

Université de Lorraine

L2 de Mathématiques

Anne de Roton

Cours d'analyse 2

année 2018-2019, Nancy

Table des matières

1	Séries de nombres réels ou complexes	9
1.1	Généralités	9
1.1.1	Définitions	9
1.1.2	Linéarité	11
1.1.3	Critère de Cauchy, convergence absolue	11
1.2	Séries à termes positifs	12
1.2.1	Convergence par les sommes partielles	12
1.2.2	Théorèmes de comparaison	13
1.2.3	Règles de Cauchy et d'Alembert	14
1.2.4	Comparaison avec une intégrale	15
1.3	Séries à termes quelconques	15
1.3.1	Séries alternées	15
1.3.2	Théorème de sommation d'Abel	16
1.4	Convergence commutative, série produit	17
1.4.1	Convergence commutative	17
1.5	Familles sommables (programme CPU)	18
1.5.1	Produit de Cauchy	20
2	Suites et séries de fonctions	23
2.1	Suites de fonctions	23
2.1.1	Convergence simple, uniforme	23
2.1.2	Convergence uniforme et échange de limites	24
2.2	Séries de fonctions	25
2.2.1	Notions de convergences	25
2.2.2	Régularité de la somme	28
3	Intégration	29
3.1	Définition de l'intégrale de Cauchy, propriétés fondamentales	29
3.1.1	Introduction	29
3.1.2	Intégrale des fonctions en escalier	29
3.1.3	Définition de l'intégrale des fonctions réglées	30
3.1.4	Premières propriétés de l'intégrale de Cauchy	31
3.2	Exemples de fonctions réglées	32
3.3	Propriétés de l'intégrale de Cauchy	34
3.3.1	Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral et conséquences	34
3.3.2	Formules de Taylor	35
3.4	Compléments	37
3.5	Échange de limite et intégrale	38

4	Intégrales impropres	39
4.1	Définitions et premières propriétés	39
4.1.1	Convergence/divergence	39
4.1.2	Propriétés fondamentales	41
4.1.3	Intégrales doublement impropres	41
4.1.4	Critère de Cauchy, convergence absolue	42
4.2	Fonctions positives	43
4.3	Fonctions oscillantes	45
5	Séries entières	47
5.1	Série de fonctions de la variable complexe	47
5.2	Définition. Rayon de convergence	47
5.3	Opérations sur les séries entières	49
5.4	Propriétés de la somme d'une série entière	49
5.5	Séries entières usuelles	51
5.6	Exponentielle, cosinus et sinus complexes	52
5.7	Application à la recherche de solutions d'équations différentielles	52

Avertissement, remerciements

Ces notes de cours ne sont pas dans leur version définitive. Le cours est en construction et ces notes sont celles que j'utilise en cours. Elles sont incomplètes, souvent les démonstrations ne sont pas incluses, et ces notes sont amenées à évoluer (en particulier pour les chapitres que nous n'avons pas encore abordés en cours). Des versions actualisées seront régulièrement postées au cours du semestre.

En tout état de cause, **ces notes ne sauraient se substituer aux cours d'amphi**. Je ne les mets en ligne qu'à la demande répétée de certains d'entre vous qui souhaitent travailler le cours en amont pour mieux profiter des cours d'amphi. L'usage de ces notes est donc interne au L2 maths de cette année et est un complément aux cours.

Je souhaite remercier ici tous les collègues qui m'ont aidée à écrire ce cours en me confiant les notes ou en mettant du matériel pédagogique à ma disposition.

Merci donc à Julien Maubon, chargé du cours d'analyse 2 jusqu'en 2017-2018, à Oussama Hijazy, chargé du cours d'analyse 3. J'ai beaucoup emprunté à leurs notes manuscrites. Je me suis aussi inspirée des cours de Patrick Sargos qui a enseigné en analyse 2 et analyse 3 de nombreuses années.

J'ai aussi utilisé diverses sources sur internet, que je vous conseille si vous souhaitez diversifier les approches pédagogiques ou trouver des exercices complémentaires :

- exo7 <http://exo7.emath.fr/> qui propose des cours en format pdf, des cours filmés, des exercices corrigés pour toute la licence ;
- bibmath <http://www.bibmath.net/> qui propose des exercices corrigés pour toute la licence et plein d'autres choses ;
- le site de Gérard Eguether <http://www.iecl.univ-lorraine.fr/~Gerard.Eguether/> qui contient des cours et exercices corrigés pour le début de la licence.

Enfin, j'ai emprunté une partie des exemples et exercices au livre d'Arnaudies et Fraysse "Cours de mathématiques".

Si vous souhaitez passer un concours de l'enseignement, je vous conseille de commencer dès maintenant à travailler avec des livres. Ils seront votre source principale l'année du concours et il est bon d'avoir déjà en tête des ouvrages qui vous conviennent.

Programme

Séries de nombres réels ou complexes : Séries à termes positifs, emploi des relations de comparaison. Règle de Cauchy et d'Alembert. Séries de Riemann. Critère des séries alternées. Séries absolument convergentes, semi-convergentes. La convergence implique que le terme général tend vers 0. Les séries de Bertrand, la transformation et le critère d'Abel pourront être vus en exercice.

Compléments CPU : familles sommables.

Suites de fonctions : Convergence simple, uniforme. La convergence uniforme entraîne la convergence simple. Une limite uniforme de fonctions continues est continue. Théorème de la double limite pour les suites de fonctions convergeant uniformément. Théorèmes analogues pour la dérivation des suites de fonctions. **Séries de fonctions :** Convergence simple et uniforme d'une série. Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et la suite de ses restes converge uniformément vers 0. Convergence normale des séries. La convergence normale implique la convergence uniforme et la convergence absolue en tout point. Continuité et dérivabilité de la somme d'une série de fonctions.

Compléments CPU : Critère de Cauchy uniforme.

Séries entières : Séries entières de la variable complexe. Rayon de convergence, disque de convergence. Convergence normale à l'intérieur (Lemme d'Abel) et divergence grossière à l'extérieur. Règle de d'Alembert. Somme et produit de Cauchy de séries entières. Continuité sur le disque de convergence. Dérivation terme à terme d'une série entière d'une variable réelle. Primitivation. Lien entre coefficients et les dérivées successives en 0. Définition de $\exp z$, $\cos z$ et $\sin z$ pour z complexe, formules de trigonométrie. Développement en série entière d'une fonction et application à la recherche de solutions d'équations différentielles.

Intégration. Fonction uniformément continues. Théorème de Heine sur un segment. Fonctions continues par morceaux sur un segment. Fonctions réglées. Fonctions continues par morceaux. Les fonctions continues par morceaux sont réglées. Présentation de l'intégrale de Cauchy (c'est-à-dire intégration des fonctions réglées [limites uniformes de fonctions en escalier]). Linéarité et positivité de l'intégrale. Relation de Chasles. La valeur absolue de l'intégrale est plus petite que l'intégrale de la valeur absolue. Primitives, théorème fondamental du calcul différentiel et intégral. Intégration par parties, changement de variables. Formules de Taylor (Taylor-Young, Taylor reste intégral). Intégration des fractions rationnelles. Echange limite (ou somme) et intégrale pour les suites (ou séries) convergeant uniformément sur tout segment. On pourra présenter l'intégrale de Cauchy d'abord pour les fonctions continues puis l'étendre aux fonctions réglées. Le théorème de convergence dominée est au programme de l'UE Intégration et probabilités.

Compléments CPU : Inégalités de la moyenne.

Intégrales impropres : Critère de Cauchy, convergence absolue. Intégrales de fonctions positives, emploi des relations de comparaison. Comparaison d'une intégrale impropre et d'une série. Intégrales semi-convergentes. Intégration des relations de comparaison.

Complément CPU : Continuité et dérivabilité des intégrales dépendant d'un paramètre. Ersatz de convergence dominée pour l'intégration des suites et des séries de fonctions.

Chapitre 1

Séries de nombres réels ou complexes

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}

1.1 Généralités

1.1.1 Définitions

Définition 1 Une série numérique est un couple formé de deux suites $((u_n)_{n \geq n_0}, (S_n)_{n \geq n_0})$ tel que $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$. u_n est le terme général d'ordre n de la série et S_n est la somme partielle d'ordre n de la série. On note $\sum_{n \geq n_0} u_n$ la série de terme général u_n .

Exemple 1 Fixons $q \in \mathbb{C}$. Définissons la suite $(u_k)_{k \geq 0}$ par $u_k = q^k$. C'est une suite géométrique. Les sommes partielles de la série géométrique $\sum_{k \geq 0} q^k$ sont :

$$S_0 = 1 \quad S_1 = 1 + q \quad S_2 = 1 + q + q^2 \quad \dots \quad S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n \quad \dots$$

Définition 2 La série de terme général u_n converge si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \geq n_0}$ converge, i.e admet une limite finie dans \mathbb{K} . Dans ce cas, la limite S de $(S_n)_n$ est appelée somme de la série. On la note

$$S = \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n_0}^n u_k.$$

Si la suite $(S_n)_n$ ne converge pas, on dit que la série de terme général u_n est divergente.

On notera $\sum_{k \geq 0} u_k$ la série de terme général u_n et on réservera la notation $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ à la somme d'une série convergente.

Remarque 1 La convergence d'une série ne dépend pas de ses premiers termes : changer un nombre fini de termes d'une série ne change pas sa nature, convergente ou divergente. Par contre, si elle est convergente, sa somme est évidemment modifiée si l'on change les premiers termes.

Exemple 2 — Soit $q \in \mathbb{C}$. La série géométrique $\sum_{k \geq 0} q^k$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$. On a alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1 - q}.$$

— La série

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots$$

est convergente de somme 1. En effet, elle peut être écrite comme somme télescopique, et plus précisément la somme partielle vérifie :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1 \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Théorème 1 Si la série $\sum_{k \geq 0} u_k$ converge, alors la suite $(u_k)_{k \geq 0}$ tend vers 0.

Exemple 3 La série de terme général

$$u_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 2^\ell \quad \text{pour un certain } \ell \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

diverge.

Attention ! Il existe des séries $\sum_{k \geq 0} u_k$ telles que $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = 0$, mais $\sum_{k \geq 0} u_k$ diverge.

Exemple 4 La série de terme général

$$u_k = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

diverge.

Définition 3 Si la série de terme général u_n converge, on définit le reste $R_n = S - S_n$ d'ordre n de la série. Ainsi

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Proposition 1 Si une série est convergente, alors $S = S_n + R_n$ (pour tout $n \geq 0$) et $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$.

Exemple 5 — Soit $q \in \mathbb{C}$ tel que $|q| < 1$. Le reste d'ordre n de la série géométrique $\sum_{k \geq 0} q^k$ est

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} q^k = \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

— Le reste d'ordre n de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k(k+1)}$ est

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n+1}.$$

1.1.2 Linéarité

Proposition 2 Soient $\sum_{k \geq 0} a_k$ et $\sum_{k \geq 0} b_k$ deux séries convergentes de sommes respectives A et B , et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors la série $\sum_{k \geq 0} (\lambda a_k + \mu b_k)$ est convergente et de somme $\lambda A + \mu B$. On a donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} a_k + \mu \sum_{k=0}^{+\infty} b_k.$$

Proposition 3 Si $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ diverge, alors $\sum_{k \geq 0} (a_k + b_k)$ diverge.

Si les deux séries divergent, on ne peut rien dire !

Proposition 4 Soit $(u_k)_{k \geq 0}$ une suite de nombres complexes. Pour tout k , notons $u_k = a_k + ib_k$, avec a_k la partie réelle et b_k la partie imaginaire de u_k . La série $\sum u_k$ converge si et seulement si les deux séries $\sum_{k \geq 0} a_k$ et $\sum_{k \geq 0} b_k$ convergent. Si c'est le cas, on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k + i \sum_{k=0}^{+\infty} b_k.$$

Exemple 6 Considérons par exemple la série géométrique $\sum_{k \geq 0} r^k$, où $r = \rho e^{i\vartheta}$ est un complexe de module $\rho < 1$ et d'argument ϑ .

Comme le module de r est strictement inférieur à 1, alors la série converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} r^k = \frac{1}{1-r}.$$

D'autre part, $r^k = \rho^k e^{ik\vartheta}$ par la formule de Moivre. Les parties réelle et imaginaire de r^k sont

$$a_k = \rho^k \cos(k\vartheta) \quad \text{et} \quad b_k = \rho^k \sin(k\vartheta).$$

On déduit de la proposition précédente que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \Re \left(\sum_{k=0}^{+\infty} r^k \right) = \Re \left(\frac{1}{1-r} \right) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} b_k = \Im \left(\sum_{k=0}^{+\infty} r^k \right) = \Im \left(\frac{1}{1-r} \right).$$

Le calcul donne :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k \cos(k\vartheta) = \frac{1 - \rho \cos \vartheta}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \vartheta} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k \sin(k\vartheta) = \frac{\rho \sin \vartheta}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \vartheta}.$$

1.1.3 Critère de Cauchy, convergence absolue

Critère de Cauchy

Rappel. Une suite $(s_n)_n$ de nombres réels ou complexes converge si et seulement si elle est une suite de Cauchy, c'est-à-dire :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m \geq n \geq n_0 \quad |s_n - s_m| < \epsilon$$

Pour les séries cela nous donne :

Théorème 2 (Critère de Cauchy) *La série de terme général u_k converge si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq n_0 \quad |u_n + \cdots + u_m| < \epsilon.$$

On le formule aussi de la façon suivante :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq n_0 \quad \left| \sum_{k=n}^m u_k \right| < \epsilon$$

ou encore

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad |u_n + \cdots + u_{n+p}| < \epsilon$$

Exemple 7 *La série harmonique $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ est divergente.*

La somme partielle de la série harmonique est $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. On a

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

La suite des sommes partielles n'est pas de Cauchy donc la série ne converge pas.

