中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

博士学位论文

半空间弹性波反散射问题

作者姓名: 周世奇

指导教师: 陈志明 研究员

中国科学院 数学与系统科学研究员

学位类别: 理学博士

学科专业: 计算数学

培养单位: 中国科学院 数学与系统科学研究员

2019 年 6 月

Thesis Template

A thesis submitted to the

University of Chinese Academy of Sciences

in partial fulfillment of the requirement

for the degree of

Doctor of Natural Science

in Computational Mathematics

By

Zhou Shiqi

Supervisor: Professor Chen Zhiming

Academy of Mathematics and Systems Science

Chinese Academy of Sciences

June, 2019

中国科学院大学
学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文是本人在导师的指导下独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果。对论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明或致谢。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

作者签名:

日　　期:

中国科学院大学
学位论文授权使用声明

本人完全了解并同意遵守中国科学院大学有关保存和使用学位论文的规定，即中国科学院大学有权保留送交学位论文的副本，允许该论文被查阅，可以按照学术研究公开原则和保护知识产权的原则公布该论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存、汇编本学位论文。

涉密及延迟公开的学位论文在解密或延迟期后适用本声明。

作者签名:　　　　导师签名:

日　　期:　　　　日　　期:

摘 要

本文是中国科学院大学学位论文模板 ucasthesis 的使用说明文档。主要内容为介绍 LaTeX 文档类 ucasthesis 的用法，以及如何使用 LaTeX 快速高效地撰写学位论文。

关键词：中国科学院大学，学位论文，LaTeX 模板

Abstract

This paper is a help documentation for the LaTeX class ucasthesis, which is a thesis template for the University of Chinese Academy of Sciences. The main content is about how to use the ucasthesis, as well as how to write thesis efficiently by using LaTeX.

Keywords: University of Chinese Academy of Sciences (UCAS), Thesis, LaTeX Template

目 录

图形列表

表格列表

符号列表

字符

Symbol	Description	Unit
R	the gas constant	$m^2 \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$
C_v	specific heat capacity at constant volume	$m^2 \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$
C_p	specific heat capacity at constant pressure	$m^2 \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$
E	specific total energy	$m^2 \cdot s^{-2}$
e	specific internal energy	$m^2 \cdot s^{-2}$
h_T	specific total enthalpy	$m^2 \cdot s^{-2}$
h	specific enthalpy	$m^2 \cdot s^{-2}$
k	thermal conductivity	$kg \cdot m \cdot s^{-3} \cdot K^{-1}$
S_{ij}	deviatoric stress tensor	$kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$
τ_{ij}	viscous stress tensor	$kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$
δ_{ij}	Kronecker tensor	1
I_{ij}	identity tensor	1

算子

Symbol	Description
Δ	difference
∇	gradient operator
$\delta^{\pm}$	upwind-biased interpolation scheme

缩写

CFD	Computational Fluid Dynamics
CFL	Courant-Friedrichs-Lewy
EOS	Equation of State
JWL	Jones-Wilkins-Lee
WENO	Weighted Essentially Non-oscillatory
ZND	Zel'dovich-von Neumann-Doering

第 1 章　引言

近几十年来，弹性波散射问题及其反问题在工程领域和数学领域都得到了广泛研究[1]。特别地，弹性波反散射问题在地球物理领域、石油勘探领域中发展迅速。弹性波反散射问题是利用接受到的弹性波散射数据去决定障碍物的位置、形状、大小。相比于声波，弹性波是由横波和纵波耦合而成的矢量波，因此研究难度更大。又因为反问题普遍具有强非线性及高度不适定性，这导致弹性波反散射问题的研究更具挑战性和吸引力。目前，在数学领域，学者们主要研究的弹性波反散射问题为全空间背景下的弹性波反散射问题[2, 3] 和粗糙表面的弹性波反散射问题[4]。而全空间背景下的弹性波反散射问题有反障碍物问题和反源问题；粗糙表面的弹性波反散射问题又有局部粗糙面和无穷粗糙面两种。另一方面，在勘探地球物理领域，弹性波是在地表以下传播的，这是一个半空间模型。于是，本文将联系实际，以数学的角度针对半空间弹性波散射问题和反散射问题加以研究，特别是考虑如何从数值上构造一个高效稳定的算法来重构障碍物。特别的，该直接成像法是基于逆时偏移的思想，且不需要障碍物是否可穿透以及其不可穿透时边界条件的先验信息。

1.1　研究背景

1.2　弹性波半空间散射与逆散射问题

由于地球是一个弹性体，所以我们可以将地下看成是一个填充弹性介质的半空间。而弹性波的传播主要是用弹性波方程描述的。本文，我们重点研究二维半空间弹性波散射问题与反散射问题。令 x 为半空间中的一个质点，即

$$x := (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2_+ := \{(y_1, y_2)^T \in \mathbb{R}^2 : y_2 > 0\}$$

令 $u(x) := (u_1(x), u_2(x)) \in \mathbb{C}^2$ 为在 x 处的位移。假设弹性介质是各项同性均匀介质，其 Lamé 常数 λ 和 μ 满足 $\lambda > 0, \mu > 0$，密度函数为 ρ，角频率为 $\omega > 0$，则位移函数满足如下弹性波方程:

$$\nabla \cdot \sigma(u(x)) + \omega^2 u(x) = f(x)$$

这里 $f(x)$ 是点 x 处的外力，应力张量 $\sigma(u) \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ 是 2 阶张量，它与应变张量 $\varepsilon(u) \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ 一起满足如下本构关系 (胡克定律):

$$\sigma(u) = 2\mu\varepsilon(u) + \lambda \mathrm{div} u\, \mathbb{I},$$
$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T).$$

这里 $\mathbb{I} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ 是二阶恒等矩阵。为了表述简便，我们在后文中都假设 $\rho = 1$。定义弹性波算子

$$\Delta_e u := (\lambda + \mu)\nabla \mathrm{div} u + \mu \Delta u$$

易得 $\Delta_e u(x) = \nabla \cdot \sigma(u(x))$。于是，弹性波 u(x) 满足如下弹性波方程：

$$\Delta_e u(x) + \rho\omega^2 u(x) = -f \tag{1.1}$$

由于弹性波在地表满足自由表面边界条件 ela_reverse,grant1965interpretation [5, 6]，即法向应力为零。有了如上表述，下面我们可以来提半空间弹性波散射问题。假设障碍物 $D \subset \mathbb{R}^2_+$ 嵌入在半空间中, 且为有界 Lipschitz 区域。在本文中，我们具体考虑不可穿透障碍物满足 Dirichlet 边界条件，至于不可穿透情形或是可穿透情形下其它边界条件可以类似地被叙述。进一步，我们假设入射波是由 x_s 处的点源沿着极化方向 $q \in R^2$ 激发，于是相对应的弹性波总场 $u_q(x, x_s)$ 满足如下半空间弹性波方程：

$$\Delta_e u_q(x, x_s) + \omega^2 u_q(x, x_s) = -\delta_{x_s}(x) \quad \text{in } \mathbb{R}^2_+ \backslash \bar{D},$$
$$u_q(x, x_s) = 0 \ \text{ on } \Gamma_D,$$
$$\sigma(u_q(x, x_s))e_2 = 0 \ \text{ on } \Gamma_0,$$

这里 Γ_D 表示障碍物的表面，且令其外单位法向为 $\nu(x)$,

$$\Gamma_0 = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$$

为半空间 $\mathbb{R}^2_+$ 的表面，e_i 为沿着 x_i 轴的单位向量，$i = 1, 2$。

令 $\mathbb{N}(x, y)$ 为半空间中弹性波方程的 Green 函数且在 Γ_0 上满足 Neumann 边界条件，其中 $\mathbb{N}(x, y)q$ 满足如下方程

$$\Delta_e[\mathbb{N}(x; y)q] + \omega^2[\mathbb{N}(x, y)q] = -\delta_y(x)q \ \text{ in } \mathbb{R}^2_+,$$
$$\sigma(\mathbb{N}(x, y)q)e_2 = 0 \ \text{ on } \Gamma_0,$$

为了简便起见，后文中统一称 $\mathbb{N}(x,y)$ 为半空间弹性波 Neumann Green 函数。令入射场 $u_q^i(x,x_s)=\mathbb{N}(x,x_s)q$，于是散射场 $u_q^s(x_r,x_s)=u_q(x_r,x_s)-\mathbb{N}(x_r,x_s)q,x_r\in\Gamma_0$，满足如下方程

$$\Delta_e u_q^s(x,x_s)+\omega^2 u_q^s(x,x_s)=0 \quad \text{in } \mathbb{R}_+^2\backslash\bar{D}, \tag{1.2}$$

$$u_q^s(x,x_s)=-\mathbb{N}(x,x_s)q \ \text{ on } \Gamma_D, \tag{1.3}$$

$$\sigma(u_q^s(x,x_s))e_2=0 \ \text{ on } \Gamma_0, \tag{1.4}$$

为了保证方程 (4.1)-(4.3) 的适定性，通常的做法是在无穷远处方程需要满足某种边界条件或是辐射条件。在全空间散射问题中，散射场 $u^s(x)$ 通过 Helmholtz 分解可以分成横波 $u_s^s=\frac{1}{k_s^2}\nabla\times\nabla\times u^s$ 及 $u_p^s=-\frac{1}{k_p^2}\nabla\nabla\cdot u^s$ 且在全空间中除障碍物 D 以外各自满足如下方程：

$$\Delta u_s^s+k_s^2u_s^s=0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^2\backslash\bar{D}$$

$$\Delta u_p^s+k_s^2u_p^s=0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^2\backslash\bar{D}$$

这里 k_s 为横波波数，k_p 为纵波波数，且有

$$k_s=\frac{\omega}{\sqrt{\mu}}=\frac{\omega}{c_s}, \qquad k_p=\frac{\omega}{\sqrt{\lambda+2\mu}}=\frac{\omega}{c_p}$$

其中 c_s，c_p 分别为横波波速和纵波波速。这里的旋度算子，针对标量函数 $w(x)$，有

$$\nabla\times w(x)=(\partial_{x_2}w(x),-\partial_{x_1}w(x))^T$$

针对二维矢量函数 $\mathbf{v}(x)=(v_1(x),v_2(x))^T$，有

$$\nabla\times\mathbf{v}(x)=\partial_{x_1}v_2(x)-\partial_{x_2}v_1(x)$$

当横波 u_s^s，纵波 u_p^s 满足著名的 Kupradze's 辐射条件 [7, 8]

$$\lim_{|x|\to\infty}|x|^{1/2}\left(\frac{\partial u_s^s(x)}{\partial|x|}-\mathbf{i}k_su_s^s(x)\right)=0,$$

$$\lim_{|x|\to\infty}|x|^{1/2}\left(\frac{\partial u_p^s(x)}{\partial|x|}-\mathbf{i}k_pu_p^s(x)\right)=0$$

在该辐射条件下，全空间弹性波散射问题的适定性已经得到了研究[7, 9, 10]。特别地，在文献 [9] 中作者利用极限吸收原理证明了全空间弹性波散射问题解的适定性，这对我们研究半空间弹性波散射问题有所启发。

由于自由表面条件的存在，导致半空间弹性波中存在 Rayleigh 表面波[11]，Kapradze's 辐射条件不在适用。Rayleigh 表面波是一种沿着半空间表面传播，在往半空间内部传播时指数式衰减。虽然 Sommerfeld 辐射条件[12, 13] 或是 kapradze's 辐射条件能保证半空间弹性波散射问题的解的唯一性，但是由于这种条件不能刻画 Rayleigh 表面波的传播模式，所以不能保证解的存在性。事实上，后文中证明可以看到，Rayleigh 表面波的传播波速与横波和纵波的波速也是不同的。在文献[14] 中，Nédélec 等人通过研究半空间弹性波 Neumann Green 函数在无穷远处的渐进性质，提出来新的弹性波辐射条件，并且在该辐射条件下作者证明了如下方程解的存在唯一性

$$\Delta_e u_q(x, x_s) + \rho\omega^2 u_q(x, x_s) = -\delta_{x_s}(x) \quad \text{in } \mathbb{R}^2_+,$$
$$\sigma(u_q(x, x_s))e_2 = f \qquad \text{on } \Gamma_0,$$

其中应力源 f 在 Γ_0 上存在紧支集。

在文献 [15, 16] 中，Arens 针对固支边界 (clamped or rigid boundary) 的粗糙表面弹性波散射问题，提出来上行辐射条件 (upwards propagating radiation conditon)。该辐射条件给出了一种显式的 Dirichlet-to-Neumann 映射，可以用来将无穷的半空间截断成包含粗糙表面的条状空间。而 Charalambopolos, Gintides 和 Kiriaki [17] 利用了角谱表示法作为散射条件，将 Arens [15] 的工作推广到自由表面情形，但是该文章缺少严格的数学证明。

进一步的，针对满足自由表面边界条件的半空间层状介质，Alem 和 Chorfi [18] 给出了一个有趣的方法。他们的散射条件不在作用于单独的横波和纵波，而是描述混合波的法向应力和位移在无穷远处的关系，有点类似与 Nédélec [14] 中的辐射条件。该辐射条件的好处是类似于声波中的 Sommerfeld 辐射条件，它可以很好地适用于与弹性波中的积分公式 (Betti's 公式 [7]) 的整合。然而，作者还强行施加了一个无穷远处的衰减条件 $\mathbf{O}(1/R)$，此时 Rayleigh 表面波无法满足此条件。

类似与声波中，全局积分辐射条件[12] 与 Sommefeld 辐射条件等价，Madyarov 和 Guzina [19] 将辐射条件表示成在一个半径足够大的半圆上的积分的极限，而不同于局部散射条件是表示成函数与其导数间组合的极限。

$$\lim_{r\to\infty}\int_{S_r^+}(\sigma(\mathbb{N}(x,y)e_i)\hat{r})\cdot u(x) - (\mathbb{N}(x,y)e_i)\cdot(\sigma(u)\hat{r})ds(x) = 0$$

这里 $S_r^+ := \{x \in \mathbb{R}^2_+ \mid \|x\| = r^2\}$, $\hat{r} = x/r$ 和 $y \in \mathbb{R}^2_+$。该辐射条件需要用到满足相

应半空间表面边界条件的 Green 函数，其好处是可以直接得到散射波在障碍物表面的积分表示。然而该文章在证明散射解的唯一性前假设了解的存在性。

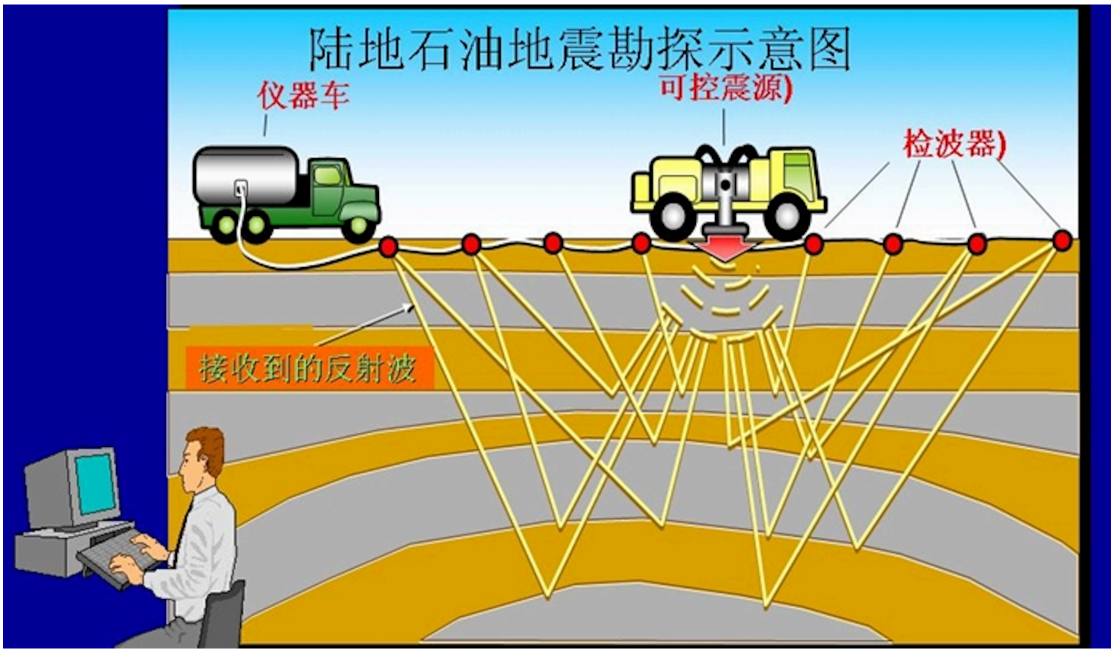
在本文中，我们不再针对半空间弹性波障碍物散射问题来研究相应的散射条件。我们受文献 Yves1988,wilcox1975,leis [28–30] 的启发，将利用极限吸收原理来定义半空间弹性波散射问题的解。具体地，我们考虑 $u^s_{q,\varepsilon}$ 是满足角频率为 $\omega(1+\mathbf{i}\varepsilon)$ 的半空间弹性波方程，即为

$$\Delta_e u^s_{q,\varepsilon}(x,x_s) + \omega^2(1+\mathbf{i}\varepsilon)^2 u^s_{q,\varepsilon}(x,x_s) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2_+\backslash\bar{D}, \boxed{\text{p12}}$$

$$u^s_{q,\varepsilon}(x,x_s) = -\mathbb{N}(x,x_s)q \quad \text{on } \Gamma_D,$$

$$\sigma(u^s_{q,\varepsilon}(x,x_s))e_2 = 0 \quad \text{on } \Gamma_0, \boxed{\text{p22}}$$

于是，方程 ep1 (1.2)-ep2 (1.4) 中的散射解 $u^s_q(x,x_s)$ 定义为 $u^{(}_{q,\varepsilon}x,x_s)$ 在 $\varepsilon\to 0^+$ 时某种范数意义下极限，我们将在第 chap:Elastic 3 章中做详细讨论。



figure_seismic

图 1.1 地震波勘探模型

本文主要对上述半空间弹性波散射问题的反障碍物问题感兴趣。我们在远离障碍物的接受点 x_r 上测量数据 $u^s_q(x_r,x_s)$。然后，我们通过接受到的数据来重构出障碍物的位置、大小、形状。特别地，由地震勘探模型启发 (如图 figure_seismic 1.1)，我们假设发射点和接收点都在半空间表面，即 $x_s\in\Gamma_0$, $x_r\in\Gamma_0$。

1.3 逆时偏移法简介

1.4 本文的研究成果

第 2 章　基础知识

ap:fundamental

def:pv **定义 2.0.1** *Cauchy 主值定义*

We start by introducing some notation. For any Lipschitz domain $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ with boundary $\Gamma_{\mathcal{D}}$, let $\|u\|_{H^1(\mathcal{D})} = (\|\nabla\phi\|^2_{L^2(\mathcal{D})} + d_{\mathcal{D}}^{-2}\|\phi\|^2_{L^2(\mathcal{D})})^{1/2}$ be the weighted $H^1(\mathcal{D})$ norm and $\|v\|_{H^{1/2}(\Gamma_{\mathcal{D}})} = (d_{\mathcal{D}}^{-1}\|v\|^2_{L^2(\Gamma_{\mathcal{D}})} + |v|^2_{\frac{1}{2},\Gamma_{\mathcal{D}}})^{1/2}$ be the weighted $H^{1/2}(\Gamma_{\mathcal{D}})$ norm, where $d_{\mathcal{D}}$ is the diameter of $\mathcal{D}$ and

$$|v|_{\frac{1}{2},\Gamma_{\mathcal{D}}} = \left(\int_{\Gamma_{\mathcal{D}}}\int_{\Gamma_{\mathcal{D}}} \frac{|v(x)-v(y)|^2}{|x-y|^2} ds(x)ds(y)\right)^{1/2}.$$

By the scaling argument and trace theorem we know that there exists a constant $C > 0$ independent of $d_{\mathcal{D}}$ such that for any $\phi \in C^1(\bar{\mathcal{D}})^2$ RTMhalf_aco [20, corollary 3.1],

$$\|\phi\|_{H^{1/2}(\Gamma_{\mathcal{D}})} + \|\sigma(\phi)\nu\|_{H^{-1/2}(\Gamma_{\mathcal{D}})} \le C \max_{x\in\bar{\mathcal{D}}}(|\phi(x)| + d_{\mathcal{D}}|\nabla\phi(x)|). \tag{2.1}$$

In this paper, for any Sobolev space X, we still denote X the vector valued space X^2 or tensor valued space $X^{2\times 2}$. The norms of $X, X^2, X^{2\times 2}$ are all denoted by $\|\cdot\|_X$.

第 3 章　半空间弹性波散射问题

chap:Elastic

为了研究半空间弹性波反散射问题，我们得先来研究正文题。

3.1　半空间弹性波 Green 函数

Green Tensor

3.1.1　Neumann Green 函数

n Green Tensor

设源点 $y \in \mathbb{R}^2_+$, 引入半空间弹性波 Neumann 零边界格林函数 $\mathbb{N}(x, y)$，对任意向量 $q \in \mathbb{R}^2$，其满足如下方程:

$$\Delta_e[\mathbb{N}(x; y)q] + \omega^2[\mathbb{N}(x, y)q] = -\delta_y(x)q \ \text{ in } \mathbb{R}^2_+, \tag{3.1}$$

$$\sigma(\mathbb{N}(x, y)q)e_2 = 0 \ \text{ on } \Gamma_0, \tag{3.2}$$

其中 (3.2) 代表该 green 函数满足半空间自由边界条件，$\delta_y(x)$ 代表位于点 y 的 Dirac 源。由于半空间的特性，我们将利用对 x_1 变量作 Fourier 变换的方式来推导 Green 函数，令

$$\hat{\mathbb{N}}(\xi, x_2; y_2) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{N}(x_1, x_2; y) e^{-\mathbf{i}(x_1-y_1)\xi} dx_1, \ \ \forall \xi \in \mathbb{C}, \tag{3.3}$$

记 $\mathbb{G}(x, y)$ [7] 为弹性波方程的基本解，且对其 x_1 变量做 Fourier 变换后有 $\hat{\mathbb{G}}(\xi, x_2; y_2) = \hat{\mathbb{G}}_s(\xi, x_2; y_2) + \hat{\mathbb{G}}_p(\xi, x_2; y_2)$ 及

$$\hat{\mathbb{G}}_s(\xi, x_2; y_2) = \frac{\mathbf{i}}{2\omega^2} \begin{pmatrix} \mu_s & -\xi \frac{x_2-y_2}{|x_2-y_2|} \\ -\xi \frac{x_2-y_2}{|x_2-y_2|} & \frac{\xi^2}{\mu_s} \end{pmatrix} e^{\mathbf{i}\mu_s|x_2-y_2|}, \tag{3.4}$$

$$\hat{\mathbb{G}}_p(\xi, x_2; y_2) = \frac{\mathbf{i}}{2\omega^2} \begin{pmatrix} \frac{\xi^2}{\mu_p} & \xi \frac{x_2-y_2}{|x_2-y_2|} \\ \xi \frac{x_2-y_2}{|x_2-y_2|} & \mu_p \end{pmatrix} e^{\mathbf{i}\mu_p|x_2-y_2|}. \tag{3.5}$$

这里 $\mu_\alpha = (k_\alpha^2 - \xi^2)^{1/2}$ 且有 $\alpha = s, p$, $k_p = \omega/\sqrt{\lambda + 2\mu}$, $k_s = \omega/\sqrt{\mu}$ 为 p 波和 s 波的波数。为了利用基本解 $\mathbb{G}(x, y)$ 的特性，我们令:

$$\mathbb{N}_c(x, y) = \mathbb{N}(x, y) - (\mathbb{G}(x, y) - \mathbb{G}(x, y'))$$

其中 $y' = (y_1, -y_2)$ 为 y 关于 x_1 轴的镜像点。于是由式 (3.1-3.2)，得 $\mathbb{N}_c(x, y)$ 满足如下方程:

$$\Delta_e[\mathbb{N}_c(x; y)q] + \omega^2[\mathbb{N}_c(x, y)q] = 0 \ \text{ in } \mathbb{R}^2_+, \tag{3.6}$$

$$\sigma(\mathbb{N}_c(x, y)q)e_2 = -\sigma(\mathbb{G}(x, y) - \mathbb{G}(x, y')) \ \text{ on } \Gamma_0, \tag{3.7}$$

注 3.1.1 在全篇论文中，我们假设对于任意的 $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$，$z^{1/2}$ 是多值函数 $\sqrt{z}$ 的如下解析分支：$\mathrm{Im}\,(z^{1/2}) \geq 0$，这对应于在复平面取右半实轴为割支线。则对于 $z = z_1 + \mathbf{i}z_2$, $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$,

$$z^{1/2} = \mathrm{sgn}(z_2)\sqrt{\frac{|z| + z_1}{2}} + \mathbf{i}\sqrt{\frac{|z| - z_1}{2}}, \quad \forall z \in \mathbb{C}\backslash\bar{\mathbb{R}}_+. \tag{3.8}$$

当 z 位于右半实轴的上沿或是下沿时，取 $z^{1/2}$ 为 $\varepsilon \to 0^+$ 时 $(z + \mathbf{i}\varepsilon)^{1/2}$ 或是 $(z - \mathbf{i}\varepsilon)^{1/2}$ 的极限即可。

通过对式 (3.6-3.7) 两边作 Fourier 变换，我们得到关于变量 x_2 的常系数常微分方程组：

$$\mu\frac{d^2(e_1^T\hat{\mathbb{N}}_c q)}{dx_2^2} + \mathbf{i}(\lambda+\mu)\xi\frac{d(e_2^T\hat{\mathbb{N}}_c q)}{dx_2} + (\omega^2 - (\lambda+2\mu)\xi^2)(e_1^T\hat{\mathbb{N}}_c q) = 0 \tag{3.9}$$

$$(\lambda+2\mu)\frac{d^2(e_2^T\hat{\mathbb{N}}_c q)}{dx_2^2} + \mathbf{i}(\lambda+\mu)\xi\frac{d(e_1^T\hat{\mathbb{N}}_c q)}{dx_2} + (\omega^2 - \mu\xi^2)(e_2^T\hat{\mathbb{N}}_c q) = 0 \tag{3.10}$$

由于我们需要 $\mathbb{N}(x, y)$ 为外行波解，因此方程 (3.9) 的解为如下两个向量：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}\mu_s \\ -\mathbf{i}\xi \end{bmatrix} e^{\mathbf{i}\mu_s x_2}, \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{i}\xi \\ \mathbf{i}\mu_p \end{bmatrix} e^{\mathbf{i}\mu_p x_2}$$

的线性组合。利用边界条件 (3.10) 及待定系数法，我们得到：

$$\hat{\mathbb{N}}_c(\xi, x_2; y_2) = \frac{\mathbf{i}}{\omega^2\delta(\xi)}\sum_{\alpha,\beta=p,s}\mathbb{A}_{\alpha\beta}(\xi)e^{\mathbf{i}(\mu_\alpha x_2 + \mu_\beta y_2)}, \tag{3.11}$$

其中 $\varphi(\xi) = k_s^2 - 2\xi^2$, $\delta(\xi) = \varphi(\xi)^2 + 4\xi^2\mu_s\mu_p$(Rayleigh 方程[21]), 以及

$$\mathbb{A}_{ss}(\xi) = \begin{pmatrix} \varphi^2\mu_s & -4\xi^3\mu_s\mu_p \\ -\xi\varphi^2 & 4\xi^4\mu_p \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}_{sp}(\xi) = \begin{pmatrix} 2\xi^2\varphi\mu_s & -2\xi\varphi\mu_s\mu_p \\ -2\xi^3\varphi & 2\xi^2\varphi\mu_p \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{A}_{ps}(\xi) = \begin{pmatrix} 2\xi^2\varphi\mu_s & 2\xi^3\varphi \\ 2\xi\varphi\mu_s\mu_p & 2\xi^2\varphi\mu_p \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}_{pp}(\xi) = \begin{pmatrix} 4\xi^4\mu_s & \xi\varphi^2 \\ 4\xi^3\mu_s\mu_p & \varphi^2\mu_p \end{pmatrix}.$$

按照惯例，原本我们只要对 $\hat{\mathbb{N}}(\xi, x_2; y_2)$ 进行 Fourier 逆变换就可以得到所需要的 Neumann Green 函数. 然而，如下面的引理所述，函数 $\delta(\xi)$ 在实轴上存在零点[21, 22]，此时我们并不可以对其直接进行 Fourier 逆变换.

rayleigh **引理 3.1.1** *Rayleigh 方程* $\delta(\xi) = 0$ *在复平面* $\mathbb{C}$ *中有且仅有两个根且记为* $\pm k_R$*，其中* k_R *满足* $k_R > k_s$。

证明. 由前文注记中的 (3.8), 易得 $\delta(\xi)$ 的割支线为 $C_l = \{\xi = \xi_1 + \mathbf{i}\xi_2 \in \mathbb{C} : \xi_1 \in [-k_s, -k_p], \xi_2 = 0\}$ 和 $C_r = \{\xi = \xi_1 + \mathbf{i}\xi_2 \in \mathbb{C} : \xi_1 \in [k_p, k_s], \xi_2 = 0\}$. 于是 $\delta(\xi)$ 在除 C_l 和 C_r 以外的区域解析。而在割支线上，$\delta(\xi)$ 可表示成：

$$\delta(\xi) = (k_s^2 - 2\xi^2)^2 + \mathbf{i}\,[4\xi^2(k_s^2 - \xi^2)^{1/2}(\xi^2 - k_p^2)^{1/2}], \ \ \forall \xi \in C_l \cup C_r.$$

显然, $\delta(\xi)$ 在 $C_l \cup C_r$ 上没有零点。又因为 $\delta(\pm k_s) > 0$, $\delta(\pm\infty) < 0$ ，由函数的连续性得 $\delta(\xi)$ 在区间 $(-\infty, -k_s) \cup (k_s, \infty)$ 上至少存在两个零点，且由于其对称性，可以记为 $\pm k_R$。下面，我们将 C_l, C_r 的上下沿分别记为 $C_l^\pm$, $C_r^\pm$。

