UFR de Mathématiques
Université de Lille 1

Licence sciences et technologies A - S2 MASS

Analyse 2 - Résumé du Cours

Table des matières

Partie I : Intégration

1. Introduction : Premières remarques sur les primitives et l'intégrale indéfinie

Au premier semestre nous avons étudié les fonctions dérivables et associé à une telle fonction F la fonction dérivée $f = F'$. Associer à une fonction f une primitive est, lorsque cela est possible, le procédé inverse car la définition d'une primitive est la suivante.

Définition 1.1. *Une fonction $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une primitive de $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ si F est dérivable et si $F' = f$.*

Une conséquence immédiate du théorème des accroissement finis est qu'une primitive, toujours dans le cas ou elle existe, est unique à une constante additive près. Plus précisément, on a la propriété suivante.

Proposition 1.2. *Si F_1 et F_2 sont toutes les deux des primitives d'une fonction f sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, alors il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $F_2 = F_1 + c$ sur I.*

Remarques et notations : Comme la différence de deux primitives d'une fonction est constante on travaille souvent dans la pratique *à une constante additive prés*. Si la fonction f admet des primitives $F + c$, $c \in \mathbb{R}$, alors la famille de ces primitives est généralement notée

$$\int f(t)\,dt = F(x) + c$$

et appelé *l'intégrale indéfinie* de f. Il est à noter que $\int f(t)\,dt$ est une fonction de x, c'est la raison

(1) pourquoi on trouve parfois la notation $\int^x f(t)\,dt$ et
(2) pourquoi ici la variable sous l'intégrale est une lettre autre que x Par hasard le choix s'est porté sur t mais toute autre lettre convient également. On appelle cette variable t *muette*. Souvent on prends quand même la lettre x, cad. on écrit $\int f(x)\,dx$. Mais il ne faut pas confondre cette variable muette avec la variable x de $x \mapsto F(x)$...

Exemple 1.3. *On n'a pas oublié que la dérivée de $p(x) = x^n$, $n \geq 0$, est $p'(x) = nx^{n-1}$. Par conséquent, $P(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ est une primitive de p. Par ailleurs, si F est une primitive quelconque de p, alors, il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que,*

$$F = P + c\,, \quad \textit{i.e.}\ \ F(x) = P(x) + c \ \ \textit{pour tout}\ \ x \in \mathbb{R}\,.$$

En termes d'intégrale généralisée ceci devient

$$\int p(x)\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Ainsi, pour beaucoup de fonctions usuelles on connait les primitives. Voici quelques exemples (utiles à savoir !).

Par exemple, on déduit de la deuxième ligne du tableau que

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \quad , \quad \int \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} \quad \text{et} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$$

sur des intervalles appropriés. On remarque également qu'il est important de connaitre les dérivées des fonctions usuelles, en particulier des fonctions trigonométriques réciproques !

Plus tard nous allons voir des techniques d'intégration qui permettent, à partir de primitives connues comme celles du tableau, trouver des primitives de fonctions plus élaborées. Voici déja quelques exemples.

Exemple 1.4. *L'opération qui associe à une fonction f sa dérivée f' est* linéaire *(cf. Algèbre 2). Ceci signifie que, pour toutes fonctions dérivables f_1, f_2, f et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$(f_1 + f_2)' = f_1' + f_2' \quad \textit{et} \quad (\lambda f)' = \lambda f'\,.$$

Par conséquent, si F_i est une primitive de f_i, $i = 1, 2$, alors

$$F = F_1 + F_2 \quad \textit{est une primitve de} \quad f_1 + f_2\,.$$

Table 1. Un "petit" tableau de quelques primitives usuelles

Fonction f	UNE primitive F de f	Domaine de définition de F
$const$	$const\, x$	$\mathbb{R}$
x^a, $a \neq -1$	$\frac{1}{a+1} x^{a+1}$	$\begin{cases} \mathbb{R} \text{ si } a \in \mathbb{N} \\ ]-\infty, 0[\text{ et sur }]0, \infty[\text{ } si \text{ } a = -2, -3, ... \\ ]0, \infty[\text{ pour tout autre } a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \end{cases}$
$1/x$	$\ln \lvert x \rvert$	sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, \infty[$.
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$sh(x)$	$ch(x)$	$\mathbb{R}$
$ch(x)$	$sh(x)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$]-1, 1[$
etc.		

