



中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

博士学位论文

半空间中的弹性波反散射问题

作者姓名: _____

指导教师: _____

学位类别: _____ 理学博士

学科专业: _____ 计算数学

培养单位: _____ 中国科学院 数学与系统科学研究院

2019 年 6 月

Inverse Elastic Scattering Problems in the Half Space

A thesis submitted to the
University of Chinese Academy of Sciences
in partial fulfillment of the requirement
for the degree of
Doctor of Natural Science
in Computational Mathematics
By
Supervisor:

Academy of Mathematics and Systems Science
Chinese Academy of Sciences

June, 2019

中国科学院大学 学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文是本人在导师的指导下独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果。对论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明或致谢。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

作者签名：

日 期：

中国科学院大学 学位论文授权使用声明

本人完全了解并同意遵守中国科学院大学有关保存和使用学位论文的规定，即中国科学院大学有权保留送交学位论文的副本，允许该论文被查阅，可以按照学术研究公开原则和保护知识产权的原则公布该论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存、汇编本学位论文。

涉密及延迟公开的学位论文在解密或延期后适用本声明。

作者签名：

日 期：

导师签名：

日 期：

摘要

本文主要研究了半空间时谐弹性波反散射问题的逆时偏移算法及其数学理论分析。近几十年来，该问题在多种学科领域内受到广泛关注，其中包括无损探测领域，医学领域以及地震波勘探领域。一方面，传统的地震波数据处理都是基于声波方程的，而弹性介质中允许存在横波和纵波。此外，半空间自由边界条件的存在导致出现了只沿着半空间表面传播的 Rayleigh 表面波。另一方面，从反问题的角度看，散射问题的逆算子具有高度的不适定性及非线性性。因此，上述所有的困难都给本文的研究带来挑战。本文的研究涉及以下两大方面：

- 利用关于变量 x_1 的 Fourier 变换得到新的易于渐近分析的 Neumann Green 函数及 Dirichlet Green 函数的表达式。通过推广传统的用于分析振荡积分的 Van der Corput 引理，我们推导出在特定区域的 Green 函数的渐近行为。针对半空间弹性波正散射问题，我们利用经典的极限吸收原理来定义所谓的散射解，并且利用该理论证明了解的适定性。当嵌入在半空间中的障碍物远离半空间表面边界时，我们描述了半空间散射问题与相应的全空间散射问题两者之间散射解的差距。
- 针对半空间扩展障碍物重构问题，我们提出了一种基于逆时偏移思想的直接成像法，该算法仅需要利用半空间表面上有限孔径内接收到的单频弹性波数据。我们根据半空间表面上接收数据的孔径大小与嵌入在半空间的障碍物的深度证明了该障碍物重构算法的分辨率。在分辨率分析中利用点扩散函数的性质，并说明了互相关成像函数的虚部总是在障碍物的上边界上达到峰值。我们用大量的数值实验印证了该直接成像法的有效性和鲁棒性。

关键词：半空间, 弹性波方程, 反散射问题, 逆时偏移

Abstract

In this thesis, we focus on developing reverse time migration method for time harmonic elastic wave inverse scattering problems in the half space and establishing the related mathematical theory. In recent decades, these problems have considerable interests in diverse application fields including non-destructive testing, medical imaging, and especially seismic exploration. Seismic processing usually is based on acoustic equations, but elastic materials allow for both compressional and shear wave propagation. Moreover, the free boundary condition induces the propagation of a Rayleigh surface wave guided by the unbounded flat surface of the half space. From the perspective of inverse problems, the inverse operator of the scattering problem is improperly posed and inherently nonlinear. Therefore, the challenges of this thesis include all above difficulties. The thesis consists of the following issues:

- By using Fourier transform with respect to the horizontal variable x_1 , we derive a new expression for the Neumann Green Tensor and Dirichlet Green Tensor. Based on the extension of the classic Van der Corput lemma, we show the asymptotic behavior of Green Tensor in a specific area. For the forward elastic scattering problems in the half space, we take the method of limiting absorption principle to define scattering solution and obtain its well-posedness. Besides, we describe the difference between the half-space scattering solution and the full space scattering solution when the scatter is far away from the boundary of the half space.
- We propose a direct imaging method based on the reverse time migration to reconstruct extended obstacles in the half space with finite aperture elastic scattering data at a fixed frequency. We also prove the resolution of the reconstruction method in terms of the aperture and the depth of the obstacle embedded in the half space. The resolution analysis is studied by virtue of the point spread function and implies that the imaginary part of the cross-correlation imaging function always peaks on the upper boundary of the obstacle. Numerical examples are included to illustrate the effectiveness of the method.

Keywords: half space, elastic equations, inverse scattering problems, reverse time mi-

gration

目 录

| | |
|--|-----------|
| 第 1 章 引言 | 1 |
| 1.1 研究背景 | 1 |
| 1.2 半空间弹性波散射问题介绍 | 2 |
| 1.3 半空间弹性波反散射问题介绍 | 6 |
| 1.4 逆时偏移方法简介 | 8 |
| 1.5 本文内容安排 | 10 |
| 第 2 章 基础知识 | 11 |
| 2.1 函数空间 | 11 |
| 2.2 基本定理 | 12 |
| 第 3 章 半空间弹性波散射问题 | 15 |
| 3.1 半空间弹性波 Green 函数 | 15 |
| 3.1.1 Neumann Green 函数 | 16 |
| 3.1.2 Dirichlet Green 函数 | 32 |
| 3.2 正散射问题解的适定性 | 35 |
| 3.3 本章小结 | 44 |
| 第 4 章 半空间反散射问题的逆时偏移算法 | 45 |
| 4.1 问题介绍 | 45 |
| 4.2 点扩散函数 | 46 |
| 4.3 逆时偏移算法 | 57 |
| 4.3.1 弹性波散射系数 | 62 |
| 4.4 关于其它类型障碍物的分辨率分析 | 73 |
| 4.5 数值测试 | 74 |
| 4.6 本章小结 | 79 |
| 第 5 章 总结与展望 | 81 |
| 附录 A 关于全空间弹性波无相位数据成像算法的讨论 | 83 |
| A.1 问题介绍 | 83 |
| A.2 全空间弹性波无相位逆时偏移算法 | 83 |
| 参考文献 | 87 |
| 作者简历 | 93 |

图形列表

| | |
|---|----|
| 1.1 地震波勘探模型. | 7 |
| 3.1 $\mu_{\alpha,\varepsilon}(\xi)$, $\alpha = p, s$ 相应的割支线. | 19 |
| 3.2 积分路径 L 和 $L_{-\phi}^\varepsilon$ | 26 |
| 4.1 半空间弹性波障碍物散射模型. | 45 |
| 4.2 $\text{Im}(\mathbb{G}(z, y))$ for $y = (0, 8)^T$, $\omega = 2\pi$, 其中 $\text{Im}[\mathbb{G}(z, y)]_{ij}$ 对应于上面位置为 (i, j) 的子图. | 55 |
| 4.3 $-\text{Im}(\mathbb{J}_d(z, y))$, $y = (0, 8)^T$, $\omega = 2\pi$, $d = 100$, $-\text{Im}[\mathbb{J}_d(z, y)]_{ij}$ 对应位置 (i, j) 的子图. | 56 |
| 4.4 散射系数实验中的障碍物形状: 第一个是圆, 第二个是梨形. | 69 |
| 4.5 圆形的 \mathbf{R}_p^1 和 $\hat{\mathbf{R}}_p^1$ | 70 |
| 4.6 圆形的 \mathbf{R}_s^2 和 $\hat{\mathbf{R}}_s^2$ | 70 |
| 4.7 梨形的 \mathbf{R}_p^1 和 $\hat{\mathbf{R}}_p^1$ | 71 |
| 4.8 梨形的 \mathbf{R}_s^2 和 $\hat{\mathbf{R}}_s^2$ | 72 |
| 4.9 算例 1: 从上到下是不同形状的 Dirichlet 障碍物, 依次是圆形, 花生形, 四叶草形以及旋转后的方形的成像结果. 其中, 第一列是关于单频的, 其角频率为 $\omega = 3\pi$, 第二列是关于单频的, 其角频率为 $\omega = 5\pi$ 以及第三列是关于多频叠加的. | 76 |
| 4.10 算例 2: 从左到右: Neumann 障碍物, 阻抗障碍物, 以及衍射指数为 $n(x) = 0.25$ 可穿透障碍物的成像结果; 第一行中的障碍物为圆形, 第二行中的障碍物为花生. | 76 |
| 4.11 算例 3: 从左到右分别为, 真实的两个障碍物: 圆, 关于单频角频率为 $\omega = 3\pi$ 的成像结果, 关于多频叠加的成像结果. | 77 |
| 4.12 算例 3: 从左到右分别为, 真实的两个障碍物: 圆上和花生下, 关于单频角频率为 $\omega = 3\pi$ 的成像结果, 关于多频叠加的成像结果. | 78 |
| 4.13 算例 3: 从左到右分别为, 真实的两个障碍物: 圆下和花生上, 关于单频角频率为 $\omega = 3\pi$ 的成像结果, 关于多频叠加的成像结果. | 78 |
| 4.14 算例 4: 从左到右, 分别是含有噪声水平 $\mu = 0.2; 0.3; 0.4$ Dirichlet 障碍物的成像结果. 其中第一行是关于单频成像, 其角频率为 $\omega = 4\pi$, 第二行是多个单频成像的叠加. | 79 |
| A.1 所有测试中的样本区域都为: $[-4, 4] \times [-4, 4]$, 参数设置为: $\lambda = \mu = 1$, $\omega = 4\pi$, $R_s = R_r = 10$. 不同行对应的是不同障碍物形状的测试, 从左到右用到的成像函数分别是 \hat{I}_{RTM} , \hat{I}_{RTM}^{lite} , $\hat{I}_{RTM}^{phaseless}$ | 86 |

符号列表

符号

| | | |
|-----------------------|---|-------------------------------------|
| RTM | Reverse Time Migration | 逆时偏移 |
| \mathbb{R} | $\{x; -\infty < x < \infty\}$ | 实数域 |
| \mathbb{C} | $\{\xi = \xi_1 + i\xi_2; \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}\}$ | 复数域 |
| \mathbb{R}^2 | $\{(x_1, x_2); x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ | 二维实数空间 |
| \mathbb{R}_+^2 | $\{(x_1, x_2); x_1 \in \mathbb{R}, x_2 > 0\}$ | 二维实数半空间 |
| Γ_0 | $\{(x_1, x_2); x_1 \in \mathbb{R}, x_2 = 0\}$ | 半空间边界 |
| Γ_0^d | $\{(x_1, x_2); x_1 \in (-d, d), x_2 = 0\}$ | 发射面或是接收面 |
| $\delta_{x_s}(\cdot)$ | | 源点在 x_s 处的 Dirac 源 |
| ω | | 角频率 |
| c_s | | 横波速度 |
| c_p | | 纵波速度 |
| k_s | | 横波波数 |
| k_p | | 纵波波数 |
| k_R | | Rayleigh 波波数 |
| $n(x)$ | | 折射系数 |
| $\eta(x)$ | | 阻抗系数 |
| λ, μ | | Lamé 常数 |
| $\sigma(\cdot)$ | | 应力张量 |
| $\varepsilon(\cdot)$ | | 应变张量 |
| Δ_e | | 线性弹性波算子 |
| $H_0^{(1)}(t)$ | | 第一类零阶 Hankel 函数 |
| $\Phi_k(x, y)$ | $\frac{i}{4}H_0^{(1)}(k x - y)$ | 波数为 k 的声波方程基本解 |
| y' | $(y_1, -y_2)$ | $y = (y_1, y_2)$ 关于 Γ_0 的镜像点 |
| $\mathbb{G}(x, y)$ | 表达式见式 (3.1) | 弹性波半基本解 |
| $\mathbb{D}(x, y)$ | 表达式见式 (3.45) | 弹性波半空间 Dirichlet Green 函数 |
| $\mathbb{N}(x, y)$ | 表达式见式 ((3.25)) | 弹性波半空间 Neumann Green 函数 |

| | | |
|-----------------------------------|--|-----------------------|
| $\mathbb{J}(z, y)$ | 点扩散函数 | |
| $\mathbb{J}_d(z, y)$ | 有限孔穴点扩散函数 | |
| D | 有界的 Lipschitz 区域 | 障碍物或散射体 |
| $L^1(D)$ | $\{f(x); \int_D f(x) dx < +\infty\}$ | D 上的 Lebesgue 可积函数集 |
| $L^2(D)$ | $\{f(x); \int_D f(x) ^2 dx < +\infty\}$ | D 上的平方可积函数集 |
| $H^1(D)$ | $\{f(x); f, \nabla f \in L^2(D)\}$ | Sobolev 空间 |
| $H^1, s(D)$ | | 加权 Sobolev 空间 |
| Ω | | 采样区域 |
| $\mathbf{R}_\alpha(\cdot, \cdot)$ | $\alpha = p, s$ | 弹性波散射系数 |

第1章 引言

近几十年来，弹性波散射问题及其反问题在工程领域和数学领域都得到了广泛研究 [1]. 特别地，弹性波反散射问题在地球物理领域、石油勘探领域中发展迅速. 弹性波反散射问题是利用接收到的弹性波散射数据去探寻障碍物的位置、形状、大小. 相比于声波，弹性波是由横波和纵波耦合而成的矢量波，因此研究难度更大. 除此之外反问题普遍具有强非线性及高度不适定性，这导致弹性波反散射问题的研究更具挑战性和吸引力. 目前，在数学领域，学者们主要研究的弹性波反散射问题为全空间背景下的弹性波反散射问题 [2, 3] 和粗糙表面的弹性波反散射问题 [4]. 全空间背景下的弹性波反散射问题有反障碍物问题和反源问题；粗糙表面的弹性波反散射问题又有局部粗糙面和无穷粗糙面两种. 另一方面，在勘探地球物理领域，弹性波是在地表以下传播的，这是一个半空间模型. 因此，本文将联系实际，从数学的角度针对半空间弹性波散射问题和反散射问题加以研究，特别是考虑如何从数值上构造一个高效稳定的算法来重构障碍物. 而且，该直接成像法是基于逆时偏移的思想，不需要事先知道障碍物是否可穿透以及其不可穿透时边界条件的先验信息.

1.1 研究背景

散射理论研究在二十世纪的数学物理学界占据了非常重要的地位. 通俗地讲，弹性波的散射问题，就是研究当入射波（地震源、可控震源）从一种弹性介质进入另一种弹性介质或是碰到障碍物（散射体）时产生的效应. 与声波、电磁波散射问题提法类似，弹性波散射问题只是把控制方程换成了 Navier 方程. 特别地，如果我们把弹性波总场 $u(x)$ 看作是入射波 $u^i(x)$ 和散射波 $u^s(x)$ 的和，那么正散射问题就是根据入射波 $u^i(x)$ ，障碍物的物理特性以及弹性波方程去求解散射波 $u^s(x)$. 本文更感兴趣的反散射问题就是利用散射波 $u^s(x)$ 或是 $u^s(x)$ 在无穷远处的渐近形式来重构障碍物的位置、大小、形状. 在研究反散射问题前，对正散射问题有一个清晰的理解是必不可少的. 因此，在后文中，我们先来研究半空间弹性波正散射问题.

1.2 半空间弹性波散射问题介绍

传统的地震波数据处理常常是基于声波方程的，这是由于假设地球中只能传播压缩波 (compressional waves)，又称 p 波 [5]. 尽管有了这种假设可以使得实际操作可以减少计算量，且便于理论分析，但是这不利于完整地利用地震波信息. 事实上，由于地球是一个弹性体，同时存在 p 波和 s 波，因此我们可以将地下看成是一个填充弹性介质的半空间. 弹性波的传播主要是用弹性波方程描述的. 在本文中，我们将重点研究二维半空间时谐弹性波散射问题与反散射问题. 令 x 为半空间中的一个质点，即

$$x := (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}_+^2 := \{(y_1, y_2)^T \in \mathbb{R}^2 : y_2 > 0\}.$$

令 $u(x) := (u_1(x), u_2(x)) \in \mathbb{C}^2$ 为在 x 处的位移. 假设弹性介质是线性各项同性均匀介质，其 Lamé 常数 λ 和 μ 满足 $\lambda > 0, \mu > 0$ ，密度函数为 ρ ，角频率为 $\omega > 0$ ，则位移函数满足如下时谐弹性波方程：

$$\nabla \cdot \sigma(u(x)) + \omega^2 u(x) = -f(x),$$

这里 $f(x)$ 是点 x 处的外力，应力张量 $\sigma(u) \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ 是 2 阶张量，它与应变张量 $\varepsilon(u) \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ 一起满足如下本构关系 (胡克定律)：

$$\begin{aligned}\sigma(u) &= 2\mu\varepsilon(u) + \lambda \operatorname{div} u \mathbb{I}, \\ \varepsilon(u) &= \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T).\end{aligned}$$

其中 $\mathbb{I} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 是二阶恒等矩阵， ∇u 是位移梯度张量，且其每个元素为

$$(\nabla u)_{ij} = \partial u_i(x) / \partial x_j.$$

为了表述简便，我们在后文中都假设背景介质的密度为 $\rho = 1$. 特别地， $\sigma(u)v$ 表示在方向 v 上的应力. 为了简便，我们定义弹性波算子：

$$\Delta_e u := (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u + \mu \Delta u.$$

易得 $\Delta_e u(x) = \nabla \cdot \sigma(u(x))$. 于是，弹性波 $u(x)$ 满足如下弹性波方程：

$$\Delta_e u(x) + \rho \omega^2 u(x) = -f(x). \quad (1.1)$$

除此之外弹性波在地表满足自由表面边界条件 [6, 7] 即法向应力为零. 有了如上表述，我们就可以提出如下半空间弹性波散射问题. 假设障碍物 $D \subset \mathbb{R}_+^2$ 嵌入在

半空间中, 且为有界 Lipschitz 区域. 在本文中, 我们主要考虑考虑了满足 Dirichlet 边界条件的不可穿透障碍物, 至于不可穿透情形下其它边界条件或是可穿透情形都可以被类似叙述. 进一步, 我们假设入射波是由位于 x_s 处的点源沿着极化方向 $q \in \mathbb{R}^2$ 激发, 于是相对应的弹性波总场 $u_q(x, x_s)$ 满足如下半空间弹性波方程:

$$\Delta_e u_q(x, x_s) + \omega^2 u_q(x, x_s) = -\delta_{x_s}(x) \quad \text{in } \mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{D}, \quad (1.2)$$

$$u_q(x, x_s) = 0 \quad \text{on } \Gamma_D, \quad (1.3)$$

$$\sigma(u_q(x, x_s)) e_2 = 0 \quad \text{on } \Gamma_0, \quad (1.4)$$

这里 Γ_D 表示障碍物的表面, 且令其外单位法向量为 $\nu(x)$,

$$\Gamma_0 = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$$

为半空间 \mathbb{R}_+^2 的表面, e_i 为沿着 x_i 轴的单位向量, $i = 1, 2$. 特别地, 当障碍物满足 Neumann 边界条件时, 则将式 (1.3) 替换成:

$$\sigma(u_q(x, x_s)) \cdot \nu(x) = 0 \quad \text{on } \Gamma_D,$$

当障碍物满足阻抗边界条件时, 则将式 (1.3) 替换成:

$$\sigma(u_q(x, x_s)) \cdot \nu(x) + i\eta(x)u_q(x, x_s) = 0 \quad \text{on } \Gamma_D,$$

这里在 Γ_D 上, $\eta \in L^\infty(\Gamma_D)$ 以及 $\eta > 0$. 若障碍物 D 是可穿透的, 则将式 (1.2)-(1.3) 替换成:

$$\Delta_e u_q(x, x_s) + \omega^2 n(x)u_q(x, x_s) = -\delta_{x_s}(x) \quad \text{in } \mathbb{R}_+^2,$$

这里 $n(x) \in L^\infty(\mathbb{R}_+^2)$ 是正函数, 且当 $x \notin D$ 时, $n(x) = 1$.

令 $\mathbb{N}(x, y)$ 为半空间中弹性波方程的 Green 函数且在 Γ_0 上满足自由边界条件 (Neumann 边界条件), 其中 $\mathbb{N}(x, y)q$ 满足如下方程:

$$\Delta_e [\mathbb{N}(x, y)q] + \omega^2 [\mathbb{N}(x, y)q] = -\delta_y(x)q \quad \text{in } \mathbb{R}_+^2,$$

$$\sigma(\mathbb{N}(x, y)q) e_2 = 0 \quad \text{on } \Gamma_0,$$

为了简便起见, 后文中统一称 $\mathbb{N}(x, y)$ 为半空间弹性波 Neumann Green 函数. 令入射场 $u_q^i(x, x_s) = \mathbb{N}(x, x_s)q$, 于是散射场 $u_q^s(x, x_s) = u_q(x, x_s) - \mathbb{N}(x, x_s)q$ 满足如

下方程:

$$\Delta_e u_q^s(x, x_s) + \omega^2 u_q^s(x, x_s) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{D}, \quad (1.5)$$

$$u_q^s(x, x_s) = -\mathbb{N}(x, x_s)q \quad \text{on } \Gamma_D, \quad (1.6)$$

$$\sigma(u_q^s(x, x_s))e_2 = 0 \quad \text{on } \Gamma_0, \quad (1.7)$$

为了保证方程 (1.5)-(1.7) 的适定性, 一般的做法是在无穷远处要求散射场满足某种边界条件或是辐射条件来保证散射波是外行波 (outgoing wave). 通常在全空间散射问题中, 散射场 $u^s(x)$ 通过 Helmholtz 分解可以分成横波 u_s^s 及纵波 u_p^s , 即有

$$\begin{aligned} u_s^s &= \frac{1}{k_s^2} \nabla \times \nabla \times u^s, \\ u_p^s &= -\frac{1}{k_p^2} \nabla \nabla \cdot u^s. \end{aligned}$$

在全空间中除障碍物 D 以外的区域 u_s^s 和 u_p^s 分别满足如下方程:

$$\Delta u_s^s + k_s^2 u_s^s = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D},$$

$$\Delta u_p^s + k_p^2 u_p^s = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}.$$

这里 k_s 为横波波数, k_p 为纵波波数, 且有

$$k_s = \frac{\omega}{\sqrt{\mu}} = \frac{\omega}{c_s}, \quad k_p = \frac{\omega}{\sqrt{\lambda + 2\mu}} = \frac{\omega}{c_p}.$$

其中 c_s , c_p 分别为横波波速和纵波波速. 这里的旋度算子, 针对标量函数 $w(x)$ 定义为

$$\nabla \times w(x) = (\partial_{x_2} w(x), -\partial_{x_1} w(x))^T.$$

针对二维矢量函数 $\mathbf{v}(x) = (v_1(x), v_2(x))^T$ 定义为

$$\nabla \times \mathbf{v}(x) = \partial_{x_1} v_2(x) - \partial_{x_2} v_1(x).$$

在全空间情形下, 要求 $u_q^s(x)$ 满足著名的 Kupradze's 辐射条件 [8, 9], 即要求横波 u_s^s , 纵波 u_p^s 满足 Sommerfeld 辐射条件 [10, 11]:

$$\begin{aligned} \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{1/2} \left(\frac{\partial u_s^s(x)}{\partial |x|} - \mathbf{i} k_s u_s^s(x) \right) &= 0, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{1/2} \left(\frac{\partial u_p^s(x)}{\partial |x|} - \mathbf{i} k_p u_p^s(x) \right) &= 0. \end{aligned}$$

在该辐射条件下，全空间弹性波散射问题的适定性已经得到了完善的研究 [8, 12, 13]. Kupradze's 辐射条件保证了弹性波在全空间中是向外传播的，而排除了内行波，利用 Rellich 引理的推广 [11, 14]，可以证明在全空间情形下散射解的唯一性. 关于全空间弹性波散射问题解的存在性，文献 [8] 针对光滑散射体给出了证明. 然后，针对 Lipschitz 边界，Bramble 和 Pasciak [13] 对于 Dirichlet 边界条件给出了证明了. 除此之外，对于 Neumann 边界条件，Chen 等利用极限吸收原理证明了全空间弹性波散射问题解的适定性，该方法对我们研究半空间弹性波散射问题有所启发.

由于自由表面条件的存在，半空间弹性波中存在 Rayleigh 表面波 [15]，此时 Kapradze's 辐射条件不再适用. 所谓 Rayleigh 波就是是一种沿着半空间表面传播，在往半空间内部传播时指数式衰减的表面波. 虽然 Sommerfeld 辐射条件 [11, 16] 或是 kapradze's 辐射条件能保证半空间弹性波散射问题的解的唯一性，但是由于这种条件不能刻画 Rayleigh 表面波的传播模式，所以不能保证解的存在性. 事实上，从后文中的证明可以看到，Rayleigh 表面波的传播波速与横波和纵波的波速也是不同的. 在文献 [17] 中，Nédélec 等人通过研究半空间弹性波 Neumann Green 函数在无穷远处的渐近性质，提出了新的弹性波辐射条件，并且在该辐射条件下作者证明了如下方程解的存在唯一性

$$\begin{aligned} \Delta_e u_q(x, x_s) + \rho \omega^2 u_q(x, x_s) &= -\delta_{x_s}(x) \quad \text{in } \mathbb{R}_+^2, \\ \sigma(u_q(x, x_s)) e_2 &= f \quad \text{on } \Gamma_0, \end{aligned}$$

其中应力源 f 在 Γ_0 上存在紧支集.

在文献 [18, 19] 中，Arens 针对满足固支边界 (clamped or rigid boundary) 的粗糙表面弹性波散射问题，提出了上行辐射条件 (upwards propagating radiation condition). 该辐射条件给出了一种显式的 Dirichlet-to-Neumann 映射，可以用来将无穷的半空间截断成包含粗糙表面的条状空间. 而 Charalambopoulos, Gintides 和 Kiriaki [20] 利用了角谱表示法作为辐射条件，将 Arens [18] 的工作推广到自由表面情形，但是该文章缺少严格的数学证明.

进一步，针对满足自由表面边界条件的半空间层状介质，Alem 和 Chorfi [21] 给出了一个不同的辐射条件. 他们的辐射条件不再作用于单独的横波和纵波，而是描述混合波的法向应力和位移在无穷远处的关系，类似 Nédélec [17] 中的辐射条件. 该辐射条件的优势是类似于声波中的 Sommerfeld 辐射条件，它可以很好地适用于与弹性波中的积分公式 (Betti's 公式 [8]) 的整合. 然而，该文献中作者

还强行施加了一个无穷远处的衰减条件 $\mathbf{O}(1/R)$, 因此此时 Rayleigh 表面波无法满足该条件.

类似在声波散射问题的研究, 全局积分辐射条件 [11] 与 Sommefeld 辐射条件等价, Madyarov 和 Guzina [22] 将辐射条件表示成在一个半径足够大的半圆上的积分的极限,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^+} (\sigma(\mathbb{N}(x, y)e_i)\hat{r}) \cdot u(x) - (\mathbb{N}(x, y)e_i) \cdot (\sigma(u)\hat{r}) ds(x) = 0,$$

这里 $S_r^+ := \{x \in \mathbb{R}_+^2 \mid \|x\| = r^2\}$, $\hat{r} = x/r$ 和 $y \in \mathbb{R}_+^2$. 该辐射条件需要用到满足相应半空间表面边界条件的 Green 函数, 其好处是可以直接得到散射波在障碍物表面的积分表示. 然而该文章在证明散射解的唯一性前假设了解的存在性.

因此, 通过研究辐射条件来给出半空间弹性波散射解的适定性, 还有很多困难没有解决. 在本文中, 我们不再对半空间弹性波障碍物散射问题研究相应的辐射条件. 我们受文献 [23–25] 的启发, 将利用极限吸收原理来定义半空间弹性波散射问题的解. 具体地, 我们考虑 $u_{q,\varepsilon}^s$ 是满足角频率为 $\omega(1 + \mathbf{i}\varepsilon)$ 的半空间弹性波方程, 即

$$\begin{aligned} \Delta_\varepsilon u_{q,\varepsilon}^s(x, x_s) + \omega^2(1 + \mathbf{i}\varepsilon)^2 u_{q,\varepsilon}^s(x, x_s) &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{D}, \\ u_{q,\varepsilon}^s(x, x_s) &= -\mathbb{N}(x, x_s)q \quad \text{on } \Gamma_D, \\ \sigma(u_{q,\varepsilon}^s(x, x_s))e_2 &= 0 \quad \text{on } \Gamma_0. \end{aligned}$$

于是, 方程 (1.5)-(1.7) 中的散射解 $u_q^s(x, x_s)$ 定义为 $u_{q,\varepsilon}^s(x, x_s)$ 在 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 时某种范数意义下的极限, 我们将在第 3 章中做详细讨论. 特别地, 在全空间情形下, 利用极限吸收原理定义的散射解和满足 Kapradze's 条件的解是一致的, 因此利用极限吸收原理来定义散射解是一种合理的推广.

1.3 半空间弹性波反散射问题介绍

本文主要对上述半空间弹性波散射问题的反问题感兴趣. 我们在远离障碍物的接收点 x_r 上测量数据 $u_q^s(x_r, x_s)$. 然后, 我们通过接收到的数据来重构出障碍物的位置, 大小, 形状. 特别地, 受地震勘探模型启发 (如图1.1所示), 我们假设发射点和接收点都在半空间表面, 即 $x_s \in \Gamma_0, x_r \in \Gamma_0$. 其中, 为了使式子 (1.2) 中的源项 $\delta_{x_s}(x)$ 有意义, 我们这里将 $x_s \in \Gamma_0$ 看作是 $x_s \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{D}$ 趋向于 Γ_0 的极限.

由于反问题是高度线性不适定问题 [26], 换言之, 如果我们测量到的数据不准确或是有一个微小的扰动, 都会可能导致相对应的障碍物带来巨大的误差. 因

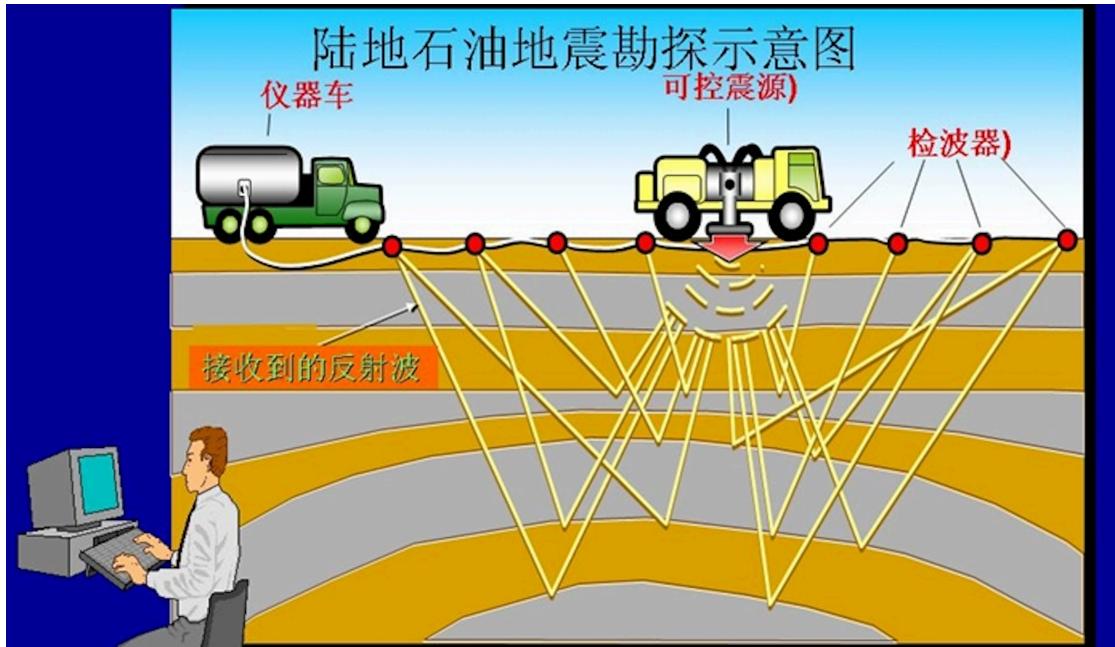


图 1.1 地震波勘探模型.

此对反问题做适当形式的转化，是求解反问题的重要方法。类似于声波、电磁波、弹性波反散射问题的方法主要也分为迭代法和直接成像法两种。

迭代法是一种优化手段，具体是将观察数据与初值参数构成目标函数，然后将目标函数最小化的过程。抽象为如下表达式：

$$\min_{\mathbf{m}} dist(\mathbf{d}^{obs}, \mathbf{Lm}),$$

其中 \mathbf{m} 表示障碍物边界参数或是非均匀介质参数， \mathbf{d}^{obs} 表示观测数据， \mathbf{L} 表示弹性波方程的解算子， $dist(\cdot, \cdot)$ 表示某种距离。对于全空间弹性波障碍物散射问题，Li [27] 和 Bao [28] 提出了利用多频散射数据，基于区域导数的牛顿迭代法。针对半空间非均匀弹性介质，Mora 等人 [29–31] 提出了最小二乘法反演介质参数的方法。这些数值迭代方法的优势就是可以定量得到障碍物的边界或是介质参数信息，但是要求一定的先验信息，例如边界条件等。由于每一次迭代都需要解一次弹性波正问题，这无疑是相当巨大的计算量。此外，这类优化问题一般都是非凸的，这导致初值的选择，迭代收敛性的证明都是比较困难的问题。

直接成像法的基本思想是构造一个指示性成像函数，代入观测数据后，该函数值在远离障碍物边界时逐渐衰减；在靠近边界时，函数值趋于峰值。针对二维全空间弹性波反障碍物散射问题，Arens [32] 将线性采样法 (Linear Sampling Method) 从声波情形推广到了弹性波情形。Alves 和 Kress [33]，Arens [32]，Charalambopoulos [34]，以及 Hu, Kirsch [35] 等发展了弹性波情形下的分解法 (Factor-

ization Method). Ji 等 [36] 基于分解法提出了直接成像法，并证明了该函数在障碍物边界上有下界。然而，无论是线性采样法还是分解法，至今都不能应用于弹性波反散射问题的近场数据。这是因为，我们没有办法将接收到的近场混合波数据分解成 p 波和 s 波，除非我们能得到接收点附近领域内的所有数据。Guzina 等人 [37] 利用拓扑导数方法对弹性波非均匀介质逆散射问题进行重构。Chen 和 Huang [6] 针对全空间弹性介质扩展障碍物成像问题，提出了单频加权弹性波逆时偏移方法，并且给出了弹性波逆时偏移方法的分辨率分析，该理论结果表明成像函数均为正值，从而保证了算法的稳定性。

目前，在数学物理领域中，对弹性波反散射问题的讨论主要集中于上述的全空间反障碍物散射问题，以及粗糙曲面反散射问题 [4, 38–40]，据本文作者所知，至今还极少有数学方面的文献来讨论半空间障碍物模型的。然而，在地球物理领域中，地震波勘探就是一个典型的半空间弹性波反散射模型。因此，本文将联系实际模型，基于逆时偏移算法提出半空间弹性波反散射问题的直接成像法。

1.4 逆时偏移方法简介

逆时偏移 (Reverse Time Migration) 是源于勘探地球物理领域的一种叠前深度偏移方法。在逆时偏移流行之前，单程波方程偏移法 [41, 42] 一直是偏移研究的主要课题。然而，为了将波动方程分解成单程的上行波方程和下行波方程，需要引入平方根算子 [43–45]。该平方根算子是一个拟微分算子，在数值计算时，数值计算时需要用一系列的积分、微分算子来逼近，这给单程波方程的计算带来非常大的困难。于是，基于全波方程的逆时偏移法在 1983 年被 Whitmore [46], Baysal [47] 和 Mcmechan [48] 先后提出。早期，由于计算资源的匮乏，工程师们把接收到的弹性波数据利用声波方程来进行逆时偏移 [49–53]，但是由于弹性波是包含两种不同波数的 s 波和 p 波的耦合波，两种波携带着不同的位移信息 [5]。因此，发展利用弹性波全波方程的逆时偏移方法是必然的。Chang 和 McMechan [54] 利用弹性波方程将接收到的弹性波数据时逆地外推到地表下，然后提出了激励时间成像条件 (Excitation time)，而 Hokstad[55] 利用 Lamé 势方法作为成像条件。总之，这两种成像条件都是互相关成像条件的特殊情形 [5]。此外，由于弹性波包含 s 波和 p 波，地球物理学家发展出了两种基于 Helmholtz 分解的逆时偏移算法 [5, 56–58]。

第一种方法是将接收到的弹性波数据，反传到接收面附近的浅层区域，利用 Helmholtz 分解将耦合波场分解成 s 波向量势和 p 波标量势 [59, 60]。随后，利用

相应的 s 波波数与 p 波波数的声波方程将分解后的波正传回接收面. 最后利用传统的声波逆时偏移算法, 对分解完的数据分别进行相应波数的声波反传, 随之与相应波数的声波点源互相关成像.

第二种方法是先用弹性波全波方程将在表面接收到的位移数据反传到地下, 然后将反传后的弹性波与点源发出的弹性波都进行波场分解, 最后对分解后的入射波与反传波作互相关 [61].

总之, 逆时偏移算法的基本大致可以分成两步, 第一步是将接收到的波数据作为在接收面上的 Dirichlet 边界条件, 而后时逆地反传到背景介质中, 第二步是将入射波和反射波作互相关得出成像函数. 我们在此强调, 本文中我们研究的逆时偏移算法不使用波场分解, 而是直接利用接收到的耦合的混合波场数据, 经过反传后直接与入射波做互相关. 特别地, 我们的成像函数为(详见 (4.18)):

$$\hat{I}_d(z) = \operatorname{Im} \sum_{q=e_1, e_2} \int_{\Gamma_0^d} \int_{\Gamma_0^d} [\mathbb{T}_D(x_s, z)^T q] [\mathbb{T}_D(x_r, z)^T \overline{u_q^s(x_r, x_s)}] ds(x_r) ds(x_s).$$

这里 $\Gamma_0^d = \{x \in \Gamma_0 : x_1 \in (-d, d)\}$, $d > 0$, 是半空间表面接收数据的区间, $\mathbb{T}_D(x, z)$ 是 Dirichlet Green 函数在 Γ_0 上 e_2 方向的应力张量(详见 (3.48)).

关于逆时偏移方法的数学理论分析, 最早是由 Beylkin [62–64] 基于广义 Radon 变换, 采用高频渐近假设或者几何光学近似给出的渐近分析. 但是, 在实际的工程情况下, 这些假设的条件一般都不能满足. 近几年来, Chen 等 [65–67] 针对全空间中声波和电磁波反障碍物散射问题, 研究了相应的单频逆时偏移方法来重构障碍物. 他们基于 Helmholtz-Kirchhoff 等式, 在不需要高频假设或几何光学近似的前提下, 对算法的分辨率做出了严格分析, 并证明了该成像函数恒为正函数, 从而保证了该数值方法的稳定性. 在文献 [68] 中, Chen 等针对平行平板声波波导反散射问题, 提出了基于逆时偏移算法的直接成像法. 在该文章中, 作者提出了广义的 Helmholtz-Kirchhoff 等式, 并由此给出了成像分辨率的理论结果. 进一步, 文献 [69] 中作者考虑声波半空间反散射问题的逆时偏移方法, 并提出了全新的点扩散函数, 并且给出了分辨率的理论分析. 特别地, 该文章中给出了孔径选取的标准, 以及说明了半空间情形下只能对障碍物面向接收面的那部分进行成像, 这给本文的研究做了很好的铺垫.