Dans cet exemple, on a une série divergente dont le terme général converge vers 0.

Convergence absolue

Définition 4 *On dit qu'une série $\sum_{k \geq 0} u_k$ de nombres réels (ou complexes) est **absolument convergente** si la série $\sum_{k \geq 0} |u_k|$ est convergente.*

Théorème 3 *Toute série absolument convergente est convergente. La réciproque est fausse.*

Exemple 8 *La série harmonique $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ est divergente mais la série harmonique alternée $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$ est convergente (donc semi-convergente).*

Définition 5 *On dit qu'une série $\sum_{k \geq 0} u_k$ de nombres réels (ou complexes) est **semi-convergente** si la série $\sum_{k \geq 0} |u_k|$ diverge et la série $\sum_{k \geq 0} u_k$ est convergente.*

1.2 Séries à termes positifs

1.2.1 Convergence par les sommes partielles

Rappels. Soit $(s_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante de nombres réels.

- Si la suite est majorée, alors la suite $(s_n)_n$ converge, c'est-à-dire qu'elle admet une limite finie.
- Sinon la suite $(s_n)_n$ tend vers $+\infty$.

Appliquons ceci aux séries $\sum_{k \geq 0} u_k$ à termes positifs, c'est-à-dire $u_k \geq 0$ pour tout k . Dans ce cas la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ des sommes partielles, définie par $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$, est une suite croissante.

Proposition 5 *Une série à termes positifs est une série convergente si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée. Autrement dit, si et seulement s'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \geq 0$, $S_n \leq M$. Dans ce cas, la limite est la borne supérieure des sommes partielles. Dans le cas contraire, la limite est $+\infty$.*

Exemple 9 $\sum_{k \geq 0} q^k$ converge si $0 < q < 1$, et diverge si $q \geq 1$.

1.2.2 Théorèmes de comparaison

Théorème 4 (Théorème de comparaison) Soient $\sum_{k \geq 0} u_k$ et $\sum_{k \geq 0} v_k$ deux séries à termes positifs ou nuls. On suppose qu'il existe $k_0 \geq 0$ tel que, pour tout $k \geq k_0$, $u_k \leq v_k$.

- Si $\sum_{k \geq 0} v_k$ converge alors $\sum_{k \geq 0} u_k$ converge.
- Si $\sum_{k \geq 0} u_k$ diverge alors $\sum_{k \geq 0} v_k$ diverge.

Exemple 10 1. Comme $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k(k+1)}$ converge, $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ converge et la série $\sum_{k \geq 1} \frac{\cos k}{k^2}$ converge absolument.

2. Comme $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k}$ diverge, les séries $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{\sqrt{k}}$ et $\sum_{k \geq 1} \frac{\ln k}{k}$ divergent.

3. La **série exponentielle** $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!}$ converge car $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k(k-1)}$ pour $k \geq 2$, et $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k(k+1)}$ est une série convergente. Par définition, la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ vaut le nombre d'Euler $e = \exp(1)$.

4. Considérons la série harmonique alternée $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ et notons S_n sa somme partielle d'ordre n . On a

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k(2k-1)}.$$

Or pour $k \geq 1$, $\frac{1}{2k(2k-1)} \leq \frac{1}{2} \frac{1}{k^2}$ et la série de terme général $1/k^2$ converge donc la série de terme général $\frac{1}{2k(2k-1)}$ converge et S_{2n} admet une limite finie lorsque n tend vers l'infini. Comme $S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0$, la suite $(S_{2n+1})_n$ converge vers la même limite que $(S_{2n})_n$ ce qui montre que $(S_n)_n$ converge et donc que la série harmonique alternée converge. La série harmonique alternée est semi-convergente.

Théorème 5 (Théorème des équivalents) Soient $(u_k)_{k \geq 0}$ et $(v_k)_{k \geq 0}$ deux suites à termes positifs. Si $u_k \sim v_k$ alors les séries $\sum_{k \geq 0} u_k$ et $\sum_{k \geq 0} v_k$ sont de même nature. De plus,

- si les séries convergent, si R_n est le reste d'ordre n de $\sum_{k \geq 0} u_k$ et R'_n est le reste d'ordre n de $\sum_{k \geq 0} v_k$, alors $R_n \sim R'_n$;
- si les séries divergent, si S_n est la somme partielle d'ordre n de $\sum_{k \geq 0} u_k$ et S'_n est la somme partielle d'ordre n de $\sum_{k \geq 0} v_k$, alors $S_n \sim S'_n$.

Attention : Cela ne marche que pour des séries à termes positifs ! Voir $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right)$.

Exemple 11 — Les deux séries

$$\sum_{k \geq 0} \frac{k^2 + 3k + 1}{k^4 + 2k^3 + 4} \quad \text{et} \quad \sum_{k \geq 1} \frac{k + \ln(k)}{k^3} \quad \text{convergent.}$$

Dans les deux cas, le terme général est équivalent à $\frac{1}{k^2}$, et nous savons que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ converge.

— Par contre

$$\sum_{k \geq 0} \frac{k^2 + 3k + 1}{k^3 + 2k^2 + 4} \quad \text{et} \quad \sum_{k \geq 1} \frac{k + \ln(k)}{k^2} \quad \text{divergent.}$$

Dans les deux cas, le terme général est équivalent à $\frac{1}{k}$, et nous avons vu que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ diverge.

Proposition 6 (Séries de Riemann) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. De plus

- pour $\alpha > 1$, on a $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$;
- pour $\alpha < 1$, on a $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$;
- pour $\alpha = 1$, on a $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$.

Théorème 6 (Théorème de domination) Soient $(u_k)_{k \geq 0}$ et $(v_k)_{k \geq 0}$ deux suites à termes positifs. Si $u_k = O(v_k)$ ou $u_k = o(v_k)$ alors $\sum_{k \geq 0} v_k$ converge $\Rightarrow \sum_{k \geq 0} u_k$ converge. De plus, dans le cas de convergence, on a $R_n = O(R'_n)$ ou $R_n = o(R'_n)$.

Ceci fournit une première règle, la règle $n^\alpha u_n$.

Proposition 7 (Règle $n^\alpha u_n$) Soit $(u_n)_n$ une suite à termes positifs (ou nuls).

- S'il existe $\alpha > 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)_n$ soit majorée, alors la série de terme général u_n converge ;
- Si la suite $(nu_n)_n$ est minorée par un réel strictement positif, alors la série de terme général u_n diverge ;

Exemple 12 — La série de terme général $u_n = n^\alpha q^n$ avec $0 < q < 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ est convergente.

— La série de Bertrand $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k^{\alpha(\ln k)^\beta}}$ diverge si $\alpha > 1$ et converge si $\alpha > 1$.

1.2.3 Règles de Cauchy et d'Alembert

Théorème 7 (Test de d'Alembert) Soit $\sum_{k \geq 0} u_k$ une série à termes positifs, telle que $u_k \neq 0$ pour $k \geq k_0$ et la suite $\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)_{k \geq k_0}$ admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Si $\ell < 1$ alors $\sum_{k \geq 0} u_k$ converge.
2. Si $\ell > 1$ alors $\sum_{k \geq 0} u_k$ diverge.

Exemple 13 — Pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, la série exponentielle

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{converge.}$$

— Le corollaire ne permet pas de conclure lorsque $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = 1$. Voir les séries $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ et $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$.

Théorème 8 (Test de Cauchy) Soit $\sum_{k \geq 0} u_k$ une série à termes positifs.

1. S'il existe une constante $0 < q < 1$ et un entier k_0 tels que, pour tout $k \geq k_0$,

$$\sqrt[k]{u_k} \leq q < 1, \quad \text{alors} \quad \sum_{k \geq 0} u_k \quad \text{converge.}$$

2. S'il existe une infinité de k pour lesquels

$$\sqrt[k]{u_k} \geq 1, \quad \text{alors} \quad \sum_{k \geq 0} u_k \quad \text{diverge.}$$

Corollaire 1 Soit $\sum_{k \geq 0} u_k$ une série à termes positifs, telle que $\sqrt[k]{u_k}$ converge vers ℓ .

1. Si $\ell < 1$ alors $\sum_{k \geq 0} u_k$ converge.
2. Si $\ell > 1$ alors $\sum_{k \geq 0} u_k$ diverge.

Exemple 14 1. La série

$$\sum_{k \geq 0} \left(\frac{2k+1}{3k+4} \right)^k \quad \text{converge,}$$

la série

$$\sum_{k \geq 0} \left(\frac{3k+1}{2k+4} \right)^k \quad \text{diverge,}$$

la série de terme général u_k défini par $u_{2k} = \left(\frac{2k+1}{3k+4} \right)^{2k}$ et $u_{2k+1} = \left(\frac{k}{2k+7} \right)^{2k+1}$ converge alors que la série de terme général v_k défini par $v_{2k} = \left(\frac{2k+1}{3k+4} \right)^{2k}$ et $v_{2k+1} = \left(\frac{2k+1}{k} \right)^{2k+1}$ diverge.

2. La série

$$\sum_{k \geq 1} \frac{2^k}{k^\alpha} \quad \text{diverge,}$$

quel que soit $\alpha > 0$. En effet,

$$\sqrt[k]{u_k} = \frac{\sqrt[k]{2^k}}{(\sqrt[k]{k})^\alpha} = \frac{2}{(k^{\frac{1}{k}})^\alpha} = \frac{2}{(\exp(\frac{1}{k} \ln k))^\alpha} \rightarrow 2 > 1.$$

1.2.4 Comparaison avec une intégrale

Proposition 8 (Comparaison avec une intégrale) Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive décroissante, alors la série de terme général $u_k = f(k)$ converge ssi la suite $(\int_0^n f(t) dt)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. En cas de divergence, on a $\sum_{k=0}^n f(k) \sim \int_0^n f(t) dt$.

Exemple 15 — Séries de Riemann.

Soit $\alpha > 0$. Alors la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

— Séries de Bertrand.

La série de Bertrand $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k^\alpha (\ln k)^\beta}$ converge ssi $\alpha > 1$ ou $(\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$.

1.3 Séries à termes quelconques

1.3.1 Séries alternées

Définition 6 Soit $(u_k)_{k \geq 0}$ une suite à termes positifs (ou nuls). La série $\sum_{k \geq 0} (-1)^k u_k$ s'appelle une série alternée.

Théorème 9 (Critère de Leibniz) Supposons que $(u_k)_{k \geq 0}$ soit une suite qui vérifie :

1. $u_k \geq 0$ pour tout $k \geq 0$,
2. la suite $(u_k)_k$ est une suite décroissante,
3. et $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = 0$.

Alors la série alternée $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k$ converge. De plus le reste d'ordre $n-1$ vérifie

$$|R_{n-1}| = \left| \sum_{k \geq n} (-1)^k a_k \right| \leq a_n.$$

Exemple 16 — La série harmonique alternée

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

converge. On verra que sa limite est $\ln 2$. On a donc

$$\left| \ln 2 - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k+1} \right| \leq \frac{1}{n+2}$$

et pour obtenir une approximation de $\ln 2$ à 0.01 près, il suffit de calculer la somme partielle d'ordre 99.

- Pour $\alpha > 0$, la série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$ est convergente.
- Pour $\alpha > 0$ et $\beta \geq 0$, la série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{k^\alpha (\ln k)^\beta}$ est convergente.
- Pour $\beta > 0$, la série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{(\ln k)^\beta}$ est convergente.

Attention !

1. La condition de décroissance de la suite $(u_k)_k$ dans le critère de Leibniz est nécessaire.
2. Il n'est pas possible de remplacer u_k par un équivalent à l'infini dans le théorème.

Exemple 17

$$\sum_{k \geq 2} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \quad \text{converge,} \quad \sum_{k \geq 2} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k} + (-1)^k} \quad \text{diverge.}$$

1.3.2 Théorème de sommation d'Abel

Théorème 10 (Théorème de sommation d'Abel) Soient $(a_k)_{k \geq 0}$ et $(b_k)_{k \geq 0}$ deux suites telles que :

1. La suite $(a_k)_{k \geq 0}$ est une suite décroissante de réels positifs qui tend vers 0.
2. Les sommes partielles de la suite $(b_k)_{k \geq 0}$ sont bornées :

$$\exists M \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |b_0 + \cdots + b_n| \leq M.$$

Alors la série $\sum_{k \geq 0} a_k b_k$ converge.

Le critère de Leibniz concernant les séries alternées est un cas spécial : en effet, si $b_k = (-1)^k$ alors $|\sum_{k=0}^n b_k| \leq 1$. Donc si $(a_k)_k$ est une suite positive, décroissante, qui tend vers 0, alors $\sum_{k \geq 0} a_k b_k$ converge.