Il est alors façile de déterminer les primitives d'une fonction comme

$$f(x) = \cos(x) + e^x .$$

De même, si F est une primitve de f, alors λF est une primitive de λf. Cette propriété servira déja dans le prochain exemple (avec $\lambda = \frac{5}{2}$).

Exemple 1.5. *Si $F = u \circ v$ avec u, v des fonctions dérivables, alors $F' = u' \circ v\, v'$. Par conséquent, si on est en présence d'une fonction f de la forme $f = u' \circ v\, v'$ alors on connait les primitives. Par exemple, considérons*

$$f(x) = 5xe^{x^2} \quad , \quad x \in \mathbb{R} .$$

En prenant $u'(y) = e^y$ et en remarquant que $\int e^y\, dy = e^y + c$, $c \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = u'(x^2)5x = \frac{5}{2} u' \circ v(x)\, v'(x) \quad avec \quad v(x) = x^2 .$$

Par conséquent, il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

$$\int f(x)\, dx = u \circ v(x) + c = e^{x^2} + c \quad , \quad x \in \mathbb{R} .$$

Nous allons approfondir cette technique très utile dans la Section 6.1 Changement de variables.

Une autre technique très importante est l'*intégration par parties*. Elle repose sur la simple formule $(uv)' = u'v + uv'$. Voici l'enoncé exact. On verra beaucoup d'applications en TD.

Théorème 1.6. *Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ des fonctions C^1. Alors, on a*

$$\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\, dx$$

à une constante additive près.

2. Fonctions Riemann intégrables

Nous allons maintenant aborder la théorie de l'intégrale de Darboux - Riemann. Voici quelques motivations.
- Quelle est la signification géométrique de l'intégrale ?
- Quelles fonctions admettent des primitives ?
- Approfondir les techniques d'intégration afin de pouvoir déterminer les primitives de fonctions plus complexes.

Dans la suite,
- $I = [a, b]$ désigne un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$ et
- $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée, i.e. on suppose qu'il existe une constante $K > 0$ telle que

$$-K \leq f(x) \leq K \quad \text{pour tout } x \in I \ .$$

Définition 2.1. *Une partition de I est un ensemble $Z = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de nombres réels tels que $x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b$. Le pas de la partition Z est le nombre $\delta(Z) = max_{1\leq j\leq n}|x_j - x_{j-1}|$.*

Soit $Z = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ une partition de I. La *somme de Darboux inférieure* de f associée à Z est

$$S_-(f, Z) = \sum_{j=1}^{n}(x_j - x_{j-1}) \inf f_{|[x_{j-1},x_j]} \ .$$

La *somme de Darboux supérieure* de f associée à Z est

$$S_+(f, Z) = \sum_{j=1}^{n}(x_j - x_{j-1}) \sup f_{|[x_{j-1},x_j]} \ .$$

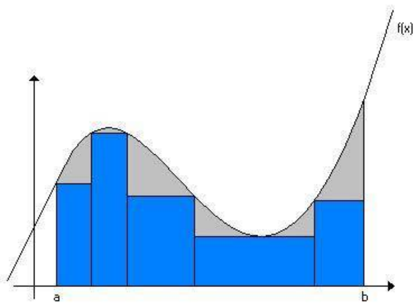

Figure 1. Representation graphique de la somme de Darboux inférieure

Lemme 2.2. *Pour toutes partitions Z_1 et Z_2 de I on a $S_-(f, Z_1) \leq S_+(f, Z_2)$.*

Conséquence immédiate de ce lemme : si

$$M_- = \{S_-(f, Z)\,;\ Z \text{ partition de } I\} \quad \text{et si} \quad M_+ = \{S_+(f, Z)\,;\ Z \text{ partition de } I\}$$

alors, pour toute partition Z' (par exemple pour $Z' = \{a, b\}$),

$$S_-(f, Z') \quad \text{est un minorant de } M_+ \quad \text{et}$$

$$S_+(f, Z') \quad \text{est un majorant de } M_- \ .$$

Ceci permet de définir

$$I_-(f) = \sup M_- = \sup\{S_-(f, Z)\} \quad \text{et} \quad I_+(f) = \inf M_+ = \inf\{S_+(f, Z)\} \ .$$

Exercice 2.3. Vérifier que $I_-(f) \leq I_+(f)$!

