{\Gamma_h} = 0 & \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, & on \quad \Gamma_0 \end{cases}$$

其中$n(x)-1$为支集在障碍物D上的有界函数。



符号说明

背景介质波数$k(x)$ 为

$$k(x) = \begin{cases} k_1 \quad , & x_2 \in (0, h) \\ k_2 \quad , & x_2 \in (h, +\infty) \end{cases}$$

其中$k_1 > k_2$，并记$\Gamma_0, \Gamma_h, L_1, L_2$ 分别为

- $\Gamma_0 = \{(x_1, x_2); x_1 \in \mathbb{R}, x_2 = 0\}$;
- $\Gamma_h = \{(x_1, x_2); x_1 \in \mathbb{R}, x_2 = h\}$;
- $L_1 = \{(x_1, x_2); x_1 \in \mathbb{R}, 0 < x_2 < h\}$;
- $L_2 = \{(x_1, x_2); x_1 \in \mathbb{R}, x_2 > h\}$.

开波导逆散射问题

在Γ_0上接受散射数据，然后构建合适的数值重构算法，来确定障碍物D位置、大小和形状。

散射问题

入射场

令$u^i(x,x_s)=N(x,x_s)$为入射场，其中$N(x,y)$为Pekeris开波导Neumann格林函数，其满足如下方程：

$$\begin{cases} \Delta_x N(x,y)+k^2(x)N(x,y)=-\delta_y(x), & in \quad \mathbb{R}^2_+ \\ [N(\cdot,y)]_{\Gamma_h}=0, \quad \left[\frac{\partial N(\cdot,y)}{\partial\nu}\right]_{\Gamma_h}=0 & \\ \frac{\partial N(x,y)}{\partial x_2}=0, & on \quad \Gamma_0 \end{cases}$$

散射场

散射场$u^s(x,x_s)=u(x,x_s)-u^i(x,x_s)$满足如下方程：

$$\begin{cases} \Delta u^s(x,x_s)+k^2(x)u^s(x,x_s)=k^2(x)[1-n(x)]u(x,x_s), & in \quad \mathbb{R}^2_+ \\ [u^s(\cdot,x_s)]_{\Gamma_h}=0, \quad \left[\frac{\partial u^s(\cdot,x_s)}{\partial\nu}\right]_{\Gamma_h}=0. & \\ \frac{\partial u^s(x,x_s)}{\partial x_2}=0, & on \quad \Gamma_0 \end{cases}$$

开波导散射问题注意事项

1. 开波导格林函数$N(x,y)$积分表达式和波导模式展开的推导及数值计算
2. 辐射条件的提出以及正问题的适定性
3. 正散射问题的数值计算方法

格林函数$N(x,y)$积分表达式

令$\xi=\xi_1+\mathbf{i}\xi_2,\xi_1,\xi_2\in\mathbb{R}$，以及$\mu_j=\sqrt{k_j^2-\xi^2},j=1,2$，并记关于$\xi$的函数$\hat{N}_h(\xi)$ 和$\hat{M}_h(\xi)$如下所示：

$$\hat{N}_h(\xi)=\frac{\mu_1+\mu_2}{\mu_1-\mu_2}-e^{2\mathbf{i}\mu_1 h},\quad \hat{M}_h(\xi)=\frac{\mu_1+\mu_2}{\mu_1-\mu_2}e^{2\mathbf{i}\mu_1 h}-1$$

则格林函数$N(x,y)$有如下表达式

$$N(x,y)=\begin{cases}\Phi_{k_1}(x,y)+\Phi_{k_1}(x,y')+\hat{S}_1(x,y) & ,\quad x\in L_1,y\in L_1\\ \hat{S}_2(x,y) & ,\quad x\in L_2,y\in L_1\\ \hat{K}_1(x,y) & ,\quad x\in L_1,y\in L_2\\ \Phi_{k_2}(x,y)+\hat{K}_2(x,y) & ,\quad x\in L_2,y\in L_2\end{cases}$$

其中$\hat{S}_j(x,y),\hat{K}_j(x,y)$的表达式为

$$\begin{cases}\hat{S}_1(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{SIP}\frac{\mathbf{i}}{2\mu_1}\frac{e^{2\mathbf{i}\mu_1 h}[4\cos(\mu_1x_2)\cos(\mu_1y_2)]}{\hat{N}_h(\xi)}e^{\mathbf{i}(x_1-y_1)\xi}d\xi\\ \hat{S}_2(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{SIP}\frac{2\mathbf{i}e^{\mathbf{i}\mu_1 h}\cos(\mu_1y_2)}{(\mu_1-\mu_2)\hat{N}_h(\xi)}e^{\mathbf{i}\mu_2(x_2-h)+\mathbf{i}(x_1-y_1)\xi}d\xi\\ \hat{K}_1(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{SIP}\frac{2\mathbf{i}e^{\mathbf{i}\mu_1 h}\cos(\mu_1x_2)}{\hat{N}_h(\xi)}e^{\mathbf{i}\mu_2(y_2-h)+\mathbf{i}(x_1-y_1)\xi}d\xi\\ \hat{K}_2(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{SIP}\frac{\mathbf{i}}{2\mu_2}\frac{\hat{M}_h(\xi)}{\hat{N}_h(\xi)}e^{\mathbf{i}\mu_2(x_2+y_2-2h)+\mathbf{i}(x_1-y_1)\xi}d\xi\end{cases}$$

提取波导模式

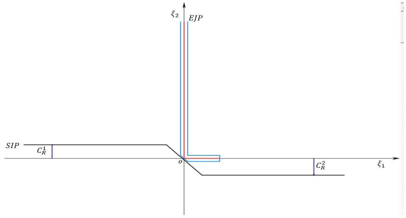


Figure: Sommerfeld积分路径(SIP)

解析分支

对于任意地$z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$，$z^{1/2}$是$\sqrt{z}$ 的如下解析分支：$\mathrm{Im}\,(z^{1/2}) \geq 0$，则对于$z = z_1 + \mathbf{i}z_2$，$z_1, z_2 \in \mathbb{R}$，

$$z^{1/2} = sgn(z_2)\sqrt{\frac{|z| + z_1}{2}} + \mathbf{i}\sqrt{\frac{|z| - z_1}{2}}$$

当z位于右半实轴时，取$z^{1/2}$为$\epsilon \to 0^+$ 时$(z + \mathbf{i}\epsilon)^{1/2}$ 的极限即可。

函数$\hat{N}_h(\xi)$在实轴上的零点

1. 当$\xi \in \{\xi \in \mathbb{R}; |\xi| \geq k_1, |\xi| < k_2\}$时，$\hat{N}_h(\xi) \neq 0$。
2. 若$\sin\left(\sqrt{k_1^2 - k_2^2}h\right) \neq 0$，则当$\xi = \pm k_2$时，$\hat{N}_h(\xi) \neq 0$。
3. 当$\xi \in (k_2, k_1)$时，$\hat{N}_h(\xi) = 0$等价于：$\tan\left(\sqrt{k_1^2 - \xi^2}h\right) = \frac{\sqrt{\xi^2 - k_2^2}}{\sqrt{k_1^2 - \xi^2}}$。记函数$N_h(\xi)$在区间$(k_2, k_1)$的零点为：$\hat{\xi}_m, m = 1, 2 \ldots, \hat{M}$，则$\hat{M} \leq \left[\sqrt{k_1^2 - k_2^2}h/\pi\right] + 1$。

格林函数$N(x,y)$的波导模式展开

设$\hat{\xi}_m$, $m=1,\ldots,\hat{M}$是$\hat{N}_h(\xi)$在区间(k_2,k_1)上的$\hat{M}$ 个实根，并记$\hat{\mu}_{jm}=\mu_j(\hat{\xi}_m), j=1,2$, 则$N(x,y)$ 的波导模式展开为

$$N(x,y)=N_g(x,y)+N_{rad}(x,y)$$

其中$N_g(x,y)=\sum_{m=1}^{\hat{M}} N_m(x,y)$，且

$$\begin{cases} N_m(x,y) &= \frac{\hat{\mu}_{2m}}{\hat{\xi}_m(1-\mathbf{i}\hat{\mu}_{2m}h)}\hat{g}(x_2,\hat{\xi}_m)\hat{g}(y_2,\hat{\xi}_m)e^{\mathbf{i}|x_1-y_1|\hat{\xi}_m} \\ N_{rad}(x,y) &= \frac{\mathbf{i}}{\pi}\int_{\mathbf{i}\infty}^{k_2}\frac{\mu_2\hat{g}(x_2,\xi)\hat{g}(y_2,\xi)}{(k_1^2-k_2^2)\sin^2(\mu_1 h)+\mu_2^2}e^{\mathbf{i}|x_1-y_1|\xi}d\xi \end{cases}$$