Exemple 18 Soit ϑ un réel, tel que $\vartheta \neq 2n\pi$ (pour tout $n \in \mathbb{Z}$). Soit $(a_k)_{k \geq 0}$ une suite de réels positifs, décroissante, tendant vers 0. Alors les séries :

$$\sum_{k \geq 0} a_k e^{ik\vartheta} \quad \sum_{k \geq 0} a_k \cos(k\vartheta) \quad \sum_{k \geq 0} a_k \sin(k\vartheta) \quad \text{convergent.}$$

1.4 Convergence commutative, série produit

1.4.1 Convergence commutative

Théorème 11 Soit $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ une série absolument convergente et soit S sa somme. Soit $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une bijection de l'ensemble des indices. Alors la série $\sum_{k=0}^{+\infty} u_{\sigma(k)}$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_{\sigma(k)} = S.$$

On dit alors que la série est commutativement convergente.

Démonstration

Par hypothèse $\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$ converge donc le reste d'ordre n est bien défini et tend vers 0, donc

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} |u_k| < \epsilon/2.$$

Soit $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. Fixons $\epsilon > 0$. Choisissons $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\{0, 1, 2, \dots, n_0\} \subset \{\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(k_0)\}$. Pour $n \geq k_0$ on a :

$$\left| S - \sum_{k=0}^n u_{\sigma(k)} \right| \leq \left| S - \sum_{k=0}^{n_0} u_k \right| + \left| \sum_{k=0}^{n_0} u_k - \sum_{k=0}^n u_{\sigma(k)} \right|$$

Pour le premier terme on a

$$\left| S - \sum_{k=0}^{n_0} u_k \right| = \left| \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} u_k \right| \leq \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} |u_k| \leq \epsilon/2.$$

Pour le second terme :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n u_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{n_0} u_k \right| &= \left| \sum_{k \in \{\sigma(0), \dots, \sigma(n)\} \setminus \{0, \dots, n_0\}} u_k \right| \\ &\leq \sum_{k \in \{\sigma(0), \dots, \sigma(n)\} \setminus \{0, \dots, n_0\}} |u_k| \\ &\leq \sum_{k > n_0} |u_k| = \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} |u_k| \leq \epsilon/2. \end{aligned}$$

Ce qui prouve $\left| S - \sum_{k=0}^n u_{\sigma(k)} \right| \leq \epsilon$ et donne le résultat.

Remarque : la condition de convergence absolue est indispensable. Il se trouve que, pour une série convergente, mais pas absolument convergente, on peut permuter les termes pour obtenir n'importe quelle valeur !

Théorème 12 (Théorème de réarrangement de Riemann) Si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est semi-convergente, alors pour tout $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = a.$$

Comme exemple de permutation, on peut réordonner les termes $u_0, u_1, u_2, u_3, \dots$ en prenant deux termes de rang pair puis un terme de rang impair, ce qui donne :

$$u_0, u_2, u_1, u_4, u_6, u_3, u_8, u_{10}, u_5, \dots$$

Par contre il *n'est pas autorisé* de regrouper tous les termes pairs d'abord et les termes impairs ensuite :

$$u_0, u_2, u_4, \dots, u_{2k}, \dots, u_1, u_3, \dots, u_{2k+1}, \dots$$

1.5 Familles sommables (programme CPU)

Soit I un ensemble d'indices et $a = (a_i)_{i \in I}$ une famille de nombres réels ou complexes. Quel sens donner à $\sum_{i \in I} a_i$ indépendamment du choix d'un ordre total sur I ?

Si I est un ensemble fini, tout ordre donne le même résultat (commutativité de la somme). Pour $I = \mathbb{N}$, on a choisi l'ordre naturel de \mathbb{N} pour définir la somme d'une série et on a montré que la somme n'était indépendante de l'ordre que si la série était absolument convergente.

Si $I = \mathbb{N}^2$, quel ordre choisir ? Le résultat dépend-il alors de cet ordre ? Et si $I = [0, 1]$?

Définition 7 Soit $a = (a_i)_{i \in I}$ une famille non vide de nombres réels ou complexes ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). Pour une famille finie J de I , on note $S_J(a) = \sum_{i \in J} a_i$ (ne dépend pas de l'ordre choisi).

On dit que la famille a est sommable s'il existe $S \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie J_ε de I telle que pour toute famille finie J de I contenant J_ε , $|S - S_J(a)| \leq \varepsilon$. Dans ce cas, $S \in \mathbb{K}$ est unique, appelé somme de la famille a et noté $S(a) = \sum_{i \in I} a_i$.

Exemple 19 Si I est fini, on retrouve la somme algébrique.

Si $I = \mathbb{N}$ et la série $\sum_{i \geq 0} a_i$ est absolument convergente $S(a)$ est la somme de la série. Si la série est semi-convergente, elle n'est pas sommable.

Théorème 13 Famille positive. Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille de nombres réels **positifs** indexés par I . Alors $(a_i)_{i \in I}$ est **sommable** si et seulement si l'ensemble des sommes de toutes les sous-familles finies est majoré. Dans ce cas, on a

$$S(a) = \sum_{i \in I} a_i = \sup \left\{ \sum_{i \in J} a_i : J \text{ partie finie de } I \right\}.$$

Démonstration

- Si $(a_i)_{i \in I}$ est sommable et $S = S(a)$ alors pour tout $J \subset I$ fini, on a $S_J(a) \leq S(a)$, en effet dans le cas contraire, on aurait en posant $\varepsilon = \frac{1}{2}(S_J(a) - S(a))$, $S_{J'}(a) \geq S_J(a) = S(a) + 2\varepsilon$ pour tout $J' \subset I$ fini contenant J , ce qui contredirait la définition d'une famille sommable de somme $S(a)$. Ainsi l'ensemble des sommes de toutes les sous-familles finies est majoré et on a bien

$$S(a) = \sum_{i \in I} a_i = \sup \left\{ \sum_{i \in J} a_i : J \text{ partie finie de } I \right\}.$$

- Si l'ensemble des sommes de toutes les sous-familles finies est majoré, notons S sa borne supérieure. Pour $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie J_ε de I telle que $S \geq S_{J_\varepsilon}(a) \geq S - \varepsilon$ donc pour toute famille finie J de I contenant J_ε , on a $S \geq S_J(a) \geq S_{J_\varepsilon}(a) \geq S - \varepsilon$ donc $|S - S_J(a)| \leq \varepsilon$ et la famille est bien sommable.

Théorème 14 Comparaison. Si $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ sont deux familles de réels positifs, que pour tout $i \in I$, $u_i \leq v_i$ et que $(v_i)_{i \in I}$ est sommable, alors $(u_i)_{i \in I}$ est sommable et $\sum_{i \in I} u_i \leq \sum_{i \in I} v_i$.

Démonstration Pour tout $J \subset I$ fini, $\sum_{i \in J} u_i \leq \sum_{i \in J} v_i$, et l'inégalité est conservée quand on prend le sup sur $J \subset I$ fini.

Proposition 9 (Linéarité) Si $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ sont deux familles de réels sommables, si $a, b \in \mathbb{R}$, alors $(au_i + bv_i)_{i \in I}$ est sommable et

$$\sum_{i \in I} (au_i + bv_i) = a \sum_{i \in I} u_i + b \sum_{i \in I} v_i.$$

Idée de démonstration Provient du fait que si J et J' sont deux sous-ensembles finis de I alors $J \cup J'$ est un sous-ensemble fini de I qui les contient tous les deux et de la définition de la sommabilité.

Théorème 15 Famille réelle. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de nombres réels. Alors elle est **sommable** si et seulement si $(|u_i|)_{i \in I}$ est sommable. Dans ce cas, on a

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^-,$$

où $x^+ = \max(0, x)$, $x^- = \max(0, -x)$, $x = x^+ - x^-$ et $|x| = x^+ + x^-$.

Idée de démonstration On a $|u_i| = u_i^+ + u_i^-$ donc par le théorème de comparaison, si $(|u_i|)_{i \in I}$ est sommable, $(u_i^+)_{i \in I}$ et $(u_i^-)_{i \in I}$ le sont et donc, comme $u_i = u_i^+ - u_i^-$, la famille $(u_i)_{i \in I}$ l'est et on a

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^-.$$

Si $(u_i)_{i \in I}$ est sommable et que $(|u_i|)_{i \in I}$ ne l'est pas, on obtient une contradiction avec une construction similaire à celle faite dans le thm de réarrangement de Riemann.

Proposition 10 Soit I un ensemble quelconque et soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de nombres réels. Si $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, alors l'ensemble des termes non nuls de $(u_i)_{i \in I}$ est fini ou dénombrable.

Démonstration Comme $(|u_i|)_{i \in I}$ est sommable, notons S sa somme. Alors, pour tout $n \geq 1$,

$$S \geq \sum_{i \in I, |u_i| \geq 1/n} |u_i| \geq \frac{1}{n} \text{card}\{i \in I, |u_i| \geq 1/n\}.$$

Donc le nombre de termes dont la valeur absolue dépasse $1/n$ est majoré par nS , donc fini. Donc l'ensemble

$$\{i \in I : u_i \neq 0\} = \bigcup_{n \geq 1} \{i \in I : |u_i| \geq 1/n\}$$

est dénombrable comme union dénombrable d'ensembles finis.

Proposition 11 L'ensemble des familles sommables $a = (a_i)_{i \in I}$ de \mathbb{K} est un \mathbb{K} -espace vectoriel et l'application qui à $a = (a_i)_{i \in I}$ associe $S(a)$ est linéaire. Si $a_k = u_k + iv_k$ avec $u_k, v_k \in \mathbb{R}$, la famille $a = (a_i)_{i \in I}$ de \mathbb{C} est sommable ssi les familles $u = (u_i)_{i \in I}$ et $v = (v_i)_{i \in I}$ de \mathbb{R} le sont et on a alors $S(a) = S(u) + iS(v)$.

Proposition 12 Sommation par paquet. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille sommable, et soit $\{I_k : k \in K\}$ une partition de I . Alors

1. Pour tout $k \in K$, $(x_i)_{i \in I_k}$ est sommable et on note S_k sa somme.
2. La famille $(S_k)_{k \in K}$ est sommable et $\sum_{k \in K} S_k = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} u_i = \sum_{i \in I} u_i$.

Réciproquement, si pour tout $k \in K$, la famille $(x_i)_{i \in I_k}$ est sommable et si, en notant $T_k = \sum_{i \in I_k} |x_i|$, la famille $(T_k)_{k \in K}$ est sommable, alors la famille $(x_i)_{i \in I}$ est sommable.

Exemple 20 Si $I = (\mathbb{N}^*)^2$, alors la famille $(a_{i,j})_{(i,j) \in I}$ avec $a_{i,j} = \frac{1}{(i+j)^\alpha}$ est sommable si et seulement si $\alpha > 2$.

En effet, on note $I_k = \{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2 : i+j = k\}$. La famille $(I_k)_{k \geq 2}$ forme une partition de I .

$$T_k = S_k = \sum_{(i,j) \in I_k} a_{i,j} = \sum_{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2, i+j=k} \frac{1}{(i+j)^\alpha} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{k-1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{k^{\alpha-1}}.$$

On a $\sum_{k \geq 2} T_k < +\infty$ si et seulement si $\alpha > 2$.

Théorème 16 (Tonelli-Fubini pour les séries) Soit $(a_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ une famille de réels ou de complexes. Si

$$\sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} |a_{i,j}| < +\infty,$$

alors

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_{i,j}.$$

Exemple 21 Calculer

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}.$$

1.5.1 Produit de Cauchy

Si $a_k = \frac{1}{2^k}$, alors

$$\sum_{k \geq 0} a_k^2 = \frac{4}{3} \neq 4 = \left(\sum_{k \geq 0} a_k \right)^2.$$

Définition 8 Soient $\sum_{i \geq 0} a_i$ et $\sum_{j \geq 0} b_j$ deux séries. On appelle produit de Cauchy la série $\sum_{k \geq 0} c_k$ où $c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$

Une autre façon d'écrire le coefficient c_k est : $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$

Exemple 22 Si $a_k = b_k = \frac{1}{2^k}$, alors $c_k = \frac{k+1}{2^k}$.

