Calcul stochastique

M2 Mathématiques

Jean-Christophe Breton

Université de Rennes 1

Septembre-Décembre 2014

Version du 5/12/14

Table des matières

Introduction

Ces notes de cours ont pour but

de présenter le mouvement brownien et l'intégration stochastique. d'introduire au calcul stochastique et à ses outils fondamentaux Elles sont principalement destinées aux étudiants du Master 2 « Mathématiques et applications » de l'Université de Rennes 1. Ces notes ont plusieurs sources d'inspiration, principalement [LG1] mais aussi les notes de cours [Gué], [EGK], [CM], [Mal]. Par ailleurs, des références standard conseillées sur le sujet sont les livres [KS], [RY].

Le contenu de ces notes est le suivant :
Les propriétés de l'intégrale stochastique, en particulier la formule d'Itô et le théorème de Girsanov, sont des outils qui fondent le calcul stochastique ; ils sont présentés dans les Chapitres 1 et 2.
On présente la notion d'équation différentielle stochastique (EDS) à laquelle on donne un sens grâce à l'intégration stochastique, dans le Chapitre 3.
Le calcul stochastique et la formule d'Itô en particulier permettent de créer des liens féconds entre processus stochastiques et EDP. Ils sont illustrés dans le Chapitre 4 par les liens entre mouvement brownien et équation de la chaleur.
On s'intéresse ensuite aux processus de diffusion, qui sont des solutions d'EDS particulières. On le introduit dans le chapitre 5. Des références valables pour tous les chapitres sont [LG1], [Gué], [EGK], [KS], [RY], [CM] et [Mal].

Les prérequis de ce cours sont des probabilités de base (des fondements des probabilités aux conséquences de la LGN et du TCL – niveau L3) , les martingales en temps discret (niveau M1), , le mouvement brownien et l'intégration stochastique.

Chapitre 1

Formule d'Itô et conséquences

Dans ce chapitre, on prouve la formule d'Itô, véritable clef de voûte du calcul stochastique. Celle-ci montre que lorsqu'on applique une application C^2 à une semimartingale, on conserve une semimartingale ; elle en donne en plus la décomposition (martingale locale + processus à variation finie). La formule d'Itô est prouvée en Section 1.1. Des conséquences importantes en sont présentées dans les sections suivantes : théorème de Lévy (caractérisation du mouvement brownien par son crochet, Section 1.2), théorème de Dubins-Schwarz (Section 1.3), inégalités de Burkholder-Davis-Gundy (Section 1.4), théorème de représentation des martingales (Section 1.5), formule de Tanaka (Section 1.6).

1.1 Formule d'Itô

La formule d'Itô est l'outil de base du calcul stochastique : elle montre qu'une fonction de classe C^2 de p semimartingales continues est encore une semimartingale continue, et elle exprime explicitement la décomposition de cette semimartingale.
Rappelons la formule de changement de variable classique : si F, g sont de classe C^1 alors $(F \circ g)'(t) = F'(g(t))\ g'(t)$ s'écrit

$$F(g(t)) = F(g(0)) + \int_0^t F'(g(s))g'(s)\ ds.$$

Si F est C^1 et g est seulement absolument continue (c'est à dire à variation finie) alors on a encore avec l'intégrale de Stieltjes :

$$F(g(t)) = F(g(0)) + \int_0^t F'(g(s))\ dg(s).$$

La même formule reste vraie pour un processus X à variation finie en faisant un calcul trajectoriel (pour chaque ω fixé, la trajectoire $t \mapsto X_t(\omega)$ est à variation finie et le cas précédent s'applique) : pour F une fonction de classe C^1, on a alors

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s)\ dX_s.$$

La formule d'Itô généralise cette propriété pour des semimartingales lorsque F est C^2 et fait apparaître un terme supplémentaire dû au fait que ces processus ne sont pas à variation finie, cf. (1.1) ci-dessous.

Théorème 1.1 (Formule d'Itô) *Soient X une semimartingale et $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Alors*

$$F(X_t)=F(X_0)+\int_0^t F'(X_s)\ dX_s+\frac{1}{2}\int_0^t F''(X_s)\ d\langle X,X\rangle_s. \tag{1.1}$$

Si on considère p semimartingales continues $X^1,\dots,X^p$ et $F:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$ de classe C^2 alors,

$$\begin{aligned} F(X_t^1,\dots,X_t^p) &= F(X_0^1,\dots,X_0^p)+\sum_{i=1}^p\int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_s^1,\dots,X_s^p)\ dX_s^i \\ &\quad +\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^p\int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}(X_s^1,\dots,X_s^p)\ d\langle X^i,X^j\rangle_s. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Démonstration : On traite d'abord le cas (1.1) pour $p=1$. Considérons une suite $\{0=t_0^n<\dots<t_{p_n}^n=t\}_{n\geq 1}$ de subdivisions emboitées de $[0,t]$ de pas tendant vers 0. Alors en télescopant la somme, on a

$$F(X_t)=F(X_0)+\sum_{i=0}^{p_n-1}\big(F(X_{t_{i+1}^n})-F(X_{t_i^n})\big).$$

La formule de Taylor à l'ordre 2 sur l'intervalle $(X_{t_i^n},X_{t_{i+1}^n})$ donne pour chaque $\omega\in\Omega$:

$$F(X_{t_{i+1}^n})-F(X_{t_i^n})=F'(X_{t_i^n})(X_{t_{i+1}^n}-X_{t_i^n})+\frac{f_{n,i}(\omega)}{2}(X_{t_{i+1}^n}-X_{t_i^n})^2$$

où

$$f_{n,i}\in\left[\inf_{\theta\in[0,1]}F''\big(X_{t_i^n}+\theta(X_{t_{i+1}^n}-X_{t_i^n})\big),\ \sup_{\theta\in[0,1]}F''\big(X_{t_i^n}+\theta(X_{t_{i+1}^n}-X_{t_i^n})\big)\right].$$

D'après 6) dans la Proposition **??** (approximation à la Riemann des intégrales stochastiques) avec $H_s=F'(X_s)$, on a au sens de la convergence en probabilité :

$$\mathbb{P}\text{-}\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{p_n-1}F'(X_{t_i^n})(X_{t_{i+1}^n}-X_{t_i^n})=\int_0^t F'(X_s)\ dX_s.$$

Pour prouver la formule d'Itô (1.1), il reste à établir la convergence en probabilité :

$$\mathbb{P}\text{-}\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{p_n-1}f_{n,i}(\omega)(X_{t_{i+1}^n}-X_{t_i^n})^2=\int_0^t F''(X_s)\ d\langle X,X\rangle_s, \tag{1.3}$$

car alors, par unicité presque sûre de la limite en probabilité, on aura pour tout $t \geq 0$:

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s)\ dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(X_s)\ d\langle X, X\rangle_s \quad \text{ps.}$$

Les deux termes de l'égalité ci-dessus étant continus en t, les deux processus sont en fait indistinguables, ce qui donnera (1.1).

Il reste donc à établir (1.3) ; pour cela, on note pour $m < n$:

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{i=0}^{p_n-1} f_{n,i}(\omega)(X_{t^n_{i+1}} - X_{t^n_i})^2 \\ T_{m,n} &= \sum_{j=0}^{p_m-1} f_{m,j}(\omega) \sum_{\{i:t^m_j \leq t^n_i < t^m_{j+1}\}} (X_{t^n_{i+1}} - X_{t^n_i})^2. \end{aligned}$$

Comme $\sum_{i=0}^{p_n-1} = \sum_{j=0}^{p_m-1} \sum_{\{i:t^m_j \leq t^n_i < t^m_{j+1}\}}$, on a

$$\begin{aligned} &|T_n - T_{m,n}| \\ &= \left| \sum_{j=0}^{p_m-1} \sum_{\{i:t^m_j \leq t^n_i < t^m_{j+1}\}} f_{n,i}(\omega)(X_{t^n_{i+1}} - X_{t^n_i})^2 - \sum_{j=0}^{p_m-1} \sum_{\{i:t^m_j \leq t^n_i < t^m_{j+1}\}} f_{m,j}(\omega)(X_{t^n_{i+1}} - X_{t^n_i})^2 \right| \\ &= \left| \sum_{j=0}^{p_m-1} \sum_{\{i:t^m_j \leq t^n_i < t^m_{j+1}\}} \big(f_{n,i}(\omega) - f_{m,j}(\omega)\big)(X_{t^n_{i+1}} - X_{t^n_i})^2 \right| \\ &\leq Z_{m,n} \left| \sum_{j=0}^{p_m-1} \sum_{\{i:t^m_j \leq t^n_i < t^m_{j+1}\}} (X_{t^n_{i+1}} - X_{t^n_i})^2 \right| \\ &= Z_{m,n} \left(\sum_{i=0}^{p_n-1} (X_{t^n_{i+1}} - X_{t^n_i})^2 \right) \end{aligned}$$

avec

$$Z_{m,n} = \sup_{0 \leq j \leq p_m-1} \left(\sup_{\{i:t^m_j \leq t^n_i < t^m_{j+1}\}} |f_{n,i} - f_{m,j}| \right).$$

La continuité de F'' assure que $Z_{m,n} \to 0$ ps quand $m, n \to +\infty$. D'après l'interprétation "variation quadratique" du crochet (Proposition **??**), on a $\sum_{i=0}^{p_n-1}(X_{t^n_{i+1}} - X_{t^n_i})^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \langle X, X\rangle_t$. Et donc pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe m_1 tel que pour tout $n > m \geq m_1$,

$$\mathbb{P}\big(|T_n - T_{m,n}| \geq \varepsilon/3\big) \;\leq\; \mathbb{P}\left(Z_{m,n} \left(\sum_{i=0}^{p_n-1} (X_{t^n_{i+1}} - X_{t^n_i})^2 \right) \geq \varepsilon/3 \right) \leq \varepsilon/3. \tag{1.4}$$

(Comme $Z_{m,n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ et $\sum_{i=0}^{p_n-1}(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \langle X, X\rangle_t$, le théorème de Slutsky assure $Z_{m,n}\left(\sum_{i=0}^{p_n-1}(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.) Ensuite la Proposition **??** montre aussi qu'en probabilité :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\text{-}\lim_{n\to+\infty} T_{m,n} &= \mathbb{P}\text{-}\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{p_m-1} f_{m,j} \sum_{\{i:t_j^m \le t_i^n < t_{j+1}^m\}} (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2 \\
&= \sum_{j=0}^{p_m-1} f_{m,j} \left(\langle X, X\rangle_{t_{j+1}^m} - \langle X, X\rangle_{t_j^m}\right) \\
&= \int_0^t h_m(s)\ d\langle X, X\rangle_s,
\end{aligned}$$

où h_m est définie par $h_m(s) = f_{m,j}$ si $t_j^m \le s < t_{j+1}^m$. Ainsi il existe m_2 tel que pour $m \ge m_2$

$$\mathbb{P}\left(\left|T_{m,n} - \int_0^t h_m(s)\ d\langle X, X\rangle_s\right| \ge \varepsilon/3\right) \le \varepsilon/3. \tag{1.5}$$

Puis comme F est C^2, on a $\lim_{m\to+\infty} h_m(s) = F''(X_s)$ ps. De plus, on a pour tout s

$$\left|h_m(s) - F''(X_s)\right| = \left|f_{m,j} - \lim_{n\to+\infty} f_{n,i}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|f_{m,j} - f_{n,i}\right| \le \lim_{n\to+\infty} Z_{n,m},$$

et donc

$$\sup_{s\in[0,t]} |h_m(s) - F''(X_s)| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

Il existe donc aussi m_3 tel que pour $m \ge m_3$

$$\mathbb{P}\left(\left|\int_0^t h_m(s)\ d\langle X, X\rangle_s - \int_0^t F''(X_s)\ d\langle X, X\rangle_s\right| \ge \varepsilon/3\right) \le \varepsilon/3. \tag{1.6}$$

Comme

$$\begin{aligned}
&\left\{\left|\sum_{i=0}^{p_n-1} f_{n,i}(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2 - \int_0^t F''(X_s)\ d\langle X, X\rangle_s\right| \ge \varepsilon\right\} \\
\subset\ & \{|T_n - T_{m,n}| \ge \varepsilon/3\} \\
& \cup \left\{\left|T_{m,n} - \int_0^t h_m(s)\ d\langle X, X\rangle_s\right| \ge \varepsilon/3\right\} \\
& \cup \left\{\left|\int_0^t h_m(s)\ d\langle X, X\rangle_s - \int_0^t F''(X_s)\ d\langle X, X\rangle_s\right| \ge \varepsilon/3\right\}
\end{aligned}$$

en combinant (1.4), (1.5), (1.6), et en prenant $n > m \ge \max(m_1, m_2, m_3)$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=0}^{p_n-1} f_{n,i}(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2 - \int_0^t F''(X_s)\ d\langle X, X\rangle_s\right| \ge \varepsilon\right) \le \varepsilon$$

ce qui prouve (1.3) et donc la formule d'Itô (1.1) pour $p = 1$.