其中$N_m(x,y)$中对应于$\hat{\xi}_m\in(k_2,k_1)$ 的函数$\hat{g}(x_2,\hat{\xi}_m)$表达式如下

$$\hat{g}(x_2,\hat{\xi}_m):=\begin{cases}\cos(\hat{\mu}_{1m}x_2), & x_2\in(0,h)\\ \cos(\hat{\mu}_{1m}h)e^{\mathbf{i}\hat{\mu}_{2m}(x_2-h)}, & x_2\in(h,+\infty)\end{cases}$$

此外，$N_{rad}(x,y)$中有向区间$[\mathbf{i}\infty,k_2]:=\{\xi;\xi\in[0,k_2],\ \ 或\xi=\mathbf{i}\eta,\eta\in(0,+\infty)\}$，以及对应于$\xi\in[\mathbf{i}\infty,k_2]$的函数$\hat{g}(x_2,\xi)$如下所示

$$\hat{g}(x_2,\xi):=\begin{cases}\cos(\mu_1x_2), & x_2\in(0,h)\\ \cos(\mu_1h)\cos[\mu_2(x_2-h)]-\frac{\mu_1}{\mu_2}\sin(\mu_1h)\sin[\mu_2(x_2-h)], & x_2\in(h,+\infty)\end{cases}$$

散射问题相关文献：开波导 VS 闭波导

开波导不存在陷阱模式(No Trapped modes in open waveguide)

1. Littman W. *Spectral properties of operators arising in acoustic wave propagation in an ocean of variable depth[J].* Applied Mathematics and Optimization, 1982, 8(1):189-196.
2. Weder R. *Absence of Eigenvalues of the acoustic propagator in deformed wave guides[J].* Rocky Mountain Journal of Mathematics, 1988, 18(18):495-504.
3. Hazard C. *On the absence of trapped modes in locally perturbed open waveguides[J].* Ima Journal of Applied Mathematics, 2014, 80(4):1049.

$$u \in L^2 \Longrightarrow u = 0 \quad a.e.$$

闭波导模型可能存在陷阱模式(Trapped modes may exist in close waveguide)

1. Linton C M, Mciver P. *Embedded trapped modes in water waves and acoustics[J].* Wave Motion, 2007, 45(1):16-29.

散射问题相关文献：适定性

散射条件及适定性

1. Ciraolo G, Magnanini R. *A radiation condition for uniqueness in a wave propagation problem for 2D open waveguides[J].* Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2010, 32(10):1183-1206.
2. Ciraolo G. *A Radiation Condition for the 2-D Helmholtz Equation in Stratified Media[J].* Communications in Partial Differential Equations, 2009, 34(12):1592-1606.
3. Dhia, B. B., Dakhia, G., Hazard, C., Chorfi, L. *Diffraction by a defect in an open waveguide: a mathematical analysis based on a modal radiation condition.* Siam Journal on Applied Mathematics, 2009, 70(3), 677-693.
4. Carlos J H, Jean-Claude N. *Asymptotics for Helmholtz and Maxwell Solutions in 3-D Open Waveguides[J].* Communications in Computational Physics, 2012, 11(2):629-646.

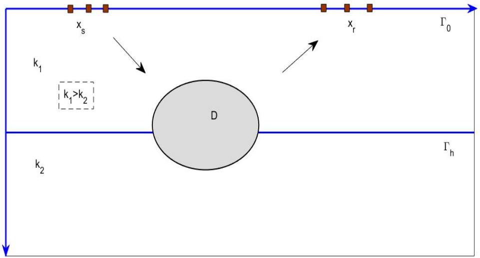
极限吸收原理

1. Ben-Artzi M, Dermenjian Y, Guillot J C. *Acoustic Waves in Perturbed Stratified Fluids: A Spectral Theory[J].* Communications in Partial Differential Equations, 1989, 14(4):479-517.
2. Ben-Artzi M, Guillot J C, Dermenjian Y. *Analyticity properties and estimates of resolvent kernels near thresholds[J].* Communications in Partial Differential Equations, 2000, 25(9-10):1753-1770.
3. Weder R. *Spectral and Scattering Theory for Wave Propagation in Perturbed Stratified Media[M].* Springer New York, 1991.

Pekeris开波导逆散射问题

逆散射问题

- 在半空间边界Γ_0上接受散射数据，然后构建合适的数值重构算法，来确定障碍物D的位置、大小和形状。



开波导反问题相关工作

MUSIC算法

1. Ammari H, Kang H. *Reconstruction of a Small Inclusion in a Two-Dimensional Open Waveguide[J].* Siam Journal on Applied Mathematics, 2005, 65(6):2107-2127.

反问题唯一性

1. Gilbert, R. P., Zhang, N., Zeev, N., Xu, Y. *Inverse problem for wave propagation in a perturbed layered half-space with a bump.* Mathematical and Computer Modelling, 2007, 45(1), 21-33.
2. Gang B, Faouzi T. *Reconstruction of a defect in an open waveguide[J].* Science China Mathematics, 2013, 56(12):2539-2548.

偏移成像

1. Garnier J, Papanicolaou G. *Passive Sensor Imaging Using Cross Correlations of Noisy Signals in a Scattering Medium[J].* Siam Journal on Imaging Sciences, 2009, 2(2):396-437.
2. Garnier J, Papanicolaou G. *Correlation-based virtual source imaging in strongly scattering random media[J].* Inverse Problems, 2012, 28(28):75002-75039(38).
3. Borcea L, Gonzalez dCF, Papanicolaou G, et al. *Filtering deterministic layer effects in imaging [reprint of MR2480120].[J].* Siam Review, 2009, 54(4):757-798.

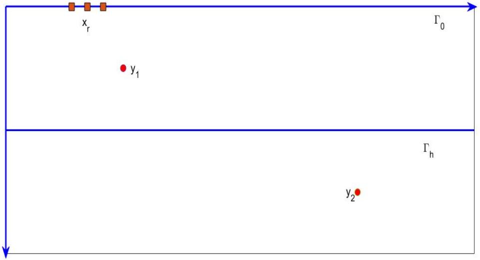
点源问题及点扩散函数

点源问题

设源点$y\in\mathbb{R}^2_+$，然后令$x_r, r=1,2,\ldots,N_r$ 为均匀分布在Γ_0^d 上的N_r 个接收点，如何通过在Γ_0^d 上接收到的由点y激发而在点x_r 处接收到的数据：

$$\{N(x_r,y); r=1,2,\ldots,N_r\},$$

来确定源点y的具体位置？



有限孔穴点扩散函数

离散的有限孔穴点扩散函数

参考声波半空间逆时偏移算法，上述问题可以转化为寻求一个合适的反传播函数$G_{bp}(x,z)$使得：

$$\hat{J}_d(z,y) := \frac{|\Gamma_0^d|}{N_r}\sum_{r=1}^{N_r}\frac{\partial G_{bp}(x_r,z)}{\partial x_2(x_r)}\overline{N(x_r,y)},\quad x_2(x_r)=0$$

拥有如下性质：

- 当$z=y$ 时，$-\mathrm{Im}\,\hat{J}_d(z,y)$ 取得峰值；当z远离y 时，$-\mathrm{Im}\,\hat{J}_d(z,y)$ 逐渐衰减。

当接收点的个数$N_r\to\infty$ 时，$\hat{J}_d(z,y)$将趋于函数$J_d(z,y)$:

$$J_d(z,y) := \int_{\Gamma_0^d}\frac{\partial G_{bp}(x_r,z)}{\partial x_2(x_r)}\overline{N(x_r,y)}ds(x_r)$$

反传播函数选取

(i) 直接推广：取$G_{bp}(x,y) = G_{k_1}(x,y)$，其中函数$G_{k_1}(x,y)$满足

$$\Delta_x G_{k_1}(x,y) + k_1^2 G_{k_1}(x,y) = -\delta_y(x), \quad in \quad \mathbb{R}^2_+; \quad G_{k_1}(x,y) = 0, \quad on \quad \Gamma_0$$

易知：$G_{k_1}(x,y) = \Phi_{k_1}(x,y) - \Phi_{k_1}(x,y')$，其中$\Phi_{k_1}(x,y) = \frac{\mathrm{i}}{4} H_0^{(1)}(k_1|x-y|)$.