接下去，利用幅角原理[23] 可以说明 $\delta(\xi)$ 在整个复平面只存在两个零点。令 Γ_R 为半径 R 充分大的圆. 我们考虑 $\mathcal{D}$ 是被周线 Γ_R, Γ_l 以及 Γ_r 包围的区域。其中 Γ_l 代表沿着 C_l^+ 从 $-k_s$ 到 $-k_p$ 及然后沿着 C_l^- 从 $-k_p$ 到 $-k_s$ ；相应地，Γ_r 代表沿着 C_r^+ 从 k_p 到 k_s 及然后沿着 C_r^- 从 k_s 到 k_p 。因为 $\delta(\xi)$ 在整个整个复平面上没有极点, 我们可以通过幅角原理来计算其在区域 $\mathcal{D}$ 中的零点个数 Z ：

$$Z = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_C \frac{\delta'(\xi)}{\delta(\xi)} d\xi. \tag{3.12}$$

由式子 (3.8) 中的定义，我们可以得出当 $\xi \in C_r^\pm$ 时 $\delta(\xi) = \delta^\pm(\xi)$，其中

$$\delta^\pm(\xi) = (k_s^2 - 2\xi^2)^2 \mp \mathbf{i}\,[4\xi^2(k_s^2 - \xi^2)^{1/2}(\xi^2 - k_p^2)^{1/2}\,] := f_1(\xi) \mp \mathbf{i} f_2(\xi).$$

于是可以有如下计算

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_r} \frac{\delta'(\xi)}{\delta(\xi)} d\xi &= \int_{k_p}^{k_s} \left(\frac{\delta'_+(\xi)}{\delta_+(\xi)} - \frac{\delta'_-(\xi)}{\delta_-(\xi)} \right) d\xi \\
&= 2\mathbf{i} \int_{k_p}^{k_s} \frac{f_1'(\xi) f_2(\xi) - f_1(\xi) f_2'(\xi)}{f_1^2(\xi) + f_2^2(\xi)} d\xi \\
&= -2\mathbf{i} \arctan \frac{f_2(\xi)}{f_1(\xi)} \bigg|_{k_p}^{k_s} = 0.
\end{aligned}$$

相似地, 在 $\xi \in C_r^\pm$ 时也有 $\int_{\Gamma_l} \frac{\delta'(\xi)}{\delta(\xi)} d\xi = 0$ 。此外, 当 $|\xi|$ 足够大, 容易得到 $\delta(\xi)$ 的渐近形式 $\delta(\xi) = -2(k_s^2 - k_p^2)\xi^2 + O(1)$ 及。于是当 $R \gg 1$ ，可以计算得到 $\int_{\Gamma_R} \frac{\delta'(\xi)}{\delta(\xi)} d\xi = 4\pi\mathbf{i}$ 。综上所述，我们得出 $Z = 2$ 。于是该引理得到证明。 □

为了克服上述问题，我们先假设半空间的介质是耗散的，然后研究其相应的 Green 函数，最后通过极限吸收原理得到 $\mathbb{N}(x, y)$。记 $\mathbb{N}_{\omega(1+\mathbf{i}\varepsilon)}(x, y)$ 为满足将式子 (3.1) 中将实圆频率 ω 替换为复圆频率 $\omega(1 + \mathbf{i}\varepsilon)$ 后相应方程的 Green 函数。同样

的，对 $\mathbb{N}_{\omega(1+\mathbf{i}\varepsilon)}(x,y)$ 关于 x_2 变量的 Fourier 变换，得到 $\hat{\mathbb{N}}_{\omega(1+\mathbf{i}\varepsilon)}(\xi,x_2;y_2)$，且通过相同的推导，其表达式与将 (3.11) 中将 k_s,k_p 替换为 $k_s(1+\mathbf{i}\varepsilon),k_p(1+\mathbf{i}\varepsilon)$ 后相应的式子一致。下面的两个引理告诉我们，$\hat{\mathbb{N}}_{\omega(1+\mathbf{i}\varepsilon)}(\xi,x_2;y_2)$ 的零点所在何处。

注 3.1.2 通篇全文中，我们都假设耗散介质所添加的 $\mathbf{i}\varepsilon$ 是足够小的。

令 $\delta_{\omega(1+\mathbf{i}\varepsilon)}(\xi)$ 为将 $\delta(\xi)$ 中的 k_p,k_s 替换成 $k_s(1+\mathbf{i}\varepsilon),k_p(1+\mathbf{i}\varepsilon)$ 后相应的复 Rayleigh 方程。为了展现 $\delta_{\omega(1+\mathbf{i}\varepsilon)}(\xi)$ 的零点与 $\delta(\xi)$ 的零点的关系，我们先来刻画在何种情况下可以结合或是分离根式 $z^{1/2}$ 。

lem23 **引理 3.1.2** 令 $0<\varepsilon<1$，假设 $z=Re^{\mathbf{i}\phi}$, $(1+\mathbf{i}\varepsilon)=re^{\mathbf{i}\psi}$ 其中有 $0\le\phi<2\pi$, $0<\psi<\pi/2$ 和 $R,r>0$. 于是等式

$$z^{1/2}=(1+\mathbf{i}\varepsilon)(\frac{z}{1+\mathbf{i}\varepsilon^2})^{1/2} \tag{3.13}$$

当且仅当 $2\psi\le\phi<2\pi$

证明. 令 $z_\varepsilon=z/(1+\mathbf{i}\varepsilon)^2:=R_\varepsilon e^{\mathbf{i}\phi_\varepsilon}$，其中 $0\le\phi_\varepsilon<2\pi$。于是，易得当 $2\psi\le\phi<2\pi$ 时，成立 $\phi_\varepsilon=\phi-2\psi$, $R_\varepsilon=R/r$ ，则有

$$z^{1/2}=\sqrt{R}e^{\mathbf{i}\phi/2}=\sqrt{R/r}\sqrt{r}e^{\mathbf{i}(\phi/2-\psi)+\mathbf{i}\psi}=\sqrt{R_\varepsilon}\sqrt{r}e^{\mathbf{i}(\phi_\varepsilon)+\mathbf{i}\psi}=(1+\mathbf{i}\varepsilon)z_\varepsilon^{1/2}$$

同样地，当 $0\le\phi<2\psi$ 时，成立 $\phi_\varepsilon=\phi-2\psi+2\pi$ 则有 $z^{1/2}=-(1+\mathbf{i}\varepsilon)z_\varepsilon^{1/2}$。引理得证 □

下面的引理告诉我们，$\hat{\mathbb{N}}_{\omega(1+\mathbf{i}\varepsilon)}(\xi,x_2;y_2)$ 的零点所在何处。

mplex_rayleigh **引理 3.1.3** 复 *Rayleigh* 方程 $\delta_{\omega(1+\mathbf{i}\varepsilon)}(\xi)$ 在 $\mathbb{C}\backslash\Omega$ 中有且仅有两个根且为 $\pm k_R(1+\mathbf{i}\varepsilon)$。其中集合 Ω 为

$$\Omega:=\{\xi_1+\mathbf{i}\xi_2\in\mathbb{C}\mid k_p^2\varepsilon<\xi_1\xi_2<k_s^2\mathbf{i}\varepsilon,\ \xi_2/\xi_1>\varepsilon\} \tag{3.14}$$

证明. 我们定义 $\mu_\varepsilon=(k^2(1+\mathbf{i}\varepsilon)^2-\xi^2)^{1/2},k\in\mathbb{R}^+$ ，令 $\xi=\xi_1+\mathbf{i}\xi_2,\xi_1,\xi_2\in\mathbb{R}$ 以及 $(1+\mathbf{i}\varepsilon)=re^{\mathbf{i}\psi}$ 。通过简单的计算，我们有

$$\mu_\varepsilon^2=k^2(1-\varepsilon^2)-\xi_1^2+\xi_2^2+\mathbf{i}(2k^2\varepsilon-2\xi_1\xi_2):=Re^{\mathbf{i}\Theta}:=a_1+\mathbf{i}a_2 \tag{3.15}$$

定义 $\Delta := \{\xi | 2\psi \le \Theta < 2\pi\}$ ，于是由引理 3.1.2 成立 $\mu_\varepsilon = (k^2 - \xi_\varepsilon^2)^{1/2}(1 + \mathbf{i}\varepsilon)$ 当 $\xi \in \Delta$ ，另一方面 $\mu_\varepsilon = -(k^2 - \xi_\varepsilon^2)^{1/2}(1 + \mathbf{i}\varepsilon)$ 当 $\xi \notin \Delta$, 其中 $\xi_\varepsilon = \xi/(1 + \mathbf{i}\varepsilon)$。由于 ε 足够小，我们可以有如下关于集合 Δ 的等价形式：

$$\begin{aligned} \Delta &= (\pi/2 \ge \Theta < 2\pi) \cup (2\psi < \Theta < \pi/2) \\ &= \{\xi | a_1 \le 0\} \cup \{\xi | a_2 \le 0\} \cup \{\xi | a_1 > 0, a_2 > 0\text{，} \tan\Theta \ge \tan(2\psi)\} \\ &:= \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3 \end{aligned} \tag{3.16}$$

将 $a_1 = k^2(1 - \varepsilon^2) - \xi_1^2 + \xi_2^2$, $a_2 = (2k^2\varepsilon - 2\xi_1\xi_2)$ 代入式子 (3.16) 中，我么得到

$$\Delta_1 = \{\xi | \xi_1^2 - \xi_2^2 \ge k^2(1 - \varepsilon^2)\} \tag{3.17}$$

$$\Delta_2 = \{\xi | \xi_1\xi_2 \ge k^2\varepsilon\} \tag{3.18}$$

又由于 $\tan\Theta = a_1/a_2, \tan\psi = \varepsilon$, 易得

$$\Delta_3 = \{\xi | \xi_1^2 - \xi_2^2 \le k^2(1 - \varepsilon^2), \xi_1\xi_2 \le k^2\varepsilon, \frac{k^2\varepsilon - \xi_1\xi_2}{k^2(1 - \varepsilon^2) - (\xi_1^2 - \xi_2^2)} \ge \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon^2}\} \tag{3.19}$$

观察 Δ_3 ，我们发现 Δ_3 表示成为 $\Delta_3 = \Delta_{31} \cup \Delta_{32} \cup \Delta_{33}$ ，其中

$$\begin{aligned} \Delta_{31} &= \{\xi | \xi_1\xi_2 \le 0, 0 \le \xi_1^2 - \xi_2^2 \le k^2(1 - \varepsilon^2)\} \\ \Delta_{32} &= \{\xi | 0 \le \xi_1\xi_2 \le k^2\varepsilon, 0 \le \xi_1^2 - \xi_2^2 \le k^2(1 - \varepsilon^2), \frac{\xi_1\xi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \le \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon^2}\} \\ &= \{\xi | 0 \le \xi_1\xi_2 \le k^2\varepsilon, 0 \le \xi_1^2 - \xi_2^2 \le k^2(1 - \varepsilon^2), \frac{\xi_2}{\xi_1} \le \varepsilon\} \\ \Delta_{33} &= \{\xi | \xi_1\xi_2 \le 0, \xi_1^2 - \xi_2^2 \le 0, \frac{\xi_1\xi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \ge \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon^2}\} \\ &= \{\xi | \xi_1\xi_2 \le 0, \xi_1^2 - \xi_2^2 \le 0, -\frac{\xi_1}{\xi_2} \ge \varepsilon\} \end{aligned}$$

观察到 $\xi_1\xi_2 = k^2\varepsilon$ ，$\xi_1^2 - \xi_2^2 = k^2(1 - \varepsilon^2)$ ，$\xi_2 = \xi_1\varepsilon$ 三条曲线交于点 $\pm k(1 + \mathbf{i}\varepsilon)$, 于是区域 Δ 可以简化成：

$$\Delta = \{\xi | -\frac{\xi_1}{\xi_2} \ge \varepsilon, \frac{\xi_2}{\xi_1} \le \varepsilon\} \cup \{\xi | \xi_1\xi_2 \ge k^2\varepsilon\} \tag{3.20}$$

定义 Δ_s, Δ_p 为将 μ_ε 中的 k 替换为 k_s, k_p 后相应的 Δ 区域。于是，经过简单的整理，我们可以得到：

$$\mathbb{C}\backslash\Omega = (\Delta_s \cap \Delta_p) \cup (\mathbb{C}\backslash(\Delta_s \cup \Delta_p)) \tag{3.21}$$

因此，当 $\xi \in \mathbb{C}\backslash\Omega$, 成立 $\delta_{\omega(1+\mathbf{i}\varepsilon)} = \delta(\xi_\varepsilon)(1 + \mathbf{i}\varepsilon)^4$ 通过引理 3.1.1 ，此引理得证。□

由引理 3.1.3 我们得知 $\hat{\mathbb{N}}_{\omega(1+\mathbf{i}\varepsilon)}(\xi, x_2; y_2)$ 在实轴上没有极点，可以对其直接进行逆 Fourier 变换。于是，Neumann Green 函数 $\mathbb{N}(x, y)$ 可以利用极限吸收原理得到，即为

$$\mathbb{N}(x,y) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathbb{N}_{\omega(1+\mathbf{i}\varepsilon)}(x,y) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{\mathbb{N}}_{\omega(1+\mathbf{i}\varepsilon)}(\xi, x_2; y_2) e^{\mathbf{i}(x_1-y_1)\xi} d\xi. \quad (3.22)$$

现在，我们已经得到 Neumann Green 函数的具体表达形式了。但是，式子 (3.22) 中这种极限形式并不利于我们分析该函数的具体性质，特别是其无穷远处的衰减阶数。为了便于得到更加简洁的表达形式，我们引入下面这个关于柯西主值 (cf. e.g. [24, Chapter 4, Theorem 5]) 的引理

引理 3.1.4 令 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, 且 $t_0 \in (a, b)$. 如果 γ 在 $[a, b]$ 上 *Hölder* 连续，即存在常数 $\alpha \in (0, 1]$ 及 $C > 0$ 对于任意 $s, t \in [a, b]$, $|\gamma(s) - \gamma(t)| \le C|s - t|^\alpha$, 于是有

$$\lim_{z\to t_0, \pm \mathrm{Im}\, z>0} \int_a^b \frac{\gamma(t)}{t-z} dt = \text{p.v.} \int_a^b \frac{\gamma(t)}{t-t_0} dt \pm \pi \mathbf{i} \gamma(t_0),$$

其中 p.v. $\int_a^b$ 表示积分的 *Cauchy* 主值。

通过引理 3.1.1, 引理 3.1.3，易知 $\mathbb{N}_{\omega(1+\mathbf{i}\varepsilon)}(\xi \mp k_R(1+\mathbf{i}\varepsilon))$ 在点 $\pm k_R$ 的某个小领域内解析且关于 ε 一致有界。于是，对于足够小的 $d > 0$, 成立：

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\pm k_R - d}^{\pm k_R + d} \hat{\mathbb{N}}_{\omega(1+\mathbf{i}\varepsilon)}(\xi, x_2; y_2) e^{\mathbf{i}(x_1-y_1)\xi} d\xi \quad (3.23)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\pm k_R - d}^{\pm k_R + d} \frac{\hat{\mathbb{N}}(\xi, x_2; y_2)(\xi - k_R)}{\xi \mp k_R(1+\mathbf{i}\varepsilon)} e^{\mathbf{i}(x_1-y_1)\xi} d\xi \quad (3.24)$$

然后利用引理 3.1.4，表达式 (3.22) 及上面的等式, 可以得到如下 Neumann Green 函数的表达式：

$$\mathbb{N}(x,y) = \frac{1}{2\pi} \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} \hat{\mathbb{N}}(\xi, x_2; y_2) e^{\mathbf{i}(x_1-y_1)\xi} d\xi \quad (3.25)$$

$$-\frac{1}{2\omega^2}\left[\sum_{\alpha,\beta=p,s} \frac{\mathbb{A}_{\alpha\beta}(\xi)}{\delta'(\xi)} e^{\mathbf{i}(\mu_\alpha x_2 + \mu_\beta y_2) + \mathbf{i}(x_1-y_1)\xi}\right]_{-k_R}^{k_R}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2_+, \quad (3.26)$$

这里 $[f(\xi)]_a^b := f(b) - f(a)$ 。

注 3.1.3 值得注意的是，由于 $\hat{\mathbb{N}}(\xi, x_2; y_2)$ 在实轴上存在极点及研究目的的区别，导致最终 $\mathbb{N}(x, y)$ 可以存在多种等价的表达形式。例如，在文献 *[14]* 中 *Duran* 等人是利用 *Cauchy* 积分定理以及留数定理将积分路径从实轴变换到双曲线上，从而避开被积函数的极点。可以证明的是，本文中推导出的 *Green* 函数与文献 *[14]* 中的是一致的。

注 3.1.4 从 *Neumann Green* 函数的表达式 NGT2 *(3.25)* 中，我们发现在第二项中，$\mu_\alpha(\pm k_R) = \mathbf{i}\sqrt{k_R^2 - k_\alpha^2}$，易知当 x_2 增大时，第二项的值是指数衰减的。所以，式 NGT2 *(3.25)* 中第二项对应的波只在 Γ_0 附近以波数 k_R 传播，当远离 Γ_0 时非常微弱，且称为表面波 *(Rayleigh* 波*)* aki2002quantitative *[25]*。

为了后文分析的便利，我们给出以下引理，叙述若干关于 Rayleigh 函数 $\delta(\xi)$ 的性质。

delta **引理 3.1.5** 令 $d_R = (k_R - k_s)/2$，其中 k_R 为 *Rayleigh* 表面波的波数。我们与如下结论：

1. 对于任意 $|\xi| \le k_s + d_R$，存在只与 κ 有关的常数 C_1, C_2, C_3，我们有

$$C_1 k_s^4 \le |\delta(\xi)| \le C_2 k_s^4$$
$$|\delta^{(k)}(\xi)| \le C_3(|k_s^2 - \xi^2|^{-k+1/2} + |k_p^2 - \xi^2|^{-k+1/2}), \quad k = 1, 2$$

2 对于任意 $|\xi| \ge k_R$，存在只与 κ 有关的常数 C，我们有

$$|\delta(\xi)| \ge C k_s^2(|\xi|^2 - k_R^2)$$

3 令 $\delta(\xi) = \delta_1(\xi)(\xi^2 - k_R^2)$，对于任意 $k_R - d_R \le |\xi| \le k_R + d_R$，存在只与 κ 有关的常数 C，我们有

$$|\delta_1(\xi)| \ge C k_s^2$$

证明. 利用简单的求导计算，我们易得结论 1。通过 Rayleigh 函数的定义，有 $|\xi| \ge k_s, \delta(\xi) = k_s^4 f(\xi^2/k_s^2)$, 其中

$$f(t) = (2t-1)^2 - 4t\sqrt{t-1}\sqrt{t-\kappa^2}, \ \ \forall t \ge 1.$$

对于任意 $t \ge 1$, 易得：

$$\begin{aligned} f'(t) &= 8t - 4 - 4\sqrt{t-1}\sqrt{t-\kappa^2} - 2t\sqrt{t-1}/\sqrt{t-\kappa^2} - 2t\sqrt{t-\kappa^2}/\sqrt{t-1} \\ &\le 8t - 4 - 4\sqrt{t-1}\sqrt{t-k_R^2} - 4t \end{aligned} \tag{3.27}$$

显然，当 $t \to 1$, $t > 1$ 时，$f'(t) \to -\infty$, 于是存在 $\delta > 0$ 即 $A_1 > 0$, 当 $1 < t < 1+\delta$ 时，$f'(t) < -A_1$。而当 $t \ge 1+\delta$ 时，由式子 df (3.27) 得，存在 $A_2 > 0$，有 $f'(t) \le -A_2$ 又因为 $f(1) = 1$ 以及 $f((2-\kappa^2)/(1-\kappa^2)) < 0$ 。于是立得 $k_R^2 \le \frac{2-\kappa^2}{1-\kappa^2} k_s^2$ 。然后由中值定理及 $f'(t) \le -\max(A_1, A_2)$ 得

$$\min_{|\xi| \ge k_s} |\frac{\delta(\xi)}{\xi^2 - k_R^2}| \ge \min_{t \ge 1} |f'(t)| k_s^2 \ge \max(A_1, A_2) k_s^2,$$

结论 2，3 得证。 □

观察式子 (3.4) , (3.5) , 及 (3.11), 通过简单的变量替换，我们易得 Neumann Green 函数满足如下对称性或是空间互易性，即

$$\mathbb{N}(x,y)=\mathbb{N}(y,x)^T \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}^2_+ \tag{3.28}$$

对于 $x_s\in\Gamma_0$ 的情况，我们定义这种 Green 函数 $\mathbb{N}(x,x_s), x\in\mathbb{R}^2_+$ 为 $\mathbb{N}(x,y)$ 在 $y\in\mathbb{R}^2_+$, $y\to x_s$ 时的极限。由于半空间反散射问题中的点源一般都位于界面上，所以接下去我们重点研究 $x\in\Gamma_0$, $y\in\mathbb{R}^2_+$ 时的 Neumann Green 函数 $\mathbb{N}(x,y)$ 。通过 (3.4) , (3.5) , (3.11)，简单的计算可以简化 $\mathbb{N}(x,y)$：

$$\begin{aligned}\hat{\mathbb{N}}(\xi,0;y_2) &= \frac{\mathbf{i}}{\mu\delta(\xi)}\left[\begin{pmatrix}2\xi^2\mu_s & -2\xi\mu_s\mu_p\\ -\xi\varphi & \mu_p\varphi\end{pmatrix}e^{\mathbf{i}\mu_p y_2}\right. \qquad (3.29)\\ &\quad \left.+\begin{pmatrix}\mu_s\varphi & \xi\varphi\\ 2\xi\mu_s\mu_p & 2\xi^2\mu_p\end{pmatrix}e^{\mathbf{i}\mu_s y_2}\right]\\ &:= \frac{1}{\delta(\xi)}(\mathbb{N}_p(\xi)e^{\mathbf{i}\mu_p y_2}+\mathbb{N}_s(\xi)e^{\mathbf{i}\mu_s y_2}), \qquad (3.30)\end{aligned}$$

且, 当 $x\in\Gamma_0, y\in\mathbb{R}^2_+$,

$$\begin{aligned}\mathbb{N}(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{p.v.}\int_{\mathbb{R}}\hat{\mathbb{N}}(\xi,0;y_2)e^{\mathbf{i}(x_1-y_1)\xi}d\xi \qquad (3.31)\\ &\quad +\frac{\mathbf{i}}{2}\left[\sum_{\alpha=p,s}\frac{\mathbb{N}_\alpha(\xi)}{\delta'(\xi)}e^{\mathbf{i}\mu_\alpha y_2+\mathbf{i}(x_1-y_1)\xi)}\right]_{-k_R}^{k_R}.\end{aligned}$$

为了便于研究 Neumann Green 函数在边界 Γ_0 上水平方向的渐近行为，我们下面引理中更为有用的表达形式。

lem:2.3 **引理 3.1.6** *令* $x\in\Gamma_0$, $y\in\mathbb{R}^2_+$ *以及* $\phi\in(-\pi/2,\pi/2)$ *且存在如下表达* $y_2=|x-y|\cos\phi$, $x_1-y_1=|x-y|\sin\phi$ *。假设* $x_1\neq y_1$, *于是可以得到*

$$\begin{aligned}\mathbb{N}(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_L \mathbb{N}_0(t)\cos(t+\phi)e^{\mathbf{i}\lambda\cos t}dt \qquad (3.32)\\ &\quad \pm\mathbf{i}\left[\sum_{\alpha=p,s}\frac{\mathbb{N}_\alpha(\xi)}{\delta'(\xi)}e^{\mathbf{i}\mu_\alpha y_2+\mathbf{i}(x_1-y_1)\xi}\right]_{\xi=\pm k_R},\end{aligned}$$

其中 $\lambda=k_s|x-y|$, L *为复平面中的积分路径即从* $-\pi/2+\mathbf{i}\infty$ *to* $-\pi/2$, $-\pi/2$ *到* $\pi/2$, *接着从* $\pi/2$ *到* $\pi/2-\mathbf{i}\infty$ *(见图例 3.1), 这里符号* $\pm$ *取决于* $\mathrm{sgn}(x_1-y_1)=\pm1$, *且定义表达式:*

$$\mathbb{N}_0(t)=\sum_{\alpha=p,s}k_s\frac{\mathbb{N}_\alpha(k_s\sin(t+\phi))}{\delta(k_s(\sin(t+\phi))}. \tag{3.33}$$

证明. 不失一般性，我们可以假设 $x_1 > y_1$，因此有 $\mathrm{sgn}(x_1 - y_1) = 1$。注意到 $\hat{\mathbb{N}}(\xi, 0; y_2) = \sum_{\alpha=p,s} \frac{\mathbb{N}_\alpha(\xi)}{\delta(\xi)} e^{\mathbf{i}(y_2\mu_\alpha + (x_1-y_1)\xi)}$，所以对于 $\alpha = p, s$, 我们可以做经典的三角变量替换，即为 $\xi = k_\alpha \sin t$ 。由于三角函数的周期性，这里我们规定 $-\pi < \mathrm{Re}\, t \le \pi$ 以保证变换的一一对应。相应地，ξ 在复平面中的积分路径 $\mathbb{R}$ 对应于 t 所在复平面中的积分路径 L 。于是得到如下等式:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{p.v.}\int_{\mathbb{R}} \hat{\mathbb{N}}(\xi, 0; y_2) e^{\mathbf{i}(x_1-y_1)\xi} d\xi \\
=\ &\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{p.v.}\int_L \sum_{\alpha=p,s} k_s \frac{\mathbb{N}_\alpha(k_s \sin t)}{\delta(k_s \sin t)} \cos t\, e^{\mathbf{i}\lambda\cos(t-\phi)} dt.
\end{aligned}
$$

令 $L_{-\phi}$ 为 L 平移 $-\phi$ 后的积分路径, 立即得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{p.v.}\int_{\mathbb{R}} \hat{\mathbb{N}}(\xi, 0; y_2) e^{\mathbf{i}(x_1-y_1)\xi} d\xi && (3.34)\\
=\ &\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{p.v.}\int_{L_{-\phi}} \mathbb{N}_0(t) \cos(t+\phi)\, e^{\mathbf{i}\lambda\cos t} dt, && (3.35)
\end{aligned}
$$

这里 $\mathbb{N}_0(t)$ 如 (3.34) 所定义。

设 $t_R \in L$ 满足等式 $k_R = k_s \sin t_R$，于是 k_R 即为 t_R 在积分变换 $\xi = k_s \sin t$ 下的像点。特别地，由于 $k_R > k_s$, 则存在 $s_R > 0$ 使得 $t_R = \pi/2 - \mathbf{i}s_R \in L$ 。对于任意 $\varepsilon > 0$，令 L^ε 表示如下积分路径：$-\pi/2 + \mathbf{i}\infty \to -\pi/2 + \mathbf{i}(s_R + \varepsilon) \cup \partial B_\varepsilon^+(-t_R) \to -\pi/2 + \mathbf{i}(s_R - \varepsilon) \to -\pi/2 \to \pi/2 \to \pi/2 - \mathbf{i}(s_R - \varepsilon) \to \partial B_\varepsilon^+(t_R) \to \pi/2 - \mathbf{i}(s_R + \varepsilon) \to \pi/2 - \mathbf{i}\infty$，其中 $\partial B_\varepsilon^+(\pm t_R)$ 表示圆心在 $\pm t_R$ 半径为 ε 的右半圆 (见图例 3.1)。然后，令 $L_{-\phi}^\varepsilon$ 为 L^ε 平移 $-\phi$ 后的积分路径。于是，利用 Cauchy 主值的定义及留数定理，我们可以得知

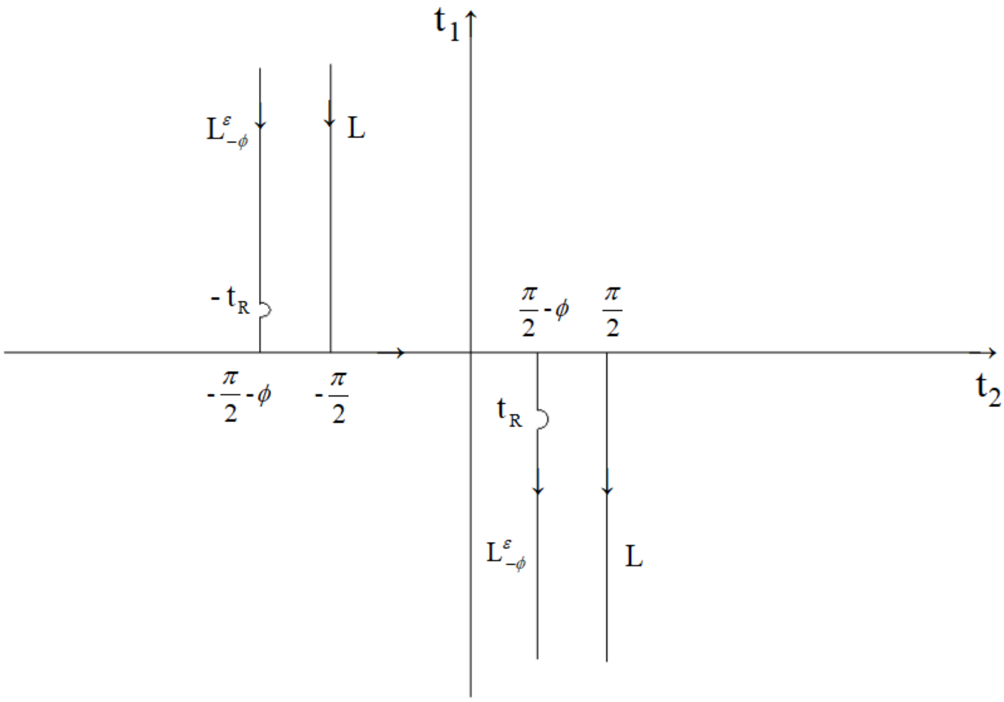
$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{p.v.}\int_{L_{-\phi}} \mathbb{N}_0(t) \cos(t+\phi)\, e^{\mathbf{i}\lambda\cos t} dt \\
=\ &\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{2\pi}\int_{L_{-\phi}^\varepsilon} \mathbb{N}_0(t) \cos(t+\phi)\, e^{\mathbf{i}\lambda\cos t} dt \\
&+ \frac{\mathbf{i}}{2} \sum_{t'=\pm t_R} \mathrm{Res}(\mathbb{N}_0(t) \cos(t+\phi) e^{\mathbf{i}\lambda\cos t}, t').
\end{aligned}
$$