由于在实际的工程应用中, 获取观测数据的强度或振幅(无相位数据)比获取该观测数据的相位信息要容易很多. 由此, Chen 等 [70–73] 基于逆时偏移算法, 针对全空间声波, 电磁波以及半空间声波反散射问题, 提出了无相位成像算法. 此外, 当障碍物远离发射面和接收面时, 证明了该无相位成像算法与原本的逆时

偏移成像方法近似等价，并且给出了相应的误差分析.

1.5 本文内容安排

本论文安排如下：

第二章中我们将介绍一些后文会涉及的函数空间，并且叙述后文会用到的经典数学定理.

第三章中我们利用 Fourier 变换推导出 Neumann Green 函数和 Dirichlet Green 函数，并且研究 Green 函数的相关性质. 而后，通过极限吸收原理研究半空间弹性波散射问题解的适定性.

第四章中我们首先介绍针对点源成像的点扩散函数，然后提出重构半空间扩展障碍物的基于弹性波逆时偏移方法的直接成像法，最后利用点扩散函数和散射系数逼近给出了该障碍物重构算法的分辨率分析.

第五章中我们针对本论文中的研究进行总结，并且叙述相关可待研究的问题.

第 2 章 基础知识

2.1 函数空间

我们首先引入后文需要用的记号和 Sobolev 空间 [74]. 令 D 是 \mathbb{R}^2 中的 Lipschitz 区域, 定义 Γ_D 是 D 的边界. 然后, 令 $L^2(D)$ 为 D 上 Lebesgue 平方可积函数构成的 Hilbert 空间, 即

$$L^2(D) = \{u(x) : \int_D |u|^2 dx < \infty\}.$$

该空间的内积和范数定义如下:

$$\langle u, v \rangle = \int_D u(x) \overline{v(x)} dx, \quad \|u\|_{L^2(D)} = \langle u, u \rangle^{1/2}.$$

关于任意整数 $d \geq 0$, 可以定义 Sobolev 空间 $H^d(D)$ 为:

$$H^d(D) = \{u(x) : \partial^\alpha u \in L^2(D), |\alpha| \leq d\},$$

其中 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, α_1, α_2 为非负整数. 当区域 D 有界时, 我们引入如下 $H^1(D)$ 的加权范数:

$$\|u\|_{H^1(D)} = (\|\nabla \phi\|_{L^2(D)}^2 + d_D^{-2} \|\phi\|_{L^2(D)}^2)^{1/2},$$

其中 d_D 是有界区域 D 的直径. 进一步, 定义边界上的分数次 Sobolev 空间 $H^{1/2}(\Gamma_D)$ 为:

$$H^{1/2}(\Gamma_D) = \{v(x) : \|v\|_{L^2(\Gamma_D)} < \infty, |v|_{\frac{1}{2}, \Gamma_D} < \infty\},$$

其中有:

$$|v|_{\frac{1}{2}, \Gamma_D} = \left(\int_{\Gamma_D} \int_{\Gamma_D} \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^2} ds(x) ds(y) \right)^{1/2}.$$

且 $H^{1/2}(\Gamma_D)$ 加权范数定义为:

$$\|v\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)} = (d_D^{-1} \|v\|_{L^2(\Gamma_D)}^2 + |v|_{\frac{1}{2}, \Gamma_D}^2)^{1/2}.$$

于是, 通过尺度变换技巧和迹定理, 易得如下不等式估计 [69, corollary 3.1]

引理 2.1.1 假设 D 是有界 Lipschitz 区域, 对于任意 $\phi \in C^1(\bar{D})^2$ 存在与 d_D 无关的常数 $C > 0$, 成立如下不等式:

$$\|\phi\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)} + \|\sigma(\phi)v\|_{H^{-1/2}(\Gamma_D)} \leq C \max_{x \in \bar{D}} (|\phi(x)| + d_D |\nabla \phi(x)|). \quad (2.1)$$

由于散射问题都是定义在无穷区域上的，所以我们还需要定义无穷区域上的加权 Sobolev 空间。假设 Ω 是无界区域，定义加权 Lebesgue 平方可积函数空间 $L^{2,s}(\Omega)$ 如下：

$$L^{2,s}(\Omega) = \{v \in L^2_{\text{loc}}(\Omega) : (1 + |x|^2)^{s/2} v \in L^2(\Omega)\},$$

且相应的范数为：

$$\|v\|_{L^{2,s}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} (1 + |x|^2)^s |v|^2 dx \right)^{1/2}.$$

于是，我们可以定义加权 Sobolev 空间 $H^{1,s}(\Omega), s \in \mathbb{R}$ 为

$$H^{1,s}(\Omega) = \{v(x) : v(x) \in L^{2,s}(\Omega), \nabla v(x) \in L^{2,s}(\Omega)\},$$

且其相应的范数为

$$\|v\|_{H^{1,s}(\Omega)} = (\|v\|_{L^{2,s}(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L^{2,s}(\Omega)}^2)^{1/2}.$$

在全文中，针对 Sobolev 空间 X ，为简便起见我们把向量值空间 X^2 或是张量值空间 $X^{2 \times 2}$ 仍然记作 X ，而且 $X, X^2, X^{2 \times 2}$ 的范数统一表示成 $\|\cdot\|_X$ 。

定义 2.1.1 (Cauchy 主值) 假设 $c \in [a, b]$ 是函数 $f(x)$ 的奇点，且对于任意 $\varepsilon > 0$ ， $f(x)$ 在区间 $(a, c - \varepsilon)$ 或 $(c + \varepsilon, b)$ 上可积。若如下极限存在且有限，

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx.$$

则称该极限为 $\int_a^b f(x) dx$ 的 Cauchy 主值。

2.2 基本定理

引理 2.2.1 (Hölder 不等式) 假设 n 为正整数，且 $p, q \in (1, +\infty)$ 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ，则对于 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 和 $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ 成立如下不等式：

$$\|f \cdot g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

引理 2.2.2 (Parseval 等式) 假设 n 为正整数，对任意 $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ，定义 Fourier 变换 $\hat{f}(\xi)$ 为在范数 $\|\cdot\|_{L^2_{\mathbb{R}^n}}$ 意义下的极限：

$$\hat{f}(\xi) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\|x\| \leq R} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx.$$

于是成立等式,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot \overline{g(x)} dx = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \cdot \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi.$$

这里 $\overline{g(x)}$ 表示函数 $g(x)$ 的复共轭.

引理 2.2.3 (Betti 公式) 假设 D 为有界 Lipschitz 区域且其单位外法向为 ν , 对于 $u \in H^1(D)^2$ 和 $\Delta_e w \in L^2(D)^2$, 成立

$$\int_D u \cdot \Delta_e w dx = \int_{\partial D} u \cdot \sigma(w) \nu ds(x) - \int_D \lambda (\nabla \cdot u)(\nabla \cdot w) + 2\mu \varepsilon(u) : \varepsilon(w) dx,$$

这里关于 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $i, j = 1, 2$, 有 $A : B = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} b_{ij}$. 特别地, 如果进一步有 $\Delta_e u \in L^2(D)^2$, 则成立:

$$\int_D u \cdot \Delta_e w - \Delta_e u \cdot w dx = \int_{\partial D} u \cdot \sigma(w) \nu - \sigma(u) \nu \cdot w ds(x). \quad (2.2)$$

第3章 半空间弹性波散射问题

正散射问题的研究一般包括 Green 函数的推导及其性质研究和散射解的适定性. 一般 Green 函数的推导都是通过对偏微分方程其中一个变量作 Fourier 变换后, 得到常微分方程组, 然后结合基本解得出. 特别地, 二维弹性波方程的基本解 $\mathbb{G}(x, y)$ [8] 为:

$$\mathbb{G}(x, y) = \left(\frac{1}{\mu} g_{k_s}(x, y) \mathbb{I} + \frac{1}{\omega^2} \nabla \nabla g_{k_s}(x, y) \right) - \frac{1}{\omega^2} \nabla \nabla g_{k_p}(x, y) \quad (3.1)$$

$$:= \mathbb{G}_s(x, y) + \mathbb{G}_p(x, y), \quad (3.2)$$

这里

$$g_k = \frac{\mathbf{i}}{4} H_0^{(1)}(k|x - y|)$$

是波数为 k 的 Helmholtz 方程的基本解 [11], 且 $H_0^{(1)}(t)$ 是零阶第一类 Hankel 函数 [75]. 关于散射问题的适定性研究, 一般都是通过研究 Green 函数在无穷远处的渐近性质, 然后据此推出辐射条件来保证方程的唯一性. 而存在性和稳定性一般是用变分方法或是边界积分法, 然后通过经典的 Riesz–Fredholm 理论 [76, 77] 结合唯一性得到. 然而由于横波和纵波在半空间表面初的耦合以及表面波的存在, 很难得出一个既保证唯一性又保证存在性的辐射条件. 因此, 本文中我们不再依赖辐射条件, 而是利用极限吸收原理 [23, 78] 来得出方程的适定性. 在本章最后, 我们还将展示, 当障碍物远离半空间表面时, 其相应的散射解和在全空间情形下的散射解之间的关系.

3.1 半空间弹性波 Green 函数

由于本文研究的正散射问题中, 弹性波需要在半空间表面 Γ_0 上满足 Neumann 边界条件 (1.4), 所以我们先来研究满足 Neumann 边界条件的半空间 Green 函数. 之后, 由于逆时偏移算法中需要计算反传波, 因此我们还需要推导满足 Dirichlet 边界条件的半空间 Green 函数及其 e_2 方向的应力张量.

3.1.1 Neumann Green 函数

设源点 $y \in \mathbb{R}_+^2$, 引入半空间弹性波 Neumann 零边界格林函数 $\mathbb{N}(x, y)$, 对任意向量 $q \in \mathbb{R}^2$, 其满足如下方程:

$$\Delta_e[\mathbb{N}(x; y)q] + \omega^2[\mathbb{N}(x, y)q] = -\delta_y(x)q \text{ in } \mathbb{R}_+^2, \quad (3.3)$$

$$\sigma(\mathbb{N}(x, y)q)e_2 = 0 \text{ on } \Gamma_0, \quad (3.4)$$

其中 (3.4) 代表该 Green 函数满足半空间自由边界条件, $\delta_y(x)$ 代表位于点 y 的 Dirac 源. 由于半空间的特性, 我们将利用对 x_1 变量作 Fourier 变换的方式来推导 Green 函数, 令

$$\hat{\mathbb{N}}(\xi, x_2; y_2) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{N}(x_1, x_2; y) e^{-i(x_1-y_1)\xi} dx_1, \quad \forall \xi \in \mathbb{C}, \quad (3.5)$$

于是, 通过简单的推导计算, 对基本解 $\mathbb{G}(x, y)$ 的 x_1 变量做 Fourier 变换后有 $\hat{\mathbb{G}}(\xi, x_2; y_2) = \hat{\mathbb{G}}_s(\xi, x_2; y_2) + \hat{\mathbb{G}}_p(\xi, x_2; y_2)$ 及

$$\hat{\mathbb{G}}_s(\xi, x_2; y_2) = \frac{i}{2\omega^2} \begin{pmatrix} \mu_s & -\xi \frac{x_2-y_2}{|x_2-y_2|} \\ -\xi \frac{x_2-y_2}{|x_2-y_2|} & \frac{\xi^2}{\mu_s} \end{pmatrix} e^{i\mu_s |x_2-y_2|}, \quad (3.6)$$

$$\hat{\mathbb{G}}_p(\xi, x_2; y_2) = \frac{i}{2\omega^2} \begin{pmatrix} \frac{\xi^2}{\mu_p} & \xi \frac{x_2-y_2}{|x_2-y_2|} \\ \xi \frac{x_2-y_2}{|x_2-y_2|} & \mu_p \end{pmatrix} e^{i\mu_p |x_2-y_2|}, \quad (3.7)$$

这里 $\mu_\alpha = (k_\alpha^2 - \xi^2)^{1/2}$, $\alpha = s, p$, 其中 $k_p = \omega/\sqrt{\lambda + 2\mu}$, $k_s = \omega/\sqrt{\mu}$ 为 p 波和 s 波的波数. 为了利用基本解 $\mathbb{G}(x, y)$ 在 $x = y$ 处的奇性, 我们令:

$$\mathbb{N}_c(x, y) = \mathbb{N}(x, y) - (\mathbb{G}(x, y) - \mathbb{G}(x, y')),$$

其中 $y' = (y_1, -y_2)$ 为 y 关于 x_1 轴的镜像点. 于是由式 (3.3-3.4), 可得 $\mathbb{N}_c(x, y)$ 满足如下方程:

$$\Delta_e[\mathbb{N}_c(x; y)q] + \omega^2[\mathbb{N}_c(x, y)q] = 0 \text{ in } \mathbb{R}_+^2, \quad (3.8)$$

$$\sigma(\mathbb{N}_c(x, y)q)e_2 = -\sigma(\mathbb{G}(x, y) - \mathbb{G}(x, y')) \text{ on } \Gamma_0. \quad (3.9)$$

注 3.1.1 在全篇论文中, 我们假设对于任意的 $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z^{1/2}$ 是多值函数 \sqrt{z} 的如下解析分支: $\operatorname{Im}(z^{1/2}) \geq 0$, 这对应于在复平面取右半实轴为割支线. 则对于 $z = z_1 + iz_2$, $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$,

$$z^{1/2} = \operatorname{sgn}(z_2) \sqrt{\frac{|z| + z_1}{2}} + i \sqrt{\frac{|z| - z_1}{2}}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{R}}_+. \quad (3.10)$$

当 z 位于右半实轴的上沿或是下沿时, 取 $z^{1/2}$ 为 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 时 $(z + i\varepsilon)^{1/2}$ 或是 $(z - i\varepsilon)^{1/2}$ 的极限即可.

通过对式(3.8-3.9)两边作 Fourier 变换, 我们得到关于变量 x_2 的常系数常微分方程组:

$$\mu \frac{d^2(e_1^T \hat{\mathbb{N}}_c q)}{dx_2^2} + i(\lambda + \mu)\xi \frac{d(e_2^T \hat{\mathbb{N}}_c q)}{dx_2} + (\omega^2 - (\lambda + 2\mu)\xi^2)(e_1^T \hat{\mathbb{N}}_c q) = 0, \quad (3.11)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{d^2(e_2^T \hat{\mathbb{N}}_c q)}{dx_2^2} + i(\lambda + \mu)\xi \frac{d(e_1^T \hat{\mathbb{N}}_c q)}{dx_2} + (\omega^2 - \mu\xi^2)(e_2^T \hat{\mathbb{N}}_c q) = 0. \quad (3.12)$$

由于我们要求 $\hat{\mathbb{N}}(x, y)$ 为外行波, 因此方程(3.11)的解可以表示成如下两个向量:

$$\begin{bmatrix} i\mu_s \\ -i\xi \end{bmatrix} e^{i\mu_s x_2}, \quad \begin{bmatrix} i\xi \\ i\mu_p \end{bmatrix} e^{i\mu_p x_2},$$

的线性组合. 利用边界条件(3.12)及待定系数法, 我们得到:

$$\hat{\mathbb{N}}_c(\xi, x_2; y_2) = \frac{i}{\omega^2 \delta(\xi)} \sum_{\alpha, \beta=p, s} \mathbb{A}_{\alpha\beta}(\xi) e^{i(\mu_\alpha x_2 + \mu_\beta y_2)}, \quad (3.13)$$

其中 $\varphi(\xi) = k_s^2 - 2\xi^2$, $\delta(\xi) = \varphi(\xi)^2 + 4\xi^2\mu_s\mu_p$, 以及

$$\mathbb{A}_{ss}(\xi) = \begin{pmatrix} \varphi^2\mu_s & -4\xi^3\mu_s\mu_p \\ -\xi\varphi^2 & 4\xi^4\mu_p \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}_{sp}(\xi) = \begin{pmatrix} 2\xi^2\varphi\mu_s & -2\xi\varphi\mu_s\mu_p \\ -2\xi^3\varphi & 2\xi^2\varphi\mu_p \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{A}_{ps}(\xi) = \begin{pmatrix} 2\xi^2\varphi\mu_s & 2\xi^3\varphi \\ 2\xi\varphi\mu_s\mu_p & 2\xi^2\varphi\mu_p \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}_{pp}(\xi) = \begin{pmatrix} 4\xi^4\mu_s & \xi\varphi^2 \\ 4\xi^3\mu_s\mu_p & \varphi^2\mu_p \end{pmatrix}.$$

为了得到所需要的 Neumann Green 函数, 我们将对 $\hat{\mathbb{N}}(\xi, x_2; y_2)$ 做 Fourier 逆变换. 然而, 根据如下引理所述, 函数 $\delta(\xi)$ 在实轴上存在零点 [79, 80], 此时我们并不可以对其直接进行 Fourier 逆变换.

引理 3.1.1 Rayleigh 方程 $\delta(\xi) = 0$ 在复平面 \mathbb{C} 中有且仅有两个根且记为 $\pm k_R$, 其中 k_R 满足 $k_R > k_s$.

证明. 由前文注记中的(3.10), 易得 $\delta(\xi)$ 的割支线为 $C_l = \{\xi = \xi_1 + i\xi_2 \in \mathbb{C} : \xi_1 \in [-k_s, -k_p], \xi_2 = 0\}$ 和 $C_r = \{\xi = \xi_1 + i\xi_2 \in \mathbb{C} : \xi_1 \in [k_p, k_s], \xi_2 = 0\}$. 于是 $\delta(\xi)$ 在除 C_l 和 C_r 以外的区域解析. 而在割支线上, $\delta(\xi)$ 可表示成:

$$\delta(\xi) = (k_s^2 - 2\xi^2)^2 + i[4\xi^2(k_s^2 - \xi^2)^{1/2}(\xi^2 - k_p^2)^{1/2}], \quad \forall \xi \in C_l \cup C_r.$$

显然, $\delta(\xi)$ 在 $C_l \cup C_r$ 上没有零点. 又因为 $\delta(\pm k_s) > 0$, $\delta(\pm\infty) < 0$, 由函数的连续性得 $\delta(\xi)$ 在区间 $(-\infty, -k_s) \cup (k_s, \infty)$ 上至少存在两个零点, 且由于其对称性, 可以记为 $\pm k_R$. 下面, 我们将 C_l , C_r 的上下沿分别记为 C_l^\pm , C_r^\pm .

接下来, 利用幅角原理 [81] 可以说明 $\delta(\xi)$ 在整个复平面只存在两个零点. 令 Γ_R 为半径 R 充分大的圆. 我们考虑 \mathcal{D} 是被周线 Γ_R , Γ_l 以及 Γ_r 包围的区域. 其中 Γ_l 代表沿着 C_l^+ 从 $-k_s$ 到 $-k_p$ 及然后沿着 C_l^- 从 $-k_p$ 到 $-k_s$; 相应地, Γ_r 代表沿着 C_r^+ 从 k_p 到 k_s 及然后沿着 C_r^- 从 k_s 到 k_p . 因为 $\delta(\xi)$ 在整个整个复平面上没有极点, 我们可以通过幅角原理来计算其在区域 \mathcal{D} 中的零点个数 Z :

$$Z = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\delta'(\xi)}{\delta(\xi)} d\xi. \quad (3.14)$$

由式子 (3.10) 中的定义, 我们可以得出当 $\xi \in C_r^\pm$ 时 $\delta(\xi) = \delta^\pm(\xi)$, 其中

$$\delta^\pm(\xi) = (k_s^2 - 2\xi^2)^2 \mp i[4\xi^2(k_s^2 - \xi^2)^{1/2}(\xi^2 - k_p^2)^{1/2}] := f_1(\xi) \mp if_2(\xi).$$

于是可以有如下计算

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_r} \frac{\delta'(\xi)}{\delta(\xi)} d\xi &= \int_{k_p}^{k_s} \left(\frac{\delta'_+(\xi)}{\delta_+(\xi)} - \frac{\delta'_-(\xi)}{\delta_-(\xi)} \right) d\xi \\ &= 2i \int_{k_p}^{k_s} \frac{f'_1(\xi)f_2(\xi) - f_1(\xi)f'_2(\xi)}{f_1^2(\xi) + f_2^2(\xi)} d\xi \\ &= -2i \arctan \frac{f_2(\xi)}{f_1(\xi)} \Big|_{k_p}^{k_s} = 0. \end{aligned}$$

相似地, 在 $\xi \in C_l^\pm$ 时也有 $\int_{\Gamma_l} \frac{\delta'(\xi)}{\delta(\xi)} d\xi = 0$. 此外, 当 $|\xi|$ 足够大, 容易得到 $\delta(\xi)$ 的渐近形式 $\delta(\xi) = -2(k_s^2 - k_p^2)\xi^2 + O(1)$. 于是当 $R \gg 1$, 可以计算得到 $\int_{\Gamma_R} \frac{\delta'(\xi)}{\delta(\xi)} d\xi = 4\pi i$. 综上所述, 我们得出 $Z = 2$. 于是该引理得到证明. \square

为了克服上述问题, 我们先假设半空间的介质是耗散的, 然后研究其相应的 Green 函数, 最后通过极限吸收原理得到 $\mathbb{N}(x, y)$. 记 $\mathbb{N}_{\omega(1+i\varepsilon)}(x, y)$ 为满足将式子 (3.3) 中将实圆频率 ω 替换为复圆频率 $\omega(1+i\varepsilon)$ 后相应方程的 Green 函数. 同样的, 对 $\mathbb{N}_{\omega(1+i\varepsilon)}(x, y)$ 关于 x_1 变量作 Fourier 变换, 得到 $\hat{\mathbb{N}}_{\omega(1+i\varepsilon)}(\xi, x_2; y_2)$, 且通过相同的推导, 其表达式与将 (3.13) 中将 k_s, k_p 替换为 $k_s(1+i\varepsilon), k_p(1+i\varepsilon)$ 后相应的式子一致. 下面的两个引理告诉我们, $\hat{\mathbb{N}}_{\omega(1+i\varepsilon)}(\xi, x_2; y_2)$ 的零点所在何处.

注 3.1.2 在本文中, 我们都假设耗散介质中所添加的 $i\varepsilon$ 是足够小的.

对于 $\alpha = s, p$, 令 $\mu_{\alpha,\varepsilon}(\xi) = ((k_\alpha(1 + \mathbf{i}\varepsilon))^2 - \xi^2)^{1/2}$. 于是, 根据规定 (3.10), 易得 $\mu_{\alpha,\varepsilon}(\xi)$ 的割支线 $C_{\alpha,\varepsilon}$ 为

$$\begin{aligned} C_{\alpha,\varepsilon} &= \{\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} \mu_{\alpha,\varepsilon}(\xi) = 0\} \\ &= \{\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{C} \mid \xi_1 \xi_2 = k_\alpha^2 \varepsilon, \quad \xi_2/\xi_1 > \varepsilon\}. \end{aligned}$$

如图 3.1 所示.

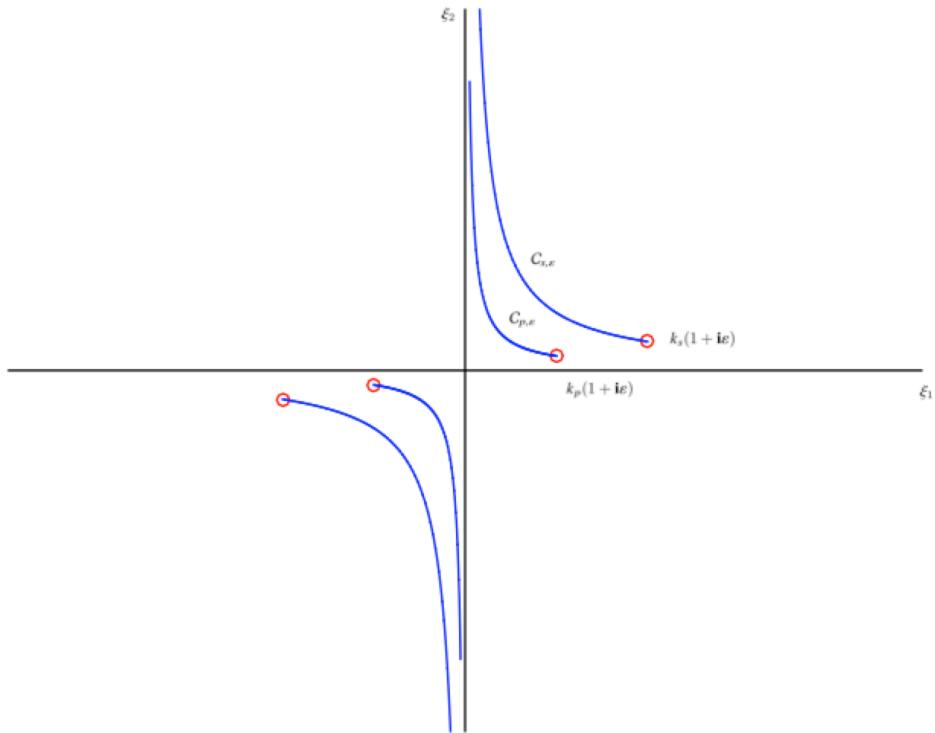


图 3.1 $\mu_{\alpha,\varepsilon}(\xi)$, $\alpha = p, s$ 相应的割支线.

令 $\delta_{\omega(1+i\varepsilon)}(\xi)$ 为将 $\delta(\xi)$ 中的 k_p, k_s 替换成 $k_s(1 + \mathbf{i}\varepsilon), k_p(1 + \mathbf{i}\varepsilon)$ 后相应的复 Rayleigh 方程. 为了展现 $\delta_{\omega(1+i\varepsilon)}(\xi)$ 的零点与 $\delta(\xi)$ 的零点的关系, 我们先来刻画在何种情况下可以结合或是分离根式 $z^{1/2}$.

引理 3.1.2 令 $0 < \varepsilon < 1$, 假设 $z = Re^{i\phi}$, $(1 + \mathbf{i}\varepsilon) = re^{i\psi}$ 其中有 $0 \leq \phi < 2\pi$, $0 < \psi < \pi/2$ 和 $R, r > 0$. 于是等式

$$z^{1/2} = (1 + \mathbf{i}\varepsilon) \left(\frac{z}{(1 + \mathbf{i}\varepsilon)^2} \right)^{1/2} \quad (3.15)$$

成立当且仅当 $2\psi \leq \phi < 2\pi$.

证明. 令

$$z_\varepsilon = z/(1 + \mathbf{i}\varepsilon)^2 := R_\varepsilon e^{\mathbf{i}\phi_\varepsilon},$$

其中 $0 \leq \phi_\varepsilon < 2\pi$. 于是, 易得当 $2\psi \leq \phi < 2\pi$ 时, 成立

$$\phi_\varepsilon = \phi - 2\psi, R_\varepsilon = R/r,$$

则有

$$\begin{aligned} z^{1/2} &= \sqrt{R}e^{\mathbf{i}\phi/2} = \sqrt{R/r}\sqrt{r}e^{\mathbf{i}(\phi/2-\psi)+\mathbf{i}\psi} \\ &= \sqrt{R_\varepsilon}\sqrt{r}e^{\mathbf{i}(\phi_\varepsilon)+\mathbf{i}\psi} = (1 + \mathbf{i}\varepsilon)z_\varepsilon^{1/2}. \end{aligned}$$

同样地, 当 $0 \leq \phi < 2\psi$ 时, 成立

$$\phi_\varepsilon = \phi - 2\psi + 2\pi,$$

则有

$$z^{1/2} = -(1 + \mathbf{i}\varepsilon)z_\varepsilon^{1/2}.$$

引理得证 □

下面的引理告诉我们, $\hat{\mathbb{N}}_{\omega(1+\mathbf{i}\varepsilon)}(\xi, x_2; y_2)$ 的零点所在何处.

引理 3.1.3 复 Rayleigh 方程 $\delta_{\omega(1+\mathbf{i}\varepsilon)}(\xi)$ 在 $\mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}$ 中有且仅有两个根且为 $\pm k_R(1+\mathbf{i}\varepsilon)$. 其中集合 Ω 为

$$\Omega := \{\xi_1 + \mathbf{i}\xi_2 \in \mathbb{C} \mid k_p^2\varepsilon < \xi_1\xi_2 < k_s^2\varepsilon, \xi_2/\xi_1 > \varepsilon\}. \quad (3.16)$$

证明. 我们定义

$$\mu_\varepsilon = (k^2(1 + \mathbf{i}\varepsilon)^2 - \xi^2)^{1/2}, k \in \mathbb{R}^+,$$

令

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_1 + \mathbf{i}\xi_2, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}, \\ (1 + \mathbf{i}\varepsilon) &= re^{\mathbf{i}\psi}. \end{aligned}$$

通过简单的计算，我们有

$$\mu_\varepsilon^2 = k^2(1 - \varepsilon^2) - \xi_1^2 + \xi_2^2 + \mathbf{i}(2k^2\varepsilon - 2\xi_1\xi_2) \quad (3.17)$$

$$:= Re^{i\Theta} := a_1 + i a_2. \quad (3.18)$$

定义 $\Delta := \{\xi | 2\psi \leq \Theta < 2\pi\}$ ，于是由引理 3.1.2 可知，当 $\xi \in \Delta$ 时，成立

$$\mu_\varepsilon = (k^2 - \xi_\varepsilon^2)^{1/2}(1 + i\varepsilon),$$

另一方面当 $\xi \notin \Delta$ 时，成立

$$\mu_\varepsilon = -(k^2 - \xi_\varepsilon^2)^{1/2}(1 + i\varepsilon),$$

其中 $\xi_\varepsilon = \xi / (1 + i\varepsilon)$ 。由于 ε 足够小，我们可以有如下关于集合 Δ 的等价形式：

$$\begin{aligned} \Delta &= (\pi/2 \geq \Theta < 2\pi) \cup (2\psi < \Theta < \pi/2) \\ &= \{\xi | a_1 \leq 0\} \cup \{\xi | a_2 \leq 0\} \cup \{\xi | a_1 > 0, a_2 > 0, \tan \Theta \geq \tan(2\psi)\} \\ &:= \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3. \end{aligned} \quad (3.19)$$

将

$$\begin{aligned} a_1 &= k^2(1 - \varepsilon^2) - \xi_1^2 + \xi_2^2, \\ a_2 &= (2k^2\varepsilon - 2\xi_1\xi_2). \end{aligned}$$

代入式子 (3.19) 中，我们得到

$$\Delta_1 = \{\xi | \xi_1^2 - \xi_2^2 \geq k^2(1 - \varepsilon^2)\}, \quad (3.20)$$

$$\Delta_2 = \{\xi | \xi_1\xi_2 \geq k^2\varepsilon\}. \quad (3.21)$$

又由于 $\tan \Theta = a_1/a_2$, $\tan \psi = \varepsilon$, 易得

$$\Delta_3 = \{\xi | \xi_1^2 - \xi_2^2 \leq k^2(1 - \varepsilon^2), \xi_1\xi_2 \leq k^2\varepsilon, \frac{k^2\varepsilon - \xi_1\xi_2}{k^2(1 - \varepsilon^2) - (\xi_1^2 - \xi_2^2)} \geq \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon^2}\}. \quad (3.22)$$

观察 Δ_3 ，我们发现 Δ_3 表示成为 $\Delta_3 = \Delta_{31} \cup \Delta_{32} \cup \Delta_{33}$ ，其中

$$\begin{aligned} \Delta_{31} &= \{\xi | \xi_1\xi_2 \leq 0, 0 \leq \xi_1^2 - \xi_2^2 \leq k^2(1 - \varepsilon^2)\}, \\ \Delta_{32} &= \{\xi | 0 \leq \xi_1\xi_2 \leq k^2\varepsilon, 0 \leq \xi_1^2 - \xi_2^2 \leq k^2(1 - \varepsilon^2), \frac{\xi_1\xi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \leq \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon^2}\} \\ &= \{\xi | 0 \leq \xi_1\xi_2 \leq k^2\varepsilon, 0 \leq \xi_1^2 - \xi_2^2 \leq k^2(1 - \varepsilon^2), \frac{\xi_2}{\xi_1} \leq \varepsilon\}, \\ \Delta_{33} &= \{\xi | \xi_1\xi_2 \leq 0, \xi_1^2 - \xi_2^2 \leq 0, \frac{\xi_1\xi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \geq \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon^2}\} \\ &= \{\xi | \xi_1\xi_2 \leq 0, \xi_1^2 - \xi_2^2 \leq 0, -\frac{\xi_1}{\xi_2} \geq \varepsilon\}. \end{aligned}$$

观察到 $\xi_1\xi_2 = k^2\varepsilon$, $\xi_1^2 - \xi_2^2 = k^2(1 - \varepsilon^2)$, $\xi_2 = \xi_1\varepsilon$ 三条曲线交于点 $\pm k(1 + i\varepsilon)$, 于是区域 Δ 可以简化成:

$$\Delta = \{\xi \mid -\frac{\xi_1}{\xi_2} \geq \varepsilon, \frac{\xi_2}{\xi_1} \leq \varepsilon\} \cup \{\xi \mid \xi_1\xi_2 \geq k^2\varepsilon\}. \quad (3.23)$$

定义 Δ_s, Δ_p 为将 μ_ε 中的 k 替换为 k_s, k_p 后相应的 Δ 区域. 于是, 经过简单的整理, 我们可以得到:

$$\overline{\mathbb{C} \setminus \Omega} = (\Delta_s \cap \Delta_p) \cup (\overline{\mathbb{C} \setminus (\Delta_s \cup \Delta_p)}). \quad (3.24)$$

因此, 当 $\xi \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, 成立

$$\delta_{\omega(1+i\varepsilon)} = \delta(\xi_\varepsilon)(1 + i\varepsilon)^4.$$

通过引理 3.1.1, 此引理得证. \square

由引理 3.1.3 我们得知 $\hat{N}_{\omega(1+i\varepsilon)}(\xi, x_2; y_2)$ 在实轴上没有极点, 可以对其直接进行逆 Fourier 变换. 于是, 半空间弹性波 Neumann Green 函数 $N(x, y)$ 可以利用极限吸收原理得到, 即为

$$\begin{aligned} N(x, y) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} N_{\omega(1+i\varepsilon)}(x, y) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{N}_{\omega(1+i\varepsilon)}(\xi, x_2; y_2) e^{i(x_1-y_1)\xi} d\xi. \end{aligned} \quad (3.25)$$

现在, 我们已经得到 Neumann Green 函数的具体表达形式了. 但是, 式子 (3.25) 中这种极限形式并不利于我们分析该函数的具体性质, 特别是其无穷远处的衰减阶数. 为了便于得到更加易于分析的表达形式, 我们引入下面这个关于柯西主值 (cf. e.g. [82, Chapter 4, Theorem 5]) 的引理

引理 3.1.4 令 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, 且 $t_0 \in (a, b)$. 如果 γ 在 $[a, b]$ 上 Hölder 连续, 即存在常数 $\alpha \in (0, 1]$ 及 $C > 0$ 对于任意 $s, t \in [a, b]$, $|\gamma(s) - \gamma(t)| \leq C|s - t|^\alpha$, 于是有

$$\lim_{z \rightarrow t_0, \pm \operatorname{Im} z > 0} \int_a^b \frac{\gamma(t)}{t - z} dt = \text{p.v.} \int_a^b \frac{\gamma(t)}{t - t_0} dt \pm \pi i \gamma(t_0),$$

其中 p.v. \int_a^b 表示积分的 Cauchy 主值.

通过引理 3.1.1, 引理 3.1.3, 易知 $\hat{N}_{\omega(1+i\varepsilon)}(\xi \mp k_R(1 + i\varepsilon))$ 在点 $\pm k_R$ 的某个小邻域内解析且关于 ε 一致有界. 于是, 对于足够小的 $d > 0$, 成立:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\pm k_R - d}^{\pm k_R + d} \hat{N}_{\omega(1+i\varepsilon)}(\xi, x_2; y_2) e^{i(x_1-y_1)\xi} d\xi \quad (3.26)$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\pm k_R - d}^{\pm k_R + d} \frac{\hat{N}(\xi, x_2; y_2)(\xi - k_R)}{\xi \mp k_R(1 + i\varepsilon)} e^{i(x_1-y_1)\xi} d\xi. \quad (3.27)$$

于是利用引理 3.1.4, 表达式 (3.25) 及上面的等式, 我们就可以得到如下 Neumann Green 函数的表达式:

$$\mathbb{N}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} \hat{\mathbb{N}}(\xi, x_2; y_2) e^{i(x_1 - y_1)\xi} d\xi \quad (3.28)$$

$$-\frac{1}{2\omega^2} \left[\sum_{\alpha, \beta=p, s} \frac{\mathbb{A}_{\alpha\beta}(\xi)}{\delta'(\xi)} e^{i(\mu_\alpha x_2 + \mu_\beta y_2) + i(x_1 - y_1)\xi} \right]_{-k_R}^{k_R}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^2, \quad (3.29)$$

这里 $[f(\xi)]_a^b := f(b) - f(a)$.

注 3.1.3 值得注意的是, 由于 $\hat{\mathbb{N}}(\xi, x_2; y_2)$ 在实轴上存在极点, 根据针对 Green 函数的不同的研究目的, 最终 $\mathbb{N}(x, y)$ 可以存在多种等价的表达形式. 例如, 在文献 [17] 中 Duran 等人是利用 Cauchy 积分定理以及留数定理将积分路径从实轴变换到双曲线上, 从而避开被积函数的极点. 可以证明的是, 本文中推导出的 Green 函数与文献 [17] 中的一致的.

注 3.1.4 从 Neumann Green 函数的表达式 (3.28) 中, 我们发现在其第二项中有 $\mu_\alpha(\pm k_R) = i\sqrt{k_R^2 - k_\alpha^2}$, 易知当 x_2 增大时, 第二项的值是指数衰减的. 所以, 式 (3.28) 中第二项对应的波只在 Γ_0 附近以波数 k_R 传播, 当远离 Γ_0 时非常微弱, 且称其为表面波 (或 Rayleigh 表面波) [83].

为了后文分析的便利, 我们在以下引理中叙述若干关于 Rayleigh 函数 $\delta(\xi)$ 的性质.