Dans le cas où p est quelconque, la formule de Taylor (toujours à l'ordre 2) donne

$$\begin{aligned} & F(X^1_{t^n_{i+1}}, \dots, X^p_{t^n_{i+1}}) - F(X^1_{t^n_i}, \dots, X^p_{t^n_i}) \\ = & \sum_{k=1}^p \frac{\partial F}{\partial x_k}(X^1_{t^n_i}, \dots, X^p_{t^n_i})(X^k_{t^n_{i+1}} - X^k_{t^n_i}) + \sum_{k,l=1}^p \frac{f^{k,l}_{n,i}}{2}(X^k_{t^n_{i+1}} - X^k_{t^n_i}) \end{aligned}$$

avec

$$f^{k,l}_{n,i} \in \left[\inf_{\theta \in [0,1]} \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_l}(X^1_{t^n_i} + \theta(X^1_{t^n_{i+1}} - X^1_{t^n_i}), \dots), \sup_{\theta \in [0,1]} \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_l}(X^1_{t^n_i} + \theta(X^1_{t^n_{i+1}} - X^1_{t^n_i}), \dots) \right].$$

Le 6) dans la Proposition **??** donne à nouveau la limite cherchée pour les termes faisant intervenir les dérivées premières :

$$\sum_{i=1}^p \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(X^1_s, \dots, X^p_s)\, dX^i_s \xrightarrow{\mathbb{P}} \sum_{i=1}^p \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(X^1_s, \dots, X^p_s)\, dX^i_s.$$

En adaptant légèrement les arguments du cas $p = 1$, on montre que pour tous $k, l \in \{1, \dots, p\}$:

$$\mathbb{P}\text{-}\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{p_n - 1} f^{k,l}_{n,i}(X^k_{t^n_{i+1}} - X^k_{t^n_i})(X^l_{t^n_{i+1}} - X^l_{t^n_i}) = \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_l}(X^1_s, \dots, X^p_s)\, d\langle X^k, X^l \rangle_s.$$

Cela achève la preuve de la formule d'Itô dans le cas général (1.2). □

Un cas particulier important de la formule d'Itô est la formule d'intégration par parties.

Corollaire 1.1 (IPP) *Si X et Y sont deux semimartingales continues, on a*

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s\, dY_s + \int_0^t Y_s\, dX_s + \langle X, Y \rangle_t. \tag{1.7}$$

Le terme $\langle X, Y \rangle$ est nul si X ou Y est à variation finie. Il est présent quand on considère de (vraies) semimartingales et ce terme supplémentaire témoigne de la différence entre le calcul stochastique et le calcul différentiel déterministe.

Démonstration : Appliquer la formule d'Itô à $F(x, y) = xy$ qui est bien de classe C^2 en x, y et noter que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = 1, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

□

En particulier, si $Y = X$ on obtient

$$X_t^2 = X_0^2 + 2\int_0^t X_s\ dX_s + \langle X, X\rangle_t.$$

Remarque 1.1 – Lorsque $X = M$ est une martingale locale, on sait que $M^2 - \langle M, M\rangle$ est une martingale locale (définition du crochet du théorème **??**). La formule précédente montre que cette martingale locale est en fait

$$M_0^2 + 2\int_0^t M_s\ dM_s,$$

ce qu'on aurait pu voir directement sur la démonstration donnée en Section **??** puisqu'une lecture attentive de la démonstration indique que la construction de $\langle M, M\rangle$ fait intervenir $\sum_{i=0}^{p_n} M_{t_i^n}(M_{t_{i+1}^n} - M_{t_i^n})$ qui sont des approximations (à la Riemann) de l'intégrale stochastique $\int_0^t M_s\ dM_s$.

– En prenant $X_t^1 = t$ et $X_t^2 = X_t$, on a aussi pour toute fonction F de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$

$$F(t, X_t) = F(0, X_0) + \underbrace{\int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s) dX_s}_{\text{martingale locale}} + \underbrace{\int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(s, X_s) ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, X_s)\ d\langle X, X\rangle_s}_{\text{variation finie}}. \tag{1.8}$$

En fait, il suffit de prendre $F \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, ie. F est C^1 en $t \in \mathbb{R}_+$ et C^2 en $x \in \mathbb{R}$.

Retour au mouvement brownien

Pour un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-mouvement brownien B, la formule d'Itô s'écrit

$$F(B_t) = F(B_0) + \int_0^t F'(B_s)\ dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(B_s)\ ds.$$

En prenant $X_t^1 = t$ et $X_t^2 = B_t$, (1.8) devient : pour toute fonction F de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, on a :

$$F(t, B_t) = F(0, B_0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s, B_s)\ dB_s + \int_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)(s, B_s)\ ds.$$

Si $B_t = (B_t^1, \dots, B_t^p)$ est un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-mouvement brownien en dimension d alors les B^i sont des mouvements browniens indépendants. On a vu au chapitre précédent que dans ce cas

$\langle B^i, B^j\rangle = 0$ lorsque $i \neq j$ et $d\langle B^i, B^i\rangle_s = ds$. La formule d'Itô montre alors que, pour toute fonction F de classe C^2 sur $\mathbb{R}^p$,

$$F(B_t^1, \ldots, B_t^p) \;=\; F(B_0^1, \ldots, B_0^p) + \sum_{i=1}^p \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(B_s^1, \ldots, B_s^p)dB_s^i + \frac{1}{2}\int_0^t \Delta F(B_s^1, \ldots, B_s^p)ds$$

où $\Delta F = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}$ est le laplacien de F. On a aussi une formule analogue pour $F(t, B_t^1, \ldots, B_t^p)$.

En particulier si F est harmonique (ie. $\Delta F = 0$) alors $F(B_t^1, \ldots, B_t^p)$ est une martingale locale.

Exponentielles stochastiques

On définit maintenant l'exponentielle stochastique $\mathcal{E}(M)$ d'une martingale locale M quelconque. La formule d'Itô justifie qu'il s'agit d'une martingale locale et explique la terminologie, cf. la Remarque 1.2 ci-dessous. Pour commencer, on dit qu'un processus à valeurs dans $\mathbb{C}$ est une martingale locale si ses parties réelle et imaginaire en sont.

Proposition 1.1 *Soit M une martingale locale. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, soit*

$$\mathcal{E}(\lambda M)_t = \exp\left(\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2}\langle M, M\rangle_t\right).$$

Le processus $\mathcal{E}(\lambda M)$ est une martingale locale.

Démonstration : Si $F(x, r)$ est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, la formule d'Itô entraîne que

$$\begin{aligned} F\big(M_t, \langle M, M\rangle_t\big) \;&=\; F(M_0, 0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}\big(M_s, \langle M, M\rangle_s\big)\, dM_s \\ &\quad + \int_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)\big(M_s, \langle M, M\rangle_s\big)\, d\langle M, M\rangle_s. \end{aligned}$$

Le processus $F\big(M_t, \langle M, M\rangle_t\big)$ est une martingale locale dès que sa partie à variation finie s'annule, ie. lorsque F vérifie la condition :

$$\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0.$$

Il est immédiat que cette condition est satisfaite par la fonction $F(x, r) = \exp\big(\lambda x - \frac{\lambda^2}{2} r\big)$ (plus précisément par les parties réelle et imaginaire de cette fonction). $\square$

Remarque 1.2 Avec $F(x,r) = \exp\big(x - r/2\big)$ (prendre $\lambda = 1$ précédemment), $\frac{\partial F}{\partial x}(x,r) = F(x,r)$, si bien que l'identité

$$F\big(M_t, \langle M,M\rangle_t\big) = F(M_0,0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}\big(M_s, \langle M,M\rangle_s\big)\ dM_s$$

s'écrit

$$\mathcal{E}(M)_t = \mathcal{E}(M)_0 + \int_0^t \mathcal{E}(M)_s\ dM_s \tag{1.9}$$

ou en écriture symbolique d'EDS (cf. Chapitre 3) : $d\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}(M)dM$, ce qui généralise l'équation $dy = ydx$ de solution $y(x) = e^x$ avec la condition $y(0) = 1$ ou l'équation $dy = ydg$ de solution $y(t) = \exp(g(t))$ si g est à variation finie nulle en 0 et avec la condition initiale $y(0) = 1$. Cette propriété justifie l'appelation « exponentielle stochastique » de M pour $\mathcal{E}(M)$.

Proposition 1.2 *Soit $f \in L^2_{loc}(B)$. Si pour une constante C finie, on a*

$$\int_0^t f(s)^2 ds \leq C \qquad ps$$

alors $\mathcal{E}(\int_0^\cdot f_s dB_s)$ est une vraie martingale de carré intégrable et, pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}[\mathcal{E}(\int_0^\cdot f_s dB_s)_t] = 1$
Si $f \in L^2_{loc}(B)$ est à valeurs complexes, on a

$$\int_0^t |f(s)|^2 ds \leq C \Longrightarrow \mathbb{E}\left[\left|\mathcal{E}(\int_0^\cdot f_s dB_s)\right|^2\right] < +\infty \quad \text{ et } \quad \mathbb{E}\left[\mathcal{E}(\int_0^\cdot f_s dB_s)\right] = 1.$$

Démonstration : Notons $Z_t = \mathcal{E}(\int_0^\cdot f(s)dB_s)_t$. On commence par supposer que $|f(s)| \leq k$ pour tout $s \in [0,t]$. Pour l'exponentielle stochastique, la formule d'Itô s'écrit

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s f(s)\ dB_s.$$

On montre alors que

$$fZ \in L^2_{[0,t]}(B) = \left\{H : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} :\ \text{progressif avec } \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2\ ds\right] < +\infty\right\}$$

pour assurer que $\int_0^t Z_s f(s)\ dB_s$ est une (vraie) martingale et que $\mathbb{E}[Z_t] = 1$. De $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, on déduit

$$Z_u^2 \leq 2\left(1 + \left(\int_0^u Z_s f_s dB_s\right)^2\right), \quad u \leq t.$$

Pour le calcul du moment d'ordre 2 de $\int_0^u Z_s f_s dB_s$, on utilise l'isométrie d'Itô pour déduire pour $u \le t$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[Z_u^2\big] &\le 2\left(1+\int_0^u \mathbb{E}\big[Z_s^2 f_s^2\big]\ ds\right)\\
&\le 2\left(1+k^2\int_0^u \mathbb{E}\big[Z_s^2\big]\ ds\right). \qquad (1.10)
\end{aligned}$$

A priori comme $\mathbb{E}[Z_s^2]$ n'est pas finie, on considère les temps d'arrêt $T_n = \inf\big(t \ge 0 : Z_t \ge n\big)$, $n \ge 1$, qui réduisent la martingale locale Z. En faisant comme précédemment, on peut remplacer (1.10) par

$$\mathbb{E}\big[Z_u^2 \mathbf{1}_{\{u \le T_n\}}\big] \le \mathbb{E}\big[Z_{u\wedge T_n}^2\big] \le 2\left(1+k^2\int_0^u \mathbb{E}\big[Z_s^2 \mathbf{1}_{s\le T_n}\big]\ ds\right). \qquad (1.11)$$

On peut alors appliquer le résultat suivant à $\mathbb{E}\big[Z_u^2 \mathbf{1}_{\{u \le T_n\}}\big]$:

Lemme 1.1 (Gronwall) *Soit g une fonction positive localement intégrable définie sur $\mathbb{R}_+$ telle que pour $a, b \ge 0$*

$$g(t) \le a + b\int_0^t g(s)\ ds. \qquad (1.12)$$

Alors $g(t) \le a\exp(bt)$ pour tout $t \ge 0$.

Preuve (Gronwall). En multipliant par e^{-bt}, l'hypothèse (1.12) s'écrit

$$\frac{d}{dt}\left[\exp(-bt)\int_0^t g(s)ds\right] \le a\exp(-bt)$$

ce qui, en intégrant, donne

$$\exp(-bt)\int_0^t g(s)ds \le \frac{a}{b}(1-\exp(-bt)).$$

On obtient le résultat en reportant l'inégalité ci-dessus dans l'hypothèse (1.12) :

$$g(t) \le a + b\frac{a}{b}e^{bt}(1-\exp(-bt)) = ae^{bt}.$$

□

Le lemme de Gronwall (Lemme 3.1) assure alors $\mathbb{E}[Z_s^2 \mathbf{1}_{\{u\le T_n\}}] \le 2\exp(2k^2 s)$ et par convergence monotone lorsque $n \to +\infty$ $\mathbb{E}[Z_s^2] \le 2\exp(2k^2 s)$. On a donc Z_s de carré intégrable et borné dans L^2 pour $s \in [0,t]$. Cela garantit $fZ \in L^2_{[0,t]}(B)$ et $\mathbb{E}[Z_t] = 1$.