通过简单的计算，易得相应留数为:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathbf{i}}{2} \sum_{t'=\pm t_R} \mathrm{Res}(\mathbb{N}_0(t) \cos(t+\phi) e^{\mathbf{i}\lambda\cos t}, t') \\
=\ &\frac{\mathbf{i}}{2} \sum_{\xi=\pm k_R} \sum_{\alpha=p,s} \frac{\mathbb{N}_\alpha(\xi)}{\delta'(\xi)} e^{\mathbf{i}(y_2\mu_\alpha + (x_1-y_1)\xi)}.
\end{aligned}
$$

另一方面，通过 Cauchy 积分定理，我们得到

$$
\frac{1}{2\pi}\int_{L_{-\phi}^\varepsilon} \mathbb{N}_0(t) \cos(t+\phi)\, e^{\mathbf{i}\lambda\cos t} dt = \frac{1}{2\pi}\int_L \mathbb{N}_0(t) \cos(t+\phi)\, e^{\mathbf{i}\lambda\cos t} dt.
$$



figure_trans 图 3.1 积分路径 L 和 $L^{\varepsilon}_{-\phi}$

最后利用 (3.31) 和 (3.34) 引理得证。 □

上述引理是我们研究 Neumann Green 函数 $\mathbb{N}(x, y)$ 在界面 Γ_0 上当 $x \to \infty$ 时衰减行为估计的一个出发点。下面，我们先回顾下关于振荡积分衰减阶数估计的 Van der Corput 引理 [26, P.152] 。

van **引理 3.1.7** *令 $\lambda \geq 1$, $f \in C[a, b]$ 且其导函数绝对可积, 如果 $u \in C^k[a, b]$, 其中 $k \geq 1$ 及 $a < b$，我们就有如下结论*

1. 如果 $|u'(t)| \geq 1$ 对于任意 $t \in (a, b)$ 成立，且 u' 在 (a, b) 上单调, 就断言

$$\left|\int_a^b f(t)e^{\mathrm{i}\lambda u(t)}dt\right| \leq 3\lambda^{-1}\left(|f(b)| + \int_a^b |f'(t)|dt\right).$$

2. 对于 $k \geq 2$ 时, 如果 $|u^{(k)}(t)| \geq 1$ 对于任意 $t \in (a, b)$ 成立, 就断言

$$\left|\int_a^b f(t)e^{\mathrm{i}\lambda u(t)}dt\right| \leq 12k\lambda^{-1/k}\left(|f(b)| + \int_a^b |f'(t)|dt\right).$$

在文献[20] 中，Chen 等对半空间逆时偏移算法的研究时，引理 3.1.7 起到了关键的作用。该引理相对于驻相定理的优势在于，对于振幅函数 $f(t)$ 的光滑性要求更低，且对于 λ 阶数的刻画具有一致性。然而，当振幅函数具有弱奇异点时，直接使用引理 3.1.7 就行不通了。幸运的是，经过研究我们发现当振幅函数存在

弱奇异点，且其与相位函数 $\phi(t)$ 的驻相点的距离存在正下界时，Van der corput 引理仍然成立，如下述引理刻画。

lem:2.5 **引理 3.1.8** 令 $\lambda \geq 1$，假设 $f \in C[-\pi/2, \pi/2]$ 且其导函数绝对可积。于是对任意区间 $(a, b) \subset (-\pi/2, \pi/2)$, 可以得到

$$\left|\int_a^b f(t) e^{\mathrm{i}\lambda\cos t} dt\right| \leq C\lambda^{-1/2}\left(|f(0)| + \int_a^b |f'(t)| dt\right), \tag{3.36}$$

这里常数 C 与 a, b, λ 及被积函数 f 无关。此外，令 $\kappa \in (0,1)$ 以及 $\phi \in (-\pi/2, \pi/2)$ 满足条件 $|\phi| \geq \phi^* > \arcsin\kappa := \phi_\kappa$ ，可以得到

$$\begin{aligned} &\left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)(\kappa^2 - \sin^2(t+\phi))^{-1/2} e^{\mathrm{i}\lambda\cos t} dt\right| \\ \leq\ & C\lambda^{-1/2}\left(|f(0)| + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |f'(t)| dt\right), \end{aligned} \tag{3.37}$$

这里常数 C 只与 ϕ^* 和 κ 有关。

证明. 我们不妨假定 $\phi > 0$ 。其中估计 (3.36) 可以 3.1.7 直接得到。这是因为区间 (a, b) 可以被切割成若干个互不相交的子区间，并且在任意一个子区间上面 $\sin t$ 单调且 $|\sin t|$ 存在下界 $1/\sqrt{2}$ 或是 $|\cos t|$ 存在下界 $1/\sqrt{2}$ 。

令 $g(t) = \kappa^2 - \sin^2(t+\phi)$ 。由于 $0 < \kappa < 1$ $g(t)$, 易知 $g(t)$ 在区间 $(-\pi/2, \pi/2]$ 上有且仅有两个零点 t_1, t_2 ，而且可以求出 $t_1 = \phi_\kappa - \phi$ 及 $t_2 = -\phi_\kappa - \phi$ 或是 $t_2 = \pi - \phi_\kappa - \phi$, 这里 t_2 取决于 $\phi + \phi_\kappa < \pi/2$ 或是 $\phi + \phi_\kappa \geq \pi/2$ 。不失一般性，我在后面的证明中都假设 $t_2 = \pi - \phi_\kappa - \phi$ 。

令 $0 < \varepsilon_0 < \min(\frac{\phi^* - \phi_\kappa}{2}, \frac{\phi_\kappa}{2})$ 。显然成立 $t_1 - \varepsilon_0 \geq -\pi/2,\ t_1 + \varepsilon_0 \leq -(\phi^* - \phi_\kappa)/2$ 以及 $t_2 - \varepsilon_0 \geq (\phi^* - \phi_\kappa)/2$ 。于是，我们可以把区间 $(-\pi/2, \pi/2)$ 切分成 5 个互补相交的子区间

$$\begin{aligned} &I_1 = (-\pi/2, t_1 - \varepsilon_0),\ I_2 = (t_1 - \varepsilon_0, t_1 + \varepsilon_0),\ I_3 = (t_1 + \varepsilon_0, t_2 - \varepsilon_0), \\ &I_4 = (t_2 - \varepsilon_0, t_2 + \min(t_2 + \varepsilon_0, \pi/2)),\ I_5 = (\min(t_2 + \varepsilon_0, \pi/2), \pi/2) \end{aligned}$$

于是利用 (3.36) 可以得到

$$\begin{aligned} &\left|\int_{I_1 \cup I_3 \cup I_5} f(t)(\kappa^2 - \sin^2(t+\phi))^{-1/2} e^{\mathrm{i}\lambda\cos t} dt\right| \\ \leq\ & C\lambda^{-1/2}\left(|f(0)| + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |f'(t)| dt\right), \end{aligned} \tag{3.38}$$

其中常数 C 只和 ϕ^* 及 κ 有关。

现在我们来估计在区间 I_2, I_4 上的积分。首先，我们观察到，在区间 $I_2 \cup I_4$ 上成立不等式 $|\sin t| \geq \sin((\phi^* - \phi_\kappa)/2)$ 。此外在该区间上还成立，

$$|g'(t)| = |\sin(2(t+\phi))| \geq \min(\sin\phi_\kappa, \sin(\phi^* + \phi_\kappa))$$

令 $\delta \in (0, \varepsilon_0)$ 充分小，因为 $g(t_j) = 0, j = 1, 2,$ 于是利用中值定理，对于任意 t 满足 $\delta \leq |t - t_j| \leq \varepsilon_0, j = 1, 2$ 我们有

$$|g(t)| \geq \min(\sin\phi_\kappa, \sin(\phi^* + \phi_\kappa))\delta,$$

通过分部积分后，得到

$$\left|\int_{t_1-\varepsilon_0}^{t_1-\delta} f(t)g(t)^{-1/2}e^{\mathbf{i}\lambda\cos t}dt\right| \leq C\delta^{-1/2}\lambda^{-1}\left(|f(0)| + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|f'(t)|dt\right).$$

类似地，

$$\left|\int_{t_1+\delta}^{t_1+\varepsilon_0} f(t)g(t)^{-1/2}e^{\mathbf{i}\lambda\cos t}dt\right| \leq C\delta^{-1/2}\lambda^{-1}\left(|f(0)| + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|f'(t)|dt\right).$$

最后，我们可以得到

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{t_1-\delta}^{t_1+\delta} f(t)g(t)^{-1/2}e^{\mathbf{i}\lambda\cos t}dt\right| \\
\leq\ & C\max_{t\in(-\pi/2,\pi/2)}|f(t)|\int_{-\delta}^{\delta}|\kappa - \sin(\phi_\kappa + t)|^{-1/2}dt \\
\leq\ & C\delta^{1/2}\max_{t\in(-\pi/2,\pi/2)}|f(t)|.
\end{aligned}$$

如此，我们只要取 $\delta = \lambda^{-1}$ 就可以得到

$$\left|\int_{I_2} f(t)(\kappa^2 - \sin^2(t+\phi))^{-1/2}e^{\mathbf{i}\lambda\cos t}dt\right| \leq C\lambda^{-1/2}\left(|f(0)| + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|f'(t)|dt\right).$$

同理，在区间 I_4 上的积分也可以被估计。结合式子 (3.38) 中的估计，引理得证。

□

lem:2.7 **引理 3.1.9** *令 $\phi \in (0, \pi/2)$ 以及 H 表示双曲线*

$$\{\xi = \xi_1 + \mathbf{i}\xi_2 \in \mathbb{C} : (\xi_1/(k_s\cos\phi))^2 - (\xi_2/(k_s\sin\phi))^2 = 1\}$$

定义 $f(\xi)$ 为 H 领域上的解析函数。于是，存在只与 κ 有关的常数 C, 成立

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{L\setminus[-\pi/2,\pi/2]} f(k_s\sin(t+\phi))e^{\mathbf{i}\lambda\cos t}dt\right| + \left|\int_{L\setminus[-\pi/2,\pi/2]} f(k_s\sin(t+\phi))\cos t e^{\mathbf{i}\lambda\cos t}dt\right| \\
\leq\ & C\lambda^{-1}(|f(0)| + \max_{\xi\in H}(k_s|f'(\xi)|)).
\end{aligned}$$

证明. 注意到，对于 $t=-\pi/2+\mathbf{i}s,\ s>0$ 有 $k_s\sin(t+\phi)=-\cosh(s)\cos\phi+\mathbf{i}\sinh(s)\sin\phi\in H$ 。于是

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\pi/2}^{-\pi/2+\mathbf{i}\infty} f(k_s\sin(t+\phi))e^{\mathbf{i}\lambda\cos t}dt\\
&= \mathbf{i}\int_0^{\infty} f(-\cosh(s)\cos\phi+\mathbf{i}\sinh(s)\sin\phi)e^{-\lambda\sinh(s)}ds
\end{aligned}$$

于是，利用分部积分就可以得到

$$\begin{aligned}
|I| &= |\int_0^{\infty} f(-\cosh(s)\cos\phi+\mathbf{i}\sinh(s)\sin\phi)/(-\lambda\cosh(s))\ de^{-\lambda\sinh(s)}|\\
&\leq \lambda^{-1}(|f(0)|+\int_0^{\infty}|\frac{df(-\cosh(s)\cos\phi+\mathbf{i}\sinh(s)\sin\phi)/\cosh(s))}{ds}|e^{-\lambda\sinh(s)}ds)
\end{aligned}$$

得到 $\pi/2\to\pi/2-\mathbf{i}\infty$ 上的积分值的估计。于是，不等式中的第一项估计得证。类似地，可以证明不等式中的第二项的估计。引理得证。 □

经过前述若干引理的铺垫，我们下面给出当 $x\in\Gamma_0,\ y\in\mathbb{R}^2_+$ 时，Neumann Green 函数相对于变量 x_1 的阶数估计。

es_NGT **定理 3.1.1** *假定 $x\in\Gamma_0,\ y\in\mathbb{R}^2_+$ 且满足 $|x_1-y_1|/|x-y|\geq(1+\kappa)/2$ 及 $k_sy_2\geq 1$ 。存在只与 κ 有关的常数 C ，有如下估计*

$$|\mathbb{N}(x,y)|+k_s^{-1}|\nabla_y\mathbb{N}(x,y)|\leq\frac{C}{\mu}\left(\frac{k_sy_2}{(k_s|x-y|)^{3/2}}+e^{-\sqrt{k_R^2-k_s^2}y_2}\right).$$

证明. 这里我们只证明关于 $\mathbb{N}(x,y)$ 的估计。由于 $\nabla_y\mathbb{N}(x,y)$ 的函数特性和 $\mathbb{N}(x,y)$ 一直，同理可证。由引理 lem:2.3 3.1.6 中的式子 (h3 3.33) 启发，不失一般性，我们假定 $x_1>y_1$ ，即有 $\phi\in(0,\pi/2)$ 且满足

$$\phi\geq\phi^*=\arcsin(1+\kappa)/2>\phi_\kappa$$

通过引理 delta 3.1.5 中的结论 3 ，我们易得式子 (h3 3.33) 中的第二项存在上界 $C\mu^{-1}e^{-\sqrt{k_R^2-k_s^2}y_2}$ ，即该项随着 y_2 增大指数衰减。

针对式子 (h3 3.33) 中的第一项，我们将其分成 p 波和 s 波两项：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_L \mathbb{N}_0(t)\cos(t+\phi)e^{\mathbf{i}\lambda\cos t}dt\\
=&\ \frac{1}{2\pi}\int_L\sum_{\alpha=p,s}k_s\frac{\mathbb{N}_\alpha(k_s\sin(t+\phi))}{\delta(k_s\sin(t+\phi))}\cos(t+\phi)e^{\mathbf{i}\lambda\cos t}dt.
\end{aligned}$$

由于，p 波和 s 波在表达形式上是相似的，这里我们只分析含有 $[\mathbb{N}_p(k_s\sin(t+\phi))]_{22}=\mu^{-1}(\varphi\mu_p)(k_s\sin(t+\phi))$ 这项，然后另一项的分析就同理可得。为了表达简便，我规定如下表示

$$
\begin{aligned}
g(t) &= k_s\frac{[\mathbb{N}_p(k_s\sin(t+\phi))]_{22}}{\delta(k_s\sin(t+\phi))}\\
&:= f(t)(\kappa^2-\sin^2(t+\phi))^{1/2},\\
f(t) &= \frac{k_s^2}{\mu}\frac{\varphi(k_s\sin(t+\phi))}{\delta(k_s\sin(t+\phi))}.
\end{aligned}
$$

于是，利用分部积分，可以得到

$$
\begin{aligned}
&\int_L g(t)\cos(t+\phi)e^{\mathbf{i}\lambda\cos t}dt\\
=\ &\cos\phi\int_L g(t)\cos t e^{\mathbf{i}\lambda\cos t}dt-\sin\phi\int_L g(t)\sin t e^{\mathbf{i}\lambda\cos t}dt\\
=\ &\cos\phi\int_L g(t)\cos t e^{\mathbf{i}\lambda\cos t}dt-\frac{\sin\phi}{\mathbf{i}\lambda}\int_L g'(t)e^{\mathbf{i}\lambda\cos t}dt\\
=\ &\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2.
\end{aligned}
$$

通过引理 3.1.5 中的结论 1 及引理 3.1.8 中的式 (3.36)，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(t)\cos t e^{\mathbf{i}\lambda\cos t}dt\right|\\
\leq\ & C\lambda^{-1/2}\left(|g(0)|+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|(g(t)\cos t)'|dt\right)\\
\leq\ & C\mu^{-1}\lambda^{-1/2}.
\end{aligned}
$$

又因为 $\pm k_R$ 不在在双曲线 H 上，于是当 $\xi\in H$ 时，成立

$$
|[\mathbb{N}_p(\xi)]_{22}|\leq C|\xi|^3,\ \ |[\mathbb{N}_p'(\xi)]_{22}|\leq C|\xi|^2,\ \ \delta(\xi)\geq Ck_s^2|\xi|^2
$$

利用引理 3.1.9 我们得到

$$
\left|\int_{L\backslash[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} g(t)\cos t e^{\mathbf{i}\lambda\cos t}dt\right|\leq C\mu^{-1}\lambda^{-1}.
$$

于是得到 $|\mathrm{I}_1|\leq C\mu^{-1}\lambda^{-1/2}\cos\phi$ 。

类似地，我们可以得到 $|\mathrm{I}_2|\leq C\mu^{-1}\lambda^{-3/2}$。事实上，唯一的区别在于，因为

$$
g'(t)=f'(t)(\kappa^2-\sin^2(t+\phi))^{1/2}-f(t)(\kappa^2-\sin^2(t+\phi))^{-1/2}\sin(t+\phi)\cos(t+\phi),
$$

所以，利用引理 3.1.8 中的 (3.36) 和 (3.37) 可以得到

$$
\left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g'(t)e^{\mathbf{i}\lambda\cos t}dt\right|\leq C\mu^{-1}\lambda^{-1/2}.
$$

于是，我们最终得出

$$|\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2| \leq C\mu^{-1}\lambda^{-1/2}\cos\phi + C\mu^{-1}\lambda^{-3/2} \leq C\mu^{-1}(k_s y_2)/(k_s|x-y|)^{3/2},$$

这里使用了条件 $k_s y_2 \geq 1$ 。引理得证。 □

从以上定理可以得知，$x \in \Gamma_0$, $y \in \mathbb{R}^2_+$ 时，Neumann Green 函数被两项控制，其中第一项随着 x_1 变大，以 3/2 阶衰减，而第二项关于 x_1 是常数，但关于 y_2 指数衰减。值得注意的是，弹性波基本解在横向关于 x_1 是以 1/2 阶衰减的。除了存在表面波，该横向衰减性质也是弹性波 Neumann Green 函数与声波 Neumann Green 函数大大不同的地方。

3.1.2 Dirichlet Green 函数

由于相比于 Dirichlet Green 函数，Neumann Green 函数的形式更为复杂，所以上一节中，我们先详细讨论了 Neumann Green 函数。现在，我们可以类似且更加简单地来讨论 Dirichlet Green 函数 $\mathbb{D}(x,y), y \in \mathbb{R}^2_+$ [27]，其满足如下方程及边界条件

$$\Delta_e[\mathbb{D}(x,y)q] + \omega^2[\mathbb{D}(x,y)q] = -\delta_y(x)q \quad \text{in } \mathbb{R}^2_+, \tag{3.39}$$

$$\mathbb{D}(x,y)q = 0 \quad \text{on } \Gamma_0. \tag{3.40}$$

同样地，类似于 (4.32) 中的频域 Neumann Green 函数，我们定义经过 Fourier 变换后的频域 Dirichlet Green 函数 $\hat{\mathbb{D}}(\xi, x_2; y_2)$。经过类似地推到，我们可以将它表达成如下形式：

$$\begin{aligned}\hat{\mathbb{D}}(\xi, x_2; y_2) \quad &= \quad \hat{\mathbb{G}}(\xi, x_2; y_2) - \hat{\mathbb{G}}(\xi, x_2; -y_2) \\ &\quad + \frac{\mathbf{i}}{\omega^2\gamma(\xi)} \sum_{\alpha,\beta=s,p} \mathbb{B}_{\alpha\beta}(\xi) e^{\mathbf{i}(x_2\mu_\alpha + y_2\mu_\beta)},\end{aligned} \tag{3.41}$$

这里有

$$\gamma(\xi) = \xi^2 + \mu_s\mu_p,\ \mathbb{B}_{sp}(\xi) = -\mathbb{B}_{ss}(\xi),\ \mathbb{B}_{ps}(\xi) = -\mathbb{B}_{pp}(\xi)$$

$$\mathbb{B}_{ss}(\xi) = \begin{pmatrix} \xi^2\mu_s & -\xi\mu_s\mu_p \\ -\xi^3 & \xi^2\mu_p \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{B}_{pp}(\xi) = \begin{pmatrix} \xi^2\mu_s & \xi^3 \\ \xi\mu_s\mu_p & \xi^2\mu_p \end{pmatrix}.$$

于是，通过极限吸收原理，Dirichlet Green 函数 $\mathbb{D}(x,y)$ 可以看作是 $\mathbb{D}_{\omega(1+\mathbf{i}\varepsilon)}(x,y)$ 当 $\varepsilon \to 0^+$ 的极限，其中 $\mathbb{D}_{\omega(1+\mathbf{i}\varepsilon)}(x,y)$ 为满足将式子 (3.39) 中将实圆频率 ω 替换

为复圆频率 $\omega(1+\mathbf{i}\varepsilon)$ 后相应方程的 Green 函数。同样地，对 $\mathbb{D}_{\omega(1+\mathbf{i}\varepsilon)}(x,y)$ 关于 x_2 变量的 Fourier 变换，得到 $\hat{\mathbb{D}}_{\omega(1+\mathbf{i}\varepsilon)}(\xi,x_2;y_2)$，且通过相同的推导，其表达式与将 (3.41) 中将 k_s,k_p 替换为 $k_s(1+\mathbf{i}\varepsilon),k_p(1+\mathbf{i}\varepsilon)$ 后相应的式子一致。于是有：

$$\begin{aligned}\mathbb{D}(x,y) &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\mathbb{D}_{\omega(1+\mathbf{i}\varepsilon)}(x,y)\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\hat{\mathbb{D}}_{\omega(1+\mathbf{i}\varepsilon)}(\xi,x_2;y_2)e^{\mathbf{i}(x_1-y_1)\xi}d\xi.\end{aligned}$$

同样类似于 Rayleigh 方程, 关于 $\gamma(\xi)$ 有如下定理

引理 3.1.10 *令 $k_s,k_p\in\mathbb{C}$ 且有 $\mathrm{Im}\,(k_s)\geq 0,\mathrm{Im}\,(k_p)\geq 0$，于是方程 $\gamma(\xi)=0$ 在复平面中无零点。*

证明. 令 $F(\xi)=\gamma(\xi)*(\xi^2-\mu_s\mu_p)$，于是观察到 $\gamma(\xi)=0$ 的根一定 $F(\xi)=0$ 的根。通过简单的计算，可以得到 $F(\xi)=(k_s^2+k_p^2)\xi^2-k_p^2k_s^2$。然而，又易得当且仅当 $\xi_0^2=k_p^2k_s^2/(k_s^2+k_p^2),F(\xi_0)=0$ 时，有 $F(\xi)=0$。但是此时 $\gamma(\xi_0)=2k_p^2k_s^2/(k_s^2+k_p^2)$。引理得证。 □

于是，通过引理 3.1.10及极限吸收原理，我们得到如下 $\mathbb{D}(x,y)$ 的表达式：

$$\mathbb{D}(x,y) = \mathbb{G}(x,y)-\mathbb{G}(x,y') \tag{3.42}$$

$$+\frac{\mathbf{i}}{2\pi\omega^2}\int_{\mathbb{R}}\sum_{\alpha,\beta=s,p}\frac{\mathbb{B}_{\alpha\beta}(\xi)}{\gamma(\xi)}e^{\mathbf{i}(\mu_\alpha x_2+\mu_\beta y_2)+\mathbf{i}(x_1-y_1)\xi}d\xi. \tag{3.43}$$

同样地，易得 Dirichlet Green 函数满足如下对称性或是空间互易性，即

$$\mathbb{D}(x,y)=\mathbb{D}(y,x)^T\qquad\forall x,y\in\mathbb{R}^2_+ \tag{3.44}$$

由于我们的成像算法中，需要对 Γ_0 上接受的数据反传，这就需要用到 Dirichlet Green 函数 D(x,y) 的相关应力张量。特别地，我们针对 $x\in\Gamma_0,y\in\mathbb{R}^2_+$，定义 $\mathbb{T}_D(x,y)\in\mathbb{C}^{2\times 2}$ 为 Dirichlet Green 函数 $\mathbb{D}(x,y)$ 在 e_2 方向的关于变量 x_2 的应力向量，记为

$$\mathbb{T}_D(x,y)q=\sigma(\mathbb{D}(x,y)q)e_2,\forall q\in\mathbb{R}^2$$

于是，通过 (3.42) 及求导计算，我们得到

$$\mathbb{T}_D(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\hat{\mathbb{T}}_D(\xi,0;y_2)e^{\mathbf{i}(x_1-y_1)\xi}d\xi,\quad\forall x\in\Gamma_0, \tag{3.45}$$

其中

$$\begin{aligned}\hat{\mathbb{T}}_D(\xi,0;y_2) &= \frac{1}{\gamma(\xi)}\left[\begin{pmatrix}\xi^2 & -\xi\mu_p\\ -\xi\mu_s & \mu_p\mu_s\end{pmatrix}e^{\mathbf{i}\mu_p y_2}+\begin{pmatrix}\mu_s\mu_p & \xi\mu_p\\ \xi\mu_s & \xi^2\end{pmatrix}e^{\mathbf{i}\mu_s y_2}\right]\\ &:= \mathbb{T}_p(\xi)e^{\mathbf{i}\mu_p y_2}+\mathbb{T}_s(\xi)e^{\mathbf{i}\mu_s y_2}.\end{aligned} \tag{3.46}$$

下面的定理与定理 3.1.1 相似，其阐述了 $\mathbb{D}(x,y)$ 在 Γ_0 上的应力张量 $\mathbb{T}(x,y)$ 关于变量 x_1 的衰减行为。观察式子 3.45，我们发现它与式子相比 3.31 其形式更为简洁。于是，我们用类似于估计 $\mathbb{N}(x,y)$ 的方法，即通过变量替换，然后利用引理 3.1.8 及引理 3.1.9，我们可以证明如下定理，这里我们省略细节。

es_DGT **定理 3.1.2** *令 $x\in\Gamma_0,\ y\in\mathbb{R}^2_+$ 满足 $|x_1-y_1|/|x-y|\geq(1+\kappa)/2$ 和 $k_sy_2\geq1$。存在只与 κ 有关的常数 C 成立如下估计*

$$|\mathbb{T}_D(x,y)|+k_s^{-1}|\nabla_y\mathbb{T}_D(x,y)|\leq C\frac{k_s^2y_2}{(k_s|x-y|)^{3/2}}.$$

观察定理 3.1.2，我们发现 $\mathbb{T}_D(x,y)$ 及其导数在 x_2 增大时，其值是关于 x_2 3/2 阶衰减的，这与声波 Dirichlet Green 函数的 e_2 方向导数表现一致 [20]。特别地，相比于其它文献的该函数的估计 [27, Lemma 2.2]，我们给出了更准确关于常数的刻画，即分子中的 y_2。而且在 $\mathbb{N}(x,y)$ 这种依赖于 y_2 的估计表示，这对对我们后面的算法分析是非常关键的。

注 3.1.5 在这一节，我们注意到，在对 $\mathbb{N}(x,y)$ 或是 $\mathbb{T}_D(x,y$ 的估计时，我们都要求满足条件 $|x_1-y_1|/|x-y|\geq(1+\kappa)/2$ 的前提，这里作出说明。第一，经过分析此条件是必要的，该条件是为了保证振幅函数的弱奇异点与相位函数的稳像点不在同一点。若我们去除此条件，我们只能得到更弱的阶数估计。第二，在后文分析中，当需要用到 $\mathbb{N}(x,y)$ 或是 $\mathbb{T}_D(x,y$ 的衰减性质时，该条件都可以满足。如果读者关心在去除条件 $|x_1-y_1|/|x-y|\geq(1+\kappa)/2$ 后，关于 $\mathbb{N}(x,y)$ 或是 $\mathbb{T}_D(x,y$ 的估计，可见附录。

3.2 正散射问题的适定性

Now we briefly recall the classical argument of limiting absorption principle (see e.g. [28–30]) to define the scattering solution for the exterior elastic scattering problem in the half space:

$$\Delta_e u+\omega^2u=0\ \text{ in }\mathbb{R}^2_+\backslash\bar{D}, \tag{3.47}$$

$$u=g\ \text{ on }\Gamma_D,\quad \sigma(u)e_2=0\ \text{ on }\Gamma_0, \tag{3.48}$$

where $g\in H^{1/2}(\Gamma_D)$. Let $\varepsilon>0$ and u_ε be the solution of the problem

$$\Delta_e u_\varepsilon+[\omega(1+\mathbf{i}\varepsilon)]^2u_\varepsilon=0\ \text{ in }\mathbb{R}^2_+\backslash\bar{D}, \tag{3.49}$$

$$u_\varepsilon=g\ \text{ on }\Gamma_D,\quad \sigma(u_\varepsilon)e_2=0\ \text{ on }\Gamma_0. \tag{3.50}$$

By the Lax-Milgram lemma, the problem (3.49)-(3.50) has a unique solution $u_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^2_+\backslash\bar{D})$. Let

$$\mathcal{D}(\Delta_e) = \{v \in H^1(\mathbb{R}^2_+\backslash\bar{D}) : \Delta_e v \in L^2(\mathbb{R}^2_+\backslash\bar{D}), v = 0 \ \text{ on } \Gamma_D, \sigma(v)e_2 = 0 \ \text{ on } \Gamma_0\}$$

as the domain of the operator $-\Delta_e$, it is shown in [30] that if ω^2 is not the eigenvalue for $-\Delta_e$ in the domain $\mathcal{D}(\Delta_e)$, u_ε converges to some function u satisfying (3.47)-(3.48) in $H^{1,-s}(\mathbb{R}^2_+\backslash\bar{D})$, $s > 1/2$, where the weighted Sobolev space $H^{1,s}(\mathbb{R}^2_+\backslash\bar{D})$, $s \in \mathbb{R}$, is defined as the set of functions in

$$L^{2,s}(\mathbb{R}^2_+\backslash\bar{D}) = \{v \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2_+\backslash\bar{D}) : (1+|x|^2)^{s/2}v \in L^2(\mathbb{R}^2_+\backslash\bar{D})\}$$

whose first derivatives are also in $L^{2,s}(\mathbb{R}^2_+\backslash\bar{D})$. The norm

$$\|v\|_{H^{1,s}(\mathbb{R}^2_+\backslash\bar{D})} = (\|v\|^2_{L^{2,s}(\mathbb{R}^2_+\backslash\bar{D})} + \|\nabla v\|^2_{L^{2,s}(\mathbb{R}^2_+\backslash\bar{D})})^{1/2}$$

, where

$$\|v\|_{L^{2,s}(\mathcal{D})} = (\int_{\mathcal{D}} (1+|x|^2)^s|v|^2 dx)^{1/2}.$$

The absence of the positive eigenvalue for the operator $-\Delta_e$ is proved in [31] in the domain

$$\mathcal{D}'(\Delta_e) = \{v \in H^1(\mathbb{R}^2_+\backslash\bar{D}), \Delta_e v \in L^2(\mathbb{R}^2_+\backslash\bar{D}), \sigma(v)\nu = 0 \text{ on } \Gamma_D, \sigma(v)e_2 = 0 \text{ on } \Gamma_0\}.$$

One can easily extend the argument in [31] to show the absence of the positive eigenvalue for $-\Delta_e$ also in the domain $\mathcal{D}(\Delta_e)$ and thus obtain the following theorem for the forward scattering problem.

thm:4.1 **定理 3.2.1** *Let $g \in H^{1/2}(\Gamma_D)$. The half-space elastic scattering problem (3.47)-(3.48) admits a unique solution $u \in H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2_+\backslash\bar{D})$. Moreover, for any bounded open set $O \subset \mathbb{R}^2_+\backslash\bar{D}$ there exists a constant $C > 0$ such that $\|u\|_{H^1(O)} \leq C\|g\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)}$.*

For the sake of convenience, we introduce the following notation: for any $u, v \in H^1(\mathbb{R}^2\backslash\bar{D})$ such that $\Delta_e u, \Delta_e v \in L^2(\mathbb{R}^2\backslash\bar{D})$,

$$\mathcal{G}(u,v) = \int_{\Gamma_D} [u(x)\cdot\sigma(v(x))\nu - \sigma(u(x))\nu\cdot v(x)]ds(x). \tag{3.51}$$

Using this notation, the integral representation formula for the solution of the half-space elastic scattering problem reads:

$$u(y)\cdot q=\mathcal{G}(u(\cdot),\mathbb{N}(\cdot,y)q),\quad \forall y\in\mathbb{R}^2_+\backslash\bar{D},\quad \forall q\in\mathbb{R}^2. \tag{3.52}$$

The following theorem which extends [20, Theorem 4.1] for acoustic waves will be proved in the Appendix of this paper. It shows that the difference between the half-space scattering solution and the full space scattering solution is small when the scatterer is far away from the boundary Γ_0.