Définition 2.4. *Une fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann (ou, plus simplement R-intégrable) si $I_-(f) = I_+(f)$. Dans ce cas, la valeur commune $I(f) := I_-(f) \leq I_+(f)$ est l'intégrale de Riemann de f sur $[a,b]$ que l'on note*

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{ou} \int_I f(x)\,dx \quad \left[\text{ ou } \int_I f(u)\,du\right] .$$

Théorème 2.5 (Critére d'intégrabilité de Riemann)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Alors, f est R-intégrable si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une partition Z de I telle que*

$$S_+(f,Z) - S_-(f,Z) < \varepsilon . \tag{1}$$

Remarque 2.6. *Comme pour toute partition Z de I on a*

$$S_-(f,Z) \leq I_-(f) \leq I_+(f) \leq S_+(f,Z) ,$$

il résulte du critére de Riemann que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une partition Z de I telle que

$$-\varepsilon + S_-(f,Z) \leq I(f) \leq S_+(f,Z) + \varepsilon$$

pourvu que f est intégrable.

On dira que $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ est *subordonné* à la partition $Z = \{x_0, ..., x_n\}$ si $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ pour tout $j = 1, ..., n$. On définit la somme de Riemann

$$S(f,Z,\xi) := \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) f(\xi_j) .$$

Clairement, pour toute partition Z et tout ξ subordonné, on a

$$S_-(f,Z) \leq S(f,Z,\xi) \leq S_+(f,Z).$$

Théorème 2.7. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Pour toute suite $Z^{(N)}$ de partitions de $[a,b]$ de pas $\delta_N = \delta(Z^{(N)})$ tendant vers 0 et pour toute suite de points $\xi^{(N)} = (\xi_1^{(N)}, ..., \xi_n^{(N)})$ subordonnés à $Z^{(N)}$, les sommes de Riemann*

$$S(f, Z^{(N)}, \xi^{(N)}) \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty .$$

(admis)

Exemple 2.8. *Il est trés naturel de considérer la subdivision équidistante $Z^{(n)} = \{x_j = a + \frac{j}{n}(b-a)\ ;\ \ j = 0, ..., n\}$. Le pas de cette partition est $\delta_n = \frac{1}{n}(b-a)$. Avec $\xi_j = a + \frac{j}{n}(b-a)$, $j = 1, ..., n$, on a pour toute fonction R–intégrable $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ que*

$$\frac{b-a}{n}\left(f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + f\left(a + 2\frac{b-a}{n}\right) + ... + f\left(a + n\frac{b-a}{n}\right)\right) \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{si} \quad n \to \infty .$$

Pour être plus concret, prenons $f(x) = \sqrt{x}$ et $[a,b] = [0,1]$. Comme on le verra, cette fonction est bien intégrable (car monotone et aussi car elle est continue). Dans ce cas (cf. l'Exercice 2.7) :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + ... + f\left(\frac{n}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + ... + \sqrt{\frac{n}{n}}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{2}{3} .$$

3. Classes de fonctions R-intégrables

L'exemple standard d'une fonction qui n'est pas R-intégrable est la fonction de Dirichlet $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\chi_{\mathbb{Q}}(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $\chi_{\mathbb{Q}}(x) = 0$ sinon. Elle n'est pas R-intégrable sur aucun intervalle $[a,b]$ car pour toute partition Z d'un tel intervalle on a $S_-(\chi_{\mathbb{Q}}, Z) = 0$ et $S_+(\chi_{\mathbb{Q}}, Z) = 1$.

Proposition 3.1. *Toute fonction monotone $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est R-intégrable.*

Proposition 3.2. *Toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est R-intégrable.*

Lemme 3.3. *Soit $d \in [\alpha, \beta] \subset [a, b]$ et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction.*

(1) *Si f est R-intégrable sur $[a, b]$ alors est l'est aussi sur $[\alpha, \beta]$.*

(2) *Si f est R-intégrable sur $[a, d]$ et sur $[d, b]$, alors elle l'est aussi sur $[a, b]$.*

Proposition 3.4. *La somme $f+g$ et le produit fg de deux fonctions R-intégrables est R-intégrable. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et f est R-intégrable, alors λf l'est également.*