Dans le cas général, on pose $f_n = (f \wedge n) \vee (-n)$ et on applique le cas précédent à f_n. Par convergence monotone $\int_0^t f_n(u)^2 du \nearrow \int_0^t f(u)^2 du$, $n \to +\infty$, et par isométrie et convergence dominée $\int_0^t f_n(u) dB_u \xrightarrow{L^2} \int_0^t f(u) dB_u$ car

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t f_n(u)\ dB_u - \int_0^t f(u)\ dB_u\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t (f_n(u)-f(u))^2\ du\right].$$

On a donc

$$\int_0^t f_n(s)\ dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t f_n(s)^2\ ds \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_0^t f_n(s)\ dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t f(s)^2\ ds$$

et (comme la convergence en probabilité se conserve en appliquant une application continue) on a avec des notations évidentes $Z_n(t) \xrightarrow{\mathbb{P}} Z(t)$, $n \to +\infty$. Puis

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[Z_n(t)^2\big] &= \mathbb{E}\left[\exp\left(2\int_0^t f_n(s)\ dB_s - (4-3)\int_0^t f_n(s)^2\ ds\right)\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\exp\left(4\int_0^t f_n(s)\ dB_s - 8\int_0^t f_n(s)^2\ ds\right)\right]^{1/2} \\
&\qquad \times\mathbb{E}\left[\exp\left(6\int_0^t f_n(s)^2\ ds\right)\right]^{1/2} \\
&\leq 1 \times \exp(3C)
\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le cas précédent pour avoir

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(4\int_0^t f_n(s)\ dB_s - 8\int_0^t f_n(s)^2\ ds\right)\right] = \mathbb{E}\left[\mathcal{E}\left(\int_0^t 4f_n(s)\ dB_s\right)\right] = 1.$$

On a donc $(Z_n(t))_{n\geq 1}$ uniformément intégrable. D'après le Théorème de Vitali, la convergence $Z_n(t) \xrightarrow{\mathbb{P}} Z(t)$ se renforce en $Z_n(t) \xrightarrow{L^1} Z(t)$ et on a en particulier $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[Z_n(t)] = \mathbb{E}[Z(t)]$, ce qui assure $\mathbb{E}[Z(t)] = 1$. On a aussi $\mathbb{E}[Z_n(t)|\mathcal{F}_s] \xrightarrow{L^1} \mathbb{E}[Z(t)|\mathcal{F}_s]$ et $\mathbb{E}[Z_n(t)|\mathcal{F}_s] = Z_n(s) \xrightarrow{L^1} Z(s)$. D'où $\mathbb{E}[Z(t)|\mathcal{F}_s] = Z(s)$ et Z est donc une martingale.
Puis, on a mieux que l'uniforme intégrabilité dans L^1 : en effet

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_n(t)^3] &= \mathbb{E}\left[\exp\left(3\int_0^t f_n(s)\ dB_s - \frac{3}{2}\int_0^t f_n(s)^2\ ds\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(3\int_0^t f_n(s)\ dB_s - \frac{18-15}{2}\int_0^t f_n(s)^2\ ds\right)\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\exp\left(6\int_0^t f_n(s)\ dB_s - 18\int_0^t f_n(s)^2\ ds\right)\right]^{1/2} \\
&\qquad \times\mathbb{E}\left[\exp\left(15\int_0^t f_n(s)^2\ ds\right)\right]^{1/2} \\
&\leq \mathbb{E}\Big[\mathcal{E}\big(\int_0^\cdot 6f_n(s)\ dB_s\big)_t\Big] \exp(15C/2) = \exp(15C/2)
\end{aligned}$$

justifie que $(Z_n(t))_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable dans L^2. On en déduit alors que $Z_n(t) \xrightarrow{L^2} Z(t)$ et donc $Z(t) \in L^2$.

Pour le cas complexe, on écrit $f = \mathrm{Re}(f) + i\mathrm{Im}(f)$ et on se ramène assez facilement au cas réel. □

1.2 Théorème de Lévy

Le résultat suivant permet de caractériser le mouvement brownien par son crochet parmi les martingales locales à trajectoires continues.

Théorème 1.2 (Caractérisation du MB par son crochet) *Soit $X = (X^1, \dots, X^d)$ un processus à trajectoires continues $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adapté issu de 0. Il y a équivalence entre*

1. *X est un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-mouvement brownien en dimension d.*
2. *Les processus $X^1, \dots, X^d$ sont des $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingales locales continues et de plus*
$$\langle X^i, X^j \rangle_t = \delta_{i,j} t$$
où $\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker.

En particulier, une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale locale continue M issue de 0 est un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-mouvement brownien si et seulement si $\langle M, M \rangle_t = t$.

Remarque 1.3 Il est crucial que le processus soit à trajectoires continues. Par exemple le processus de Poisson (standard) vérifie la même propriété de crochet mais il est à trajectoires càdlàg.

Démonstration : Le sens 1) $\Rightarrow$ 2) est connu, cf. Remarques **??** et **??**. On montre la réciproque. Pour cela, soit $u \in \mathbb{R}^d$. Alors $u \cdot X_t = \sum_{j=1}^d u_j X_t^j$ est une martingale locale de processus croissant
$$\sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d u_j u_k \langle X^j, X^k \rangle_t = \sum_{j=1}^d u_j^2 t = \|u\|^2 t.$$
D'après la Proposition 1.1 sur les exponentielles stochastiques, $\mathcal{E}(iuX) = \exp\big(iu \cdot X_t + \frac{1}{2}\|u\|^2 t\big)$ est une martingale locale. Cette martingale locale est bornée sur les intervalles $[0, T]$, $T > 0$, il s'agit donc d'une vraie martingale. La propriété de martingale donne alors pour $s < t$
$$\mathbb{E}\left[\exp\left(iu \cdot X_t + \frac{1}{2}\|u\|^2 t\right) \Big| \mathcal{F}_s\right] = \exp\left(iu \cdot X_s + \frac{1}{2}\|u\|^2 s\right).$$
En particulier, pour $A \in \mathcal{F}_s$, on a :
$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_A \exp\big(iu \cdot (X_t - X_s)\big)\Big] \\
= \; & \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A \exp\left(iu \cdot (X_t - X_s)\right) | \mathcal{F}_s\right]\right] \\
= \; & \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A \exp\left(-iu \cdot X_s - \frac{1}{2}\|u\|^2 t\right) \mathbb{E}\left[\exp\left(iu \cdot X_t + \frac{1}{2}\|u\|^2 t\right) | \mathcal{F}_s\right]\right] \\
= \; & \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A \exp\left(-iu \cdot X_s - \frac{1}{2}\|u\|^2 t\right) \exp\left(iu \cdot X_s + \frac{1}{2}\|u\|^2 s\right)\right] \\
= \; & \mathbb{P}(A) \exp\left(-\frac{1}{2}\|u\|^2 (t - s)\right).
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Avec $A = \Omega$, (1.13) montre que $X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0,(t-s)I_d)$. Ensuite pour $A \in \mathcal{F}_s$ de probabilité $\mathbb{P}(A) > 0$, en notant $\mathbb{P}_A(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot|A)$, on a

$$\mathbb{E}_A\Big[\exp\big(iu\cdot(X_t - X_s)\big)\Big] = \exp\left(-\frac{1}{2}\|u\|^2(t-s)\right)$$

ie. $\mathcal{L}(X_t - X_s|A) = \mathcal{N}\big(0,(t-s)I_d\big)$. Pour toute fonction mesurable positive f sur $\mathbb{R}^d$, on a

$$\mathbb{E}_A\big[f(X_t - X_s)\big] = \mathbb{E}\big[f(X_t - X_s)\big]$$

soit

$$\mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A f(X_t - X_s)\big] = \mathbb{P}(A)\mathbb{E}\big[f(X_t - X_s)\big].$$

Comme c'est vrai pour tout $A \in \mathcal{F}_s$, on a $X_t - X_s \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s$.

Finalement, pour tout $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p$, le vecteur $\big(X^i_{t_j} - X^i_{t_{j-1}}\big)_{\substack{1\le i\le d\\ 1\le j\le p}}$ est un vecteur gaussien (car obtenu en regroupant p vecteurs gaussiens indépendants). Par transformation linéaire, $(X_{t_i})_{1\le i\le p}$ est encore un vecteur gaussien pour tout $(t_i)_{1\le i\le p}$ et donc X est un processus gaussien. Comme le vecteur $\big(X^i_{t_j} - X^i_{t_{j-1}}\big)_{\substack{1\le i\le d\\ 1\le j\le p}}$ a ses composantes indépendantes, le processus X est finalement gaussien, à accroissements indépendants et stationnaires et (par hypothèse) à trajectoires continues : cela justifie que $X^1,\dots,X^d$ sont d mouvements browniens indépendants. □

1.3 Dubins-Schwarz

Le résultat suivant montre que pour les martingales locales, le crochet est une horloge interne qui permet de retrouver le processus quand on évalue un mouvement brownien avec cette horloge. C'est une preuve supplémentaire du rôle central du mouvement brownien dans la classe des martingales locales continues.

Théorème 1.3 (Dubins-Schwarz) *Soit M une martingale locale continue issue de 0 et telle que $\langle M,M\rangle_\infty = +\infty$ ps. Alors, il existe un mouvement brownien β tel que*

$$ps \quad \forall t\ge 0,\quad M_t = \beta_{\langle M,M\rangle_t}.$$

Remarque 1.4
- En grossissant l'espace de probabilité on peut se débarrasser de la restriction $\langle M,M\rangle_\infty = +\infty$ ps.
- Le mouvement brownien β n'est pas adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$ initiale de M, mais par rapport à une filtration « changée de temps ».
- Il s'agit d'un résultat existentiel : le résultat est valable pour un certain mouvement brownien (construit par la preuve du théorème) et pas pour un mouvement brownien quelconque.

Démonstration : Pour tout $r \geq 0$, on définit un temps d'arrêt τ_r en posant

$$\tau_r = \inf\big(t \geq 0 : \langle M, M\rangle_t > r\big).$$

L'hypothèse sur $\langle M, M\rangle$ assure que $\tau_r < +\infty$ ps. De plus, la fonction $r \mapsto \tau_r$ est

– croissante car si $r \leq s$ alors

$$\{t \geq 0 : \langle M, M\rangle_t > s\} \subset \{t \geq 0 : \langle M, M\rangle_t > r\}$$

et en passant aux inf : $\tau_r \leq \tau_s$;

– continue à droite car si on note $\alpha = \lim_{s\searrow r} \tau_s$, on a d'abord $\alpha \geq \tau_r$ par croissance, puis si l'inégalité est stricte, on aurait $\tau_r < \beta < \alpha \leq \tau_s$ pour tout $s > r$ et nécessairement $r < \langle M, M\rangle_\beta \leq s$ pour tout $s > r$ ce qui est absurde (car on peut prendre s arbitrairement proche de r) ;

– avec des limites à gauche en $r > 0$ avec

$$\lim_{s\nearrow r} \tau_s = \tau_{r^-} = \inf\big(t \geq 0 : \langle M, M\rangle_t = r\big).$$

La fonction $r \mapsto \tau_r$ est donc croissante càdlàg. On pose alors $\beta_r = M_{\tau_r}$. Le processus β est adapté par rapport à la filtration donnée par $\mathcal{G}_r = \mathcal{F}_{\tau_r}$, $r \geq 0$. Remarquons que cette filtration satisfait les conditions habituelles (puisque lorsque $(T_n)_{n\geq 1}$ est une suite de temps d'arrêt décroissants vers T on a $\mathcal{F}_T = \bigcap_{n\geq 1} \mathcal{F}_{T_n}$, cf. Prop. **??**).

Lemme 1.2 *Les intervalles de constance de M et de $\langle M, M\rangle$ sont ps les mêmes. En d'autres termes, on a ps pour tous $a < b$,*

$$M_t = M_a, \forall t \in [a, b] \Longleftrightarrow \langle M, M\rangle_t = \langle M, M\rangle_a, \forall t \in [a, b].$$

Démonstration : De la gauche vers la droite, utiliser l'approximation habituelle de $\langle M, M\rangle_t$. De la droite vers la gauche, appliquer le Corollaire **??** ($\langle M, M\rangle = 0$: M est indistinguable de M_0) au processus $M_{(a+t)\wedge T} - M_a$ pour un temps d'arrêt T convenable. □

Revenons à la preuve du Théorème 1.3. On a ps pour tout $r > 0$,

$$\lim_{s\nearrow r} \beta_s = \lim_{s\nearrow r} M_{\tau_s} = M_{\tau_{r^-}} = M_{\tau_r} = \beta_r.$$

où l'avant dernière égalité vient du Lemme 1.2 et du fait que pour $t \in [\tau_{r^-}, \tau_r]$, on a $\langle M, M\rangle_t = r$. Par ailleurs, par composition de telles fonctions, les trajectoires de β sont clairement continues à droite ; on conclut que le processus β est à trajectoires continues.