定理 3.2.2 *Let $g\in H^{1/2}(\Gamma_D)$ and u_1,u_2 be the scattering solution of following problems:*

$$\Delta_e u_1+\omega^2 u_1=0\ \text{ in }\mathbb{R}^2_+\backslash\bar{D},\quad u_1=g\ \text{ on }\Gamma_D,\quad \sigma(u_1)e_2=0\ \text{ on }\Gamma_0, \tag{3.53}$$

$$\Delta_e u_2+\omega^2 u_2=0\ \text{ in }\mathbb{R}^2\backslash\bar{D},\quad u_2=g\ \text{ on }\Gamma_D. \tag{3.54}$$

Then there exits a constant C depending only on κ but independent of k_s,h,d_D such that

$$\|\sigma(u_1-u_2)\nu\|_{H^{-1/2}(\Gamma_D)}\le\frac{C}{\mu}(1+\|T_1\|)(1+\|T_2\|)(1+k_sd_D)^2(k_sh)^{-1/2}\|g\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)}.$$

Here $T_1,T_2:H^{1/2}(\Gamma_D)\to H^{-1/2}(\Gamma_D)$ are the Dirichlet to Neumann mapping associated with the elastic scattering problem (3.53) and (3.54), respectively. $\|T_1\|,\|T_2\|$ denote their operator norms.

In this section we prove Theorem 3.2.2. Let $w(x)$ be the scattering solution of the problem:

$$\Delta_e w+\omega^2 w=0\ \text{ in }\mathbb{R}^2_+,\quad \sigma(w)e_2=-\sigma(u_2)e_2\ \text{ on }\Gamma_0. \tag{3.55}$$

Then u_1-u_2-w is the scattering solution of the problem (3.53) with the boundary condition $u_1-u_2-w=-w$ on Γ_D. Thus by Theorem 3.2.1 and (2.1), we have

$$\begin{aligned}\|\sigma(u_1-u_2)\nu\|_{H^{-1/2}(\Gamma_D)}&\le\|T_1(u_1-u_2-w)\|_{H^{-1/2}(\Gamma_D)}+\|\sigma(w)\nu\|_{H^{-1/2}(\Gamma_D)}\\&\le C(1+\|T_1\|)\max_{x\in\bar{D}}(|w(x)|+d_D|\nabla w(x)|),\end{aligned} \tag{3.56}$$

where we recall that $T_1:H^{1/2}(\Gamma_D)\to H^{-1/2}(\Gamma_D)$ is the Dirichlet to Neumann mapping associated to the half-space elastic scattering problem (3.53) and $\|T_1\|$ denotes its operator norm.

By the integral representation formula, the scattering solution of the problem (3.55) satisfies

$$w(y)\cdot e_j=\int_{\Gamma_0}\sigma(u_2(x))e_2\cdot\mathbb{N}(x,y)e_j ds(x),\ \ \forall y\in\mathbb{R}^2,\ j=1,2. \tag{3.57}$$

On the other hand, by the integral representation formula, we have

$$u_2(x)\cdot e_j=\mathcal{G}(u_2(\cdot),\mathbb{G}(\cdot,x)e_j),\ \ \forall x\in\Gamma_0,\ j=1,2,$$

where $\mathcal{G}(\cdot,\cdot)$ is defined in (3.51) and $\mathbb{G}(\cdot,\cdot)$ is the fundamental solution tensor of the elastic wave equation introduced in section 2. For any $x\in\Gamma_0, z\in\mathbb{R}^2$, denote by $\mathbb{T}(z,x)\in\mathbb{C}^{2\times 2}$ the traction tensor, $\mathbb{T}(z,x)q=\sigma(\mathbb{G}(z,x)q)e_2,\forall q\in\mathbb{R}^2$. The (i,j)-th element of $\mathbb{T}(z,x)$ is

$$[\mathbb{T}(z,x)]_{ij}=[\sigma(\mathbb{G}(z,x)e_j)e_2]e_i,\ \ i,j=1,2.$$

Simple calculation shows that

$$\sigma(u_2(x))e_2\cdot e_i=\mathcal{G}(u_2(\cdot),\mathbb{T}(\cdot,x)^Te_i),\ \ \forall x\in\Gamma_0, i=1,2,$$

which yields from (3.57) that

$$\begin{aligned} w(y)\cdot e_j &= \mathcal{G}(u_2(\cdot),\left[\int_{\Gamma_0}\sum_{i=1}^{2}[\mathbb{T}(\cdot,x)^Te_i]\cdot[e_i^T\mathbb{N}(x,y)e_j]ds(x)\right]) \\ &= \mathcal{G}(u_2(\cdot),\mathbb{V}(\cdot,y)e_j), \end{aligned} \tag{3.58}$$

where

$$\mathbb{V}(z,y)=\int_{\Gamma_0}\mathbb{T}(z,x)^T\mathbb{N}(x,y)ds(x),\ \ \forall y\in\mathbb{R}^2, z\in\Gamma_D.$$

Notice that $\|\sigma(u_2)\nu\|_{H^{-1/2}(\Gamma_D)}\le\|T_2\|\|g\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)}$, where $T_2: H^{1/2}(\Gamma_D)\to H^{-1/2}(\Gamma_D)$ is the Dirichlet to Neumann mapping associated to the scattering problem (3.54) and $\|T_2\|$ denotes its operator norm. We obtain from (3.58) and (2.1) that

$$|w(y)|+d_D|\nabla w(y)| \le C(1+\|T_2\|)\|g\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)}\max_{z\in\Gamma_D}\sum_{i,j=0}^{1}d_D^{i+j}|\nabla_z^i\nabla_y^j\mathbb{V}(z,y)|. \tag{3.59}$$

To estimate the term involving $\mathbb{V}(z,y)$, we use Parserval identity and Lemma ?? to obtain

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(z,y) &= \frac{1}{2\pi}\,\text{p.v.}\int_{\mathbb{R}}\hat{\mathbb{T}}(z_2;\xi,0)^T\hat{\mathbb{N}}(\xi,0;y_2)e^{-\mathbf{i}\xi(y_1+z_1)}d\xi \\ &\quad -\frac{\mathbf{i}}{2}\left[\hat{\mathbb{T}}(z_2;\xi,0)^T\hat{\mathbb{N}}(\xi,0;y_2)e^{-\mathbf{i}\xi(y_1+z_1)}\right]_{-k_R}^{k_R}. \end{aligned}$$

It is easy to see from (3.4)-(3.5) that

$$\begin{aligned}\hat{\mathbb{T}}(z_2;\xi,0) &= \frac{\mu}{2\omega^2}\begin{pmatrix}\varphi & \frac{\xi\varphi}{\mu_s}\\ 2\xi\mu_s & 2\xi^2\end{pmatrix}e^{\mathbf{i}\mu_s z_2}+\frac{\mu}{2\omega^2}\begin{pmatrix}2\xi^2 & -2\xi\mu_p\\ -\frac{\xi\varphi}{\mu_p} & \varphi\end{pmatrix}e^{\mathbf{i}\mu_p z_2}\\ &:= \tilde{\mathbb{T}}_s(\xi)e^{\mathbf{i}\mu_p z_2}+\tilde{\mathbb{T}}_p(\xi)e^{\mathbf{i}\mu_s z_2}.\end{aligned}$$

Now by using (3.30) we have

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(z,y) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{\alpha,\beta=p,s}\text{p.v.}\int_{\mathbb{R}}\frac{\tilde{\mathbb{T}}_\alpha(\xi)^T\mathbb{N}_\beta(\xi)}{\delta(\xi)}e^{\mathbf{i}(\mu_\alpha z_2+\mu_\beta y_2)-\mathbf{i}(y_1+z_1)\xi}d\xi\\ &\quad -\frac{\mathbf{i}}{2}\sum_{\alpha,\beta=p,s}\left[\frac{\tilde{\mathbb{T}}_\alpha(\xi)^T\mathbb{N}_\beta(\xi)}{\delta'(\xi)}e^{\mathbf{i}(\mu_\alpha z_2+\mu_\beta y_2)-\mathbf{i}(y_1+z_1)\xi}\right]_{-k_R}^{k_R} := \mathrm{V}_1+\mathrm{V}_2.\end{aligned}$$

To estimate V_1 we split the integral into two domains $(-k_s,k_s)$ and $\mathbb{R}\backslash[-k_s,k_s]$ and use the Van der Corput lemma 3.1.7 to estimate the integral in the first interval and the argument in Lemma ?? to estimate the integral in $\mathbb{R}\backslash[-k_s,k_s]$. This yields $|\mathrm{V}_1|\le C\mu^{-1}(k_s h)^{-1/2}$. By the same argument as in Lemma ?? we can show $|\mathrm{V}_2|\le C\mu^{-1}e^{-\sqrt{k_R-k_s}h}$. This shows

$$\max_{z\in\Gamma_D}|\mathbb{V}(z,y)|\le\frac{C}{\mu}(k_s h)^{-1/2},\quad\forall y\in\bar{D}.$$

A similar argument shows that

$$\max_{z\in\Gamma_D}k_s^{i+j}|\nabla_z^i\nabla_y^j\mathbb{V}(z,y)|\le\frac{C}{\mu}(k_s h)^{-1/2},\quad\forall y\in\bar{D},\ i,j=0,1.$$

Substitute the above two estimates into (3.59) we obtain

$$\max_{y\in\bar{D}}(|w(y)|+d_D|\nabla w(y)|)\le\frac{C}{\mu}(1+\|T_2\|)(1+k_s d_D)^2(k_s h)^{-1/2}\|g\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)}.$$

This completes the proof of the theorem from (3.56). □

We remark that the well-posedness of the full space elastic scattering problem (3.54) under the so-called Sommerfeld-Kupradze radiation condition is well known (cf. e.g. [7]). It is equivalent to the solution defined by the limiting absorption principle [9, 28].

第 4 章　半空间反散射问题的逆时偏移算法

chap: RTM

从本章开始，我们将研究半空间弹性波逆散射问题。在地球物理反问题，弹性介质的无损检测等领域中，半空间弹性波模型得到了非常重要的实际应用。不同于半空间声波模型，半空间弹性波模型存在一种表面波，这种波只在半空间表面传播且其波数比相应的弹性波体波要大。

我们先针对障碍物为一点源时，提出点扩散函数，并对点扩散函数进行分辨率分析及数值实验。然后，我们提出了求解开半空间弹性介质中的障碍物成像问题的单频逆时偏移算法。该算法能够对不同类型的障碍物进行有效成像，确定其位置、大小和形状，并且不需要提前知道障碍物的先验信息。由于，每一个散射波都可以利用 Green 积分公式看成是在障碍物表面的二次点源波的叠加，即为惠更斯原理。于是我们可以利用点扩散函数及相应方程的正则性来研究逆时偏移成像函数的分辨率。最后，我们用大量的数值算例验证了开波导逆时偏移算法对障碍物成像问题的有效性。

4.1　问题介绍

我们先来介绍半空间弹性波反散射问题的模型设置, 如图。令 $D \subset \mathbb{R}^2_+ =$

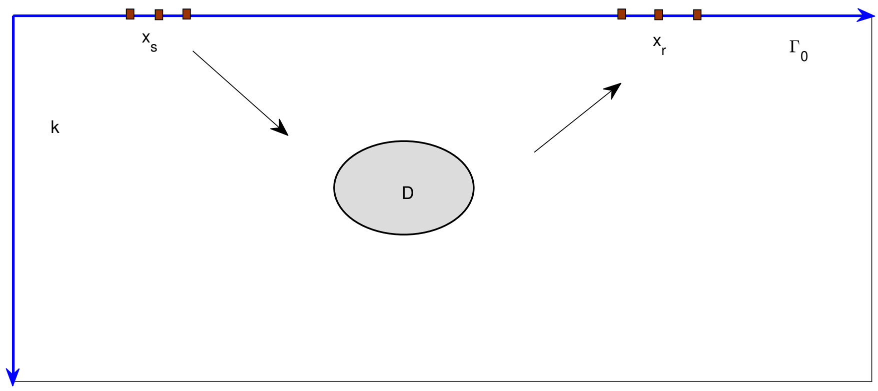


图 4.1 半空间弹性波障碍物散射模型

figure_half

$\{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$ 是嵌入在半空间中的有界 Lipschitz 区域，其中 ν 是边界 Γ_D 的单位外法向。我们假设入射波是由位于半空间表面 $\Gamma_0 = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$ 上的 x_s 的点源激发，且其激发的极化方向为 $q \in \mathbb{R}^2$。假设半空间中的背景介质是弹性介质，且其表面满足自由边界条件 (Traction Free), 于是入射波即为

半空间弹性波的 Neumann Green 函数 $\mathbb{N}(x, x_s)$ 。假设接收点 $x_r \in \Gamma_0$, 于是接受到的测量数据为 $u_q(x_r, x_s) = u_q^s(x_r, x_s) + \mathbb{N}(x_r, x_s)q, x_r \in \Gamma_0$，其中 $u_q^s(x, x_s)$ 是如下半空间弹性波方程的散射解。

$$\Delta_e u_q^s(x, x_s) + \rho\omega^2 u_q^s(x, x_s) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}_+^2 \backslash \bar{D}, \tag{4.1}$$

$$u_q^s(x, x_s) = -\mathbb{N}(x, x_s)q \ \ \text{on } \Gamma_D, \tag{4.2}$$

$$\sigma(u_q^s(x, x_s))e_2 = 0 \ \ \text{on } \Gamma_0, \tag{4.3}$$

这里 e_i 是沿着 $x_i, i = 1, 2$ 轴的单位向量。

如何通过测量到的散射数据来确定散射体 D 的位置、大小和形状就是本章将要解决的问题。

4.2 点扩散函数

在这一节中，我们将详细介绍半空间弹性波点扩散函数 (point spread function)。点扩散函数是一种针对半空间介质中点源的成像函数。在文献 [20] 中，Chen 等提出了半空间声波的点扩散函数，我们这里将其推广到半空间弹性波的情形，特别的，此时的点扩散函数是一个 2×2 的矩阵。假设在半空间的表面 $\Gamma_0^d = \{(x_1, x_2)^T \in \Gamma_0 : x_1 \in (-d, d)\}$ 上接受到的数据为 Neumann Green 函数 $\mathbb{N}(x, y)$, 即位于 y 处的点源的数据，这里 $d > 0$ 称为孔径。于是，我们将有限孔径点扩散函数 $\mathbb{J}_d(x, y), x, y \in \mathbb{R}_+^2$ 定义为将数据 $\mathbb{N}(x, y)\chi_{(-d,d)}$ 作为在 Γ_0 上的 Dirichlet 边界条件的反传波长，这里 $\chi_{(-d,d)}$ 为区间 $\chi_{(-d,d)}$ 上的特征函数。更准确的来说，$\mathbb{J}_d(x, y)e_j, j = 1, 2,$ 是如下散射问题的解：

$$\begin{aligned}
&\Delta_e[\mathbb{J}_d(x, y)e_j] + \omega^2[\mathbb{J}_d(x, y)e_j] = 0 \ \ \text{in } \mathbb{R}_+^2, \\
&\mathbb{J}_d(x, y)e_j = [\overline{\mathbb{N}(x, y)}e_j]\chi_{(-d,d)} \ \ \text{on } \Gamma_0.
\end{aligned}$$

利用弹性波的积分表示公式, 我们有，对于任意 $z, y \in \mathbb{R}_+^2$ ，

$$\begin{aligned}
[\mathbb{J}_d(z, y)]_{ij} &= e_i \cdot [\mathbb{J}_d(z, y)e_j] \\
&= \int_{\Gamma_0^d} \mathbb{T}_D(x, z)e_i \cdot \overline{\mathbb{N}(x, y)}e_j ds(x), \ \ i, j = 1, 2,
\end{aligned}$$

利用矩阵表达，可以简化为

$$\mathbb{J}_d(z, y) = \int_{\Gamma_0^d} \mathbb{T}_D(x, z)^T \overline{\mathbb{N}(x, y)} ds(x). \tag{4.4}$$

观察表达式 (4.4) 及定理 3.1.1，定理 3.1.2 不难发现，当 $d \to \infty$ 时，$\mathbb{J}_d(z,y)$ 收敛。因此，自然地，我们就可以定义半空间弹性波点扩散函数 $\mathbb{J}(x,y) \in \mathbb{C}^{2\times 2}$，$x, y \in \mathbb{R}^2_+$，即为

$$\mathbb{J}(z,y) = \int_{\Gamma_0} \mathbb{T}_D(x,z)^T \overline{\mathbb{N}(x,y)} ds(x). \tag{4.5}$$

于是，利用极限吸收原理，我们有

$$\mathbb{J}(z,y) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\Gamma_0} \mathbb{T}_D^{\omega(1+\mathbf{i}\varepsilon)}(x,z)^T \, \overline{\mathbb{N}_{\omega(1+\mathbf{i}\varepsilon)}(x,y)} ds(x),$$

这里 $\mathbb{T}_D^{\omega(1+\mathbf{i}\varepsilon)}(x,z)q = \sigma(\mathbb{D}_{\omega(1+\mathbf{i}\omega)}(x,z)q)e_2, \forall q \in \mathbb{R}^2$。利用 Parserval 等式，Lemma 3.1.4, (3.30) and (3.46), 我们可以得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{J}(z,y) \;\; = \;\; & \frac{1}{2\pi} \sum_{\alpha,\beta=p,s} \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathbb{T}_\alpha(\xi)^T \overline{\mathbb{N}_\beta(\xi)}}{\overline{\delta(\xi)}} e^{\mathbf{i}(\mu_\alpha z_2 - \overline{\mu}_\beta y_2) + \mathbf{i}(y_1 - z_1)\xi} d\xi \\
& - \frac{\mathbf{i}}{2} \sum_{\alpha,\beta=p,s} \left[\frac{\mathbb{T}_\alpha(\xi)^T \overline{\mathbb{N}_\beta(\xi)}}{\overline{\delta'(\xi)}} e^{\mathbf{i}(\mu_\alpha z_2 - \overline{\mu}_\beta y_2) + \mathbf{i}(y_1 - z_1)\xi} \right]_{-k_R}^{k_R}.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

为了后文讨论方便，我们把 $\mathbb{J}(z,y)$ 中的一部分定义为：

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}(z,y) \;\; = \;\; & \frac{1}{2\pi} \int_{-k_p}^{k_p} \frac{\mathbb{T}_p(\xi)^T \overline{\mathbb{N}_p(\xi)}}{\overline{\delta(\xi)}} e^{\mathbf{i}\mu_p(z_2 - y_2) + \mathbf{i}(y_1 - z_1)\xi} d\xi \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-k_s}^{k_s} \frac{\mathbb{T}_s(\xi)^T \overline{\mathbb{N}_s(\xi)}}{\overline{\delta(\xi)}} e^{\mathbf{i}\mu_s(z_2 - y_2) + \mathbf{i}(y_1 - z_1)\xi} d\xi.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

在研究半空间弹性波点扩散函数之前，我们先来定义成像函数的采样区域。令 Ω 为成像函数的采样区域，定义 $h = \text{dist}(\Omega, \Gamma_0)$ 是 Ω 与 Γ_0 的距离。我们假设存在常数 $0 < c_1 < 1, c_2 > 0$ 成立

$$|x_1| \le c_1 d, \;\; |x - y| \le c_2 h, \quad \forall x, y \in \Omega. \tag{4.8}$$

注 4.2.1 上述假设中，第一个条件代表成像函数的采样区域不能太靠近孔径边缘，第二个条件代表采样区域的尺寸相比于其与 Γ_0 的距离不能太大。第二个条件通常是合理的，因为我们感兴趣的障碍物的尺寸大小要比入射波的波长小或是相当，也就是 $k_s h \gg 1$。

下面的引理不仅说明了 $\mathbb{J}(z,y)$ 是 $\mathbb{J}_d(z,y)$ 在 $d \to \infty$ 的极限，而且还给出了 $\mathbb{J}_d(z,y)$ 与 $\mathbb{J}(z,y)$ 关于 (h/d) 的误差估计。

error_jd **引理 4.2.1** *假设* $k_s h \geq 1$ *和* $d \gg h$ *。对于任意* $z, y \in \Omega$ *，我们有*

$$\begin{aligned}
&|\mathbb{J}(z,y) - \mathbb{J}_d(z,y)| + k_s^{-1}|\nabla_y(\mathbb{J}(z,y) - \mathbb{J}_d(z,y))| \\
\leq\ & \frac{C}{\mu}\left[\left(\frac{h}{d}\right)^2 + (k_s h)^{1/2} e^{-k_s h\sqrt{\kappa_R^2 - 1}}\left(\frac{h}{d}\right)^{1/2}\right],
\end{aligned}$$

这里常数 C *只依赖于* κ *。*

证明. 我们利用定理 3.1.1 和定理 3.1.2，作变量替换 $t = x_1 - z_1$，得到当 $k_s h \geq 1$ 和 $d \gg h$ 时有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_d^\infty \left[\mathbb{T}_D(x,z)^T \overline{\mathbb{N}(x,y)}\right]_{x_2=0} dx_1\right| \\
\leq\ & \frac{C}{\mu}\int_d^\infty \frac{k_s^{1/2} z_2}{|x-z|^{3/2}}\left(\frac{k_s^{-1/2} y_2}{|x-y|^{3/2}} + e^{-\sqrt{k_R^2 - k_s^2} y_2}\right) dx_1 \\
\leq\ & \frac{C}{\mu}\int_{(1-c_1)d/h}^\infty \left(\frac{1}{(1+t^2)^{3/2}} + \frac{(k_s h)^{1/2}}{(1+t^2)^{3/4}} e^{-\sqrt{k_R^2 - k_s^2} h}\right) dt \\
\leq\ & \frac{C}{\mu}\left[\left(\frac{h}{d}\right)^2 + \frac{(k_s h)^{1/2}}{e^{\sqrt{k_R^2 - k_s^2} h}}\left(\frac{h}{d}\right)^{1/2}\right].
\end{aligned}$$

上面的第二不等式我们使用了 (4.8) 的假定。类似地，我们也可以证明在 $(-\infty, -d)$ 上的不等式估计。这就说明了 $\mathbb{J}(z,y) - \mathbb{J}_d(z,y)$ 的误差大小。同样地，针对 $\nabla_y(\mathbb{J}(z,y) - \mathbb{J}_d(z,y))$ 的估计也可以被证明。 □

有了以上引理，现在我们可以只研究 $\mathbb{J}(z,y)$ 的性质，然后通过引理 4.2.1 得到 $\mathbb{J}_d(z,y)$ 的性质。由于我们只关心障碍物远离边界 Γ_0 时的情况，即 $k_s h \gg 1$，所以，针对点扩散函数 $\mathbb{J}(z,y)$，我们希望将其分成两项，其中第一项与 $k_s h$ 无关，即主项；第二项关于 $k_s h$ 是衰减的。下面，我们将说明当 $z, y \in \Omega$ 时，$\mathbb{F}(z,y)$ 是 $\mathbb{J}_d(z,y)$ 的 $\mathbb{F}(z,y)$ 主项，而且当 $|z-y| \to \infty$ 时，它是衰减的。特别地，对于 $\mathbb{F}(z,y)$ 的虚部 $|\mathrm{Im}\,\mathbb{F}_{ii}(z,y)|, i = 1,2$，其在 $z = y$ 处存在峰值。

下面我们将用几个引理来说明 $\mathbb{J}_d(z,y) - \mathbb{F}(z,y)$ 关于 $k_s h$ 及 h/d 的误差估计。如下引理将说明式 (4.6) 中的第二项是随着 $k_s h$ 变大而指数衰减的。

decay_1 **引理 4.2.2** *存在只与* κ *有关的常数* C*，当* $z, y \in \Omega$ *时，成立*

$$\left|\sum_{\alpha,\beta=p,s}\left[\frac{\mathbb{T}_\alpha(\xi)^T \overline{\mathbb{N}_\beta(\xi)}}{\overline{\delta'(\xi)}} e^{\mathbf{i}(\mu_\alpha z_2 - \overline{\mu}_\beta y_2) + \mathbf{i}(y_1 - z_1)\xi}\right]_{-k_R}^{k_R}\right| \leq \frac{C}{\mu} e^{-\sqrt{k_R^2 - k_s^2} h}.$$

证明. 观察式子 (3.46)，(3.30)，我们发现，对于 $\alpha = p, s$，成立 $|\mathbb{T}_\alpha(\pm k_R)| \le Ck_R^2/k_s^2 \le C, |\mathbb{N}_\alpha(\pm k_R)| \le Ck_R^3$。利用引理 3.1.5，该引理得证。 □

lem:3.3 **引理 4.2.3** *假设 $g(t) \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$。存在只与 κ 有关的常数 C，对于任意 $z, y \in \Omega$ 成立*

$$\begin{aligned} & \left| \text{p.v.} \int_{|\xi|>k_s} \frac{g(\xi)}{\delta(\xi)} d\xi \right| \\ \le\ & Ck_s^{-4} \int_{|\xi|>k_s} |g(\xi)| d\xi + Ck_s^{-3} \max_{\xi \in (k_R - d_R, k_R + d_R)} (|g(\xi)| + k_s |g'(\xi)|). \end{aligned}$$

这里 $d_R = (k_R - k_s)/2$。

证明. 不失一般性，这里我们只针对在区间 (k_s, ∞) 上的积分来证明该引理。如引理 Lemma 3.1.5 中一样，我们有如下表示 $\delta(\xi) = (\xi^2 - k_R^2)\delta_1(\xi)$，其中当 $\xi > k_s$ 时，$\delta_1(\xi) \ne 0$。利用 Cauchy 主值的定义，我们有

$$\begin{aligned} \text{p.v.} \int_{k_s}^{\infty} \frac{g(\xi)}{\delta(\xi)} d\xi &= \int_{k_s}^{k_R - d_R} \frac{g(\xi)}{\delta(\xi)} d\xi + \int_{k_R + d_R}^{\infty} \frac{g(\xi)}{\delta(\xi)} d\xi \\ &\quad + \int_{k_R - d_R}^{k_R + d_R} \frac{g(\xi)((\xi + k_R)\delta_1(\xi))^{-1} - g(k_R)(2k_R\delta_1(k_R))^{-1}}{(\xi - k_R)} d\xi \end{aligned} \tag{4.9}$$

利用引理 3.1.5，我们易得

$$\left| \int_{k_s}^{k_R - d_R} \frac{g(\xi)}{\delta(\xi)} d\xi + \int_{k_R + d_R}^{\infty} \frac{g(\xi)}{\delta(\xi)} d\xi \right| \le Ck_s^{-4} \int_{k_s}^{\infty} |g(\xi)| d\xi.$$