4. Propriétés élémentaires de l'intégrale de Riemann

Dans la proposition suivante et dans la suite on utilise la notation

$$\int_b^a f(x)\, dx := -\int_a^b f(x)\, dx \qquad \text{si } a < b \,.$$

Proposition 4.1 (Relation de Chasles)**.** *Soit $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ une fonction R-intégrable et soit $a, b, c \in [\alpha, \beta]$. Alors*

$$\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx \,.$$

Proposition 4.2 (Linéarité)**.** *Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ des fonctions R-intégrables et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors*

$$\lambda \int_a^b f(x)\; dx = \int_a^b \lambda f(x)\, dx \qquad et$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\; dx = \int_a^b f(x)\; dx + \int_a^b g(x)\; dx \,.$$

Proposition 4.3 (Positivité et Monotonie)**.** *Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ des fonctions R-intégrables.*

(1) *Si $f \geq 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$.*

(2) *Si $f \leq g$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$.*

(3) $\displaystyle\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$

En conséquence directe de (2) de la Proposition précédente on obtient l'estimation importante

$$(b - a) \inf(f) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq (b - a) \sup(f) \,.$$

Une fois établi cette inégalité on en déduit en employant le théorème des valeurs intermédiaires les deux formules de la moyenne :

Corollaire 4.4 (Premier Théorème de la moyenne)**.** *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est* **continue***, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que*

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\, dx = f(c) \,.$$

Corollaire 4.5 (Deuxième Théorème de la moyenne)**.** *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est* **continue** *et si $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ est* **positive***, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que*

$$\int_a^b f(x) g(x)\, dx = f(c) \int_a^b g(x)\, dx \,.$$

5. Primitives et Théorèmes fondamentaux du Calcul

Théorème 5.1. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction R-intégrable, alors la fonction*

$$x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$$

est continue sur $[a,b]$.

Théorème 5.2. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction R-intégrable et si f et continue en $x_0 \in [a,b]$, alors la fonction*

$$x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$$

est dérivable en x_0.

Rappelons la définition suivante déja rencontrée dans le premier paragraphe.

Définition 5.3. *Une fonction $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une primitive de $f[a,b] \to \mathbb{R}$ si F est dérivable et si $F' = f$.*

Rappelons également que le théorème des valeurs intermediaires implique qu'une primitive est *unique à une constante additive près*, i.e. si F_1 et F_2 sont toutes les deux des primitives d'une fonction f, alors il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $F_2 = F_1 + c$.

Un corollaire immédiat du Théoréme 8.6 est le résultat suivant :

Théorème 5.4 (Premier Théorème du Calcul)**.** *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors la fonction*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

est dérivable sur $[a,b]$ et $F' = f$. Autrement dit, F est une primitive de f.

Théorème 5.5 (Second Théorème du Calcul)**.** *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction R-intégrable et si f admet une primitive F, alors la fonction*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

On notera bien que dans ce dernier résultat l'une des hypthéèses est que f admet une primitive. Ce n'est pas le cas pour toute fonction R-intégrable !

6. Techniques d'intégration

6.1. **Changement de variables.** Un outil très important pour la détermination de primitives est le *changement de variables.*

Théorème 6.1. *Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ une application C^1. Alors*

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du\,.$$

Exemple 1 : Avec $u = x^2$ et donc $du = 2x\,dx$ on a

$$\int_0^2 \frac{x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{2x\,dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int_0^4 \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2}\arctan 4.$$

Dans cet exemple on connaît une primitive de $f(u) = \frac{1}{1+u^2}$ et on en déduit la valeur de l'intégrale de départ. Souvent on utilise ce procédé dans l'autre sens afin de déterminer $\int_\alpha^\beta f(u)\,du$. Mais dans ce cas, l'application $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ du changement de variables **doit être une bijection**.

Théorème 6.2. *Soit $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ une application C^1 bijective et soit $f : [c,d] = \varphi([a,b]) \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, pour tout $\alpha, \beta \in [c,d]$ on a*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\ .$$

Exemple 2 : Soit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$, et cherchons une primitive de f. Pour ce faire on considère $\varphi : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1]$, $\varphi(t) = \sin(t)$. Avec $x = \varphi(t)$ on a $\sqrt{1-x^2} = \cos(t)$ (ok ?) et $dx = \varphi'(t)\,dt = \cos(t)\,dt$. Donc

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{\cos(t)}\cos(t)\,dt = \int 1\,dt = t + c\ , \quad c \in \mathbb{R}.$$

Le problème restant est que le résultat est une fonction de la variable t et non pas de x. Hereusement $\varphi : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1]$ est une **bijection** ! Ainsi on peut considérer $\varphi^{-1} : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ qui n'est rien d'autre que $t = \varphi^{-1}(x) = \arcsin(x)$.