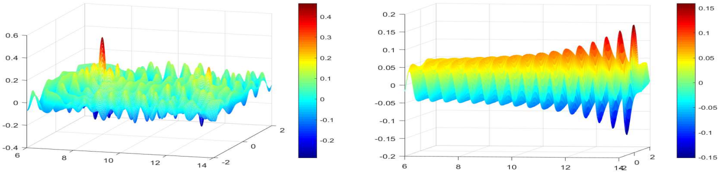


Figure: $-\mathrm{Im}\, J_d(z,y)$，其中$G_{bp}(x,z) = G_{k_1}(x,z)$，左边为源点$y_1 \in L_1$，右边为源点$y_2 \in L_2$。参数：$k_1 = 4\pi, k_2 = 2\pi, h = 10, d = 50, N_r = 256, y_1 = (0,8), y_2 = (0,12)$.

另一种选取方法

(ii) 取$G_{bp}(x,y)=G(x,y)$，其中函数$G(x,y)$满足

$$\begin{cases} \Delta_x G(x,y)+k^2(x)G(x,y)=-\delta_z(y), & in \quad \mathbb{R}^2_+ \\ [G(\cdot,y)]_{\Gamma_h}=0, \quad \left[\frac{\partial G(\cdot,y)}{\partial\nu}\right]_{\Gamma_h}=0 & \\ G(x,y)=0, & on \quad \Gamma_0 \end{cases}$$

其中背景介质波数$k(x)$ 为

$$k(x)=\begin{cases} k_1 & , \quad x_2\in(0,h) \\ k_2 & , \quad x_2\in(h,+\infty) \end{cases}$$

函数$G(x,y)$被称为Pekeris开波导Dirichlet格林函数。

格林函数$G(x,y)$的积分表达式

令$\xi=\xi_1+\mathbf{i}\xi_2,\xi_1,\xi_2\in\mathbb{R}$，以及$\mu_j=\sqrt{k_j^2-\xi^2},j=1,2$，并记关于$\xi$的函数$N_h(\xi)$和$M_h(\xi)$如下所示

$$N_h(\xi)=\frac{\mu_1+\mu_2}{\mu_1-\mu_2}+e^{2\mathbf{i}\mu_1 h},\quad M_h(\xi)=1+\frac{\mu_1+\mu_2}{\mu_1-\mu_2}e^{2\mathbf{i}\mu_1 h},$$

则格林函数$G(x,y)$有如下表达式

$$G(x,y)=\begin{cases}\Phi_{k_1}(x,y)-\Phi_{k_1}(x,y')+S_1(x,y) & ,\quad x\in L_1,y\in L_1\\ S_2(x,y) & ,\quad x\in L_2,y\in L_1\\ K_1(x,y) & ,\quad x\in L_1,y\in L_2\\ \Phi_{k_2}(x,y)+K_2(x,y) & ,\quad x\in L_2,y\in L_2\end{cases}$$

其中$S_j(x,y),K_j(x,y),j=1,2$ 的表达式为

$$\begin{cases}S_1(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{SIP}\frac{-\mathbf{i}}{2\mu_1}\frac{e^{2\mathbf{i}\mu_1 h}[4\sin(\mu_1x_2)\sin(\mu_1y_2)]}{N_h(\xi)}e^{\mathbf{i}(x_1-y_1)\xi}d\xi\\ S_2(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{SIP}\frac{2e^{\mathbf{i}\mu_1 h}\sin(\mu_1y_2)}{(\mu_1-\mu_2)N_h(\xi)}e^{\mathbf{i}\mu_2(x_2-h)+\mathbf{i}(x_1-y_1)\xi}d\xi\\ K_1(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{SIP}\frac{2e^{\mathbf{i}\mu_1 h}\sin(\mu_1x_2)}{(\mu_1-\mu_2)N_h(\xi)}e^{\mathbf{i}\mu_2(y_2-h)+\mathbf{i}(x_1-y_1)\xi}d\xi\\ K_2(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{SIP}\frac{-\mathbf{i}}{2\mu_2}\frac{M_h(\xi)}{N_h(\xi)}e^{\mathbf{i}\mu_2(x_2+y_2-2h)+\mathbf{i}(x_1-y_1)\xi}d\xi\end{cases}$$

格林函数$G(x,y)$的波导模式展开

设ξ_m, $m=1,\ldots,M$是$N_h(\xi)$在区间(k_2,k_1) 上的M 个实根，并记$\mu_{jm}=\mu_j(\xi_m), j=1,2,$ 则$G(x,y)$ 的波导模式展开为

$$G(x,y)=G_g(x,y)+G_{rad}(x,y)$$

其中$G_g(x,y)=\sum_{m=1}^{M}G_m(x,y)$，且

$$\begin{cases} G_m(x,y) & = & \frac{\mu_{2m}}{\xi_m(1-\mathbf{i}\mu_{2m}h)}g(x_2,\xi_m)g(y_2,\xi_m)e^{\mathbf{i}|x_1-y_1|\xi_m} \\ G_{rad}(x,y) & = & \frac{\mathbf{i}}{\pi}\int_{\mathbf{i}\infty}^{k_2}\frac{\mu_2 g(x_2,\xi)g(y_2,\xi)}{(k_1^2-k_2^2)\cos^2(\mu_1 h)+\mu_2^2}e^{\mathbf{i}|x_1-y_1|\xi}d\xi \end{cases}$$

其中$G_m(x,y)$中对应于$\xi_m\in(k_2,k_1)$的$g(x_2,\xi_m)$ 表达式如下

$$g(x_2,\xi_m):=\begin{cases}\sin(\mu_{1m}x_2), & x_2\in(0,h)\\ \sin(\mu_{1m}h)e^{\mathbf{i}\mu_{2m}(x_2-h)}, & x_2\in(h,+\infty)\end{cases}$$

此外$G_{rad}(x,y)$中有向积分区间$[\mathbf{i}\infty,k_2]:=\{\xi;\xi\in[0,k_2],$ 或$\xi=\mathbf{i}\eta,\eta\in(0,+\infty)\}$，以及对应于$\xi\in[\mathbf{i}\infty,k_2]$的函数$g(x_2,\xi)$ 如下

$$g(x_2,\xi):=\begin{cases}\sin(\mu_1 x_2), & x_2\in(0,h)\\ \sin(\mu_1 h)\cos[\mu_2(x_2-h)]+\frac{\mu_1}{\mu_2}\cos(\mu_1 h)\sin[\mu_2(x_2-h)], & x_2\in(h,+\infty)\end{cases}$$

回顾：格林函数$N(x,y)$的波导模式展开

设$\hat{\xi}_m$, $m=1,\ldots,\hat{M}$是$\hat{N}_h(\xi)$在区间(k_2,k_1)上的$\hat{M}$ 个实根，并记$\hat{\mu}_{jm}=\mu_j(\hat{\xi}_m), j=1,2$，则$N(x,y)$ 的波导模式展开为

$$N(x,y)=N_g(x,y)+N_{rad}(x,y)$$

其中$N_g(x,y)=\sum_{m=1}^{\hat{M}} N_m(x,y)$，且

$$\begin{cases} N_m(x,y) &= \frac{\hat{\mu}_{2m}}{\hat{\xi}_m(1-\mathbf{i}\hat{\mu}_{2m}h)}\hat{g}(x_2,\hat{\xi}_m)\hat{g}(y_2,\hat{\xi}_m)e^{\mathbf{i}|x_1-y_1|\hat{\xi}_m} \\ N_{rad}(x,y) &= \frac{\mathbf{i}}{\pi}\int_{\mathbf{i}\infty}^{k_2}\frac{\mu_2\hat{g}(x_2,\xi)\hat{g}(y_2,\xi)}{(k_1^2-k_2^2)\sin^2(\mu_1 h)+\mu_2^2}e^{\mathbf{i}|x_1-y_1|\xi}d\xi \end{cases}$$