同样利用引理 3.1.5 中对 $\delta(\xi), \delta_1(\xi)$ 的估计及中值定理，我们可以得到

$$\begin{aligned} & \left| \int_{k_R - d_R}^{k_R + d_R} \frac{g(\xi)((\xi + k_R)\delta_1(\xi))^{-1} - g(k_R)(2k_R\delta_1(k_R))^{-1}}{(\xi - k_R)} d\xi \right| \\ \le\ & 2d_R \max_{\xi \in (k_R - d_R, k_R + d_R)} \Big(\Big| \frac{g'(\xi)}{(\xi + k_R)\delta_1(\xi)} \Big| \\ & + \Big| \frac{g(\xi)\delta_1(\xi)}{((\xi + k_R)\delta_1(\xi))^2} \Big) \Big| + \Big| \frac{g(\xi)\delta_1'(\xi)}{((\xi + k_R)\delta_1(\xi))^2} \Big| \Big) \\ \le\ & Ck_s^{-3} \max_{\xi \in (k_R - d_R, k_R + d_R)} (|g(\xi)| + k_s |g'(\xi)|) \end{aligned}$$

引理得证。 □

下面的引理继续说明了 $\mathbb{J}(z, y)$ 中在区间 $|\xi| > k_s$ 上相应的积分是随 $k_s h$ 增大衰减的。

decay_2 **引理 4.2.4** 令 $k_sh\ge 1$。存在只与 κ 有关的常数 C，对任意 $z,y\in\Omega$ 成立

$$\left|\sum_{\alpha,\beta=p,s}\text{p.v.}\int_{|\xi|>k_s}\frac{\mathbb{T}_\alpha(\xi)^T\overline{\mathbb{N}_\beta(\xi)}}{\overline{\delta(\xi)}}e^{\mathbf{i}(\mu_\alpha z_2-\overline{\mu}_\beta y_2)+\mathbf{i}(y_1-z_1)\xi}d\xi\right|\le\frac{C}{\mu}(k_sh)^{-1}.$$

证明. 关于 $\alpha,\beta=p,s$，我们定义 $g_{\alpha\beta}(\xi)=\mathbb{T}_\alpha(\xi)^T\overline{\mathbb{N}_\beta(\xi)}e^{\mathbf{i}(\mu_\alpha z_2-\overline{\mu}_\beta y_2)+\mathbf{i}(y_1-z_1)\xi}$。于是利用引理 ~~4.2.3~~ lem:3.3，我们可以易得

$$\begin{aligned}&\left|\text{p.v.}\int_{|\xi|>k_s}\frac{g_{\alpha\beta}(\xi)}{\overline{\delta(\xi)}}d\xi\right|\\ \le\ &\frac{C}{k_s^6\mu}\int_{k_s}^\infty|\xi|^5e^{-\sqrt{\xi^2-k_s^2}(y_2+z_2)}d\xi+\frac{C}{\mu}(k_sh)e^{-\sqrt{(k_R-d_R)^2-k_s^2}(y_2+z_2)}\\ \le\ &\frac{C}{\mu}\int_1^\infty t^5e^{-\sqrt{t^2-1}k_s(y_2+z_2)}dt+\frac{C}{\mu}(k_sh)e^{-\sqrt{(k_R-d_R)^2-k_s^2}(y_2+z_2)}\\ \le\ &\frac{C}{\mu}(k_sh)^{-1}+\frac{C}{\mu}(k_sh)e^{-\sqrt{(k_R-d_R)^2-k_s^2}(y_2+z_2)},\end{aligned}$$

这里我们使用了条件 $y_2,z_2\ge h$ 和 $d_R=(k_R-k_s)/2\ge C_1k_s$，其中常数 $C_1>0$ 只依赖于 κ。又因为上面不等式的第二项是关于 k_sh 指数衰减，则可以被 $(k_sh)^{-1}$ 控制。引理得证。 □

下面的引理将有助于我们分析在区间 $(-k_p,k_p)$ 上，当 $\alpha\ne\beta$ 时的积分。

cross_term **引理 4.2.5** 令 $\phi(t)=\sqrt{1-t^2}-\tau\sqrt{\kappa^2-t^2}+\nu t$，这里 $\kappa\in(0,1),\tau\ge\tau_0>0,\nu\in\mathbb{R}$。存在仅依赖于 κ,τ_0 而与 ν 无关的常数 C，对于任意 $\lambda\ge1$ 以及 $f\in C[0,\kappa]$ 且其存在绝对连续的导函数，成立:

$$\begin{aligned}&\left|\int_{-\kappa}^{\kappa}f(t)e^{\mathbf{i}\lambda\phi(t)}dt\right|+\left|\int_{-\kappa}^{\kappa}f(t)e^{-\mathbf{i}\lambda\phi(t)}dt\right|\\ \le\ &C\lambda^{-1/4}\left(|f(0)|+\int_{-\kappa}^{\kappa}|f'(t)|dt\right).\end{aligned}$$

证明. 这里我们只要证明第一个在区间 $(0,\kappa)$ 上的积分的估计。在区间 $(-\kappa,0)$ 上的积分的估计可以被类似证明，我们省略其证明细节。通过简单的求导计算，我们可以得到对于任意 $t\in(0,\kappa),m\ge2$，函数 $\phi(t)$ 的 m 次导函数为 $\phi^{(m)}(t)=\tau\kappa^{-(m-1)}\psi_m(t/\kappa)-\psi_m(t)$，其中

$$\psi_2(t)=(1-t^2)^{-3/2},\ \ \psi_3(t)=3t(1-t^2)^{-5/2},$$
$$\psi_4(t)=3(1+4t^2)(1-t^2)^{-7/2}.$$

显然有，$\psi_m(t),m\ge2$ 在区间 $(0,\kappa)$ 中是单调增函数。

首先我们考虑当 $\tau \geq \kappa^2$ 时的情况。这就意味着 $\tau\kappa^{-3} \geq \kappa^{-1}$ 而且有

$$\phi^{(4)}(t) \geq (\kappa^{-1} - 1)\psi_4(t) \geq 3(\kappa^{-1} - 1).$$

利用 Van der Corput 引理 3.1.7，立即得到

$$\left|\int_0^\kappa f(t)e^{\mathrm{i}\lambda\phi(t)}dt\right| \leq C\lambda^{-1/4}\left(|f(0)| + \int_{-\kappa}^{\kappa}|f'(t)|dt\right). \tag{4.10}$$

接下去，我们考虑当 $\tau < \kappa^2$ 时的情况。令 $\phi''(t) = 0$，可以得到

$$\tau\kappa^{-1}(1 - (t/\kappa)^2)^{-3/2} = (1 - t^2)^{-3/2}$$

易得 $\phi''(t)$ 在区间 $(0, \kappa)$ 上存在且只存在一个零点 $t = t_2$，且有

$$t_2^2 = \kappa^2 - \frac{1 - \kappa^2}{(\tau\kappa^2)^{-2/3} - 1},$$

观察 $\phi'''(t)$ ，我们可以得到，当 $\kappa^3 \leq \tau < \kappa^2$ 时，在 $(0, \kappa)$ 上成立 $\phi'''(t) \geq 0$ ；或是当 $\tau < \kappa^3$ 时，有 $\phi'''(t)$ 在区间 $(0, \kappa)$ 上有且仅有一个零点 t_3，且有

$$t_3^2 = \kappa^2 - \frac{1 - \kappa^2}{(\tau\kappa^2)^{-2/5} - 1}.$$

于是当 $\kappa^3 \leq \tau < \kappa^2$ 时，$\phi''(t)$ 在区间 $(0, \kappa)$ 为式单调增函数。因此对于充分小的 $\delta > 0$,

$$|\phi''(t)| \geq \min(|\phi''(t_2 + \delta)|, |\phi''(t_2 - \delta)|), \ \ \forall t \in (0, t_2 - \delta) \cup (t_2 + \delta, \kappa). \tag{4.11}$$

另一方面，当 $\tau < \kappa^3$ 时，可以得到 $t_3 < t_2$。而且成立当 $t \geq t_3$ 时有 $\phi'''(t) \geq 0$ 以及当 $t \leq t_3$ 时有 $\phi'''(t) \leq 0$ 。因此 $\phi''(t)$ 在区间 (t_3, κ) 上单调递增而在 $(0, t_3)$ 上单调递减。于是

$$|\phi''(t)| \geq \min(|\phi''(t_2 + \delta)|, |\phi''(t_2 - \delta)|, |\phi''(0)|), \ \ \forall t \in (0, t_2 - \delta) \cup (t_2 + \delta, \kappa). \tag{4.12}$$

为了估计 $|\phi''(t_2 \pm \delta)|$ 的正下界，我们观察到 $\tau\kappa^2 < \kappa^4$。因此，我们得到

$$t_2^2 \geq \kappa^2 - (1 - \kappa^2)/(\kappa^{-8/3} - 1).$$

于是即得 $|\phi'''(t_2)| \geq c_0\tau \geq c_0\tau_0$ 其中常数 c_0 仅依赖于 κ。此外，对于任意 $t \in [t_2 - \delta, t_2 + \delta]$，有

$$|\phi'''(t) - \phi'''(t_2)| \leq \max_{t\in[t_2-\delta, t_2+\delta]} |\phi''''(t)||t - t_2| \leq c_1\delta$$

其中常数 c_1 仅依赖于 κ。于是，如果取 $\delta \le c_0\tau_0/(2C_1)$，对于 $t \in [t_2-\delta, t_2+\delta]$, 就有 $|\phi'''(t)| \ge c_0\tau_0/2$。

利用中值定理，我们可以得到 $|\phi''(t_2 \pm \delta)| \ge (c_0\tau_0/2)\delta$。观察到 $|\phi''(0)| = 1-\tau\kappa^{-1} \ge 1-\kappa$，从估计式 (4.11)-(4.12) 我们可以得到对于充分小的 $\delta > 0$，

$$|\phi''(t)| \ge (c_0\tau_0/2)\delta, \ \ \forall t \in (0, t_2-\delta) \cup (t_2+\delta, \kappa). \tag{4.13}$$

现在，我们可以将积分分解成如下

$$\begin{aligned}
& \int_0^\kappa f(t)e^{\mathbf{i}\lambda\phi(t)}dt \\
= \ & \int_0^{t_2-\delta} f(t)e^{\mathbf{i}\lambda\phi(t)}dt + \int_{t_2-\delta}^{t_2+\delta} f(t)e^{\mathbf{i}\lambda\phi(t)}dt + \int_{t_2+\delta}^{\kappa} f(t)e^{\mathbf{i}\lambda\phi(t)}dt \\
:= \ & \mathrm{II}_1 + \mathrm{II}_2 + \mathrm{II}_3.
\end{aligned}$$

利用不等式 (4.13) 及 Van der Corput 引理 3.1.7，我们有

$$|\mathrm{II}_1 + \mathrm{II}_3| \le C(\lambda\delta)^{-1/2}\left(|f(0)| + \int_0^\kappa |f'(t)|dt\right).$$

显然有 $|\mathrm{II}_2| \le 2\delta \max_{t\in(0,\kappa)} |f(t)|$。我们取 $\delta = \lambda^{-1/3}$，就可以得到

$$\left|\int_0^\kappa f(t)e^{\mathbf{i}\lambda\phi(t)}dt\right| \le C\lambda^{-1/3}\left(|f(0)| + \int_{-\kappa}^\kappa |f'(t)|dt\right).$$

联合 (4.10)，引理得证。 □

下面的定理是本节的重要定理，他说明了点扩散函数 $\mathbb{J}(z,y)$ 与其主项 $\mathbb{F}(z,y)$ 之间关于 k_sh 的误差控制。

J_F_diff **定理 4.2.1** *令 $k_sh \ge 1$。存在只与 κ 有关的常数 C，对于任意 $z, y \in \Omega$，成立*

$$|\mathbb{J}(z,y) - \mathbb{F}(z,y)| + k_s^{-1}|\nabla_y(\mathbb{J}(z,y) - \mathbb{F}(z,y))| \le \frac{C}{\mu}(k_sh)^{-1/4}.$$

证明. 通过利用引理 4.2.2 及引理 4.2.4，观察 $\mathbb{J}(z,y), \mathbb{F}(z,y)$ 的定义 (4.6)-(4.7)，我们只需要估计如下两项

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi}\sum_{\alpha,\beta=p,s}\int_{-k_s}^{k_s} \frac{\mathbb{T}_\alpha(\xi)^T\overline{\mathbb{N}_\beta(\xi)}}{\overline{\delta(\xi)}} e^{\mathbf{i}(\mu_\alpha z_2 - \overline{\mu}_\beta y_2) + \mathbf{i}(y_1-z_1)\xi}d\xi - \mathbb{F}(z,y) \\
= \ & \frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{\alpha,\beta=p,s\\(\alpha,\beta)\neq(s,s)}}\int_{(-k_s,k_s)\backslash[-k_p,k_p]} \frac{\mathbb{T}_\alpha(\xi)^T\overline{\mathbb{N}_\beta(\xi)}}{\overline{\delta(\xi)}} e^{\mathbf{i}(\mu_\alpha z_2 - \overline{\mu}_\beta y_2) + \mathbf{i}(y_1-z_1)\xi}d\xi \\
+ \ & \frac{1}{2\pi}\int_{-k_p}^{k_p}\left[\frac{\mathbb{T}_p(\xi)\overline{\mathbb{N}_s(\xi)}}{\overline{\delta(\xi)}}e^{\mathbf{i}(\mu_p y_2 - \mu_s z_2)} + \frac{\mathbb{T}_s(\xi)\overline{\mathbb{N}_p(\xi)}}{\overline{\delta(\xi)}}e^{\mathbf{i}(\mu_s y_2 - \mu_p z_2)}\right]e^{\mathbf{i}(y_1-z_1)\xi}d\xi \\
:= \ & \mathrm{II}_1 + \mathrm{II}_2.
\end{aligned}$$

当 $k_p < |\xi| < k_s$ 时，由引理 3.1.5 得，我们知道有 $|\delta(\xi)| \geq Ck_s^4$ 。于是，对于 $\alpha, \beta = p, s$，我们有 $|\mathbb{T}_\alpha(\xi)| \leq C, |\mathbb{N}_\beta(\xi)| \leq C\mu^{-1}k_s^2$。于是，我们马上可以得到如下不等式：

$$|\mathrm{II}_1| \leq \frac{C}{k_s\mu}\int_{k_p}^{k_s} e^{-\sqrt{\xi^2-k_p^2}h}d\xi \leq \frac{C}{\mu}(k_sh)^{-1}.$$

而对于式子 II_2 我们将会使用引理 4.2.5。通过简单的变量替换 $\xi = k_st$, 我们可以把式 II_2 中的第一项转化成引理 4.2.5 中的形式，即有

$$f(t) = k_s\frac{\mathbb{T}_p(k_st)\overline{\mathbb{N}_s(k_st)}}{\overline{\delta(k_st)}}, \quad \lambda = k_sz_2, \tau = \frac{y_2}{z_2}, \nu = \frac{y_1 - z_1}{z_2}.$$

利用前面针对采样区域的尺寸的假设 (4.8)，直接利用引理 4.2.5 就可以得到，

$$\left|\int_{-k_p}^{k_p} \frac{\mathbb{T}_p(\xi)\overline{\mathbb{N}_s(\xi)}}{\overline{\delta(\xi)}}e^{\mathbf{i}(\mu_py_2-\mu_sz_2)}d\xi\right| \leq \frac{C}{\mu}(k_sh)^{-1/4}.$$

而式子 II_2 中的第二项也可以被类似估计。且 $|\nabla_y(\mathbb{J}(z,y) - \mathbb{F}(z,y))|$ 的估计也可以被类似证明，这里不再赘述。引理得证。 □

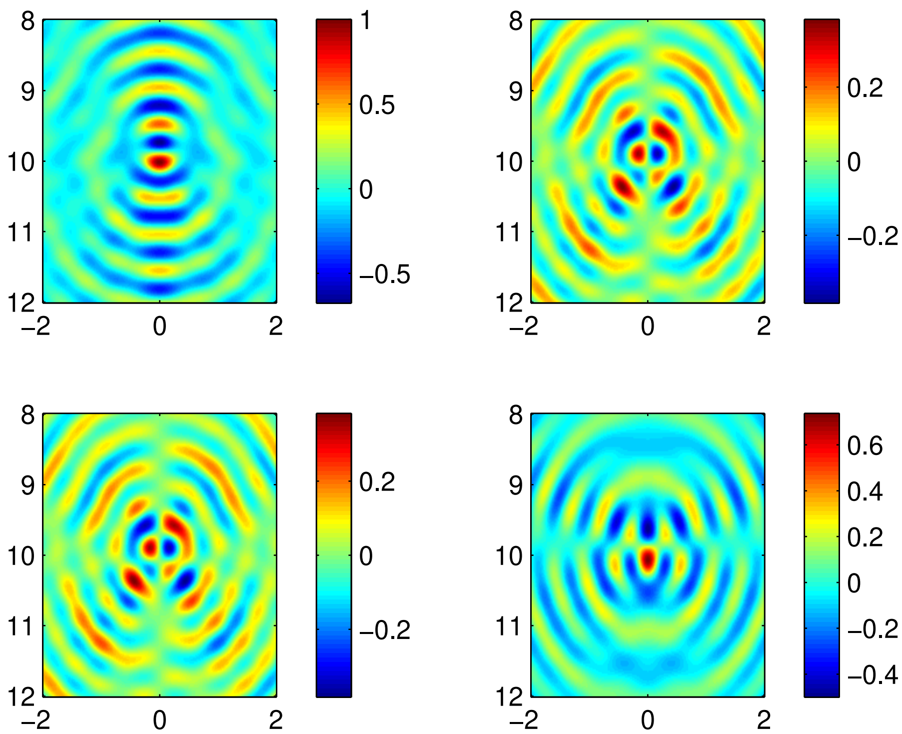
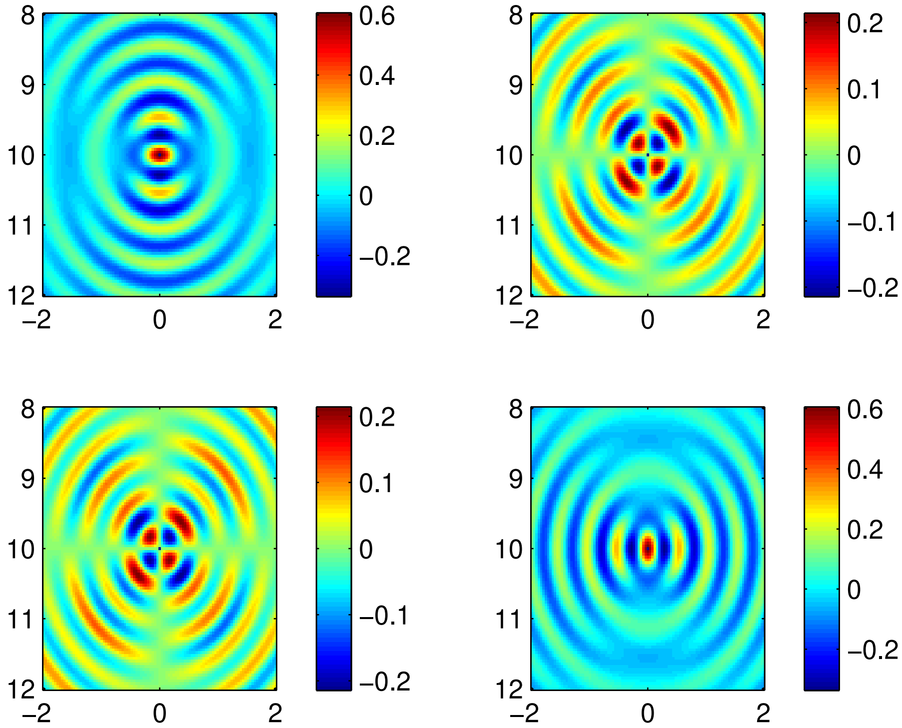


图 **4.2** $-Im(J_d(z,y))$ **for** $y = (0,8)^T$**,** $\omega = 2\pi$**,** $d = 100$



figure_psf 图 4.3 $Im(G(z,y))$ **for** $y=(0,8)^T$, $\omega=2\pi$

下面的引理告诉我们，点扩散函数 $\mathbb{F}(z,y)$ 的虚部与弹性波基本解 $\operatorname{Im}\mathbb{G}(z,y)$ 的虚部有相似的函数特性。于是，利用定理 4.2.1 和引理 4.2.1，当 $d\gg h$ 和 $k_s h\gg 1$，我们可以认为 $\mathbb{J}_d(z,y)$ 的虚部也与弹性波基本解 $\operatorname{Im}\mathbb{G}(z,y)$ 的虚部有相似的函数特性，见图 4.3 和图 4.2 所展示。

注 4.2.2 如图 4.3 和图 4.2 中，每幅图中 4 副子图，其中子图的位置对应相应矩阵该位置的函数。其中，每幅图的采样区域都为 $[-2,2]\times[8,12]$，角频率 $\omega=2\pi$，*Lamé* 常数 $\lambda=0.5$，$\mu=0.25$。特别地，每幅子图中，颜色越深代表该处的值越大，因此我们可以看到图 4.3 和图 4.2 中对角线上的子图，他们颜色的最深处正式图的中心位置，即代表峰值在 $z=y$ 处。

thm:3.2 **定理 4.2.2** 对于任意 $z,y\in\mathbb{R}^2_+$，$\mathbb{F}(z,y)^T=\mathbb{F}(z,y)$。当 $z=y$ 时，$\operatorname{Im}[\mathbb{F}(z,y)]_{12}=\operatorname{Im}[\mathbb{F}(z,y)]_{21}=0$ 以及

$$-\operatorname{Im}[\mathbb{F}(z,y)]_{ii}\geq\frac{1}{4(\lambda+2\mu)},\ i=1,2. \tag{4.14}$$

当 $z\neq y$ 时，

$$|\mathbb{F}(z,y)| \quad\leq\frac{C}{\mu}\left(\frac{1}{(k_s|z-y|)^{1/2}}+\frac{1}{k_s|z-y|}\right), \tag{4.15}$$

这里的常数 C 只依赖于 κ。

证明. 将式子 (3.46) 和式子 (3.30) 代入式子 (4.7)，我们可以得到

$$
\begin{aligned}
\mathbb{F}(z,y) &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-k_p}^{k_p}\frac{\mathbf{i}k_s^2\mu_s}{\mu\gamma(\xi)\delta(\xi)}\begin{pmatrix}\xi^2 & -\xi\mu_p\\ -\xi\mu_p & \mu_p^2\end{pmatrix}e^{\mathbf{i}\mu_p(z_2-y_2)+\mathbf{i}\xi(y_1-z_1)}d\xi\\
&\quad -\frac{1}{2\pi}\int_{-k_p}^{k_p}\frac{\mathbf{i}k_s^2\mu_p}{\mu\gamma(\xi)\delta(\xi)}\begin{pmatrix}\mu_s^2 & \xi\mu_s\\ \xi\mu_s & \xi^2\end{pmatrix}e^{\mathbf{i}\mu_s(z_2-y_2)+\mathbf{i}\xi(y_1-z_1)}d\xi\\
&\quad -\frac{1}{2\pi}\int_{(-k_s,k_s)\backslash[-k_p,k_p]}\frac{\mathbf{i}(k_s^2-4\xi^2)\mu_p}{\mu\gamma(\xi)\overline{\delta(\xi)}}\begin{pmatrix}\mu_s^2 & \xi\mu_s\\ \xi\mu_s & \xi^2\end{pmatrix}e^{\mathbf{i}\mu_s(z_2-y_2)+\mathbf{i}\xi(y_1-z_1)}d\xi\\
&:= \mathrm{III}_1+\mathrm{III}_2+\mathrm{III}_3.
\end{aligned}\tag{4.16}
$$

由于 $\mu_p(\xi)$ 及 $\mu_s(\xi)$ 关于 ξ 存在对称性，所以我们易得当 $z=y$ 时，$\mathrm{Im}\,[\mathbb{F}(z,y)]_{12}=\mathrm{Im}\,[\mathbb{F}(z,y)]_{21}=0$。

现在我们来证明当 $i=j=1$ 时的不等式 (4.14)，而其他情形时可以被类似证明，这里将省略细节。观察到，当 $\xi\in(-k_p,k_p)$ 时，由引理 3.1.5 得 $\delta(\xi)\le k_s^4$ 及易得 $\mu_p\le\mu_s$。于是当 $z=y$ 时：

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{Im}\,(\mathrm{III}_1+\mathrm{III}_2) &= \frac{1}{2\pi\mu}\int_{-k_p}^{k_p}\frac{k_s^2\mu_s}{\delta(\xi)}d\xi\\
&\ge \frac{1}{2\pi\mu}\int_{-k_p}^{k_p}\frac{\mu_p}{k_s^2}d\xi=\frac{1}{4(\lambda+2\mu)}.
\end{aligned}
$$

而当 $\xi\in(-k_s,k_s)\backslash[-k_p,k_p]$ 时，成立 $\mu_p=\mathbf{i}\sqrt{\xi^2-k_p^2}$，于是我们有

$$
-\mathrm{III}_3=\frac{1}{2\pi\mu}\int_{(-k_s,k_s)\backslash(-k_p,k_p)}\frac{-\mu_s^2\sqrt{\xi^2-k_p^2}(k_s^2-4\xi^2)}{(\xi^2+\mathbf{i}\mu_s\sqrt{\xi^2-k_p^2})(\varphi^2-\mathbf{i}4\xi^2\mu_s\sqrt{\xi^2-k_p^2})}d\xi.
$$

通过简单的直接计算，我们有

$$
\mathrm{Im}\,[(\xi^2+\mathbf{i}\mu_s\sqrt{\xi^2-k_p^2})(\varphi^2-\mathbf{i}4\xi^2\mu_s\sqrt{\xi^2-k_p^2})]=k_s^2\mu_s\sqrt{\xi^2-k_p^2}(k_s^2-4\xi^2).
$$

通过分母有理化，我们可以得到 $-\mathrm{Im}\,(\mathrm{III}_3)\ \ge\ 0$。因此，当 $z=y$ 时，我们有 $-\mathrm{Im}\,[\mathbb{F}(z,y)]_{11}\ge 1/[4(\lambda+2\mu)]$ 。

当 $z\ne y$ 时，我们可以有如下三角函数表示 $y-z=|y-z|(\cos\phi,\sin\phi)^T$ ，其中 $0\le\phi\le\pi$。于是，将此三角变量替换代入 III_1，我们可以得到

$$
\mathrm{III}_1=\frac{1}{\mu}\int_0^{\pi}A(\theta,\kappa)e^{\mathbf{i}k_s|z-y|\cos(\theta-\phi)}d\theta,
$$

显然，简单的代入计算可以得到函数 $A(\theta,\kappa)$ 及其导函数 $\partial A(\theta,\kappa)/\partial\theta$ 在区间 $(0,\pi)$。而且区间 $(0,\pi)$ 可以分割成若干个互补相交的子区间，在每个子区间上成立 $|\cos(\theta-\phi)|\geq 1/\sqrt{2}$ 或是 $|\sin(\theta-\phi)|\geq 1/\sqrt{2}$ 以及 $-\sin(\theta-\phi)$ 在盖子区间上单调。于是，当 $k_s|z-y|\geq 1$ 时，Van der Corput 引理 3.1.7，我们易得

$$|\mathrm{III}_1|\leq \frac{C}{\mu}\left(\frac{1}{(k_s|z-y|)^{1/2}}+\frac{1}{k_s|z-y|}\right).$$

而当 $k_s|z-y|<1$ 时，显然有 $|\mathrm{III}_1|\leq C\mu^{-1}\leq C\mu^{-1}(k_s|z-y|)^{-1}$。而针对 $\mathrm{III}_2+\mathrm{III}_3$ 的估计可以类似地使用 Van der Corput 引理 3.1.7 来证明。引理得证。 □

结合引理 4.2.1，定理 4.2.1，定理 4.2.2 及图 4.3，我们发现点扩散函数 $J_d(z,y)$ 确实可以把位于 y 的点源分辨出来，即在 $z=y$ 处达到峰值，在 z 远离 y 其值渐渐衰减。如文献 [20] 中针对声波点扩散函数的表述，我们也可以认为弹性波点扩展函数是对寻找弹性点源分辨率的度量函数。

为便于后文分析，我们介绍如下在范数意义下的估计式。

引理 4.2.6 *令 $k_sh\geq 1, d\gg h$，存在只依赖于 κ 却与 k_s,h,d,d_D 无关的常数 C，对于任意 $z\in\Omega$, $j=1,2$, 成立*

$$\|\mathbb{F}(z,\cdot)e_j\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)}+\|\sigma(\mathbb{F}(z,\cdot)e_j)\nu\|_{H^{-1/2}(\Gamma_D)}\leq\frac{C}{\mu}(1+k_sd_D),$$
$$\|\mathbb{R}_d(z,\cdot)e_j\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)}+\|\sigma(\mathbb{R}_d(z,\cdot)e_j)\nu\|_{H^{-1/2}(\Gamma_D)}\leq\frac{C}{\mu}(1+k_sd_D)\left[\left(\frac{h}{d}\right)^2+(k_sh)^{-1/4}\right],$$

其中 $\mathbb{R}_d(z,\cdot)=\mathbb{J}_d(z,\cdot)-\mathbb{F}(z,\cdot)$.