引理 3.1.5 令 $d_R = (k_R - k_s)/2$, 其中 k_R 为 Rayleigh 表面波的波数. Rayleigh 函数 $\delta(\xi)$ 有如下性质:

1. 对于任意 $|\xi| \leq k_s + d_R$, 存在只与 κ 有关的常数 C_1, C_2, C_3 , 使得

$$C_1 k_s^4 \leq |\delta(\xi)| \leq C_2 k_s^4,$$

$$|\delta^{(k)}(\xi)| \leq C_3 (|k_s^2 - \xi^2|^{-k+1/2} + |k_p^2 - \xi^2|^{-k+1/2}), \quad k = 1, 2.$$

2. 对于任意 $|\xi| \geq k_R$, 存在只与 κ 有关的常数 C , 使得

$$|\delta(\xi)| \geq C k_s^2 (|\xi|^2 - k_R^2).$$

3. 令 $\delta(\xi) = \delta_1(\xi)(\xi^2 - k_R^2)$, 对于任意 $k_R - d_R \leq |\xi| \leq k_R + d_R$, 存在只与 κ 有关的常数 C , 使得

$$|\delta_1(\xi)| \geq C k_s^2.$$

证明. 利用简单的求导计算, 我们易得结论 1. 通过 Rayleigh 函数的定义, 有 $|\xi| \geq k_s$, $\delta(\xi) = k_s^4 f(\xi^2/k_s^2)$, 其中

$$f(t) = (2t - 1)^2 - 4t\sqrt{t-1}\sqrt{t-\kappa^2}, \quad \forall t \geq 1.$$

对于任意 $t \geq 1$, 易得:

$$\begin{aligned} f'(t) &= 8t - 4 - 4\sqrt{t-1}\sqrt{t-\kappa^2} - 2t\sqrt{t-1}/\sqrt{t-\kappa^2} - 2t\sqrt{t-\kappa^2}/\sqrt{t-1} \\ &\leq 8t - 4 - 4\sqrt{t-1}\sqrt{t-k_R^2} - 4t. \end{aligned} \quad (3.30)$$

显然, 当 $t \rightarrow 1$, $t > 1$ 时, $f'(t) \rightarrow -\infty$, 于是存在 $\delta > 0$ 以及 $A_1 > 0$, 使得当 $1 < t < 1 + \delta$ 时, $f'(t) < -A_1$. 而当 $t \geq 1 + \delta$ 时, 由式子 (3.30) 得, 存在 $A_2 > 0$, 使得 $f'(t) \leq -A_2$ 又因为 $f(1) = 1$ 以及 $f((2 - \kappa^2)/(1 - \kappa^2)) < 0$, 于是立得 $k_R^2 \leq \frac{2-\kappa^2}{1-\kappa^2} k_s^2$. 然后由中值定理及 $f'(t) \leq -\max(A_1, A_2)$ 得

$$\min_{|\xi| \geq k_s} \left| \frac{\delta(\xi)}{\xi^2 - k_R^2} \right| \geq \min_{t \geq 1} |f'(t)| k_s^2 \geq \max(A_1, A_2) k_s^2.$$

结论 2, 3 得证. \square

观察式子 (3.6), (3.7), 及 (3.13), 通过简单的变量替换, 我们易得 Neumann Green 函数满足如下对称性或是空间互易性, 即

$$\mathbb{N}(x, y) = \mathbb{N}(y, x)^T \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^2. \quad (3.31)$$

而对于 $x_s \in \Gamma_0$ 时的情况, 我们可以定义对应的 Neumann Green 函数 $\mathbb{N}(x, x_s)$, $x \in \mathbb{R}_+^2$ 为 $\mathbb{N}(x, y)$ 在 $y \in \mathbb{R}_+^2$, $y \rightarrow x_s$ 时的极限. 由于半空间反散射问题中的点源一般都位于界面上, 所以接下去我们重点研究当 $x \in \Gamma_0$, $y \in \mathbb{R}_+^2$ 情形下的 Neumann Green 函数 $\mathbb{N}(x, y)$. 通过 (3.6), (3.7), (3.13), 可以将 $\mathbb{N}(x, y)$ 简化为:

$$\hat{\mathbb{N}}(\xi, 0; y_2) = \frac{\mathbf{i}}{\mu\delta(\xi)} \begin{pmatrix} 2\xi^2\mu_s & -2\xi\mu_s\mu_p \\ -\xi\varphi & \mu_p\varphi \end{pmatrix} e^{i\mu_p y_2} \quad (3.32)$$

$$+ \begin{pmatrix} \mu_s\varphi & \xi\varphi \\ 2\xi\mu_s\mu_p & 2\xi^2\mu_p \end{pmatrix} e^{i\mu_s y_2}$$

$$:= \frac{1}{\delta(\xi)} (\mathbb{N}_p(\xi) e^{i\mu_p y_2} + \mathbb{N}_s(\xi) e^{i\mu_s y_2}), \quad (3.33)$$

且当 $x \in \Gamma_0$, $y \in \mathbb{R}_+^2$ 时,

$$\begin{aligned} \mathbb{N}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} \hat{\mathbb{N}}(\xi, 0; y_2) e^{i(x_1 - y_1)\xi} d\xi \\ &\quad + \frac{\mathbf{i}}{2} \left[\sum_{\alpha=p,s} \frac{\mathbb{N}_{\alpha}(\xi)}{\delta'(\xi)} e^{i\mu_{\alpha} y_2 + i(x_1 - y_1)\xi} \right]_{-k_R}^{k_R}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

为了便于研究 Neumann Green 函数在边界 Γ_0 上水平方向的渐近行为, 我们在下面引理中给出其更有便于分析的表达形式.

引理 3.1.6 令 $x \in \Gamma_0, y \in \mathbb{R}_+^2$ 以及 $\phi \in (-\pi/2, \pi/2)$ 且存在如下表达 $y_2 = |x - y| \cos \phi, x_1 - y_1 = |x - y| \sin \phi$. 假设 $x_1 \neq y_1$, 于是可以得到

$$\begin{aligned} \mathbb{N}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\alpha=p,s} \int_L \mathbb{N}_0^\alpha(t) \cos(t + \phi) e^{i\lambda_\alpha \cos t} dt \\ &\quad \pm i \left[\sum_{\alpha=p,s} \frac{\mathbb{N}_0^\alpha(\xi)}{\delta'(\xi)} e^{i\mu_\alpha y_2 + i(x_1 - y_1)\xi} \right]_{\xi=\pm k_R}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

其中 $\lambda_\alpha = k_\alpha |x - y|$, $\alpha = s, p$, L 为复平面中的积分路径即从 $-\pi/2 + i\infty$ 到 $-\pi/2$, $-\pi/2$ 再到 $\pi/2$, 接着从 $\pi/2$ 到 $\pi/2 - i\infty$ 的折线 (如图 3.2 所示), 这里符号 \pm 取决于 $\operatorname{sgn}(x_1 - y_1) = \pm 1$, 且定义表达式:

$$\mathbb{N}_0^\alpha(t) = k_\alpha \frac{\mathbb{N}_\alpha(k_\alpha \sin(t + \phi))}{\delta(k_\alpha \sin(t + \phi))}, \quad \alpha = s, p. \quad (3.36)$$

证明. 不失一般性, 我们可以假设 $x_1 > y_1$, 因此有 $\operatorname{sgn}(x_1 - y_1) = 1$. 注意到 $\hat{\mathbb{N}}(\xi, 0; y_2) = \sum_{\alpha=p,s} \frac{\mathbb{N}_\alpha(\xi)}{\delta(\xi)} e^{i(y_2 \mu_\alpha + (x_1 - y_1)\xi)}$, 所以对于 $\alpha = p, s$, 我们可以做经典的三角变量替换, 即为 $\xi = k_\alpha \sin t$. 由于三角函数的周期性, 这里我们规定 $-\pi < \operatorname{Re} t \leq \pi$ 以保证变换的一一对应. 相应地, ξ 在复平面中的积分路径 \mathbb{R} 对应于 t 所在复平面中的积分路径 L . 于是得到如下等式:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \operatorname{p.v.} \int_{\mathbb{R}} \hat{\mathbb{N}}(\xi, 0; y_2) e^{i(x_1 - y_1)\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{p.v.} \int_L \sum_{\alpha=p,s} k_\alpha \frac{\mathbb{N}_\alpha(k_\alpha \sin t)}{\delta(k_\alpha \sin t)} \cos t e^{i\lambda_\alpha \cos(t - \phi)} dt. \end{aligned}$$

令 $L_{-\phi}$ 为 L 平移 $-\phi$ 后的积分路径, 立即得到

$$\frac{1}{2\pi} \operatorname{p.v.} \int_{\mathbb{R}} \hat{\mathbb{N}}(\xi, 0; y_2) e^{i(x_1 - y_1)\xi} d\xi \quad (3.37)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \operatorname{p.v.} \int_{L_{-\phi}} \sum_{\alpha=p,s} \mathbb{N}_0^\alpha(t) \cos(t + \phi) e^{i\lambda_\alpha \cos t} dt, \quad (3.38)$$

这里 $\mathbb{N}_0^\alpha(t)$ 如 (3.37) 所定义.

设 $t_R \in L$ 满足等式 $k_R = k_s \sin t_R$, 于是 k_R 即为 t_R 在积分变换 $\xi = k_s \sin t$ 下的像点. 特别地, 由于 $k_R > k_s$, 则存在 $s_R > 0$ 使得 $t_R = \pi/2 - is_R \in L$. 对于任意 $\varepsilon > 0$, 令 L^ε 表示如下积分路径:

$$\begin{aligned} &-\pi/2 + i\infty \rightarrow -\pi/2 + i(s_R + \varepsilon) \cup \partial B_\varepsilon^+(t_R) \\ &\rightarrow -\pi/2 + i(s_R - \varepsilon) \rightarrow -\pi/2 \rightarrow \pi/2 \rightarrow \pi/2 - i(s_R - \varepsilon) \\ &\rightarrow \partial B_\varepsilon^+(t_R) \rightarrow \pi/2 - i(s_R + \varepsilon) \rightarrow \pi/2 - i\infty, \end{aligned}$$

其中 $\partial B_\varepsilon^+(\pm t_R)$ 表示圆心在 $\pm t_R$ 半径为 ε 的右半圆 (如图 3.2 所示). 然后, 令 $L_{-\phi}^\varepsilon$ 为 L^ε 平移 $-\phi$ 后的积分路径. 于是, 利用 Cauchy 主值的定义及留数定理, 我们可以得知

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \text{p.v.} \int_{L_{-\phi}} N_0^s(t) \cos(t + \phi) e^{i\lambda_s \cos t} dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi} \int_{L_{-\phi}^\varepsilon} N_0^s(t) \cos(t + \phi) e^{i\lambda_s \cos t} dt \\ & \quad + \frac{i}{2} \sum_{t'=\pm t_R} \text{Res}(N_0^s(t) \cos(t + \phi) e^{i\lambda_s \cos t}, t'). \end{aligned}$$

通过简单的计算, 易得相应留数为:

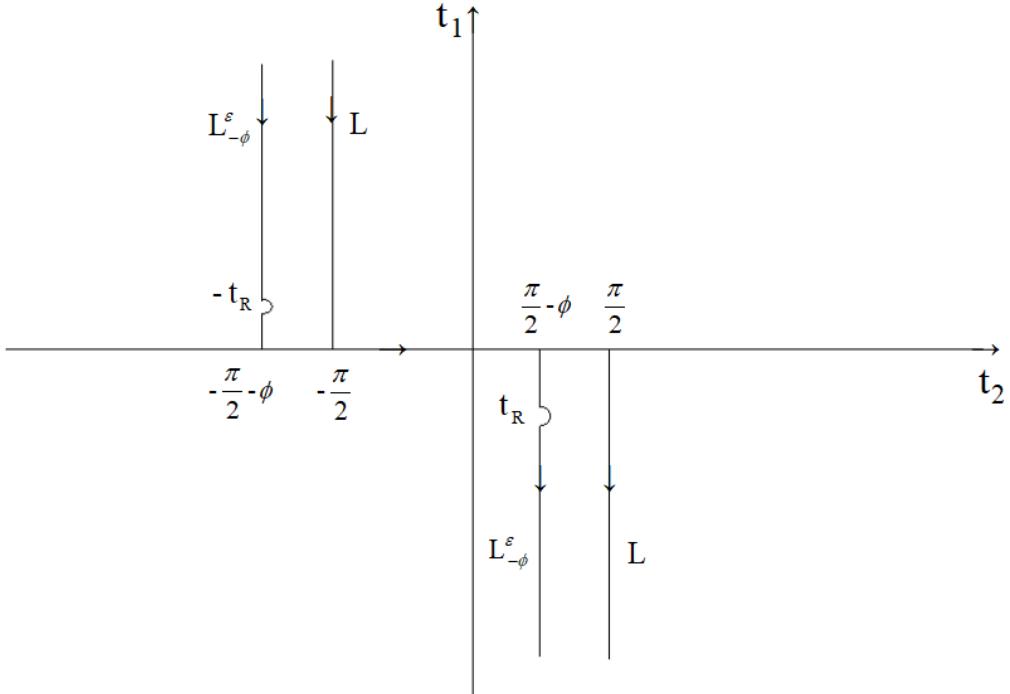


图 3.2 积分路径 L 和 $L_{-\phi}^\varepsilon$.

$$\begin{aligned} & \frac{i}{2} \sum_{t'=\pm t_R} \text{Res}(N_0^s(t) \cos(t + \phi) e^{i\lambda_s \cos t}, t') \\ &= \frac{i}{2} \sum_{\xi=\pm k_R} \frac{N_s(\xi)}{\delta'(\xi)} e^{i(y_2 \mu_s + (x_1 - y_1) \xi)}. \end{aligned}$$

另一方面, 通过 Cauchy 积分定理, 我们得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{L_{-\phi}^\varepsilon} N_0^s(t) \cos(t + \phi) e^{i\lambda_s \cos t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_L N_0^s(t) \cos(t + \phi) e^{i\lambda_s \cos t} dt. \end{aligned}$$

于是立即得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \text{p.v.} \int_{L-\phi} \mathbb{N}_0^s(t) \cos(t + \phi) e^{i\lambda_s \cos t} dt \\ = & \frac{1}{2\pi} \int_L \mathbb{N}_0^s(t) \cos(t + \phi) e^{i\lambda_s \cos t} dt \\ & + \frac{i}{2} \sum_{\xi=\pm k_R} \frac{\mathbb{N}_s(\xi)}{\delta'(\xi)} e^{i(y_2\mu_s + (x_1 - y_1)\xi)}. \end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \text{p.v.} \int_{L-\phi} \mathbb{N}_0^p(t) \cos(t + \phi) e^{i\lambda_p \cos t} dt \\ = & \frac{1}{2\pi} \int_L \mathbb{N}_0^p(t) \cos(t + \phi) e^{i\lambda_p \cos t} dt \\ & + \frac{i}{2} \sum_{\xi=\pm k_R} \frac{\mathbb{N}_p(\xi)}{\delta'(\xi)} e^{i(y_2\mu_p + (x_1 - y_1)\xi)}. \end{aligned}$$

最后利用 (3.34) 和 (3.37) 引理得证. \square

上述引理是我们研究 Neumann Green 函数 $\mathbb{N}(x, y)$ 在界面 Γ_0 上当 $x \rightarrow \infty$ 时衰减行为估计的一个出发点. 下面，我们先回顾下关于振荡积分衰减阶数估计的 Van der Corput 引理 [84, P.152].

引理 3.1.7 令 $\lambda \geq 1$, $f \in C[a, b]$ 且其导函数绝对可积, 如果 $u \in C^k[a, b]$, 其中 $k \geq 1$ 及 $a < b$, 我们就有如下结论

1. 如果 $|u'(t)| \geq 1$ 对于任意 $t \in (a, b)$ 成立, 且 u' 在 (a, b) 上单调, 就断言

$$\left| \int_a^b f(t) e^{i\lambda u(t)} dt \right| \leq 3\lambda^{-1} \left(|f(b)| + \int_a^b |f'(t)| dt \right).$$

2. 对于 $k \geq 2$ 时, 如果 $|u^{(k)}(t)| \geq 1$ 对于任意 $t \in (a, b)$ 成立, 就断言

$$\left| \int_a^b f(t) e^{i\lambda u(t)} dt \right| \leq 12k\lambda^{-1/k} \left(|f(b)| + \int_a^b |f'(t)| dt \right).$$

在文献 [69] 中, Chen 等对半空间逆时偏移算法进行研究时, 引理 3.1.7 起到了关键的作用. 该引理相对于驻相定理的优势在于, 对于振幅函数 $f(t)$ 的光滑性要求更低, 且对于 λ 阶数的刻画具有一致性. 然而, 当振幅函数具有弱奇异点时, 直接使用引理 3.1.7 就行不通了. 幸运的是, 经过研究, 我们发现当振幅函数存在弱奇异点, 且其与相位函数 $\phi(t)$ 的驻相点的距离存在正下界时, Van der corput 引理仍然成立, 如下述引理刻画.

引理 3.1.8 令 $\lambda \geq 1$, 假设 $f \in C[-\pi/2, \pi/2]$ 且其导函数绝对可积. 于是对任意区间 $(a, b) \subset (-\pi/2, \pi/2)$, 可以得到

$$\left| \int_a^b f(t) e^{i\lambda \cos t} dt \right| \leq C \lambda^{-1/2} \left(|f(0)| + \int_a^b |f'(t)| dt \right), \quad (3.39)$$

这里常数 C 与 a, b, λ 及被积函数 f 无关. 此外, 令 $\kappa \in (0, 1)$ 以及 $\phi \in (-\pi/2, \pi/2)$ 满足条件 $|\phi| \geq \phi^* > \arcsin \kappa := \phi_\kappa$, 可以得到

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t) (\kappa^2 - \sin^2(t + \phi))^{-1/2} e^{i\lambda \cos t} dt \right| \\ & \leq C \lambda^{-1/2} \left(|f(0)| + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |f'(t)| dt \right), \end{aligned} \quad (3.40)$$

这里常数 C 只与 ϕ^* 和 κ 有关.

证明. 我们不妨假定 $\phi > 0$. 其中估计 (3.39) 可以由引理 3.1.7 直接得到. 这是因为区间 (a, b) 可以被切割成若干个互不相交的子区间, 并且在任意一个子区间上面 $\sin t$ 单调且 $|\sin t|$ 存在下界 $1/\sqrt{2}$ 或是 $|\cos t|$ 存在下界 $1/\sqrt{2}$.

令 $g(t) = \kappa^2 - \sin^2(t + \phi)$. 由于 $0 < \kappa < 1$, 易知 $g(t)$ 在区间 $(-\pi/2, \pi/2]$ 上有且仅有两个零点 t_1, t_2 , 而且可以求出 $t_1 = \phi_\kappa - \phi$ 及 $t_2 = -\phi_\kappa - \phi$ 或是 $t_2 = \pi - \phi_\kappa - \phi$, 这里 t_2 取决于 $\phi + \phi_\kappa < \pi/2$ 或是 $\phi + \phi_\kappa \geq \pi/2$. 不失一般性, 我在后面的证明中都假设 $t_2 = \pi - \phi_\kappa - \phi$.

令 $0 < \varepsilon_0 < \min(\frac{\phi^* - \phi_\kappa}{2}, \frac{\phi_\kappa}{2})$. 显然成立 $t_1 - \varepsilon_0 \geq -\pi/2$, $t_1 + \varepsilon_0 \leq -(\phi^* - \phi_\kappa)/2$ 以及 $t_2 - \varepsilon_0 \geq (\phi^* - \phi_\kappa)/2$. 于是, 我们可以把区间 $(-\pi/2, \pi/2)$ 切分成 5 个互补相交的子区间

$$\begin{aligned} I_1 &= (-\pi/2, t_1 - \varepsilon_0), I_2 = (t_1 - \varepsilon_0, t_1 + \varepsilon_0), \\ I_3 &= (t_1 + \varepsilon_0, t_2 - \varepsilon_0), I_4 = (t_2 - \varepsilon_0, t_2 + \min(t_2 + \varepsilon_0, \pi/2)), \\ I_5 &= (\min(t_2 + \varepsilon_0, \pi/2), \pi/2). \end{aligned}$$

于是利用 (3.39) 可以得到

$$\begin{aligned} & \left| \int_{I_1 \cup I_3 \cup I_5} f(t) (\kappa^2 - \sin^2(t + \phi))^{-1/2} e^{i\lambda \cos t} dt \right| \\ & \leq C \lambda^{-1/2} \left(|f(0)| + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |f'(t)| dt \right), \end{aligned} \quad (3.41)$$

其中常数 C 只和 ϕ^* 及 κ 有关.

现在我们来估计在区间 I_2, I_4 上的积分. 首先, 我们观察到, 在区间 $I_2 \cup I_4$ 上成立不等式 $|\sin t| \geq \sin((\phi^* - \phi_\kappa)/2)$. 此外在该区间上还成立,

$$|g'(t)| = |\sin(2(t + \phi))| \geq \min(\sin \phi_\kappa, \sin(\phi^* + \phi_\kappa)).$$

令 $\delta \in (0, \varepsilon_0)$ 充分小, 因为 $g(t_j) = 0, j = 1, 2$, 于是利用中值定理, 对于任意 t 满足 $\delta \leq |t - t_j| \leq \varepsilon_0, j = 1, 2$ 我们有

$$|g(t)| \geq \min(\sin \phi_\kappa, \sin(\phi^* + \phi_\kappa))\delta.$$

通过分部积分后, 得到

$$\begin{aligned} & \left| \int_{t_1-\varepsilon_0}^{t_1-\delta} f(t) g(t)^{-1/2} e^{i\lambda \cos t} dt \right| \\ & \leq C \delta^{-1/2} \lambda^{-1} \left(|f(0)| + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |f'(t)| dt \right). \end{aligned}$$

类似地得到

$$\begin{aligned} & \left| \int_{t_1+\delta}^{t_1+\varepsilon_0} f(t) g(t)^{-1/2} e^{i\lambda \cos t} dt \right| \\ & \leq C \delta^{-1/2} \lambda^{-1} \left(|f(0)| + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |f'(t)| dt \right). \end{aligned}$$

最后, 我们可以得到

$$\begin{aligned} & \left| \int_{t_1-\delta}^{t_1+\delta} f(t) g(t)^{-1/2} e^{i\lambda \cos t} dt \right| \\ & \leq C \max_{t \in (-\pi/2, \pi/2)} |f(t)| \int_{-\delta}^{\delta} |\kappa - \sin(\phi_\kappa + t)|^{-1/2} dt \\ & \leq C \delta^{1/2} \max_{t \in (-\pi/2, \pi/2)} |f(t)|. \end{aligned}$$

如此, 我们只要取 $\delta = \lambda^{-1}$ 就可以得到

$$\begin{aligned} & \left| \int_{I_2} f(t) (\kappa^2 - \sin^2(t + \phi))^{-1/2} e^{i\lambda \cos t} dt \right| \\ & \leq C \lambda^{-1/2} \left(|f(0)| + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |f'(t)| dt \right). \end{aligned}$$

同理, 在区间 I_4 上的积分也可以被估计. 结合式子 (3.41) 中的估计, 引理得证.

□

引理 3.1.9 令 $\phi \in (0, \pi/2)$ 以及 H 表示双曲线

$$\{\xi = \xi_1 + i\xi_2 \in \mathbb{C} : (\xi_1/(k_s \cos \phi))^2 - (\xi_2/(k_s \sin \phi))^2 = 1\}.$$

定义 $f(\xi)$ 为 H 邻域上的解析函数. 于是, 存在只与 κ 有关的常数 C , 成立

$$\begin{aligned} & \left| \int_{L \setminus [-\pi/2, \pi/2]} f(k_s \sin(t + \phi)) e^{i\lambda \cos t} dt \right| \\ & + \left| \int_{L \setminus [-\pi/2, \pi/2]} f(k_s \sin(t + \phi)) \cos t e^{i\lambda \cos t} dt \right| \\ & \leq C\lambda^{-1}(|f(0)| + \max_{\xi \in H} (k_s |f'(\xi)|)). \end{aligned}$$

证明. 注意到, 对于 $t = -\pi/2 + is$, $s > 0$ 有 $k_s \sin(t + \phi) = -\cosh(s) \cos \phi + i \sinh(s) \sin \phi \in H$. 于是

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi/2}^{-\pi/2+i\infty} f(k_s \sin(t + \phi)) e^{i\lambda \cos t} dt \\ &= i \int_0^\infty f(-\cosh(s) \cos \phi + i \sinh(s) \sin \phi) e^{-\lambda \sinh(s)} ds. \end{aligned}$$

于是, 利用分部积分就可以得到

$$\begin{aligned} |I| &= \left| \int_0^\infty f(-\cosh(s) \cos \phi + i \sinh(s) \sin \phi) / (-\lambda \cosh(s)) de^{-\lambda \sinh(s)} \right| \\ &\leq \lambda^{-1}(|f(0)| + \int_0^\infty \left| \frac{df(-\cosh(s) \cos \phi + i \sinh(s) \sin \phi) / \cosh(s)}{ds} \right| e^{-\lambda \sinh(s)} ds). \end{aligned}$$

由此得到 $\pi/2 \rightarrow \pi/2 - i\infty$ 上的积分值的估计. 于是, 不等式中的第一项估计得证. 类似地, 可以证明不等式中的第二项的估计. 引理得证. \square

经过前述若干引理的铺垫, 我们下面给出当 $x \in \Gamma_0$, $y \in \mathbb{R}_+^2$ 时, Neumann Green 函数相对于变量 x_1 的阶数估计.

定理 3.1.1 假定 $x \in \Gamma_0$, $y \in \mathbb{R}_+^2$ 且满足 $|x_1 - y_1|/|x - y| \geq (1 + \kappa)/2$ 及 $k_s y_2 \geq 1$. 存在只与 κ 有关的常数 C , 使得如下估计成立:

$$|\mathbb{N}(x, y)| + k_s^{-1} |\nabla_y \mathbb{N}(x, y)| \leq \frac{C}{\mu} \left(\frac{k_s y_2}{(k_s |x - y|)^{3/2}} + e^{-\sqrt{k_R^2 - k_s^2} y_2} \right).$$

证明. 这里我们只证明关于 $\mathbb{N}(x, y)$ 的估计. 由于 $\nabla_y \mathbb{N}(x, y)$ 的函数特性和 $\mathbb{N}(x, y)$ 一致, 同理可证. 由引理 3.1.6 中的式子(3.36)启发, 不失一般性, 我们假定 $x_1 > y_1$, 即有 $\phi \in (0, \pi/2)$ 且满足

$$\phi \geq \phi^* = \arcsin(1 + \kappa)/2 > \phi_\kappa.$$

通过引理 3.1.5 中的结论 3, 我们易得式子 (3.36) 中的第二项存在上界 $C\mu^{-1}e^{-\sqrt{k_R^2-k_s^2}y_2}$, 即该项随着 y_2 增大指数衰减.

针对式子 (3.36) 中的第一项, 存在 p 波和 s 波两项, 即

$$\frac{1}{2\pi} \int_L \sum_{\alpha=p,s} k_\alpha \frac{\mathbb{N}_\alpha(k_\alpha \sin(t+\phi))}{\delta(k_s \sin(t+\phi))} \cos(t+\phi) e^{i\lambda_\alpha \cos t} dt.$$

由于, p 波和 s 波在表达形式上是相似的, 这里我们只分析含有 $[\mathbb{N}_s(k_s \sin(t+\phi))]_{22} = \mu^{-1}(2\xi^2\mu_p)(k_s \sin(t+\phi))$ 这项, 然后另外项的分析就同理可得. 为了表达简便, 我们有如下定义:

$$\begin{aligned} g(t) &= k_s \frac{[\mathbb{N}_s(k_s \sin(t+\phi))]_{22}}{\delta(k_s \sin(t+\phi))} \\ &:= f(t)(\kappa^2 - \sin^2(t+\phi))^{1/2}, \\ f(t) &= \frac{k_s^4}{\mu} \frac{(\sin(t+\phi))^2}{\delta(k_s \sin(t+\phi))}. \end{aligned}$$

于是, 利用分部积分, 可以得到

$$\begin{aligned} &\int_L g(t) \cos(t+\phi) e^{i\lambda_s \cos t} dt \\ &= \cos \phi \int_L g(t) \cos t e^{i\lambda_s \cos t} dt - \sin \phi \int_L g(t) \sin t e^{i\lambda_s \cos t} dt \\ &= \cos \phi \int_L g(t) \cos t e^{i\lambda_s \cos t} dt - \frac{\sin \phi}{i\lambda} \int_L g'(t) e^{i\lambda_s \cos t} dt \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

通过引理 3.1.5 中的结论 1 及引理 3.1.8 中的式 (3.39), 我们得到

$$\begin{aligned} &\left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(t) \cos t e^{i\lambda_s \cos t} dt \right| \\ &\leq C\lambda_s^{-1/2} \left(|g(0)| + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |(g(t) \cos t)'| dt \right) \\ &\leq C\mu^{-1}\lambda_s^{-1/2}. \end{aligned}$$

又因为 $\pm k_R$ 不在在双曲线 H 上, 于是当 $\xi \in H$ 时, 成立

$$|[\mathbb{N}_s(\xi)]_{22}| \leq C|\xi|^3, \quad |[\mathbb{N}'_s(\xi)]_{22}| \leq C|\xi|^2, \quad \delta(\xi) \geq Ck_s^2|\xi|^2.$$

利用引理 3.1.9 我们得到

$$\left| \int_{L \setminus [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} g(t) \cos t e^{i\lambda_s \cos t} dt \right| \leq C\mu^{-1}\lambda_s^{-1}.$$

于是得到 $|I_1| \leq C\mu^{-1}\lambda^{-1/2} \cos \phi$.

类似地，我们可以得到 $|I_2| \leq C\mu^{-1}\lambda_s^{-3/2}$. 事实上，唯一的区别在于，因为

$$g'(t) = f'(t)(\kappa^2 - \sin^2(t + \phi))^{1/2} - f(t)(\kappa^2 - \sin^2(t + \phi))^{-1/2} \sin(t + \phi) \cos(t + \phi),$$

所以，利用引理 3.1.8 中的 (3.39) 和 (3.40) 可以得到

$$\left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g'(t) e^{i\lambda_s \cos t} dt \right| \leq C\mu^{-1}\lambda_s^{-1/2}.$$

于是，我们最终得出

$$\begin{aligned} |I_1 + I_2| &\leq C\mu^{-1}\lambda_s^{-1/2} \cos \phi + C\mu^{-1}\lambda_s^{-3/2} \\ &\leq C\mu^{-1}(k_s y_2)/(k_s|x-y|)^{3/2}, \end{aligned}$$

这里使用了条件 $k_s y_2 \geq 1$. 引理得证. \square

从以上定理可以得知， $x \in \Gamma_0, y \in \mathbb{R}_+^2$ 时，Neumann Green 函数被两项控制，其中第一项随着 x_1 变大，以 $3/2$ 阶衰减，而第二项关于 x_1 是常数，但关于 y_2 指数衰减. 值得注意的是，弹性波基本解在横向关于 x_1 是以 $1/2$ 阶衰减的. 除了存在表面波，该横向衰减性质也是弹性波 Neumann Green 函数与声波 Neumann Green 函数本质不同的一个地方.

3.1.2 Dirichlet Green 函数

由于相比于 Dirichlet Green 函数，Neumann Green 函数的形式更为复杂，所以上一节中，我们先详细讨论了 Neumann Green 函数. 现在，我们可以类似且更加简单地来讨论 Dirichlet Green 函数 $\mathbb{D}(x, y), y \in \mathbb{R}_+^2$ [85]，其满足如下方程及边界条件

$$\Delta_e[\mathbb{D}(x, y)q] + \omega^2[\mathbb{D}(x, y)q] = -\delta_y(x)q \quad \text{in } \mathbb{R}_+^2, \quad (3.42)$$

$$\mathbb{D}(x, y)q = 0 \quad \text{on } \Gamma_0. \quad (3.43)$$

类似于 (4.31) 中的频域 Neumann Green 函数，我们定义经过 Fourier 变换后的频域 Dirichlet Green 函数 $\hat{\mathbb{D}}(\xi, x_2; y_2)$. 经过类似地推导，我们可以将它表达成如下形式：

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{D}}(\xi, x_2; y_2) &= \hat{\mathbb{G}}(\xi, x_2; y_2) - \hat{\mathbb{G}}(\xi, x_2; -y_2) \\ &+ \frac{i}{\omega^2 \gamma(\xi)} \sum_{\alpha, \beta=s, p} \mathbb{B}_{\alpha\beta}(\xi) e^{i(x_2 \mu_\alpha + y_2 \mu_\beta)}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

这里有

$$\gamma(\xi) = \xi^2 + \mu_s \mu_p, \quad \mathbb{B}_{sp}(\xi) = -\mathbb{B}_{ss}(\xi), \quad \mathbb{B}_{ps}(\xi) = -\mathbb{B}_{pp}(\xi),$$

$$\mathbb{B}_{ss}(\xi) = \begin{pmatrix} \xi^2 \mu_s & -\xi \mu_s \mu_p \\ -\xi^3 & \xi^2 \mu_p \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B}_{pp}(\xi) = \begin{pmatrix} \xi^2 \mu_s & \xi^3 \\ \xi \mu_s \mu_p & \xi^2 \mu_p \end{pmatrix}.$$

于是, 通过极限吸收原理, Dirichlet Green 函数 $\mathbb{D}(x, y)$ 可以看作是 $\mathbb{D}_{\omega(1+i\varepsilon)}(x, y)$ 当 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 时的极限, 其中 $\mathbb{D}_{\omega(1+i\varepsilon)}(x, y)$ 为满足将式子 (3.42) 中将实圆频率 ω 替换为复圆频率 $\omega(1+i\varepsilon)$ 后相应方程的 Green 函数. 同样地, 对 $\mathbb{D}_{\omega(1+i\varepsilon)}(x, y)$ 关于 x_2 变量的 Fourier 变换, 得到 $\hat{\mathbb{D}}_{\omega(1+i\varepsilon)}(\xi, x_2; y_2)$, 且通过相同的推导, 其表达式与将 (3.44) 中将 k_s, k_p 替换为 $k_s(1+i\varepsilon), k_p(1+i\varepsilon)$ 后相应的式子一致. 于是有:

$$\begin{aligned} \mathbb{D}(x, y) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathbb{D}_{\omega(1+i\varepsilon)}(x, y) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{\mathbb{D}}_{\omega(1+i\varepsilon)}(\xi, x_2; y_2) e^{i(x_1-y_1)\xi} d\xi. \end{aligned}$$

同样类似于 Rayleigh 方程, 关于 $\gamma(\xi)$ 有如下定理

引理 3.1.10 令 $k_s, k_p \in \mathbb{C}$ 且有 $\operatorname{Im}(k_s) \geq 0, \operatorname{Im}(k_p) \geq 0$, 于是方程 $\gamma(\xi) = 0$ 在复平面中无零点.

证明. 令 $F(\xi) = \gamma(\xi) * (\xi^2 - \mu_s \mu_p)$, 于是观察到 $\gamma(\xi) = 0$ 的根一定是 $F(\xi) = 0$ 的根. 通过简单的计算, 可以得到 $F(\xi) = (k_s^2 + k_p^2)\xi^2 - k_p^2 k_s^2$. 然而, 又易得当且仅当 $\xi_0^2 = k_p^2 k_s^2 / (k_s^2 + k_p^2)$, $F(\xi_0) = 0$ 时, 有 $F(\xi) = 0$. 但是此时 $\gamma(\xi_0) = 2k_p^2 k_s^2 / (k_s^2 + k_p^2)$. 引理得证. \square

于是, 通过引理 3.1.10 及极限吸收原理, 我们得到如下 $\mathbb{D}(x, y)$ 的表达式:

$$\mathbb{D}(x, y) = \mathbb{G}(x, y) - \mathbb{G}(x, y') \tag{3.45}$$

$$+ \frac{i}{2\pi\omega^2} \int_{\mathbb{R}} \sum_{\alpha, \beta=s, p} \frac{\mathbb{B}_{\alpha\beta}(\xi)}{\gamma(\xi)} e^{i(\mu_{\alpha}x_2 + \mu_{\beta}y_2) + i(x_1 - y_1)\xi} d\xi. \tag{3.46}$$

同样地, 易得 Dirichlet Green 函数满足如下对称性或是空间互易性, 即

$$\mathbb{D}(x, y) = \mathbb{D}(y, x)^T \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^2. \tag{3.47}$$

由于我们的成像算法中, 需要对 Γ_0 上接收的数据反传, 这就需要用到 Dirichlet Green 函数 $\mathbb{D}(x, y)$ 的相关应力张量. 特别地, 我们针对 $x \in \Gamma_0, y \in \mathbb{R}_+^2$, 定义

$\mathbb{T}_D(x, y) \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ 为 Dirichlet Green 函数 $\mathbb{D}(x, y)$ 在 e_2 方向的关于变量 x_2 的应力向量, 记为

$$\mathbb{T}_D(x, y)q = \sigma(\mathbb{D}(x, y)q)e_2, \forall q \in \mathbb{R}^2.$$

于是, 通过 (3.45) 及求导计算, 我们得到

$$\mathbb{T}_D(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{\mathbb{T}}_D(\xi, 0; y_2) e^{i(x_1 - y_1)\xi} d\xi, \quad \forall x \in \Gamma_0, \quad (3.48)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{T}}_D(\xi, 0; y_2) &= \frac{1}{\gamma(\xi)} \left[\begin{pmatrix} \xi^2 & -\xi\mu_p \\ -\xi\mu_s & \mu_p\mu_s \end{pmatrix} e^{i\mu_p y_2} + \begin{pmatrix} \mu_s\mu_p & \xi\mu_p \\ \xi\mu_s & \xi^2 \end{pmatrix} e^{i\mu_s y_2} \right] \\ & \quad (3.49) \end{aligned}$$

$$:= \mathbb{T}_p(\xi) e^{i\mu_p y_2} + \mathbb{T}_s(\xi) e^{i\mu_s y_2}. \quad (3.50)$$

下面的定理与定理 3.1.1 相似, 其阐述了 $\mathbb{D}(x, y)$ 在 Γ_0 上的应力张量 $\mathbb{T}(x, y)$ 关于变量 x_1 的衰减行为. 观察式子 (3.48), 我们发现与式子 (3.34) 相比它的形式更为简洁. 于是, 我们用类似于估计 $\mathbb{N}(x, y)$ 的方法, 即通过变量替换, 然后利用引理 3.1.8 及引理 3.1.9, 我们可以证明如下定理, 这里我们省略细节.

定理 3.1.2 令 $x \in \Gamma_0$, $y \in \mathbb{R}_+^2$ 满足 $|x_1 - y_1|/|x - y| \geq (1 + \kappa)/2$ 和 $k_s y_2 \geq 1$. 存在只与 κ 有关的常数 C 成立如下估计

$$|\mathbb{T}_D(x, y)| + k_s^{-1} |\nabla_y \mathbb{T}_D(x, y)| \leq C \frac{k_s^2 y_2}{(k_s |x - y|)^{3/2}}.$$

观察定理 3.1.2, 我们发现 $\mathbb{T}_D(x, y)$ 及其导数在 x_1 增大时, 其值关于 x_1 是 $3/2$ 阶衰减的, 这与声波 Dirichlet Green 函数的 e_2 方向导数表现一致 [69]. 特别地, 相比于文献 [85, Lemma 2.2] 中对于该函数的估计, 关于常数我们给出了更为准确的刻画, 即分子中的 y_2 . 而且在 $\mathbb{N}(x, y)$ 中这种依赖于 y_2 的表示估计, 对我们后面的算法分析是非常关键的.

注 3.1.5 在这一节中, 我们注意到, 在对 $\mathbb{N}(x, y)$ 或是 $\mathbb{T}_D(x, y)$ 的估计讨论时, 前提都需要满足条件 $|x_1 - y_1|/|x - y| \geq (1 + \kappa)/2$. 这里我们作出说明: 第一, 经过分析此条件是必要的, 该条件是为了保证振幅函数的弱奇异点与相位函数的稳相点不在同一点. 若我们去除此条件, 我们只能得到更弱的一致估计; 第二, 在后文分析中, 当需要用到 $\mathbb{N}(x, y)$ 或是 $\mathbb{T}_D(x, y)$ 的衰减性质时, 该假设条件都可以被满足.

3.2 正散射问题解的适定性

现在, 我们将利用经典的极限吸收原理(见文献[23–25])来定义半空间正散射问题的散射解. 假设 D 为有界 Lipschitz 区域. 对于 $g \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, 令 $\varepsilon > 0$ 以及 u_ε 满足如下方程

$$\Delta_e u_\varepsilon + [\omega(1 + i\varepsilon)]^2 u_\varepsilon = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{D}, \quad (3.51)$$

$$u_\varepsilon = g \quad \text{on } \Gamma_D, \quad (3.52)$$

$$\sigma(u_\varepsilon) e_2 = 0 \quad \text{on } \Gamma_0. \quad (3.53)$$

由于上述方程中 $(1 + i\varepsilon)$ 的存在, 将方程转化为变分形式后, 易得相应的双线性算子是有界且椭圆的, 于是由 Lax-Milgram 定理, 可以推出方程 (3.51)-(3.53) 在空间 $H^1(\mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{D})$ 中存在唯一解 u_ε . 显然, 当 $s > 1/2$ 时, 成立 $u^\varepsilon \in H^{1,-s}(\mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{D})$.