其中$N_m(x,y)$中对应于$\hat{\xi}_m\in(k_2,k_1)$ 的函数$\hat{g}(x_2,\hat{\xi}_m)$表达式如下

$$\hat{g}(x_2,\hat{\xi}_m):=\begin{cases}\cos(\hat{\mu}_{1m}x_2), & x_2\in(0,h)\\ \cos(\hat{\mu}_{1m}h)e^{\mathbf{i}\hat{\mu}_{2m}(x_2-h)}, & x_2\in(h,+\infty)\end{cases}$$

此外，$N_{rad}(x,y)$中有向区间$[\mathbf{i}\infty,k_2]:=\{\xi;\xi\in[0,k_2],\ \text{或}\xi=\mathbf{i}\eta,\eta\in(0,+\infty)\}$，以及对应于$\xi\in[\mathbf{i}\infty,k_2]$的函数$\hat{g}(x_2,\xi)$如下所示

$$\hat{g}(x_2,\xi):=\begin{cases}\cos(\mu_1x_2), & x_2\in(0,h)\\ \cos(\mu_1h)\cos[\mu_2(x_2-h)]-\frac{\mu_1}{\mu_2}\sin(\mu_1h)\sin[\mu_2(x_2-h)], & x_2\in(h,+\infty)\end{cases}$$

(ii)另一种选取方法：$G_{bp}(x,y)=G(x,y)$

有限孔穴点扩散函数：

$$J_d(z,y) := \int_{\Gamma_0^d} \frac{\partial G(x_r,z)}{\partial x_2(x_r)} \overline{N(x_r,y)} ds(x_r)$$

其中函数$G(x,z), N(x,y)$分别为Pekeris开波导Dirichlet和Neumann格林函数。

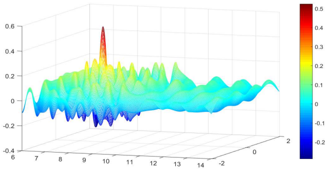


Figure: $-\mathrm{Im}\, J_d(z,y)$，其中$G_{bp}(x,z)=G(x,z)$，左边为源点$y_1\in L_1$，右边为源点$y_2\in L_2$。参数：$k_1=4\pi, k_2=2\pi, h=10, d=50, N_r=256, y_1=(0,8), y_2=(0,12)$.

开波导逆时偏移算法

算法

设Ω为采样区域，令$u^s(x_r,x_s)$ 为在接收点x_r收到的由源点x_s 所激发的散射数据，其中$x_r,x_s\in\Gamma_0^d; r=1,\dots,N_r; s=1,\dots,N_s$.
1° 反传播：对$s=1,\dots,N_s$，计算反传播场

$$v_b(z,x_s)=\frac{|\Gamma_0^d|}{N_r}\sum_{r=1}^{N_r}\frac{\partial G(x_r,z)}{\partial x_2(x_r)}\overline{u^s(x_r,x_s)},\quad \forall z\in\Omega.$$

若令$N_r\to 0$，则上式可看做如下积分的数值近似，

$$\hat{v}_b(z,x_s)=\int_{\Gamma_0^d}\frac{\partial G(x_r,z)}{\partial x_2(x_r)}\overline{u^s(x_r,x_s)}ds(x_r)$$

2° 互相关：对$z\in\Omega$，计算成像函数

$$I_d(z)=\mathrm{Im}\left\{\frac{|\Gamma_0^d|}{N_s}\sum_{s=1}^{N_s}\frac{\partial G(x_s,z)}{\partial x_2(x_s)}v_b(z,x_s)\right\}.$$

将$v_b(z,x_s)$的表达式代入$I_d(z)$，可得

$$I_d(z)=\mathrm{Im}\left\{\frac{|\Gamma_0^d|}{N_s}\frac{|\Gamma_0^d|}{N_r}\sum_{s=1}^{N_s}\sum_{r=1}^{N_r}\frac{\partial G(x_s,z)}{\partial x_2(x_s)}\frac{\partial G(x_r,z)}{\partial x_2(x_r)}\overline{u^s(x_r,x_s)}\right\}.$$

数值测试：$D \subset L_1$，声软障碍物

首先假设$D \subset L_1$，并令$h = 10, d = 50$，源点x_s和接收点x_r在Γ_0^d上均匀分布，其个数为$N_s = N_r = 256$，探测频率$k_1 = 4\pi, k_2 = 2\pi$。除此之外，我们将比较成像函数$I_d(z)$和使用$G_{k_1}(x,z)$做为反传播函数的$I_d^{k_1}(z)$，即

$$I_d^{k_1}(z) = \mathrm{Im}\left\{ \frac{|\Gamma_0^d|}{N_s}\frac{|\Gamma_0^d|}{N_r}\sum_{s=1}^{N_s}\sum_{r=1}^{N_r}\frac{\partial G_{k_1}(x_s,z)}{\partial x_2(x_s)}\frac{\partial G_{k_1}(x_r,z)}{\partial x_2(x_r)}\overline{u^s(x_r,x_s)}\right\}.$$

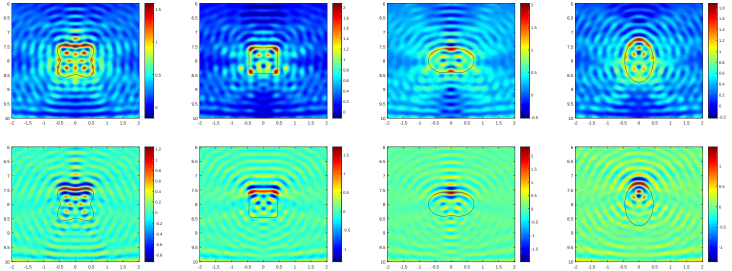


Figure: 算例：测试不同形状的声软障碍物成像效果，从左到右依次为4 叶风扇、矩形、花生以及椭圆形状，其中第一、二行分别为所提算法成像函数$I_d(z)$和成像函数$I_d^{k_1}(z)$的成像效果。

数值测试：$D \subset L_1$，不同类型和边界障碍物

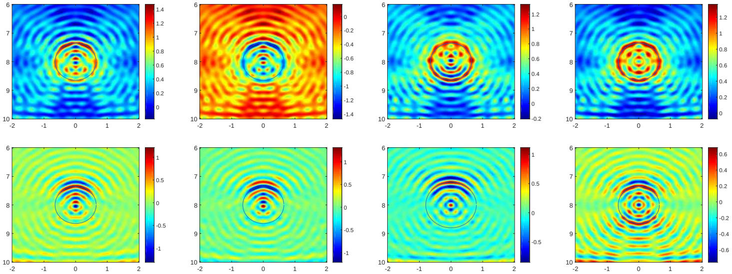


Figure: 测试不同类型不同边界的障碍物：前面三个从左到右依次为声软障碍物、声硬障碍物、阻尼系数为$\eta(x)$的阻抗边界障碍物，最后一个为折射系数为$n(x)$的可穿透障碍物，其中第一行为所提算法成像函数$I_d(z)$的成像效果，第二行为反传播函数是函数$G_{k_1}(x,z)$时所对应成像函数$I_d^{k_1}(z)$的成像效果。

数值测试：$D \subset L_1$，可穿透障碍物，抗噪性及多频测试

带有高斯噪音的接收数据

$$u^s_{noise}(x_r, x_s) = u^s(x_r, x_s) + v_{noise}，其中\ v_{noise} = \mu \max |u^s| \epsilon, \quad \epsilon \sim N(0,1).$$