证明. 由 $\mathbb{F}(z,\cdot)$ 的定义 (4.7)，我们易得：

$$|F(z,y)|\leq\frac{C}{\mu}$$

于是，上面第一估计式可有不等式 (2.1) 立即得到。第二估计式可有不等式 (2.1)，由引理 4.2.1 和定理 4.2.1 立即得到。这里我们将不再赘述细节。引理得证。 □

4.3 逆时偏移算法

这一节，我们将提出半空间弹性波散射问题的逆时偏移算法 (Reverse Time Migration, RTM)。该逆时偏移算法是对文献 [20] 中半空间声波散射问题的逆时

偏移算法的一个推广。我们的逆时偏移算法可以分成两步 zhang2009,Zhang2007 [32, 33]，第一步为将在半空间表面的孔径 Γ_d 上接受到的 s-波与 p-波的混合全波数据取复共轭化，然后反传到半空间中。第二步，将反传后的数据和入射波数据在采样区域 Ω 内进行互相关，然后关于各个炮点进行叠加。特别地，类似与文献 RTMhalf_aco [20]，这里的入射波是将点源放在 Γ_d 上，然后作为 Dirichlet 边界条件后弹性波方程的解。而反传波是将接受到的数据共轭化后作为 Dirichlet 边界条件后弹性波方程的解。

alg_rtm **算法 4.3.1** 假设在 Γ_d 内均匀分布着 N_s 个发射器，位于 x_s, $s=1,\dots,N_s$, 及分布着 N_r 个接收器，位于 x_r, $r=1,\dots,N_r$。假设障碍物 $D\subset\Omega$。假设散射数据 $u_q^s(x_r,x_s)$ 为在 x_r 处接受，由位于 x_s 处的点源沿着极化方向 $q=e_1,e_2$ 激发。

1° 反传: 计算反传波 $v_q(x,x_s)$ 是如下半空间弹性波散射问题的解

$$\begin{aligned}\Delta_e v_q(x,x_s)+\omega^2 v_q(x,x_s)=0 \quad &\text{in} \ \ \mathbb{R}^2_+,\\ v_q(x,x_s)=\frac{|\Gamma_0^d|}{N_r}\sum_{r=1}^{N_r}\overline{u_q^s(x_r,x_s)}\delta_{x_r}(x) \ \ &\text{on} \ \ \Gamma_d.\end{aligned}$$

2° 互相关: 对于任意 $q\in\mathbb{R}^2$，令入射波 u_q^i 为如下半空间弹性波方程的解

$$\begin{aligned}\Delta_e u_q^i(x,x_s)+\omega^2 u_q^i(x,x_s)=0 \ \ &\text{in} \ \ \mathbb{R}^2_+,\\ u_q^i(x,x_s)=q\delta_{x_s}(x) \ \ &on \ \ \Gamma_d.\end{aligned}$$

对于任意 $z\in\Omega$，计算成像函数:

$$I_d(z)=\mathrm{Im}\sum_{q=e_1,e_2}\left\{\frac{|\Gamma_0^d|}{N_s}\sum_{s=1}^{N_s}u_q^i(z,x_s)\cdot v_q(z,x_s)\right\}. \tag{4.17}$$

于是，由 Green 表示公式可以得到:

$$\begin{aligned}u_q^i(x,x_s)&=\mathbb{T}_D(x_s,x)^T q,\\ v_q(x,x_s)\cdot e_j&=\frac{|\Gamma_0^d|}{N_r}\sum_{r=1}^{N_r}\mathbb{T}_D(x_r,x)e_j\cdot\overline{u_q^s(x_r,x_s)},\end{aligned}$$

于是马上可以得到：which yields

$$I_d(z)=\mathrm{Im}\sum_{q=e_1,e_2}\left\{\frac{|\Gamma_0^d|^2}{N_sN_r}\sum_{s=1}^{N_s}\sum_{r=1}^{N_r}[\mathbb{T}_D(x_s,z)^T q]\cdot[\mathbb{T}_D(x_r,z)^T\overline{u_q^s(x_r,x_s)}]\right\}. \tag{4.18}$$

上面的成像函数是离散形式的，可以直接用于数值计算。为了便于后面的理论分析，我们令 $N_s,N_r\to\infty$，于是离散形式的成像函数 cor1 (4.17) 可以看成是采用数值积分对如下连续形式的成像函数的一种积分逼近:

$$\hat{I}_d(z)=\mathrm{Im}\sum_{q=e_1,e_2}\int_{\Gamma_0^d}\int_{\Gamma_0^d}[\mathbb{T}_D(x_s,z)^T q]\cdot[\mathbb{T}_D(x_r,z)^T\overline{u_q^s(x_r,x_s)}]\,ds(x_r)ds(x_s). \tag{4.19}$$

下面我们将障碍物的成像函数 $\hat{I}_d(z)$ 与前文中的点扩散函数 $\mathbb{J}_d(z,y)$ 联系起来。有了前文中对 $\mathbb{J}_d(z,y)$ 相关分析结论，我们可以由此来分析半空间反弹性波散射问题的逆时偏移方法的分辨率。下面的定理，告诉我们当采样点 z 远离障碍物边界的时候，成像函数在改点的值是非常小的。这种现象反映在后面的数值实验中，就是在原理边界的时候，在该处的颜色会非常浅。下面的定理是当障碍物边界为 *Dirichlet* 边界时的成像函数分辨率分析。其它边界条件的相关结论可以被类似证明，我们会不加证明地罗列在后文。

thm:4.3 **定理 4.3.1** 对于任意 $z\in\Omega$，令 $\mathbb{U}(z,x)\in\mathbb{C}^{2\times 2}$ 且 $\mathbb{U}(z,x)e_j$, $j=1,2$，是如下弹性波方程的散射解：

$$\begin{aligned}
&\Delta_e[\mathbb{U}(z,x)e_j]+\omega^2[\mathbb{U}(z,x)e_j]=0 \quad x\in\mathbb{R}^2\backslash\bar{D},\\
&\mathbb{U}(z,x)e_j=-\overline{\mathbb{F}(z,x)}e_j \quad x\in\Gamma_D.
\end{aligned}$$

于是，成像函数 $\hat{I}_d(z)$ 有如下表达：

$$\hat{I}_d(z)=\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{2}\int_{\Gamma_D}[\sigma(\mathbb{U}(z,x)e_j+\overline{\mathbb{F}(z,x)}e_j)\nu]\cdot[\overline{\mathbb{F}(z,x)}e_j]ds(x)+R_d(z), \tag{4.20}$$

这里

$$|R_d(z)|\le C\mu^{-2}(1+\|T_1\|)(1+\|T_2\|)(1+k_sd_D)^3\left[\left(\frac{h}{d}\right)^2+(k_sh)^{-1/4}\right],$$

其中常数 C 仅依赖与 κ 而与 k_s,k_p,h,d,d_D 无关。

证明. 观察算法中的 (4.19) 我们可以得到：

$$\hat{I}_d(z)=\mathrm{Im}\sum_{q=e_1,e_2}\int_{\Gamma_0^d}[\mathbb{T}_D(x_s,z)^Tq]\cdot\hat{v}_q(z,x_s)ds(x_s), \tag{4.21}$$

其中 $j=1,2$，

$$\hat{v}_q(z,x_s)\cdot e_j=\int_{\Gamma_0^d}\mathbb{T}_D(x_r,z)e_j\cdot\overline{u_q^s(x_r,x_s)}ds(x_r).$$

利用 (3.52) 我们得到

$$u_q^s(x_r,x_s)\cdot e_i=\mathcal{G}(u_q^s(\cdot,x_s),\mathbb{N}(\cdot,x_r)e_i),i=1,2,$$

于是有

$$\begin{aligned}
\hat{v}_q(z,x_s)\cdot e_j &= \int_{\Gamma_0^d}\mathbb{T}_D(x_r,z)e_j\cdot\overline{[u_q^s(x_r,x_s)\cdot e_1,u_q^s(x_r,x_s)\cdot e_2]^T}ds(x_r)\\
&= \mathcal{G}(\overline{u_q^s(\cdot,x_s)},\left[\int_{\Gamma_0^d}\sum_{i=1}^{2}[\mathbb{T}_D(x_r,z)]_{ij}\overline{\mathbb{N}(\cdot,x_r)}e_ids(x_r)\right]).
\end{aligned}$$

利用 Neumann Green 函数的空间互易性

$$\mathbb{N}(x,x_r)=\mathbb{N}(x_r,x)^T,$$

以及点扩展函数 $\mathbb{J}_d(\cdot,\cdot)$ 的定义 (4.4)，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_0^d}\sum_{i=1}^{2}[\mathbb{T}_D(x_r,z)]_{ij}\overline{\mathbb{N}(x,x_r)}e_i ds(x_r)\\
=&\int_{\Gamma_0^d}\sum_{i=1}^{2}[\mathbb{T}_D(x_r,z)]_{ij}\overline{\mathbb{N}(x_r,x))^T e_i}ds(x_r)\\
=&\int_{\Gamma_0^d}(\mathbb{T}_D(x_r,z)e_j)^T\overline{\mathbb{N}(x_r,x)^T)}ds(x_r)\\
=&\ \mathbb{J}_d(z,x)^T e_j.v
\end{aligned}$$

进一步可以推出

$$\hat{v}_q(z,x_s)e_j=\mathcal{G}(\overline{u_q^s(\cdot,x_s)},\mathbb{J}_d(z,\cdot)^T e_j).$$

将上式代入 (4.21) 中，我们可以得到

$$\begin{aligned}
\hat{I}_d(z) &= \operatorname{Im}\sum_{j=1}\sum_{q=e_1,e_2}\int_{\Gamma_0^d}[\mathbb{T}_D(x_s,z)^T q\cdot e_j][\hat{v}_q(z,x_s)\cdot e_j]ds(x_s)\\
&= \operatorname{Im}\sum_{j=1}^{2}\mathcal{G}(\sum_{k=1}^{2}[\mathbb{T}_D(x_s,z)^T e_k\cdot e_j]\overline{u_{e_k}^s(x,x_s)},\mathbb{J}_d(z,\cdot)^T e_j)\\
&= \operatorname{Im}\sum_{j=1}^{2}\mathcal{G}(\mathbb{W}(z,\cdot)e_j,\mathbb{J}_d(z,\cdot)^T e_j), \qquad (4.22)
\end{aligned}$$

这里 $\mathbb{W}(z,x)\in\mathbb{C}^{2\times2}$ 是一个 2×2 的矩阵，定义为

$$\mathbb{W}(z,x)e_j=\int_{\Gamma_0^d}\sum_{k=1}^{2}[\mathbb{T}_D(x_s,z)]_{kj}\overline{u_{e_k}^s(x,x_s)}ds(x_s),\quad j=1,2.$$

注意到 $\overline{\mathbb{W}(z,x)}e_j$ 可以看成是 $u_{e_k}^s(x,x_s)$ 加权叠加，于是它满足如下方程:

$$\Delta_e[\overline{\mathbb{W}(z,x)}e_j]+\omega^2[\overline{\mathbb{W}(z,x)}e_j]=0\ \text{ in }\ \mathbb{R}_+^2\backslash\bar{D}, \qquad (4.23)$$

$$\sigma(\overline{\mathbb{W}(z,x)}e_j)e_2=0\ \text{ on }\ \Gamma_0. \qquad (4.24)$$

由于在边界 Γ_D, $u_{e_k}^s(x,x_s)$ 满足 Dirichlet 边界条件, 即 $u_{e_k}^s(x,x_s)=-\mathbb{N}(x,x_s)e_k$。于是利用式 (4.22) 我们得到

$$\begin{aligned}
&\overline{\mathbb{W}(z,x)}e_j\\
=&-\int_{\Gamma_0^d}\sum_{k=1}^{2}[\overline{\mathbb{T}_D(x_s,z)}]_{kj}\mathbb{N}(x,x_s)e_k ds(x_s)\\
=&-\overline{\mathbb{J}_d(z,x)}^T e_j. \qquad (4.25)
\end{aligned}$$

现在我们定义矩阵 $\mathbb{W}_d(z,x)\in\mathbb{C}^{2\times2}$ ，其中向量 $\mathbb{W}_d(z,x)e_j, j=1,2$ ，是如下半空间弹性波方程的散射解：

$$\Delta_e[\mathbb{W}_d(z,x)e_j]+\omega^2[\mathbb{W}_d(z,x)e_j]=0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2_+\backslash\bar{D}, \tag{4.26}$$

$$\mathbb{W}_d(z,x)e_j=-\overline{\mathbb{F}(z,x)}e_j \ \text{ on } \ \Gamma_D, \tag{4.27}$$

$$\sigma(\mathbb{W}_d(z,x)e_j)e_2=0 \qquad \text{on} \quad \Gamma_0 \tag{4.28}$$

利用 (4.22) 我们可以推出：

$$\begin{aligned}
\hat{I}_d(z) \;=\;& \mathrm{Im}\sum_{j=1}^{2}\mathcal{G}(\mathbb{W}(z,\cdot)e_j, J_d(z,\cdot)^Te_j-\mathbb{F}(z,\cdot)e_j)\\
&+\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{2}\mathcal{G}(\mathbb{W}(z,\cdot)e_j-\overline{\mathbb{W}_d(z,\cdot)}e_j,\mathbb{F}(z,\cdot)e_j)\\
&+\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{2}\mathcal{G}(\overline{\mathbb{W}_d(z,\cdot)}e_j-\overline{\mathbb{U}(z,\cdot)}e_j,\mathbb{F}(z,\cdot)e_j)\\
&+\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{2}\mathcal{G}(\overline{\mathbb{U}(z,\cdot)}e_j,\mathbb{F}(z,\cdot)e_j)\\
:=\;& \mathrm{VI}_1+\mathrm{VI}_2+\mathrm{VI}_3+\mathrm{VI}_4.
\end{aligned}\tag{4.29}$$

观察 $\mathbb{F}(z,y)$ 的定义 (4.7)，易得 $\mathbb{F}(z,y)^T=\mathbb{F}(z,y)$。利用引理 4.2.6,

$$\begin{aligned}
&\|\mathbb{J}_d(z,\cdot)e_j\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)}+\|\sigma(\mathbb{J}_d(z,\cdot)e_j)\nu\|_{H^{-1/2}(\Gamma_D)}\\
\le\;& \|\mathbb{F}(z,\cdot)e_j\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)}+\|\sigma(\mathbb{F}(z,\cdot)e_j)\nu\|_{H^{-1/2}(\Gamma_D)}\\
&+\|\mathbb{R}_d(z,\cdot)e_j\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)}+\|\sigma(\mathbb{R}_d(z,\cdot)e_j)\nu\|_{H^{-1/2}(\Gamma_D)}\\
\le\;& \frac{C}{\mu}(1+k_sd_D).
\end{aligned}$$

这就意味着，通过 (4.23)-(4.25) 以及引理 4.2.6，可以得到：

$$\begin{aligned}
|\mathrm{VI}_1| \;\le\;& \sum_{j=1}^{2}\Big(\|\mathbb{W}(z,\cdot)e_j\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)}\|\sigma(\mathbb{J}_d(z,\cdot)^Te_j-\mathbb{F}(z,\cdot)e_j)e_2\|_{H^{-1/2}(\Gamma_D)}\\
&+\|\sigma(\mathbb{W}(z,\cdot)e_j)e_2\|_{H^{-1/2}(\Gamma_D)}\|\mathbb{J}_d(z,\cdot)^Te_j-\mathbb{F}(z,\cdot)e_j\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)}\Big)\\
\le\;& \frac{C}{\mu^2}(1+\|T_1\|)(1+k_sd_D)^2\left[\left(\frac{h}{d}\right)^2+(k_sh)^{-1/4}\right].
\end{aligned}$$

类似地，通过 (4.23)-(4.25) 和 (4.26)-(4.28)，及引理 4.2.6，可以得到：

$$|\mathrm{VI}_2|\le\frac{C}{\mu^2}(1+\|T_1\|)(1+k_sd_D)^2\left[\left(\frac{h}{d}\right)^2+(k_sh)^{-1/4}\right].$$

对于第三项 VI_3, 我们可以针对 $\mathbb{W}_d(z,x)$ 和 $\mathbb{U}(z,y)$, 使用定理 3.2.2 和引理 4.2.6, 可以得到:

$$|\mathrm{VI}_3| \le \frac{C}{\mu^2}(1+\|T_1\|)(1+\|T_2\|)(1+k_s d_D)^3(k_s h)^{-1/2}.$$

最后，由定义有，当 $z\in\Gamma_D$ 时 $\mathbb{U}(z,x)e_j=-\overline{\mathbb{F}(z,x)}e_j\ \Gamma_D$。于是，可以推出

$$\begin{aligned}
\mathrm{IV}_4 &= \mathrm{Im}\sum_{j=1}^{2}\int_{\Gamma_D}(\overline{\mathbb{U}(z,x)}e_j\cdot\sigma(\mathbb{F}(z,x)e_j)\nu-\sigma(\overline{\mathbb{U}(z,x)}e_j)\nu\cdot\mathbb{F}(z,x)e_j)ds(x)\\
&= -\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{2}\int_{\Gamma_D}\sigma(\overline{\mathbb{U}(z,x)}e_j+\mathbb{F}(z,x)e_j)\nu\cdot\mathbb{F}(z,x)e_j ds(x)\\
&= \mathrm{Im}\sum_{j=1}^{2}\int_{\Gamma_D}\sigma(\mathbb{U}(z,x)e_j+\overline{\mathbb{F}(z,x)}e_j)\nu\cdot\overline{\mathbb{F}(z,x)}e_j ds(x).
\end{aligned}$$

综上所述，利用式子 (4.29)，引理得证。 □

由于本文中关心的障碍物都为扩展障碍物 (Extended Obstacles), 即为 $k_s d_D\approx 1$。由于 $k_s=2\pi/\lambda_s$, 这里 λ_s 为 s-波的波长，于是意味着障碍物的尺寸与入射波的 s-波的波长相当。然后，通过定理 4.3.1, 我可以看到，当障碍物 D 远离半空间表面 Γ_0 时, 即 $k_s h\gg 1$, 且孔径较大时，即 $d\gg h$, 我们可以认为 $\mathbb{R}_d(z)$ 是非常小的。于是，我们在这种情况下可以把式 (4.20) 右端第一项看作是该成像函数的 $\hat{I}_d(z)$ 的主项

$$\begin{aligned}
\hat{I}_d(z) &\approx \mathrm{Im}\sum_{j=1}^{2}\int_{\Gamma_D}[\sigma(\mathbb{U}(z,x)e_j+\overline{\mathbb{F}(z,x)}e_j)\nu]\cdot[\overline{\mathbb{F}(z,x)}e_j]ds(x)\\
&:= \hat{I}_F(z)
\end{aligned}$$

观察 $\mathbb{F}(z,x)$ 的表达式 (4.16)，对于任意 $z\in\Omega$，存在标量函数 $A_j(\xi),B_j(\xi)$, $j=1,2$，可以将 $\mathbb{F}(z,x)$ 表示成

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}(z,x)e_j &= \int_{-k_p}^{k_p}A_j(\xi)\begin{pmatrix}-\xi\\ \mu_p\end{pmatrix}e^{\mathbf{i}(z-x)\cdot(-\xi,\mu_p)^T}d\xi\\
&\quad+\int_{-k_s}^{k_s}B_j(\xi)\begin{pmatrix}\mu_s\\ \xi\end{pmatrix}e^{\mathbf{i}(z-x)\cdot(-\xi,\mu_s)^T}d\xi\\
&= \int_0^{\pi}\tilde{A}_j(\theta)\tau(\theta)e^{\mathbf{i}k_p(z-x)\cdot\tau(\theta)}d\theta\\
&\quad+\int_0^{\pi}\tilde{B}_j(\theta)\tau(\theta)^{\perp}e^{\mathbf{i}k_s(z-x)\cdot\tau(\theta)}d\theta,
\end{aligned}$$

其中第二个等式使用了变量替换 $\xi = \cos\theta$, 且有

$$\tilde{A}_j(\theta) = k_p A_j(k_p \cos\theta)\sin\theta,$$
$$\tilde{B}_j(\theta) = k_s B_j(k_s \cos\theta)\sin\theta,$$
$$\tau(\theta) = (-\cos\theta, \sin\theta)^T,$$
$$\tau(\theta)^{\perp} = (\sin\theta, \cos\theta)^T.$$

于是 $\overline{\mathbb{F}(z,x)}e_j$ 可以看成是弹性波 p 平面波加权叠加与 s 平面波的加权叠加之和，显然对于固定的 z, $\overline{\mathbb{F}(z,x)}e_j$ 关于变量 x 满足弹性波方程。因此，由 $\mathbb{U}(z,x)e_j$ 的定义，自然地可以把它看成是以 $\overline{\mathbb{F}(z,x)}e_j$ 为入射波且满住 Dirichlet 边界条件的弹性波散射解。通过定理 thm:3.2 4.2.2，我们知道 $\overline{\mathbb{F}(z,x)}$ 随着 $|x-z|$ 增大而逐渐衰减。于是易知，当 $x \in \Gamma_D$ 时，$\sigma(\mathbb{U}(z,x)e_j + \overline{\mathbb{F}(z,x)}e_j)\nu$ 也随着 $|x-z|$ 增大而逐渐衰减。因此，当点 z 远离障碍物边界 Γ_D 时，$\hat{I}_F(z)$ 变得非常小。于是，当 $k_s h \gg 1$，$d \gg h$ 以及 z 远离障碍物边界 Γ_D 时，$\hat{I}_d(z)$ 变得非常小，即此时在 z 点无法成像。

为了分析当 z 靠近障碍物边界时成像函数主项 $\hat{I}_F(z)$ 的函数性质，我们将提出平面入射波在障碍物边界处的散射系数。类似与声波散射系数，我们将给弹性波散射系数如下定义。

scarr_con **定义 4.3.1** 对于任意单位向量 $\tau \in \mathbb{R}^2$，令 $u_p^i = \tau e^{\mathbf{i}k_p x\cdot\tau}$，$u_s^i = \tau^{\perp} e^{\mathbf{i}k_s x\cdot\tau}$ 分别是 p 平面入射波和 s 平面入射波。令 $u_\alpha^s(x) := u_\alpha^s(x;\tau), \alpha = p, s$ 为相应的弹性波散射解：

$$\Delta_e u_\alpha^s + \omega^2 u_\alpha^s = 0 \quad in \quad \mathbb{R}^2\backslash\bar{D}, \tag{4.30}$$
$$u_\alpha^s = -u_\alpha^i \quad on \quad \Gamma_D. \tag{4.31}$$

于是相应的散射系数 $R_\alpha(x;\tau)$, $x \in \Gamma_D$ 满足如下关系

$$\sigma(u_\alpha^s(x) + u_\alpha^i(x))\nu(x) = \mathbf{i}k_\alpha R_\alpha(x;\tau)e^{\mathbf{i}k_\alpha x\cdot\tau} \quad on \quad \Gamma_D.$$

其中对于 $\tau = (\tau_1, \tau_2)^T \in \mathbb{R}^2$,，有 $\tau^{\perp} = (\tau_2, -\tau_1)^T$。

注 4.3.1 由全空间弹性波散射问题的唯一性和存在性 cxz2016,ku63 [7, 9]，可以认为散射系数的定义是合理的。类似地，我们可以针对其它障碍物边界条件，如 *Neumann* 边界条件，*Robbins* 边界条件等，也可以定义相应的散射系数。特别地，上面定义的散射系数是对文献 RTMhalf_aco [20] 中的声波散射系数的推广。

事实上，由弹性波散射系数的定义可知，当得知入射波与散射系数时，我们就可以得到在障碍物处表面的弹性总场的法向应力。于是下面我们将来讨论，如何去逼近弹性波的散射系数。自然地，我们先来讨论最简单的情形，当障碍物为一平面时的散射系数。特别地，先假设平面为 x_1 轴。

4.3.1 反射面为 x_1 轴

我们考虑入射波为 p 平面波 $\hat{u}_p$ (或是 s-wave $\hat{u}_s$)，其中入射方向为 $\hat{d}_0 = (\sin t_0, \cos t_0)^T, t_0 \in (0, 2\pi)$。反射平面为 $\Gamma := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$，于是法向为 $\hat{\nu} = (0, 1)^T$。

4.3.1.1 p-波情形

我们定义入射波 p 平面波 achenbach1980 [21, p172] 如下:

$$\hat{u}_p = A_0(\sin t_0, \cos t_0)^T e^{\mathbf{i}k_p(x_1 \sin t_0 + x_2 \cos t_0)}.$$

于是，反射 p 波可以被表示成:

$$\hat{u}_{p,p} = A_1(\sin t_1, -\cos t_1)^T e^{\mathbf{i}k_p(x_1 \sin t_1 - x_2 \cos t_1)}.$$

反射 s 波可以被表示成:

$$\hat{u}_{p,s} = A_2(-\cos t_2, -\sin t_2)^T e^{\mathbf{i}k_s(x_1 \sin t_2 - x_2 \cos t_2)}.$$

由于在反射面 Γ 上满足 Dirichlet 边界条件，于是马上可以得到:

$$\hat{u}_p(x_1, 0) + \hat{u}_{p,p}(x_1, 0) + \hat{u}_{p,s}(x_1, 0) = 0, \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}.$$

通过简单的计算可以得到:

$$\begin{aligned} & t_1 = t_0, \quad \frac{\sin t_2}{\sin t_0} = \frac{k_p}{k_s} := \kappa, \\ & \frac{A_1}{A_0} = \frac{\cos(t_0 + t_2)}{\cos(t_0 - t_2)}, \\ & \frac{A_2}{A_0} = \frac{\sin 2t_0}{\cos(t_0 - t_2)}. \end{aligned}$$

于是，易知当入射角 $t_0 \neq 0$ 时，入射波为 p 平面波时，不仅会引发 p 反射波，而且有 s 反射波。特别地，若我们可以将总场表示成如下向量形式:

$$\hat{u}_p^{\text{total}} = A_0 \hat{d}_0 e^{\mathbf{i}k_p x \cdot \hat{d}_0} + A_1 \hat{d}_1 e^{\mathbf{i}k_p x \cdot \hat{d}_1} + A_2 \hat{d}_2^{\perp} e^{\mathbf{i}k_s x \cdot \hat{d}_2}, \tag{4.32}$$

这里对于任意 $\tau=(\tau_1,\tau_2)^T\in\mathbb{R}^2$, 有 $\tau^\perp=(\tau_2,-\tau_1)^T$, 且其中有:

$$\hat{d}_1=\hat{d}_0-2(\hat{d}_0\cdot\hat{\nu})\hat{\nu}, \tag{4.33}$$

$$\hat{d}_2=\kappa\hat{d}_0-\left[\kappa(\hat{d}_0\cdot\hat{\nu})+\operatorname{sgn}(\hat{d}_0\cdot\hat{\nu})\sqrt{1-\kappa^2(\hat{d}_0\cdot\hat{\nu}^\perp)^2}\right]\hat{\nu}, \tag{4.34}$$

$$\frac{A_1}{A_0}=\frac{-\hat{d}_0\cdot\hat{d}_2}{\hat{d}_1\cdot\hat{d}_2}, \tag{4.35}$$

$$\frac{A_2}{A_0}=\frac{2(\hat{d}_0\cdot\hat{\nu})(\hat{d}_0\cdot\hat{\nu}^\perp)}{\hat{d}_1\cdot\hat{d}_2}. \tag{4.36}$$

4.3.1.2 s-波情形

类似地，我们可以定义 s 平面波如下

$$\hat{u}_s=A_0(\cos t_0,-\sin t_0)^T e^{\mathbf{i}k_s(x_1\sin t_0+x_2\cos t_0)}.$$

于是，反射 p 波可以被表示成:

$$\hat{u}_{s,p}=A_1(\sin t_1,-\cos t_1)^T e^{\mathbf{i}k_p(x_1\sin t_1-x_2\cos t_1)}.$$

反射 s 波可以被表示成:

$$\hat{u}_{s,s}=A_2(-\cos t_2,-\sin t_2)^T e^{\mathbf{i}k_s(x_1\sin t_2-x_2\cos t_2)}.$$

同理，由于在反射面 Γ 上满足 Dirichlet 边界条件，于是马上可以得到:

$$\hat{u}_s(x_1,0)+\hat{u}_{s,p}(x_1,0)+\hat{u}_{s,s}(x_1,0)=0,\quad \forall x_1\in\mathbb{R}.$$

通过简单的计算可以得到:

$$t_2=t_0,\quad \frac{\sin t_1}{\sin t_0}=\frac{k_s}{k_p}=\kappa_1,$$
$$\frac{A_1}{A_0}=\frac{-\sin 2t_0}{\cos(t_0-t_1)},$$
$$\frac{A_2}{A_0}=\frac{\cos(t_0+t_1)}{\cos(t_0-t_1)}$$

于是，易知当入射角 $t_0\neq 0$ 时，入射波为 s 平面波时，不仅会引发 s 反射波，而且有 p 反射波。特别地，若我们可以将总场表示成如下向量形式:

$$\hat{u}_s^{\text{total}}=A_0\hat{d}_0^\perp e^{\mathbf{i}k_s x\cdot\hat{d}_0}+A_1\hat{d}_1 e^{\mathbf{i}k_p x\cdot\hat{d}_1}+A_2\hat{d}_2^\perp e^{\mathbf{i}k_s x\cdot\hat{d}_2}, \tag{4.37}$$

其中

$$\hat{d}_1 = \kappa_1 \hat{d}_0 - \left[\kappa_1(\hat{d}_0 \cdot \hat{\nu}) + \operatorname{sgn}(\hat{d}_0 \cdot \hat{\nu}) \sqrt{1 - \kappa_1^2 (\hat{d}_0 \cdot \hat{\nu}^\perp)^2} \right] \hat{\nu}, \tag{4.38}$$

$$\hat{d}_2 = \hat{d}_0 - 2(\hat{d}_0 \cdot \hat{\nu})\hat{\nu}, \tag{4.39}$$

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{-2(\hat{d}_0 \cdot \hat{\nu})(\hat{d}_0 \cdot \hat{\nu}^\perp)}{\hat{d}_1 \cdot \hat{d}_2}, \tag{4.40}$$

$$\frac{A_2}{A_0} = \frac{-\hat{d}_0 \cdot \hat{d}_1}{\hat{d}_1 \cdot \hat{d}_2} \tag{4.41}$$

4.3.2 反射面为任意平面

我们考虑入射波为 p 平面波 u_p (或是 s-wave u_s)，其中入射方向为 $d_0 = (\sin t_0, \cos t_0)^T, t_0 \in (0, 2\pi)$。反射平面为 $\Gamma := \{x \in \mathbb{R}^2 : x \cdot \nu = 0\}$，该反射面穿过原点，且其法向量为 $\nu = (\sin\phi, \cos\phi)^T, \phi \in (0, 2\pi)$。我们将其总场表示为；

$$u_p^{\text{total}} = A_0 d_0 e^{\mathbf{i} k_p x \cdot d_0} + A_1 d_1 e^{\mathbf{i} k_p x \cdot d_1} + A_2 d_2^\perp e^{\mathbf{i} k_s x \cdot d_2}, \tag{4.42}$$

$$u_s^{\text{total}} = A_0 d_0^\perp e^{\mathbf{i} k_s x \cdot d_0} + A_1 d_1 e^{\mathbf{i} k_p x \cdot d_1} + A_2 d_2^\perp e^{\mathbf{i} k_s x \cdot d_2}, \tag{4.43}$$