Nous montrons ensuite que β_s et $\beta_s^2 - s$ sont des martingales relativement à la filtration $(\mathcal{G}_s)_{s\geq 0}$. Pour tout $n \geq 1$, les martingales locales arrêtées M^{τ_n} et $(M^{\tau_n})^2 - \langle M, M\rangle^{\tau_n}$ sont des vraies martingales uniformément intégrables (d'après le Théorème **??** puisque $\langle M^{\tau_n}, M^{\tau_n}\rangle_\infty = \langle M, M\rangle_{\tau_n} = n$). Le théorème d'arrêt s'applique pour ces martingales uniformément intégrables et donne alors pour $r \leq s \leq n$:

$$\mathbb{E}[\beta_s|\mathcal{G}_r] = \mathbb{E}[M_{\tau_s}^{\tau_n}|\mathcal{F}_{\tau_r}] = M_{\tau_r}^{\tau_n} = \beta_r$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\beta_s^2 - s|\mathcal{G}_r] &= \mathbb{E}\big[(M_{\tau_s}^{\tau_n})^2 - \langle M^{\tau_n}, M^{\tau_n}\rangle_{\tau_s}|\mathcal{F}_{\tau_r}\big] \\ &= (M_{\tau_r}^{\tau_n})^2 - \langle M^{\tau_n}, M^{\tau_n}\rangle_{\tau_r} \\ &= \beta_r^2 - r.\end{aligned}$$

On a donc $\langle \beta, \beta\rangle_s = s$. Le Théorème 1.2 (Théorème de Lévy avec $d = 1$) assure alors que β est un $(\mathcal{G}_r)_{r\geq 0}$-mouvement brownien. Finalement, par définition de β, on a ps pour tout $t \geq 0$,

$$\beta_{\langle M,M\rangle_t} = M_{\tau_{\langle M,M\rangle_t}}.$$

On a

$$\tau_{\langle M,M\rangle_t} = \inf\big(s \geq 0 : \langle M, M\rangle_s > \langle M, M\rangle_t\big) \geq t,$$

si l'inégalité est stricte alors $\langle M, M\rangle$ est constante sur $[t, \tau_{\langle M,M\rangle_t}]$, et d'après le Lemme 1.2 M aussi, ce qui assure $M_{\tau_{\langle M,M\rangle_t}} = M_t$ et conclut que ps pour tout $t \geq 0$ on a $M_t = \beta_{\langle M,M\rangle_t}$. Par continuité des trajectoires, les deux processus sont indistinguables. □

1.4 Inégalités de Burkholder-Davis-Gundy

Dans cette section, on prouve les inégalités Burkholder-Davis-Gundy (BDG) qui montrent que pour une martingale locale M

$$\mathbb{E}\big[\langle M, M\rangle_t^m\big] \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\big[|M_t^*|^{2m}\big]$$

où $M_t^* = \max_{0\leq s\leq t} |M_s|$ sont de même ordre de grandeur sur $[0, +\infty[$ pour tout $m > 0$.

Théorème 1.4 (Inégalités de Burkholder-Davis-Gundy) *Pour tout réel $p \geq 0$, il existe des constantes c_p, C_p telles que pour toutes martingale locale M continue issue de 0,*

$$c_p\, \mathbb{E}\big[\langle M, M\rangle_\infty^{p/2}\big] \leq \mathbb{E}\big[(M_\infty^*)^p\big] \leq C_p\, \mathbb{E}\big[\langle M, M\rangle_\infty^{p/2}\big] \tag{1.14}$$

où $M_t^* = \sup_{0\leq s\leq t} |M_s|$.

Remarque 1.5 Si T est un temps d'arrêt quelconque, en remplaçant M par la martingale locale arrêtée M^T, on obtient les mêmes inégalités avec T à la place de $+\infty$; en particulier, on a les mêmes inégalités avec t à la place de $+\infty$.

On commence par les résultats préliminaires suivant :

Proposition 1.3 (Inégalités de martingales) *Soit M une martingale continue bornée et de variation quadratique bornée. Pour tout temps d'arrêt T, on a*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big[|M_T|^{2m}\big] &\leq C_m\mathbb{E}\big[\langle M,M\rangle_T^m\big], \quad m>0 && (1.15)\\ B_m\mathbb{E}\big[\langle M,M\rangle_T^m\big] &\leq \mathbb{E}\big[|M_T|^{2m}\big], \quad m>1/2 && (1.16)\\ B_m\mathbb{E}\big[\langle M,M\rangle_T^m\big] &\leq \mathbb{E}\big[(M_T^*)^{2m}\big]\leq C'_m\mathbb{E}\big[\langle M,M\rangle_T^m\big], \quad m>1/2 && (1.17)\end{aligned}$$

où B_m, C_m, C'_m sont des constantes universelles (qui dépendent seulement de m mais pas de la martingale M ni du temps d'arrêt T).

Remarque 1.6 En localisant correctement, on montre que (1.15) et (1.17) restent valables pour M martingale locale continue. Pour que (1.16) reste valable, il faut supposer en plus que $\mathbb{E}\big[\langle M,M\rangle_T^m\big]<+\infty$.

Démonstration :[Inégalités de martingales] On considère le processus

$$\begin{aligned} Y_t &= \delta+\varepsilon\langle M,M\rangle_t+M_t^2\\ &= \delta+(1+\varepsilon)\langle M,M\rangle_t+2\int_0^t M_s dM_s, \quad t\geq 0,\end{aligned}$$

où $\delta>0$ et $\varepsilon>0$ sont des constantes qui seront choisies plus tard et la deuxième expression vient de la formule d'Itô. En appliquant la formule d'Itô pour $f(x)=x^m$, on a pour $t\geq 0$:

$$\begin{aligned} Y_t^m &= \delta^m+m(1+\varepsilon)\int_0^t Y_s^{m-1}d\langle M,M\rangle_s+2m(m-1)\int_0^t Y_s^{m-2}M_s^2 d\langle M,M\rangle_s\\ &\quad +2m\int_0^t Y_s^{m-1}M_s dM_s.\end{aligned}$$

Comme par hypothèse M, Y et $\langle M,M\rangle$ sont bornées et Y est bornée de 0, l'intégrale $\int_0^t Y_s^{m-1}M_s dM_s$ est (vraie) une martingale uniformément intégrable. Le théorème d'arrêt (Théorème **??**) s'applique et donne

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T Y_s^{m-1}M_s dM_s\right]=0.$$

En prenant les espérances dans la formule d'Itô, on a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big[Y_T^m\big] &= \delta^m+m(1+\varepsilon)\mathbb{E}\left[\int_0^T Y_s^{m-1}d\langle M,M\rangle_s\right] && (1.18)\\ &\quad +2m(m-1)\mathbb{E}\left[\int_0^T Y_s^{m-2}M_s^2 d\langle M,M\rangle\right].\end{aligned}$$

Cas 1 : borne sup pour $0<m\leq 1$. Comme le dernier terme à droite de (1.18) est négatif pour $m\leq 1$, en faisant $\delta\to 0$, on a

$$\mathbb{E}\big[(\varepsilon\langle M,M\rangle_T+M_T^2)^m\big] \leq m(1+\varepsilon)\mathbb{E}\left[\int_0^T(\varepsilon\langle M,M\rangle_s+M_s^2)^{m-1}d\langle M,M\rangle_s\right]$$

$$
\begin{aligned}
&\leq m(1+\varepsilon)\varepsilon^{m-1}\mathbb{E}\left[\int_0^T \langle M,M\rangle_s^{m-1} d\langle M,M\rangle_s\right]\\
&= (1+\varepsilon)\varepsilon^{m-1}\mathbb{E}\big[\langle M,M\rangle_T^m\big] \qquad (1.19)
\end{aligned}
$$

en utilisant la décroissance de x^{m-1} pour $0 < m \leq 1$. Comme pour ces valeurs de m, $x \mapsto x^m$ est concave, on a

$$
2^{m-1}(x^m + y^m) \leq (x+y)^m, \quad x \geq 0, y \geq 0, \qquad (1.20)
$$

et (1.19) donne

$$
\varepsilon^m\mathbb{E}\big[\langle M,M\rangle_T^m\big] + \mathbb{E}\big[|M_T|^{2m}\big] \leq (1+\varepsilon)(\varepsilon/2)^{m-1}\mathbb{E}\big[\langle M,M\rangle_T^m\big]. \qquad (1.21)
$$

On déduit alors

$$
\mathbb{E}\big[|M_T|^{2m}\big] \leq \big((1+\varepsilon)(2/\varepsilon)^{1-m} - \varepsilon^m\big)\,\mathbb{E}\big[\langle M,M\rangle_T^m\big]. \qquad (1.22)
$$

Cas 2 : borne inf pour $m > 1$. Dans ce cas, le dernier terme à droite de (1.18) est positif, $x \mapsto x^{m-1}$ est croissante et $x \mapsto x^m$ est convexe. Les inégalités dans (1.19), (1.21), (1.22) se renversent pour mener à

$$
\mathbb{E}\big[|M_T|^{2m}\big] \geq \big((1+\varepsilon)(2/\varepsilon)^{1-m} - \varepsilon^m\big)\,\mathbb{E}\big[\langle M,M\rangle_T^m\big].
$$

Cas 3 : borne inf pour $\frac{1}{2} < m \leq 1$. En faisant $\varepsilon = 0$ et $\delta \to 0$ dans (1.18), on a

$$
\mathbb{E}\big[|M_T|^{2m}\big] = 2m(m-\frac{1}{2})\mathbb{E}\left[\int_0^T |M_s|^{2(m-1)} d\langle M,M\rangle_s\right]. \qquad (1.23)
$$

De plus, on déduit de (1.20) et (1.18) et de la décroissance de x^{m-1}

$$
\begin{aligned}
2^{m-1}\big(\varepsilon^m\mathbb{E}[\langle M,M\rangle_T^m] + \mathbb{E}[(\delta+M_T^2)^m]\big) &\leq \mathbb{E}\left[\big(\varepsilon\langle M,M\rangle_T + (\delta+M_T^2)\big)^m\right] = \mathbb{E}|Y_T^m]\\
&\leq \delta^m + m(1+\varepsilon)\mathbb{E}\left[\int_0^T (\delta+M_s^2)^{m-1} d\langle M,M\rangle_s\right].
\end{aligned}
$$

En faisant $\delta \searrow 0$, on voit alors

$$
2^{m-1}\big(\varepsilon^m\mathbb{E}\big[\langle M,M\rangle_T^m\big] + \mathbb{E}\big[|M_T|^{2m}\big]\big) \leq m(1+\varepsilon)\mathbb{E}\left[\int_0^T |M_s|^{2(m-1)} d\langle M,M\rangle_s\right]. \qquad (1.24)
$$

En combinant (1.23) et (1.24), on a la borne inférieure valable pour tout $\varepsilon > 0$:

$$
\mathbb{E}\big[|M_T|^{2m}\big] \geq \varepsilon^m\left(\frac{(1+\varepsilon)2^{1-m}}{2m-1} - 1\right)^{-1}\mathbb{E}\big[\langle M,M\rangle_T^m\big].
$$

Cas 4 : borne sup pour $m > 1$. Dans ce cas, l'inégalité (1.24) s'inverse et on a

$$\mathbb{E}\big[|M_T|^{2m}\big] \leq \varepsilon^m \left(\frac{(1+\varepsilon)2^{1-m}}{2m-1} - 1\right)^{-1} \mathbb{E}\big[\langle M, M\rangle_T^m\big]$$

où ε doit vérifier $\varepsilon > (2m-1)2^{m-1} - 1$.

Les cas 1–4 établissent (1.15) et (1.16). Pour prouver (1.17), on applique l'inégalité maximale de Doob à la $(\mathcal{F}_t)$-martingale $(M_{T\wedge t})_{t\geq 0}$ On a alors pour $m > 1/2$:

$$\begin{aligned} B_m\mathbb{E}\big[\langle M, M\rangle_{T\wedge t}^m\big] &\leq \mathbb{E}\big[|M_{T\wedge t}|^{2m}\big] \leq \mathbb{E}\big[(M_{T\wedge t}^*)^{2m}\big] \\ &\leq \left(\frac{2m}{2m-1}\right)^{2m} \mathbb{E}\big[|M_{T\wedge t}|^{2m}\big] \\ &\leq C_m \left(\frac{2m}{2m-1}\right)^{2m} \mathbb{E}\big[\langle M, M\rangle_{T\wedge t}^m\big], \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

ce qui est (1.17) avec T remplacé par $T \wedge t$. On conclut alors à l'aide du théorème de convergence monotone en faisant $t \to +\infty$. □

On utilise encore l'inégalité de Lenglart :

Proposition 1.4 (Inégalité de Lenglart) *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus continu positif partant de 0 et $(A_t)_{t\geq 0}$ un processus continu croissant tels que*

$$\textit{pour tout temps d'arrêt } T \textit{ borné} : \quad \mathbb{E}[X_T] \leq \mathbb{E}[A_T]. \tag{1.25}$$

Alors pour tout temps d'arrêt T borné :

$$\mathbb{P}\left(\max_{s\leq T} X_s \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{E}[\delta \wedge A_T]}{\varepsilon} + \mathbb{P}(A_T \geq \delta), \quad \varepsilon, \delta > 0 \tag{1.26}$$

$$\mathbb{E}\big[(X_T^*)^p\big] \leq \frac{2-p}{1-p}\mathbb{E}\big[A_T^p\big], \quad 0 < p < 1. \tag{1.27}$$

Remarque 1.7 Noter que la condition (1.25) est remplie si $X = M^2$ où M est une martingale continue bornée dans L^2 car par définition du crochet de M, on a $X_t - A_t = M_t^2 - \langle M, M\rangle_t$ martingale locale et c'est une vraie martingale car $M \in L^2$. Le théorème d'arrêt (avec T borné et $0 \leq T$) donne en prenant l'espérance $\mathbb{E}\big[M_T^2 - A_T\big] = \mathbb{E}\big[M_0^2 - A_0\big]$, ie. $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[A_T]$.
La condition (1.25) est encore remplie si M est une martingale locale réduite par T_n : on peut supposer que M^{T_n} est une martingale L^2 pour laquelle d'après 1) (1.25) est vraie, ie.

$$\mathbb{E}[X_{T\wedge T_n}] = \mathbb{E}[A_{T\wedge T_n}] \leq \mathbb{E}[A_T].$$

Mais comme $T_n \nearrow +\infty$ et T est borné, par le lemme de Fatou,

$$\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}\big[\liminf_n X_{T\wedge T_n}\big] \leq \liminf_n \mathbb{E}[X_{T\wedge T_n}] \leq \liminf_n \mathbb{E}[A_{T\wedge T_n}] \leq \mathbb{E}[A_T].$$

Démonstration : Soient d'abord T un temps d'arrêt borné et $\varepsilon > 0$. On note $R = \inf\big(t \geq 0 : X_t \geq \varepsilon\big)$. Sur $\{X_T^* \geq \varepsilon\}$, on a $R \leq T$ ou encore $R = R \wedge T$. Comme par continuité des trajectoires $X_R = \varepsilon$, on a alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(X_T^* \geq \varepsilon\big) &= \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_{\{X_T^* \geq \varepsilon\}}\big] = \mathbb{E}\left[\frac{X_R}{\varepsilon}\mathbf{1}_{\{X_T^* \geq \varepsilon\}}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{X_{R\wedge T}}{\varepsilon}\mathbf{1}_{\{X_T^* \geq \varepsilon\}}\right] \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}[X_{R\wedge T}] \leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}[A_{R\wedge T}] \leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}[A_T] \qquad (1.28)
\end{aligned}$$

où on utilise d'abord (1.25) avec $T \wedge R$ borné puis la croissance de A.