为了后文表述方便, 我们引入如下双线性形式 $\mathcal{G}(\cdot, \cdot)$: 即对于任意 $u, v \in H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D})$ 且满足 $\Delta_e u, \Delta_e v \in L^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D})$, 令

$$\mathcal{G}(u, v) = \int_{\Gamma_D} [u(x) \cdot \sigma(v(x)) v - \sigma(u(x)) v \cdot v(x)] ds(x). \quad (3.54)$$

于是, 由于 $\mathbb{N}_{\omega(1+i\varepsilon)}(x, y)$ 在无穷远处指数衰减, 以及 $u^\varepsilon(x) \in H^1(\mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{D})$, 利用 Betti 公式(2.2)易得 u^ε 的 Green 积分表达式, 即对于任意 $q \in \mathbb{R}^2$ 有:

$$u^\varepsilon(y) \cdot q = \mathcal{G}(u^\varepsilon(\cdot), \mathbb{N}_{\omega(1+i\varepsilon)}(\cdot, y) q), \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{D}. \quad (3.55)$$

如果当 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 时, u^ε 在加权 Sobolev 空间 $H^{1,-s}(\mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{D})$, $s > 1/2$ 中存在极限 $u \in H^{1,-s}(\mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{D})$. 显然, u 满足如下方程:

$$\Delta_e u + \omega^2 u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{D}, \quad (3.56)$$

$$u = g \quad \text{on } \Gamma_D, \quad (3.57)$$

$$\sigma(u) e_2 = 0 \quad \text{on } \Gamma_0. \quad (3.58)$$

由此我们定义 u 为方程 (3.56)-(3.58) 的散射解. 下面, 我们将说明 u^ε 在空间 $H^{1,-s}(\mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{D})$, $s > 1/2$ 中, 当 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 时, 一定存在极限. 首先, 定义微分算子 $-\Delta_e$ 的定义域为:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\Delta_e, \mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{D}) &= \{v \in H^1(\mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{D}) : \Delta_e v \in L^2(\mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{D}), \\ &\quad v = 0 \quad \text{on } \Gamma_D, \quad \sigma(v) e_2 = 0 \quad \text{on } \Gamma_0\}. \end{aligned}$$

对文献[23]中的结果作适当的拓展, 我们可以得到如下结论:

引理 3.2.1 若 ω^2 不是算子 $-\Delta_e$ 在定义域 $\mathcal{D}(\Delta_e, \mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{D})$ 中的特征值, 则存在 $u \in H^{1,-s}(\mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{D})$ 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, u_ε 在空间 $H^{1,-s}(\mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{D})$ 中收敛到 u , 即

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u^\varepsilon - u\|_{H^{1,-s}(\mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{D})} = 0,$$

且 u 满足方程 (3.56)-(3.58).

根据引理 3.2.1, 只需要证明算子 $-\Delta_e$ 在定义域 $\mathcal{D}(\Delta_e, \mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{D})$ 中不存在正特征值, 就可以得到半空间障碍物散射问题的适定性. 在文献 [86] 中, Sini 针对半空间局部扰动问题证明了算子 $-\Delta_e$ 在定义域 $\mathcal{D}'(\Delta_e, \Omega)$ 中不存在正特征值, 其中

$$\mathcal{D}'(\Delta_e, \Omega) = \{v \in H^1(\Omega), \Delta_e v \in L^2(\Omega), \sigma(v)v = 0 \text{ on } \Gamma_\Omega\}.$$

这里 $\Omega \subset \mathbb{R}_+^2$ 是半空间 \mathbb{R}_+^2 在边界 Γ_0 上局部扰动后的无界区域, Γ_Ω 表示 Ω 的边界, 且对于足够大的 $R > 0$, 满足

$$\{x \in \Omega : \|x\| > R\} = \{x \in \mathbb{R}_+^2 : \|x\| > R\}.$$

下面我们将 [86] 中的结果推广到半空间障碍物外问题, 即算子 $-\Delta_e$ 在定义域 $\mathcal{D}(\Delta_e, \mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{D})$ 也不存在正特征值.

引理 3.2.2 假设 $\omega \in \mathbb{R}$ 以及 $u \in \mathcal{D}(\Delta_e, \mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{D})$ 满足如下方程:

$$\Delta_e u + \omega^2 u = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{D}, \tag{3.59}$$

$$u = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_D, \tag{3.60}$$

$$\sigma(u) \cdot e_2 = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_0. \tag{3.61}$$

于是我们断言有 $u = 0$.

在证明引理 3.2.2 前, 我们先引入如下结果. 有了该结果可以发现上述定理中的边界条件 (3.60) 不是本质的, 当将其换成其它边界条件时, 例如 Neumann 或是阻抗边界条件, 引理 3.2.2 依然成立.

引理 3.2.3 令函数 $f \in L^2(\mathbb{R}_+^2)$ 且有紧支集 $B \subseteq \mathbb{R} \times (h, +\infty)$, $h > 0$. 假设 $\omega \in \mathbb{R}$ 以及 $u \in \mathcal{D}'(\Delta_e, \mathbb{R}_+^2)$ 满足如下方程:

$$\Delta_e u + \omega^2 u = f. \tag{3.62}$$

我们断言在 $\mathcal{D}'(\Delta_e, \mathbb{R} \times (h, +\infty))$ 中 $u = 0$.

证明. 令 $\mathcal{F}_{x_1}(\cdot) : L^2(R_+^2) \rightarrow L^2(R_+^2)$ 是针对单变量 x_1 的 Fourier 变换, 即对于任意 $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\hat{g}(\xi, x_2) := \mathcal{F}_{x_1}(g) := \int_{\mathbb{R}} g(x_1, x_2) e^{ix_1\xi} dx_1.$$

于是对于方程 (3.62) 两端作变换 $\mathcal{F}_{x_1}(\cdot)$ 后得到关于变量 $x_2 \in R_+$ 的常微分方程组, 即对于任意 $\xi \in \mathbb{R}$ 有,

$$\begin{aligned} \mu \frac{d^2 \hat{u}_1}{dx_2^2} + \mathbf{i}(\lambda + \mu)\xi \frac{d\hat{u}_2}{dx_2} + (\omega^2 - (\lambda + 2\mu)\xi^2)\hat{u}_1 &= \hat{f}_1, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{d^2 \hat{u}_2}{dx_2^2} + \mathbf{i}(\lambda + \mu)\xi \frac{d\hat{u}_1}{dx_2} + (\omega^2 - \mu\xi^2)\hat{u}_2 &= \hat{f}_2. \end{aligned}$$

以及在 $x_2 = 0$ 处的边界条件,

$$\begin{aligned} \mu \frac{d\hat{u}_1}{dx_2} + \mathbf{i}\mu\xi\hat{u}_2 &= 0, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{d\hat{u}_2}{dx_2} + \mathbf{i}\lambda\xi\hat{u}_1 &= 0. \end{aligned}$$

为了将上述方程组的系数变化成实数, 我们作如下函数替换:

$$\begin{aligned} v_1 &= \mathbf{i}\hat{u}_1, & v_2 &= \hat{u}_2, & \mathbf{v} &= (v_1, v_2)^T, \\ q_1 &= \mathbf{i}\hat{f}_1, & q_2 &= \hat{f}_2, & \mathbf{q} &= (q_1, q_2)^T. \end{aligned}$$

于是通过整理得到只含实系数的方程组:

$$[\mathbb{A}_1 \frac{d^2}{dx_2^2} + (\mathbb{A}_2 - (\mathbb{A}_2)^T)\xi \frac{d}{dx_2} - \mathbb{A}_3\xi^2 + \omega^2] \mathbf{v} = \mathbf{q} \quad \text{in } \mathbb{R}_+, \quad (3.63)$$

$$(\mathbb{A}_1 \frac{d}{dx_2} + \mathbb{A}_2\xi) \mathbf{v} = 0 \quad \text{on } x_2 = 0. \quad (3.64)$$

其中

$$\mathbb{A}_1 = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mu \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}_3 = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

为了消去方程 (3.63) 中的源函数 \mathbf{q} , 我们引入辅助函数 \mathbf{w} 且其满足如下二次常微分方程组初值问题,

$$\begin{aligned} [\mathbb{A}_1 \frac{d^2}{dx_2^2} + (\mathbb{A}_2 - (\mathbb{A}_2)^T)\xi \frac{d}{dx_2} - \mathbb{A}_3\xi^2 + \omega^2] \mathbf{w} &= \mathbf{q} \quad \text{in } (0, h), \\ \mathbf{w} &= 0, \quad (\mathbb{A}_1 \frac{d}{dx_2} + \mathbb{A}_2\xi) \mathbf{w} = 0 \quad \text{on } x_2 = h. \end{aligned}$$

引入新的向量函数 $\mathbb{W} = (\mathbf{w}, (\mathbb{A}_1 \frac{d}{dx_2} + \mathbb{A}_2 \xi) \mathbf{w})^T, \mathbf{Q} = (0, 0, \mathbf{q})^T$, 可以将关于 \mathbf{w} 的二次常微分方程组转化成关于 \mathbb{W} 的一次常微分方程组,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx_2} \mathbb{W} &= \mathbb{A} \mathbb{W} + \mathbf{Q} \quad \text{in } (0, h), \\ \mathbb{W} &= 0 \quad \text{on } x_2 = h.\end{aligned}$$

其中

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -\mathbb{A}_1^{-1} \mathbb{A}_2 \xi & \mathbb{A}_1^{-1} \\ -\mathbb{A}_2^T \mathbb{A}_1^{-1} \mathbb{A}_2 \xi^2 + \mathbb{A}_3 \xi^2 - \omega^2 & \mathbb{A}_2^T \mathbb{A}_1^{-1} \xi \end{pmatrix}.$$

利用针对常系数一次常微分方程组的标准理论, 我们可以得到,

$$\mathbb{W}(\xi, x_2) = -\Phi(\xi, x_2) \int_h^{x_2} \Phi^{-1}(\xi, t) \mathbf{Q}(\xi, t) dt,$$

其中

$$\Phi(\xi, t) = \begin{pmatrix} -\mu_s(\xi) e^{i\mu_s(\xi)t} & -\xi e^{i\mu_p(\xi)t} & -\mu_s(\xi) e^{-i\mu_s(\xi)t} & \xi e^{-i\mu_p(\xi)t} \\ -i\xi e^{i\mu_s(\xi)t} & i\mu_p(\xi) e^{i\mu_p(\xi)t} & i\xi e^{-i\mu_s(\xi)t} & i\mu_p(\xi) e^{-i\mu_p(\xi)t} \\ -i\mu\beta(\xi) e^{i\mu_s(\xi)t} & -2i\mu\xi\mu_p(\xi) e^{i\mu_p(\xi)t} & i\mu\beta e^{-i\mu_s(\xi)t} & -2i\mu\xi\mu_p(\xi) e^{-i\mu_p(\xi)t} \\ 2\mu\xi\mu_s(\xi) e^{i\mu_s(\xi)t} & -\mu\beta(\xi) e^{i\mu_p(\xi)t} & 2\mu\xi\mu_s(\xi) e^{-i\mu_s(\xi)t} & \mu\beta(\xi) e^{-i\mu_p(\xi)t} \end{pmatrix}.$$

下面, 我们将 $\mathbf{w}(\xi, x_2)$ 在区间 (h, ∞) 上延拓为零. 易得 $\mathbf{w}(\xi, x_2)$ 在关于 $x_2 \in \mathbb{R}_+$ 满足方程组 (3.63). 因此, 由 $\mu_p(\xi)$ 和 $\mu_s(\xi)$ 的性质及引理 3.1.1, 易得对于任意 $t \geq 0$ 有 $\Phi(\xi, t)$ 及 $\Phi(\xi, t)^{-1}$ 关于 ξ 在 $\mathbb{R} \setminus \{\pm k_p, \pm k_s, \pm k_R\}$ 中实解析, 即在 $\mathbb{R} \setminus \{\pm k_p, \pm k_s, \pm k_R\}$ 中任一点的某个小邻域内函数都存在 Taylor 级数展开. 又因为 $f(x)$ 存在紧支集, 我们可以推出关于几乎所有的 $\xi \in \mathbb{R}$, $\mathbf{w}(\xi, x_2)$, $x_2 \geq 0$ 实解析. 同理 $(\mathbb{A}_1 \frac{d}{dx_2} + \mathbb{A}_2 \xi) \mathbf{w}$ 也具有该性质.

令 $\mathbf{U} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$ 且表示为 $\mathbf{U} = (U_1, U_2)^T$. 于是, 易得 \mathbf{U} 满足如下方程组:

$$[\mathbb{A}_1 \frac{d^2}{dx_2^2} + (\mathbb{A}_2 - (\mathbb{A}_2)^T) \xi \frac{d}{dx_2} - \mathbb{A}_3 \xi^2 + \omega^2] \mathbf{U} = 0 \quad \text{in } x_2 \in \mathbb{R}_+, \quad (3.65)$$

$$(\mathbb{A}_1 \frac{d}{dx_2} + \mathbb{A}_2 \xi) \mathbf{U} = (\mathbb{A}_1 \frac{d}{dx_2} + \mathbb{A}_2 \xi) \mathbf{w} \quad \text{on } x_2 = 0. \quad (3.66)$$

又因为上述方程组的系数相对于变量 x_2 是常数, 于是可以得到 $\mathbf{U}(\xi, x_2)$ 有如下表达形式,

$$\begin{aligned}\mathbf{U}(\xi, x_2) &= c_1(\xi) \begin{pmatrix} -\mu_s \\ -i\xi \end{pmatrix} e^{i\mu_s x_2} + c_2(\xi) \begin{pmatrix} -\xi \\ i\mu_p \end{pmatrix} e^{i\mu_p x_2} \\ &\quad + c_3(\xi) \begin{pmatrix} -\mu_s \\ i\xi \end{pmatrix} e^{-i\mu_s x_2} + c_4(\xi) \begin{pmatrix} \xi \\ i\mu_p \end{pmatrix} e^{-i\mu_p x_2}.\end{aligned}$$

当 $\xi^2 \leq k_p^2$ 时, 易得在 $L_{x_2}^2(\mathbb{R}_+)$ 中有 $\mathbf{U} = 0$. 因此, 由边界条件 (3.66) 易得当 $\xi^2 \leq k_p^2$ 时,

$$(\mathbb{A}_1 \frac{d}{dx_2} + \mathbb{A}_2 \xi) \mathbf{w}|_{x_2=0} = 0.$$

于是由 $(\mathbb{A}_1 \frac{d}{dx_2} + \mathbb{A}_2 \xi) \mathbf{w}|_{x_2=0}$ 关于几乎所有的 $\xi \in \mathbb{R}$ 解析及边界条件 (3.66) 我们可以推出, 关于几乎所有的 $\xi \in \mathbb{R}$, 成立

$$(\mathbb{A}_1 \frac{d}{dx_2} + \mathbb{A}_2 \xi) \mathbf{U} = 0 \quad \text{on } x_2 = 0. \quad (3.67)$$

进一步, 当 $\xi^2 > k_p^2$, $\mathbf{U} \in L_{x_2}^2(\mathbb{R}_+)$ 存在如下形式,

$$\mathbf{U}(\xi, x_2) = \begin{cases} c_0(\xi) \begin{pmatrix} -\xi \\ i\mu_p \end{pmatrix} e^{i\mu_p x_2}, & k_p^2 < \xi^2 \leq k_s^2, \\ c_1(\xi) \begin{pmatrix} -\mu_s \\ -i\xi \end{pmatrix} e^{i\mu_s x_2} + c_2(\xi) \begin{pmatrix} -\xi \\ i\mu_p \end{pmatrix} e^{i\mu_p x_2}, & \xi^2 > k_s^2 \end{cases}.$$

于是有

$$(\mathbb{A}_1 \frac{d}{dx_2} + \mathbb{A}_2 \xi) \mathbf{U} = \begin{cases} c_0(\xi) \begin{pmatrix} -2i\mu\xi\mu_p \\ -\mu\beta \end{pmatrix} e^{i\mu_p x_2}, & k_p^2 < \xi^2 \leq k_s^2, \\ c_1(\xi) \begin{pmatrix} -i\mu\beta \\ 2\mu\xi\mu_s \end{pmatrix} e^{i\mu_s x_2} + c_2(\xi) \begin{pmatrix} -2i\mu\xi\mu_p \\ -\mu\beta \end{pmatrix} e^{i\mu_p x_2}, & \xi^2 > k_s^2 \end{cases}.$$

因此, 利用条件 (3.67), 易得 $c_0(\xi) = 0$ 和

$$\det \begin{pmatrix} -i\mu\beta & -2i\mu\xi\mu_p \\ 2\mu\xi\mu_s & -\mu\beta \end{pmatrix} = -i\mu(\beta^2 + 4\xi^2\mu_s\mu_p) = 0 \quad \text{for } \xi^2 > k_s^2. \quad (3.68)$$

利用引理 3.1.1, 易得当 $\xi \neq \pm k_R$ 时 $c_1(\xi) = c_2(\xi) = 0$. 于是, 关于几乎所有的 $\xi \in \mathbb{R}$ 及 $x \in \mathbb{R}^+$, 成立 $\mathbf{U}(\xi, x_2) = 0$. 由于 $\mathbf{v} = \mathbf{U} + \mathbf{w}$, 易知关于几乎所有的 $\xi \in \mathbb{R}$ 及 $x_2 \in (h, +\infty)$ 成立 $\mathbf{v}(\xi, x_2) = 0$. 于是通过将 $\hat{\mathbf{u}}(\xi, x_2)$ 作逆 Fourier 变换, 引理得证. \square

引理 3.2.2 的证明:

由于 $D \subsetneq \mathbb{R}_+^2$, 我们可以找到半径分别为 R_1 和 R_2 的同心圆 B_{R_1}, B_{R_2} 且满足关系式 $D \subsetneq B_{R_1} \subsetneq B_{R_2} \subsetneq \mathbb{R}_+^2$. 令 $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^2)$ 是一截断函数, 且满足 $0 \leq \chi \leq 1$, 当 $x \in B_{R_1}$ 时 $\chi = 0$ 以及当 $x \notin \overline{B_{R_2}}$ 时 $\chi = 1$.

进一步，我们定义 $v = \chi u$ ，易得 v 满足方程 (3.62)，且其中

$$f = \sigma(u) \nabla \chi + (\lambda + \mu)(\nabla^2 \chi u + \nabla u \nabla \chi) + \mu \Delta \chi u + \mu \operatorname{div} u \nabla \chi,$$

这里 $\nabla^2 \chi$ 是 χ Hessian 矩阵。显然成立 $f \in L^2(\mathbb{R}_+^2)$ 且存在紧支集。因此，利用引理 3.2.3，可以得到存在足够大的 $h > 0$ ，当 $x \in \mathbb{R} \times (h, +\infty)$ 时， $u = v = 0$ 。最后，利用弹性波方程的唯一延拓性原理 [87]，立得在 \mathbb{R}_+^2 中， $u=0$ 。引理得证。□

利用相似的理论推导，上述结果可以推广到可穿透障碍物情形，即有如下定理，

引理 3.2.4 假设 $\omega \in \mathbb{R}$ 以及 $u \in \mathcal{D}(\Delta_e, \mathbb{R}_+^2)$ 满足如下方程：

$$\Delta_e \mathbf{u} + \omega^2(1 + n(x))\mathbf{u} = 0,$$

这里 $n(x) \in L^\infty(D)$ 是一个在 D 存在紧支集的正标量函数，于是我们断言有 $\mathbf{u} = 0$ 。

现在，我们利用引理 3.2.1 和引理 3.2.2，易得如下半空间弹性波散射问题解的适定性。

定理 3.2.1 对于任意 $g \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ ，半空间散射问题 (3.56)-(3.58) 存在唯一的散射解 $u \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{D})$ 。此外，对于任意有界区域 $O \subset \mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{D}$ 存在常数 $C > 0$ 成立如下估计：

$$\|u\|_{H^1(O)} \leq C \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)}.$$

关于半空间散射问题在其它边界条件的情形或是对于可穿透障碍的情形，以上论证都可以类似推广到相应情形。利用 u^ε 的 Green 表示公式 (3.55)，令 $\varepsilon \rightarrow 0$ ，可以得到关于半空间弹性波问题散射解 u 的 Green 表示公式：

$$u(y) \cdot q = \mathcal{G}(u(\cdot), \mathbb{N}(\cdot, y)q), \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{D}, \quad \forall q \in \mathbb{R}^2. \quad (3.69)$$

注 3.2.1 我们针对散射解做一说明，在通篇全文中提到的散射解，无论方程建立在哪种背景介质或是无界区域 Ω 内，散射解 u 都是指将原方程中的角频率 ω 替换成 $\omega(1 + i\varepsilon)$ 后得到相应方程的解 u^ε 在空间 $H^{1,-s}(\Omega)$, $s > 1/2$ 中的极限。特别地，利用极限吸收原理得到的全空间散射问题的散射解 [12, 25] 与所谓的 Kupradze's 辐射条件下得出的散射解等价。

从上面的讨论，我们得知由于半空间表面的自由边界条件存在，使得相应的散射问题与全空间弹性波散射问题的研究截然不同。于是，一个自然的想法就是，当散射体远离半空间的表面时，该自由边界条件对于散射波的影响是否可以忽略，即此时是否可以近似看成一个全空间弹性波散射问题。

下面的定理推广了文献 [69, Theorem 4.1] 中关于声波情形下半空间散射解与相应的全空间散射解的差距的刻画。事实上，当障碍物远离半空间表面 Γ_0 时，我们可以认为半空间散射解和全空间散射解非常相近。

定理 3.2.2 假设 $g \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ ，

u_1 是如下半空间散射问题的散射解，

$$\Delta_e u_1 + \omega^2 u_1 = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{D}, \quad (3.70)$$

$$u_1 = g \text{ on } \Gamma_D, \quad \sigma(u_1)e_2 = 0 \text{ on } \Gamma_0, \quad (3.71)$$

u_2 是如下全空间散射问题的散射解，

$$\Delta_e u_2 + \omega^2 u_2 = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}, \quad (3.72)$$

$$u_2 = g \text{ on } \Gamma_D. \quad (3.73)$$

于是存在仅依赖于 κ 而与 k_s, h, d_D 都无关的常数 $C > 0$ ，成立如下估计，

$$\begin{aligned} & \|\sigma(u_1 - u_2)v\|_{H^{-1/2}(\Gamma_D)} \\ & \leq \frac{C}{\mu}(1 + \|T_1\|)(1 + \|T_2\|)(1 + k_s d_D)^2 (k_s h)^{-1/2} \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)}. \end{aligned}$$

这里 $T_1, T_2 : H^{1/2}(\Gamma_D) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma_D)$ 是弹性波散射问题 (3.70)-(3.71) 和 (3.72)-(3.73) 相应的 *Dirichlet-to-Neumann* 算子。 $\|T_1\|, \|T_2\|$ 表示相应的算子范数。

证明. 我们先做如下说明，以下过程中如有必要，都是先在将 ω 替换成 $\omega(1 + \mathbf{i}\varepsilon)$ 后进行的，最后通过令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 得到结果。为了表述简便，后文中我们将省略极限吸收这一步骤的叙述。

令 $w(x)$ 为如下方程的散射解：

$$\Delta_e w + \omega^2 w = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}_+^2, \quad (3.74)$$

$$\sigma(w)e_2 = -\sigma(u_2)e_2 \quad \text{on } \Gamma_0. \quad (3.75)$$

于是易得 $u_1 - u_2 - w$ 是方程 (3.70)-(3.71) 的散射解，且满足边界条件

$$u_1 - u_2 - w = -w \quad \text{on } \Gamma_D.$$

于是利用定理 3.2.3 和估计 (2.1), 我们得到:

$$\begin{aligned} \|\sigma(u_1 - u_2)v\|_{H^{-1/2}(\Gamma_D)} &\leq \|T_1(u_1 - u_2 - w)\|_{H^{-1/2}(\Gamma_D)} + \|\sigma(w)v\|_{H^{-1/2}(\Gamma_D)} \\ &\leq C(1 + \|T_1\|) \max_{x \in D}(|w(x)| + d_D |\nabla w(x)|), \end{aligned} \quad (3.76)$$

这里第二个不等式利用了 $T_1 : H^{1/2}(\Gamma_D) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma_D)$ 是半空间散射问题 (3.70)-(3.71) 的 Dirichlet-to-Neumann 算子的定义.

利用积分表示公式, 散射问题 (3.74)-(3.75) 的散射解 $w(x)$ 有如下表示:

$$w(y) \cdot e_j = \int_{\Gamma_0} \sigma(u_2(x)) e_2 \cdot \mathbb{N}(x, y) e_j ds(x), \quad \forall y \in \mathbb{R}^2, j = 1, 2. \quad (3.77)$$

另一方面, 同样利用全空间散射解的积分表达公式, 我们有:

$$u_2(x) \cdot e_j = \mathcal{G}(u_2(\cdot), \mathbb{G}(\cdot, x) e_j), \quad \forall x \in \Gamma_0, j = 1, 2,$$

这里的双线性算子 $\mathcal{G}(\cdot, \cdot)$ 在 (3.54) 中定义. $\mathbb{G}(\cdot, \cdot)$ 是基本解 (3.1). 对于任意 $x \in \Gamma_0, z \in \mathbb{R}^2$, 我们定义 $\mathbb{T}(z, x) \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ 是基本解 $\mathbb{G}(z, x)$ 在 e_2 方向的应力张量, 即对于任意 $q \in \mathbb{R}^2$ 有:

$$\mathbb{T}(z, x)q = \sigma(\mathbb{G}(z, x)q)e_2,$$

其中 $\mathbb{T}(z, x)$ 的第 (i, j) 个元素表示为:

$$[\mathbb{T}(z, x)]_{ij} = [\sigma(\mathbb{G}(z, x)e_j)e_2]e_i, \quad i, j = 1, 2.$$

利用基本解的对称性 $\mathbb{G}(x, y) = \mathbb{G}(x, y)^T$, 通过简单的计算, 可以得到:

$$\sigma(u_2(x))e_2 \cdot e_i = \mathcal{G}(u_2(\cdot), \mathbb{T}(\cdot, x)^T e_i), \quad \forall x \in \Gamma_0, i = 1, 2,$$

于是, 将上式代入式 (3.77) 易得:

$$\begin{aligned} w(y) \cdot e_j &= \mathcal{G}(u_2(\cdot), \left[\int_{\Gamma_0} \sum_{i=1}^2 [\mathbb{T}(\cdot, x)^T e_i] \cdot [e_i^T \mathbb{N}(x, y) e_j] ds(x) \right]) \\ &= \mathcal{G}(u_2(\cdot), \mathbb{V}(\cdot, y) e_j), \end{aligned} \quad (3.78)$$

其中有:

$$\mathbb{V}(z, y) = \int_{\Gamma_0} \mathbb{T}(z, x)^T \mathbb{N}(x, y) ds(x), \quad \forall y \in \mathbb{R}^2, z \in \Gamma_D.$$

注意到 $T_2 : H^{1/2}(\Gamma_D) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma_D)$ 全空间散射问题 (3.72)-(3.73) 的 Dirichlet-to-Neumann 算子, 所以有:

$$\|\sigma(u_2)v\|_{H^{-1/2}(\Gamma_D)} \leq \|T_2\| \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)}.$$

通过等式(3.78)及估计(2.1), 我们得到:

$$|w(y)| + d_D |\nabla w(y)| \quad (3.79)$$

$$\leq C(1 + \|T_2\|) \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)} \max_{z \in \Gamma_D} \sum_{i,j=0}^1 d_D^{i+j} |\nabla_z^i \nabla_y^j \mathbb{V}(z, y)|. \quad (3.80)$$

为了估计 $\mathbb{V}(z, y)$, 类似于推导 Neumann Green 函数的方法利用 Parseval 等式和引理 3.1.4 得到:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(z, y) &= \frac{1}{2\pi} \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} \hat{\mathbb{T}}(z_2; \xi, 0)^T \hat{\mathbb{N}}(\xi, 0; y_2) e^{-i\xi(y_1+z_1)} d\xi \\ &\quad - \frac{i}{2} [\hat{\mathbb{T}}(z_2; \xi, 0)^T \hat{\mathbb{N}}(\xi, 0; y_2) e^{-i\xi(y_1+z_1)}]_{-k_R}^{k_R}. \end{aligned}$$

利用基本解 $\mathbb{G}(z, x)$ 在频域中的表达式(3.6)-(3.7), 可以得到

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{T}}(z_2; \xi, 0) &= \frac{\mu}{2\omega^2} \begin{pmatrix} \varphi & \frac{\xi\varphi}{\mu_s} \\ 2\xi\mu_s & 2\xi^2 \end{pmatrix} e^{i\mu_s z_2} + \frac{\mu}{2\omega^2} \begin{pmatrix} 2\xi^2 & -2\xi\mu_p \\ -\frac{\xi\varphi}{\mu_p} & \varphi \end{pmatrix} e^{i\mu_p z_2} \\ &:= \tilde{\mathbb{T}}_s(\xi) e^{i\mu_p z_2} + \tilde{\mathbb{T}}_p(\xi) e^{i\mu_s z_2}. \end{aligned}$$

进一步, 利用表达式(3.33), 我们得到

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(z, y) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\alpha, \beta=p, s} \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\tilde{\mathbb{T}}_\alpha(\xi)^T \mathbb{N}_\beta(\xi)}{\delta(\xi)} e^{i(\mu_\alpha z_2 + \mu_\beta y_2) - i(y_1 + z_1)\xi} d\xi \\ &\quad - \frac{i}{2} \sum_{\alpha, \beta=p, s} \left[\frac{\tilde{\mathbb{T}}_\alpha(\xi)^T \mathbb{N}_\beta(\xi)}{\delta'(\xi)} e^{i(\mu_\alpha z_2 + \mu_\beta y_2) - i(y_1 + z_1)\xi} \right]_{-k_R}^{k_R} \\ &:= \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2. \end{aligned}$$

为了估计 \mathbf{V}_1 我们将积分区间分解成 $(-k_s, k_s)$ 和 $\mathbb{R} \setminus [-k_s, k_s]$. 利用 Van der Corput 引理 3.1.7 易得在区间 $(-k_s, k_s)$ 上的相应积分的估计. 利用第4章中引理 4.2.4 中的论证, 可以得到在区间 $\mathbb{R} \setminus [-k_s, k_s]$ 上相应积分的估计. 由此得到,

$$|\mathbf{V}_1| \leq C\mu^{-1}(k_s h)^{-1/2}.$$

进一步, 通过第4章中引理 4.2.2 的论证方法易得:

$$|\mathbf{V}_2| \leq C\mu^{-1} e^{-\sqrt{k_R - k_s} h}.$$

最终, 结合以上两个估计, 我们得到:

$$\max_{z \in \Gamma_D} |\mathbb{V}(z, y)| \leq \frac{C}{\mu} (k_s h)^{-1/2}, \quad \forall y \in \bar{D}.$$

通过类似的理论推导可以得到:

$$\max_{z \in \Gamma_D} k_s^{i+j} |\nabla_z^i \nabla_y^j \mathbb{V}(z, y)| \leq \frac{C}{\mu} (k_s h)^{-1/2}, \quad \forall y \in \bar{D}, i, j = 0, 1.$$

将上述两个估计代入式子 (3.80) 中, 我们有:

$$\max_{y \in \bar{D}} (|w(y)| + d_D |\nabla w(y)|) \leq \frac{C}{\mu} (1 + \|T_2\|) (1 + k_s d_D)^2 (k_s h)^{-1/2} \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)}.$$

利用式子估计式 (3.76), 引理得证. \square

3.3 本章小结

本章通过严格的数学推导给出了新的 Neumann Green 函数 $\mathbb{N}(x, y)$ 的表达式 (3.25), 进一步为了分析其衰减性质给出了表达式 (3.35). 同样的论证手段可以用于 Dirichlet Green 函数 $\mathbb{D}(x, y)$ 及其应力张量 $\mathbb{T}_D(z, y)$. 利用 Van der Corput 的推广, 我们给出了上述 Green 函数的在特定区域的衰减性质, 从而保证了后文点扩散函数存在的意义. 然后, 通过经典的极限吸收原理证明了半空间弹性波散射问题解的适定性. 最后, 我们描述了半空间障碍物散射问题的散射解与相应的全空间障碍物散射问题的散射解之间的差随着障碍物远离半空间表面而逐渐衰减.

第4章 半空间反散射问题的逆时偏移算法

从本章开始，我们将研究半空间弹性波逆散射问题。在地震波勘探领域中，以及弹性体无损检测领域中，半空间弹性波模型得到了非常重要的实际应用。不同于半空间声波模型，半空间弹性波模型存在一种表面波，这种波只在半空间表面传播且其波数比相应的弹性波体波要大。

我们先针对障碍物为一点源时，提出点扩散函数，并对点扩散函数进行分辨率分析及数值实验。然后，我们提出了求解半空间弹性介质中的障碍物成像问题的单频逆时偏移算法。该算法能够对不同类型的障碍物进行有效成像，确定其位置、大小和形状，并且不需要提前知道障碍物的先验信息。由于，每一个散射波都可以利用 Green 积分公式看成是在障碍物表面的二次点源波的叠加（惠更斯原理），因此我们可以利用点扩散函数及相应方程的正则性来研究逆时偏移成像函数的分辨率。最后，我们用大量的数值算例验证了半空间弹性波逆时偏移算法对障碍物成像问题的有效性。

4.1 问题介绍

我们先来介绍半空间弹性波反散射问题的模型设置，如图 4.1。令 $D \subset \mathbb{R}_+^2 =$

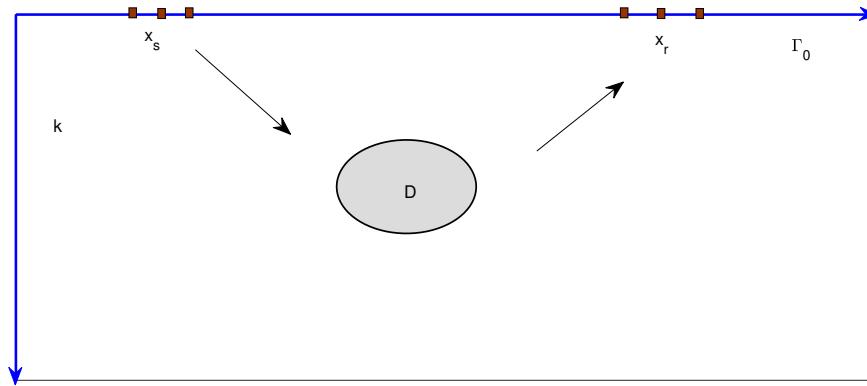


图 4.1 半空间弹性波障碍物散射模型。

$\{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$ 是嵌入在半空间中的有界 Lipschitz 区域，其中 ν 是边界 Γ_D 的单位外法向。我们假设入射波是由位于半空间表面 $\Gamma_0 = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$ 上的 x_s 的点源激发，且其激发的极化方向为 $q \in \mathbb{R}^2$ 。假设半空间中的背景介质是弹性介质，且其表面满足自由边界条件，于是入射波即为半空间弹性波

的 Neumann Green 函数 $\mathbb{N}(x, x_s)$. 假设接收点 $x_r \in \Gamma_0$, 于是接收到的测量数据为 $u_q(x_r, x_s) = u_q^s(x_r, x_s) + \mathbb{N}(x_r, x_s)q$, $x_r \in \Gamma_0$, 其中 $u_q^s(x, x_s)$ 是如下半空间弹性波方程的散射解:

$$\Delta_e u_q^s(x, x_s) + \rho \omega^2 u_q^s(x, x_s) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{D}, \quad (4.1)$$

$$u_q^s(x, x_s) = -\mathbb{N}(x, x_s)q \quad \text{on } \Gamma_D, \quad (4.2)$$

$$\sigma(u_q^s(x, x_s))e_2 = 0 \quad \text{on } \Gamma_0, \quad (4.3)$$

这里 e_i 是沿着 $x_i, i = 1, 2$ 轴的单位向量.

如何通过测量到的散射数据 $u_q^s(x_r, x_s)$ 来确定散射体 D 的位置、大小和形状就是本章将要解决的问题.