这里 $i = 0, 1, 2, d_i$ 是单位向量，A_i 是相应的振幅。由于在反射面 Γ 上满足 Dirichlet 边界条件，意味着有 $u_p^{\text{total}} = 0, u_s^{\text{total}} = 0$ ，$x \in \Gamma$。为了将任意平面与 x_1 轴联系起来，我们令 $\hat{x} = Sx$，这里 $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ 是旋转角度为 ϕ 的旋转矩阵，即为

$$S = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

定义 $\hat{\nu} = S\nu$。下面的定理告诉我们，当 $u(x)$ 在坐标 x 下满足弹性波方程时，则 $u(x)$ 在旋转后得到的 $Su(x)$ 在旋转后的坐标 $\hat{x}$ 下同样满足弹性波方程。

axis_trans **引理 4.3.1** 令 $u(x) \in \mathbb{C}^2$ 且定义如下弹性波算子 Δ_e^x

$$\Delta_e^x := \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \\ \mu \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2}{\partial x_1 2^2} \end{pmatrix}.$$

假设 *u(x)* 满足

$$\Delta_e^x u(x) + \omega^2 u(x) = 0$$

，于是我们有 $\hat{u}(\hat{x})$ 满足

$$\Delta_e^{\hat{x}} \hat{u}(\hat{x}) + \omega^2 \hat{u}(\hat{x}) = 0$$

其中 $\hat{u}(\hat{x}) := Su(S^T \hat{x})$ 或是 $u(x) = S^T \hat{u}(Sx)$。

证明. 利用链式法则，我们有

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial \hat{x}_1^2} &= \cos^2\phi \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - 2\cos\phi\sin\phi \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \sin^2\phi \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \\
\frac{\partial^2}{\partial \hat{x}_2^2} &= \sin^2\phi \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2\cos\phi\sin\phi \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \cos^2\phi \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \\
\frac{\partial^2}{\partial \hat{x}_1 \partial \hat{x}_2} &= \cos\phi\sin\phi \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + (\cos^2\phi - \sin^2\phi) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} - \cos\phi\sin\phi \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}
\end{aligned}
$$

将上述等式代入 $\Delta_e^{\hat{x}} \hat{u}(\hat{x})$ 后，简单的整理可以得证引理。 □

于是易得此时, 反射面 Γ 在坐标 $\hat{x}$ 下为 $\Gamma := \{\hat{x} \in \mathbb{R}^2 : \hat{x}_2 = 0\}$ 且法向为 $\nu = (0,1)^T$. 利用定理 4.3.1, 我们可以得到 $\hat{u}_p(x) := Su_p(S^T\hat{x})$ 和 $\hat{u}_p^{\text{total}}(x) := Su_p(S^T\hat{x})$ 在坐标 $\hat{x}$ 下满足弹性波方程，且有 $\hat{u}_p = 0, \ \ \hat{x} \in \Gamma$，其中有

$$
\begin{aligned}
&\hat{u}_p = A_0 \hat{d}_0 e^{\mathrm{i}k_p \hat{x}\cdot\hat{d}_0} \\
&\hat{u}_p^{\text{total}} = A_0 \hat{d}_0 e^{\mathrm{i}k_p \hat{x}\cdot\hat{d}_0} + A_1 \hat{d}_1 e^{\mathrm{i}\hat{k}_p x\cdot\hat{d}_1} + A_2 \hat{d}_2^{\perp} e^{\mathrm{i}k_s \hat{x}\cdot\hat{d}_2}
\end{aligned}
$$

其中 $\hat{d}_i = Sd_i,\ i = 0,1,2$。于是通过 (4.32)-(4.36)，我们可以得到 $A_i, \hat{d}_i,\ i = 0,1,2$。利用

$$
\begin{aligned}
&d_i = S^T d_i, \nu = S^T d_i \\
&\hat{d}_i \cdot \hat{d}_j = d_i \cdot d_j, \\
&\hat{\nu} \cdot \hat{d}_i = \nu \cdot d_i,\ i,j = 0,1,2.
\end{aligned}
$$

最终，我们有

$$
\begin{aligned}
&d_1 = \kappa_1 d_0 - \left[\kappa_1 (d_0\cdot\nu) + \operatorname{sgn}(d_0\cdot\nu)\sqrt{1-\kappa_1^2 (d_0\cdot\nu^{\perp})^2}\right]\nu, \\
&d_2 = d_0 - 2(d_0\cdot\nu)\nu, \\
&\frac{A_1}{A_0} = \frac{-2(d_0\cdot\nu)(d_0\cdot\nu^{\perp})}{d_1\cdot d_2}, \\
&\frac{A_2}{A_0} = \frac{-d_0\cdot d_1}{d_1\cdot d_2}
\end{aligned}
$$

于是我们得到 $u_p^{\text{total}}(x)$。类似地，对于 u_s^{total}，我们也可以得到:

$$
\begin{aligned}
&d_1 = \kappa_1 d_0 - \left[\kappa_1 (d_0\cdot\nu) + \operatorname{sgn}(d_0\cdot\nu)\sqrt{1-\kappa_1^2 (d_0\cdot\nu^{\perp})^2}\right]\nu, \\
&d_2 = d_0 - 2(d_0\cdot\nu)\nu, \\
&\frac{A_1}{A_0} = \frac{-2(d_0\cdot\nu)(d_0\cdot\nu^{\perp})}{d_1\cdot d_2}, \\
&\frac{A_2}{A_0} = \frac{-d_0\cdot d_1}{d_1\cdot d_2}
\end{aligned}
$$

于是总场 $u(x)$ 在反射面 Γ 处的法向应力可以计算得到：

$$
\begin{aligned}
\sigma(u_p^{\text{total}})\cdot\nu &= [\mathbf{i}k_pA_0(\lambda\nu+2\mu(d_0,\nu)d_0) \\
&\quad +\mathbf{i}k_pA_1(\lambda\nu+2\mu(d_1,\nu)d_1) \\
&\quad +\mathbf{i}k_sA_2\mu((d_2,\nu)d_2^{\perp}+(d_2^{\perp},\nu)d_2)]e^{\mathbf{i}k_px\cdot d_0} \\
&:= \mathbf{i}k_pA_0\hat{\mathbf{R}}_p(x,d_0,\nu)e^{\mathbf{i}k_px\cdot d_0}, \qquad (4.44)\\
\sigma(u_s^{\text{total}})\cdot\nu &= [\mathbf{i}k_sA_0\mu((d_0,\nu)d_0^{\perp}+(d_0^{\perp},\nu)d_0) \\
&\quad +\mathbf{i}k_pA_1(\lambda\nu+2\mu(d_1,\nu)d_1) \\
&\quad +\mathbf{i}k_sA_2\mu((d_2,\nu)d_2^{\perp}+(d_2^{\perp},\nu)d_2)]e^{\mathbf{i}k_sx\cdot d_0} \\
&:= \mathbf{i}k_sA_0\hat{\mathbf{R}}_s(x,d_0,\nu)e^{\mathbf{i}k_sx\cdot d_0}. \qquad (4.45)
\end{aligned}
$$

其中，上式中针对 u_p^{total} 利用了条件：当 $x\in\Gamma$ 时，

$$e^{\mathbf{i}k_px\cdot d_0}=e^{\mathbf{i}k_px\cdot d_1}=e^{\mathbf{i}k_sx\cdot d_2},$$

针对 u_s^{total} 利用了条件：当 $x\in\Gamma$ 时，

$$e^{\mathbf{i}k_sx\cdot d_0}=e^{\mathbf{i}k_px\cdot d_1}=e^{\mathbf{i}k_sx\cdot d_2}.$$

这里的 $\hat{\mathbf{R}}_p(x,d_0,\nu)$ ($\hat{\mathbf{R}}_s(x,d_0,\nu)$) 就是 p 平面波 (s 平面波) 入射到法向为 ν 的平面时的散射系数。

下面我们就要利用平面的反射系数来近似凸的障碍物的散射系数。对于一个凸的障碍物 D, 我们依据入射波方向 d, 将其表面分成两部分：

$$x\in\partial D_d^-=\{x\in\partial D,\nu(x)\cdot d<0\}$$

和

$$x\in\partial D_d^+=\{x\in\partial D,\nu(x)\cdot d\geq 0\},$$

即通常称为阳面和阴面。类似与声波中的散射的 Kirchhoff 近似 bleistein2013mathematics,melrose1985n [12, 34, 35], 我们可以认为在阴面区域时，散射系数为 0；而在阳面区域，我们局部地把每一个点 x 的小领域是一个法向为 $\nu(x)$ 的平面。于是，关于障碍物 D 的散射系数，我们作如下弹性波 Kirchhoff 近似：

$$
\mathbf{R}_\alpha(x;d)\approx\begin{cases}\hat{\mathbf{R}}_\alpha(x;d,\nu(x)) & \text{if } x\in\partial D_d^-=\{x\in\partial D,\nu(x)\cdot d<0\},\\ 0 & \text{if } x\in\partial D_d^+=\{x\in\partial D,\nu(x)\cdot d\geq 0\}.\end{cases} \qquad (4.46)
$$

注 4.3.2 在高频情况下，$k_\alpha \gg 1$, $\alpha = p, s$，可以得到此时的波长是很小的，$\lambda_\alpha \ll 1$, $\alpha = p, s$, 所以凸边界上的每一点附近的一小段相比较于很小尺寸的波长是平坦的，故可以看成平面。

为便于分析，对于 $\alpha = s, p$, 我们记

$$\mathbf{R}_\alpha(x; d) = (\mathbf{R}_\alpha^1(x; d), \mathbf{R}_\alpha^2(x; d))^T,$$
$$\hat{\mathbf{R}}_\alpha(x; d, \nu(x)) = (\hat{\mathbf{R}}_\alpha^1(x; d, \nu(x)), \hat{\mathbf{R}}_\alpha^2(x; d, \nu(x)))^T.$$

下面我们将用几个数值实验来对比真实的散射系数与 Kirchhoff 逼近的散射系数。为了合成真实的散射系数，我们需要计算 $\sigma(u_\alpha^s + u_\alpha^i) \cdot \nu$。由于当入射波为平面波时，散射波可以表示成以基本解 $\mathbb{G}(x, y)$ 为积分核的单层位势，

$$u^s(x) = \int_{\Gamma_D} -\mathbb{G}(y, x)^T \sigma(u^s(y) + u^i(y))\nu ds(y) \qquad x \in \mathbb{R}^2 \backslash \bar{D},$$

由于 $\mathbb{G}(x, y)$ 在 $x = y$ 处是弱奇异的，令 $x \to \Gamma_D$, 由边界条件

$$u^s(x) + u^i(x) = 0 \quad x \in \Gamma_D$$

可以得到如下边界积分方程：

$$u^i(x) = \int_{\Gamma_D} \mathbb{G}(y, x)^T \sigma(u^s(y) + u^i(y))\nu ds(y) \qquad x \in \Gamma_D,$$

于是利用 Nyström 方法 colton-kress [12] 离散上述积分方程，可以求得 $\sigma(u_\alpha^s + u_\alpha^i) \cdot \nu$ 。于是，我们可以计算真实的散射系数：

$$\mathbf{R}_\alpha^j(x; d) = \frac{\sigma(u^s(y) + u^i(y))\nu \cdot e_j}{\mathbf{i}k_\alpha e^{\mathbf{i}k_\alpha x \cdot d}}. \tag{4.47}$$

然后利用式子 kir_p (4.44) 和 kir_s (4.45) 来计算 $\hat{\mathbf{R}}_\alpha(x; d) = (\hat{\mathbf{R}}_\alpha^1(x; d), \hat{\mathbf{R}}_\alpha^2(x; d))^T$ 。

特别地，在该数值实验中，我们取 Lamé 常数 $\lambda = 1/2, \mu = 1/4$ 以及入射波

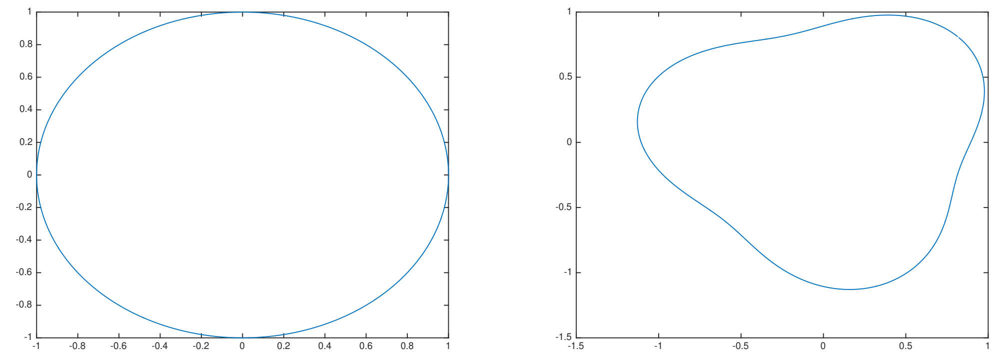
$$u_p^i = (\cos t, \sin t)^T e^{\mathbf{i}k_p(x_1 \cos t + x_2 \sin t)}$$
$$u_s^i = (\sin t, -\cos t)^T e^{\mathbf{i}k_s(x_1 \cos t + x_2 \sin t)}$$

其中 $t \in [0, 2\pi]$。我们针对两种形状的边界做实验，它们的参数表达如下：

圆： $x_1 = \cos(\theta), \ \ x_2 = \sin(\theta);$

梨形： $\rho = 0.5(2 + 0.3\cos(3\theta)),$

$$x_1 = \sin\frac{\pi}{4}\rho(\cos\theta - \sin\theta), x_2 = \sin\frac{\pi}{4}\rho(\cos\theta + \sin\theta),$$



shape

图 4.4 散射系数实验中的障碍物形状：第一个是圆，第二个是梨形

其中 $\theta \in [0, 2\pi]$ (见图 4.4)。

为了比较不同角频率情况下，散射系数的逼近情况，我们分别取 $\omega = \pi, 2\pi, 4\pi, 8\pi$。如图 4.5-4.8 所示，其中每一幅图对应某种形状的 $\mathbf{R}_\alpha^i(x; d)$，$\hat{\mathbf{R}}_\alpha^i(x; d, \nu(x))$, $\alpha = s, p$, $i = 1, 2$ 的对比。

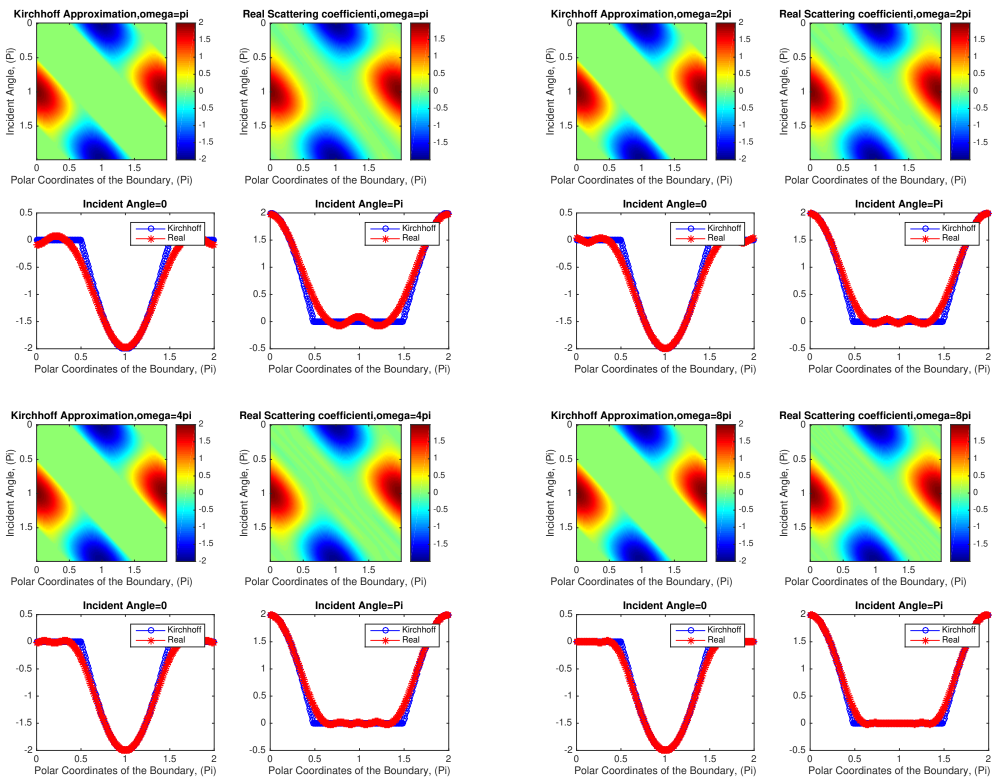


figure_2

图 4.5 圆形的 $\mathbf{R}_p^1$ 和 $\hat{\mathbf{R}}_p^1$.

每幅图含四幅针对不同角频率的子图，每幅子图中第一行中的第一列代表真实的散射系数，第二列代表 Kirchhoff 逼近的散射系数；第一行中的横坐标是边界的参数化 $\theta/2\pi$，纵坐标是入射方向 $t/2\pi$。第二行是入射角为 0 和 π 对于的

图，其中每幅图中红线代表真实的散射系数，蓝线代表 Kirchhoff 逼近的散射系数。由图4.5-4.8，我们可以看到，当角频率比较大时，Kirchhoff 逼近 (4.46) 的效果

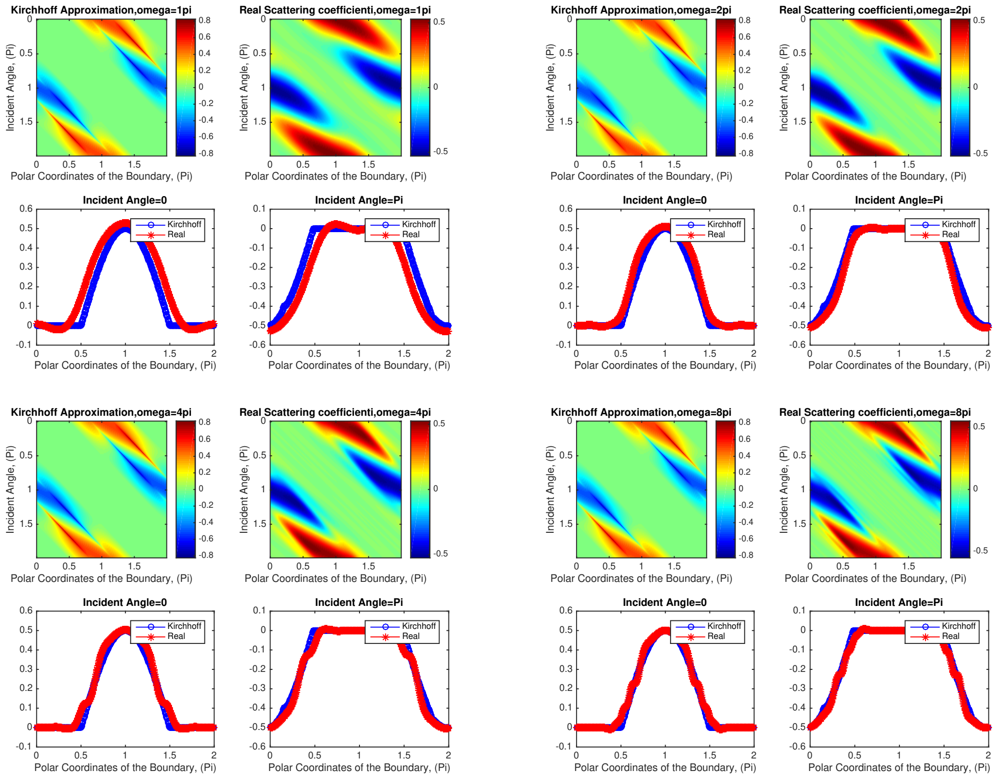


figure_5

图 4.6 圆形的 $\mathbf{R}_s^2$ 和 $\hat{\mathbf{R}}_s^2$

是非常好，符合高频光学近似。然后，我们发现当角频率不是很大的是，Kirchhoff 逼近的效果还是非常理想的。

于是由式子 (4.30) 以及定理 4.3.1，易得对于任意 $z \in \Gamma_D$，

$$\begin{aligned} \hat{I}_d(z) \ &\approx \ \mathrm{Im} \sum_{j=1}^{2} \int_{\Gamma_D} \left[\int_0^{\pi} \overline{\tilde{A}_j(\theta)} \mathbf{i} k_p R_p(x;\tau(\theta)) e^{\mathbf{i}k_p(x-z)\cdot\tau(\theta)} d\theta \right] \cdot \overline{\mathbb{F}(z,x)} e_j ds(x) \\ &+ \mathrm{Im} \sum_{j=1}^{2} \int_{\Gamma_D} \left[\int_0^{\pi} \overline{\tilde{B}_j(\theta)} \mathbf{i} k_s R_s(x;\tau(\theta)) e^{\mathbf{i}k_s(x-z)\cdot\tau(\theta)} d\theta \right] \cdot \overline{\mathbb{F}(z,x)} e_j ds(x). \end{aligned}$$

于是利用 Kirchhoff 有

$$R_\alpha(x;\tau) \approx 0 \ \text{ if } x \in \Gamma_D^+(\tau) = \{x \in \Gamma_D, \nu(x)\cdot\tau > 0\}, \ \ \alpha = p, s. \qquad (4.48)$$

为了后文分析，我们引入下面著名的驻相引理, 见 [36, Theorem 7.7.5].

phase

引理 4.3.2 *令振幅函数 $g \in C_0^2(\mathbb{R})$ 及相函数 $f \in C^2(\mathbb{R})$ 存在驻相点 t_0，即为 $f'(t_0) = 0, f''(t_0) \neq 0$，且当 $t \neq t_0$ 时有 $f'(t) \neq 0$。于是对于任意 $\lambda > 0$，存在常*

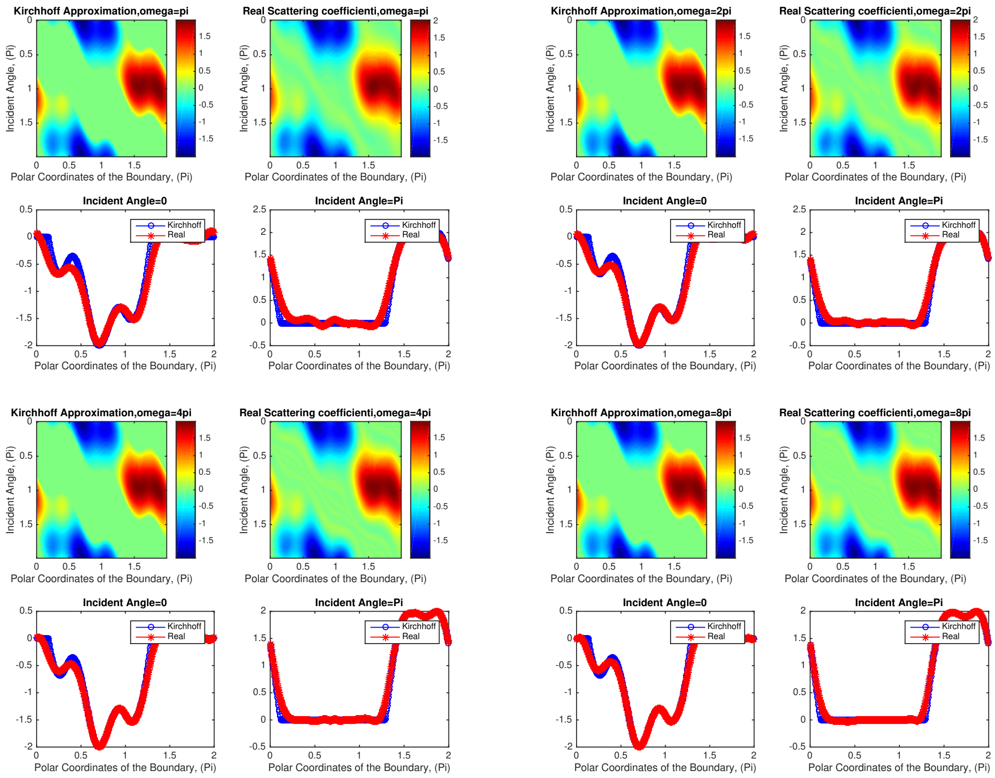


figure_6

图 4.7 梨形的 $\mathbf{R}_p^1$ 和 $\hat{\mathbf{R}}_p^1$

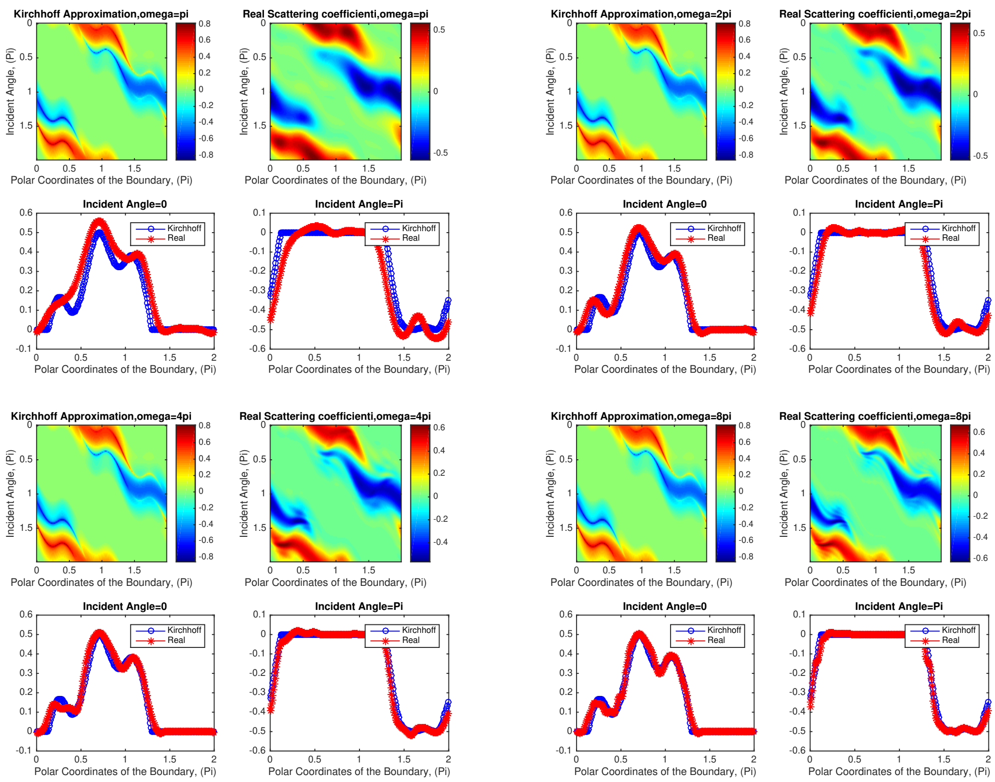


figure_9

图 4.8 梨形的 $\mathbf{R}_s^2$ 和 $\hat{\mathbf{R}}_s^2$

数 C 成立

$$\left|\int_{\mathbb{R}} g(t)e^{\mathbf{i}\lambda f(t)}dt - g(t_0)e^{\mathbf{i}\lambda f(t_0)}\left(\frac{\lambda f''(t_0)}{2\pi\mathbf{i}}\right)^{-1/2}\right| \le C\lambda^{-1}\|g''\|_{C(\mathbb{R})}.$$

这里，我们假设障碍物 D 是凸的。令 $x(s), 0<s<L,$ 是障碍物边界 Γ_D 的关于弧长的参数化表示。定义 $x_{\pm}(\theta)$ 是边界 Γ_D 上满足 $\nu(x_{\pm}(\theta)) = \pm\tau(\theta)$ 的点。令相函数 $f(s) = (x(s)-z)\cdot\tau(\theta)$ 且有

$$f'(s) = x'(s)\cdot\tau(\theta),\ \ f''(s) = x''(s)\cdot\tau(\theta).$$

显然有 $f'(s_{\pm}) = \pm x'(s_{\pm})\cdot\nu(x(s_{\pm})), f''(s_{\pm}) = \pm x''(s_{\pm})\cdot\nu(yx(s_{\pm})) = \pm\kappa(x(s_{\pm}))|x'(s_{\pm})|^2$，其中 κ 表示 Γ_D 的曲率。因此，利用驻相引理和 Kirchhoff 逼近 (4.48) 我们可以得到：

$$\begin{aligned}\hat{I}_d(z) \ \approx\ & \mathrm{Im}\sum_{j=1}^{2}\sqrt{2\pi k_p}\int_0^{\pi}\overline{\tilde{A}_j(\theta)}e^{\mathbf{i}k_p(x_-(\theta)-z)\cdot\tau(\theta)+\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}\frac{R_p(x_-(\theta);\tau(\theta))\cdot\overline{\mathbb{F}(z,x_-(\theta))e_j}}{\sqrt{\kappa(x_-(\theta))}}d\theta \\ & +\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{2}\sqrt{2\pi k_s}\int_0^{\pi}\overline{\tilde{B}_j(\theta)}e^{\mathbf{i}k_s(x_-(\theta)-z)\cdot\tau(\theta)+\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}\frac{R_s(x_-(\theta);\tau(\theta))\cdot\overline{\mathbb{F}(z,x_-(\theta))e_j}}{\sqrt{\kappa(x_-(\theta))}}d\theta.\end{aligned}$$