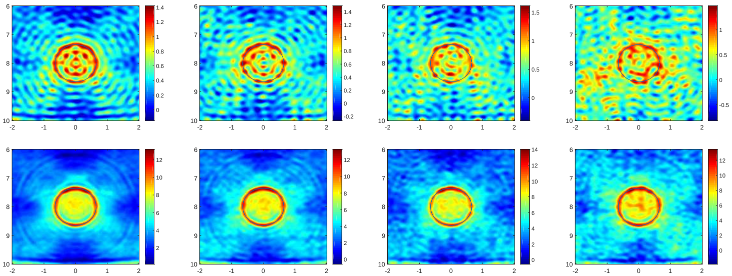


Figure: 测试算法成像函数$I_d(z)$的抗噪音性能：目标障碍物为圆形的可穿透障碍物，噪音水平μ从左到右按如下水平依次递增：$0.1, 0.2, 0.4, 0.6$。其中第一行为单频测试结果，测试频率为：$k_1 = 4\pi, k_2 = 2\pi$；第二行为多频测试结果，测试频率为：$k_2 = \frac{1}{2}k_1, k_1 = 2\pi + 0.4n\pi, n = 0, 1 \ldots, 9$。

数值测试：$D \subset L_2$，声软障碍物

首先假设$D \subset L_2$，并令$h = 10, d = 50$，源点x_s和接收点x_r在Γ_0^d上均匀分布，其个数为$N_s = N_r = 256$，探测频率$k_1 = 8\pi, k_2 = 4\pi$。除此之外，我们将比较成像函数$I_d(z)$和使用$G_{k_1}(x, z)$做为反传播函数的$I_d^{k_1}(z)$。

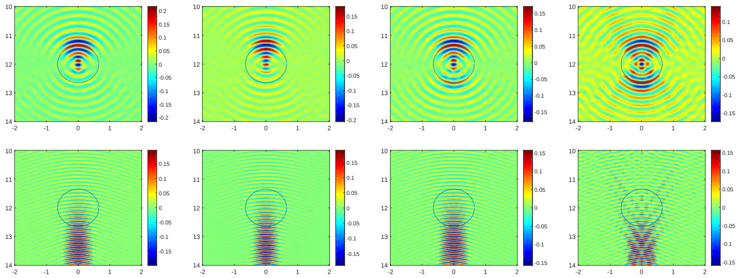


Figure: 测试位于Pekeris开波导第二层L_2的不同类型障碍物：前面三个从左到右依次为声软障碍物、声硬障碍物、阻尼系数为$\eta(x)$的阻抗边界障碍物，最后一个为折射系数为$n(x)$的可穿透障碍物，其中第一行为所提算法成像函数$I_d(z)$的成像效果，第二行为反传播函数是函数$G_{k_1}(x, z)$时所对应成像函数$I_d^{k_1}(z)$ 的成像效果。

数值测试：$D \subset L_2$，不同形状障碍物

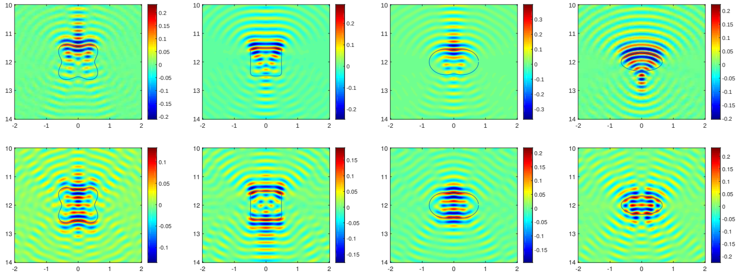


Figure: 测试对于Pekeris开波导第二层L_2的不同类型不同形状的障碍物：从左到右依次为4叶风扇、矩形、花生以及椭圆形状，其中第一行为声软障碍物，第二行为可穿透障碍物。

数值测试：$D \subset L_2$，抗噪性和多频测试

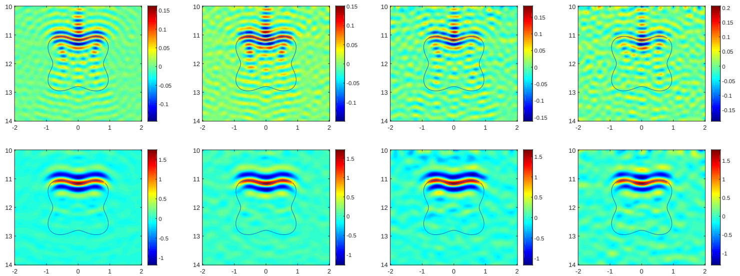


Figure: 测试算法成像函数$I_d(z)$的抗噪音性能：目标障碍物为位于开波导第二层L_2的4-叶风扇形状的声软障碍物，噪音水平μ从左到右按如下数值依次递增：$0.1, 0.2, 0.4, 0.6$。其中第一行为单频测试结果，测试频率为：$k_1 = 8\pi, k_2 = 4\pi$；第二行为多频测试结果，测试频率为：$k_2 = \frac{1}{2}k_1, k_2 = 4\pi + 0.4n\pi, n = 0, 1, \ldots, 6$。

算法分析与思考

有限孔穴点扩散函数

$$J_d(z,y) := \int_{\Gamma_0^d} \frac{\partial G(x_r,z)}{\partial x_2(x_r)} \overline{N(x_r,y)} ds(x_r)$$

其中函数$G(x,z), N(x,y)$分别为Pekeris开波导Dirichlet和Neumann格林函数。

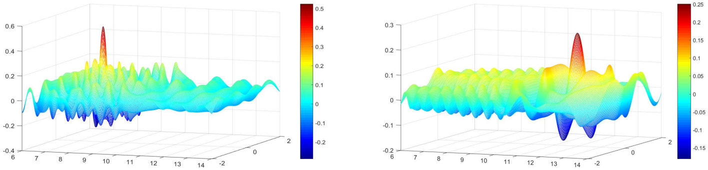


Figure: $-\mathrm{Im}\, J_d(z,y)$，其中$G_{bp}(x,z) = G(x,z)$，左边为源点$y_1 \in L_1$，右边为源点$y_2 \in L_2$。参数：$k_1 = 4\pi, k_2 = 2\pi, h = 10, d = 50, N_r = 256, y_1 = (0,8), y_2 = (0,12)$.

点扩散函数讨论

函数$G(x,z)$和$N(x,y)$都会产生波导模式：

$$G(x,z)=G_g(x,z)+G_{rad}(x,z),\quad N(x,y)=N_g(x,y)+N_{rad}(x,y)$$

其中$G_g(x,z)=\sum_{p=1}^{M}G_p(x,z)$ 和$N_g(x,y)=\sum_{q=1}^{\hat{M}}N_q(x,y)$，分别为$G(x,z)$和$N(x,y)$的波导项，$G_{rad}(x,z)$和$N_{rad}(x,y)$分别为相应衰减项。则

$$J_d(z,y)=J_d^1(z,y)+J_d^2(z,y)+J_d^3(z,y)+J_d^4(z,y)$$

其中$J_d^i(z,y),i=1,2,3,4$为

$$\begin{cases} J_d^1(z,y) &= \int_{\Gamma_0^d}\frac{\partial G_g(x_r,z)}{\partial x_2(x_r)}\overline{N_g(x_r,y)}ds(x_r) \\ J_d^2(z,y) &= \int_{\Gamma_0^d}\frac{\partial G_{rad}(x_r,z)}{\partial x_2(x_r)}\overline{N_{rad}(x_r,y)}ds(x_r) \\ J_d^3(z,y) &= \int_{\Gamma_0^d}\frac{\partial G_g(x_r,z)}{\partial x_2(x_r)}\overline{N_{rad}(x_r,y)}ds(x_r) \\ J_d^4(z,y) &= \int_{\Gamma_0^d}\frac{\partial G_{rad}(x_r,z)}{\partial x_2(x_r)}\overline{N_g(x_r,y)}ds(x_r) \end{cases}$$