Conclusion : On a $\int f(x)\,dx = \arcsin(x) + c$, $|x| < 1$.

Remarque : Dans cet exemple, on aurait pu prendre à la place de $\varphi(t) = sin(t)$ la fonction $\psi : [0,\pi] \to [-1,1]$, $\varphi(t) = \cos(t)$. Dans ce cas on obtient

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{\sin(t)}(-\sin(t))\,dt = \int -1\,dt = -t + c = -\arccos(x) + c\ , \quad c \in \mathbb{R}\,,$$

toujours car $\psi : [0,\pi] \to [-1,1]$ est une bijection. Alors lequel est le bon résultat ? Y a-t-il une erreur ?

7. Intégration par parties

Nous avons déja vu dans l'introduction une version du résultat suivant.

Théorème 7.1. *Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ des fonctions C^1. Alors*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx\ .$$

8. Intégration de fractions rationnelles

8.1. **Quelques remarques sur la décomposition de Polynômes.** Dans la suite, $P(z) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$, avec $a_k \in \mathbb{R}$ (resp. $a_k \in \mathbb{C}$) et $a_d \neq 0$ est on polynôme réel (resp. complexe) de degré d.

Exercice 8.1. Vérifier que $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$ si P est un polynôme réel.

Proposition 8.2. *Si $r \in \mathbb{C}$ est un zéro du polynôme P, alors il existe un autre polynôme P_1 tel que $P(x) = (x-r)P_1(x)$ (et P_1 est réel si P et r le sont).*

Théorème 8.3 (Théroème Fondamental de l'Algébre)**.** *Tout polynôme a un zéro dans $\mathbb{C}$. (admis)*

On en déduit la décomposition complexe d'un polynôme que voici :

Corollaire 8.4. *Si $P(z) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$ est un polynôme (réel ou complexe), alors il existe $r_1, ..., r_n$ des nombres complexes distincts deux à deux et des entiers $m_1, ..., m_n$ tels que*

$$P(z) = a_d(z-r_1)^{m_1}(z-r_2)^{m_2} \times ... \times (z-r_n)^{m_n}\ .$$

Considérons finalement le cas d'un polynôme réel. Un tel polynôme peut avoir des racines réelles mais également des racines complexes. Mais, si r est une racine complexe, alors son conjugué $\overline{r}$ est également une racine (voir l'Exercice 8.1). L'exemple standard est $P(x) = x^2 + 1$ dont les racines sont $r = i$ et $\overline{r} = -i$.

Si r et $\overline{r}$ sont des racines complexes du polynôme réel P, alors le polynôme également réel

$$(x-r)(x-\overline{r}) = x^2 - 2\Re(r)x + |r|^2$$

"divise" P, i.e. $P(x) = (x^2 - 2\Re(r)x + |r|^2)P_1(x)$ pour un certain polynôme réel P_1. On en déduit la décomposition réelle (en facteurs "irréductibles") suivante :

Corollaire 8.5. *Dans $\mathbb{R}$, si $P(z) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$ est un polynôme réel, alors P admet une décomposition de la forme suivante :*

$$P(x) = a_d(z-r_1)^{m_1}(z-r_2)^{m_2} \times ... \times (z-r_n)^{m_n} \times (x^2 + A_1 x + B_1)^{N_1} \times ... \times (x^2 + A_l x + B_l)^{N_l}$$

où les $r_j, A_j, B_j \in \mathbb{R}$, les $m_j, N_j \in \mathbb{N}^*$ et (important !) où les polynômes $x^2 + A_j x + B_j$ sont sans racines réelles.

8.2. **Décomposition de fractions rationnelles.** Une fraction rationnelle est une fonction de la forme $R = P/Q$ où P et Q sont des polynômes. Ici on ne regarde que le cas où tous les coefficients sont réels. Le résultat suivant est admis !