Si T est un temps d'arrêt quelconque, alors (1.28) s'applique à $T_n = T \wedge n$ temps d'arrêt borné : $\mathbb{P}(X_{T_n}^* \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}[A_{T_n}]$. Mais comme $T_n \to T$, $\bigcup_{n\geq 1}\{X_{T_n}^* > \varepsilon\} = \{X_T^* > \varepsilon\}$ (réunion croissante), en passant à la limite, on a :

$$\mathbb{P}\big(X_T^* > \varepsilon\big) = \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\big(X_{T_n}^* > \varepsilon\big) \leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}[A_T].$$

On a aussi $\mathbb{P}(X_T^* > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}[A_T]$. Finalement, soient $\varepsilon, \delta > 0$ et $S = \inf\big(t \geq 0 : A_t \geq \delta\big)$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(X_T^* \geq \varepsilon\big) &= \mathbb{P}\big(X_T^* \geq \varepsilon, A_T < \delta\big) + \mathbb{P}\big(X_T^* \geq \varepsilon, A_T \geq \delta\big) \\
&\leq \mathbb{P}(X_T^* \geq \varepsilon, T < S) + \mathbb{P}(A_T \geq \delta) \\
&\leq \mathbb{P}(X_{T\wedge S}^* \geq \varepsilon) + \mathbb{P}(A_T \geq \delta) \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\big[A_{T\wedge S}\big] + \mathbb{P}(A_T \geq \delta) \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\big[A_T \wedge \delta\big] + \mathbb{P}(A_T \geq \delta)
\end{aligned}$$

en utilisant (1.28) avec $T \wedge S$ puis la définition de S (qui assure $A_{T\wedge S} = A_T \wedge \delta$).

Considérons $(M^n)_{n\geq 1}$ une suite de martingales locales et un temps d'arrêt T tels que $\langle M^n, M^n\rangle_T \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. D'après la remarque, la borne précédente reste vraie pour $X = (M^n)^2$ et $A_t = \langle M^n, M^n\rangle_t$ où M^n est une martingale locale. on a alors

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s\leq T}|M_s^n|^2 > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\big[\langle M^n, M^n\rangle_T \wedge \delta\big] + \mathbb{P}\big(\langle M^n, M^n\rangle_T \geq \delta\big).$$

Le deuxième terme tend vers 0 directement par l'hypothèse. Comme $\langle M^n, M^n\rangle_T \wedge \delta \leq \delta$ est borné, le premier terme tend aussi vers 0 par convergence dominée. Finalement, $\mathbb{P}\left(\sup_{s\leq T}|M_s^n|^2 > \varepsilon\right) \to 0$, ce qui assure, en probabilité

$$\mathbb{P}\text{-}\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{s\leq T}|M_s^n|\right) = 0.$$

Pour la dernière partie, on utilise $\mathbb{E}[Z] = \int_0^{+\infty}\mathbb{P}(Z \geq x)dx$ valable pour toute variable aléatoire Z positive. Avec ci-dessous (1.28) pour $\varepsilon = \delta = x^{-1/p}$, on a

$$\mathbb{E}\big[(X_T^*)^p\big] \leq \int_0^{+\infty}\mathbb{P}\big((X_T^*)^p > x\big)dx$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\big(X_T^* > x^{1/p}\big)dx \\
&\leq \int_0^{+\infty} x^{-1/p}\mathbb{E}\big[A_T \wedge x^{1/p}\big] + \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\big(A_T > x^{1/p}\big)dx \\
&\leq \mathbb{E}\left[\int_0^{A_T^p} dx\right] + \mathbb{E}\left[\int_{A_T^p}^{+\infty} A_T x^{-1/p}dx\right] + \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\big(A_T^p > x\big)dx \\
&\leq \mathbb{E}[A_T^p] + \mathbb{E}\left[A_T \times \frac{p}{1-p}A_T^{p-1}\right] + \mathbb{E}\big[A_T^p\big] \\
&\leq \frac{2-p}{1-p}\mathbb{E}\big[A_T^p\big].
\end{aligned}
$$

□

Démonstration des inégalités BDG (Théorème 1.4). D'après les inégalités de martingales précédentes (Proposition 1.3) et la remarque qui les suit, (1.14) est valable pour $p = 2m > 1$. Il reste à voir le cas $0 < p = 2m \leq 1$. On suppose (quitte à localiser les processus) que M et $\langle M, M\rangle$ sont bornées et on utilise l'inégalité de Lenglart (1.27).

D'après l'inégalité droite dans (1.17) (avec $m = 1$), on peut appliquer l'inégalité de Lenglart (1.27) avec

$$X = (M^*)^2, \quad A = C_1'\langle M, M\rangle$$

et on a pour $m \leq 1/2$:

$$\mathbb{E}\big[(M_T^*)^{2m}\big] \leq \frac{2-m}{1-m}\,(C_1')^m\mathbb{E}\big[\langle M, M\rangle_T^m\big]$$

pour tout $0 < m < 1$. De la même façon, l'inégalité à gauche de (1.17) (avec $m = 1$) permet d'appliquer l'inégalité de Lenglart avec

$$X = B_1\langle M, M\rangle, \quad A = (M^*)^2$$

ce qui donne, pour $0 < m < 1$,

$$\frac{1-m}{2-m}B_1^m\mathbb{E}\big[\langle M, M\rangle_T^m\big] \leq \mathbb{E}\big[(M_T^*)^{2m}\big].$$

Cela achève la preuve des inégalités BDG. □

1.5 Représentation des martingales (browniennes)

Nous montrons que lorsque la filtration est engendrée par un mouvement brownien, toutes les martingales pour cette filtration peuvent être représentées comme intégrales stochastiques par rapport à ce mouvement brownien.

Théorème 1.5 (Représentation des martingales) *On suppose que la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sur Ω est (l'augmentation habituelle de) la filtration canonique d'un mouvement brownien B issu de 0. Alors, pour toute variable aléatoire $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$, il existe un (unique) processus $h \in L^2(B)$ (en particulier progressif donc adapté) tel que*

$$Z = \mathbb{E}[Z] + \int_0^{+\infty} h(s,\omega)\ dB_s.$$

Par conséquent, pour toute martingale M continue et bornée dans L^2 (respectivement pour toute martingale locale M continue), il existe un (unique) processus $h \in L^2(B)$ (resp. $h \in L^2_{loc}(B)$) et une constante C réelle tels que

$$M_t = C + \int_0^t h(s,\omega)\ dB_s.$$

La preuve utilise le résultat suivant de densité.

Lemme 1.3 *Sous les hypothèses du théorème précédent, l'espace vectoriel engendré par les variables aléatoires*

$$\exp\Big(i\sum_{j=1}^n \lambda_j(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\Big)$$

pour $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ est dense dans $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$.

Démonstration :[Lemme 1.3] Il suffit de montrer que si $Z \in L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ vérifie

$$\mathbb{E}\left[Z \exp\Big(i\sum_{j=1}^n \lambda_j(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\Big)\right] = 0 \tag{1.29}$$

pour tout choix de $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ alors $Z = 0$.
Soient $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ fixés et on note $g_{m,\sigma^2}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, la densité de la loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$, $m \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$. La condition (1.29) assure que pour tous $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2 > 0$ et $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n g_{m_j,\sigma_j^2}(\lambda_j)\mathbb{E}\left[Z \exp\Big(i\sum_{j=1}^n \lambda_j(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\Big)\right] d\lambda_1 \dots d\lambda_j \\ &= \mathbb{E}\left[Z \prod_{j=1}^n \exp\left(im_j(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) - \frac{\sigma_j^2(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

où la deuxième égalité vient du théorème de Fubini et de l'expression de la fonction caractéristique d'une loi gaussienne. On obtient pour tous $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{R}$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$:

$$\mathbb{E}\left[Z\ \prod_{j=1}^n \exp\big(im_j(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) - \alpha_j(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2\big)\right] = 0.$$

Le théorème de Stone-Weierstrass garantit que les combinaisons linéaires complexes de la fonction constante égale à 1 et des fonctions de la forme

$$(y_1, \ldots, y_n) \mapsto \exp\Big(\sum_{j=1}^{n}(im_j y_j - \alpha_j y_j^2)\Big)$$

avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_m > 0$ et $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{R}$ sont denses dans l'espace $C_\ell(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$ qui ont une limite à l'infini, muni de la norme de la convergence uniforme. Par un passage à la limite, on obtient donc, pour toute fonction $\varphi \in C_\ell(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$,

$$\mathbb{E}\big[Z\ \varphi(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})\big] = 0.$$

On a donc, d'abord par approximation, pour tout ouvert borné U de $\mathbb{R}^n$ puis, par un argument de classe monotone, pour tout borélien U de $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{E}\big[Z\ \mathbf{1}_U(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})\big] = 0.$$

Finalement, on a obtenu l'égalité $\mathbb{E}[Z\mathbf{1}_A] = 0$ pour tout $A \in \sigma(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$. Avec un dernier argument de classe monotone, on montre que cette égalité reste vraie pour tout $A \in \sigma(B_t : t \geq 0)$; puis, par complétion, pour tout $A \in \mathcal{F}_\infty$. On conclut finalement que $Z = 0$ ce qui établit le lemme. □

Démonstration :(du Théorème 1.5) On montre d'abord la première assertion. Pour cela, on note $\mathcal{H}$ l'espace vectoriel des variables aléatoires $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ qui ont la propriété annoncée. Remarquons que l'unicité de h est facile à établir puisque si h et $\widetilde{h}$ correspondent à la même variable aléatoire Z, on a par isométrie :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} (h(s,\omega) - \widetilde{h}(s,\omega))^2\ ds\right] = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^{+\infty} h(s,\omega)\ dB_s - \int_0^{+\infty} \widetilde{h}(s,\omega))^2\ dB_s\right)^2\right] = 0,$$

d'où $h = \widetilde{h}$ dans $L^2(B)$. Si $Z \in \mathcal{H}$ correspond à h,

$$\mathbb{E}[Z^2] = \mathbb{E}[Z]^2 + \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} h(s,\omega)^2\ ds\right].$$

Il en découle facilement que si $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une suite dans $\mathcal{H}$ qui converge dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ vers Z, les processus h_n associés à Z_n forment une suite de Cauchy dans $L^2(B)$ donc convergent vers $h \in L^2(B)$. D'après la propriété d'isométrie de l'intégrale stochastique (Théorème **??**) on a alors $Z = \mathbb{E}[Z] + \int_0^{+\infty} h(s,\omega)\ dB_s$ et $\mathcal{H}$ est donc fermé.

Ensuite, pour $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, notons $f(s) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{1}_{]t_{j-1}, t_j]}(s)$ et $\mathcal{E}_t^f$ la martingale exponentielle $\mathcal{E}\left(i\int_0^{\cdot} f(s)\ dB_s\right)$ (cf. Proposition 1.1). La formule d'Itô pour l'exponentielle stochastique (cf. (1.9)) montre que

$$\exp\Big(i\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2(t_j - t_{j-1})\Big) = \mathcal{E}_\infty^f = 1 + i\int_0^{+\infty} \mathcal{E}_s^f f(s)\ dB_s$$

soit

$$\begin{aligned}&\exp\Big(i\sum_{j=1}^n\lambda_j(B_{t_j}-B_{t_{j-1}})\Big)\\ =\ &\exp\Big(-\frac12\sum_{j=1}^n\lambda_j^2(t_j-t_{j-1})\Big)+i\int_0^{+\infty}\exp\Big(-\frac12\sum_{j=1}^n\lambda_j^2(t_j-t_{j-1})\Big)\mathcal{E}_s^f f(s)\,dB_s\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\left\{\exp\left(i\sum_{j=1}^n\lambda_j(B_{t_j}-B_{t_{j-1}})\right):\lambda_j\in\mathbb{R},0=t_0<t_1\cdots<t_n,n\in\mathbb{N}\right\}\subset\mathcal{H}$$

et d'après le Lemme 1.3,

$$L^2(\Omega,\mathcal{F}_\infty)=\overline{\mathrm{Vect}\,\left\{\exp\left(i\sum_{j=1}^n\lambda_j(B_{t_j}-B_{t_{j-1}})\right):\lambda_j\in\mathbb{R},0=t_0<t_1\cdots<t_n,n\in\mathbb{N}\right\}}\subset\overline{\mathcal{H}}=\mathcal{H}.$$

On a donc $\mathcal{H}=L^2(\Omega,\mathcal{F}_\infty)$ ce qui prouve la première partie du théorème.