Théorème 17 Si les séries $\sum_{i \geq 0} a_i$ et $\sum_{j \geq 0} b_j$ de nombres réels (ou complexes) sont absolument convergentes, alors la série produit

$$\sum_{k \geq 0} c_k = \sum_{k \geq 0} \left(\sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \right)$$

est absolument convergente et l'on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \right) \times \left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j \right).$$

Exemple 23 — Si $a_k = b_k = \frac{1}{2^k}$, alors $c_k = \frac{k+1}{2^k}$ et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{2^k} = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \right)^2 = 4.$$

— Soit $(a_i)_i$ une suite telle que la série $\sum_{i \geq 0} a_i$ converge absolument et soit $(b_j)_{j \geq 0}$ la suite définie par $b_j = \frac{1}{2^j}$. La série $\sum_{j \geq 0} b_j$ est absolument convergente. Notons

$$c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^k \frac{a_i}{2^{k-i}}.$$

Alors la série $\sum c_k$ converge absolument et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \right) \times \left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j \right) = 2 \sum_{i=0}^{+\infty} a_i.$$

— Si $a_i = b_i = \frac{(-1)^i}{\sqrt{i+1}}$, $i \geq 0$. Alors $\sum_{i \geq 1} a_i$ est convergente par le critère de Leibniz, mais pas absolument convergente. On a

$$c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i}{\sqrt{i+1}} \frac{(-1)^{k-i}}{\sqrt{k-i+1}} = (-1)^k \sum_{i=0}^k \frac{1}{\sqrt{(i+1)(k-i+1)}}$$

Or, pour $x \in \mathbb{R}$, $(x+1)(k-x+1) = -x^2 + kx + (k+1) \leq \frac{(k+2)^2}{4}$ (valeur au sommet de la parabole). D'où $\sqrt{(i+1)(k-i+1)} \leq \frac{(k+2)}{2}$. Ainsi

$$|c_k| = \sum_{i=0}^k \frac{1}{\sqrt{(i+1)(k-i+1)}} \geq \sum_{i=0}^k \frac{2}{k+2} = \frac{2(k+1)}{k+2} \rightarrow 2.$$

Donc le terme général c_k ne peut pas tendre 0, donc la série $\sum_{k \geq 1} c_k$ diverge.

— Pour tous $z, w \in \mathbb{C}$, on a

$$\left(\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{n \geq 0} \frac{w^n}{n!} \right) = \left(\sum_{n \geq 0} \frac{(z+w)^n}{n!} \right).$$

Chapitre 2

Suites et séries de fonctions

Dans tout ce chapitre, pour tout entier naturel n , f_n sera une fonction définie sur un même sous-ensemble connexe D de \mathbb{R} ou \mathbb{C} à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Rappelons qu'un ensemble connexe de \mathbb{R} est un intervalle.

2.1 Suites de fonctions

2.1.1 Convergence simple, uniforme

Définition 1 Une suite de fonctions $(f_n)_n$ de D dans \mathbb{K} est une application de \mathbb{N} dans l'ensemble des applications de D dans \mathbb{K} .

Définition 2 Soient f_n et f des applications de D dans \mathbb{K} . On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur D ssi pour tout $x \in D$, la suite $(f_n(x))_n$ admet $f(x)$ pour limite dans \mathbb{K} , i.e. ssi

$$\forall x \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists N(= N(x)) \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Exemple 1 Si $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $f_n(x) = x^n$, alors la suite $(f_n)_n$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction f définie par $f(x) = 0$ si $x \in [0, 1[$, $f(1) = 1$.

Définition 3 Soient f_n et f des applications de D dans \mathbb{K} . On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D ssi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$, i.e. ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in D, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Proposition 1 La convergence uniforme entraîne la convergence simple. La réciproque est fausse.

Exemple 2 Si $f_n, f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sont définies par $f_n(x) = x^n$ et $f(x) = 0$ si $x \in [0, 1[$, $f(1) = 1$, alors $(f_n)_n$ converge simplement mais pas uniformément vers f sur $[0, 1]$. En revanche $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur tout intervalle $[0, a]$ si $0 < a < 1$.

Remarque 1 Soient f_n et f des applications de D dans \mathbb{K} . Pour montrer que $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers f sur D , il suffit de trouver une suite de points x_n de D pour laquelle la suite numérique $(f_n(x_n) - f(x_n))_n$ ne converge pas vers 0.

Exemple 3 Soient $f_n, f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $f_n(x) = x^n$ et $f(x) = 0$ si $x \in [0, 1[$, $f(1) = 1$. Posons $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, alors

$$f_n(x_n) - f(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \sim \frac{1}{e}$$

donc $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0, 1]$.

Théorème 1 (Critère de Cauchy uniforme) Soient f_n des applications de D dans \mathbb{K} . La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur D ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N, \sup_{x \in D} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

Exemple 4 Soient $f_n, f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $f_n(x) = x^n$ et $f(x) = 0$ si $x \in [0, 1[$, $f(1) = 1$. On a

$$\sup_{x \in [0, 1]} |x^n - x^{2n}| = \sup_{y \in [0, 1]} |y - y^2| = \frac{1}{4}$$

donc $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0, 1]$.

2.1.2 Convergence uniforme et échange de limites

Théorème 2 (Convergence uniforme et continuité) Soient $(f_n)_n$ une suite de fonctions de D dans \mathbb{K} et $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ telles que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur D . Soit $a \in D$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a alors f est continue en a , autrement dit une limite uniforme de fonctions continues est continue.

Exemple 5 Ce théorème peut être utilisé pour montrer la continuité d'une limite uniforme mais aussi pour montrer que la convergence d'une suite de fonctions n'est pas uniforme.

Soient $f_n, f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $f_n(x) = x^n$ et $f(x) = 0$ si $x \in [0, 1[$, $f(1) = 1$.

Pour $0 < a < 1$, les fonction f_n sont continues sur $[0, a]$ et $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[0, a]$ donc f est continue sur $[0, a]$.

En revanche f n'est pas continue sur $[0, 1]$ alors que les f_n le sont, ce qui suffit à montrer que la convergence de $(f_n)_n$ vers f sur $[0, 1]$ n'est pas uniforme.

Théorème 3 (Interversion de limites) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de D dans \mathbb{K} . Soit a un point de $\overline{\mathbb{R}}$ (ou \mathbb{C}) adhérent à D tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admette une limite finie b_n en a . Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ telle que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D . Alors la suite numérique $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite finie en $+\infty$, f admet une limite en a et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{x \rightarrow a, x \in D} f(x)$$

i.e.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a, x \in D} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a, x \in D} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Exemple 6 — On a besoin de la convergence uniforme !

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow 1^-} x^n = 1 \quad \text{mais} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0.$$

— Si $0 \leq a < 1$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow a^-} x^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0 = \lim_{x \rightarrow a^-} \lim_{n \rightarrow +\infty} x^n.$$

Théorème 4 (Limite et intégrale) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues du segment $[a, b]$ dans \mathbb{K} . Soit $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ telle que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$. Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Remarque 2 Une définition propre de cette intégrale sera donnée au chapitre "Intégration".

Exemple 7 C'est faux en général si la convergence est simple. Si $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $f_n(x) = nx(1 - x^2)^n$, alors $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$ mais

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

Théorème 5 (Convergence uniforme et dérivabilité) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions d'un intervalle I de \mathbb{R} dans \mathbb{K} dérivables sur I . On suppose que $(f'_n)_n$ converge uniformément vers une fonction g sur tout segment inclus dans I et qu'il existe un point x_0 de I tel que $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ sur tout segment de I . De plus f est dérivable sur I et $f' = g$.

Remarque 3 Si on suppose les f_n de classe C^1 sur I , alors f est de classe C^1 .

Exemple 8 Si $f_n(t) = \frac{\sin(nt)}{\sqrt{n}}$ est définie sur $[0, \pi/2]$, alors la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0, \pi/2]$, les f_n sont dérivables sur $[0, \pi/2]$ et $f'_n(t) = \sqrt{n} \cos(nt)$. Si $t \neq 0$, la suite $(f'_n(t))_n$ ne converge pas.

2.2 Séries de fonctions

2.2.1 Notions de convergences

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de D dans \mathbb{K} . On définit la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$S_n : \begin{array}{ccc} D & \rightarrow & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \sum_{k=0}^n f_k(x) \end{array}$$

et la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ associée dont on notera S la somme lorsqu'elle existe.

Définition 4 On dit que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge simplement (resp. uniformément) sur D si la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles converge simplement (resp. uniformément) sur D . En cas de convergence, la fonction somme de la série S est définie comme la limite simple de la suite $(S_n)_n$ et on écrit $S = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$. On dit que la série de fonction $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge absolument sur D si la série de fonctions $\sum |f_n|$ converge simplement sur D .

Exemple 9 Si $f_n(x) = x^n$, alors $S_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ si $x \neq 1$ et $S_n(1) = n+1$. La série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} x^n$ converge simplement vers $S(x) = \frac{1}{1-x}$ sur $] -1, 1[$ (ou $D(0, 1)$). La convergence est absolue sur $] -1, 1[$ (ou $D(0, 1)$) mais non uniforme (par exemple, si $x_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$ alors $(S_n(x_n) - S(x_n))_n$ ne converge pas vers 0). En revanche, la série converge uniformément sur $[-a, a]$ ou $D(0, a)$ si $0 < a < 1$.

Proposition 2 Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge simplement (resp. uniformément) sur D , alors la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement (resp. uniformément) vers la fonction nulle sur D .

Exemple 10 La suite de fonctions $(x^n)_n$ ne converge pas uniformément vers 0 sur $] -1, 1[$ donc $\sum_{n \geq 0} x^n$ ne converge pas uniformément sur $] -1, 1[$.

Proposition 3 La convergence uniforme (resp. absolue) entraîne la convergence simple.

Proposition 4 Si $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur D alors on définit la suite des restes $(R_n)_n$ par

$$R_n = S - S_n : \begin{array}{ccc} I & \rightarrow & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \end{array} .$$

La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur D ssi la suite des restes $(R_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur D .

Proposition 5 Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions à valeurs réelles. Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0 et si pour tout $x \in D$, la suite $(f_n(x))_n$ est décroissante alors $\sum (-1)^n f_n$ converge uniformément sur D vers une fonction S et on a

$$\sum_{x \in D} |R_n(x)| = \sup_{x \in D} |(S - S_n)(x)| \leq \sup_{x \in D} |f_{n+1}(x)|.$$

Exemple 11 $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n+x}$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

Théorème 6 (Critère de Cauchy uniforme) La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur D ssi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $m > n \geq N$, on ait

$$\sup_{x \in D} \left| \sum_{k=n+1}^m f_k(x) \right| \leq \varepsilon.$$

Exemple 12 La série $\sum_{n \geq 0} x^n$ ne converge pas uniformément sur $] -1, 1[$ car

$$|S_{2n}(x) - S_n(x)| = \left| \frac{x}{1-x} \right| |x^n(1-x^n)|$$

et $|S_{2n}(2^{-1/n}) - S_n(2^{-1/n})| = \frac{1}{4} \frac{2^{-1/n}}{1-2^{-1/n}}$ ne tend pas vers 0.

Définition 5 On dit que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur D si la série numérique $\sum_n \sup_{x \in D} |f_n(x)|$ converge.

Pour montrer qu'une série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur D , on majore $|f_n(x)|$ pour tout $n \geq 0$ et tout $x \in D$ par un réel b_n indépendant de $x \in D$ tel que $\sum_{n \geq 0} b_n$ converge.

Exemple 13 Pour $0 < a < 1$, la série $\sum_{n \geq 0} x^n$ converge normalement sur $[-a, a]$ et $D(0, a)$ car $\sum_{n \geq 0} a^n$ converge.

Proposition 6 La convergence normale sur D implique la convergence uniforme sur D et la convergence absolue en tout point de D .

Exemple 14 La série $\sum_{n \geq 0} \frac{\sin(nx) \cos(-n^2x)}{n(n+1)}$ converge normalement sur \mathbb{R} .

Théorème 7 (Critère d'Abel uniforme) Soit $\sum_n f_n$ une série de fonctions avec $f_n : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour $x \in I$, $f_n(x) = \alpha_n(x)u_n(x)$ avec :

1. pour tout $x \in I$, la suite $(\alpha_k(x))_{k \geq 0}$ est une suite décroissante de réels positifs,
2. la suite de fonctions $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur I ,
3. il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x \in I} \left| \sum_{k=0}^n u_k(x) \right| \leq M.$$

Alors la série de fonction $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur I .

Démonstration Posons pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, $U_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x)$. Pour $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n < m$, pour $x \in I$, on a

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^m \alpha_k(x)u_k(x) \right| &= \left| \sum_{k=n+1}^m \alpha_k(x)(U_k(x) - U_{k-1}(x)) \right| \\ &= \left| \sum_{k=n+1}^m \alpha_k(x)U_k(x) - \sum_{k=n+1}^m \alpha_k(x)U_{k-1}(x) \right| \\ &= \left| \sum_{k=n+1}^m \alpha_k(x)U_k(x) - \sum_{k=n}^{m-1} \alpha_{k+1}(x)U_k(x) \right| \\ &= \left| \sum_{k=n}^m (\alpha_k(x) - \alpha_{k+1}(x))U_k(x) - \alpha_n(x)U_n(x) + \alpha_{m+1}(x)U_m(x) \right| \\ &\leq \sum_{k=n}^m |(\alpha_k(x) - \alpha_{k+1}(x))U_k(x)| + |\alpha_n(x)U_n(x)| + |\alpha_{m+1}(x)U_m(x)| \\ &\leq M \sum_{k=n}^m |\alpha_k(x) - \alpha_{k+1}(x)| + M|\alpha_n(x)| + M|\alpha_{m+1}(x)| \\ &= M \sum_{k=n}^m (\alpha_k(x) - \alpha_{k+1}(x)) + M\alpha_n(x) + M\alpha_{m+1}(x) \\ &= M(\alpha_n(x) - \alpha_{m+1}(x)) + \alpha_n(x) + \alpha_{m+1}(x) \\ &= 2M\alpha_n(x), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé successivement la majoration $|U_n(x)| \leq M$, puis la décroissance et la positivité de la suite $(\alpha_k(x))_k$.