Théorème 8.6. *Soit $R = P/Q$ une fraction rationnelle et supposons que*

$$Q(x) = a_d(z-r_1)^{m_1}(z-r_2)^{m_2} \times ... \times (z-r_n)^{m_n} \times (x^2 + A_1 x + B_1)^{N_1} \times ... \times (x^2 + A_l x + B_l)^{N_l}$$

est la décomposition (réelle) du polynôme Q. Alors, il existe un polynôme E et des coefficients $\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}\gamma_{i,j} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) &+ \frac{\alpha_{1,1}}{x-r_1} + ... + \frac{\alpha_{1,m_1}}{(x-r_1)^{m_1}} \\
&+ ...+ \\
&+ \frac{\alpha_{k,1}}{x-r_k} + ... + \frac{\alpha_{k,m_k}}{(x-r_k)^{m_k}} \\
&+ \frac{\beta_{1,1}x + \gamma_{1,1}}{x^2 + A_1 x + B_1} + ... + \frac{\beta_{1,N_1}x + \gamma_{1,N_1}}{(x^2 + A_1 x + B_1)^{N_1}} \\
&+ ...+ \\
&+ \frac{\beta_{l,1}x + \gamma_{l,1}}{x^2 + A_l x + B_l} + ... + \frac{\beta_{l,N_l}x + \gamma_{l,N_l}}{(x^2 + A_l x + B_l)^{N_l}} .
\end{aligned}$$

Dans cette décomposition, on appelle E la *partie entière* de R et les autres termes les *éléments simples*. Le point important (et donc à retenir) est que cette décomposition utilise deux types d'éléments simples :

(1) $\frac{1}{(x-r)^m}$ et

(2) $\frac{\beta x + \gamma}{(x^2 + Ax + B)^N}$ où le polynôme $x \mapsto x^2 + Ax + B$ n'a pas de racines réelles.

8.3. **Intégration de fractions rationnelles.** Le but est d'intégrer une fraction rationnelle $R = P/Q$. D'après la décomposition du Théorème 8.6 et à cause de la linéarité de l'intégrale, il suffit de savoir intégrer la partie entière E et chacun des éléments simples. La partie entière est un polynôme son intégration ne pose aucun problème. Puis on a

$$\int \frac{a}{x-r}\,dx = a \ln|x-r| \qquad \textit{et}$$

$$\int \frac{a}{(x-r)^j}\,dx = \frac{a}{(j-1)(x-r)^{j-1}}$$

si $j \geq 2$ (à une constante additive près).

Concernant les autres termes, rappelons tout d'abord que le dénominateur $x^2 + Ax + B$ est sans racines réelles. Autrement dit, $A^2 - 4B < 0$. On a

$$\frac{\beta x + \gamma}{(x^2 + Ax + B)^j} = \frac{\frac{\beta}{2}(2x + A) - \frac{A\beta}{2} + \gamma}{(x^2 + Ax + B)^j} = \frac{\beta}{2}\frac{2x + A}{(x^2 + Ax + B)^j} + \frac{\gamma - \frac{A\beta}{2}}{(x^2 + Ax + B)^j}$$

Le premier terme est de la forme $\frac{\beta}{2}\frac{u'}{u^j}$ où $u(x) = x^2 + Ax + B$. Une primitive est donc

$$\frac{\beta}{2}\ln|x^2 + Ax + B| \qquad si \quad j = 1 \quad et$$

$$\frac{\beta}{2}\frac{1}{(j-1)u^{j-1}} = \frac{\beta}{2}\frac{-1}{(j-1)(x^2+Ax+B)^{j-1}} \qquad si \quad j \geq 2\ .$$

Reste à intégrer les termes de la forme

$$\frac{\gamma - \frac{A\beta}{2}}{(x^2+Ax+B)^j}\ .$$

Comme le déterminant $A^2 - 4B < 0$, on peut faire un changement de variables pour avoir

$$\int \frac{1}{(x^2+Ax+B)^j}dx = Const \int \frac{1}{(u^2+1)^j}du = Const\ I_j\ .$$

Si $j = 1$, alors $\arctan(u)$ est une primitive de $\frac{1}{u^2+1}$. Sinon on établit, par une intégration par parties, une relation entre I_j et I_{j+1}. Par exemple,

$$I_1 = \int \frac{1}{u^2+1}du = \frac{u}{u^2+1} - \int u\frac{-2u}{(1+u^2)^2}du = \frac{u}{u^2+1} + 2\int \frac{u^2+1-1}{(1+u^2)^2}du = \frac{u}{u^2+1} + 2(I_1 - I_2)$$

et donc

$$I_2 = \frac{1}{2}\frac{u}{1+u^2} + \frac{1}{2}I_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{u}{1+u^2} + \arctan(u)\right) + c\ ,\ c \in \mathbb{R}\ .$$