Soit maintenant M une martingale continue et bornée dans L^2, alors, d'après la première partie, $M_\infty\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_\infty)$ s'écrit, avec $h\in L^2(B)$, sous la forme

$$M_\infty=\mathbb{E}[M_\infty]+\int_0^{+\infty}h(s,\omega)\,dB_s.$$

Par conditionnement, il vient :

$$M_t=\mathbb{E}[M_\infty|\mathcal{F}_t]=\mathbb{E}[M_\infty]+\int_0^t h(s,\omega)\,dB_s.$$

L'unicité de h s'obtient comme dans la première partie.

Enfin, soit M une martingale locale (continue), on a d'abord $M_0=C\in\mathbb{R}$ parce que $\mathcal{F}_0$ est $\mathbb{P}$-triviale (ce qu'on peut déduire soit de la première partie de la preuve soit du Chapitre **??**). Si $T_n=\inf\big(t\geq 0:|M_t|\geq n\big)$ on peut appliquer ce qui précède à la martingale arrêtée M^{T_n} et trouver un processus $h_n\in L^2(B)$ tel que

$$M_t^{T_n}=C+\int_0^t h_n(s,\omega)\,dB_s.$$

Par unicité dans la deuxième partie, si $m<n$, on a $h_n(s,\omega)=h_m(s,\omega)$, ds-pp sur $[0,T_m]$ ps. Il est alors facile de construire $h\in L^2_{loc}(B)$ tel que, pour tout m, $h(s,\omega)=h_m(s,\omega)$ ds-pp sur $[0,T_m]$ ps. La formule annoncée découle ensuite de la construction de l'intégrale stochastique $\int_0^t h(s,\omega)\,dB_s$ et l'unicité de h s'obtient aussi facilement par un argument de localisation. □

Remarque 1.8 Sous les hypothèses du Théorème 1.5, notons $\mathcal{N}$ la classe des $\mathbb{P}$-négligeables de $\sigma(B_t : t \geq 0)$ et pour tout $t \geq 0$, $\mathcal{G}_t = \sigma(B_s : 0 \leq s \leq t) \vee \mathcal{N}$. A priori, on a $\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_{t^+}$. En fait, le Théorème 1.5 entraîne que $\mathcal{G}_t = \mathcal{G}_{t^+} = \mathcal{F}_t$ (le cas $t = 0$ est la loi de Blumenthal). En effet, si Z est une variable aléatoire $\mathcal{F}_t$-mesurable bornée, on a

$$Z = \int_0^t h(s,\omega)\ dB_s = (L^2)\text{-}\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^{t-\varepsilon} h(s,\omega)\ dB_s.$$

et quitte à prendre une sous-suite, on voit que Z est limite ps de variables $(\mathcal{G}_t)_t$-mesurables (car si $\varepsilon > 0 : \mathcal{F}_{t-\varepsilon} \subset \mathcal{G}_t$).

1.6 Formule de Tanaka

Théorème 1.6 (Formule de Tanaka) *Soit X une semimartingale continue. Il existe $(L_t^a)_{t\geq 0}$, $a \in \mathbb{R}$, processus croissant continu, appelé* **temps local** *en a de la semimartingale X, tel que*

$$\begin{aligned}
(X_t - a)^+ &= (X_0 - a)^+ + \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s > a\}} dX_s + \frac{1}{2} L_t^a \\
(X_t - a)^- &= (X_0 - a)^- - \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s \leq a\}} dX_s + \frac{1}{2} L_t^a \\
|X_t - a| &= |X_0 - a| + \int_0^t sgn(X_s - a) dX_s + L_t^a
\end{aligned}$$

où $sgn(x) = -1, 1$ selon que $x \leq 0, x > 0$. De plus, la mesure (de Stieltjes) dL_t^a associée à L_t^a est portée par $\{t \in \mathbb{R} : X_t = a\}$.

Démonstration : On considère d'abord φ une fonction convexe continue. Bien que φ ne soit pas C^2, on tente d'écrire une « formule d'Itô » pour $\varphi(X_t)$.

Soit j une fonction positive de classe C^∞ à support compact inclus dans $]-\infty, 0]$ telle que $\int_{-\infty}^0 j(y)dy = 1$. On pose $\varphi_n(x) = n \int_{-\infty}^0 \varphi(x+y) j(ny) dy$. Comme φ convexe est localement bornée, φ_n est bien définie. De plus, φ_n est C^∞ et converge simplement vers φ et φ_n' croît vers φ_-', dérivée à gauche de φ.

En appliquant la formule d'Itô à la fonction φ_n de classe C^2, on a pour chaque $n \geq 1$:

$$\varphi_n(X_t) = \varphi_n(X_0) + \int_0^t \varphi_n'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} A_t^{\varphi_n} \tag{1.30}$$

où $A_t^{\varphi_n} = \int_0^t \varphi_n''(X_s) d\langle X, X\rangle_s$.

On a $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(X_t) = \varphi(X_t)$ et $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(X_0) = \varphi(X_0)$. En arrêtant X, on peut supposer que X et $\varphi_n'(X_s)$ sont bornées (uniformément en n car $\varphi_1' \leq \varphi_n' \leq \varphi_-'$). Par le Théorème **??** (convergence dominée pour l'intégrale stochastique), on a

$$\int_0^t \varphi_n'(X_s) dX_s \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_0^t \varphi_-'(X_s) dX_s$$

uniformément sur les compacts. Par conséquent, A^{φ_n} converge vers un processus A^φ croissant car limite de processus croissants. En passant à la limite dans (1.30), il vient

$$\varphi(X_t) = \varphi(X_0) + \int_0^t \varphi'_-(X_s)dX_s + \frac{1}{2}A_t^\varphi \tag{1.31}$$

puis le processus A^φ peut être choisi continu (car différence de processus continus).

On applique (1.31) à $\varphi(x) = (x-a)^+$ fonction convexe de dérivée à gauche $\varphi'_- = \mathbf{1}_{]a,+\infty[}$: il existe un processus croissant A^+ tel que

$$(X_t - a)^+ = (X_0 - a)^+ + \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s > a\}} dX_s + \frac{1}{2}A_t^+. \tag{1.32}$$

De la même façon avec $\varphi(x) = (x-a)^-$ fonction convexe de dérivée à gauche $\varphi'_- = -\mathbf{1}_{]-\infty,a]}$: il existe un processus croissant A^- tel que

$$(X_t - a)^- = (X_0 - a)^- - \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s \leq a\}} dX_s + \frac{1}{2}A_t^-. \tag{1.33}$$

Par différence de (1.32) et (1.33), comme $x = x^+ - x^-$, on a

$$X_t = X_0 + \int_0^t dX_s + \frac{1}{2}(A_t^+ - A_t^-). \tag{1.34}$$

Il vient $A^+ = A^-$ et on pose alors $L_t^a = A_t^+$. En sommant (1.32) et (1.33), comme $|x| = x^+ + x^-$, on a

$$|X_t - a| = |X_0 - a| + \int_0^t \mathrm{sgn}(X_s - a)dX_s + L_t^a.$$

Pour la dernière partie, en appliquant la formule d'Itô à la semimartingale $|X_t - a|$ avec $f(x) = x^2$, on a en utilisant aussi (1.34)

$$\begin{aligned} |X_t - a|^2 &= |X_0 - a|^2 + 2\int_0^t |X_s - a|\ d(|X_s - a|)_s + \langle |X-a|, |X-a| \rangle_t \\ &= (X_0 - a)^2 + 2\int_0^t |X_s - a| \mathrm{sign}\ (X_s - a)\ dX_s + 2\int_0^t |X_s - a|\ dL_s^a + \langle X, X\rangle_t. \end{aligned}$$

En comparant avec la formule d'Itô pour X avec $f(x) = (x-a)^2$,

$$(X_t - a)^2 = (X_0 - a)^2 + 2\int_0^t (X_s - a)\ dX_s + \langle X, X \rangle_t$$

il vient $\int_0^t |X_s - a|\ dL_s^a = 0$ ps, ce qui est le résultat. □

Remarque 1.9 (Formule d'Itô-Tanaka) Lorsque $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe, on peut préciser (1.31) : on montre que

$$A_t^\varphi = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} L_t^a \varphi''(da)$$

où $\varphi''(da)$ est la mesure associée à φ'' à comprendre dans le sens des distributions. On a alors la formule d'Itô-Tanaka pour φ convexe :

$$\varphi(X_t) = \varphi(X_0) + \int_0^t \varphi'_-(X_s) dX_s + \int_{-\infty}^{+\infty} L_t^a \, \varphi''(da). \tag{1.35}$$

La formule (1.35) se généralise immédiatement à une combinaison linéaire de fonctions convexes $\varphi = \sum_{i=1}^p \alpha_i \varphi_i$. Dans ce cas, φ'' devient une mesure signée.

Chapitre 2

Théorème de Girsanov

La formule d'Itô étudiée au Chapitre 1 explore comment se transforme une semimartingale quand on lui applique une transformation C^2. On étudie maintenant comment se transforme une semimartingale lorsqu'on change de mesure de probabilité $\mathbb{P}$. C'est l'objet du théorème de Girsanov qu'on prouve en Section 2.2 et dont on étudie les premières conséquences en Section 2.2.

Commençons par une approche heuristique pour des variables aléatoires : la densité gaussienne standard $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$ possède la propriété suivante $g(x-a) = g(x)e^{ax-a^2/2}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ qui se réécrit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(N+a)] &= \int f(x+a)g(x)dx \\ &= \int f(x)g(x-a)dx \\ &= \int f(x)e^{ax-a^2/2}g(x)dx \\ &= \mathbb{E}[f(N)\exp(aN-a^2/2)] = \mathbb{E}_a[f(N)] \end{aligned}$$

pour f mesurable bornée et $N \sim \mathcal{N}(0,1)$ et en notant $\mathbb{E}_a$ pour l'espérance sous

$$d\mathbb{Q}^{(a)} = \exp(aN - a^2/2)\ d\mathbb{P}.$$

Cela signifie que la variable aléatoire translatée $N+a$ suit la même loi que N en changeant la probabilité en $d\mathbb{Q}^{(a)} = \exp(aN - a^2/2)\ d\mathbb{P}$ ie. $\mathbb{P}_{N+a} = \mathbb{Q}^{(a)}_N$.
C'est cette observation, généralisée au mouvement brownien, qui constitue la formule de Cameron-Martin (1944, cf. Corollaire 2.7) puis le Théorème de Girsanov original (1960, cf. Corollaire 2.6). Ce théorème a ensuite été étendu à des martingales locales plus générales, c'est cette version que nous présentons.

On considère $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace filtré satisfaisant les conditions habituelles.

2.1 Logarithme stochastique

La propriété de martingale est liée à la probabilité utilisée : si on change $\mathbb{P}$ en $\mathbb{Q}$, une martingale X (pour $\mathbb{P}$) n'a pas de raison de rester une martingale pour $\mathbb{Q}$. Dans cette section, on étudie comment se transforme une semimartingale quand on change la probabilité $\mathbb{P}$ en $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$. La réponse est donnée par le Théorème de Girsanov (Th. 2.1). Pour éviter les confusions dans un tel contexte, on indique la probabilité par rapport à laquelle une martingale est considérée (on écrira ainsi : soit X une $\mathbb{P}$-martingale ou une $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$-martingale et on notera $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$ pour une espérance relative à $\mathbb{P}$).

Dans la suite, on considère $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_\infty$. Bien sûr, on a alors $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_t$ pour tout $t \geq 0$ et on note $D_t = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}_{|\mathcal{F}_t}$ la dérivée de Radon-Nikodym de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_t$. Dans un contexte statistique, D s'appelle la vraisemblance de $\mathbb{Q}$ (par rapport à $\mathbb{P}$). Le processus D vérifie les propriétés suivantes :

Proposition 2.1 (Processus dérivée de Radon-Nikodym)

1. *D est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale uniformément intégrable.*
2. *D admet une modification càdlàg ; pour cette version et pour tout temps d'arrêt T, on a $D_T = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}_{|\mathcal{F}_T}$.*
3. *Si $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_\infty$ (ie. $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ et $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$) alors ps pour tout $t \geq 0$, $D_t > 0$.*

Démonstration : 1) Pour $A \in \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_\infty$, on a

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbf{1}_A] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_A D_\infty] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\mathbf{1}_A \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[D_\infty|\mathcal{F}_t]\big].$$

Comme $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[D_\infty|\mathcal{F}_t]$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable, par unicité de la dérivée de Radon-Nikodym, il vient $D_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[D_\infty|\mathcal{F}_t]$ ps, ce qui assure que D est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale (filtration complète) ; elle est uniformément intégrable car fermée.