Comme la suite $(\alpha_k(x))_k$ converge uniformément vers 0, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in I$, pour tout $n \geq N$, $\alpha_n(x) \leq \varepsilon/(2M)$. Ainsi pour $m > n \geq N$ et pour tout $x \in I$, on a $\left| \sum_{k=n+1}^m \alpha_k(x)u_k(x) \right| \leq \varepsilon$ et d'après le critère de Cauchy uniforme, la série $\sum_n f_n$ converge uniformément.

Exemple 15 La série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{inx}}{n}$ converge uniformément sur tout compact de $D(0, 1)$.

2.2.2 Régularité de la somme

Théorème 8 (Convergence uniforme et continuité) Soient $a \in D$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de D dans \mathbb{K} continues en a . Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur D , alors la fonction somme S est continue en a .

Exemple 16 $\exp(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est continue sur \mathbb{R} .

Théorème 9 (Interversion de limites) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de D dans \mathbb{K} . Soit a un point de \mathbb{R} ou \mathbb{C} adhérent à D tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admette une limite finie b_n en a . Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur D , alors la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ converge et la fonction somme S admet $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ pour limite en a , i.e.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \rightarrow a, x \in D} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a, x \in D} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

Exemple 17

Soit $(f_n)_{n \geq 2}$ la suite de fonctions définie par

$$f_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(nx)}.$$

Alors $\sum_{n \geq 2} f_n(x)$ converge uniformément vers une fonction S sur $[1, +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} S(x) = 0$.

Théorème 10 (Limite et intégrale) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues du segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$ dans \mathbb{K} . Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$, alors la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} \int_a^b f_n(x) dx$ converge et

$$\sum_{n \geq 0} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b S(x) dx.$$

Exemple 18 Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définie par $f_n(x) = x^n$. Soit $a \in]0, 1[$. Alors

$$\ln(1+a) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{a^n}{n}.$$

Théorème 11 (Convergence uniforme et dérivabilité) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions d'un intervalle I de \mathbb{R} dans \mathbb{K} de classe C^1 sur I . On suppose que $\sum_{n \geq 0} f'_n$ converge uniformément sur I et qu'il existe un point x_0 de I tel que $\sum_{n \geq 0} f_n(x_0)$ converge. Alors $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur I , la somme est de classe C^1 sur I et pour tout x dans I , $S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)$.

Exemple 19 Soit $z \in \mathbb{C}$, la fonction $e_z : t \mapsto e^{zt}$ est infiniment dérivable sur \mathbb{R} et $e'_z(t) = ze_z(t)$.

Chapitre 3

Intégration

3.1 Définition de l'intégrale de Cauchy, propriétés fondamentales

3.1.1 Introduction

On cherche à définir correctement la notion d'aire d'un domaine borné du plan, et donc la notion d'intégrale. La notion d'aire satisfait aux propriétés suivantes :

1. la positivité (si $D_1 \subset D_2$ alors $A(D_1) \leq A(D_2)$) ;
2. l'additivité disjointe (si $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ alors $A(D_1 \cup D_2) = A(D_1) + A(D_2)$).

Grâce à ces deux propriétés, on peut toujours se ramener, dans le cas d'aires bornées, au calcul de l'aire d'un domaine limité par les droites verticales d'abscisse a et b , l'axe des abscisses et la courbe $y = f(x)$ où f est une fonction définie sur un segment de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} . On cherche donc à donner une définition de cette aire que l'on notera $I(f) = \int_a^b f(t)dt$ en se restreignant à certaines fonctions f pour lesquelles on pourra donner une définition de l'intégrale qui corresponde à la notion intuitive d'aire. En particulier, on cherchera à avoir les propriétés suivantes :

1. la linéarité : Pour $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions et $\lambda \in \mathbb{R}$, $I(f + g) = I(f) + I(g)$ et $I(\lambda f) = \lambda I(f)$;
2. la positivité : Si $f \leq g$, alors $I(f) \leq I(g)$;
3. la relation de Chasles : Si $a \leq c \leq b$, alors $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.

On généralise cette notion d'aire à la notion d'aire algébrique : les aires au dessus de l'axe des abscisses sont comptées positivement, celle qui sont au-dessous sont comptées négativement.

3.1.2 Intégrale des fonctions en escalier

On va commencer par définir l'intégrale des fonctions en escalier qui correspond à la notion intuitive d'aire et vérifiera bien ces trois propriétés.

Définition 1 Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On appelle subdivision de $[a, b]$ tout ensemble fini σ de points distincts de $[a, b]$ de la forme

$$\sigma = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\}.$$

On appelle pas de σ et on note $\tau(\sigma)$ le réel positif $\max\{x_i - x_{i-1}, i \in [1, n]\}$. Une fonction en escalier sur $[a, b]$ est une fonction pour laquelle il existe une subdivision $\sigma = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$ de $[a, b]$ telle que f est constante sur chaque intervalle ouvert $]x_{i-1}, x_i[$ ($i \in [1, n]$), i.e. pour tout $i \in [1, n]$, il existe $y_i \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y_i$ pour tout $x \in]x_{i-1}, x_i[$.

Proposition 1 L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Démonstration On montre que c'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de $[a, b]$ dans \mathbb{R} .

La stabilité par multiplication par un scalaire est claire.

Si f et g sont deux fonctions en escalier, on considère une subdivision adaptée à la fois à f et g . C'est alors une subdivision adaptée à $f + g$ et on montre aisément que $f + g$ est bien une fonction en escalier.

Définition 2 Si f est une fonction en escalier et $\sigma = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f , alors on définit l'intégrale de f par

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{j=1}^n y_j(x_j - x_{j-1}).$$

Proposition 2 L'application $(f \mapsto \int_a^b f dt)$ est linéaire sur l'ensemble des fonctions en escalier et vérifie la relation de positivité et la relation de Chasles.

3.1.3 Définition de l'intégrale des fonctions réglées

Proposition 3 Soit f une fonction bornée de $[a, b]$ dans \mathbb{R} telle qu'il existe une suite $(f_n)_n$ de fonctions en escalier sur $[a, b]$ qui converge uniformément sur $[a, b]$ vers f , alors la suite $\left(\int_a^b f_n(t)dt\right)_n$ converge et sa limite ne dépend pas de la suite $(f_n)_n$ choisie.

Démonstration. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions en escalier sur $[a, b]$ qui converge uniformément sur $[a, b]$ vers f . Soit $n, m \in \mathbb{N}$. La suite $f_n - f_m$ est en escalier sur $[a, b]$. L'intégrale $\int_a^b (f_n(t) - f_m(t))dt$ est donc bien définie et on a, par positivité de l'intégrale des fonctions en escalier :

$$\left| \int_a^b (f_n(t) - f_m(t))dt \right| \leq \int_a^b \sup_{u \in [a, b]} |f_n(u) - f_m(u)| dt = (b - a) \sup_{u \in [a, b]} |f_n(u) - f_m(u)|.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite de fonctions f_n converge uniformément sur $[a, b]$, elle vérifie le critère de Cauchy donc il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n, m \geq N$ on ait

$$\sup_{u \in [a, b]} |f_n(u) - f_m(u)| \leq \frac{1}{b - a} \varepsilon.$$

Ainsi, pour $n, m \geq N$ on a par linéarité de l'intégrale des fonctions en escalier :

$$\left| \int_a^b f_n(t)dt - \int_a^b f_m(t)dt \right| = \left| \int_a^b (f_n(t) - f_m(t))dt \right| \leq \varepsilon.$$

La suite $\left(\int_a^b f_n(t)dt\right)_n$ est donc une suite de Cauchy donc elle converge vers un réel ℓ . Supposons à présent que $(g_n)_n$ soit une autre suite de fonctions en escalier sur $[a, b]$ qui

converge uniformément vers f et notons ℓ' la limite de $\left(\int_a^b g_n(t)dt\right)_n$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n \geq N$ on ait

$$\sup_{u \in [a,b]} |f_n(u) - f(u)| \leq \frac{1}{2(b-a)}\varepsilon \quad \text{et} \quad \sup_{u \in [a,b]} |g_n(u) - f(u)| \leq \frac{1}{2(b-a)}\varepsilon,$$

donc $\sup_{u \in [a,b]} |f_n(u) - g_n(u)| \leq \frac{1}{(b-a)}\varepsilon$.

On a donc par linéarité et positivité de l'intégrale des fonctions en escalier, pour $n \geq N$

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(t)dt - \int_a^b g_n(t)dt \right| &= \left| \int_a^b (f_n(t) - g_n(t))dt \right| \\ &\leq \int_a^b \sup_{u \in [a,b]} |f_n(u) - g_n(u)|dt = (b-a) \sup_{u \in [a,b]} |f_n(u) - g_n(u)| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient $|\ell - \ell'| \leq \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien $\ell = \ell'$.

Définition 3 *L'intégrale de Cauchy de f , limite uniforme sur $[a, b]$ de la suite $(f_n)_n$ de fonctions en escalier, sur $[a, b]$ est définie par*

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t)dt.$$

Définition 4 *On appelle fonction réglée sur le segment $[a, b]$ toute fonction qui est limite uniforme de fonctions en escalier sur $[a, b]$. L'intégrale de Cauchy est définie sur l'ensemble des fonctions réglées.*

3.1.4 Premières propriétés de l'intégrale de Cauchy

Théorème 1 *L'intégrale de Cauchy des fonctions réglées vérifie les propriétés suivantes :*

1. *la linéarité : Pour f et g des fonctions réglées sur $[a, b]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $f + g$ et λf sont réglées et $I(f + g) = I(f) + I(g)$ et $I(\lambda f) = \lambda I(f)$;*
2. *la positivité : Si f et g sont des fonctions réglées sur $[a, b]$ et $f \leq g$, alors $I(f) \leq I(g)$;*
3. *la relation de Chasles : Si f est une fonction réglée sur $[a, b]$ et $a \leq c \leq b$, alors $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.*

Proposition 4 *Soit f une fonction réglée sur un segment $[a, b]$. Alors $|f|$ est réglée et $\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$.*

Démonstration. Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$, alors en utilisant $||f| - |f_n|| \leq |f - f_n|$, on obtient que $(|f_n|)_n$ est une suite de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers $|f|$ sur $[a, b]$ donc f réglée implique $|f|$ réglée. Comme de plus on a $f \leq |f|$ et $-f \leq |f|$, par linéarité et positivité de l'intégrale, on a $-\int_a^b f \leq \int_a^b |f|$ et $\int_a^b f \leq \int_a^b |f|$ donc $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$.

Corollaire 2 (Inégalité de la moyenne) *Si f est une fonction réglée, alors f est bornée sur $[a, b]$ et $\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq (b-a) \sup_{a \leq t \leq b} |f(t)|$.*

Démonstration. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_{x \in [a, b]} |f_N(x) - f(x)| \leq 1.$$

f_N est en escalier sur $[a, b]$ donc bornée et il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, $|f_N(x)| \leq M$. On a donc

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \leq 1 + M$$

et f est bornée.

L'inégalité découle de $\pm f \leq \sup |f(t)|$, de la positivité et de la linéarité de l'intégrale.

Définition 5 Soit f une fonction réglée sur $[a, b]$. Si $c, d \in [a, b]$ et $c > d$, on pose

$$\int_c^d f(x)dx = - \int_d^c f(x)dx.$$

La relation de Chasles est vérifiée avec cette nouvelle définition, ainsi que l'inégalité de la moyenne, i.e.

$$\left| \int_c^d f(t)dt \right| \leq |c - d| \sup_{d \leq t \leq c} |f(t)|.$$

3.2 Exemples de fonctions réglées

Définition 6 Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une application. La fonction f est uniformément continue sur I ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in I, |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Théorème 2 (Heine) Toute fonction continue sur un segment y est uniformément continue.

Démonstration On suppose par l'absurde que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$ mais pas uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, il existe $x, y \in [a, b]$ vérifiant $|x - y| < \eta$ et $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. En particulier, pour tout entier n positif, il existe $x_n, y_n \in [a, b]$ tels que $|x_n - y_n| < 1/n$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. La suite $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de $[a, b]$ donc elle admet une sous-suite convergente $(x_{\phi(n)})_n$ de limite notée $x \in [a, b]$. La suite $y_{\phi(n)}$ admet aussi une sous-suite convergente $(y_{\psi \circ \phi(n)})_n$ de limite notée $y \in [a, b]$. En tant que suite extraite de la suite $(x_{\phi(n)})_n$, la suite $(x_{\psi \circ \phi(n)})_n$ converge vers x . On a donc pour tout entier n , $|x_{\psi \circ \phi(n)} - y_{\psi \circ \phi(n)}| < 1/n$ et $|f(x_{\psi \circ \phi(n)}) - f(y_{\psi \circ \phi(n)})| \geq \varepsilon$. En faisant tendre n vers l'infini, on obtient $x = y$ et $f(x) \neq f(y)$, ce qui est absurde.