4.2 点扩散函数

在这一节中, 我们将详细介绍半空间弹性波点扩散函数 (point spread function). 点扩散函数是一种针对半空间介质中点源的成像函数. 在文献 [69] 中, Chen 等提出了半空间声波的点扩散函数, 我们这里将其推广到半空间弹性波的情形, 而此时的点扩散函数是一个 2×2 的矩阵. 假设在半空间的表面 $\Gamma_0^d = \{(x_1, x_2)^T \in \Gamma_0 : x_1 \in (-d, d)\}$ 上接收到的数据为 Neumann Green 函数 $\mathbb{N}(x, y)$, 即位于 y 处的点源的数据, 这里 $d > 0$ 称为孔径. 于是我们将有限孔径点扩散函数 $\mathbb{J}_d(x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}_+^2$ 定义为将数据 $\mathbb{N}(x, y)\chi_{(-d, d)}$ 作为在 Γ_0 上的 Dirichlet 边界条件的时逆反传波场, 这里 $\chi_{(-d, d)}$ 为区间 $(-d, d)$ 上的特征函数. 更准确的来说, $\mathbb{J}_d(x, y)e_j, j = 1, 2$, 是如下散射问题的解:

$$\begin{aligned} \Delta_e [\mathbb{J}_d(x, y)e_j] + \omega^2 [\mathbb{J}_d(x, y)e_j] &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}_+^2, \\ \mathbb{J}_d(x, y)e_j &= [\overline{\mathbb{N}(x, y)}e_j]\chi_{(-d, d)} \quad \text{on } \Gamma_0. \end{aligned}$$

利用弹性波的积分表示公式, 我们有, 对于任意的 $z, y \in \mathbb{R}_+^2$,

$$\begin{aligned} [\mathbb{J}_d(z, y)]_{ij} &= e_i \cdot [\mathbb{J}_d(z, y)e_j] \\ &= \int_{\Gamma_0^d} \mathbb{T}_D(x, z)e_i \cdot \overline{\mathbb{N}(x, y)}e_j ds(x), \quad i, j = 1, 2. \end{aligned}$$

进一步利用矩阵表达, 可以简化为

$$\mathbb{J}_d(z, y) = \int_{\Gamma_0^d} \mathbb{T}_D(x, z)^T \overline{\mathbb{N}(x, y)} ds(x). \quad (4.4)$$

通过观察表达式(4.4)、定理3.1.1以及定理3.1.2不难发现,当 $d \rightarrow \infty$ 时, $\mathbb{J}_d(z, y)$ 收敛。因此,自然地,我们就可以定义半空间弹性波点扩散函数 $\mathbb{J}(x, y) \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$, $x, y \in \mathbb{R}_+^2$,即为

$$\mathbb{J}(z, y) = \int_{\Gamma_0} \mathbb{T}_D(x, z)^T \overline{\mathbb{N}(x, y)} ds(x). \quad (4.5)$$

于是,利用极限吸收原理,我们有

$$\mathbb{J}(z, y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Gamma_0} \mathbb{T}_D^{\omega(1+i\varepsilon)}(x, z)^T \overline{\mathbb{N}_{\omega(1+i\varepsilon)}(x, y)} ds(x),$$

这里 $\mathbb{T}_D^{\omega(1+i\varepsilon)}(x, z)q = \sigma(\mathbb{D}_{\omega(1+i\varepsilon)}(x, z)q)e_2, \forall q \in \mathbb{R}^2$ 。利用Parserval等式,引理3.1.4,式子(3.33)和式子(3.50),我们可以得到:

$$\begin{aligned} \mathbb{J}(z, y) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\alpha, \beta=p, s} \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathbb{T}_\alpha(\xi)^T \overline{\mathbb{N}_\beta(\xi)}}{\delta(\xi)} e^{i(\mu_\alpha z_2 - \bar{\mu}_\beta y_2) + i(y_1 - z_1)\xi} d\xi \\ &\quad - \frac{i}{2} \sum_{\alpha, \beta=p, s} \left[\frac{\mathbb{T}_\alpha(\xi)^T \overline{\mathbb{N}_\beta(\xi)}}{\delta'(\xi)} e^{i(\mu_\alpha z_2 - \bar{\mu}_\beta y_2) + i(y_1 - z_1)\xi} \right]_{-k_R}^{k_R}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

为了后文讨论方便,我们把 $\mathbb{J}(z, y)$ 中的一部分定义为:

$$\begin{aligned} \mathbb{F}(z, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-k_p}^{k_p} \frac{\mathbb{T}_p(\xi)^T \overline{\mathbb{N}_p(\xi)}}{\delta(\xi)} e^{i\mu_p(z_2 - y_2) + i(y_1 - z_1)\xi} d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-k_s}^{k_s} \frac{\mathbb{T}_s(\xi)^T \overline{\mathbb{N}_s(\xi)}}{\delta(\xi)} e^{i\mu_s(z_2 - y_2) + i(y_1 - z_1)\xi} d\xi. \end{aligned} \quad (4.7)$$

在研究半空间弹性波点扩散函数之前,我们先来说明成像函数的采样区域。令 Ω 为成像函数的采样区域,定义 $h = \text{dist}(\Omega, \Gamma_0)$ 是 Ω 与 Γ_0 的距离。此外,我们假设存在常数 $0 < c_1 < 1, c_2 > 0$ 使得下述条件成立:

$$|x_1| \leq c_1 d, \quad |x - y| \leq c_2 h, \quad \forall x, y \in \Omega. \quad (4.8)$$

注4.2.1 上述假设中,第一个条件代表成像函数的采样区域不能太靠近孔径边缘,第二个条件代表采样区域的尺寸相比于其与 Γ_0 的距离不能太大。第二个条件通常是合理的,因为我们感兴趣的障碍物的尺寸大小要比入射波的波长小或是相当,即 $k_s h \gg 1$ 。

下面的引理不仅说明了 $\mathbb{J}(z, y)$ 是 $\mathbb{J}_d(z, y)$ 在 $d \rightarrow \infty$ 的极限,而且还给出了 $\mathbb{J}_d(z, y) - \mathbb{J}(z, y)$ 关于 (h/d) 的误差估计。

引理 4.2.1 假设 $k_s h \geq 1$ 和 $d \gg h$. 对于任意 $z, y \in \Omega$, 我们有

$$\begin{aligned} & |\mathbb{J}(z, y) - \mathbb{J}_d(z, y)| + k_s^{-1} |\nabla_y(\mathbb{J}(z, y) - \mathbb{J}_d(z, y))| \\ & \leq \frac{C}{\mu} \left[\left(\frac{h}{d} \right)^2 + (k_s h)^{1/2} e^{-k_s h \sqrt{k_R^2 - 1}} \left(\frac{h}{d} \right)^{1/2} \right], \end{aligned}$$

这里常数 C 只依赖于 κ .

证明. 我们利用定理 3.1.1 和定理 3.1.2, 作变量替换 $t = x_1 - z_1$, 得到当 $k_s h \geq 1$ 和 $d \gg h$ 时有

$$\begin{aligned} & \left| \int_d^\infty \left[\mathbb{T}_D(x, z)^T \overline{\mathbb{N}(x, y)} \right]_{x_2=0} dx_1 \right| \\ & \leq \frac{C}{\mu} \int_d^\infty \frac{k_s^{1/2} z_2}{|x - z|^{3/2}} \left(\frac{k_s^{-1/2} y_2}{|x - y|^{3/2}} + e^{-\sqrt{k_R^2 - k_s^2} y_2} \right) dx_1 \\ & \leq \frac{C}{\mu} \int_{(1-c_1)d/h}^\infty \left(\frac{1}{(1+t^2)^{3/2}} + \frac{(k_s h)^{1/2}}{(1+t^2)^{3/4}} e^{-\sqrt{k_R^2 - k_s^2} h} \right) dt \\ & \leq \frac{C}{\mu} \left[\left(\frac{h}{d} \right)^2 + \frac{(k_s h)^{1/2}}{e^{\sqrt{k_R^2 - k_s^2} h}} \left(\frac{h}{d} \right)^{1/2} \right]. \end{aligned}$$

上面的第二不等式我们使用了 (4.8) 的假定. 类似地, 我们也可以证明在 $(-\infty, -d)$ 上的不等式估计. 这就说明了 $\mathbb{J}(z, y) - \mathbb{J}_d(z, y)$ 的误差大小. 同样地, 针对 $\nabla_y(\mathbb{J}(z, y) - \mathbb{J}_d(z, y))$ 的估计也可以被证明. \square

有了以上引理, 现在我们可以只研究 $\mathbb{J}(z, y)$ 的性质, 然后通过引理 4.2.1 得到 $\mathbb{J}_d(z, y)$ 的性质. 由于我们只关心障碍物远离边界 Γ_0 时的情况, 即 $k_s h \gg 1$, 所以, 针对点扩散函数 $\mathbb{J}(z, y)$, 我们希望将其分成两项, 其中第一项与 $k_s h$ 无关, 即主项; 第二项关于 $k_s h$ 是衰减的. 下面, 我们将说明当 $z, y \in \Omega$ 时, $\mathbb{F}(z, y)$ 是 $\mathbb{J}_d(z, y)$ 的 $\mathbb{F}(z, y)$ 主项. 而且当 $|z - y| \rightarrow \infty$ 时, $\mathbb{F}(z, y)$ 是衰减的. 特别地, 对于 $\mathbb{F}(z, y)$ 的虚部 $|\text{Im } \mathbb{F}_{ii}(z, y)|, i = 1, 2$, 其在 $z = y$ 处存在峰值.

下面我们将用几个引理来说明 $\mathbb{J}_d(z, y) - \mathbb{F}(z, y)$ 关于 $k_s h$ 及 h/d 的误差估计. 如下引理将说明式 (4.6) 中的第二项是随着 $k_s h$ 变大而指数衰减的.

引理 4.2.2 存在只与 κ 有关的常数 C , 使得当 $z, y \in \Omega$ 时, 成立

$$\left| \sum_{\alpha, \beta=p, s} \left[\frac{\mathbb{T}_\alpha(\xi)^T \overline{\mathbb{N}_\beta(\xi)}}{\delta'(\xi)} e^{i(\mu_\alpha z_2 - \bar{\mu}_\beta y_2) + i(y_1 - z_1)\xi} \right]_{-k_R}^{k_R} \right| \leq \frac{C}{\mu} e^{-\sqrt{k_R^2 - k_s^2} h}.$$

证明. 观察式子 (3.50), (3.33), 我们发现, 对于 $\alpha = p, s$, 成立 $|\mathbb{T}_\alpha(\pm k_R)| \leq Ck_R^2/k_s^2 \leq C$, $|\mathbb{N}_\alpha(\pm k_R)| \leq Ck_R^3$. 利用引理 3.1.5, 该引理得证. \square

引理 4.2.3 假设 $g(t) \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$. 存在只与 κ 有关的常数 C , 对于任意 $z, y \in \Omega$ 成立

$$\begin{aligned} & \left| \text{p.v.} \int_{|\xi|>k_s} \frac{g(\xi)}{\delta(\xi)} d\xi \right| \\ & \leq Ck_s^{-4} \int_{|\xi|>k_s} |g(\xi)| d\xi + Ck_s^{-3} \max_{\xi \in (k_R-d_R, k_R+d_R)} (|g(\xi)| + k_s|g'(\xi)|). \end{aligned}$$

这里 $d_R = (k_R - k_s)/2$,

证明. 不失一般性, 这里我们只针对在区间 (k_s, ∞) 上的积分来证明该引理. 如引理 3.1.5 中一样, 我们有如下表示 $\delta(\xi) = (\xi^2 - k_R^2)\delta_1(\xi)$, 其中当 $\xi > k_s$ 时, $\delta_1(\xi) \neq 0$. 利用 Cauchy 主值的定义, 我们有

$$\begin{aligned} \text{p.v.} \int_{k_s}^\infty \frac{g(\xi)}{\delta(\xi)} d\xi &= \int_{k_s}^{k_R-d_R} \frac{g(\xi)}{\delta(\xi)} d\xi + \int_{k_R+d_R}^\infty \frac{g(\xi)}{\delta(\xi)} d\xi \\ &\quad + \int_{k_R-d_R}^{k_R+d_R} \frac{g(\xi)((\xi+k_R)\delta_1(\xi))^{-1} - g(k_R)(2k_R\delta_1(k_R))^{-1}}{(\xi-k_R)} d\xi. \end{aligned}$$

利用引理 3.1.5, 易得

$$\left| \int_{k_s}^{k_R-d_R} \frac{g(\xi)}{\delta(\xi)} d\xi + \int_{k_R+d_R}^\infty \frac{g(\xi)}{\delta(\xi)} d\xi \right| \leq Ck_s^{-4} \int_{k_s}^\infty |g(\xi)| d\xi.$$

同样利用引理 3.1.5 中对 $\delta(\xi), \delta_1(\xi)$ 的估计及中值定理, 我们可以得到

$$\begin{aligned} & \left| \int_{k_R-d_R}^{k_R+d_R} \frac{g(\xi)((\xi+k_R)\delta_1(\xi))^{-1} - g(k_R)(2k_R\delta_1(k_R))^{-1}}{(\xi-k_R)} d\xi \right| \\ & \leq 2d_R \max_{\xi \in (k_R-d_R, k_R+d_R)} \left(\left| \frac{g'(\xi)}{(\xi+k_R)\delta_1(\xi)} \right| \right. \\ & \quad \left. + \left| \frac{g(\xi)\delta_1(\xi)}{(\xi+k_R)\delta_1(\xi)^2} \right| + \left| \frac{g(\xi)\delta'_1(\xi)}{(\xi+k_R)\delta_1(\xi)^2} \right| \right) \\ & \leq Ck_s^{-3} \max_{\xi \in (k_R-d_R, k_R+d_R)} (|g(\xi)| + k_s|g'(\xi)|). \end{aligned}$$

引理得证. \square

下面的引理说明了 $\mathbb{J}(z, y)$ 中在区间 $|\xi| > k_s$ 上相应的积分是随 $k_s h$ 增大而衰减的.

引理 4.2.4 令 $k_s h \geq 1$, 那么存在只与 κ 有关的常数 C , 使得对任意 $z, y \in \Omega$ 成立

$$\left| \sum_{\alpha, \beta = p, s} \text{p.v.} \int_{|\xi| > k_s} \frac{\mathbb{T}_\alpha(\xi)^T \overline{\mathbb{N}_\beta(\xi)}}{\delta(\xi)} e^{i(\mu_\alpha z_2 - \bar{\mu}_\beta y_2) + i(y_1 - z_1)\xi} d\xi \right| \leq \frac{C}{\mu} (k_s h)^{-1}.$$

证明. 关于 $\alpha, \beta = p, s$, 我们定义 $g_{\alpha\beta}(\xi) = \mathbb{T}_\alpha(\xi)^T \overline{\mathbb{N}_\beta(\xi)} e^{i(\mu_\alpha z_2 - \bar{\mu}_\beta y_2) + i(y_1 - z_1)\xi}$. 于是利用引理 4.2.3, 我们可以得到:

$$\begin{aligned} & \left| \text{p.v.} \int_{|\xi| > k_s} \frac{g_{\alpha\beta}(\xi)}{\delta(\xi)} d\xi \right| \\ & \leq \frac{C}{k_s^6 \mu} \int_{k_s}^\infty |\xi|^5 e^{-\sqrt{\xi^2 - k_s^2}(y_2 + z_2)} d\xi + \frac{C}{\mu} (k_s h) e^{-\sqrt{(k_R - d_R)^2 - k_s^2}(y_2 + z_2)} \\ & \leq \frac{C}{\mu} \int_1^\infty t^5 e^{-\sqrt{t^2 - 1} k_s (y_2 + z_2)} dt + \frac{C}{\mu} (k_s h) e^{-\sqrt{(k_R - d_R)^2 - k_s^2}(y_2 + z_2)} \\ & \leq \frac{C}{\mu} (k_s h)^{-1} + \frac{C}{\mu} (k_s h) e^{-\sqrt{(k_R - d_R)^2 - k_s^2}(y_2 + z_2)}, \end{aligned}$$

这里我们使用了条件 $y_2, z_2 \geq h$ 和 $d_R = (k_R - k_s)/2 \geq C_1 k_s$, 其中常数 $C_1 > 0$ 只依赖于 κ . 又因为上面不等式的第二项是关于 $k_s h$ 指数衰减, 所以可以被 $(k_s h)^{-1}$ 控制. 引理得证. \square

进一步, 下面的引理将有助于我们分析 $\mathbb{J}(z, y)$ 中在区间 $(-k_p, k_p)$ 上, 当 $\alpha \neq \beta$ 时的积分.

引理 4.2.5 令 $\phi(t) = \sqrt{1 - t^2} - \tau \sqrt{\kappa^2 - t^2} + \nu t$, 这里 $\kappa \in (0, 1), \tau \geq \tau_0 > 0, \nu \in \mathbb{R}$. 假设 $f \in C[0, \kappa]$ 且其存在绝对连续的导函数, 那么存在仅依赖于 κ, τ_0 而与 ν 无关的常数 C , 使得对于任意 $\lambda \geq 1$ 成立:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\kappa}^\kappa f(t) e^{i\lambda\phi(t)} dt \right| + \left| \int_{-\kappa}^\kappa f(t) e^{-i\lambda\phi(t)} dt \right| \\ & \leq C \lambda^{-1/4} \left(|f(0)| + \int_{-\kappa}^\kappa |f'(t)| dt \right). \end{aligned}$$

证明. 这里我们只证明第一个在区间 $(0, \kappa)$ 上的积分的估计, 在区间 $(-\kappa, 0)$ 上的积分的估计可以被类似证明, 我们省略其证明细节. 通过简单的求导计算, 我们可以得到对于任意 $t \in (0, \kappa), m \geq 2$, 函数 $\phi(t)$ 的 m 次导函数为 $\phi^{(m)}(t) = \tau \kappa^{-(m-1)} \psi_m(t/\kappa) - \psi_m(t)$, 其中

$$\begin{aligned} \psi_2(t) &= (1 - t^2)^{-3/2}, \quad \psi_3(t) = 3t(1 - t^2)^{-5/2}, \\ \psi_4(t) &= 3(1 + 4t^2)(1 - t^2)^{-7/2}. \end{aligned}$$

显然有, $\psi_m(t), m \geq 2$ 在区间 $(0, \kappa)$ 中是单调递增函数.

首先我们考虑当 $\tau \geq \kappa^2$ 时的情况. 这就意味着 $\tau\kappa^{-3} \geq \kappa^{-1}$ 而且有

$$\phi^{(4)}(t) \geq (\kappa^{-1} - 1)\psi_4(t) \geq 3(\kappa^{-1} - 1).$$

利用 Van der Corput 引理 3.1.7, 立即得到

$$\left| \int_0^\kappa f(t)e^{i\lambda\phi(t)}dt \right| \leq C\lambda^{-1/4} \left(|f(0)| + \int_{-\kappa}^\kappa |f'(t)|dt \right). \quad (4.9)$$

接下去, 我们考虑当 $\tau < \kappa^2$ 时的情况. 令 $\phi''(t) = 0$, 可以得到

$$\tau\kappa^{-1}(1 - (t/\kappa)^2)^{-3/2} = (1 - t^2)^{-3/2}.$$

易得 $\phi''(t)$ 在区间 $(0, \kappa)$ 上存在且只存在一个零点 $t = t_2$, 且有

$$t_2^2 = \kappa^2 - \frac{1 - \kappa^2}{(\tau\kappa^2)^{-2/3} - 1}.$$

观察 $\phi'''(t)$, 我们可以得到, 当 $\kappa^3 \leq \tau < \kappa^2$ 时, 在 $(0, \kappa)$ 上成立 $\phi'''(t) \geq 0$; 或是当 $\tau < \kappa^3$ 时, 有 $\phi'''(t)$ 在区间 $(0, \kappa)$ 上有且仅有一个零点 t_3 , 且有

$$t_3^2 = \kappa^2 - \frac{1 - \kappa^2}{(\tau\kappa^2)^{-2/5} - 1}.$$

于是当 $\kappa^3 \leq \tau < \kappa^2$ 时, $\phi''(t)$ 在区间 $(0, \kappa)$ 为单调递增函数. 因此对于充分小的 $\delta > 0$,

$$|\phi''(t)| \geq \min(|\phi''(t_2 + \delta)|, |\phi''(t_2 - \delta)|), \quad \forall t \in (0, t_2 - \delta) \cup (t_2 + \delta, \kappa). \quad (4.10)$$

另一方面, 当 $\tau < \kappa^3$ 时, 可以得到 $t_3 < t_2$. 而且当 $t \geq t_3$ 时有 $\phi'''(t) \geq 0$ 以及当 $t \leq t_3$ 时有 $\phi'''(t) \leq 0$. 因此 $\phi''(t)$ 在区间 (t_3, κ) 上单调递增而在 $(0, t_3)$ 上单调递减. 于是对于 $\forall t \in (0, t_2 - \delta) \cup (t_2 + \delta, \kappa)$, 我们有

$$|\phi''(t)| \geq \min(|\phi''(t_2 + \delta)|, |\phi''(t_2 - \delta)|, |\phi''(0)|). \quad (4.11)$$

为了估计 $|\phi''(t_2 \pm \delta)|$ 的正下界, 我们观察到 $\tau\kappa^2 < \kappa^4$. 因此, 我们得到

$$t_2^2 \geq \kappa^2 - (1 - \kappa^2)/(\kappa^{-8/3} - 1).$$

于是即得 $|\phi'''(t_2)| \geq c_0\tau \geq c_0\tau_0$, 其中常数 c_0 仅依赖于 κ . 此外, 对于任意 $t \in [t_2 - \delta, t_2 + \delta]$, 有

$$|\phi'''(t) - \phi'''(t_2)| \leq \max_{t \in [t_2 - \delta, t_2 + \delta]} |\phi''''(t)| |t - t_2| \leq c_1\delta,$$

其中常数 c_1 仅依赖于 κ . 于是, 如果取 $\delta \leq c_0\tau_0/(2C_1)$, 对于 $t \in [t_2 - \delta, t_2 + \delta]$, 就有 $|\phi'''(t)| \geq c_0\tau_0/2$.

利用中值定理, 我们可以得到 $|\phi''(t_2 \pm \delta)| \geq (c_0\tau_0/2)\delta$. 观察到 $|\phi''(0)| = 1 - \tau\kappa^{-1} \geq 1 - \kappa$, 从估计式 (4.10)-(4.11) 我们可以得到对于充分小的 $\delta > 0$,

$$|\phi''(t)| \geq (c_0\tau_0/2)\delta, \quad \forall t \in (0, t_2 - \delta) \cup (t_2 + \delta, \kappa). \quad (4.12)$$

现在, 我们可以将积分分解成如下

$$\begin{aligned} & \int_0^\kappa f(t)e^{i\lambda\phi(t)}dt \\ &= \int_0^{t_2-\delta} f(t)e^{i\lambda\phi(t)}dt + \int_{t_2-\delta}^{t_2+\delta} f(t)e^{i\lambda\phi(t)}dt + \int_{t_2+\delta}^\kappa f(t)e^{i\lambda\phi(t)}dt \\ &:= \text{II}_1 + \text{II}_2 + \text{II}_3. \end{aligned}$$

利用不等式 (4.12) 及 Van der Corput 引理 3.1.7, 我们有

$$|\text{II}_1 + \text{II}_3| \leq C(\lambda\delta)^{-1/2} \left(|f(0)| + \int_0^\kappa |f'(t)|dt \right).$$

显然有 $|\text{II}_2| \leq 2\delta \max_{t \in (0, \kappa)} |f(t)|$. 我们取 $\delta = \lambda^{-1/3}$, 就可以得到

$$\left| \int_0^\kappa f(t)e^{i\lambda\phi(t)}dt \right| \leq C\lambda^{-1/3} \left(|f(0)| + \int_{-\kappa}^\kappa |f'(t)|dt \right).$$

联合 (4.9), 引理得证. \square

现在, 我们给出的本节的核心定理, 它给出了点扩散函数 $\mathbb{J}(z, y)$ 与其主项 $\mathbb{F}(z, y)$ 之间关于 $k_s h$ 的误差估计.

定理 4.2.1 令 $k_s h \geq 1$, 那么存在只与 κ 有关的常数 C , 使得对于任意 $z, y \in \Omega$ 成立

$$|\mathbb{J}(z, y) - \mathbb{F}(z, y)| + k_s^{-1} |\nabla_y(\mathbb{J}(z, y) - \mathbb{F}(z, y))| \leq \frac{C}{\mu} (k_s h)^{-1/4}.$$

证明. 通过利用引理 4.2.2 及引理 4.2.4, 观察 $\mathbb{J}(z, y), \mathbb{F}(z, y)$ 的定义 (4.6)-(4.7), 我们只需要估计如下两项

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \sum_{\alpha, \beta=p, s} \int_{-k_s}^{k_s} \frac{\mathbb{T}_\alpha(\xi)^T \overline{\mathbb{N}_\beta(\xi)}}{\delta(\xi)} e^{i(\mu_\alpha z_2 - \bar{\mu}_\beta y_2) + i(y_1 - z_1)\xi} d\xi - \mathbb{F}(z, y) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{\alpha, \beta=p, s \\ (\alpha, \beta) \neq (s, s)}} \int_{(-k_s, k_s) \setminus [-k_p, k_p]} \frac{\mathbb{T}_\alpha(\xi)^T \overline{\mathbb{N}_\beta(\xi)}}{\delta(\xi)} e^{i(\mu_\alpha z_2 - \bar{\mu}_\beta y_2) + i(y_1 - z_1)\xi} d\xi \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-k_p}^{k_p} \left[\frac{\mathbb{T}_p(\xi) \overline{\mathbb{N}_s(\xi)}}{\delta(\xi)} e^{i(\mu_p y_2 - \mu_s z_2)} + \frac{\mathbb{T}_s(\xi) \overline{\mathbb{N}_p(\xi)}}{\delta(\xi)} e^{i(\mu_s y_2 - \mu_p z_2)} \right] e^{i(y_1 - z_1)\xi} d\xi \\ &:= \text{II}_1 + \text{II}_2. \end{aligned}$$

当 $k_p < |\xi| < k_s$ 时, 由引理 3.1.5 得, $|\delta(\xi)| \geq Ck_s^4$. 于是, 对于 $\alpha, \beta = p, s$, 我们有 $|\mathbb{T}_\alpha(\xi)| \leq C$, $|\mathbb{N}_\beta(\xi)| \leq C\mu^{-1}k_s^2$. 因此我们可以得到关于 II_1 的估计:

$$|\text{II}_1| \leq \frac{C}{k_s \mu} \int_{k_p}^{k_s} e^{-\sqrt{\xi^2 - k_p^2} h} d\xi \leq \frac{C}{\mu} (k_s h)^{-1}.$$

而对于式子 II_2 我们将会使用引理 4.2.5. 通过简单的变量替换 $\xi = k_s t$, 我们可以把式 II_2 中的第一项转化成引理 4.2.5 中的形式, 即有

$$f(t) = k_s \frac{\mathbb{T}_p(k_s t) \overline{\mathbb{N}_s(k_s t)}}{\delta(k_s t)}, \quad \lambda = k_s z_2, \tau = \frac{y_2}{z_2}, \nu = \frac{y_1 - z_1}{z_2}.$$

利用前面针对采样区域的尺寸的假设 (4.8), 直接利用引理 4.2.5 就可以得到,

$$\left| \int_{-k_p}^{k_p} \frac{\mathbb{T}_p(\xi) \overline{\mathbb{N}_s(\xi)}}{\delta(\xi)} e^{i(\mu_p y_2 - \mu_s z_2)} d\xi \right| \leq \frac{C}{\mu} (k_s h)^{-1/4}.$$

而式子 II_2 中的第二项也可以被类似估计. 关于 $|\nabla_y(\mathbb{J}(z, y) - \mathbb{F}(z, y))|$ 的估计也可以被类似证明, 这里不再赘述. 引理得证. \square

由于 $\mathbb{F}(z, y)$ 是 $\mathbb{J}(z, y)$ 的主项, 我们有必要来分析 $\mathbb{F}(z, y)$ 的性质. 我们首先证明了点扩散函数的主项 $\mathbb{F}(z, y)$ 的虚部与弹性波基本解 $\text{Im } \mathbb{G}(z, y)$ 的虚部有相似的函数特性. 然后利用定理 4.2.1 和引理 4.2.1, 当 $d \gg h$ 和 $k_s h \gg 1$ 时, 我们可以认为 $\mathbb{J}_d(z, y)$ 的虚部也与弹性波基本解 $\text{Im } \mathbb{G}(z, y)$ 的虚部有相似的函数特性, 如图 4.2 和图 4.3 所示.

注 4.2.2 如图 4.2 和图 4.3 中所示, 每幅图中 4 副子图, 其中子图的位置对应相应矩阵该位置的函数. 其中, 每幅图的采样区域都为 $[-2, 2] \times [8, 12]$, 角频率 $\omega = 2\pi$, Lamé 常数 $\lambda = 0.5$, $\mu = 0.25$. 特别地, 每幅子图中, 颜色越深代表该处的值越大, 因此我们可以看到图 4.2 和图 4.3 中对角线上的子图, 其颜色的最深处正是该子图的中心位置, 即代表峰值在 $z = y$ 处. 而在每幅子图中, 在远离中心位置时, 颜色渐渐变淡, 即函数值衰减.

下述定理证明了主项 $\mathbb{F}(z, y)$ 确实有如图 4.2 中的所示的性质.

定理 4.2.2 对于任意 $z, y \in \mathbb{R}_+^2$, $\mathbb{F}(z, y)^T = \mathbb{F}(z, y)$. 当 $z = y$ 时, $\text{Im } [\mathbb{F}(z, y)]_{12} = \text{Im } [\mathbb{F}(z, y)]_{21} = 0$ 以及

$$-\text{Im } [\mathbb{F}(z, y)]_{ii} \geq \frac{1}{4(\lambda + 2\mu)}, \quad i = 1, 2. \quad (4.13)$$

当 $z \neq y$ 时,

$$|\mathbb{F}(z, y)| \leq \frac{C}{\mu} \left(\frac{1}{(k_s |z-y|)^{1/2}} + \frac{1}{k_s |z-y|} \right), \quad (4.14)$$

这里的常数 C 只依赖于 κ .

证明. 将式子 (3.50) 和式子 (3.33) 代入式子 (4.7), 我们可以得到

$$\begin{aligned} \mathbb{F}(z, y) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-k_p}^{k_p} \frac{\mathbf{i} k_s^2 \mu_s}{\mu \gamma(\xi) \delta(\xi)} \begin{pmatrix} \xi^2 & -\xi \mu_p \\ -\xi \mu_p & \mu_p^2 \end{pmatrix} e^{i\mu_p(z_2-y_2)+i\xi(y_1-z_1)} d\xi \\ &\quad -\frac{1}{2\pi} \int_{-k_p}^{k_p} \frac{\mathbf{i} k_s^2 \mu_p}{\mu \gamma(\xi) \delta(\xi)} \begin{pmatrix} \mu_s^2 & \xi \mu_s \\ \xi \mu_s & \xi^2 \end{pmatrix} e^{i\mu_s(z_2-y_2)+i\xi(y_1-z_1)} d\xi \\ &\quad -\frac{1}{2\pi} \int_{(-k_s, k_s) \setminus [-k_p, k_p]} \frac{\mathbf{i} (k_s^2 - 4\xi^2) \mu_p}{\mu \gamma(\xi) \delta(\xi)} \begin{pmatrix} \mu_s^2 & \xi \mu_s \\ \xi \mu_s & \xi^2 \end{pmatrix} e^{i\mu_s(z_2-y_2)+i\xi(y_1-z_1)} d\xi \\ &:= \text{III}_1 + \text{III}_2 + \text{III}_3. \end{aligned} \quad (4.15)$$

由于 $\mu_p(\xi)$ 及 $\mu_s(\xi)$ 关于 ξ 存在对称性, 所以当 $z = y$ 时, $\text{Im}[\mathbb{F}(z, y)]_{12} = \text{Im}[\mathbb{F}(z, y)]_{21} = 0$.

现在我们来证明当 $i = j = 1$ 时的不等式 (4.13), 而其他情形可以被类似证明, 这里将省略细节. 观察到, 当 $\xi \in (-k_p, k_p)$ 时, 由引理 3.1.5 可得 $\delta(\xi) \leq C k_s^4$ 以及及 $\mu_p \leq \mu_s$. 于是当 $z = y$ 时, 我们有:

$$\begin{aligned} -\text{Im}(\text{III}_1 + \text{III}_2) &= \frac{1}{2\pi\mu} \int_{-k_p}^{k_p} \frac{k_s^2 \mu_s}{\delta(\xi)} d\xi \\ &\geq \frac{1}{2\pi\mu} \int_{-k_p}^{k_p} \frac{\mu_p}{k_s^2} d\xi = \frac{1}{4(\lambda + 2\mu)}. \end{aligned}$$

而当 $\xi \in (-k_s, k_s) \setminus [-k_p, k_p]$ 时, 成立 $\mu_p = \mathbf{i} \sqrt{\xi^2 - k_p^2}$, 于是我们有

$$-\text{III}_3 = \frac{1}{2\pi\mu} \int_{(-k_s, k_s) \setminus (-k_p, k_p)} \frac{-\mu_s^2 \sqrt{\xi^2 - k_p^2} (k_s^2 - 4\xi^2)}{(\xi^2 + i\mu_s \sqrt{\xi^2 - k_p^2})(\varphi^2 - i4\xi^2 \mu_s \sqrt{\xi^2 - k_p^2})} d\xi.$$

通过简单的直接计算, 我们有

$$\text{Im}[(\xi^2 + i\mu_s \sqrt{\xi^2 - k_p^2})(\varphi^2 - i4\xi^2 \mu_s \sqrt{\xi^2 - k_p^2})] = k_s^2 \mu_s \sqrt{\xi^2 - k_p^2} (k_s^2 - 4\xi^2).$$

通过分母有理化, 我们可以得到 $-\text{Im}(\text{III}_3) \geq 0$. 因此, 当 $z = y$ 时, 我们有 $-\text{Im}[\mathbb{F}(z, y)]_{11} \geq 1/[4(\lambda + 2\mu)]$.

当 $z \neq y$ 时, 我们可以有如下三角函数表示 $y - z = |y - z|(\cos \phi, \sin \phi)^T$, 其中 $0 \leq \phi \leq \pi$. 于是, 将此三角变量替换代入 III_1 , 我们可以得到

$$\text{III}_1 = \frac{1}{\mu} \int_0^\pi A(\theta, \kappa) e^{ik_s |z-y| \cos(\theta-\phi)} d\theta,$$

显然, 简单的代入计算可以得到函数 $A(\theta, \kappa)$ 及其导函数 $\partial A(\theta, \kappa)/\partial \theta$ 在区间 $(0, \pi)$ 上的表达式. 而且区间 $(0, \pi)$ 可以分割成若干个互补相交的子区间, 在每个子区间上成立 $|\cos(\theta - \phi)| \geq 1/\sqrt{2}$ 或是 $|\sin(\theta - \phi)| \geq 1/\sqrt{2}$ 以及 $-\sin(\theta - \phi)$ 在该子区间上单调. 于是, 当 $k_s |z - y| \geq 1$ 时, 由 Van der Corput 引理 3.1.7, 易得

$$|\text{III}_1| \leq \frac{C}{\mu} \left(\frac{1}{(k_s |z - y|)^{1/2}} + \frac{1}{k_s |z - y|} \right).$$

而当 $k_s |z - y| < 1$ 时, 显然有 $|\text{III}_1| \leq C\mu^{-1} \leq C\mu^{-1}(k_s |z - y|)^{-1}$. 而针对 $\text{III}_2 + \text{III}_3$ 的估计可以类似地使用 Van der Corput 引理 3.1.7 来证明. 引理得证. \square

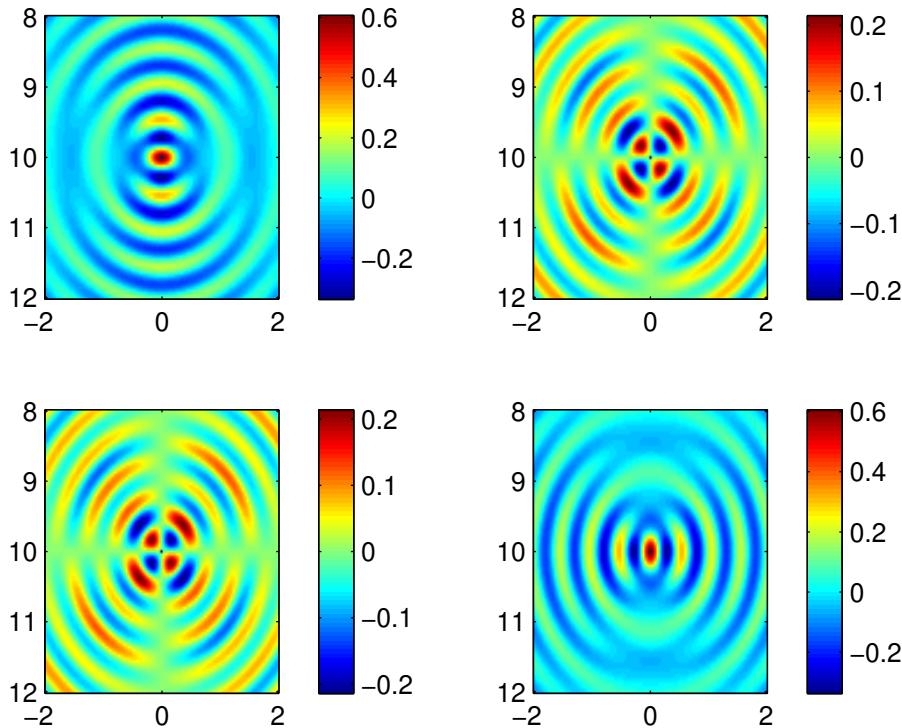


图 4.2 $\text{Im}(\mathbb{G}(z, y))$ for $y = (0, 8)^T$, $\omega = 2\pi$, 其中 $\text{Im}[\mathbb{G}(z, y)]_{ij}$ 对应于上面位置为 (i, j) 的子图.

结合引理 4.2.1, 定理 4.2.1, 定理 4.2.2 及图 4.2, 我们发现点扩散函数 $J_d(z, y)$ 确实可以把位于 y 的点源分辨出来, 即在 $z = y$ 处达到峰值, 而当 z 远离 y 时,

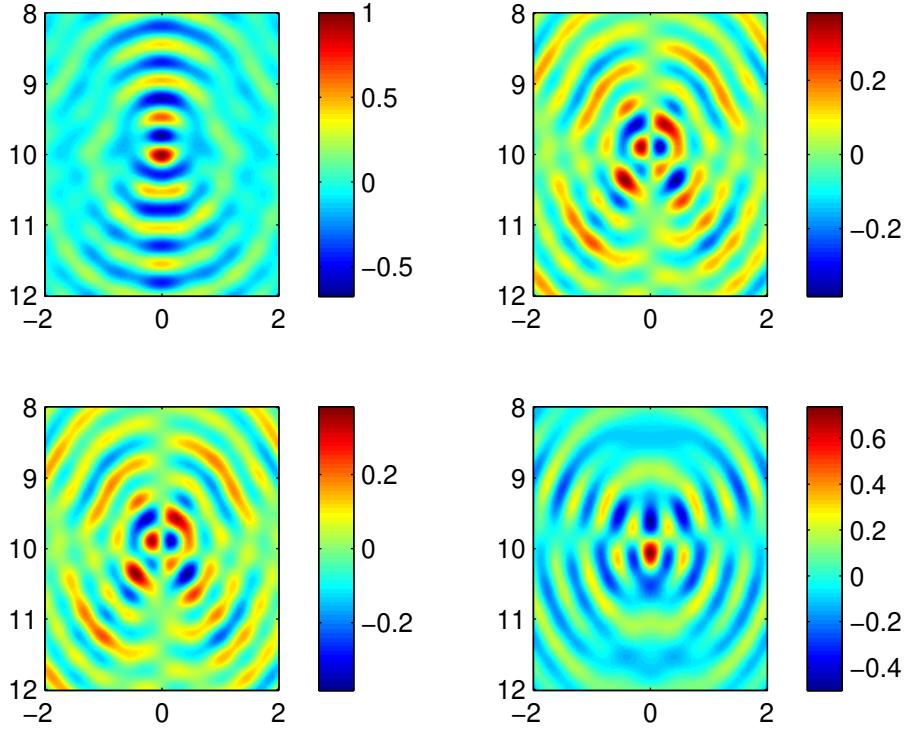


图 4.3 $-\text{Im}(\mathbb{J}_d(z, y))$, $y = (0, 8)^T$, $\omega = 2\pi$, $d = 100$, $-\text{Im}[\mathbb{J}_d(z, y)]_{ij}$ 对应位置 (i, j) 的子图.

其值渐渐衰减. 如文献 [69] 中针对声波点扩散函数的表述, 我们也可以认为弹性波点扩散函数是对寻找点源成像分辨率的度量函数.

为便于后文分析, 我们介绍如下在范数意义下的估计式.

引理 4.2.6 令 $k_s h \geq 1$, $d \gg h$, 存在只依赖于 κ 却与 k_s, h, d, d_D 无关的常数 C , 对于任意 $z \in \Omega$, $j = 1, 2$, 成立

$$\begin{aligned} \|\mathbb{F}(z, \cdot) e_j\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)} + \|\sigma(\mathbb{F}(z, \cdot) e_j) v\|_{H^{-1/2}(\Gamma_D)} &\leq \frac{C}{\mu} (1 + k_s d_D), \\ \|\mathbb{R}_d(z, \cdot) e_j\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)} + \|\sigma(\mathbb{R}_d(z, \cdot) e_j) v\|_{H^{-1/2}(\Gamma_D)} &\leq \frac{C}{\mu} (1 + k_s d_D) \left[\left(\frac{h}{d} \right)^2 + (k_s h)^{-1/4} \right], \end{aligned}$$

其中 $\mathbb{R}_d(z, \cdot) = \mathbb{J}_d(z, \cdot) - \mathbb{F}(z, \cdot)$.