由于 $\nu(x_-(\theta)) = -\tau(\theta)$，通过 (4.44) 和 (4.45) 我们可以得到

$$R_p(x_-(\theta);\tau(\theta)) \approx -2(\lambda+2\mu)\tau(\theta), \tag{4.49}$$

$$R_s(x_-(\theta);\tau(\theta)) \approx -2\mu\tau(\theta)^{\perp}. \tag{4.50}$$

现在，我们来观察边界 Γ_D 上的点 z。当 $\nu(z)\cdot\tau(\theta) > 0$ 时，其中 $\theta\in(0,\pi)$，此时 z 点位于 Γ_D 背对于 Γ_0 的那一部分。同时，此时 $x_-(\theta)$ 位于 Γ_D 正对于 Γ_0 的那一部分。于是，z 距离 $x_-(\theta)$ 就较远，因此得到 $\mathbb{F}(z,x_-(\theta))e_j \approx 0$, 然后有 $\hat{I}_d(z)\approx 0$。这就说明，只利用 Γ_0 上收集的数据无法将障碍物背对于 Γ_0 那部分成像，而且这一结论在后文中的数值算例中也得到证实。另一方面，如果 z 位于 Γ_D 正对于 Γ_0 的阳面，利用 (4.49),(4.50)，我们可以发现 $\hat{I}_d(z)$ 正是 $[\kappa(x_-(\theta))]^{-1/2}$ 的加权和，其中 $x_-(\theta)$ 在 Γ_D 上 z 附近的那部分点。综上所述，成像函数 $\hat{I}_d(z)$ 可以将障碍物边界成像，且仅能将障碍物的阳面成像。

4.4 其它类型障碍物的 RTM 分辨率分析

在这一节中，我们将考虑在半空间弹性介质中利用 RTM 算法 4.3.1 来重构具有阻抗边界条件的不可穿透障碍物和可穿透障碍物。

对于具有阻抗边界的不可穿透的障碍物，我们接收到的测量数据为 $u_q(x_r,x_s)=u_q^s(x_r,x_s)+\mathbb{N}(x_r,x_s)q,\ q=e_1,e_2$, 其中 $u_q^s(x,x_s)$ 是如下半空间弹性波方程的散射解：

$$
\begin{aligned}
&\Delta_e u_q^s(x,x_s)+\omega^2 u_q^s(x,x_s)=0\ \ \text{in } \mathbb{R}_+^2\backslash\bar{D},\\
&\sigma(u_q^s(x,x_s))\nu+\mathbf{i}\eta(x)u_q^s(x,x_s)=-[\sigma(\mathbb{N}(x,x_s)q)\nu+\mathbf{i}\eta(x)\mathbb{N}(x,x_s)q]\ \ \text{on } \Gamma_D,\\
&\sigma(u_q^s(x,x_s))e_2=0\ \ \text{on } \Gamma_0,
\end{aligned}
$$

这里在 Γ_D 上 $\eta\in L^\infty(\Gamma_D)$ 以及 $\eta\geq 0$，特别地，当 $\eta=0$ 时，上面的障碍物边界条件对应的是 Neumann 边界条件，因此这里我们不在单独讨论满足 Neumann 边界条件的障碍物。对定理 thm:4.3 4.3.1 稍作修改，我们可以得到如下针对具有阻抗边界的不可穿透型障碍物的 RTM 方法的分辨率分析的定理，这里我们不在赘述定理证明。

thm:5.1 **定理 4.4.1** 对于任意 $z\in\Omega$，令 $\mathbb{U}(z,x)\in\mathbb{C}^{2\times 2}$，其中 $\mathbb{U}(z,x)e_j,\ j=1,2$ 是如下弹性波方程的散射解：

$$
\begin{aligned}
&\Delta_e[\mathbb{U}(z,x)e_j]+\omega^2[\mathbb{U}(z,x)e_j]=0\ \ \text{in } \mathbb{R}^2\backslash\bar{D},\\
&\sigma(\mathbb{U}(z,x)e_j)\nu+\mathbf{i}\eta(x)[\mathbb{U}(z,x)e_j]=-[\sigma(\overline{\mathbb{F}(z,x)}e_j)\nu+\mathbf{i}\eta(x)\overline{\mathbb{F}(z,x)}e_j]\ \ \text{on } \Gamma_D.
\end{aligned}
$$

于是针对具有阻抗边界的不可穿透障碍物的散射数据 $u_q^s(x_r,x_s)$，*RTM* 成像函数 cor2 *(4.19)* 有如下表示

$$
\begin{aligned}
\hat{I}_d(z)\ \ =\ \ &-\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{2}\int_{\Gamma_D}[\mathbb{U}(z,x)e_j+\overline{\mathbb{F}(z,x)}e_j]\cdot[\sigma(\overline{\mathbb{F}(z,x)}e_j)\nu+\mathbf{i}\eta(x)\overline{\mathbb{F}(z,x)}e_j]ds(x)\\
&+R_d(z),\qquad \forall z\in\Omega,
\end{aligned}
$$

这里 $|R_d(z)|\leq C\mu^{-2}(1+k_sd_D)^3\left[\left(\frac{h}{d}\right)^2+(k_sh)^{-1/4}\right]$ 其中常数 C 仅依赖于 κ 而与 k_s,k_p,h,d,d_D 无关。

对于可穿透型障碍物, 我们接收到的测量数据为 $u_q(x_r.x_s)=u_q^s(x_r,x_s)+\mathbb{N}(x_r,x_s)q,\ q=e_1,e_2$, 其中 $u_q^s(x,x_s)$ 是如下弹性波方程的散射解：

$$
\begin{aligned}
&\Delta_e u_q^s(x,x_s)+\omega^2 n(x)u_q^s(x,x_s)=-\omega^2(n(x)-1)\mathbb{N}(x,x_s)q\ \ \text{in } \mathbb{R}_+^2,\\
&\sigma(u_q^s(x,x_s))e_2=0\ \ \text{on } \Gamma_0,
\end{aligned}
$$

这里 $n(x)\in L^\infty(\mathbb{R}_+^2)$ 是正函数，且当 $x\notin D$ 时，$n(x)==1$。类似地，对定理 thm:4.3 4.3.1 稍作修改，我们可以得到如下针对可穿透型障碍物的 RTM 方法的分辨率分析的定理，这里我们不在赘述定理证明。

resolution2 **定理 4.4.2** 对于 $z \in \Omega$，令 $\mathbb{U}(z,x) \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ 其中 $\mathbb{U}(z,x)e_j$, $j = 1,2$ 是如下弹性波方程的散射解：

$$\Delta_e[\mathbb{U}(z,x)e_j] + \omega^2 n(x)[\mathbb{U}(z,x)e_j] = -\omega^2(n(x)-1)\overline{\mathbb{F}(z,x)}e_j \ \text{ in } \mathbb{R}^2.$$

于是针对可穿透型障碍物的散射数据 $u_q^s(x_r,x_s)$，*RTM* 成像函数 cor2 *(4.19)* 有如下表示

$$\hat{I}_d(z) = \mathrm{Im}\sum_{j=1}^{2}\int_D \omega^2(n(x)-1)[(\mathbb{U}(z,x)e_j + \overline{\mathbb{F}(z,x)}e_j)\cdot\overline{\mathbb{F}(z,x)}e_j]dx + R_d(z),$$

这里 $|R_d(z)| \le C\mu^{-2}(1+k_s d_D)^3\left[\left(\frac{h}{d}\right)^2 + (k_s h)^{-1/4}\right]$ 其中常数 C 仅依赖于 κ 而与 k_s, k_p, h, d, d_D 无关。

4.5 数值测试

在这一节中，我们将呈现若干数值实验来展示 RTM 算法的有效性。为了合成散射数据，我们对要计算的半空间弹性波方程的散射解 $u_q^s(x,x_s)$ 表示成以 Neumann Green 函数 $\mathbb{N}(x,y)$ 为积分核的单层位势，然后通过 Dirichlet 边界条件，与入射波 $u_q^i(x,x_s)$ 组合成边界积分方程。由于当 $x = y$ 时，Neumann Green 函数 $\mathbb{N}(x,y)$ 只具有弱奇异性，即 $\log|x-y|$。于是，我们可以利用 Nyström 方法 colton-kress [12] 来离散边界 Γ_D 上的积分方程。针对边界的离散剖分，我们采用一致网格，且每一个 p 入射波长均匀设置 10 个网格点。发射器和接收器均匀地分布在 Γ_d 上，且对于所有数值实验，都取 $h = 10, d = 50$ 及 Lamé 常数 $\lambda = 1/2, \mu = 1/4$。下面实验中的各种障碍物形状，其边界参数化表示如下：

圆形: $x_1 = \rho\cos(\theta),\ \ x_2 = \rho\sin(\theta);$

风筝形: $x_1 = \cos(\theta) + 0.65\cos(2\theta) - 0.65,\ \ x_2 = 1.5\sin(\theta);$

p-叶形: $r(\theta) = 1 + 0.2\cos(p\theta);$

花生形: $x_1 = \cos\theta + 0:2\cos 3\theta; x_2 = \sin\theta + 0:2\sin 3\theta;$

方形: $x_1 = \cos 3\theta + \cos\theta; x_2 = \sin 3\theta + \sin\theta.$

这里 $\theta \in [0,2\pi]$。且这里的数值成像函数为：

$$I_d(z) = \mathrm{Im}\sum_{q=e_1,e_2}\left\{\frac{|\Gamma_0^d|^2}{N_s N_r}\sum_{s=1}^{N_s}\sum_{r=1}^{N_r}[\mathbb{T}_D(x_s,z)^T q]\cdot[\mathbb{T}_D(x_r,z)^T\overline{u_q^s(x_r,x_s)}]\right\}.$$

在下文中，我们所谓的 Dirichlet, Neumann 或是阻抗 (Impedance) 障碍物，就意味着该障碍物是不可穿透的，而且其边界 Γ_D 满足 Dirichlet, Neumann 或是阻抗边界条件。

算例 1. 这里我们只考虑 Dirichlet 障碍物来成像，而变量是障碍物的形状，包括圆形，花生形，四叶草形以及旋转后的方形。同样地，我们考虑针对 Dirichlet 障碍物, Neumann 障碍物, 阻抗障碍物, 以及可穿透障碍物进行成像。每个成像区域都为 $\Omega = (-2, 2) \times (8, 12)$ 且其样本点网格取为 201×201。我们设置发射器和接收器数量为 $N_s = N_r = 401$。这里针对单频，我们取角频率 $\omega = 3\pi, 4\pi$ ；针对多频，取 $\omega = \pi \times [2 : 0.5 : 8]$ ，再将成像函数值叠加。如图 4.9, 针对不同形状的

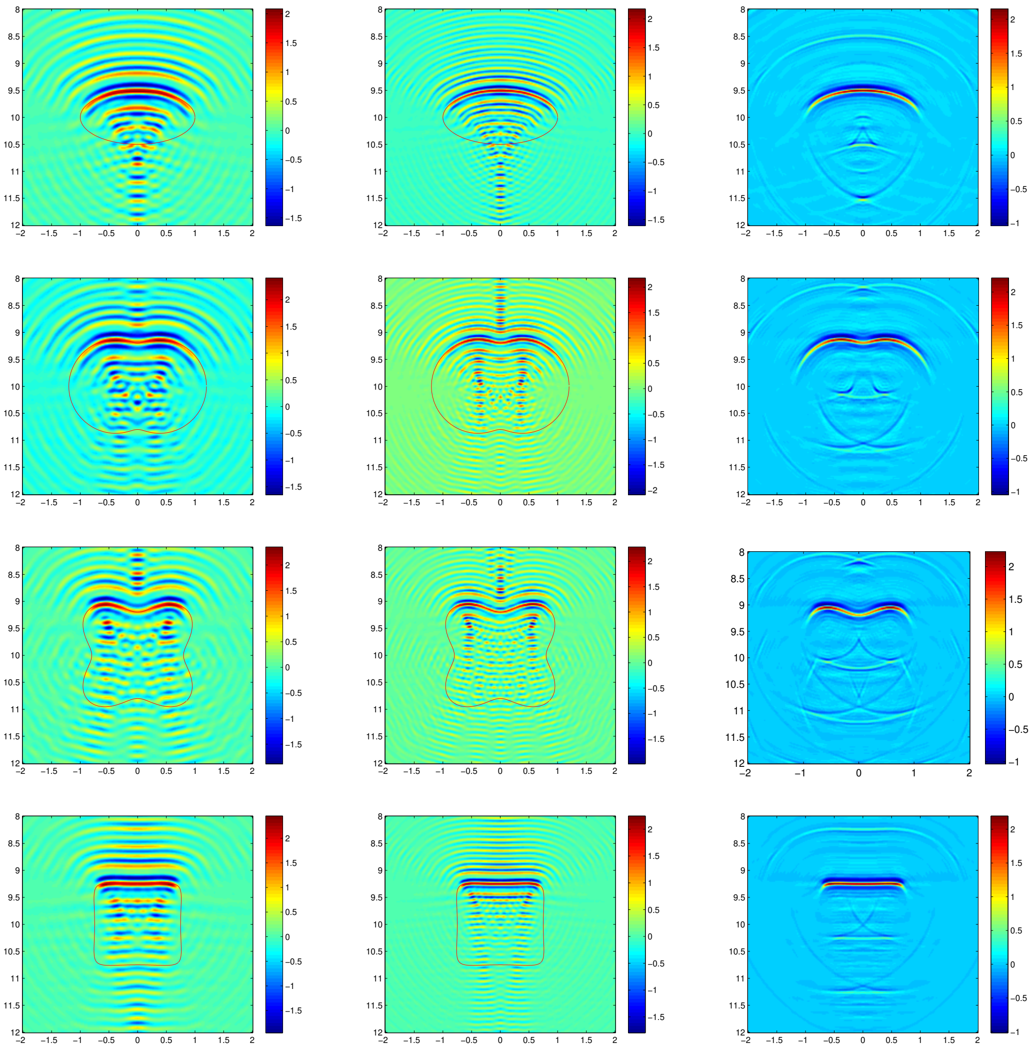


图 4.9 算例 1: 从上到下是不同形状的 Dirichlet 障碍物，依次是圆形，花生形，四叶草形以及旋转后的方形的成像结果。其中，第一列是关于单频的，其角频率为 $\omega = 3\pi$, 第二列是关于单频的，其角频率为 $\omega = 5\pi$ 以及第三列是关于多频叠加的

figure_21

障碍物，RTM 算法都可以将其上沿给成像出来。而且，当对多个单频成像进行叠加后得到的多频成像结果可以显著提高单频的成像效果。

算例 2. 我们考虑针对 Dirichlet 障碍物, Neumann 障碍物, 阻抗障碍物, 以及可穿透障碍物进行成像。每个成像区域都为 $\Omega = (-2, 2) \times (8, 12)$ 且其样本点网格取为 201×201。我们设置发射器和接收器数量为 $N_s = N_r = 401$，角频率为 $\omega = 2\pi$。

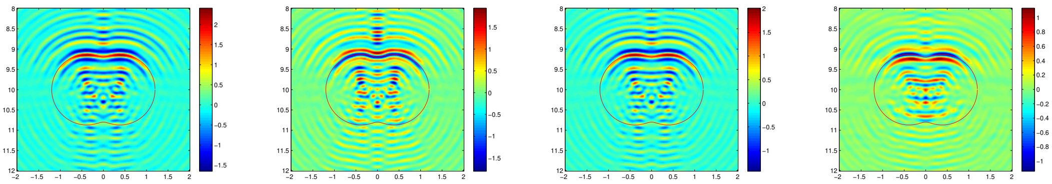


图 4.10 算例 2: 从左到右：Neumann 障碍物, 阻抗障碍物, 以及衍射指数为 $n(x) = 0.25$ 可穿透障碍物的成像结果

figure_11

成像结果见图 4.10 所示。我们可以清晰可见，对于不可穿透障碍物，障碍物的上边界都被 RTM 方法成像出来，且这部分边界刚好是正对着分布着发射器和接收器的半空间表面 Γ_0，相比较下，位于障碍物边界的阴暗部分的点以及远离边界的点的成像函数值都是非常小的。

显然，成像算法 (4.18) 与障碍是否可穿透，可穿透时是哪种边界条件无关。在不知道障碍物边界的先验信息下，如图 4.10 所示，针对不同类型的障碍物，RTM 方法都可以成像。

算例 3 我们考虑来针对两个障碍物同时成像。第一个模型是在水平方向上并排两个障碍物；第二个模型是一个圆和一个花生在竖直方向上排列 (圆上花生下)；第三个模型是一个圆和一个花生在竖直方向上排列 (圆下花生上)。针对单频的成像实验，我们取角频率为 $\omega = 3\pi$ ，而针对多频的成像实验，我们取多频角频率为 $\omega = \pi \times [2 : 0.5 : 8]$ 。如图 4.11 所示，是第一个模型的成像结果。其成像区域为 $\Omega = (-4, 4) \times (8, 12)$ ，采样网格点数量 401×201。我们设置发射器和接收器数量为 $N_s = N_r = 301$。如图 4.12 和 4.13 所示，是第二个模型和第三个模型的成像结果。其成像区域为 $\Omega = (-4, 4) \times (8, 12)$ ，采样网格点数量 401×401。我们设置发射器和接收器数量为 $N_s = N_r = 301$。在图 4.11 ，图 4.12 和图 4.13 中的多频 RTM 成像只是简单地将每个不同的单频 RTM 成像结果直接叠加而得。我们可以发现，通过这样简单的多个单频叠加后，成像质量得到显著地提高。

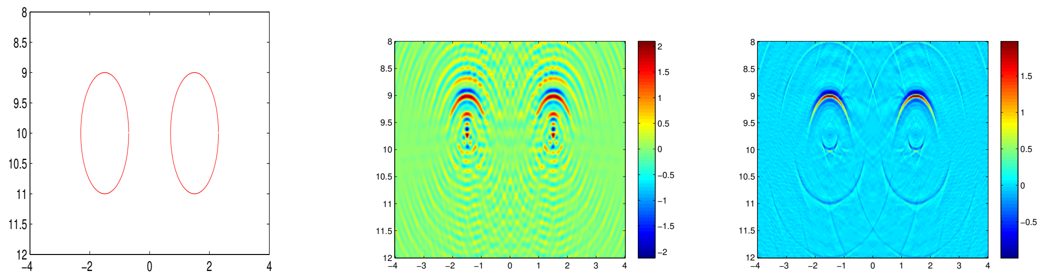


图 4.11 算例 3: 从左到右分别为, 真实的两个障碍物：圆，关于单频角频率为 $\omega = 3\pi$ 的成像结果, 关于多频叠加的成像结果。

figure_31

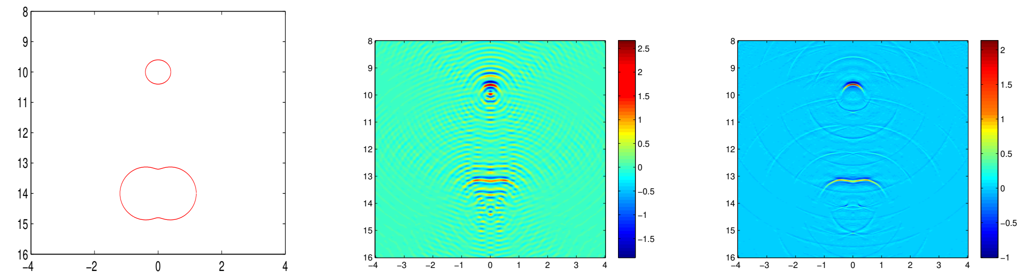


图 4.12 算例 3: 从左到右分别为, 真实的两个障碍物：圆上和花生下，关于单频角频率为 $\omega = 3\pi$ 的成像结果, 关于多频叠加的成像结果。

figure_32

如图 figure_32 4.12 所示, 我们发现即使圆形挡在花生的上面，RTM 算法还是可以将圆和花生的上沿都给成像出来，进一步说明了 RTM 算法的有效性。而如图 figure_33 4.13 所示，我们法向当大一号的花生挡在圆的上面时，只能将花生的上沿给成像出来，而无法对圆成像，我们可以猜测在这种情况下由于花生的阻挡，可能在 Γ_0 上接受到关于圆的信息是极少的。

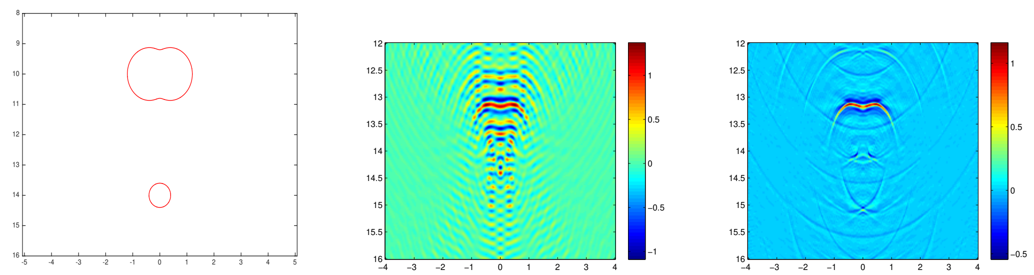


图 4.13 算例 3: 从左到右分别为, 真实的两个障碍物：圆下和花生上，关于单频角频率为 $\omega = 3\pi$ 的成像结果, 关于多频叠加的成像结果。

figure_33

Example 4 我们考虑半空间弹性波 RTM 算法关于复加性 Gaussian 噪声的稳

定性。这里加性 Gaussian 噪声定义为

$$u_{\text{noise}} = u_s + v_{\text{noise}},$$

其中 u_s 合成的散射数据，v_{noise} 是 Gaussian 噪声，且均值为 0，其标准差是散射数据 $|u_s|$ 中最大值的 σ 倍，即为 $v_{\text{noise}} = \frac{\sigma \max |u_s|}{\sqrt{2}}(\varepsilon_1 + \mathbf{i}\varepsilon_2)$ 和 $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$。

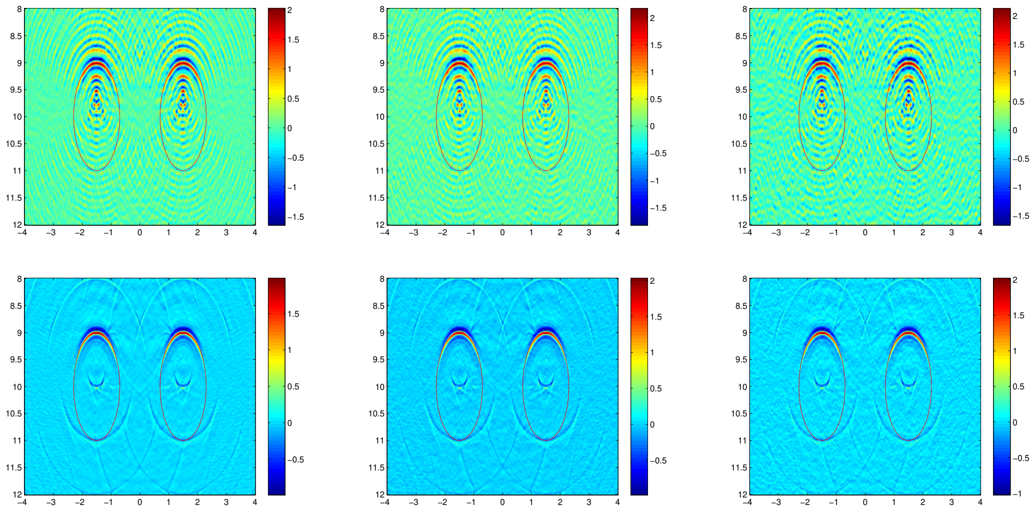


figure_4

图 4.14 算例 4: 从左到右，分别是含有噪声水平 $\mu = 0.2; 0.3; 0.4$ Dirichlet 障碍物的成像结果。其中第一行是关于单频成像，其角频率为 $\omega = 4\pi$, 第二行是多个单频成像的叠加

如图 4.14 所示，即使在加了加性 Gaussian 噪声后，单频 RTM 成像算法还是可以把障碍物的上沿给清晰成像，说明了该算法的稳定性。而且在通过多个角频率 $\omega = \pi \times [2 : 0.5 : 8]$ 的成像结果叠加后，其成像质量显著提高，而且消除了 Gaussian 噪声的影响。

4.6 本章小结

附录 A　TBD

参考文献

landau [1] [M].

net2005inverse [2] Bonnet M, Constantinescu A. Inverse problems in elasticity[J]. Inverse problems, 2005, 21 (2):R1.

bao2018inverse [3] Bao G, Hu G, Kian Y, et al. Inverse source problems in elastodynamics[J]. Inverse Problems, 2018, 34(4):045009.

liu2019near [4] Liu X, Zhang B, Zhang H. Near-field imaging of an unbounded elastic rough surface with a direct imaging method[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2019, 79(1):153-176.

ela_reverse [5] Chang W F. Elastic reverse-time migration[J]. Geophysical Prospecting, 1987, 37(3):243-256.

interpretation [6] Grant F S, West G F. Interpretation theory in applied geophysics[J]. 1965.

ku63 [7] Kupradze V D. Progress in solid mechanics. 3. dynamical problems in elasticity[M]. North-Holland Publishing Company, 1963.

radze1976three [8] Kupradze V, Gegelia T, Basheleishvili M, et al. Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity[M]. Moscow Nauka, 1976.

cxz2016 [9] Chen Z, Xiang X, Zhang X. Convergence of the pml method for elastic wave scattering problems[J]. Mathematics of Computation, 2016, 85(302):2687-2714.

ramble2008note [10] Bramble J H, Pasciak J E. A note on the existence and uniqueness of solutions of frequency domain elastic wave problems: A priori estimates in h1[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008, 345(1):396-404.

haillat2014new [11] Chaillat S, Bonnet M. A new fast multipole formulation for the elastodynamic half-space green's tensor[J]. Journal of Computational Physics, 2014, 258:787-808.

colton-kress [12] Colton D, Kress R. Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory: volume 93[M]. Springer Science and Business Media, 2012.

ec2001acoustic [13] Nédélec J C. Acoustic and electromagnetic equations: integral representations for harmonic problems: volume 144[M]. Springer Science & Business Media, 2001.

nedelec2011 [14] Durán M, Muga I, Nédélec J C. The outgoing time-harmonic elastic wave in a half-plane with free boundary[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2011, 71(2):443-464.

2001uniqueness [15] Arens T. Uniqueness for elastic wave scattering by rough surfaces[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2001, 33(2):461-476.

s2002existence [16] Arens T. Existence of solution in elastic wave scattering by unbounded rough surfaces[J]. Mathematical methods in the applied sciences, 2002, 25(6):507-528.

s2002radiation [17] Charalambopoulos A, Gintides D, Kiriaki K. Radiation conditions for rough surfaces in linear elasticity[J]. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 2002, 55(3):421-441.

em2003theoreme [18] Alem L, Chorfi L. Théorème d'unicité pour un problème d'ondes élastiques[J]. Comptes Rendus Mathematique, 2003, 336(6):525-530.

Guzina2006 [19] Madyarov A I, Guzina B B. A radiation condition for layered elastic media[J]. Journal of Elasticity, 2006, 82(1):73-98.

RTMhalf_aco [20] Chen Z, Huang G. Reverse time migration for reconstructing extended obstacles in the half space[J]. Inverse Problems, 2015, 31(5):055007.

achenbach1980 [21] Achenbach J. Wave propagation in elastic solids[M]. North-Holland, 1980: 544.

rris2001Linear [22] Harris J. Linear elastic waves[M]. Cambridge University Press, 2001: B26.

ors1979Complex [23] Ahlfors L V. Complex analysis: An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable[M]. McGraw-Hill, 1979: 155-173.

Kuroda [24] Kuroda S T. An introduction to scattering theory.[M]. 2003.

02quantitative [25] Aki K, Richards P G. Quantitative seismology[M]. 2002.

grafakos [26] Grafakos L. Classical and modern fourier analysis[M]. Prentice Hall, 2004.

arens1999 [27] Arens T. A new integral equation formulation for the scattering of plane elastic waves by diffraction gratings[J]. Journal of Integral Equations and Applications, 1999, 11(3):232¨C245.

leis [28] Leis R. Initial boundary value problems in mathematical physics[M]. J. Wiley, 1986: 354-355.

wilcox1975 [29] Wilcox C H. Scattering theory for the d'alembert equation in exterior domains[D]. Springer Berlin Heidelberg, 1975.

Yves1988 [30] Dermenjian Y, Guillot J C. Scattering of elastic waves in a perturbed isotropic half space with a free boundary. the limiting absorption principle[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 1988, 10(2):87¨C124.

sini2004 [31] Sini M. Absence of positive eigenvalues for the linearized elasticity system[J]. Integral Equations and Operator Theory, 2004, 49(2):255-277.

zhang2009 [32] Zhang Y, Sun J. Practical issues of reverse time migration: True amplitude gathers, noise removal and harmonic-source encoding[C]//Beijing International Geophysical Conference and Exposition 2009: Beijing 2009 International Geophysical Conference and Exposition, Beijing, China, 24–27 April 2009. Society of Exploration Geophysicists, 2009: 204-204.

Zhang2007 [33] Zhang Y, Xu S, Bleistein N, et al. True-amplitude, angle-domain, common-image gathers from one-way wave-equation migrations[J]. Geophysics, 2007, 72(1):S49-S58.

013mathematics [34] Bleistein N, Cohen J K, John Jr W, et al. Mathematics of multidimensional seismic imaging, migration, and inversion: volume 13[M]. Springer Science & Business Media, 2013.

elrose1985near [35] Melrose R B, Taylor M E. Near peak scattering and the corrected kirchhoff approximation for a convex obstacle[J]. Advances in Mathematics, 1985, 55(3):242-315.

hor [36] Hormander. The analysis of linear partial differential operators, i[M].

作者简历及攻读学位期间发表的学术论文与研究成果

作者简历

casthesis 作者

周世奇，浙江省绍兴人，中国科学院数学与系统科学研究院博士研究生。

研究方向

逆散射问题，弹性波方程，逆时偏移算法

已发表 (或正式接受) 的学术论文:

[1] Z. Chen, S. Zhou. A Direct Imaging Method for Half-Space Inverse Elastic Scattering Problems, Inverse Problems, Accepted.

致　谢