Définition 7 Soit I un intervalle de \mathbb{R} . On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue par morceaux sur I si pour tout segment $[a, b] \subset I$, il existe une subdivision $\sigma = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$ de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in [1, n]$, la restriction de f à l'intervalle ouvert $]x_{i-1}, x_i[$ est continue et prolongeable par continuité sur $[x_{i-1}, x_i]$, i.e. f est continue sur chaque intervalle ouvert $]x_{i-1}, x_i[$ et admet une limite à droite en tout x_i pour tout $i \in [0, n-1]$ et une limite à gauche en tout x_i pour tout $i \in [1, n]$.

Théorème 3 Les fonctions continues sur un segment sont réglées.

Démonstration Supposons que f est continue sur $[a, b]$.

Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f est uniformément continue sur $[a, b]$ donc il existe $\eta_n > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [a, b], |x - y| < \eta_n \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{1}{n}.$$

Soit $\sigma = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_{k_n} = b\}$ une subdivision de $[a, b]$ de pas $\tau(\sigma) < \eta_n$ et soient pour tout $i \in [1, k_n]$, un point ξ_i de $[x_{i-1}, x_i]$. Définissons

$$f_n(x) = \begin{cases} f(\xi_i) & \text{si } x \in]x_{i-1}, x_i[\\ f(x_i) & \text{si } x = x_i \end{cases}$$

Alors pour $x \notin \{x_i\}$, on a

$$|f(x) - f_n(x)| = |f(x) - f(\xi_i)| \leq \frac{1}{n},$$

et cette inégalité reste valable pour $x \in \{x_i\}$. Ainsi la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Si f est seulement continue par morceaux, on définit f_n par morceaux comme précédemment sur chaque morceau où f est continue.

Définition 8 Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et $\sigma = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$ une subdivision de $[a, b]$. On appelle somme de Riemann associée à f (et à σ) toute somme de la forme $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, avec pour tout $i \in [1, n]$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Proposition 5 Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour toute subdivision σ de pas $\tau(\sigma) < \alpha$, toute somme de Riemann associée à f et σ satisfait

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| < \varepsilon.$$

Autrement dit les sommes de Riemann associées à f convergent vers $\int_a^b f(x)dx$ lorsque le pas de la subdivision tend vers 0.

Démonstration Il suffit de reprendre la démonstration du théorème précédent et d'utiliser que la limite de l'intégrale des fonctions f_n est l'intégrale de f .

Corollaire 3 Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors les suites $(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(a + i\frac{b-a}{n}))_{n \geq 1}$ et $(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(a + i\frac{b-a}{n}))_{n \geq 1}$ convergent vers $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$, la valeur moyenne de f sur $[a, b]$.

En particulier, si f est continue sur $[0, 1]$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i-1}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx.$$

Exemple 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} = \ln(2).$$

Définition 9 Soit I un intervalle de \mathbb{R} . On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue par morceaux sur I si pour tout segment $[a, b] \subset I$, il existe une subdivision $\sigma = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$ de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in [1, n]$, la restriction de f à l'intervalle ouvert $]x_{i-1}, x_i[$ est continue et prolongeable par continuité sur $[x_{i-1}, x_i]$, i.e. f est continue sur chaque intervalle ouvert $]x_{i-1}, x_i[$ et admet une limite à droite en tout x_i pour tout $i \in [0, n-1]$ et une limite à gauche en tout x_i pour tout $i \in [1, n]$.

Théorème 4 Les fonctions continues par morceaux sur un segment sont réglées.

Démonstration Si f est seulement continue par morceaux, on définit f_n par morceaux comme précédemment sur chaque intervalle où f est continue.

3.3 Propriétés de l'intégrale de Cauchy

3.3.1 Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral et conséquences

Théorème 5 (Théorème fondamental du calcul intégral) Soit f une fonction réglée sur le segment $[a, b]$, soit $c \in [a, b]$. Alors la fonction F définie sur $[a, b]$ par $F(x) = \int_c^x f(t)dt$ est continue sur $[a, b]$ et est dérivable en tout point de continuité x de f et on a alors $F'(x) = f(x)$.

Démonstration. Remarquons d'abord qu'en tant que limite uniforme des fonctions bornées, une fonction réglée est une fonction bornée. Si $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, par positivité de l'intégrale, on a pour $h \neq 0$,

$$m_x(h) = \inf_{t \in [x, x+h]} f(t) \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq M_x(h) = \sup_{t \in [x, x+h]} f(t).$$

En particulier, F est continue. De plus, si f est continue en x , alors en faisant tendre h vers 0, on obtient la dérivabilité de F en x et $F'(x) = f(x)$.

Corollaire 4 1. Toute fonction continue sur $[a, b]$ possède une primitive dans cet intervalle.

2. **Formule de Newton-Leibniz :** pour toute primitive F de f sur $[a, b]$, on a

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

En particulier, si f est de classe C^1 sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

Proposition 6 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue **positive** sur $[a, b]$. Si $\int_a^b f(t)dt = 0$, alors f est identiquement nulle sur $[a, b]$.

Démonstration. On définit F sur $[a, b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. F est de classe C^1 sur $[a, b]$ et $F'(x) = f(x) \geq 0$ donc F est croissante. Comme $F(a) = F(b) = 0$, F est constante égale à 0 et donc $F' = f$ aussi.

Théorème 6 (Intégration par parties) Soient u et v deux fonctions de classe C^1 définies sur $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

Démonstration. On a $(uv)' = u'v + v'u$ est une fonction continue donc

$$[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b (uv)'(x)dx = \int_a^b u'(x)v(x) + \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

Exemple 2 Calculer une primitive de $\ln(x)$ sur \mathbb{R}^{+*} .

Théorème 7 (Changement de variables) Soit φ une fonction de $[\alpha, \beta]$ dans \mathbb{R} de classe C^1 . Soit f une fonction continue sur $[a, b] = \varphi([\alpha, \beta])$. Alors

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f \circ \varphi(t)\varphi'(t)dt.$$

Démonstration. Soit F une primitive de f sur $[a, b]$. Elle est de classe C^1 sur $[a, b]$ donc $F \circ \varphi$ est de classe C^1 sur $[\alpha, \beta]$. On a pour $t \in [\alpha, \beta]$

$$(F \circ \varphi)'(t) = f \circ \varphi(t)\varphi'(t)$$

donc

$$\int_{\alpha}^{\beta} f \circ \varphi(t)\varphi'(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} (F \circ \varphi)'(t)dt = (F \circ \varphi)(\beta) - (F \circ \varphi)(\alpha) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx.$$

Exemple 3 Pour tout fonction continue sur $[0, 1]$, $\int_0^{\pi} f(\sin t) \cos t dt = 0$.

3.3.2 Formules de Taylor

Proposition 7 Soit f une fonction continue sur I contenant a . Supposons que f admette un DL à l'ordre n en a de la forme

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Alors toute primitive F de f admet un DL à l'ordre $n+1$ en a donné par

$$F(x) = F(a) + \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} (x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1}).$$

Démonstration. Si $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x-a)^k + (x-a)^n \epsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow a} \epsilon(x) = 0$, alors

$$\begin{aligned} F(x) - F(a) &= \int_a^x f(t)dt = \sum_{k=0}^n a_k \int_a^x (t-a)^k dt + \int_a^x (t-a)^n \epsilon(t)dt \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} (x-a)^{k+1} + (x-a)^{n+1} h(x) \end{aligned}$$

avec

$$h(x) = \frac{1}{(x-a)^{n+1}} \int_a^x (t-a)^n \epsilon(t) dt.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$ tel que $|\epsilon(t)| \leq \varepsilon$ pour $|t-a| \leq \alpha$. On a alors pour $|x-a| \leq \alpha$,

$$|h(x)| \leq \frac{1}{|x-a|^{n+1}} \varepsilon \left| \int_a^x (t-a)^n dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{n+1} \leq \varepsilon.$$

Théorème 8 (Formule de Taylor-Young) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction définie sur un intervalle I contenant a . Si f admet des dérivées jusqu'à l'ordre n sur I , la fonction f admet un DL à l'ordre n en a donné par

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Démonstration. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Si $n = 1$, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) + o(1)$ par définition de la dérivée en a .

Si la propriété est vraie au rang $n \geq 1$ et f est $n+1$ fois dérivable, on applique la propriété au rang n à f' qui est n fois dérivable. On a donc

$$f'(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

et en appliquant la propriété précédente

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} (x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1}),$$

ce qui est la propriété au rang $n+1$.

Théorème 9 (Formule de Taylor avec reste intégral) Soit f de classe C^{n+1} sur I contenant a . Alors pour tout $x \in I$, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

Démonstration. Si f est de classe C^1 sur I , alors $\int_a^x f'(t) dt = f(x) - f(a)$, ce qui est la formule au rang 0.

Si la propriété est vraie au rang n pour un certain $n \geq 0$, alors si f est de classe C^{n+2} sur I , on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

Comme $(t \mapsto (x-t)^n)$ et $f^{(n+1)}$ sont de classe C^1 , alors en intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt &= \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(t) \right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} f^{(n+2)}(t) dt \\ &= \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} f^{(n+2)}(t) dt. \end{aligned}$$

3.4 Compléments

Théorème 10 (Première formule de la moyenne) Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions réglées. On suppose f continue et g positive sur $[a, b]$. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que l'on ait

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

Démonstration. Si $\int_a^b g(x)dx = 0$, alors g est indumentiquement nulle car g est continue et positive. Sinon, on a

$$\inf_{x \in [a, b]} f(x) \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \sup_{x \in [a, b]} f(x) \int_a^b g(x)dx$$

et par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a, b]$ tel que $\frac{1}{\int_a^b g(x)dx} \int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)$.

Remarque 1 La positivité de g est indispensable. Si $f(x) = g(x) = x$ et $[a, b] = [-1, 1]$, on a

$$\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \int_{-1}^1 g(x)dx = 0.$$

Exemple 4 Calculer $\lim_{n \rightarrow 0} u_n$ avec $u_n = n \int_{1-1/n}^1 x^n \arctan x dx$.

Théorème 11 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions réglées. Alors on a l'inégalité

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left(\int_a^b f(x)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b g(x)^2 dx \right)^{1/2}.$$

Démonstration. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$0 \leq \int_a^b (\lambda f(x) + g(x))^2 dx = \lambda^2 \int_a^b f(x)^2 dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g(x)^2 dx.$$

Ce polynôme en λ est positif donc ne change pas de signe et donc son discriminant est négatif ou nul, ce qui donne la formule annoncée.

Théorème 12 (Inégalité de Minkowski) Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions réglées. Alors on a l'inégalité

$$\left(\int_a^b (f(x) + g(x))^2 dx \right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b f(x)^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_a^b g(x)^2 dx \right)^{1/2}.$$

Démonstration. On a en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) + g(x))^2 dx &= \int_a^b f(x)^2 dx + 2 \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g(x)^2 dx \\ &\leq \int_a^b f(x)^2 dx + 2 \left(\int_a^b f(x)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b g(x)^2 dx \right)^{1/2} + \int_a^b g(x)^2 dx \\ &= \left[\left(\int_a^b f(x)^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_a^b g(x)^2 dx \right)^{1/2} \right]^2. \end{aligned}$$

3.5 Échange de limite et intégrale

Théorème 13 (Limite et intégrale) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions réglées du segment $[a, b]$ dans \mathbb{K} . Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ telle que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$. Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Démonstration. f est continue en tant que limite uniforme d'une suite de fonctions continues. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$, on ait $\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. On a alors par linéarité puis positivité de l'intégrale,

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq (b - a)\varepsilon$$

et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.

Théorème 14 (Échange somme et intégrale) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions réglées du segment $[a, b]$ dans \mathbb{K} . Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$, alors la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} \int_a^b f_n(x) dx$ converge et

$$\sum_{n \geq 0} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b S(x) dx.$$

Démonstration. On applique le théorème précédent à $(S_n)_n$ la suite des sommes partielles.

Chapitre 4

Intégrales impropres

4.1 Définitions et premières propriétés

Nous allons apprendre ici à calculer les intégrales de domaines non bornés, soit parce que l'intervalle d'intégration est infini (allant jusqu'à $+\infty$ ou $-\infty$), soit parce que la fonction à intégrer tend vers l'infini aux bornes de l'intervalle.

Considérons par exemple la fonction f qui à $t \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ associe $f(t) = \frac{\sin |t|}{|t|^{\frac{3}{2}}}$.

Comment donner un sens à l'intégrale de f sur \mathbb{R} ?

- On commence d'abord par identifier les points potentiellement problématiques, soit $+\infty$, soit $-\infty$ d'une part, et d'autre part le ou les points au voisinage desquels la fonction n'est pas bornée ($t = 0$ dans notre exemple). Ailleurs, sur \mathbb{R}^{+*} , la fonction est continue donc réglée et donc intégrable sur tout compact (on dit localement intégrable).
- On découpe ensuite chaque intervalle d'intégration en autant d'intervalles qu'il faut pour que chacun d'eux ne contienne qu'un seul point potentiellement problématique, placé à l'une des deux bornes.
- Nous souhaitons une définition qui respecte la relation de Chasles. Ainsi l'intégrale sur l'intervalle complet est la somme des intégrales sur les intervalles du découpage.
- Dans l'exemple de la fonction $f(t) = \frac{\sin |t|}{|t|^{\frac{3}{2}}}$ ci-dessus, il faut découper les deux intervalles de définition $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ en 4 sous-intervalles : 2 pour isoler $-\infty$ et $+\infty$, et 2 autres pour le point 0.
- On pourra écrire pour cet exemple :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^{-1} f(t) dt + \int_{-1}^0 f(t) dt + \int_0^1 f(t) dt + \int_1^{+\infty} f(t) dt .$$

- Le seul but est d'isoler les difficultés : les choix de -1 et 1 comme points de découpage sont arbitraires (par exemple -3 et 10 auraient convenu tout aussi bien).