证明. 由 $\mathbb{F}(z, \cdot)$ 的定义 (4.7), 易得:

$$|F(z, y)| \leq \frac{C}{\mu}.$$

于是, 上面第一估计式可由不等式 (2.1) 立即得到. 第二估计式可由不等式 (2.1), 引理 4.2.1 和定理 4.2.1 立即得到. 这里我们将不再赘述细节. 引理得证. \square

4.3 逆时偏移算法

这一节，我们将提出半空间弹性波散射问题的逆时偏移算法 (Reverse Time Migration, RTM). 该逆时偏移算法是对文献 [69] 中半空间声波散射问题的逆时偏移算法的一个推广。我们的逆时偏移算法可以分成两步 [44, 49]，第一步为将在半空间表面的孔径 Γ_d 上接收到的 s 波与 p 波的混合全波数据取复共轭化，然后反传到半空间中。第二步，将反传后的数据和入射波数据在采样区域 Ω 内进行互相关，然后关于各个炮点进行叠加。特别地，类似文献 [69]，这里的入射波是将点源放在 Γ_d 上，然后作为 Dirichlet 边界条件后弹性波方程的解。而反传波是将接收到的数据共轭化后作为 Dirichlet 边界条件后弹性波方程的解。

算法 4.3.1 假设在 Γ_d 内均匀分布着 N_s 个发射器，位于 x_s , $s = 1, \dots, N_s$ ，及分布着 N_r 个接收器，位于 x_r , $r = 1, \dots, N_r$ 。假设障碍物 $D \subset \Omega$ 。假设散射数据 $u_q^s(x_r, x_s)$ 为在 x_r 处接收，由位于 x_s 处的点源沿着极化方向 $q = e_1, e_2$ 激发。

1° 反传：反传波 $v_q(x, x_s)$ 是如下半空间弹性波散射问题的解

$$\begin{aligned} \Delta_e v_q(x, x_s) + \omega^2 v_q(x, x_s) &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}_+^2, \\ v_q(x, x_s) &= \frac{|\Gamma_0^d|}{N_r} \sum_{r=1}^{N_r} \overline{u_q^s(x_r, x_s)} \delta_{x_r}(x) \quad \text{on } \Gamma_d. \end{aligned}$$

2° 互相关：对于任意 $q \in \mathbb{R}^2$ ，令入射波 u_q^i 为如下半空间弹性波方程的解

$$\begin{aligned} \Delta_e u_q^i(x, x_s) + \omega^2 u_q^i(x, x_s) &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}_+^2, \\ u_q^i(x, x_s) &= q \delta_{x_s}(x) \quad \text{on } \Gamma_d. \end{aligned}$$

对于任意 $z \in \Omega$ ，计算成像函数：

$$I_d(z) = \operatorname{Im} \sum_{q=e_1, e_2} \left\{ \frac{|\Gamma_0^d|}{N_s} \sum_{s=1}^{N_s} u_q^i(z, x_s) \cdot v_q(z, x_s) \right\}. \quad (4.16)$$

于是，由 Green 表示公式可以得到：

$$\begin{aligned} u_q^i(x, x_s) &= \mathbb{T}_D(x_s, x)^T q, \\ v_q(x, x_s) \cdot e_j &= \frac{|\Gamma_0^d|}{N_r} \sum_{r=1}^{N_r} \mathbb{T}_D(x_r, x) e_j \cdot \overline{u_q^s(x_r, x_s)}. \end{aligned}$$

从而我们得到如下成像函数：

$$I_d(z) = \operatorname{Im} \sum_{q=e_1, e_2} \left\{ \frac{|\Gamma_0^d|^2}{N_s N_r} \sum_{s=1}^{N_s} \sum_{r=1}^{N_r} [\mathbb{T}_D(x_s, z)^T q] \cdot [\mathbb{T}_D(x_r, z)^T \overline{u_q^s(x_r, x_s)}] \right\}. \quad (4.17)$$

上面的成像函数是离散形式的，可以直接用于数值计算。为了便于后面的理论分析，我们令 $N_s, N_r \rightarrow \infty$ ，于是离散形式的成像函数 (4.16) 可以看成是采用数值积分对如下连续形式的成像函数的一种积分逼近：

$$\hat{I}_d(z) = \operatorname{Im} \sum_{q=e_1, e_2} \int_{\Gamma_0^d} \int_{\Gamma_0^d} [\mathbb{T}_D(x_s, z)^T q] \cdot [\mathbb{T}_D(x_r, z)^T \overline{u_q^s(x_r, x_s)}] ds(x_r) ds(x_s). \quad (4.18)$$

下面我们将障碍物的成像函数 $\hat{I}_d(z)$ 与前文中的点扩散函数 $\mathbb{J}_d(z, y)$ 联系起来。有了前文中对 $\mathbb{J}_d(z, y)$ 相关分析结论，我们可以由此来分析半空间弹性波反散射问题的逆时偏移方法的分辨率。下面的定理告诉我们当采样点 z 远离障碍物边界时，成像函数在该点的值是非常小的。这种现象反映在后面的数值实验中，就是在远离边界的时候，在该处的颜色会非常浅。下面的定理是当障碍物边界为 Dirichlet 边界时的成像函数分辨率分析。其它边界条件的相关结论可以被类似证明，我们会不加证明地罗列在后文。

定理 4.3.1 对于任意 $z \in \Omega$ ，令 $\mathbb{U}(z, x) \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ 且 $\mathbb{U}(z, x)e_j, j = 1, 2$ ，是如下弹性波方程的散射解：

$$\begin{aligned} \Delta_e[\mathbb{U}(z, x)e_j] + \omega^2[\mathbb{U}(z, x)e_j] &= 0 \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}, \\ \mathbb{U}(z, x)e_j &= -\overline{\mathbb{F}(z, x)}e_j \quad x \in \Gamma_D. \end{aligned}$$

则成像函数 $\hat{I}_d(z)$ 有如下表达：

$$\hat{I}_d(z) = \operatorname{Im} \sum_{j=1}^2 \int_{\Gamma_D} [\sigma(\mathbb{U}(z, x)e_j + \overline{\mathbb{F}(z, x)}e_j)v] \cdot [\overline{\mathbb{F}(z, x)}e_j] ds(x) + R_d(z), \quad (4.19)$$

这里

$$|R_d(z)| \leq C\mu^{-2}(1 + \|T_1\|)(1 + \|T_2\|)(1 + k_s d_D)^3 \left[\left(\frac{h}{d} \right)^2 + (k_s h)^{-1/4} \right],$$

其中常数 C 仅依赖于 κ 而与 k_s, k_p, h, d, d_D 无关。

证明. 观察算法中的 (4.18) 我们可以得到：

$$\hat{I}_d(z) = \operatorname{Im} \sum_{q=e_1, e_2} \int_{\Gamma_0^d} [\mathbb{T}_D(x_s, z)^T q] \cdot \hat{v}_q(z, x_s) ds(x_s), \quad (4.20)$$

其中 $j = 1, 2$ ，

$$\hat{v}_q(z, x_s) \cdot e_j = \int_{\Gamma_0^d} \mathbb{T}_D(x_r, z)e_j \cdot \overline{u_q^s(x_r, x_s)} ds(x_r).$$

利用(3.69)我们得到

$$u_q^s(x_r, x_s) \cdot e_i = \mathcal{G}(u_q^s(\cdot, x_s), \mathbb{N}(\cdot, x_r) e_i), i = 1, 2,$$

于是有

$$\begin{aligned} \hat{v}_q(z, x_s) \cdot e_j &= \int_{\Gamma_0^d} \mathbb{T}_D(x_r, z) e_j \cdot \overline{[u_q^s(x_r, x_s) \cdot e_1, u_q^s(x_r, x_s) \cdot e_2]^T} ds(x_r) \\ &= \mathcal{G}\left(\overline{u_q^s(\cdot, x_s)}, \left[\int_{\Gamma_0^d} \sum_{i=1}^2 [\mathbb{T}_D(x_r, z)]_{ij} \overline{\mathbb{N}(\cdot, x_r)} e_i ds(x_r)\right]\right). \end{aligned}$$

利用 Neumann Green 函数的空间互易性

$$\mathbb{N}(x, x_r) = \mathbb{N}(x_r, x)^T,$$

以及点扩展函数 $\mathbb{J}_d(\cdot, \cdot)$ 的定义(4.4)，我们有

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_0^d} \sum_{i=1}^2 [\mathbb{T}_D(x_r, z)]_{ij} \overline{\mathbb{N}(x, x_r)} e_i ds(x_r) \\ &= \int_{\Gamma_0^d} \sum_{i=1}^2 [\mathbb{T}_D(x_r, z)]_{ij} \overline{\mathbb{N}(x_r, x))^T e_i} ds(x_r) \\ &= \int_{\Gamma_0^d} (\mathbb{T}_D(x_r, z) e_j)^T \overline{\mathbb{N}(x_r, x)^T} ds(x_r) \\ &= \mathbb{J}_d(z, x)^T e_j. \end{aligned}$$

进一步可以推出

$$\hat{v}_q(z, x_s) e_j = \mathcal{G}(\overline{u_q^s(\cdot, x_s)}, \mathbb{J}_d(z, \cdot)^T e_j).$$

将上式代入(4.20)中，我们可以得到

$$\begin{aligned} \hat{I}_d(z) &= \operatorname{Im} \sum_{j=1}^2 \sum_{q=e_1, e_2} \int_{\Gamma_0^d} [\mathbb{T}_D(x_s, z)^T q \cdot e_j] [\hat{v}_q(z, x_s) \cdot e_j] ds(x_s) \\ &= \operatorname{Im} \sum_{j=1}^2 \mathcal{G}\left(\sum_{k=1}^2 [\mathbb{T}_D(x_s, z)^T e_k \cdot e_j] \overline{u_{e_k}^s(x, x_s)}, \mathbb{J}_d(z, \cdot)^T e_j\right) \\ &= \operatorname{Im} \sum_{j=1}^2 \mathcal{G}(\mathbb{W}(z, \cdot) e_j, \mathbb{J}_d(z, \cdot)^T e_j), \end{aligned} \tag{4.21}$$

这里 $\mathbb{W}(z, x) \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ 是一个 2×2 的矩阵，定义为

$$\mathbb{W}(z, x) e_j = \int_{\Gamma_0^d} \sum_{k=1}^2 [\mathbb{T}_D(x_s, z)]_{kj} \overline{u_{e_k}^s(x, x_s)} ds(x_s), \quad j = 1, 2.$$

注意到 $\overline{\mathbb{W}(z, x)}e_j$ 可以看成是 $u_{e_k}^s(x, x_s)$ 的加权叠加, 于是它满足如下方程:

$$\Delta_e[\overline{\mathbb{W}(z, x)}e_j] + \omega^2[\overline{\mathbb{W}(z, x)}e_j] = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{D}, \quad (4.22)$$

$$\sigma(\overline{\mathbb{W}(z, x)}e_j)e_2 = 0 \quad \text{on } \Gamma_0. \quad (4.23)$$

由于在边界 Γ_D 上, $u_{e_k}^s(x, x_s)$ 满足 Dirichlet 边界条件, 即 $u_{e_k}^s(x, x_s) = -\mathbb{N}(x, x_s)e_k$. 于是利用式 (4.21) 我们得到

$$\begin{aligned} & \overline{\mathbb{W}(z, x)}e_j \\ &= - \int_{\Gamma_0^d} \sum_{k=1}^2 [\overline{\mathbb{T}_D(x_s, z)}]_{kj} \mathbb{N}(x, x_s) e_k ds(x_s) \\ &= -\overline{\mathbb{J}_d(z, x)}^T e_j. \end{aligned} \quad (4.24)$$

现在我们定义矩阵 $\mathbb{W}_d(z, x) \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$, 其中向量 $\mathbb{W}_d(z, x)e_j, j = 1, 2$, 是如下半空间弹性波方程的散射解:

$$\Delta_e[\mathbb{W}_d(z, x)e_j] + \omega^2[\mathbb{W}_d(z, x)e_j] = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{D}, \quad (4.25)$$

$$\mathbb{W}_d(z, x)e_j = -\overline{\mathbb{F}(z, x)}e_j \quad \text{on } \Gamma_D, \quad (4.26)$$

$$\sigma(\mathbb{W}_d(z, x)e_j)e_2 = 0 \quad \text{on } \Gamma_0. \quad (4.27)$$

利用 (4.21) 我们可以推出:

$$\begin{aligned} \hat{I}_d(z) &= \operatorname{Im} \sum_{j=1}^2 \mathcal{G}(\mathbb{W}(z, \cdot)e_j, J_d(z, \cdot)^T e_j - \mathbb{F}(z, \cdot)e_j) \\ &\quad + \operatorname{Im} \sum_{j=1}^2 \mathcal{G}(\mathbb{W}(z, \cdot)e_j - \overline{\mathbb{W}_d(z, \cdot)}e_j, \mathbb{F}(z, \cdot)e_j) \\ &\quad + \operatorname{Im} \sum_{j=1}^2 \mathcal{G}(\overline{\mathbb{W}_d(z, \cdot)}e_j - \overline{\mathbb{U}(z, \cdot)}e_j, \mathbb{F}(z, \cdot)e_j) \\ &\quad + \operatorname{Im} \sum_{j=1}^2 \mathcal{G}(\overline{\mathbb{U}(z, \cdot)}e_j, \mathbb{F}(z, \cdot)e_j) \\ &:= \text{VI}_1 + \text{VI}_2 + \text{VI}_3 + \text{VI}_4. \end{aligned} \quad (4.28)$$

观察 $\mathbb{F}(z, y)$ 的定义 (4.7), 易得 $\mathbb{F}(z, y)^T = \mathbb{F}(z, y)$. 利用引理 4.2.6,

$$\begin{aligned} & \|\mathbb{J}_d(z, \cdot)e_j\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)} + \|\sigma(\mathbb{J}_d(z, \cdot)e_j)v\|_{H^{-1/2}(\Gamma_D)} \\ & \leq \|\mathbb{F}(z, \cdot)e_j\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)} + \|\sigma(\mathbb{F}(z, \cdot)e_j)v\|_{H^{-1/2}(\Gamma_D)} \\ & \quad + \|\mathbb{R}_d(z, \cdot)e_j\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)} + \|\sigma(\mathbb{R}_d(z, \cdot)e_j)v\|_{H^{-1/2}(\Gamma_D)} \\ & \leq \frac{C}{\mu}(1 + k_s d_D). \end{aligned}$$

这就意味着，通过(4.22)-(4.24)以及引理4.2.6，可以得到：

$$\begin{aligned} |\text{VI}_1| &\leq \sum_{j=1}^2 \left(\|\mathbb{W}(z, \cdot)e_j\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)} \|\sigma(\mathbb{J}_d(z, \cdot)^T e_j - \mathbb{F}(z, \cdot)e_j)e_2\|_{H^{-1/2}(\Gamma_D)} \right. \\ &\quad \left. + \|\sigma(\mathbb{W}(z, \cdot)e_j)e_2\|_{H^{-1/2}(\Gamma_D)} \|\mathbb{J}_d(z, \cdot)^T e_j - \mathbb{F}(z, \cdot)e_j\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)} \right) \\ &\leq \frac{C}{\mu^2} (1 + \|T_1\|)(1 + k_s d_D)^2 \left[\left(\frac{h}{d} \right)^2 + (k_s h)^{-1/4} \right]. \end{aligned}$$

类似地，通过(4.22)-(4.24), (4.25)-(4.27)，及引理4.2.6，可以得到：

$$|\text{VI}_2| \leq \frac{C}{\mu^2} (1 + \|T_1\|)(1 + k_s d_D)^2 \left[\left(\frac{h}{d} \right)^2 + (k_s h)^{-1/4} \right].$$

对于第三项 VI_3 ，我们可以针对 $\mathbb{W}_d(z, x)$ 和 $\mathbb{U}(z, y)$ ，使用定理3.2.2和引理4.2.6，易得：

$$|\text{VI}_3| \leq \frac{C}{\mu^2} (1 + \|T_1\|)(1 + \|T_2\|)(1 + k_s d_D)^3 (k_s h)^{-1/2}.$$

最后，由于当 $z \in \Gamma_D$ 时， $\mathbb{U}(z, x)e_j = -\overline{\mathbb{F}(z, x)}e_j \mid_{\Gamma_D}$ ，因此我们可以推出：

$$\begin{aligned} \text{IV}_4 &= \text{Im} \sum_{j=1}^2 \int_{\Gamma_D} (\overline{\mathbb{U}(z, x)}e_j \cdot \sigma(\mathbb{F}(z, x)e_j)\nu - \sigma(\overline{\mathbb{U}(z, x)}e_j)\nu \cdot \mathbb{F}(z, x)e_j) ds(x) \\ &= -\text{Im} \sum_{j=1}^2 \int_{\Gamma_D} \sigma(\overline{\mathbb{U}(z, x)}e_j + \mathbb{F}(z, x)e_j)\nu \cdot \mathbb{F}(z, x)e_j ds(x) \\ &= \text{Im} \sum_{j=1}^2 \int_{\Gamma_D} \sigma(\mathbb{U}(z, x)e_j + \overline{\mathbb{F}(z, x)}e_j)\nu \cdot \overline{\mathbb{F}(z, x)}e_j ds(x). \end{aligned}$$

综上所述，利用式子(4.28)引理得证。 \square

本文中关心的障碍物都为扩展障碍物(Extended Obstacles)，即 $k_s d_D \approx 1$ 。由于 $k_s = 2\pi/\lambda_s$ ，其中 λ_s 为 s-波的波长，于是意味着障碍物的尺寸与入射波的 s-波的波长相当。然后，通过定理4.3.1，可以看到，当障碍物 D 远离半空间表面 Γ_0 时，即 $k_s h \gg 1$ ，且孔径 $d \gg h$ 时， $\mathbb{R}_d(z)$ 是非常小的。于是，我们在这种情况下可以把式(4.19)右端第一项看作该成像函数的 $\hat{I}_d(z)$ 的主项

$$\begin{aligned} \hat{I}_d(z) &\approx \text{Im} \sum_{j=1}^2 \int_{\Gamma_D} [\sigma(\mathbb{U}(z, x)e_j + \overline{\mathbb{F}(z, x)}e_j)\nu] \cdot [\overline{\mathbb{F}(z, x)}e_j] ds(x) \\ &:= \hat{I}_F(z). \end{aligned}$$

观察 $\mathbb{F}(z, x)$ 的表达式 (4.15), 对于任意 $z \in \Omega$, 存在标量函数 $A_j(\xi), B_j(\xi)$, $j = 1, 2$, 可以将 $\mathbb{F}(z, x)$ 表示成

$$\begin{aligned}\mathbb{F}(z, x)e_j &= \int_{-k_p}^{k_p} A_j(\xi) \begin{pmatrix} -\xi \\ \mu_p \end{pmatrix} e^{\mathbf{i}(z-x) \cdot (-\xi, \mu_p)^T} d\xi \\ &\quad + \int_{-k_s}^{k_s} B_j(\xi) \begin{pmatrix} \mu_s \\ \xi \end{pmatrix} e^{\mathbf{i}(z-x) \cdot (-\xi, \mu_s)^T} d\xi \\ &= \int_0^\pi \tilde{A}_j(\theta) \tau(\theta) e^{\mathbf{i}k_p(z-x) \cdot \tau(\theta)} d\theta \\ &\quad + \int_0^\pi \tilde{B}_j(\theta) \tau(\theta)^\perp e^{\mathbf{i}k_s(z-x) \cdot \tau(\theta)} d\theta,\end{aligned}$$

其中第二个等式使用了变量替换 $\xi = \cos \theta$, 且有

$$\begin{aligned}\tilde{A}_j(\theta) &= k_p A_j(k_p \cos \theta) \sin \theta, \\ \tilde{B}_j(\theta) &= k_s B_j(k_s \cos \theta) \sin \theta, \\ \tau(\theta) &= (-\cos \theta, \sin \theta)^T, \\ \tau(\theta)^\perp &= (\sin \theta, \cos \theta)^T.\end{aligned}$$

于是 $\overline{\mathbb{F}(z, x)}e_j$ 可以看成是弹性波 p 平面波加权叠加与 s 平面波的加权叠加之和, 显然对于固定的 z , $\overline{\mathbb{F}(z, x)}e_j$ 关于变量 x 满足弹性波方程. 因此, 由 $\mathbb{U}(z, x)e_j$ 的定义, 自然地可以把它看成是以 $\overline{\mathbb{F}(z, x)}e_j$ 为入射波且在障碍物边界上满足 Dirichlet 边界条件的弹性波散射解. 通过定理 4.2.2, 我们知道 $\overline{\mathbb{F}(z, x)}$ 随着 $|x - z|$ 增大而逐渐衰减. 于是易知, 当 $x \in \Gamma_D$ 时, $\sigma(\mathbb{U}(z, x)e_j + \overline{\mathbb{F}(z, x)}e_j)v$ 也随着 $|x - z|$ 增大而逐渐衰减. 因此, 当点 z 远离障碍物边界 Γ_D 时, $\hat{I}_F(z)$ 变得非常小. 于是, 当 $k_s h \gg 1$, $d \gg h$ 以及 z 远离障碍物边界 Γ_D 时, $\hat{I}_d(z)$ 变得非常小, 即此时在 z 点无法成像.

为了分析当 z 靠近障碍物边界时成像函数主项 $\hat{I}_F(z)$ 的函数性质, 我们将提出平面入射波在障碍物边界处的散射系数. 类似声波散射系数, 我们将给弹性波散射系数如下定义.

4.3.1 弹性波散射系数

定义 4.3.1 对于任意单位向量 $\tau \in \mathbb{R}^2$, 令 $u_p^i = \tau e^{\mathbf{i}k_p x \cdot \tau}$, $u_s^i = \tau^\perp e^{\mathbf{i}k_s x \cdot \tau}$ 分别是 p 平面入射波和 s 平面入射波. 令 $u_\alpha^s(x) := u_\alpha^s(x; \tau)$, $\alpha = p, s$ 为相应的弹性波散射

解：

$$\Delta_e u_\alpha^s + \omega^2 u_\alpha^s = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}, \quad (4.29)$$

$$u_\alpha^s = -u_\alpha^i \quad \text{on} \quad \Gamma_D. \quad (4.30)$$

于是相应的散射系数 $R_\alpha(x; \tau)$, $x \in \Gamma_D$ 满足如下关系

$$\sigma(u_\alpha^s(x) + u_\alpha^i(x))v(x) = \mathbf{i}k_\alpha R_\alpha(x; \tau) e^{ik_\alpha x \cdot \tau} \quad \text{on} \quad \Gamma_D.$$

其中对于 $\tau = (\tau_1, \tau_2)^T \in \mathbb{R}^2$, 有 $\tau^\perp = (\tau_2, -\tau_1)^T$.

注 4.3.1 由全空间弹性波散射问题的唯一性和存在性 [8, 12], 可以认为散射系数的定义是合理的. 类似地, 我们可以针对其它障碍物边界条件, 如 *Neumann* 边界条件, *Robbins* 边界条件等, 也可以定义相应的散射系数. 特别地, 上面定义的散射系数是对文献 [69] 中的声波散射系数的推广.

事实上, 由弹性波散射系数的定义可知, 当得知入射波与散射系数时, 我们就可以得到在障碍物表面的弹性总场的法向应力. 于是下面我们将来讨论, 如何去逼近弹性波的散射系数. 自然地, 我们先来讨论最简单的情形, 当障碍物为一平面时的散射系数. 特别地, 先假设平面为 x_1 轴.

我们考虑入射波为 p 平面波 \hat{u}_p (或是 s 平面波 \hat{u}_s), 其中入射方向为 $\hat{d}_0 = (\sin t_0, \cos t_0)^T$, $t_0 \in (0, 2\pi)$. 反射平面为 $\Gamma := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$, 于是法向为 $\hat{v} = (0, 1)^T$.

4.3.1.1 p -波情形

我们定义入射波 p 平面波 [79, p172] 如下:

$$\hat{u}_p = A_0(\sin t_0, \cos t_0)^T e^{ik_p(x_1 \sin t_0 + x_2 \cos t_0)}.$$

于是, 反射 p 波可以被表示成:

$$\hat{u}_{p,p} = A_1(\sin t_1, -\cos t_1)^T e^{ik_p(x_1 \sin t_1 - x_2 \cos t_1)}.$$

反射 s 波可以被表示成:

$$\hat{u}_{p,s} = A_2(-\cos t_2, -\sin t_2)^T e^{ik_s(x_1 \sin t_2 - x_2 \cos t_2)}.$$

由于在反射面 Γ 上总场满足 Dirichlet 边界条件, 于是马上可以得到:

$$\hat{u}_p(x_1, 0) + \hat{u}_{p,p}(x_1, 0) + \hat{u}_{p,s}(x_1, 0) = 0, \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}.$$

通过简单的计算可以得到

$$\begin{aligned} t_1 &= t_0, \quad \frac{\sin t_2}{\sin t_0} = \frac{k_p}{k_s} := \kappa, \\ \frac{A_1}{A_0} &= \frac{\cos(t_0 + t_2)}{\cos(t_0 - t_2)}, \\ \frac{A_2}{A_0} &= \frac{\sin 2t_0}{\cos(t_0 - t_2)}. \end{aligned}$$

于是，易知当入射角 $t_0 \neq 0$ ，入射波为 p 平面波时，不仅会引发 p 反射波，而且有 s 反射波。特别地，我们可以将总场表示成如下向量形式：

$$\hat{u}_p^{\text{total}} = A_0 \hat{d}_0 e^{ik_p x \cdot \hat{d}_0} + A_1 \hat{d}_1 e^{ik_p x \cdot \hat{d}_1} + A_2 \hat{d}_2^\perp e^{ik_s x \cdot \hat{d}_2^\perp}, \quad (4.31)$$

这里对于任意 $\tau = (\tau_1, \tau_2)^T \in \mathbb{R}^2$ ，有 $\tau^\perp = (\tau_2, -\tau_1)^T$ ，且有：

$$\hat{d}_1 = \hat{d}_0 - 2(\hat{d}_0 \cdot \hat{\nu})\hat{\nu}, \quad (4.32)$$

$$\hat{d}_2 = \kappa \hat{d}_0 - \left[\kappa(\hat{d}_0 \cdot \hat{\nu}) + \text{sgn}(\hat{d}_0 \cdot \hat{\nu}) \sqrt{1 - \kappa^2(\hat{d}_0 \cdot \hat{\nu}^\perp)^2} \right] \hat{\nu}, \quad (4.33)$$

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{-\hat{d}_0 \cdot \hat{d}_2}{\hat{d}_1 \cdot \hat{d}_2}, \quad (4.34)$$

$$\frac{A_2}{A_0} = \frac{2(\hat{d}_0 \cdot \hat{\nu})(\hat{d}_0 \cdot \hat{\nu}^\perp)}{\hat{d}_1 \cdot \hat{d}_2}. \quad (4.35)$$

4.3.1.2 s -波情形

类似地，我们可以定义 s 平面波如下

$$\hat{u}_s = A_0 (\cos t_0, -\sin t_0)^T e^{ik_s(x_1 \sin t_0 + x_2 \cos t_0)}.$$

于是，反射 p 波可以被表示成：

$$\hat{u}_{s,p} = A_1 (\sin t_1, -\cos t_1)^T e^{ik_p(x_1 \sin t_1 - x_2 \cos t_1)}.$$

反射 s 波可以被表示成：

$$\hat{u}_{s,s} = A_2 (-\cos t_2, -\sin t_2)^T e^{ik_s(x_1 \sin t_2 - x_2 \cos t_2)}.$$

同理，由于在反射面 Γ 上满足 Dirichlet 边界条件，于是可以得到

$$\hat{u}_s(x_1, 0) + \hat{u}_{s,p}(x_1, 0) + \hat{u}_{s,s}(x_1, 0) = 0, \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}.$$

通过简单的计算可以得到

$$\begin{aligned} t_2 &= t_0, \quad \frac{\sin t_1}{\sin t_0} = \frac{k_s}{k_p} = \kappa_1, \\ \frac{A_1}{A_0} &= \frac{-\sin 2t_0}{\cos(t_0 - t_1)}, \\ \frac{A_2}{A_0} &= \frac{\cos(t_0 + t_1)}{\cos(t_0 - t_1)}. \end{aligned}$$

于是, 当入射角 $t_0 \neq 0$, 入射波为 s 平面波时, 不仅会引发 s 反射波, 而且有 p 反射波. 特别地, 我们可以将总场表示成如下向量形式:

$$\hat{u}_s^{\text{total}} = A_0 \hat{d}_0^\perp e^{ik_s x \cdot \hat{d}_0} + A_1 \hat{d}_1 e^{ik_p x \cdot \hat{d}_1} + A_2 \hat{d}_2^\perp e^{ik_s x \cdot \hat{d}_2}, \quad (4.36)$$

其中

$$\hat{d}_1 = \kappa_1 \hat{d}_0 - \left[\kappa_1 (\hat{d}_0 \cdot \hat{v}) + \text{sgn}(\hat{d}_0 \cdot \hat{v}) \sqrt{1 - \kappa_1^2 (\hat{d}_0 \cdot \hat{v}^\perp)^2} \right] \hat{v}, \quad (4.37)$$

$$\hat{d}_2 = \hat{d}_0 - 2(\hat{d}_0 \cdot \hat{v}) \hat{v}, \quad (4.38)$$

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{-2(\hat{d}_0 \cdot \hat{v})(\hat{d}_0 \cdot \hat{v}^\perp)}{\hat{d}_1 \cdot \hat{d}_2}, \quad (4.39)$$

$$\frac{A_2}{A_0} = \frac{-\hat{d}_0 \cdot \hat{d}_1}{\hat{d}_1 \cdot \hat{d}_2}. \quad (4.40)$$

进一步, 我们来考虑反射面为任意平面的情形. 我们考虑入射波为 p 平面波 u_p (或是 s-wave u_s), 其中入射方向为 $d_0 = (\sin t_0, \cos t_0)^T, t_0 \in (0, 2\pi)$. 反射平面为 $\Gamma := \{x \in \mathbb{R}^2 : x \cdot v = 0\}$, 该反射面穿过原点, 且其法向量为 $v = (\sin \phi, \cos \phi)^T, \phi \in (0, 2\pi)$. 我们将其总场表示为;

$$u_p^{\text{total}} = A_0 d_0 e^{ik_p x \cdot d_0} + A_1 d_1 e^{ik_p x \cdot d_1} + A_2 d_2^\perp e^{ik_s x \cdot d_2}, \quad (4.41)$$

$$u_s^{\text{total}} = A_0 d_0^\perp e^{ik_s x \cdot d_0} + A_1 d_1 e^{ik_p x \cdot d_1} + A_2 d_2^\perp e^{ik_s x \cdot d_2}, \quad (4.42)$$

这里 $i = 0, 1, 2, d_i$ 是单位向量, A_i 是相应的振幅. 由于在反射面 Γ 上满足 Dirichlet 边界条件, 意味着有 $u_p^{\text{total}} = 0, u_s^{\text{total}} = 0, x \in \Gamma$. 为了将任意平面与 x_1 轴联系起来, 我们令 $\hat{x} = Sx$, 这里 $S \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 是旋转角度为 ϕ 的旋转矩阵, 即为

$$S = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}.$$

定义 $\hat{v} = Sv$. 下面的定理告诉我们, 当 $u(x)$ 在坐标 x 下满足弹性波方程时, $u(x)$ 在旋转后得到的 $Su(x)$ 在旋转后的坐标 \hat{x} 下同样满足弹性波方程.

引理 4.3.1 令 $u(x) \in \mathbb{C}^2$ 且定义如下弹性波算子 Δ_e^x

$$\Delta_e^x := \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \\ \mu \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \end{pmatrix}.$$

假设 $u(x)$ 满足

$$\Delta_e^x u(x) + \omega^2 u(x) = 0,$$

则 $\hat{u}(\hat{x})$ 满足

$$\Delta_e^{\hat{x}} \hat{u}(\hat{x}) + \omega^2 \hat{u}(\hat{x}) = 0,$$

其中 $\hat{u}(\hat{x}) := S u(S^T \hat{x})$ 或是 $u(x) = S^T \hat{u}(Sx)$.

证明. 利用链式法则, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}_1^2} &= \cos^2 \phi \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - 2 \cos \phi \sin \phi \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \sin^2 \phi \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \\ \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}_2^2} &= \sin^2 \phi \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2 \cos \phi \sin \phi \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \cos^2 \phi \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \\ \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}_1 \partial \hat{x}_2} &= \cos \phi \sin \phi \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} - \cos \phi \sin \phi \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}. \end{aligned}$$

将上述等式代入 $\Delta_e^{\hat{x}} \hat{u}(\hat{x})$ 后, 简单的整理后引理得证. \square

首先我们易得, 反射面 Γ 在坐标 \hat{x} 下为 $\Gamma := \{\hat{x} \in \mathbb{R}^2 : \hat{x}_2 = 0\}$ 且法向为 $\nu = (0, 1)^T$. 利用定理 4.3.1, 我们可以得到 $\hat{u}_p(x) := S u_p(S^T \hat{x})$ 和 $\hat{u}_p^{\text{total}}(x) := S u_p(S^T \hat{x})$ 在坐标 \hat{x} 下满足弹性波方程, 且有 $\hat{u}_p = 0$, $\hat{x} \in \Gamma$, 其中有

$$\begin{aligned} \hat{u}_p &= A_0 \hat{d}_0 e^{ik_p \hat{x} \cdot \hat{d}_0}, \\ \hat{u}_p^{\text{total}} &= A_0 \hat{d}_0 e^{ik_p \hat{x} \cdot \hat{d}_0} + A_1 \hat{d}_1 e^{ik_p \hat{x} \cdot \hat{d}_1} + A_2 \hat{d}_2^\perp e^{ik_s \hat{x} \cdot \hat{d}_2}. \end{aligned}$$

其中 $\hat{d}_i = S d_i$, $i = 0, 1, 2$. 于是通过 (4.31)-(4.35), 我们可以得到 A_i, \hat{d}_i , $i = 0, 1, 2$. 利用

$$d_i = S^T d_i, \nu = S^T d_i$$

$$\hat{d}_i \cdot \hat{d}_j = d_i \cdot d_j,$$

$$\hat{\nu} \cdot \hat{d}_i = \nu \cdot d_i, i, j = 0, 1, 2.$$

最终，我们有

$$\begin{aligned} d_1 &= \kappa_1 d_0 - \left[\kappa_1(d_0 \cdot \nu) + \operatorname{sgn}(d_0 \cdot \nu) \sqrt{1 - \kappa_1^2(d_0 \cdot \nu^\perp)^2} \right] \nu, \\ d_2 &= d_0 - 2(d_0 \cdot \nu)\nu, \\ \frac{A_1}{A_0} &= \frac{-2(d_0 \cdot \nu)(d_0 \cdot \nu^\perp)}{d_1 \cdot d_2}, \\ \frac{A_2}{A_0} &= \frac{-d_0 \cdot d_1}{d_1 \cdot d_2}. \end{aligned}$$

于是我们得到 $u_p^{\text{total}}(x)$. 类似地，对于 u_s^{total} ，我们也可以得到：

$$\begin{aligned} d_1 &= \kappa_1 d_0 - \left[\kappa_1(d_0 \cdot \nu) + \operatorname{sgn}(d_0 \cdot \nu) \sqrt{1 - \kappa_1^2(d_0 \cdot \nu^\perp)^2} \right] \nu, \\ d_2 &= d_0 - 2(d_0 \cdot \nu)\nu, \\ \frac{A_1}{A_0} &= \frac{-2(d_0 \cdot \nu)(d_0 \cdot \nu^\perp)}{d_1 \cdot d_2}, \\ \frac{A_2}{A_0} &= \frac{-d_0 \cdot d_1}{d_1 \cdot d_2}. \end{aligned}$$

因此，总场 $u(x)$ 在反射面 Γ 处的法向应力可以计算得到

$$\begin{aligned} \sigma(u_p^{\text{total}}) \cdot \nu &= [\mathbf{i}k_p A_0(\lambda\nu + 2\mu(d_0, \nu)d_0) \\ &\quad + \mathbf{i}k_p A_1(\lambda\nu + 2\mu(d_1, \nu)d_1) \\ &\quad + \mathbf{i}k_s A_2 \mu((d_2, \nu)d_2^\perp + (d_2^\perp, \nu)d_2)] e^{\mathbf{i}k_p x \cdot d_0} \\ &:= \mathbf{i}k_p A_0 \hat{\mathbf{R}}_p(x, d_0, \nu) e^{\mathbf{i}k_p x \cdot d_0}, \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} \sigma(u_s^{\text{total}}) \cdot \nu &= [\mathbf{i}k_s A_0 \mu((d_0, \nu)d_0^\perp + (d_0^\perp, \nu)d_0) \\ &\quad + \mathbf{i}k_p A_1(\lambda\nu + 2\mu(d_1, \nu)d_1) \\ &\quad + \mathbf{i}k_s A_2 \mu((d_2, \nu)d_2^\perp + (d_2^\perp, \nu)d_2)] e^{\mathbf{i}k_s x \cdot d_0} \\ &:= \mathbf{i}k_s A_0 \hat{\mathbf{R}}_s(x, d_0, \nu) e^{\mathbf{i}k_s x \cdot d_0}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

其中，上式中针对 u_p^{total} 利用了条件：当 $x \in \Gamma$ 时，

$$e^{\mathbf{i}k_p x \cdot d_0} = e^{\mathbf{i}k_p x \cdot d_1} = e^{\mathbf{i}k_s x \cdot d_2},$$

相应地，针对 u_s^{total} 利用了条件：当 $x \in \Gamma$ 时，

$$e^{\mathbf{i}k_s x \cdot d_0} = e^{\mathbf{i}k_p x \cdot d_1} = e^{\mathbf{i}k_s x \cdot d_2}.$$

这里的 $\hat{\mathbf{R}}_p(x, d_0, \nu)$ 或 $\hat{\mathbf{R}}_s(x, d_0, \nu)$ 就是 p 平面波或 s 平面波入射到法向为 ν 的平面时的散射系数.

下面我们要利用平面的反射系数来逼近凸的障碍物的散射系数. 对于一个凸的障碍物 D , 我们依据入射波方向 d , 将其表面分成两部分:

$$x \in \partial D_d^- = \{x \in \partial D, \nu(x) \cdot d < 0\}$$

和

$$x \in \partial D_d^+ = \{x \in \partial D, \nu(x) \cdot d \geq 0\},$$

即通常称为阳面和阴面. 类似于声波中的散射系数的 Kirchhoff 近似 [11, 51, 88], 我们可以认为在阴面区域时, 散射系数为 0; 而在阳面区域, 我们局部地把每一个点 x 的小邻域内的一小段边界看作是一个法向为 $\nu(x)$ 的平面. 于是, 关于障碍物 D 的散射系数, 我们有如下弹性波 Kirchhoff 逼近:

$$\mathbf{R}_\alpha(x; d) \approx \begin{cases} \hat{\mathbf{R}}_\alpha(x; d, \nu(x)) & \text{if } x \in \partial D_d^- = \{x \in \partial D, \nu(x) \cdot d < 0\}, \\ 0 & \text{if } x \in \partial D_d^+ = \{x \in \partial D, \nu(x) \cdot d \geq 0\}. \end{cases} \quad (4.45)$$

注 4.3.2 在高频情况下, $k_\alpha \gg 1$, $\alpha = p, s$, 可以得到此时的波长是很小的, $\lambda_\alpha \ll 1$, $\alpha = p, s$, 所以凸边界上的每一点附近的这一部分边界相比较于很小尺寸的波长是平坦的, 故可以看成平面.