2) D'après le Théorème **??** (régularisation trajectorielle des martingales), D admet une version càdlàg. On peut donc considérer que D est càdlàg, ce qui permet d'appliquer le théorème d'arrêt (D est uniformément intégrable) : si T est un temps d'arrêt et $A \in \mathcal{F}_T$, on a :

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbf{1}_A] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_A D_\infty] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_A D_T].$$

Comme D_T est $\mathcal{F}_T$-mesurable, par unicité de la dérivée de Radon-Nikodym, on a $D_T = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}_{|\mathcal{F}_T}$.

3) Posons $S = \inf\big(t \geq 0 : D_t = 0\big)$. Il s'agit d'un temp d'arrêt. Sur $\{S < +\infty\}$, on peut considérer $s_n \searrow S$ avec $D_{s_n} = 0$, la continuité à droite de D assure alors $D_S = 0$. Avec $A = \{S < +\infty\} \in \mathcal{F}_S$, on a d'après le 2) : $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_A D_S] = 0$ et donc par hypothèse on a aussi $\mathbb{P}(A) = 0$. Ainsi, $S = +\infty$ $\mathbb{P}$ (ou $\mathbb{Q}$)-presque sûrement, c'est à dire $D_t > 0$ pour tout $t \geq 0$. □

Dans la suite, on suppose en général D à trajectoires continues. La notion d'exponentielle stochastique a été visitée au Chapitre 1. On lui associe maintenant la notion de logarithme stochastique :

Proposition 2.2 (Logarithme stochastique) *Soit D une martingale locale continue strictement positive. Alors, il existe une unique martingale locale, à trajectoire continues, L, appelée logarithme stochastique de D, telle que*

$$D_t = \exp\left(L_t - \frac{1}{2}\langle L, L\rangle_t\right) = \mathcal{E}(L)_t. \tag{2.1}$$

De plus, L est donnée par l'expression

$$L_t = \ln D_0 + \int_0^t D_s^{-1} dD_s. \tag{2.2}$$

Démonstration : Unicité. Si $D_t = \exp\left(L_t - \frac{1}{2}\langle L, L\rangle_t\right) = \exp\left(L'_t - \frac{1}{2}\langle L', L'\rangle_t\right)$ pour tout $t \geq 0$ alors $L_t - L'_t = \frac{1}{2}\langle L, L\rangle_t - \frac{1}{2}\langle L', L'\rangle_t$ pour tout $t \geq 0$ ce qui exige $L = L'$ par le Théorème **??** (une martingale locale à variation bornée et issue de 0 est nulle).

Existence. Prenons L donné par (2.2) et remarquons que

$$\langle L, L\rangle_t = \int_0^t \frac{d\langle D, D\rangle_s}{D_s^2}.$$

Comme $D > 0$ et ln est C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$, on applique la formule d'Itô à $\ln D$:

$$\ln D_t = \ln D_0 + \int_0^t \frac{dD_s}{D_s} - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d\langle D, D\rangle_s}{D_s^2} = L_t - \frac{1}{2}\langle L, L\rangle_t,$$

ce qui donne (2.1) en appliquant exp. □

Proposition 2.3 ($\mathbb{P}$-martingale et $\mathbb{Q}$-martingale) *Soit $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_\infty$. Soit L le logarithme stochastique associé à la martingale $D_t = (d\mathbb{Q}/d\mathbb{P})_{|\mathcal{F}_t}$ qu'on suppose continue. Soient X un processus continu adapté et T un temps d'arrêt tel que $(XD)^T$ est une $\mathbb{P}$-martingale alors X^T est une $\mathbb{Q}$-martingale. En particulier, si XD est une $\mathbb{P}$-martingale locale alors X est une $\mathbb{Q}$-martingale locale.*

Démonstration : La seconde partie de la proposition découle facilement de la première partie qu'on se contente de prouver.
Pour cela, on a d'abord $X_t^T \in L^1(\mathbb{Q})$ car d'après la Proposition 2.1,

$$\mathbb{E}_\mathbb{Q}[|X_{T\wedge t}|] = \mathbb{E}_\mathbb{P}[|X_{T\wedge t} D_{T\wedge t}|] < +\infty.$$

Puis considérons $s < t$ et $A \in \mathcal{F}_s$. Comme $A \cap \{T > s\} = A \cap \{T \le s\}^c \in \mathcal{F}_s$ et $(XD)^T$ est une $\mathbb{P}$-martingale, on a

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\mathbf{1}_{A\cap\{T>s\}} X_{T\wedge t} D_{T\wedge t}\big] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\mathbf{1}_{A\cap\{T>s\}} X_{T\wedge s} D_{T\wedge s}\big] \tag{2.3}$$

par propriété de $\mathbb{P}$-martingale pour $(XD)^T$. On a aussi $A \cap \{T > s\} \in \mathcal{F}_T$ car pour tout $u \ge 0$,

$$\begin{array}{ll} \text{si } s \le u & A \cap \{T > s\} \cap \{T \le u\} \in \mathcal{F}_s \cap \mathcal{F}_u \subset \mathcal{F}_u, \\ \text{si } s > u & A \cap \{T > s\} \cap \{T \le u\} = \emptyset \in \mathcal{F}_u. \end{array}$$

Comme aussi $A \cap \{T > s\} \in \mathcal{F}_s$, on a donc $A \cap \{T > s\} \in \mathcal{F}_{T\wedge s} \subset \mathcal{F}_{T\wedge t}$, l'égalité (2.3) se réécrit

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\big[\mathbf{1}_{A\cap\{T>s\}} X_{T\wedge t}\big] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\big[\mathbf{1}_{A\cap\{T>s\}} X_{T\wedge s}\big]$$

car on rappelle que par la Proposition 2.1 :

$$D_{T\wedge t} = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}_{|\mathcal{F}_{T\wedge t}}, \quad D_{T\wedge s} = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}_{|\mathcal{F}_{T\wedge s}}.$$

Par ailleurs, comme il est évident que $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbf{1}_{A\cap\{T\le s\}} X_{T\wedge t}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbf{1}_{A\cap\{T\le s\}} X_{T\wedge s}]$ (car dans ces deux intégrales $X_{T\wedge t} = X_T = X_{T\wedge s}$), il vient $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbf{1}_A X_{T\wedge t}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbf{1}_A X_{T\wedge s}]$ pour tout $A \in \mathcal{F}_s$. Cela établit que X^T est une $\mathbb{Q}$-martingale et prouve la proposition. □

2.2 Théorème de Girsanov

Théorème 2.1 (Girsanov) *Soit $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_\infty$ et soit L le logarithme stochastique (supposé à trajectoires continues) associé à la martingale $D_t = (d\mathbb{Q}/d\mathbb{P})_{|\mathcal{F}_t}$. Si M est une $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$-martingale locale continue, alors le processus $\widetilde{M} = M - \langle M, L\rangle$ est une $(\mathcal{F}_t, \mathbb{Q})$-martingale locale continue.*

Sous les hypothèses du Théorème 2.1, notons $\widetilde{M} = \mathcal{G}^{\mathbb{P}}_{\mathbb{Q}}(M)$. Alors l'application $\mathcal{G}^{\mathbb{P}}_{\mathbb{Q}}$ vérifie :

- $\mathcal{G}^{\mathbb{P}}_{\mathbb{Q}}$ envoie l'ensemble des $\mathbb{P}$-martingales locales continues dans l'ensemble des $\mathbb{Q}$-martingales locales continues.
- On a
$$\mathcal{G}^{\mathbb{Q}}_{\mathbb{P}} \circ \mathcal{G}^{\mathbb{P}}_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Id}. \tag{2.4}$$
- De plus, $\mathcal{G}^{\mathbb{P}}_{\mathbb{Q}}$ commute avec l'intégrale stochastique, ie. si H est un processus localement borné alors $H \cdot \mathcal{G}^{\mathbb{P}}_{\mathbb{Q}}(M) = \mathcal{G}^{\mathbb{P}}_{\mathbb{Q}}(H \cdot M)$.

Démonstration : On applique la formule d'Itô avec $F(x, y) = xy$ de classe C^2 aux semimartingales $\widetilde{M} = M - \langle M, L\rangle$ et D :

$$\widetilde{M}_t D_t = \widetilde{M}_0 D_0 + \int_0^t \widetilde{M}_s dD_s + \int_0^t D_s d\widetilde{M}_s + \langle \widetilde{M}, D\rangle_t$$

$$\begin{aligned} &= M_0D_0 + \int_0^t \widetilde{M}_s dD_s + \int_0^t D_s dM_s - \int_0^t D_s d\langle M, L\rangle_s + \langle M, D\rangle_t \\ &= M_0D_0 + \int_0^t \widetilde{M}_s dD_s + \int_0^t D_s dM_s \end{aligned} \tag{2.5}$$

puisque d'après la Proposition 2.2 on a $d\langle M, L\rangle_s = D_s^{-1} d\langle M, D\rangle_s$. Comme M et D sont des $\mathbb{P}$-martingales, l'égalité (2.5) montre alors que $\widetilde{M}D$ est une $\mathbb{P}$-martingale locale car M et D en sont donc les intégrales stochastiques contre D et M aussi. La conclusion vient de la Proposition 2.3. □

Les corollaires suivants explorent quelques conséquences remarquables du théorème de Girsanov (Th. 2.1).

Corollaire 2.1 *Une $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$-martingale locale continue M reste une $(\mathcal{F}_t, \mathbb{Q})$-semimartingale continue avec la décomposition $M = \widetilde{M} + \langle M, L\rangle$.*

Démonstration : Directe. □

En particulier, ce corollaire montre que la classe des $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ semimartingales continues est contenue dans celle des $(\mathcal{F}_t, \mathbb{Q})$ semimartingales continues. Mais en fait, on a mieux :

Corollaire 2.2 *Sous les hypothèses du Théorème 2.1 (Girsanov), les classes des $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ semimartingales continues et des $(\mathcal{F}_t, \mathbb{Q})$ semimartingales continues coïncident.*

Démonstration : Il suffit de montrer que sous les hypothèses du Théorème 2.1 (Girsanov), les rôles de $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ sont symétriques. Notons que $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}_{|\mathcal{F}_t} = 1/\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}_{|\mathcal{F}_t} = D_t^{-1}$. On applique alors le Théorème 2.1 à $M = -L$. On a $\widetilde{M} = M - \langle M, L\rangle = -L + \langle L, L\rangle$ est une martingale locale continue avec $\langle \widetilde{M}, \widetilde{M}\rangle = \langle L, L\rangle$. Ainsi

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\big(\widetilde{M}\big)_t &= \exp\left(\widetilde{M}_t - \frac{1}{2}\langle \widetilde{M}, \widetilde{M}\rangle_t\right) \\ &= \exp\left(-L_t + \langle L, L\rangle_t - \frac{1}{2}\langle L, L\rangle_t\right) \\ &= \exp\left(-L_t + \frac{1}{2}\langle L, L\rangle_t\right) \\ &= \mathcal{E}\big(L\big)_t^{-1} = D_t^{-1}. \end{aligned}$$

On peut donc échanger les rôles de $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ quitte à remplacer D par D^{-1} et L par $\widetilde{M} = -L + \langle L, L\rangle$. □

On peut alors justifier (2.4) puisqu'avec les notations précédentes avec $\widetilde{M} = M - \langle M, L\rangle$ et $\widetilde{L} = -L = \langle L, L\rangle$, on a

$$\mathcal{G}_{\mathbb{P}}^{\mathbb{Q}} \circ \mathcal{G}_{\mathbb{Q}}^{\mathbb{P}}(M) = \widetilde{\widetilde{M}} = \widetilde{M} - \langle \widetilde{M}, \widetilde{L}\rangle = M - \langle M, L\rangle - \langle M, \widetilde{L}\rangle = M - \langle M, L\rangle + \langle M, L\rangle = M.$$

Corollaire 2.3 *Soient X, Y deux semimartingales continues (relativement à $\mathbb{P}$ ou $\mathbb{Q}$). La valeur du crochet $\langle X, Y\rangle$ est la même sous $\mathbb{P}$ et sous $\mathbb{Q}$.*

Démonstration : En effet dans les deux cas, $\langle X, Y\rangle$ est donné par l'approximation de la Proposition **??** qui ne change pas si on change $\mathbb{P}$ en $\mathbb{Q}$. Ou encore, le changement de probabilité n'affecte que la partie à variation finie d'une semimartingale donc pas son crochet. □

De même, si H est un processus localement borné, l'intégrale stochastique $H \cdot X$ est la même sous $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ (utiliser des approximations par des processus élémentaires).