4.1.1 Convergence/divergence

Par ce découpage, et par changement de variable $t \mapsto -t$, on se ramène à des intégrales sur $[a, b[$ avec $b = +\infty$ ou f non bornée en $b \in \mathbb{R}$ et f localement intégrable sur $[a, b[$ c'est à dire (pour nous) réglée sur tout intervalle $[a, c]$ inclu dans $[a, b[$.

Nous devons donc définir une intégrale, appelée intégrale impropre, dans ce cas.

Définition 10 Soit f une fonction localement intégrable sur $[a, b[$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge si la limite à gauche, lorsque x tend vers b , de la primitive $\int_a^x f(t) dt$ existe et est finie. Si c'est le cas, on pose :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt. \quad (4.1)$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale diverge.

Remarque 2 Observons que cette définition dans le cas $b \in \mathbb{R}$ est cohérente avec l'intégrale d'une fonction qui serait réglée sur $[a, b]$ tout entier (au lieu de $[a, b[$). On sait que la fonction $(x \mapsto \int_a^x f(t) dt)$ est une fonction continue. Par conséquent, l'intégrale usuelle $\int_a^b f(t) dt$ est aussi la limite de $\int_a^x f(t) dt$ (lorsque $x \rightarrow b^-$). Dans ce cas, les deux intégrales coïncident.

Exemple 5 Exemple fondamental : intégrales de Riemann

1. L'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \quad \text{converge} \Leftrightarrow \alpha > 1.$$

En effet, soit $X \geq 1$. On a pour $\alpha \neq 1$

$$\begin{aligned} \int_1^X \frac{1}{t^\alpha} dt &= \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{1-\alpha} \right]_1^X \\ &= \frac{X^{-\alpha+1} - 1}{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Cette dernière quantité admet une limite finie lorsque $X \rightarrow \infty$ si et seulement si $\alpha > 1$. Pour $\alpha = 1$, on a

$$\begin{aligned} \int_1^X \frac{1}{t} dt &= [\ln t]_1^X \\ &= \ln X \end{aligned}$$

qui diverge vers $+\infty$.

2. L'intégrale

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt \quad \text{converge} \Leftrightarrow \alpha < 1.$$

En effet, soit $0 < x < 1$. On a pour $\alpha \neq 1$

$$\begin{aligned} \int_x^1 \frac{1}{t^\alpha} dt &= \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{1-\alpha} \right]_x^1 \\ &= \frac{1 - x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Cette dernière quantité admet une limite finie lorsque $x \rightarrow 0$ si et seulement si $\alpha < 1$. Pour $\alpha = 1$, on a

$$\begin{aligned} \int_x^1 \frac{1}{t} dt &= [\ln t]_x^1 \\ &= -\ln x \end{aligned}$$

qui diverge vers $+\infty$.

4.1.2 Propriétés fondamentales

Proposition 8 (Relation de Chasles) Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable et soit $a' \in [a, b[$. Alors les intégrales impropres $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_{a'}^b f(t) dt$ sont de même nature. Si elles convergent, alors $\int_a^b f(t) dt = \int_a^{a'} f(t) dt + \int_{a'}^b f(t) dt$.

Proposition 9 (Linéarité de l'intégrale) Soient f et g deux fonctions localement intégrables sur $[a, b[$, et λ, μ deux réels. Si les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ convergent, alors $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt$ converge et

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt.$$

Exemple 6 Attention : il est possible de trouver deux fonctions f, g telles que $\int_a^b (f + g)$ converge, sans que $\int_a^b f$, ni $\int_a^b g$ convergent.

Proposition 10 (Positivité de l'intégrale) Soient $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions localement intégrables, ayant une intégrale convergente. Si $f \leq g$, alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.

En particulier, l'intégrale (convergente) d'une fonction positive est positive : Si $f \geq 0$ alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.

Proposition 11 Soit $\varphi : [\alpha, \beta[\rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 strictement croissante sur $[\alpha, \beta[$. Soit $b = \lim_{x \rightarrow \beta} \varphi(x)$ et $a = \varphi(\alpha)$. Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une application localement intégrable. Alors les intégrales $\int_a^b f(x) dx$ et $\int_\alpha^\beta f \circ \varphi(t) \varphi'(t) dt$ sont de même nature et si elles admettent une limite dans \mathbb{R} , on a

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f \circ \varphi(t) \varphi'(t) dt.$$

Démonstration Soit $(\beta_n)_n$ une suite de $[\alpha, \beta[$ tendant vers β et $b_n = \varphi(\beta_n)$. Alors $(b_n)_n$ converge vers b et par le théorème de changement de variable pour les intégrales, on a

$$\int_a^{b_n} f(x) dx = \int_\alpha^{\beta_n} f \circ \varphi(t) \varphi'(t) dt,$$

ce qui donne le résultat en passant à la limite.

4.1.3 Intégrales doublement impropres

Définition 11 Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$. Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge s'il existe $c \in]a, b[$ tel que les deux intégrales impropres $\int_a^c f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ convergent. La valeur de cette intégrale doublement impropre est alors

$$\int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

Les relations de Chasles impliquent que la nature et la valeur de cette intégrale doublement impropre ne dépendent pas du choix de c , avec $a < c < b$.

Exemple 7 1. **Attention !** Si une des deux intégrales $\int_a^c f(t) dt$ ou bien $\int_c^b f(t) dt$ diverge, alors $\int_a^b f(t) dt$ diverge. Prenons l'exemple de $\int_{-x}^{+x} t dt$ qui vaut toujours 0, pourtant $\int_{-\infty}^{+\infty} t dt$ diverge !

2. L'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t dt}{(1+t^2)^2}$$

converge et vaut 0.

4.1.4 Critère de Cauchy, convergence absolue

Rappelons d'abord le critère de Cauchy pour les limites.

Rappel : Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$. Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ existe et est finie si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists M \geq a \quad (u, v \geq M \implies |f(u) - f(v)| < \epsilon).$$

Théorème 15 (Critère de Cauchy) Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable. L'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists M \geq a \quad \left(u, v \geq M \implies \left| \int_u^v f(t) dt \right| < \epsilon \right).$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le rappel ci-dessus à la fonction $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ et en notant que $|F(u) - F(v)| = \left| \int_u^v f(t) dt \right|$.

Définition 12 Soit f une fonction localement intégrable sur $[a, b[$. On dit que $\int_a^b f(t) dt$ est absolument convergente si $\int_a^b |f(t)| dt$ converge.

Théorème 16 Si l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Démonstration Comme pour les séries, c'est une conséquence du critère de Cauchy (théorème 15) appliqué à $|f|$, puis à f .

Comme $\int_a^{+\infty} |f(t)| dt$ converge alors par le critère de Cauchy (sens direct) :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists M \geq a \quad \left(u, v \geq M \implies \int_u^v |f(t)| dt < \epsilon \right).$$

Mais comme

$$\left| \int_u^v f(t) dt \right| \leq \int_u^v |f(t)| dt < \epsilon$$

alors par le critère de Cauchy (sens réciproque), $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.

Exemple 8 1. L'intégrale

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt \quad \text{est absolument convergente,}$$

donc convergente.

2. *L'intégrale*

$$\int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{t}}{\sqrt{t}} dt \quad \text{est absolument convergente,}$$

donc convergente.

4.2 Fonctions positives

Rappelons que, par définition,

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt.$$

Observons que si la fonction f est positive, alors la primitive $\int_a^x f(t) dt$ est une fonction croissante de x (car sa dérivée est $f(x)$). Quand x tend vers b^- , ou bien $\int_a^x f(t) dt$ est bornée, et l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge, ou bien $\int_a^x f(t) dt$ tend vers $+\infty$.

Théorème 17 *Soient f et g deux fonctions positives et localement intégrables sur $[a, b]$. Supposons que f soit majorée par g au voisinage de b .*

1. *Si $\int_a^b g(t) dt$ converge alors $\int_a^b f(t) dt$ converge et dans ce cas $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.*
2. *Si $\int_a^b f(t) dt$ diverge alors $\int_a^b g(t) dt$ diverge.*

Exemple 9 1. *Montrer que l'intégrale*

$$\int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt \quad \text{converge,}$$

quel que soit le réel α .

2. *Pour tout réel α , l'intégrale*

$$\int_0^1 \frac{(-\ln t)^\alpha}{\sqrt{t}} dt \quad \text{converge.}$$

Exemple 10 *L'intégrale de Bertrand*

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} dt$$

converge ssi $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Théorème 18 (Théorème des équivalents) *Soient f et g deux fonctions localement intégrables et positives sur $[a, b]$. Supposons qu'elles soient équivalentes au voisinage de b^- . Alors l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si $\int_a^b g(t) dt$ converge.*

- *Si elles convergent, alors $\int_a^b f(t) dt \sim_{b^-} \int_a^b g(t) dt$;*
- *Si elles divergent, alors $\int_a^b f(t) dt \sim_{b^-} \int_a^b g(t) dt$.*

Attention : il est important que f et g soient positives !

Démonstration

Il existe $x_0 \in [a, b]$ et pour tout $t \in [x_0, b]$, $\frac{1}{2}g(t) \leq f(t) \leq 2g(t)$ donc le théorème de comparaison permet démontrer que les intégrales sont de même nature.

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $x_0 \in [a, b]$ tel et pour tout $t \in [x_0, b]$, $(1 - \varepsilon)g(t) \leq f(t) \leq (1 + \varepsilon)g(t)$. Alors

— si les intégrales convergent alors pour tout $x \in [x_0, b[$, on a

$$(1 - \varepsilon) \int_x^b g(t) dt \leq \int_x^b f(t) dt \leq (1 + \varepsilon) \int_x^b g(t) dt$$

d'où

$$\left| \int_x^b f(t) dt - \int_x^b g(t) dt \right| \leq \varepsilon \int_x^b g(t) dt,$$

ce qui prouve que $\int_x^b f(t) dt \sim_{b-} \int_x^b g(t) dt$;

— si les intégrales divergent alors $\lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x g(t) dt = +\infty$ donc il existe $x_1 \in [x_0, b[$ tel que pour tout $x \in [x_1, b[$,

$$\int_a^x g(t) dt \geq \frac{1}{\varepsilon} \max \left(\int_a^{x_0} f(t) dt, (1 - \varepsilon) \int_a^{x_0} g(t) dt \right).$$

Pour tout $x \in [x_1, b[$, on a d'une part

$$\begin{aligned} \int_a^x f(t) dt &= \int_a^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^x f(t) dt \\ &\leq \int_a^{x_0} f(t) dt + (1 + \varepsilon) \int_{x_0}^x g(t) dt \\ &\leq \int_a^{x_0} f(t) dt + (1 + \varepsilon) \int_a^x g(t) dt \\ &\leq (1 + 2\varepsilon) \int_a^x g(t) dt \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \int_a^x f(t) dt &= \int_a^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^x f(t) dt \\ &\geq \int_a^{x_0} f(t) dt + (1 - \varepsilon) \int_{x_0}^x g(t) dt \\ &\geq - \int_a^{x_0} (1 - \varepsilon) g(t) dt + (1 - \varepsilon) \int_a^x g(t) dt \\ &\geq (1 - 2\varepsilon) \int_a^x g(t) dt \end{aligned}$$

d'où

$$\left| \int_a^x f(t) dt - \int_a^x g(t) dt \right| \leq 2\varepsilon \int_a^x g(t) dt,$$

ce qui prouve que $\int_a^x f(t) dt \sim_{b-} \int_a^x g(t) dt$.

Exemple 11 1. L'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^5 + 3t + 1}{t^3 + 4} e^{-t} dt \quad \text{converge}$$

et

$$\int_x^{+\infty} \frac{t^5 + 3t + 1}{t^3 + 4} e^{-t} dt \sim_{+\infty} \int_x^{+\infty} t^2 e^{-t} dt \sim_{+\infty} x^2 e^{-x}$$

2. L'intégrale

$$\int_0^1 \frac{-\ln t + 1}{\sin t} dt \quad \text{diverge}$$

et

$$\int_x^1 \frac{-\ln t + 1}{\sin t} dt \sim_{0^+} \int_x^1 \frac{-\ln t}{t} dt = \frac{1}{2}(\ln x)^2.$$

Théorème 19 (Comparaison d'une intégrale impropre et d'une série) Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction décroissante (donc localement intégrable) et positive. Alors la série $\sum_{n \geq a} f(n)$ converge ssi l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.

Démonstration. f est décroissante donc pour $t \in [n, n+1]$, on a $f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$. On a donc pour $x, y \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} S_{x,y} := \sum_{n=x}^y f(n) &\leq f(x) + \sum_{n=x+1}^y \int_{n-1}^n f(t) dt = f(x) + \int_x^y f(t) dt \\ &\geq f(y) + \sum_{n=x}^{y-1} \int_n^{n+1} f(t) dt = f(y) + \int_x^y f(t) dt. \end{aligned}$$

4.3 Fonctions oscillantes

Nous considérons ici $\int_a^b f(t) dt$, où $f(t)$ oscille entre des valeurs positives et négatives au voisinage de b^- .