为便于分析, 对于 $\alpha = s, p$, 我们记

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_\alpha(x; d) &= (\mathbf{R}_\alpha^1(x; d), \mathbf{R}_\alpha^2(x; d))^T, \\ \hat{\mathbf{R}}_\alpha(x; d, \nu(x)) &= (\hat{\mathbf{R}}_\alpha^1(x; d, \nu(x)), \hat{\mathbf{R}}_\alpha^2(x; d, \nu(x)))^T. \end{aligned}$$

下面我们将用几个数值实验来对比真实的散射系数与 Kirchhoff 逼近的散射系数. 为了合成真实的散射系数, 我们需要计算 $\sigma(u_\alpha^s + u_\alpha^i) \cdot \nu$. 当入射波为平面波时, 散射波可以表示成以基本解 $\mathbb{G}(x, y)$ 为积分核的单层位势,

$$u^s(x) = \int_{\Gamma_D} -\mathbb{G}(y, x)^T \sigma(u^s(y) + u^i(y)) \nu ds(y) \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D},$$

由于 $\mathbb{G}(x, y)$ 在 $x = y$ 处是弱奇异的, 令 $x \rightarrow \Gamma_D$, 由 Γ_D 上的边界条件

$$u^s(x) + u^i(x) = 0$$

可以得到如下边界积分方程:

$$u^i(x) = \int_{\Gamma_D} \mathbb{G}(y, x)^T \sigma(u^s(y) + u^i(y)) \nu ds(y) \quad x \in \Gamma_D,$$

于是利用 Nyström 方法 [11] 离散上述积分方程, 可以求得 $\sigma(u_\alpha^s + u_\alpha^i) \cdot \nu$. 因此, 我们可以计算真实的散射系数:

$$\mathbf{R}_\alpha^j(x; d) = \frac{\sigma(u^s(y) + u^i(y))\nu \cdot e_j}{ik_\alpha e^{ik_\alpha x \cdot d}}. \quad (4.46)$$

另一方面, 利用式子 (4.43) 和 (4.44) 来计算 $\hat{\mathbf{R}}_\alpha(x; d) = (\hat{\mathbf{R}}_\alpha^1(x; d), \hat{\mathbf{R}}_\alpha^2(x; d))^T$.

特别地, 在该数值实验中, 我们取 Lamé 常数 $\lambda = 1/2, \mu = 1/4$ 以及入射波

$$\begin{aligned} u_p^i &= (\cos t, \sin t)^T e^{ik_p(x_1 \cos t + x_2 \sin t)}, \\ u_s^i &= (\sin t, -\cos t)^T e^{ik_s(x_1 \cos t + x_2 \sin t)}. \end{aligned}$$

其中 $t \in [0, 2\pi]$. 我们针对两种形状的边界做实验, 它们的参数表达如下:

$$\text{圆: } x_1 = \cos(\theta), \quad x_2 = \sin(\theta) \square$$

$$\begin{aligned} \text{梨形: } \rho &= 0.5(2 + 0.3 \cos(3\theta)), \\ x_1 &= \sin \frac{\pi}{4} \rho (\cos \theta - \sin \theta), \quad x_2 = \sin \frac{\pi}{4} \rho (\cos \theta + \sin \theta) \square \end{aligned}$$

其中 $\theta \in [0, 2\pi]$ (见图 4.4).

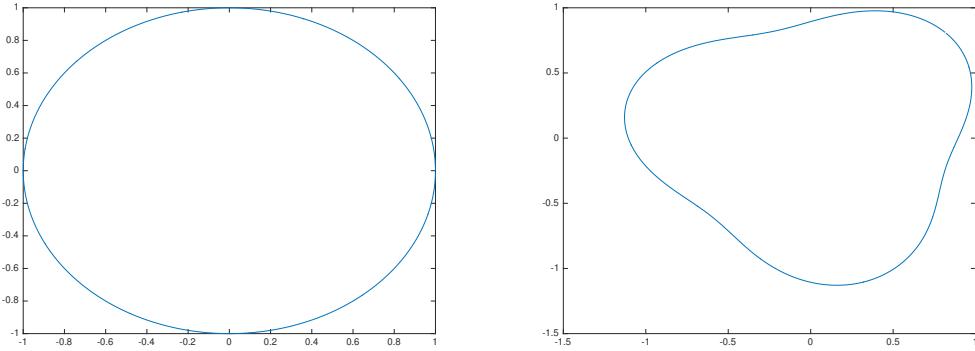
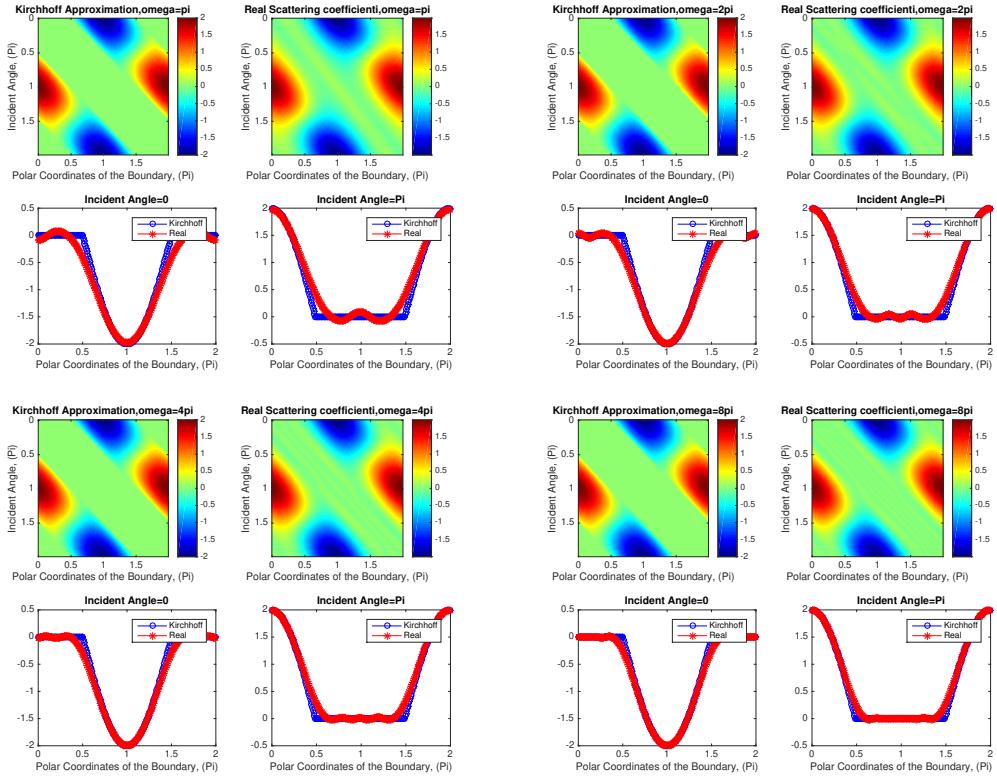
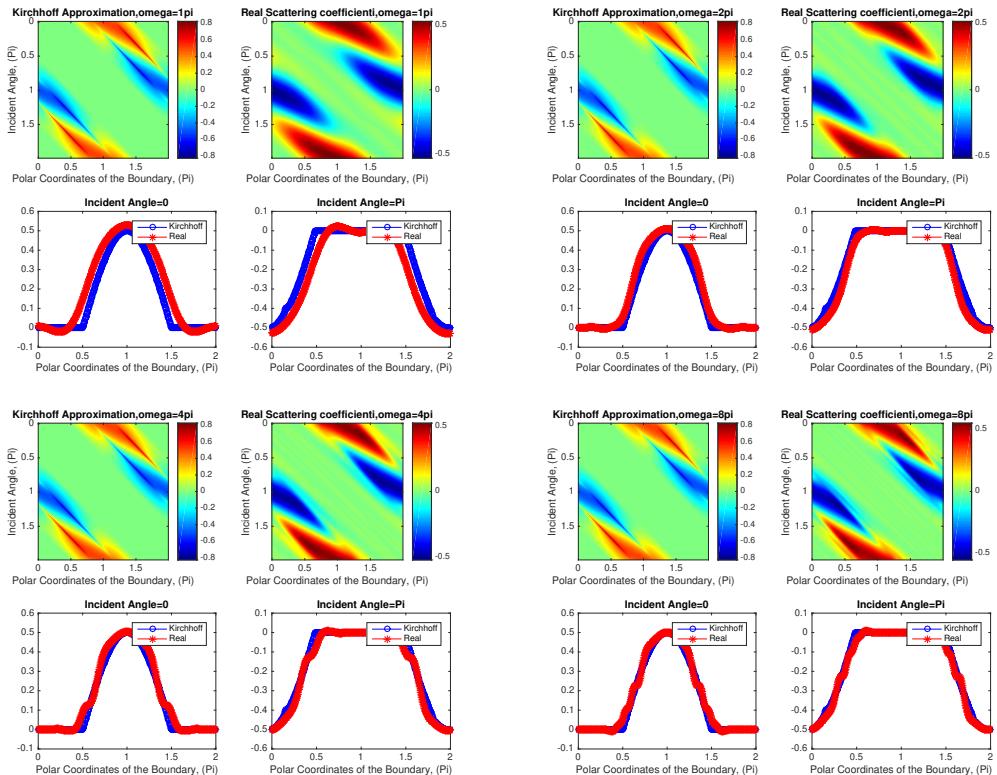


图 4.4 散射系数实验中的障碍物形状: 第一个圆, 第二个梨形.

为了比较不同角频率情况下, 散射系数的逼近情况, 我们分别取 $\omega = \pi, 2\pi, 4\pi, 8\pi$. 如图 4.5-4.8 所示, 其中每一幅图对应相应形状的 $\mathbf{R}_\alpha^i(x; d)$, $\hat{\mathbf{R}}_\alpha^i(x; d, \nu(x))$, $\alpha = s, p$, $i = 1, 2$ 的对比.

每幅图含四幅针对不同角频率的子图, 每幅子图中第一行中的第一列代表真实的散射系数, 第二列代表 Kirchhoff 逼近的散射系数; 第一行中的横坐标是边界的参数化 $\theta/2\pi$, 纵坐标是入射方向 $t/2\pi$. 第二行是入射角为 0 和 π 对应的图, 其中每幅图中红线代表真实的散射系数, 蓝线代表 Kirchhoff 逼近的散射系

图 4.5 圆形的 R_p^1 和 \hat{R}_p^1 .图 4.6 圆形的 R_s^2 和 \hat{R}_s^2 .

数. 由图4.5-4.8, 我们可以看到, 当角频率比较大时, Kirchhoff逼近(4.45)的效果是非常好, 符合高频光学近似. 此外, 我们发现当角频率不是很大的是, Kirchhoff逼近的效果还是非常理想的.

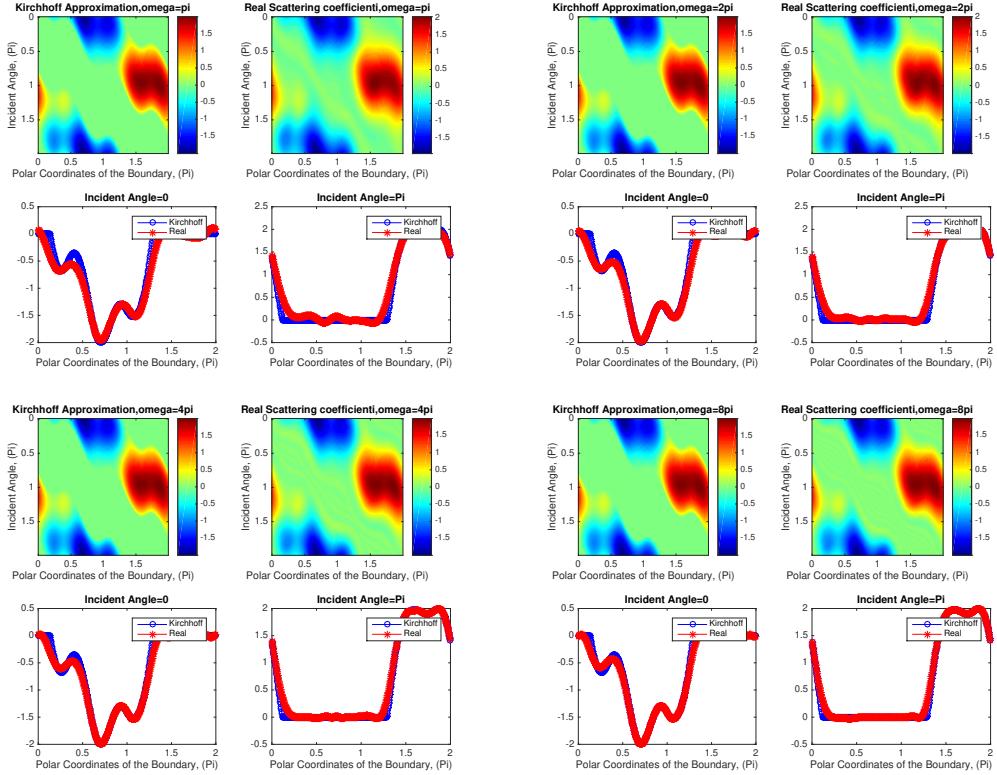


图 4.7 梨形的 R_p^1 和 \hat{R}_p^1 .

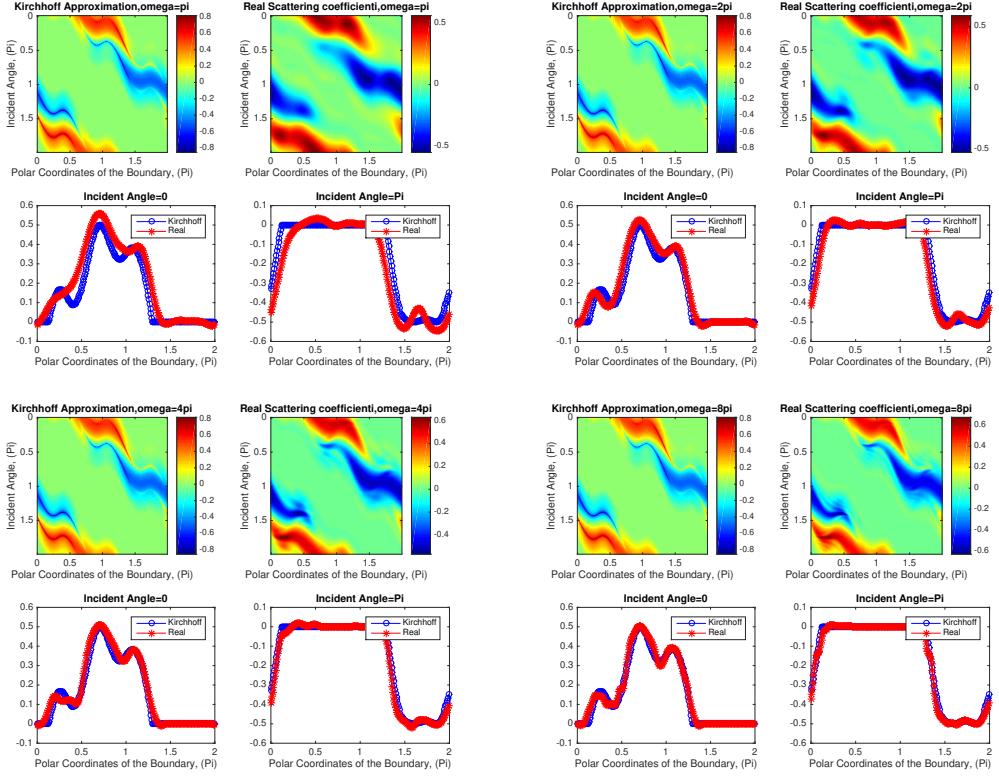
现在我们利用弹性波散射系数来分析成像函数, 由式子 (4.29) 以及定理 4.3.1, 易得对于任意 $z \in \Gamma_D$,

$$\begin{aligned} \hat{I}_d(z) &\approx \operatorname{Im} \sum_{j=1}^2 \int_{\Gamma_D} \left[\int_0^\pi \overline{\tilde{A}_j(\theta)} \mathbf{i} k_p R_p(x; \tau(\theta)) e^{ik_p(x-z) \cdot \tau(\theta)} d\theta \right] \cdot \overline{\mathbb{F}(z, x)} e_j ds(x) \\ &\quad + \operatorname{Im} \sum_{j=1}^2 \int_{\Gamma_D} \left[\int_0^\pi \overline{\tilde{B}_j(\theta)} \mathbf{i} k_s R_s(x; \tau(\theta)) e^{ik_s(x-z) \cdot \tau(\theta)} d\theta \right] \cdot \overline{\mathbb{F}(z, x)} e_j ds(x). \end{aligned}$$

为了便于后文分析, 我们先引入下面著名的驻相引理, 见 [89, Theorem 7.7.5].

引理 4.3.2 令振幅函数 $g \in C_0^2(\mathbb{R})$ 及相函数 $f \in C^2(\mathbb{R})$ 存在驻相点 t_0 , 即 $f'(t_0) = 0, f''(t_0) \neq 0$, 且当 $t \neq t_0$ 时有 $f'(t) \neq 0$. 于是对于任意 $\lambda > 0$, 存在常数 C 成立

$$\left| \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{i\lambda f(t)} dt - g(t_0) e^{i\lambda f(t_0)} \left(\frac{\lambda f''(t_0)}{2\pi i} \right)^{-1/2} \right| \leq C \lambda^{-1} \|g''\|_{C(\mathbb{R})}.$$

图 4.8 梨形的 R_s^2 和 \hat{R}_s^2 .

这里，我们假设障碍物 D 是凸的. 令 $x(s)$, $0 < s < L$, 是障碍物边界 Γ_D 的关于弧长的参数化表示. 定义 $x_{\pm}(\theta) = x(s_{\pm})$ 是边界 Γ_D 上满足 $v(x_{\pm}(\theta)) = \pm\tau(\theta)$ 的点. 令相函数 $f(s) = (x(s) - z) \cdot \tau(\theta)$ 且有

$$f'(s) = x'(s) \cdot \tau(\theta), \quad f''(s) = x''(s) \cdot \tau(\theta).$$

显然有 $f'(s_{\pm}) = \pm x'(s_{\pm}) \cdot v(x(s_{\pm}))$, $f''(s_{\pm}) = \pm x''(s_{\pm}) \cdot v(x(s_{\pm})) = \pm \kappa(x(s_{\pm})) |x'(s_{\pm})|^2$, 其中 κ 表示 Γ_D 的曲率. 观察 Kirchhoff 逼近, 当 $x \in \Gamma_D^+(\tau) = \{x \in \Gamma_D, v(x) \cdot \tau > 0\}$, $\alpha = p, s$. 时, 成立

$$R_{\alpha}(x; \tau) \approx 0 \tag{4.47}$$

因此, 利用驻相引理和式子 (4.47) 我们可以得到:

$$\begin{aligned} \hat{I}_d(z) &\approx \operatorname{Im} \sum_{j=1}^2 \sqrt{2\pi k_p} \int_0^\pi \overline{\tilde{A}_j(\theta)} e^{ik_p(x_-(\theta)-z) \cdot \tau(\theta) + i\frac{\pi}{4}} \frac{R_p(x_-(\theta); \tau(\theta)) \cdot \overline{\mathbb{F}(z, x_-(\theta))} e_j}{\sqrt{\kappa(x_-(\theta))}} d\theta \\ &\quad + \operatorname{Im} \sum_{j=1}^2 \sqrt{2\pi k_s} \int_0^\pi \overline{\tilde{B}_j(\theta)} e^{ik_s(x_-(\theta)-z) \cdot \tau(\theta) + i\frac{\pi}{4}} \frac{R_s(x_-(\theta); \tau(\theta)) \cdot \overline{\mathbb{F}(z, x_-(\theta))} e_j}{\sqrt{\kappa(x_-(\theta))}} d\theta. \end{aligned}$$

由于 $v(x_-(\theta)) = -\tau(\theta)$, 通过 (4.43) 和 (4.44) 我们可以得到

$$R_p(x_-(\theta); \tau(\theta)) \approx -2(\lambda + 2\mu)\tau(\theta), \quad (4.48)$$

$$R_s(x_-(\theta); \tau(\theta)) \approx -2\mu\tau(\theta)^\perp. \quad (4.49)$$

现在, 我们来观察边界 Γ_D 上的点 z . 当 $v(z) \cdot \tau(\theta) > 0$ 时, 其中 $\theta \in (0, \pi)$, 此时 z 点位于 Γ_D 背对于 Γ_0 的那一部分. 同时, $x_-(\theta)$ 位于 Γ_D 正对于 Γ_0 的那一部分. 于是, z 距离 $x_-(\theta)$ 就较远, 因此得到 $\mathbb{F}(z, x_-(\theta))e_j \approx 0$, 随之得出 $\hat{I}_d(z) \approx 0$. 这就说明, 只利用 Γ_0 上收集的数据无法将障碍物边界 Γ_D 背对于 Γ_0 那部分成像, 而且这一结论在后文中的数值算例中也得到证实. 另一方面, 如果 z 位于 Γ_D 正对于 Γ_0 的阳面, 利用 (4.48), (4.49), $\hat{I}_d(z)$ 正是 $[\kappa(x_-(\theta))]^{-1/2}$ 在 z 附近的那部分点 $x_-(\theta)$ Γ_D 上的加权和. 综上所述, 成像函数 $\hat{I}_d(z)$ 可以将障碍物边界成像, 且仅能将障碍物的阳面成像.

4.4 关于其它类型障碍物的分辨率分析

在这一节中, 我们将考虑在半空间弹性介质中利用 RTM 算法 4.3.1 来重构具有阻抗边界条件的不可穿透障碍物和可穿透障碍物.

对于具有阻抗边界的不可穿透的障碍物, 我们接收到的测量数据为 $u_q(x_r, x_s) = u_q^s(x_r, x_s) + \mathbb{N}(x_r, x_s)q$, $q = e_1, e_2$, 其中 $u_q^s(x, x_s)$ 是如下半空间弹性波方程的散射解:

$$\begin{aligned} \Delta_e u_q^s(x, x_s) + \omega^2 u_q^s(x, x_s) &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{D}, \\ \sigma(u_q^s(x, x_s))v + \mathbf{i}\eta(x)u_q^s(x, x_s) &= -[\sigma(\mathbb{N}(x, x_s)q)v + \mathbf{i}\eta(x)\mathbb{N}(x, x_s)q] \quad \text{on } \Gamma_D, \\ \sigma(u_q^s(x, x_s))e_2 &= 0 \quad \text{on } \Gamma_0, \end{aligned}$$

这里在 Γ_D 上 $\eta \in L^\infty(\Gamma_D)$ 以及 $\eta \geq 0$, 特别地, 当 $\eta = 0$ 时, 上面的障碍物边界条件对应的是 Neumann 边界条件, 因此这里我们不再单独讨论满足 Neumann 边界条件的障碍物. 对定理 4.3.1 稍作修改, 我们可以得到如下针对具有阻抗边界的不可穿透型障碍物的 RTM 方法的分辨率分析, 这里我们不再赘述定理证明.

定理 4.4.1 对于任意 $z \in \Omega$, 令 $\mathbb{U}(z, x) \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$, 其中 $\mathbb{U}(z, x)e_j$, $j = 1, 2$ 是如下弹性波方程的散射解:

$$\begin{aligned} \Delta_e [\mathbb{U}(z, x)e_j] + \omega^2 [\mathbb{U}(z, x)e_j] &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}, \\ \sigma(\mathbb{U}(z, x)e_j)v + \mathbf{i}\eta(x)[\mathbb{U}(z, x)e_j] &= -[\sigma(\overline{\mathbb{F}(z, x)}e_j)v + \mathbf{i}\eta(x)\overline{\mathbb{F}(z, x)}e_j] \quad \text{on } \Gamma_D. \end{aligned}$$

于是针对具有阻抗边界的不可穿透障碍物的散射数据 $u_q^s(x_r, x_s)$, RTM 成像函数 (4.18) 有如下表示

$$\begin{aligned}\hat{I}_d(z) &= -\text{Im} \sum_{j=1}^2 \int_{\Gamma_D} [\mathbb{U}(z, x)e_j + \overline{\mathbb{F}(z, x)}e_j] \cdot [\sigma(\overline{\mathbb{F}(z, x)}e_j)\nu + i\eta(x)\overline{\mathbb{F}(z, x)}e_j] ds(x) \\ &\quad + R_d(z), \quad \forall z \in \Omega,\end{aligned}$$

这里 $|R_d(z)| \leq C\mu^{-2}(1 + k_s d_D)^3 \left[\left(\frac{h}{d}\right)^2 + (k_s h)^{-1/4} \right]$ 其中常数 C 仅依赖于 κ 而与 k_s, k_p, h, d, d_D 无关.

对于可穿透型障碍物, 我们接收到的测量数据为 $u_q(x_r, x_s) = u_q^s(x_r, x_s) + \mathbb{N}(x_r, x_s)q$, $q = e_1, e_2$, 其中 $u_q^s(x, x_s)$ 是如下弹性波方程的散射解:

$$\begin{aligned}\Delta_e u_q^s(x, x_s) + \omega^2 n(x) u_q^s(x, x_s) &= -\omega^2(n(x) - 1)\mathbb{N}(x, x_s)q \quad \text{in } \mathbb{R}_+^2, \\ \sigma(u_q^s(x, x_s))e_2 &= 0 \quad \text{on } \Gamma_0,\end{aligned}$$

这里 $n(x) \in L^\infty(\mathbb{R}_+^2)$ 是正函数, 且当 $x \notin D$ 时, $n(x) = 1$. 类似地, 对定理 4.3.1 稍作修改, 我们可以得到如下针对可穿透型障碍物的 RTM 方法的分辨率分析的定理, 这里我们不再赘述定理证明.

定理 4.4.2 对于 $z \in \Omega$, 令 $\mathbb{U}(z, x) \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$, 其中 $\mathbb{U}(z, x)e_j, j = 1, 2$ 是如下弹性波方程的散射解:

$$\Delta_e [\mathbb{U}(z, x)e_j] + \omega^2 n(x) [\mathbb{U}(z, x)e_j] = -\omega^2(n(x) - 1)\overline{\mathbb{F}(z, x)}e_j \quad \text{in } \mathbb{R}^2.$$

于是针对可穿透型障碍物的散射数据 $u_q^s(x_r, x_s)$, RTM 成像函数 (4.18) 有如下表示

$$\hat{I}_d(z) = \text{Im} \sum_{j=1}^2 \int_D \omega^2(n(x) - 1)[(\mathbb{U}(z, x)e_j + \overline{\mathbb{F}(z, x)}e_j) \cdot \overline{\mathbb{F}(z, x)}e_j] dx + R_d(z),$$

这里 $|R_d(z)| \leq C\mu^{-2}(1 + k_s d_D)^3 \left[\left(\frac{h}{d}\right)^2 + (k_s h)^{-1/4} \right]$, 其中常数 C 仅依赖于 κ 而与 k_s, k_p, h, d, d_D 无关.

4.5 数值测试

在这一节中, 我们将呈现若干数值实验来展示 RTM 算法的有效性. 为了合成散射数据, 我们对要计算的半空间弹性波方程的散射解 $u_q^s(x, x_s)$ 表示成以 Neumann Green 函数 $\mathbb{N}(x, y)$ 为积分核的单层位势, 然后通过 Dirichlet 边界条件,

与入射波 $u_q^i(x, x_s)$ 组合成边界积分方程. 由于当 $x = y$ 时, Neumann Green 函数 $\mathbb{N}(x, y)$ 只具有弱奇异性, 即 $\log|x - y|$. 于是, 我们可以利用 Nyström 方法 [11] 来离散边界 Γ_D 上的积分方程. 针对边界的离散剖分, 我们采用一致网格, 且每一个 p 入射波长均匀设置 10 个网格点. 发射器和接收器均匀地分布在 Γ_d 上, 且对于所有数值实验, 都取 $h = 10, d = 50$ 及 Lamé 常数 $\lambda = 1/2, \mu = 1/4$. 下面实验中的各种障碍物形状, 其边界参数化表示如下:

$$\begin{aligned} \text{圆形: } & x_1 = \rho \cos(\theta), \quad x_2 = \rho \sin(\theta); \\ \text{风筝形: } & x_1 = \cos(\theta) + 0.65 \cos(2\theta) - 0.65, \quad x_2 = 1.5 \sin(\theta); \\ p\text{-叶形: } & r(\theta) = 1 + 0.2 \cos(p\theta); \\ \text{花生形: } & x_1 = \cos \theta + 0 : 2 \cos 3\theta; \quad x_2 = \sin \theta + 0 : 2 \sin 3\theta; \\ \text{方形: } & x_1 = \cos 3\theta + \cos \theta; \quad x_2 = \sin 3\theta + \sin \theta. \end{aligned}$$

这里 $\theta \in [0, 2\pi]$. 且这里的数值成像函数为:

$$I_d(z) = \operatorname{Im} \sum_{q=e_1, e_2} \left\{ \frac{|\Gamma_0^d|^2}{N_s N_r} \sum_{s=1}^{N_s} \sum_{r=1}^{N_r} [\mathbb{T}_D(x_s, z)^T q] \cdot [\mathbb{T}_D(x_r, z)^T \overline{u_q^s(x_r, x_s)}] \right\}.$$

在下文中, 我们所谓的 Dirichlet, Neumann 或是阻抗 (Impedance) 障碍物, 就意味着该障碍物是不可穿透的, 而且其边界 Γ_D 满足 Dirichlet, Neumann 或是阻抗边界条件.

算例 1. 这里我们只考虑 Dirichlet 障碍物来成像, 而变量是障碍物的形状, 包括圆形, 花生形, 四叶草形以及旋转后的方形. 每个成像区域都为 $\Omega = (-2, 2) \times (8, 12)$ 且其样本点网格取为 201×201 . 我们设置发射器和接收器数量为 $N_s = N_r = 401$. 这里针对单频情形, 我们取角频率 $\omega = 3\pi, 4\pi$; 针对多频, 取 $\omega = \pi \times [2 : 0.5 : 8]$, 再将成像函数值关于 ω 叠加. 如图 4.9, 针对不同形状的障碍物, RTM 算法都可以将其上沿给成像出来. 而且, 当对多个单频成像进行叠加后得到的多频成像结果可以显著提高单频的成像效果.

算例 2. 我们考虑针对 Dirichlet 障碍物, Neumann 障碍物, 阻抗障碍物, 以及可穿透障碍物进行成像. 每个成像区域都为 $\Omega = (-2, 2) \times (8, 12)$ 且其样本点网格取为 201×201 . 我们设置发射器和接收器数量为 $N_s = N_r = 401$, 角频率为 $\omega = 2\pi$.

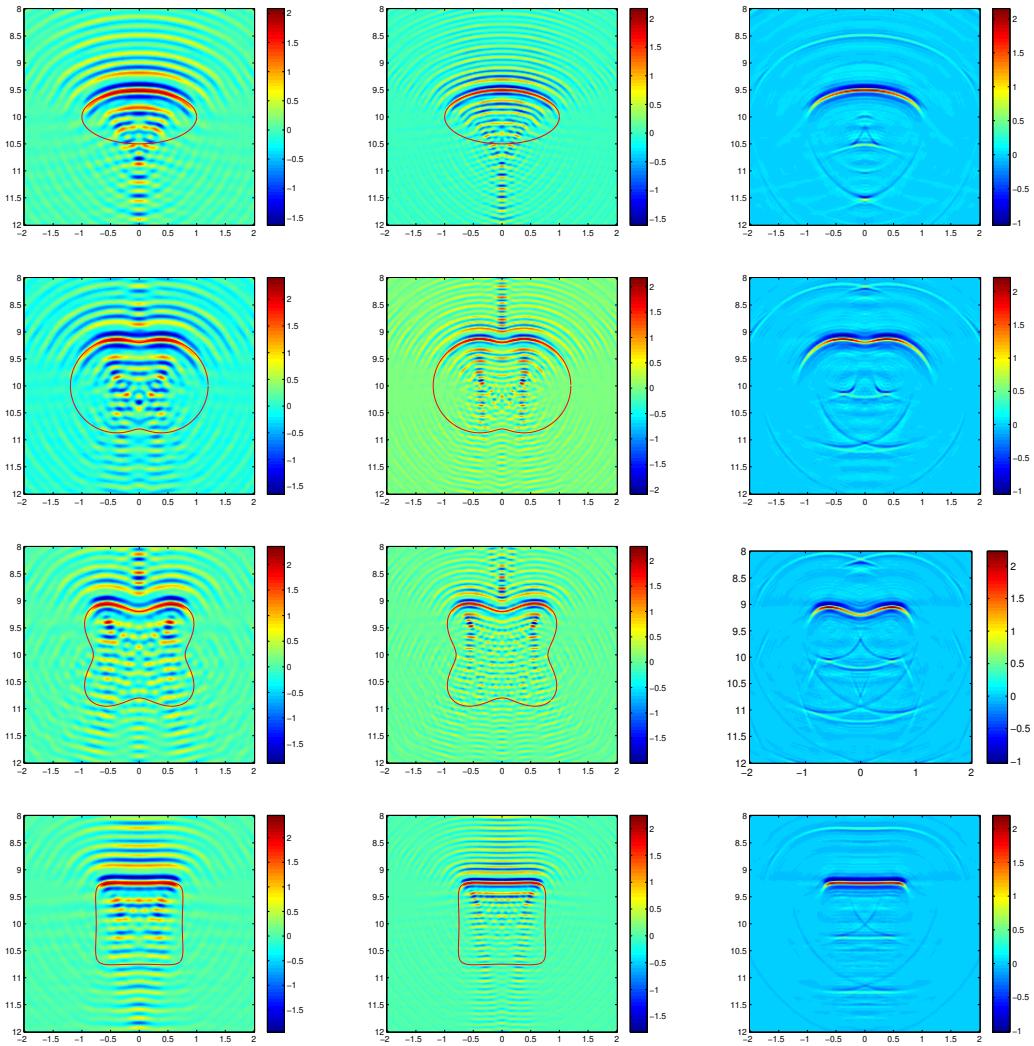


图 4.9 算例 1: 从上到下是不同形状的 Dirichlet 障碍物, 依次是圆形, 花生形, 四叶草形以及旋转后的方形的成像结果. 其中, 第一列是关于单频的, 其角频率为 $\omega = 3\pi$, 第二列是关于单频的, 其角频率为 $\omega = 5\pi$ 以及第三列是关于多频叠加的.

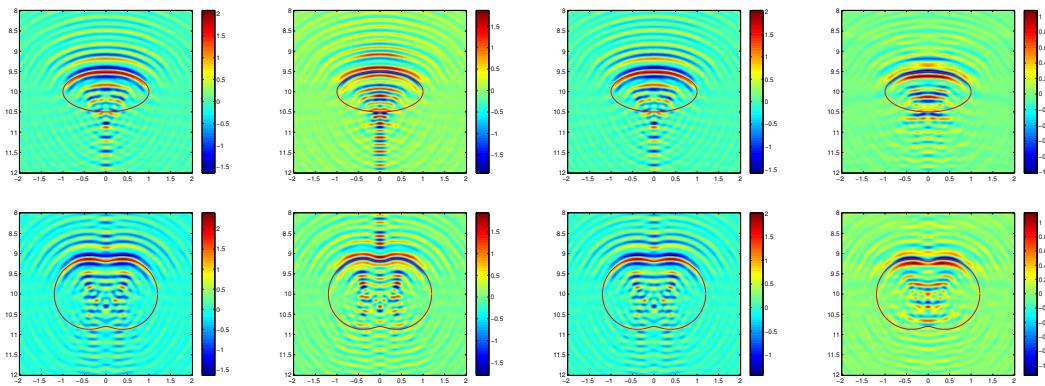


图 4.10 算例 2: 从左到右: Neumann 障碍物, 阻抗障碍物, 以及衍射指数为 $n(x) = 0.25$ 可穿透障碍物的成像结果; 第一行中的障碍物为圆形, 第二行中的障碍物为花生.

成像结果如图 4.10 所示. 我们可以观察到, 对于不可穿透障碍物, 障碍物的上边界都被 RTM 方法成像出来, 且这部分边界刚好是正对着分布着发射器和接收器的半空间表面 Γ_0 , 相比较下, 位于障碍物边界的阴暗部分的点以及远离边界的点的成像函数值都是非常小的.

显然, 成像算法 (4.17) 与障碍是否可穿透, 可穿透时是哪种边界条件无关. 在不知道障碍物边界的先验信息下, 如图 4.10 所示, 针对不同类型的障碍物, RTM 方法都可以成像.

算例 3 我们考虑来针对两个障碍物同时成像. 第一个模型是在水平方向上并排两个障碍物; 第二个模型是一个圆和一个花生在竖直方向上排列 (圆上花生下); 第三个模型是一个圆和一个花生在竖直方向上排列 (圆下花生上). 针对单频的成像实验, 我们取角频率为 $\omega = 3\pi$, 而针对多频的成像实验, 我们取多频角频率为 $\omega = \pi \times [2 : 0.5 : 8]$. 如图 4.11 所示是第一个模型的成像结果. 其成像区域为 $\Omega = (-4, 4) \times (8, 12)$, 采样网格点数量 401×201 . 我们设置发射器和接收器数量为 $N_s = N_r = 301$. 如图 4.12 和 4.13 所示是第二个模型和第三个模型的成像结果. 其成像区域为 $\Omega = (-4, 4) \times (8, 12)$, 采样网格点数量 401×401 . 我们设置发射器和接收器数量为 $N_s = N_r = 301$. 在图 4.11, 图 4.12 和 图 4.13 中的多频 RTM 成像只是简单地将每个不同的单频 RTM 成像结果直接叠加而得. 我们可以发现, 通过这样简单的多个单频叠加后, 成像质量得到显著地提高.

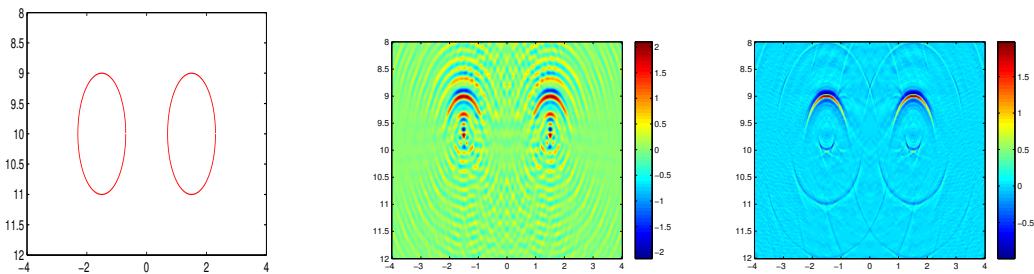


图 4.11 算例 3: 从左到右分别为, 真实的两个障碍物: 圆, 关于单频角频率为 $\omega = 3\pi$ 的成像结果, 关于多频叠加的成像结果.

如图 4.12 所示, 我们发现即使圆形挡在花生的上面, RTM 算法还是可以将圆和花生的上沿都给成像出来, 进一步说明了 RTM 算法的有效性. 而如图 4.13 所示, 我们发现当大一号的花生挡在圆的上面时, 只能将花生的上沿给成像出来, 而无法对圆成像, 我们可以猜测在这种情况下由于花生的阻挡, 可能在 Γ_0 上接收到关于圆的信息是极少的.

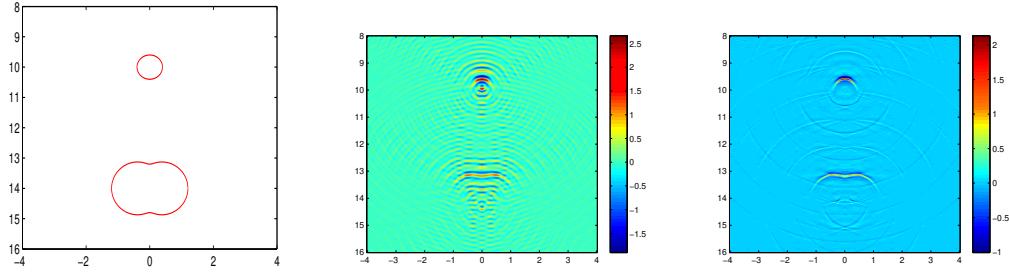


图 4.12 算例 3: 从左到右分别为, 真实的两个障碍物: 圆上和花生下, 关于单频角频率为 $\omega = 3\pi$ 的成像结果, 关于多频叠加的成像结果.