点扩散函数进一步测试

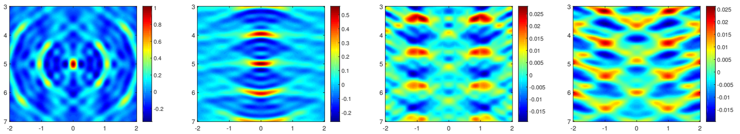


Figure: 点扩散函数测试：$-\mathrm{Im}\, f(z,y)$，其中源点$y_1=(0,5)$在开波导第一层L_1内，从左到右函数$f(z,y)$依次为波导项反传波导项$J_d^1(z,y)$，衰减项反传衰减项$J_d^2(z,y)$，以及交叉反传项$J_d^3(z,y)$和$J_d^4(z,y)$。其中采样区域为$\Omega_1=[-2,2]\times[3,7]$，以及$k_2=\frac{1}{2}k_1, k_1=[2\pi,4\pi,6\pi]$。

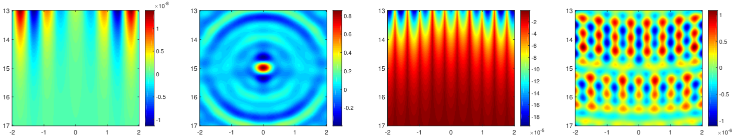


Figure: 点扩散函数测试：$-\mathrm{Im}\, f(z,y)$，其中源点$y_2=(0,15)$在开波导第二层L_2内，从左到右函数$f(z,y)$依次为波导项反传波导项$J_d^1(z,y)$，衰减项反传衰减项$J_d^2(z,y)$，以及交叉反传项$J_d^3(z,y)$和$J_d^4(z,y)$。其中采样区域为$\Omega_1=[-2,2]\times[13,17]$，以及$k_2=\frac{1}{2}k_1, k_1=[4\pi,6\pi,8\pi]$。

收敛性问题

$$J_d^1(z,y) = \sum_{p=1}^{M}\sum_{q=1}^{\hat{M}} f_{pq}(z_2,y_2) I_d^{pq}(z_1,y_1)$$

其中$f_{pq}(z_2,y_2), p = 1,2\ldots,M; q = 1,2,\ldots,\hat{M}$ 是关于z_2和y_2的函数，以及

$$I_d^{pq}(z_1,y_1) = \int_{-d}^{d} e^{\mathbf{i}|x_1-z_1|\xi_p - \mathbf{i}|x_1-y_1|\hat{\xi}_q} dx_1$$

注

直接计算可得$I_d^{pq}(z_1,y_1)$的具体表达式：当$z_1,y_1 \in (-d,d)$时，

$$I_d^{pq}(z_1,y_1) = \psi_1^{pq}(d,z_1,y_1) + \psi_2^{pq}(z_1,y_1)$$

其中

$$\begin{cases} \psi_1^{pq}(d,z_1,y_1) = \dfrac{e^{\mathbf{i}d(\xi_p-\hat{\xi}_q)}}{\mathbf{i}(\xi_p-\hat{\xi}_q)}\left(e^{\mathbf{i}z_1\xi_p-\mathbf{i}y_1\hat{\xi}_q} + e^{\mathbf{i}y_1\hat{\xi}_q-\mathbf{i}z_1\xi_p}\right) \\ \psi_2^{pq}(z_1,y_1) = \dfrac{e^{\mathbf{i}|z_1-y_1|\xi_p} - e^{-\mathbf{i}|z_1-y_1|\hat{\xi}_q}}{\mathbf{i}(\xi_p+\hat{\xi}_q)} - \dfrac{e^{\mathbf{i}|z_1-y_1|\xi_p} + e^{-\mathbf{i}|z_1-y_1|\hat{\xi}_q}}{\mathbf{i}(\xi_p-\hat{\xi}_q)} \end{cases}$$

解决方案一：取$G_{bp}(x,y) = G_h(x,y)$

全空间两层基本解$G_h(x,y)$

如果仅考虑Pekeris半空间两层开波导障碍物成像问题，可以考虑采用全空间两层基本解$G_h(x,y)$作为一种备选的反传播函数。$G_h(x,y)$ 满足如下方程：

$$\begin{cases} \Delta_x G_h(x,y) + \hat{k}^2(x) G_h(x,y) = -\delta_y(x), \quad in \quad \mathbb{R}^2 \\ [G_h(\cdot,y)]_{\Gamma_h} = \left[\frac{\partial G_h(\cdot,y)}{\partial \nu}\right]_{\Gamma_h} = 0. \end{cases}$$

其中波数$\hat{k}(x)$满足

$$\hat{k}(x) = \begin{cases} k_1 & , \quad x_2 < h \\ k_2 & , \quad x_2 > h \end{cases}$$

特点

- 好处：不会产生波导模式，且表达式相对简单，数值和理论分析较为容易
- 坏处：不符合逆时偏移的思想，不能推广到半空间任意层模型，仅对两层内的障碍物有效

函数$G_h(x,z)$的积分表达式

直接计算可知，函数$G_h(x,y)$表达式如下

$$G_h(x,y)=\begin{cases}\Phi(k_1,x,y)-\Phi(k_1,x,y^*)+P_{11}(x,y), & y_2<h,x_2<h\\ P_{12}(x,y), & y_2<h,x_2>h\\ P_{21}(x,y), & y_2>h,x_2<h\\ \Phi(k_2,x,y)-\Phi(k_2,x,y^*)+P_{22}(x,y), & y_2>h,y_2>h\end{cases}$$

其中$y^*=(y_1,2h-y_2)$，$\mu_j=\sqrt{k_j^2-\xi^2},j=1,2$，以及函数$P_{ij}(x,y)$的表达式为

$$\begin{cases}P_{11}(x,y) &= \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{SIP}\frac{1}{\mu_1+\mu_2}e^{\mathrm{i}\mu_1(2h-x_2-y_2)+\mathrm{i}\xi(x_1-y_1)}d\xi\\ P_{12}(x,y) &= \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{SIP}\frac{1}{\mu_1+\mu_2}e^{\mathrm{i}\mu_1(h-y_2)+\mathrm{i}\mu_2(x_2-h)+\mathrm{i}\xi(x_1-y_1)}d\xi\\ P_{21}(x,y) &= \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{SIP}\frac{1}{\mu_1+\mu_2}e^{\mathrm{i}\mu_2(y_2-h)+\mathrm{i}\mu_1(h-x_2)+\mathrm{i}\xi(x_1-y_1)}d\xi\\ P_{22}(z,y) &= \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{SIP}\frac{1}{\mu_1+\mu_2}e^{\mathrm{i}\mu_2(x_2+y_2-2h)+\mathrm{i}\xi(x_1-y_1)}d\xi\end{cases}$$

解决方案二：取$G_{bp}(x,y)=G_\lambda(x,y)$

半空间两层介质Impedance格林函数$G_\lambda(x,y)$

设常数λ为阻抗系数，函数$G_\lambda(x,y)$满足如下方程：

$$\begin{cases} \Delta_x G_\lambda(x,y)+k^2(x)G_\lambda(x,y)=-\delta_y(x), & in \quad \mathbb{R}^2_+ \\ [G_\lambda(\cdot,y)]_{\Gamma_h}=0, \quad \left[\frac{\partial G_\lambda(\cdot,y)}{\partial \nu}\right]_{\Gamma_h}=0 & \\ \frac{\partial G_\lambda(x,y)}{\partial x_2}+\mathrm{i}\lambda G_\lambda(x,y)=0, & on \quad \Gamma_0 \end{cases}$$

其中

$$k(x)=\begin{cases} k_1 & , \quad x_2\in(0,h) \\ k_2 & , \quad x_2\in(h,+\infty) \end{cases}$$

特点

- 好处：多了一个可调参数λ，当λ取值适当时不会产生波导模式；可以推广到半空间任意层开波导障碍物成像问题；符合逆时偏移算法的基本思想
- 坏处：表达式较为复杂，数值和理论分析较为困难

函数$G_\lambda(x,y)$的积分表达式

设$\lambda>0$，则半空间两层介质Impedance格林函数$G_\lambda(x,y)$表达式为

$$G_\lambda(x,y) \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\int_{SIP}\hat{G}_\lambda^y(\xi,x_2)e^{\mathbf{i}|x_1-y_1|\xi}d\xi$$