Définition 13 Une intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est semi-convergente si elle est convergente mais pas absolument convergente.

Théorème 20 (Théorème d'Abel) Soit f une fonction \mathcal{C}^1 sur $[a, +\infty[$, positive, décroissante, ayant une limite nulle en $+\infty$. Soit g une fonction continue sur $[a, +\infty[$, telle que la primitive $\int_a^x g(t) dt$ soit bornée. Alors l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} f(t) g(t) dt \quad \text{converge.}$$

Démonstration Pour tout $x \geq a$, posons $G(x) = \int_a^x g(t) dt$. Par hypothèse, G est bornée, donc il existe M tel que, pour tout x , $|G(x)| \leq M$. Effectuons maintenant une intégration par parties :

$$\int_a^x f(t) g(t) dt = \left[f(t) G(t) \right]_a^x - \int_a^x f'(t) G(t) dt.$$

Comme G est bornée et f tend vers 0, le terme entre crochets converge. Montrons maintenant que le second terme converge aussi, en vérifiant que

$$\int_a^{+\infty} f'(t) G(t) dt \quad \text{est absolument convergente.}$$

On a :

$$|f'(t) G(t)| = |f'(t)| |G(t)| \leq (-f'(t)) M,$$

car f est décroissante (donc $f'(t) \leq 0$) et $|G|$ est bornée par M . Par le théorème 17 de comparaison, il suffit donc de montrer que $\int_a^{+\infty} -f'(t) dt$ est convergente. Or :

$$\int_a^x -f'(t) dt = f(a) - f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(a) - f(x)) = f(a).$$

Exemple 12 Si α est un réel strictement positif, et k un entier positif impair, alors l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt \quad \text{converge.}$$

Remarquons que cette intégrale n'est absolument convergente que pour $\alpha > 1$.

Chapitre 5

Séries entières

5.1 Série de fonctions de la variable complexe

Dans le chapitre "suites et séries de fonctions", on peut considérer des fonctions de la variable complexe définies sur un domaine de \mathbb{C} . Toutes les définitions se transposent et les propriétés restent vraies sauf les propriétés d'intégralité et de dérivabilité, notions que l'on a pour l'instant réservées aux fonctions d'une variable réelle. Il faut juste dans le théorème d'interversion de limite supposer que a est dans \mathbb{C} et dans l'adhérence du domaine de définition des fonctions considérées.

En particulier, si D est un domaine connexe de \mathbb{C} (on peut relier deux points de D par une courbe continue qui reste dans D) et si $(f_n)_n$ une suite de fonctions de D dans \mathbb{C} , alors

- Si $a \in D$ et pour tout n , f_n est continue en a , si $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur D , alors la fonction somme S est continue en a .
- Si a est un point adhérent à D tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admette une limite finie b_n en a , si $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur D , alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \rightarrow a, x \in D} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a, x \in D} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

5.2 Définition. Rayon de convergence

Définition 14 Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres complexes et z un nombre complexe. On appelle série entière de coefficient a_n la série de terme général $a_n z^n$. C'est une série de fonctions de la variable réelle ou complexe.

On peut appliquer à ces séries de fonctions les propriétés vues au chapitre précédent.

Définition 15 Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres complexes. On appelle rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ la borne supérieure (dans \mathbb{R}) de l'ensemble des réels $\{r \geq 0, \text{ tel que la suite } (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$.

R est bien défini car l'ensemble $\{r \geq 0, \text{ tel que la suite } (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$ est un ensemble de réels positifs non vide (0 est dedans). S'il n'est pas majoré alors $R = +\infty$ et sinon, en tant que partie de réels non vide majorée, il admet une borne supérieure.

Exemple 13 Le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} z^n$ est égal à 1.

Définition 16 On appelle disque de convergence de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ le disque ouvert de centre 0 et de rayon R .

Proposition 12 Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R .

- pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, la suite $(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, converge vers 0 et la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge absolument;
- pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$, la suite $(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée donc ne converge pas vers 0 et la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ diverge.

De plus la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge normalement donc uniformément sur tout compact du disque ouvert de convergence.

Remarque 3 1. Si $R = \infty$, alors la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge absolument sur \mathbb{C} et converge normalement (donc uniformément) sur tout compact de \mathbb{C} .

2. Si $R = 0$, la série ne converge que pour $R = 0$ et cela n'a pas d'intérêt.
3. Si on trouve $z \in \mathbb{C}$ tel que $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge, alors $R \geq |z|$.
4. Si on trouve $z \in \mathbb{C}$ tel que $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ diverge, alors $R \leq |z|$.
5. Si $|z| = R$ on ne sait rien de la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ ni de la suite $(a_n z^n)_{n \geq 0}$.

Exemple 14 1. La série entière $\sum_{n \geq 0} z^n$ admet 1 pour rayon de convergence et diverge sur tout le disque de rayon 1.

2. La série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n}$ admet 1 pour rayon de convergence et converge sur tout le disque de rayon 1 sauf en 1 où elle diverge.
3. La série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n^2}$ admet 1 pour rayon de convergence et converge sur tout le disque de rayon 1.

Proposition 13 (Règle de d'Alembert) Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres complexes qui ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Si la suite $(|a_{n+1}/a_n|)_n$ converge vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est $R = 1/\ell$.

Proposition 14 (Règle de Cauchy) Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres complexes. Si la suite $(|a_n|^{1/n})_n$ converge vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est $R = 1/\ell$.

Exemple 15 1. Si F est une fraction rationnelle, la série entière $\sum F(n)z^n$ admet 1 pour rayon de convergence.

2. La série entière $\sum (z/n)^n$ est de rayon de convergence infini.
3. La série entière $\sum (\lambda z)^n$ est de rayon de convergence $1/\lambda$.

Définition 17 Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. Si $(u_n)_n$ est majorée, on appelle limite supérieure de $(u_n)_n$ et on note $\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n$ l'élément $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ défini par

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} u_k.$$

Un tel élément est bien défini car la suite $(v_n)_n$ définie par $v_n = \sup_{k \geq n} u_k$ est décroissante donc soit elle n'est pas minorée et diverge vers $-\infty$ soit elle est minorée et converge vers un réel. Si $(u_n)_n$ n'est pas majorée, la limite supérieure de $(u_n)_n$ est $+\infty$.

Proposition 15 (Règle forte de Cauchy) Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres complexes. Si $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est $R = 1/\ell$.

Exemple 16 Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} z^{n^2}$ est égal à 1.

5.3 Opérations sur les séries entières

Proposition 16 Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites de nombres complexes et λ un nombre complexe non nul. Notons R et R' les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$. Alors

1. R est aussi le rayon de convergence de la série entière $\sum \lambda a_n z^n$ et pour $|z| < R$, on a

$$\sum_{n \geq 0} (\lambda a_n) z^n = \lambda \sum_{n \geq 0} a_n z^n.$$

2. le rayon de convergence de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ est supérieur ou égal au minimum de R et R' , avec égalité lorsque $R \neq R'$ et pour $|z| < \min(R, R')$, on a

$$\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n \geq 0} a_n z^n + \sum_{n \geq 0} b_n z^n.$$

3. le rayon de convergence de la série entière produit $\sum c_n z^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ est supérieur ou égal au minimum de R et R' et pour $|z| < \min(R, R')$, on a

$$\sum_{n \geq 0} c_n z^n = \left(\sum_{n \geq 0} a_n z^n \right) \left(\sum_{n \geq 0} b_n z^n \right).$$

5.4 Propriétés de la somme d'une série entière

Théorème 21 La somme d'une série entière est continue sur le disque ouvert de convergence.

Théorème 22 Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres complexes. Si la série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence $R > 0$ et si $S(x)$ est la somme de la série $\sum a_n x^n$, alors la fonction S est de classe C^∞ sur l'intervalle $] -R, R[$ et sur cet intervalle, on a pour tout entier positif k

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n x^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+k)(n+k-1) \cdots (n+1) a_{n+k} x^n.$$

De plus les séries entières $\sum_{n=0}^{\infty} (n+k)(n+k-1) \cdots (n+1) a_{n+k} z^n$ sont toutes de rayon de convergence R .

Démonstration Montrons par récurrence sur k que S est de classe C^k sur $] -R, R[$ et

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n x^{n-k}$$

où cette dernière série entière est de rayon de convergence R .

Si $k = 0$, c'est le théorème de continuité ($S^{(0)} = S$).

Si la propriété est vraie au rang k , alors pour tout n , la fonction

$$(x \mapsto f_n(k)x^{n-k} = n(n-1) \cdots (n-k+1)a_n x^{n-k})$$

est dérivable de dérivée $f_n(k+1)x^{n-k-1} = n(n-1) \cdots (n-k+1)(n-k)a_n x^{n-k-1}$.

Soit $a \in]0, R[$ et r tel que $a < r < R$. Alors la suite $(f_n(k)r^{n-k})_n$ est bornée car R est le rayon de convergence de $\sum_{n=k}^{\infty} f_n(k)x^{n-k}$. On a

$$f_n(k+1)a^{n-k-1} = f_n(k)r^{n-k} \frac{n-k}{a} \left(\frac{a}{r}\right)^{n-k} = O\left(\frac{n-k}{a} \left(\frac{a}{r}\right)^{n-k}\right)$$

qui est le terme d'une suite qui converge vers 0 par croissances comparées car $0 < a/r < 1$. Ainsi le rayon de convergence de la série dérivée $\sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(k+1)x^{n-k-1}$ est au moins a pour tout $a < R$ donc au moins R . Comme $f_n(k+1) \geq f_n(k)$, le rayon est au plus R donc la série dérivée est de rayon R .

Si $[-a, a]$ un segment inclus dans $] -R, R[$ ($0 < a < R$), on a donc

— la série

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} f_n(k)(x)x^{n-k}$$

converge sur $[-a, a]$;

— la série

$$S^{(k+1)}(x) = \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(k+1)(x)x^{n-k-1}$$

converge normalement donc uniformément sur $[-a, a]$.

On peut donc appliquer le théorème de dérivation à $S^{(k)}$ sur $[-a, a]$ pour tout $a < R$. On a montré la propriété au rang $k+1$.

Exemple 17 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ est de rayon 1 donc pour $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Théorème 23 Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres complexes. Si la série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence $R > 0$ et si $S(x)$ est la somme de la série $\sum a_n x^n$, alors pour tout entier positif n on a

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}.$$

En particulier

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Cette expression est appelée développement en série entière de la fonction S au voisinage de 0.

Exemple 18 Pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\ln(1+x) = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}.$$

Théorème 24 Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites de nombres complexes. Si les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont un rayon de convergence strictement positif et si $S_1(x)$ et $S_2(x)$ sont les sommes respectives de ces séries et $S_1(x) = S_2(x)$ sur un intervalle $]a, b[$ contenant 0, on a pour tout entier n , $a_n = b_n$.

Théorème 25 Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres complexes. Si la série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence $R > 0$ et si $S(x)$ est la somme de la série $\sum a_n x^n$, alors toute primitive F de la fonction S est développable en série entière de rayon R et est sur l'intervalle $] -R, R[$ de la forme

$$F(x) = F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n = F(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Exemple 19 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ est de rayon 1 donc pour $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

5.5 Séries entières usuelles

Pour tout réel x , on a

$$\exp(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$$

$$\operatorname{ch}(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\operatorname{sh}(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sin(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, pour $x \in]-1, 1[$, on a

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n!}$$

$$\arctan x = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

5.6 Exponentielle, cosinus et sinus complexes

Définition 18 Pour $z \in \mathbb{C}$

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$$

Proposition 17 Pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.

Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $e^{a+ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$.

Définition 19 Pour $z \in \mathbb{C}$, on définit

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Si $z \notin (\pi/2 + \pi\mathbb{Z})$, alors on définit

$$\tan(z) = \frac{\sin z}{\cos z}.$$

Attention : cosinus et sinus ne sont pas bornées sur \mathbb{C} .

Proposition 18 Pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2),$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin(z_2).$$

Si $z_1, z_2 \notin (\pi/2 + \pi\mathbb{Z})$ et $\tan(z_1)\tan(z_2) \neq -1$,

$$\tan(z_1 + z_2) = \frac{\tan(z_1) + \tan(z_2)}{1 - \tan(z_1)\tan(z_2)}.$$

Démonstration

$$\begin{aligned} \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2) &= \frac{1}{4} (e^{iz_1} + e^{-iz_1}) (e^{iz_2} + e^{-iz_2}) + \frac{1}{4} (e^{iz_1} - e^{-iz_1}) (e^{iz_2} - e^{-iz_2}) \\ &= \frac{1}{4} (e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1-z_2)} + e^{i(z_1-z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}) \\ &\quad + \frac{1}{4} (e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1-z_2)} - e^{i(z_1-z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}) \\ &= \frac{1}{2} (e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}) \\ &= \cos(z_1 + z_2). \end{aligned}$$

5.7 Application à la recherche de solutions d'équations différentielles

Exemple 20 Trouver les solutions de l'équation différentielle

$$xy'' + xy' + y = 1,$$

développable en série entière au voisinage de 0.