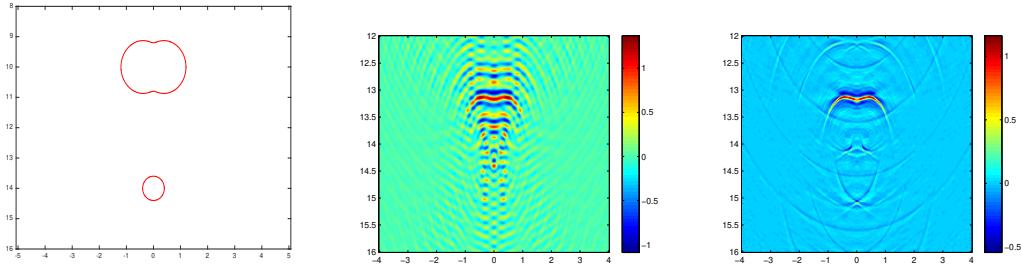


图 4.13 算例 3: 从左到右分别为, 真实的两个障碍物: 圆下和花生上, 关于单频角频率为 $\omega = 3\pi$ 的成像结果, 关于多频叠加的成像结果.

算例 4 我们考虑半空间弹性波 RTM 算法关于复加性 Gaussian 噪声的稳定性. 这里加性 Gaussian 噪声定义为

$$u_{\text{noise}} = u_s + \nu_{\text{noise}},$$

其中 u_s 为合成的散射数据, ν_{noise} 是 Gaussian 噪声, 且均值为 0, 其标准差是散射数据 $|u_s|$ 中最大值的 σ 倍, 即为 $\nu_{\text{noise}} = \frac{\sigma \max |u_s|}{\sqrt{2}} (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)$ 和 $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

如图 4.14 所示, 即使在加了加性 Gaussian 噪声后, 单频 RTM 成像算法还是可以把障碍物的上沿给清晰成像, 说明了该算法的稳定性. 而且在通过多个角频率 $\omega = \pi \times [2 : 0.5 : 8]$ 的成像结果叠加后, 其成像质量显著提高, 从而消除了 Gaussian 噪声的影响.

从上述数值实验中, 我们可以看出, 利用同一个成像函数, 在不需要障碍物的任何先验信息下, 都能够对障碍物的上边界做到有效成像. 由于散射体嵌入在一个半空间中, 发射面和接收面都在半空间表面, 所以无法对下边界成像也是符合物理意义的.

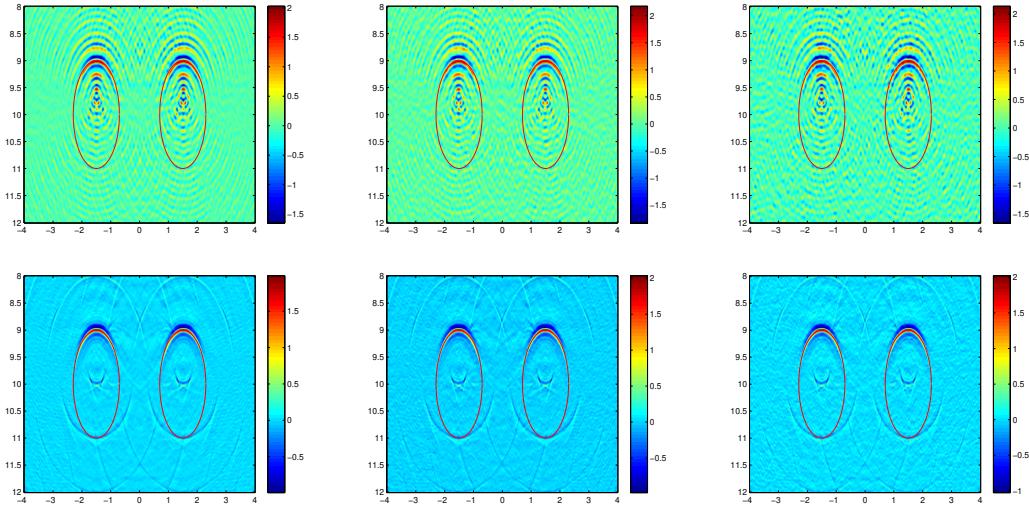


图 4.14 算例 4: 从左到右, 分别是含有噪声水平 $\mu = 0.2; 0.3; 0.4$ Dirichlet 障碍物的成像结果. 其中第一行是关于单频成像, 其角频率为 $\omega = 4\pi$, 第二行是多个单频成像的叠加.

4.6 本章小结

本章基于逆时偏移的思想提出了针对半空间弹性波反散射障碍物问题的直接成像法. 与地球物理领域中现行的做法不同, 我们不再对反传波进行波场分离, 然后再与相应分离的入射波场做互相关. 这里我们直接利用反传的混合耦合波场与入射波做互相关. 当背景介质是均匀各项同性时, 基于波场分解的逆时偏移算法也可以用本章类似的论证来得到分辨率分析. 然而, 当背景介质是非均匀时, Helmholtz 分解很难再将混合耦合波场精确分解. 此时, 本章讨论的直接成像法可以很容易地推广到非均匀背景介质情形, 甚至是各向异性的背景介质.

观察本章的数值成像函数 (4.17), 这里只涉及到矩阵与向量的乘法, 相比于线性采样法或是分解法, 该算法不需要求解积分方程. 与迭代法相比, 该算法不需要知道障碍物的先验信息. 因此, 本章提出的半空间反散射问题的逆时偏移算法是一种快速有效的数值重构算法.

第 5 章 总结与展望

本文受地球物理中的勘探模型启发，针对半空间弹性波反散射问题研究了逆时偏移算法。在研究反散射问题前，我们首先系统地研究了半空间弹性波正散射问题。利用 Fourier 变换推导出了两种半空间 Green 函数：Neumann Green 函数和 Dirichlet Green 函数。进一步，通过研究振荡积分的衰减性质，给出了当 $x \in \Gamma_0$, $y \in \mathbb{R}_+^2$ 时， $\mathbb{N}(x, y)$ 和 $\mathbb{T}_D(x, y)$ 随着 x_2 增大的衰减估计。该估计也保证了点扩散函数的定义有意义。然后，基于点扩散函数和弹性波散射系数的 Kirchhoff 逼近，我们针对基于逆时偏移的直接成像法给出了严格的数学刻画：其成像函数在远离散射体边界的时候快速衰减，且只在散射体面向接收面的那部分形成较大的峰值。而且，该分辨率分析不需要高频渐近假设或几何光学近似，对一般的边界条件都成立。最后，多种数值算例进一步说明该直接成像法的快速有效性、稳定性。

由于弹性波相较于声波的复杂性，我们将从如下几点来叙述有待研究的方向：

1. 关于 Green 函数的研究

由于半空间的 Green 函数都是以震荡积分的形式表述，当频率较大时，我们需要快速算法来计算。其中，可否将 Green 函数进行渐近级数展开是一个有趣的问题。本文针对 Green 函数衰减性的研究局限在 Γ_0 上，将来如果可以将研究范围延拓到半空间上甚至是复数域上，将有助于对半空间弹性波散射问题的 PML 方法的研究。

本文中，我们假设半空间背景介质是均匀各向同性的。但是实际的地质结构是多层非均匀各向异性的。针对这种更一般的散射问题，首先需要研究半空间弹性波多层介质的 Green 函数的各种性质，例如合适的表达式、表面波的波数等。

2. 关于接收数据不是全波位移数据的算法

在实际问题中，数据的相位可能不好获取，所以在文献 [70–72] 中 Chen 等针对声波无相位数据，电磁波无相位数据提出了基于逆时偏移的直接成像法。由于弹性波数据中横波数据和纵波数据耦合在一起，所以当只接收到混合波的振幅数据时，很难效仿上述文献的算法来构造成像函数。本文附录 A 中，我们将不加证明地给出针对全空间弹性波反散射问题的无相位数据的直接成像法及相关

数值算法.

进一步, 针对真实的勘探模型, 一般 e_2 方向的位移数据更容易得到, 于是如何只用接收到的数据 $u_q^s(x_r, x_s) \cdot e_2, q = e_1, e_2$ 甚至仅用 $u_{e_2}^s(x_r, x_s) \cdot e_2$ 去成像也是个有意义的研究问题.

3. 关于分辨率分析更严谨的数学刻画

需要通过对点扩散函数更为精确的分析, 得出能分辨出的最小距离 r , 即

$$r = \inf_t \{t = \|z - y\| : |[\mathbb{J}(z, y)]_{ii}| = \frac{1}{2} |[\mathbb{J}(z, z)]_{ii}|, i = 1, 2\}.$$

另一方面, 在本文中我们利用了 Kirchhoff 逼近来说明重构算法无法对障碍物的阴面进行成像, 所以对该 Kirchhoff 逼近的误差刻画也是非常重要的一个研究问题. 进一步, 本文的直接成像函数只是定性的得到障碍物的性质, 如何通过成像函数得出其边界的参数表达, 边界条件类型也是有待研究的.

附录 A 关于全空间弹性波无相位数据成像算法的讨论

在本章中，我们基于逆时偏移算法，针对全空间弹均匀弹性背景介质的障碍物成像问题测试一种新的直接成像法。该算法仅利用弹性波总场在接收面法向和切向的模作为数据，不需要障碍物的先验信息。在附录最后，我们用大量数值算例来说明该算法的有效性。

A.1 问题介绍

假设 D 是 \mathbb{R}^2 中有界 Lipschitz 区域， ν_D 是其边界 Γ_D 上的外法向。全空间背景介质与上文中半空间背景介质参数设置相同。假设在 ∂B_s 和 ∂B_r 上分别均匀分布着 N_s 个弹性波发射器和 N_r 个弹性波接收器，其中 ∂B_s 和 ∂B_r 分别是圆心在原点，半径为 R_s 和 R_r 的圆 B_s 和 B_r 。定义 Ω 是成像样本区域，且有 $D \subset \Omega \subset B_s, B_r$ 。假设入射场由位于 ∂B_s 的点源 x_s 沿着极化方向 q 激发，记为 $u_q^i(x, x_s) = \mathbb{G}(x, x_s)q$ 。我们考虑障碍物满足刚体边界条件 (Dirichlet 边界条件) 情形，于是，总场 $u_q(x, x_s)$ 满足以下方程：

$$\Delta_e u_q(x, x_s) + \omega^2 u_q(x, x_s) = -\delta_{x_s}(x) \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}, \quad (\text{A.1})$$

$$u_q(x, x_s) = 0 \quad \text{on } \Gamma_D, \quad (\text{A.2})$$

$$u_q(x, x_s) \quad \text{满足 Kupradze's 辐射条件.} \quad (\text{A.3})$$

于是散射数据 $u_q^s(x, x_s) = u_q(x, x_s) - u_q^i(x, x_s)$ 。

A.2 全空间弹性波无相位逆时偏移算法

在文献 [90] 中，通过在 ∂B_r 上的 N_r 个接收器上测量的全相位数据 $u_q(x_r, x_s)$ ，其中 $s = 1, \dots, N_s, r = 1, \dots, N_r$ ，基于加权逆时偏移算法来对障碍物成像，即有：

$$\begin{aligned} I_{RTM}(z) = & -\omega^2 \operatorname{Im} \sum_{q=e_1, e_2} \frac{2\pi R_s}{N_s} \frac{2\pi R_r}{N_r} \sum_{s=1}^{N_s} \sum_{r=1}^{N_r} \left(c_p \mathbb{G}_p(z, x_r s) q + c_s \mathbb{G}_s(z, x_s) q \right) \\ & \cdot \left(c_p \mathbb{G}_p(z, x_r) + c_s \mathbb{G}_s(z, x_r) \right) \overline{u_q^s(x_r, x_s)} ds(x_r) ds(x_s). \end{aligned}$$

$I_{RTM}(z)$ 可以看做采用数值积分对如下连续函数的逼近，

$$\begin{aligned} \hat{I}_{RTM}(z) = & -\omega^2 \operatorname{Im} \sum_{q=e_1, e_2} \int_{\Gamma_s} \int_{\Gamma_r} \left(c_p \mathbb{G}_p(z, x_r s) q + c_s \mathbb{G}_s(z, x_s) q \right) \\ & \cdot \left(c_p \mathbb{G}_p(z, x_r) + c_s \mathbb{G}_s(z, x_r) \right) \overline{u_q^s(x_r, x_s)} ds(x_r) ds(x_s). \end{aligned}$$

关于向量 $x = (x_1, x_2)^T$, 我们定义相应的径向单位向量 $\hat{x} = x/|x| := (\hat{x}_1, \hat{x}_2)^T$ 和周向单位向量 $\tilde{x} = (-\hat{x}_2, \hat{x}_1)$. 进一步, 定义二阶张量 $A(x) = \hat{x}\hat{x}^T$ 和 $B(x) = \tilde{x}\tilde{x}^T$. 通过观察弹性波 $\mathbb{G}(x, y)$ 在无穷远处的渐近性质, 我们可以将成像函数 $\hat{I}_{RTM}(z)$ 近似简化成只需要使用声波基本解 $g_k(x, y)$ 的成像函数 $\hat{I}_{RTM}^{lite}(z)$,

$$\begin{aligned}\hat{I}_{RTM}^{lite}(z) &= -\text{Im} \sum_{q=e_1, e_2} \int_{\Gamma_s} \int_{\Gamma_r} \left(k_p g_p(z, x_r s) A(x_s) q + k_s g_s(z, x_s) B(x_s) q \right) \\ &\quad \cdot \left(k_p g_p(z, x_r) A(x_r) + k_s g_s(z, x_r) B(x_r) \right) \overline{u_q^s(x_r, x_s)} ds(x_r) ds(x_s).\end{aligned}$$

引理 A.2.1 对于任意 $|z|, |y| < R$, 成立

$$\begin{aligned}k_p \int_{|x|=R} g_p(z, x) A(x) \overline{\mathbb{G}(x, y)} ds(x) &= \text{Im} \mathbb{G}_p(z, y) + \mathbb{W}_p(y, z), \\ k_s \int_{|x|=R} g_s(z, x) B(x) \overline{\mathbb{G}(x, y)} ds(x) &= \text{Im} \mathbb{G}_s(z, y) + \mathbb{W}_s(y, z),\end{aligned}$$

其中 $|\mathbb{W}_\alpha^{ij}(z, y)| + k_\alpha^{-1} |\nabla_z \mathbb{W}_\alpha^{ij}(z, y)| \leq C_\alpha R^{-1}$ 且常数 C_α 只依赖于 $k_\alpha |z|, k_\alpha |y|$, $\alpha \in \{p, s\}$. 这里 $\mathbb{W}_\alpha^{ij}(z, y)$ 表示矩阵 $\mathbb{W}_s(y, z)$ 第 (i, j) 个元素.

证明. 首先, 我们回忆关于 Hankel 函数的估计 [75, p.197], 对于任意 $t > 0$, 我们有

$$\begin{aligned}H_0^{(1)}(t) &= \left(\frac{2}{\pi t} \right)^{1/2} e^{i(t-\pi/4)} + R_0(t), \\ H_1^{(1)}(t) &= \left(\frac{2}{\pi t} \right)^{1/2} e^{i(t-3\pi/4)} + R_1(t),\end{aligned}$$

这里存在与 t 无关的常数 $C > 0$, 成立 $|R_j(t)| \leq Ct^{-3/2}, j = 0, 1$. 于是, 利用弹性波基本解的表达式, 我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{G}_p(x, y) &= \frac{i}{\sqrt{8\pi}(\lambda+2\mu)} A(x-y) \frac{1}{(k_p|x-y|)^{1/2}} e^{ik_p|x-y| - i\frac{\pi}{4}} + O\left(\frac{1}{(k_p|x-y|)^{3/2}}\right), \\ \mathbb{G}_s(x, y) &= \frac{i}{\sqrt{8\pi}\mu} B(x-y) \frac{1}{(k_s|x-y|)^{1/2}} e^{ik_s|x-y| - i\frac{\pi}{4}} + O\left(\frac{1}{(k_s|x-y|)^{3/2}}\right).\end{aligned}$$

通过简单的计算, 可得

$$\begin{aligned}|A(x-y) - A(x)| &\leq C_1/|x|, \quad |B(x-y) - B(x)| \leq C_2/|x|, \\ \left| \frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x|} \right| &\leq C_3/|x|^2, \quad ||x-y| - (|x| - \hat{x} \cdot y)| \leq C_4/|x|,\end{aligned}$$

这里常数 $C_i > 0, i=1,2,3,4$ 且仅依赖于 $|y|$. 于是, 我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{G}_p(x, y) &= \frac{i}{\sqrt{8\pi}(\lambda+2\mu)} A(x) \frac{1}{(k_p|x|)^{1/2}} e^{ik_p(|x| - \hat{x} \cdot y) - i\frac{\pi}{4}} + \gamma_p(x, y), \\ \mathbb{G}_s(x, y) &= \frac{i}{\sqrt{8\pi}\mu} B(x) \frac{1}{(k_s|x|)^{1/2}} e^{ik_s(|x| - \hat{x} \cdot y) - i\frac{\pi}{4}} + \gamma_s(x, y), \\ g_\alpha(x, y) &= \frac{i}{\sqrt{8\pi}} \frac{1}{(k_\alpha|x|)^{1/2}} e^{ik_\alpha(|x| - \hat{x} \cdot y) - i\frac{\pi}{4}} + \gamma(x, y), \quad \alpha = p, s,\end{aligned}$$

其中 $|\gamma_\alpha(x, y)| \leq C(k_\alpha|x|)^{-3/2}$, $\alpha \in \{p, s\}$ 且常数 $C > 0$ 仅依赖于 $k_\alpha|y|$. 将上述估计代入积分式, 引理得证. \square

通过引理 A.2.1 和文献 [6, 定理 3.1] 中的论证方法, 可得

$$|\hat{I}_{RTM}(z) - \hat{I}_{RTM}^{lite}(z)| \leq C\|T\|((k_p R_s)^{-1} + (k_p R_r)^{-1}),$$

其中 $\|T\|$ 是散射问题的解算子的范数, 常数 $C > 0$ 与 D, k_p, k_s 无关.

上述成像算法需要散射场的全部相位信息, 下面我们将只根据总场数据的振幅数据来成像. 假设我们在接收面 ∂B_r 上只能接收到法向 \hat{x}_r 上和切向 \tilde{x}_r 上的数据的模长, 即 $|\hat{x}_r^T u_q(x_r, x_s)|$ 和 $|\tilde{x}_r^T u_q(x_r, x_s)|$, 于是我们提出针对该接收数据的直接成像法为:

$$\begin{aligned} \hat{I}_{RTM}^{phaseless}(z) = & -\text{Im} \sum_{q=e_1, e_2} \int_{\Gamma_s} \int_{\Gamma_r} \left(k_p g_p(z, x_r s) A(x_s) q + k_s g_s(z, x_s) B(x_s) q \right) \\ & \cdot \left(k_p g_p(z, x_r) \hat{x}_r D_p(x_r, x_s) + k_s g_s(z, x_r) \tilde{x}_r D_s(x_r, x_s) \right) ds(x_r) ds(x_s), \end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned} D_p(x_r, x_s) &= \frac{|\hat{x}_r^T u_q(x_r, x_s)|^2 - |\hat{x}_r^T u_q^i(x_r, x_s)|^2}{\hat{x}_r^T u_q^i(x_r, x_s)}, \\ D_s(x_r, x_s) &= \frac{|\tilde{x}_r^T u_q(x_r, x_s)|^2 - |\tilde{x}_r^T u_q^i(x_r, x_s)|^2}{\tilde{x}_r^T u_q^i(x_r, x_s)}. \end{aligned}$$

利用 $|x|^2 = x\hat{x}$, $x \in \mathbb{C}$, 我们可以得到,

$$\begin{aligned} D_p(x_r, x_s) &= \hat{x}_r^T \overline{u_q^s} + \frac{|\hat{x}_r^T u_q^s(x_r, x_s)|^2}{\hat{x}_r^T u_q^i(x_r, x_s)} + \frac{(\hat{x}_r^T u_q^s(x_r, x_s))(\hat{x}_r^T \overline{u_q^i(x_r, x_s)})}{\hat{x}_r^T u_q^i(x_r, x_s)} \\ &:= \hat{x}_r^T \overline{u_q^s} + \Delta_p(x_r, x_s), \\ D_s(x_r, x_s) &= \tilde{x}_r^T \overline{u_q^s} + \frac{|\tilde{x}_r^T u_q^s(x_r, x_s)|^2}{\tilde{x}_r^T u_q^i(x_r, x_s)} + \frac{(\tilde{x}_r^T u_q^s(x_r, x_s))(\tilde{x}_r^T \overline{u_q^i(x_r, x_s)})}{\tilde{x}_r^T u_q^i(x_r, x_s)} \\ &:= \tilde{x}_r^T \overline{u_q^s} + \Delta_s(x_r, x_s). \end{aligned}$$

因此将上式代入 $I_{RTM}^{phaseless}(z)$, 我们有

$$\begin{aligned} \hat{I}_{RTM}^{phaseless}(z) &= I_{RTM}^{lite}(z) - \text{Im} \sum_{q=e_1, e_2} \int_{\Gamma_s} \int_{\Gamma_r} \left(k_p g_p(z, x_r s) A(x_s) q + k_s g_s(z, x_s) B(x_s) q \right) \\ &\quad \cdot \left(k_p g_p(z, x_r) \hat{x}_r \Delta_p(x_r, x_s) + k_s g_s(z, x_r) \tilde{x}_r \Delta_s(x_r, x_s) \right) ds(x_r) ds(x_s) \\ &:= I_{RTM}^{lite}(z) + R(z). \end{aligned}$$

如下图A.1所示, 无相位成像函数是有效的. 在理论分析方面, 我们将进一步研究 $|R(z)|$ 与 R_s, R_r 的关系.

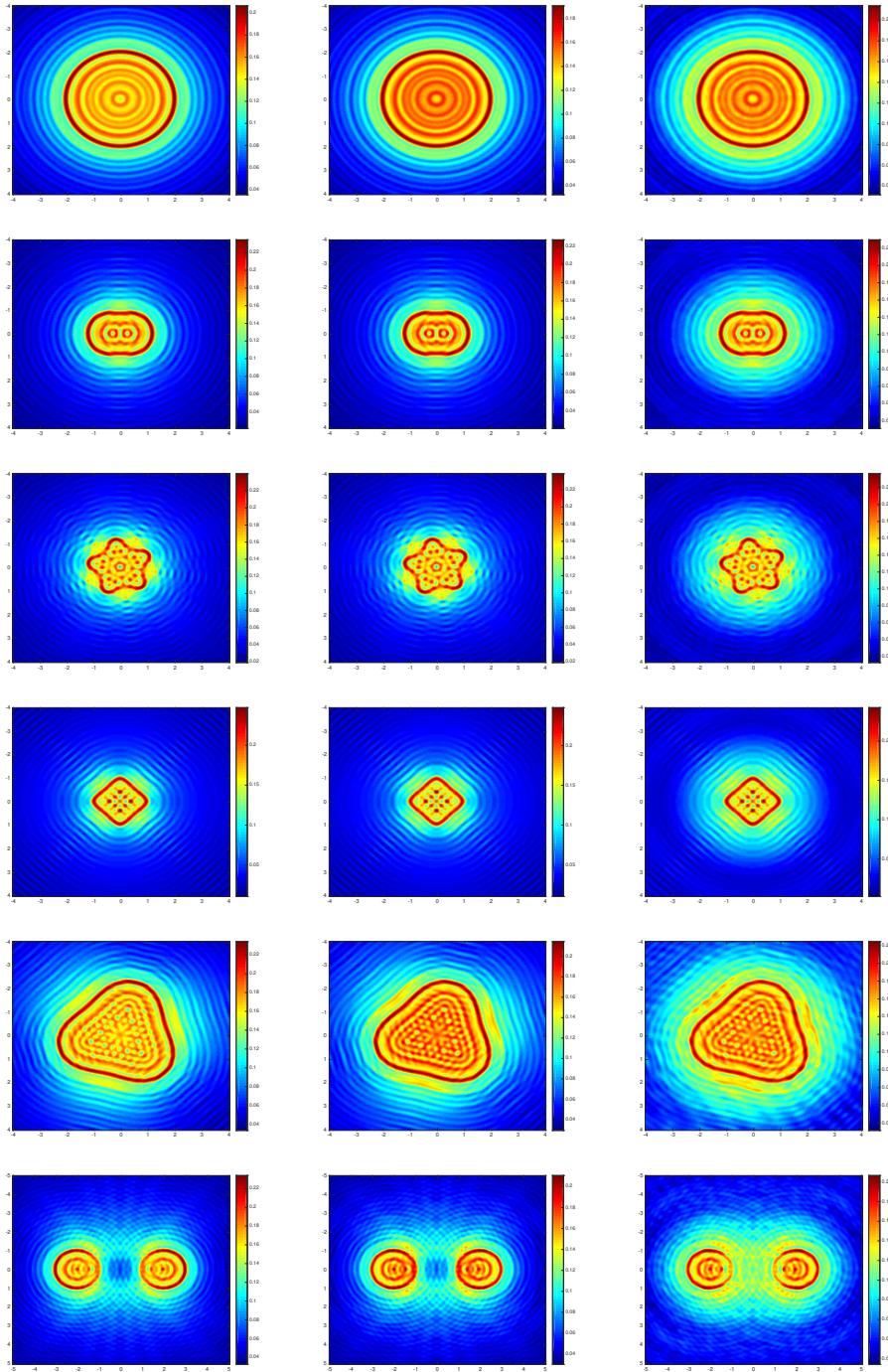


图 A.1 所有测试中的样本区域都为： $[-4, 4] \times [-4, 4]$ ，参数设置为： $\lambda = \mu = 1, \omega = 4\pi, R_s = R_r = 10$. 不同行对应的是不同障碍物形状的测试，从左到右用到的成像函数分别是 \hat{I}_{RTM} , \hat{I}_{RTM}^{lite} , $\hat{I}_{RTM}^{phaseless}$.

参考文献

- [1] Landar L D, Lifshitz E. Theory of elasticity[M]. 1986.
- [2] Bonnet M, Constantinescu A. Inverse problems in elasticity[J]. Inverse problems, 2005, 21(2):R1.
- [3] Bao G, Hu G, Kian Y, et al. Inverse source problems in elastodynamics[J]. Inverse Problems, 2018, 34(4):045009.
- [4] Liu X, Zhang B, Zhang H. Near-field imaging of an unbounded elastic rough surface with a direct imaging method[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2019, 79(1):153-176.
- [5] Yan J, Sava P. Isotropic angle-domain elastic reverse-time migration[J]. Geophysics, 2008, 73(6):S229-S239.
- [6] Chang W F. Elastic reverse-time migration[J]. Geophysical Prospecting, 1987, 37(3):243-256.
- [7] Grant F S, West G F. Interpretation theory in applied geophysics[J]. Geophysical Journal, 1965, 11(5):566-566.
- [8] Kupradze V D. Progress in solid mechanics. 3. dynamical problems in elasticity[M]. North-Holland Publishing Company, 1963.
- [9] Kupradze V, Gegelia T, Basheleishvili M, et al. Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity[M]. Moscow Nauka, 1976.
- [10] Sommerfeld A. Die greensche funktion der schwingungsgleichung[J]. J.-Ber. Deutsch Math.-Verein, 1912, 21:309-353.
- [11] Colton D, Kress R. Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory: volume 93[M]. Springer Science and Business Media, 2012.
- [12] Chen Z, Xiang X, Zhang X. Convergence of the pml method for elastic wave scattering problems[J]. Mathematics of Computation, 2016, 85(302):2687-2714.
- [13] Bramble J H, Pasciak J E. A note on the existence and uniqueness of solutions of frequency domain elastic wave problems: A priori estimates in h^1 [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008, 345(1):396-404.
- [14] Rellich F. Über das asymptotische verhalten der lösungen von $\delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen gebieten.[J]. Jahresbericht Der Deutschen Mathematiker-vereinigung, 1943, 53:57-65.
- [15] Chaillat S, Bonnet M. A new fast multipole formulation for the elastodynamic half-space green's tensor[J]. Journal of Computational Physics, 2014, 258:787-808.
- [16] Nédélec J C. Acoustic and electromagnetic equations: integral representations for harmonic problems: volume 144[M]. Springer Science & Business Media, 2001.
- [17] Durán M, Muga I, Nédélec J C. The outgoing time-harmonic elastic wave in a half-plane with free boundary[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2011, 71(2):443-464.

- [18] Arens T. Uniqueness for elastic wave scattering by rough surfaces[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2001, 33(2):461-476.
- [19] Arens T. Existence of solution in elastic wave scattering by unbounded rough surfaces[J]. Mathematical methods in the applied sciences, 2002, 25(6):507-528.
- [20] Charalambopoulos A, Gintides D, Kiriaki K. Radiation conditions for rough surfaces in linear elasticity[J]. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 2002, 55(3):421-441.
- [21] Alem L, Chorfi L. Théorème d'unicité pour un problème d'ondes élastiques[J]. Comptes Rendus Mathematique, 2003, 336(6):525-530.
- [22] Madyarov A I, Guzina B B. A radiation condition for layered elastic media[J]. Journal of Elasticity, 2006, 82(1):73-98.
- [23] Dermenjian Y, Guillot J C. Scattering of elastic waves in a perturbed isotropic half space with a free boundary. the limiting absorption principle[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 1988, 10(2):87-C124.
- [24] Wilcox C H. Scattering theory for the d'alembert equation in exterior domains[D]. Springer Berlin Heidelberg, 1975.
- [25] Leis R. Initial boundary value problems in mathematical physics[M]. J. Wiley, 1986: 354-355.
- [26] Hadamard J. Lectures on cauchy's problem in linear partial differential equations: volume 37 [M]. Yale University Press, 1923.
- [27] Li P, Wang Y, Wang Z, et al. Inverse obstacle scattering for elastic waves[J]. Inverse Problems, 2016, 32(11):115018.
- [28] Bao G, Hu G, Sun J, et al. Direct and inverse elastic scattering from anisotropic media[J]. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 2018, 117:263-301.
- [29] Mora P. Nonlinear two-dimensional elastic inversion of multioffset seismic data[J]. Geophysics, 1987, 52(9):1211-1228.
- [30] Feng Z, Schuster G T. Elastic least-squares reverse time migration[J]. Geophysics, 2017, 82 (2):S143-S157.
- [31] Elita Li Y, Du Y, Yang J, et al. Elastic reverse time migration using acoustic propagators[J]. Geophysics, 2018, 83(5):S399-S408.
- [32] Arens T. Linear sampling methods for 2d inverse elastic wave scattering[J]. Inverse Problems, 2001, 17(5):1445.
- [33] Alves C J, Kress R. On the far-field operator in elastic obstacle scattering[J]. IMA Journal of Applied Mathematics, 2002, 67(1):1-21.
- [34] Charalambopoulos A, Kirsch A, Anagnostopoulos K A, et al. The factorization method in inverse elastic scattering from penetrable bodies[J]. Inverse Problems, 2006, 23(1):27.
- [35] Hu G, Kirsch A, Sini M. Some inverse problems arising from elastic scattering by rigid obstacles[J]. Inverse Problems, 2012, 29(1):015009.
- [36] Ji X, Liu X, Xi Y. Direct sampling methods for inverse elastic scattering problems[J]. Inverse Problems, 2018, 34(3):035008.

-
- [37] Gintides D, Sini M. Identification of obstacles using only the scattered p-waves or the scattered s-waves[J]. *Inverse Probl. Imaging*, 2012, 6(1):39-55.
 - [38] Hu G, Kirsch A, Yin T. Factorization method in inverse interaction problems with bi-periodic interfaces between acoustic and elastic waves[J]. *Inverse Probl. Imaging*, 2016, 10(1):103-129.
 - [39] Li P, Wang Y, Zhao Y. Near-field imaging of biperiodic surfaces for elastic waves[J]. *Journal of Computational Physics*, 2016, 324:1-23.
 - [40] Hu G, Liu X, Zhang B, et al. A direct imaging method for inverse elastic scattering by unbounded rigid rough surfaces[J]. arXiv preprint arXiv:1804.02342, 2018.
 - [41] Claerbout J F, Doherty S M. Downward continuation of moveout-corrected seismograms[J]. *Geophysics*, 1972, 37(5):741-768.
 - [42] Gazdag J. Wave equation migration with the phase-shift method[J]. *Geophysics*, 1978, 43(7): 1342-1351.
 - [43] 张关泉. 波动方程的上行波和下行波的耦合方程组[J]. *应用数学学报*, 1993, 16(2):251-263.
 - [44] Zhang Y, Xu S, Bleistein N, et al. True-amplitude, angle-domain, common-image gathers from one-way wave-equation migrations[J]. *Geophysics*, 2007, 72(1):S49-S58.
 - [45] 张宇. 从成像到反演: 叠前深度偏移的理论, 实践与发展[J]. *石油物探*, 2018, 57(1):1-23.
 - [46] Whitmore N D. Iterative depth migration by backward time propagation[M]//SEG Technical Program Expanded Abstracts 1983. Society of Exploration Geophysicists, 1983: 382-385.
 - [47] Baysal E, Kosloff D D, Sherwood J W. Reverse time migration[J]. *Geophysics*, 1983, 48(11): 1514-1524.
 - [48] McMechan G A. Migration by extrapolation of time-dependent boundary values[J]. *Geophysical Prospecting*, 1983, 31(3):413-420.
 - [49] Zhang Y, Sun J. Practical issues of reverse time migration: True amplitude gathers, noise removal and harmonic-source encoding[C]//Beijing International Geophysical Conference and Exposition 2009: Beijing 2009 International Geophysical Conference and Exposition, Beijing, China, 24–27 April 2009. Society of Exploration Geophysicists, 2009: 204-204.
 - [50] Zhang Y, Sun J. Practical issues of reverse time migration: true amplitude gathers, noise removal and harmonic-source encoding[J]. *Aseg Extended Abstracts*, 2008, 2009(3):397-398.
 - [51] Bleistein N, Cohen J K, John Jr W, et al. Mathematics of multidimensional seismic imaging, migration, and inversion: volume 13[M]. Springer Science & Business Media, 2013.
 - [52] Claerbout J F. Imaging the earth's interior: volume 1[M]. Blackwell scientific publications Oxford, 1985.
 - [53] Berkhout A J. Seismic migration: Imaging of acoustic energy by wave field extrapolation: volume 12[M]. Elsevier, 2012.
 - [54] Chang W F, McMechan G A. Reverse-time migration of offset vertical seismic profiling data using the excitation-time imaging condition[J]. *Geophysics*, 1986, 51(1):67-84.

- [55] Hokstad K, Mittet R, Landrø M. Elastic reverse time migration of marine walkaway vertical seismic profiling data[J]. *Geophysics*, 1998, 63(5):1685-1695.
- [56] Sun R, McMechan G A. Scalar reverse-time depth migration of prestack elastic seismic data [J]. *Geophysics*, 2001, 66(5):1519-1527.
- [57] Denli H, Huang L. Elastic-wave reverse-time migration with a wavefield-separation imaging condition: 78th annual international meeting, seg, expanded abstracts, 2346–2350[Z]. 2008.
- [58] Chung W, Pyun S, Bae H S, et al. Implementation of elastic reverse-time migration using wavefield separation in the frequency domain[J]. *Geophysical Journal International*, 2012, 189(3):1611-1625.
- [59] Etgen J T. Prestacked migration of p and sv-waves[M]/SEG Technical Program Expanded Abstracts 1988. Society of Exploration Geophysicists, 1988: 972-975.
- [60] Zhe J, Greenhalgh S A. Prestack multicomponent migration[J]. *Geophysics*, 1997, 62(2): 598-613.
- [61] Dellinger J, Etgen J. Wave-field separation in two-dimensional anisotropic media[J]. *Geophysics*, 1990, 55(7):914-919.
- [62] Beylkin G. The inversion problem and applications of the generalized radon transform[J]. *Communications on pure and applied mathematics*, 1984, 37(5):579-599.
- [63] Beylkin G. Imaging of discontinuities in the inverse scattering problem by inversion of a causal generalized radon transform[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1985, 26(1):99-108.
- [64] Beylkin G, Burridge R. Linearized inverse scattering problems in acoustics and elasticity[J]. *Wave motion*, 1990, 12(1):15-52.
- [65] Chen J, Chen Z, Huang G. Reverse time migration for extended obstacles: acoustic waves[J]. *Inverse Problems*, 2013, 29(8):085005.
- [66] Chen J, Chen Z, Huang G. Reverse time migration for extended obstacles: electromagnetic waves[J]. *Inverse Problems*, 2013, 29(8):085006.
- [67] 黄光辉. 逆散射问题的逆时偏移方法[D]. 中国科学院大学, 2014.
- [68] Chen Z, Huang G. Reverse time migration for reconstructing extended obstacles in planar acoustic waveguides[J]. *Science China Mathematics*, 2015, 58(9):1811-1834.
- [69] Chen Z, Huang G. Reverse time migration for reconstructing extended obstacles in the half space[J]. *Inverse Problems*, 2015, 31(5):055007.
- [70] Chen Z, Huang G. Phaseless imaging by reverse time migration: acoustic waves[J]. *Numerical Mathematics: Theory, Methods and Applications*, 2017, 10(1):1-21.
- [71] Chen Z, Huang G. A direct imaging method for electromagnetic scattering data without phase information[J]. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2016, 9(3):1273-1297.
- [72] Chen Z, Fang S, Huang G. A direct imaging method for the half-space inverse scattering problem with phaseless data[J]. *Inverse Probl. Imaging*, 2017, 11:901-916.
- [73] 方少峰. 地球物理反问题的逆时偏移算法[D]. 中国科学院大学, 2018.

-
- [74] Adams R A, Fournier J J. Sobolev spaces: volume 140[M]. Elsevier, 2003.
 - [75] Watson G N. A treatise on the theory of bessel functions[M]. Cambridge university press, 1995.
 - [76] Colton D, Kress R. Integral equation methods in scattering theory: volume 72[M]. SIAM, 2013.
 - [77] Kress R, Maz'ya V, Kozlov V. Linear integral equations: volume 82[M]. Springer, 1989.
 - [78] Agmon S. Spectral properties of schrödinger operators and scattering theory[J]. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze, 1975, 2(2):151-218.
 - [79] Achenbach J. Wave propagation in elastic solids[M]. North-Holland, 1980: 544.
 - [80] Harris J. Linear elastic waves[M]. Cambridge University Press, 2001: B26.
 - [81] Ahlfors L V. Complex analysis: An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable[M]. McGraw-Hill, 1979: 155-173.
 - [82] Kuroda S T. An introduction to scattering theory.[M]. 2003.
 - [83] Aki K, Richards P G. Quantitative seismology[M]. 2002.
 - [84] Grafakos L. Classical and modern fourier analysis[M]. Prentice Hall, 2004.
 - [85] Arens T. A new integral equation formulation for the scattering of plane elastic waves by diffraction gratings[J]. Journal of Integral Equations and Applications, 1999, 11(3):232-245.
 - [86] Sini M. Absence of positive eigenvalues for the linearized elasticity system[J]. Integral Equations and Operator Theory, 2004, 49(2):255-277.
 - [87] Morassi A. Strong unique continuation for the lamé system of elasticity[J]. Communications in Partial Differential Equations, 2001, 26(9-10):1787-1810.
 - [88] Melrose R B, Taylor M E. Near peak scattering and the corrected kirchhoff approximation for a convex obstacle[J]. Advances in Mathematics, 1985, 55(3):242-315.
 - [89] Hormander. The analysis of linear partial differential operators i,[M]. 1983.
 - [90] Chen Z, Huang G. Reverse time migration for extended obstacles: Elastic waves[J]. Scientia Sinica Mathematica, 2015, 45(8):1103-1114.

作者简历