其中$\hat{G}_\lambda^y(\xi,x_2)$表示函数$G_\lambda^y(x_1,x_2):=G_\lambda(x,y)$ 关于x 的第一个分量x_1的Fourier变换：

$$\hat{G}_\lambda^y(\xi,x_2)=\int_{-\infty}^{\infty}G_\lambda^y(x_1,x_2)e^{-\mathbf{i}(x_1-y_1)\xi}dx_1$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\hat{G}_\lambda^y(\xi,x_2)}{\partial x_2^2}+[k^2(x)-\xi^2]\hat{G}_\lambda^y(\xi,x_2)=-\delta_{y_2}(x_2), \quad in \qquad \mathbb{R}_+ \\ \left[\hat{G}_\lambda^y(\xi,x_2)\right]_{x_2=h}=\left[\dfrac{\partial\hat{G}_\lambda^y(\xi,x_2)}{\partial x_2}\right]_{x_2=h}=0, \\ \dfrac{\partial\hat{G}_\lambda^y(\xi,x_2)}{\partial x_2}+\mathbf{i}\lambda\hat{G}_\lambda^y(\xi,x_2)=0, \qquad on \quad x_2=0 \end{cases}$$

函数$G_\lambda(x,y)$的Fourier变换$\hat{G}^y_\lambda(\xi,x_2)$

记关于ξ的函数$N_\lambda(\xi)$, $M_\lambda(\xi)$为：

$$N_\lambda(\xi)=\frac{\mu_1+\mu_2}{\mu_1-\mu_2}\frac{\mu_1+\lambda}{\mu_1-\lambda}-e^{2\mathbf{i}\mu_1 h},\quad M_\lambda(\xi)=\frac{\lambda+\mu_1}{\lambda-\mu_1}+\frac{\mu_1+\mu_2}{\mu_1-\mu_2}e^{2\mathbf{i}\mu_1 h}$$

(1) 当源点$y\in L_1$时，若$x_2\in(0,h)$，

$$\hat{G}^y_\lambda(\xi,x_2)=\begin{cases}\frac{\mathbf{i}}{2\mu_1}e^{\mathbf{i}\mu_1|x_2-y_2|} & +\quad \frac{\mathbf{i}}{2\mu_1}\frac{\mu_1-\lambda}{\mu_1+\lambda}e^{\mathbf{i}\mu_1(x_2+y_2)}\\ +\frac{\mathbf{i}}{2\mu_1}\frac{e^{2\mathbf{i}\mu_1 h}}{N_\lambda(\xi)}\frac{\mu_1-\lambda}{\mu_1+\lambda}e^{\mathbf{i}\mu_1(x_2+y_2)} & +\quad \frac{\mathbf{i}}{2\mu_1}\frac{e^{2\mathbf{i}\mu_1 h}}{N_\lambda(\xi)}e^{\mathbf{i}\mu_1(x_2-y_2)}\\ +\frac{\mathbf{i}}{2\mu_1}\frac{e^{2\mathbf{i}\mu_1 h}}{N_\lambda(\xi)}\frac{\mu_1+\lambda}{\mu_1-\lambda}e^{\mathbf{i}\mu_1(-x_2-y_2)} & +\quad \frac{\mathbf{i}}{2\mu_1}\frac{e^{2\mathbf{i}\mu_1 h}}{N_\lambda(\xi)}e^{\mathbf{i}\mu_1(-x_2+y_2)}\end{cases}$$

(2) 当源点$y\in L_1$时，若$x_2\in(h,+\infty)$，

$$\hat{G}^y_\lambda(\xi,x_2)=\frac{\mathbf{i}}{\mu_1-\mu_2}\frac{1}{N_\lambda(\xi)}\left[\frac{\mu_1+\lambda}{\mu_1-\lambda}e^{\mathbf{i}\mu_1(h-y_2)+\mathbf{i}\mu_2(x_2-h)}+e^{\mathbf{i}\mu_1(h+y_2)+\mathbf{i}\mu_2(x_2-h)}\right]$$

(3) 当源点$y\in L_2$时，若$x_2\in(0,h)$，

$$\hat{G}^y_\lambda(\xi,x_2)=\frac{\mathbf{i}}{\mu_1-\mu_2}\frac{1}{N_\lambda(\xi)}\left[e^{\mathbf{i}\mu_2(y_2-h)+\mathbf{i}\mu_1(x_2+h)}+\frac{\mu_1+\lambda}{\mu_1-\lambda}e^{\mathbf{i}\mu_2(y_2-h)+\mathbf{i}\mu_1(h-x_2)}\right]$$

(4) 当源点$y\in L_2$时，若$x_2\in(h,+\infty)$，

$$\hat{G}^y_\lambda(\xi,x_2)=\frac{\mathbf{i}}{2\mu_2}e^{\mathbf{i}\mu_2|x_2-y_2|}+\frac{\mathbf{i}}{2\mu_2}\frac{M_\lambda(\xi)}{N_\lambda(\xi)}e^{\mathbf{i}\mu_2(x_2+y_2-2h)}$$

回顾：开波导Dirichlet格林函数$G(x,y)$的积分表达式

令$\xi=\xi_1+\mathbf{i}\xi_2,\xi_1,\xi_2\in\mathbb{R}$，以及$\mu_j=\sqrt{k_j^2-\xi^2},j=1,2$，并记关于$\xi$的函数$N_h(\xi)$和$M_h(\xi)$如下所示

$$N_h(\xi)=\frac{\mu_1+\mu_2}{\mu_1-\mu_2}+e^{2\mathbf{i}\mu_1 h},\quad M_h(\xi)=1+\frac{\mu_1+\mu_2}{\mu_1-\mu_2}e^{2\mathbf{i}\mu_1 h},$$

则格林函数$G(x,y)$有如下表达式

$$G(x,y)=\begin{cases}\Phi_{k_1}(x,y)-\Phi_{k_1}(x,y')+S_1(x,y) & ,\quad x\in L_1,y\in L_1\\ S_2(x,y) & ,\quad x\in L_2,y\in L_1\\ K_1(x,y) & ,\quad x\in L_1,y\in L_2\\ \Phi_{k_2}(x,y)+K_2(x,y) & ,\quad x\in L_2,y\in L_2\end{cases}$$

其中$S_j(x,y),K_j(x,y),j=1,2$ 的表达式为

$$\begin{cases}S_1(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{SIP}\frac{-\mathbf{i}}{2\mu_1}\frac{e^{2\mathbf{i}\mu_1 h}[4\sin(\mu_1x_2)\sin(\mu_1y_2)]}{N_h(\xi)}e^{\mathbf{i}(x_1-y_1)\xi}d\xi\\ S_2(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{SIP}\frac{2e^{\mathbf{i}\mu_1 h}\sin(\mu_1y_2)}{(\mu_1-\mu_2)N_h(\xi)}e^{\mathbf{i}\mu_2(x_2-h)+\mathbf{i}(x_1-y_1)\xi}d\xi\\ K_1(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{SIP}\frac{2e^{\mathbf{i}\mu_1 h}\sin(\mu_1x_2)}{(\mu_1-\mu_2)N_h(\xi)}e^{\mathbf{i}\mu_2(y_2-h)+\mathbf{i}(x_1-y_1)\xi}d\xi\\ K_2(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{SIP}\frac{-\mathbf{i}}{2\mu_2}\frac{M_h(\xi)}{N_h(\xi)}e^{\mathbf{i}\mu_2(x_2+y_2-2h)+\mathbf{i}(x_1-y_1)\xi}d\xi\end{cases}$$

比较

反传播函数

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{开波导Dirichlet格林函数}G(x,y) & : & N_h(\xi)=\frac{\mu_1+\mu_2}{\mu_1-\mu_2}+e^{2\mathbf{i}\mu_1 h} \\ \text{半空间两层阻抗格林函数}G_\lambda(x,y) & : & N_\lambda(\xi)=\frac{\mu_1+\mu_2}{\mu_1-\mu_2}\frac{\mu_1+\lambda}{\mu_1-\lambda}-e^{2\mathbf{i}\mu_1 h} \\ \text{全空间两层基本解}G_h(x,y) & : & \mu_1+\mu_2 \end{array}\right.$$

有限孔穴点扩散函数

1. $J_d(z,y):=\int_{\Gamma_0^d}\frac{\partial G(x_r,z)}{\partial x_2(x_r)}\overline{N(x_r,y)}ds(x_r)$ $\surd$
2. $J_d(z,y):=\int_{\Gamma_0^d}\frac{\partial G_\lambda(x_r,z)}{\partial x_2(x_r)}\overline{N(x_r,y)}ds(x_r)$?
3. $J_d(z,y):=\int_{\Gamma_0^d}\frac{\partial G_h(x_r,z)}{\partial x_2(x_r)}\overline{N(x_r,y)}ds(x_r)$?

其中函数$N(x,y)$为Pekeris开波导Neumann格林函数。

点扩散函数测试

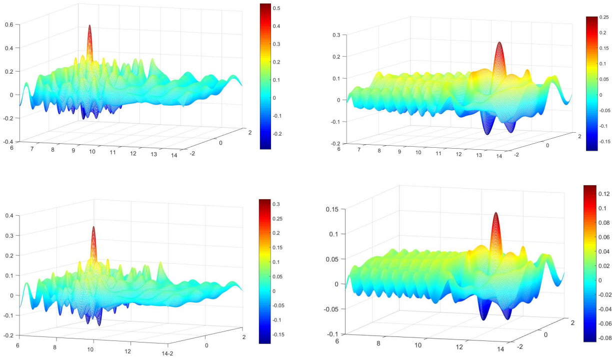


Figure: 有限孔穴点扩散函数的负虚部：$-\mathrm{Im}\, J_d(z,y)$，其中左边为源点$y_1=(0,8)$在L_1中，右边为源点$y_2=(0,12)$在L_2中，采样区域Ω为$[-2,2]\times[6,14]$。第一行为阻抗边界格林函数，第二行为全空间两层基本解

阻抗型开波导逆时偏移算法

算法

设Ω为采样区域，令$u^s(x_r,x_s)$ 为在接收点x_r收到的由源点x_s所激发的散射数据，其中$x_r,x_s\in\Gamma_0^d;r=1,\dots,N_r;s=1,\dots,N_s$.

1. 反传播：对$s=1,\dots,N_s$，计算反传播场

$$v_b(z,x_s)=\frac{|\Gamma_0^d|}{N_r}\sum_{r=1}^{N_r}\frac{\partial G_\lambda(x_r,z)}{\partial x_2(x_r)}\overline{u^s(x_r,x_s)},\quad \forall z\in\Omega.$$

若令$N_r\to 0$，则上式可看做如下积分的数值近似，

$$\hat{v}_b(z,x_s)=\int_{\Gamma_0^d}\frac{\partial G_\lambda(x_r,z)}{\partial x_2(x_r)}\overline{u^s(x_r,x_s)}ds(x_r)$$

2. 互相关：对$z\in\Omega$，计算成像函数

$$I_d^\lambda(z)=\mathrm{Im}\left\{\frac{|\Gamma_0^d|}{N_s}\sum_{s=1}^{N_s}\frac{\partial G_\lambda(x_s,z)}{\partial x_2(x_s)}v_b(z,x_s)\right\}.$$

将$v_b(z,x_s)$的表达式代入$I_d^\lambda(z)$，可得

$$I_d^\lambda(z)=\mathrm{Im}\left\{\frac{|\Gamma_0^d|}{N_s}\frac{|\Gamma_0^d|}{N_r}\sum_{s=1}^{N_s}\sum_{r=1}^{N_r}\frac{\partial G_\lambda(x_s,z)}{\partial x_2(x_s)}\frac{\partial G_\lambda(x_r,z)}{\partial x_2(x_r)}\overline{u^s(x_r,x_s)}\right\}.$$

障碍物成像比较：$D \subset L_1$，可穿透障碍物

令$h=10, d=50$，源点x_s和接收点x_r在Γ_0^d上均匀分布，其个数为$N_s=N_r=256$，探测频率$k_1=4\pi, k_2=2\pi$。除此之外，我们将比较成像函数$I_d^\lambda(z)$和使用全空间两层基本解$G_h(x,z)$做为反传播函数的$I_d^h(z)$，即

$$I_d^h(z)=\mathrm{Im}\left\{\frac{|\Gamma_0^d|}{N_s}\frac{|\Gamma_0^d|}{N_r}\sum_{s=1}^{N_s}\sum_{r=1}^{N_r}\frac{\partial G_h(x_s,z)}{\partial x_2(x_s)}\frac{\partial G_h(x_r,z)}{\partial x_2(x_r)}\overline{u^s(x_r,x_s)}\right\}.$$

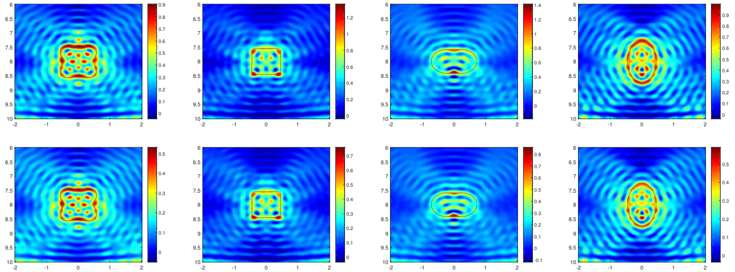


Figure: 测试不同形状的可穿透障碍物($D \subset L_1$)：从左到右依次为4-叶风扇、矩形、花生以及椭圆形状，其中第一、二行分别是成像函数$I_d^\lambda(z)$和$I_d^h(z)$的成像效果。

障碍物成像测试：$D \subset L_2$，可穿透障碍物

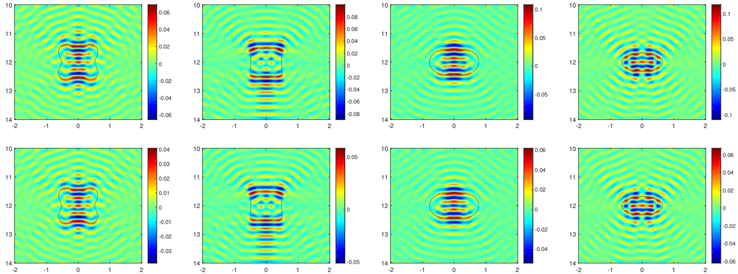


Figure: 测试不同形状的可穿透障碍物($D \subset L_2$)：从左到右依次为4-叶风扇、矩形、花生以及椭圆形状，其中第一、二行分别是成像函数$I_d^{\lambda}(z)$和$I_d^{h}(z)$的成像效果。

目录

1 研究动机

2 半空间无相位数据障碍物成像问题

3 Pekeris开波导障碍物成像问题

4 总结与展望

总结与展望

总结：

1. 针对一般半空间障碍物成像问题，提出一种无相位直接成像算法
2. 针对Pekeris开波导障碍物成像问题，提出开波导逆时偏移算法
3. 对开波导逆时偏移算法加以改进，提出阻抗型开波导逆时偏移算法

展望：

1. 考虑开波导逆时偏移算法中的收敛性问题及其分辨率分析
2. 分析半空间两层介质阻抗格林函数以及相应算法的分辨率分析
3. 将本文算法推广到电磁波和弹性波开波导模型或者半空间n层模型
4. 开波导散射问题的PML算法

谢谢大家！

个人简历

基本情况

方少峰，男，河北邯郸人，1993 年 9 月出生，中科院数学与系统科学研究院，在读博士研究生

教育状况

1. 2009 年 9 月至 2013 年 7 月，吉林大学数学学院，本科，计算数学
2. 2013 年 9 月至 2018 年 7 月，中科院计算数学所，直博生，计算数学

研究兴趣

逆散射问题，逆时偏移算法，开波导模型

发表文章目录

1. Chen Z, Fang S, Huang G. *A Direct Imaging Method for the Half-Space Inverse Scattering Problem with Phaseless Data[J]. Inverse Problems & Imaging*, 2017, 11(5).

联系方式

通讯地址：北京市海淀区中关村东路55号，中科院数学与系统科学研究院，100190
邮箱：fangsf@lsec.cc.ac.cn　　电话：15600602175/15910819374