Le Théorème de Girsanov s'utilise souvent à horizon fini :

Corollaire 2.4 *Pour $T > 0$ une date déterministe fixée, on se donne une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ et on suppose qu'elle vérifie les conditions habituelles (chaque $\mathcal{F}_t$ contient les $\mathbb{P}$-négligeables de $\mathcal{F}_T$). Si $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$, on définit comme précédemment la martingale $(D_t)_{t\in[0,T]}$ et, si D a une version continue, on définit la martingale $(L_t)_{t\in[0,T]}$. Alors, l'analogue du Théorème 2.1 (Girsanov) reste vrai pour $[0, T]$.*

2.3 Utilisation de Girsanov

Dans les applications pratiques du Théorème de Girsanov (Th. 2.1), on ne dispose pas en général de la probabilité $\mathbb{Q}$ mais de ce qui joue le rôle du logarithme stochastique L de sa dérivée de Radon-Nikodym $D = d\mathbb{Q}/d\mathbb{P}$. On reconstruit alors la probabilité $\mathbb{Q}$ comme suit :

- on part d'une martingale locale continue L telle que $L_0 = 0$;
- alors $\mathcal{E}(L)_t$ est une martingale locale continue à valeurs strictement positives, c'est donc une surmartingale (Proposition **??**) ;
- cela assure l'existence ps de la limite $\mathcal{E}(L)_\infty$ (Théorème **??**) ; en plus, d'après le lemme de Fatou, on a
$$\mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_\infty] \leq 1 \tag{2.6}$$
puisque
$$\mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_\infty] = \mathbb{E}\left[\lim_{t\to+\infty} \mathcal{E}(L)_t\right] = \mathbb{E}\left[\liminf_{t\to+\infty} \mathcal{E}(L)_t\right] \leq \liminf_{t\to+\infty} \mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_t] \leq 1 \tag{2.7}$$
car, si $0 \leq s \leq t$, $\mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_t] \leq \mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_s] \leq \mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_0] = 1$.
- Mais si on a égalité dans (2.6), on a bien mieux :
Proposition 2.4 *Si la condition suivante est satisfaite*
$$\mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_\infty] = 1, \tag{2.8}$$
alors $\mathcal{E}(L)$ est une vraie martingale uniformément intégrable.

Démonstration : On montre d'abord sous (2.8) que $\mathcal{E}(L)$ est une vraie martingale : sous (2.8), il y a égalité dans les inégalités (2.7), soit nécessairement $\mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_t] = \mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_s]$ pour tout $s \leq t$, ce qui combiné avec $\mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_t|\mathcal{F}_s] \leq \mathcal{E}(L)_s$ exige $\mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_t|\mathcal{F}_s] = \mathcal{E}(L)_s$, c'est à dire $\mathcal{E}(L)$ est une vraie martingale.

Puis comme $\mathcal{E}(L)_t \to \mathcal{E}(L)_\infty$ ps avec $\mathbb{E}[|\mathcal{E}(L)_t|] = \mathbb{E}[|\mathcal{E}(L)_\infty|] = 1$ alors le résultat suivant (lemme de Scheffé) garantit que $\mathcal{E}(L)_t \to \mathcal{E}(L)_\infty$ dans L^1.

D'après la Proposition **??** sur la convergence des martingales, c'est équivalent à avoir $\mathcal{E}(L)$ uniformément intégrable (ou fermée).

– En posant $\mathbb{Q} = \mathcal{E}(L)_\infty \cdot P$, on est finalement dans le cadre du théorème de Girsanov (Th. 2.1).

Lemme 2.1 (Scheffé) *Soient $X_n \to X$ ps. Alors*

$$\mathbb{E}\big[|X_n|\big] \to \mathbb{E}\big[|X|\big] \quad \textit{ssi} \quad \mathbb{E}\big[|X_n - X|\big] \to 0 \quad \textit{ie. } X_n \to X \textit{ dans } L^1.$$

En pratique, si M est une $\mathbb{P}$-martingale locale, si on change sa partie à variation finie en retranchant $\langle M, L\rangle$, on a toujours une martingale locale en changeant $\mathbb{P}$ en $\mathbb{Q}$, probabilité équivalente de densité donnée par l'exponentielle stochastique $\mathcal{E}(L)$. Il faut cependant que la condition (2.8) soit satisfaite. Il est donc important de pouvoir donner des conditions qui assurent (2.8). C'est l'objet du résultat suivant :

Théorème 2.2 (Condition de Novikov) *Soit L une martingale locale continue telle que $L_0 = 0$. Considérons les conditions suivantes :*

1. $\mathbb{E}\Big[\exp \frac{1}{2}\langle L, L\rangle_\infty] < +\infty$ *;*
2. *L est une martingale uniformément intégrable et* $\mathbb{E}\big[\exp(\frac{1}{2}L_\infty)\big] < +\infty$ *;*
3. *$\mathcal{E}(L)$ est une martingale uniformément intégrable.*

Alors on a les implications $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3)$.

Démonstration : • 1) $\Rightarrow$ 2). Comme d'après 1) $\mathbb{E}[\langle L, L\rangle_\infty] < +\infty$, L est une vraie martingale bornée dans L^2 (cf. Th. **??**). Elle est donc uniformément intégrable. Puis, par définition de $\mathcal{E}(L)_\infty$:

$$\exp\left(\frac{1}{2}L_\infty\right) = \mathcal{E}(L)_\infty^{1/2} \exp\left(\frac{1}{2}\langle L, L\rangle_\infty\right)^{1/2}.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, comme on a toujours l'inégalité (2.6) , on a

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}L_\infty\right)\right] \leq \mathbb{E}\left[\mathcal{E}(L)_\infty\right]^{1/2} \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\langle L, L\rangle_\infty\right)\right]^{1/2} \leq \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\langle L, L\rangle_\infty\right)\right]^{1/2} < +\infty.$$

• 2) $\Rightarrow$ 3). Puisque L est une martingale uniformément intégrable, on a $L_t = \mathbb{E}[L_\infty|\mathcal{F}_t]$. Par l'inégalité de Jensen avec exp, on a alors

$$\exp\left(\frac{1}{2}L_t\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\mathbb{E}[L_\infty|\mathcal{F}_t]\right) \leq \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}L_\infty\right)|\mathcal{F}_t\right]$$

ce qui assure, par 2), que $\exp(\frac{1}{2}L_t) \in L^1$. Par convexité de exp, $\exp(\frac{1}{2}L_t)$ est une sous-martingale qui, par l'inégalité précédente, est fermée par $\exp(\frac{1}{2}L_\infty)$ (en tant que sous-martingale). En appliquant le théorème d'arrêt (Th. **??**) pour les (sur)sous-martingales fermées, pour tout temps d'arrêt T, on a $\exp(\frac{1}{2}L_T) \leq \mathbb{E}[\exp(\frac{1}{2}L_\infty)|\mathcal{F}_T]$. Cela montre que la famille $\big\{\exp(\frac{1}{2}L_T) : T \text{ temps d'arrêt}\big\}$ est uniformément intégrable.

Puis pour $0 < a < 1$, on pose $Z_t^{(a)} = \exp\big(\frac{aL_t}{1+a}\big)$. Un calcul direct donne

$$\mathcal{E}(aL)_t = (\mathcal{E}(L)_t)^{a^2}(Z_t^{(a)})^{1-a^2}.$$

Si $\Gamma \in \mathcal{F}_\infty$ et T est un temps d'arrêt, l'inégalité de Hölder avec $p = 1/a^2$ et $q = 1/(1-a^2)$ donne

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_\Gamma\mathcal{E}(aL)_T\right] \leq \mathbb{E}\left[\mathcal{E}(L)_T\right]^{a^2}\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_\Gamma Z_t^{(a)}\right]^{1-a^2} \leq \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_\Gamma Z_t^{(a)}\right]^{1-a^2} \leq \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_\Gamma \exp\left(\frac{1}{2}L_T\right)\right]^{2a(1-a)} \tag{2.9}$$

où, pour la deuxième inégalité, on a utilisé que $\mathcal{E}(L)$ est une surmartingale positive, ie.

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{E}(L)_T\right] \leq \mathbb{E}\left[\mathcal{E}(L)_0\right] = 1$$

puis pour la troisième l'inégalité de Jensen avec $\varphi(x) = x^{(1+a)/(2a)}$ (convexe pour $0 < a < 1$), ie.

$$\left(\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_\Gamma Z_t^{(a)}\right]\right)^{(1+a)/(2a)} = \varphi\left(\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_\Gamma Z_t^{(a)}\right]\right) \leq \mathbb{E}\left[\varphi(\mathbf{1}_\Gamma Z_t^{(a)})\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_\Gamma \exp\left(\frac{1}{2}L_T\right)\right].$$

Comme la famille $\big\{\exp(\frac{1}{2}L_T) : T \text{ temps d'arrêt}\big\}$ est uniformément intégrable, l'inégalité (2.9) montre que la famille $\big\{\mathcal{E}(aL)_T : T \text{ temps d'arrêt}\big\}$ l'est aussi. D'après la Proposition **??** cela entraîne alors que $\mathcal{E}(aL)$ est une vraie martingale uniformément intégrable. Il suit alors

$$1 = \mathbb{E}\left[\mathcal{E}(aL)_0\right] = \mathbb{E}\left[\mathcal{E}(aL)_\infty\right] \leq \mathbb{E}\left[\mathcal{E}(L)_\infty\right]^{a^2}\mathbb{E}\left[Z_\infty^{(a)}\right]^{1-a^2} \leq \mathbb{E}\left[\mathcal{E}(L)_\infty\right]^{a^2}\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}L_\infty\right)\right]^{2a(1-a)}$$

avec, à nouveau pour la dernière égalité, l'inégalité de Jensen avec $\varphi(x) = x^{(1+a)/(2a)}$. En faisant $a \to 1$, la dernière borne implique $\mathbb{E}\left[\mathcal{E}(L)_\infty\right] \geq 1$ et donc avec (2.6) toujours valable on a obtenu $\mathbb{E}\left[\mathcal{E}(L)_\infty\right] = 1$. On déduit de la Proposition 2.4 que $\mathcal{E}(L)$ est une vraie martingale uniformément intégrable. □

2.4 Girsanov dans le cadre brownien

Dans cette section, on spécialise de plus en plus le Théorème de Girsanov dans le cadre brownien.

Corollaire 2.5 (Girsanov brownien 1) *Soient B un $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$-mouvement brownien et L satisfaisant (2.8) (en satisfaisant une des conditions de Novikov du Th. 2.2). Alors $\widetilde{B} = B - \langle B, L\rangle$ est un $(\mathcal{F}_t, \mathbb{Q})$-mouvement brownien.*

Démonstration : Par le Théorème 2.1 (Girsanov), $\widetilde{B} = B - \langle B, L\rangle$ est une $(\mathcal{F}_t, \mathbb{Q})$-martingale locale continue de variation quadratique $\langle \widetilde{B}, \widetilde{B}\rangle_t = \langle B, B\rangle_t = t$, $t \geq 0$. Le Théorème de Lévy (Th. 1.2) assure alors que $\widetilde{B}$ est un $(\mathcal{F}_t, \mathbb{Q})$-mouvement brownien. □

Dans le corollaire suivant, on prend $L_t = \int_0^t f(s)dB_s$. Il s'agit du Théorème de Girsanov original (1960). On rappelle que, pour le mouvement brownien B,

$$L^2_{loc}(B) = \left\{H : \Omega \to \mathbb{R} : \text{ progressif avec pour tout } t \geq 0 \ \mathbb{E}\left[\int_0^T H_s(\cdot)^2 ds\right] < +\infty\right\}$$

ici on considère

$$L^2_{[0,T]}(B) = \left\{H : \Omega \to \mathbb{R} : \text{ progressif avec } \mathbb{E}\left[\int_0^T H_s(\cdot)^2 ds\right] < +\infty\right\}.$$

Corollaire 2.6 (Girsanov brownien 2) *Soit B un $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$-mouvement brownien et, pour T fixé, $f \in L^2_{[0,T]}(B)$ telle que $L_t = \int_0^t f(s)dB_s$ satisfait (2.8) (en satisfaisant une des conditions de Novikov du Th. 2.2). Soit $\mathbb{Q}$ de densité (par rapport à $\mathbb{P}$)*

$$D_T = \exp\left(\int_0^T f(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T f(s)^2 ds\right).$$

Sous $\mathbb{Q}$, le processus B s'écrit

$$B_t = B_t^{\mathbb{Q}} + \int_0^t f(s)ds \tag{2.10}$$

où $B^{\mathbb{Q}}$ est un $(\mathcal{F}_t, \mathbb{Q})$-mouvement brownien.

Démonstration : On applique le Théorème de Girsanov (Th. 2.1) à $M = B$ avec $L_t = \int_0^t f(s)ds$ et on remarque que $\langle B, L\rangle_t = \int_0^t f(s)ds$. Alors $\widetilde{B} = B - \langle B, L\rangle = B^{\mathbb{Q}}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale locale continue de crochet $\langle \widetilde{B}, \widetilde{B}\rangle_t = \langle B, B\rangle_t = t$. Donc $B^{\mathbb{Q}} = \widetilde{B}$ est un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien. □

On spécialise encore davantage le Théorème de Girsanov dans le cadre brownien en prenant maintenant des intégrales stochastiques avec des intégrants f déterministes. On obtient la formule de Cameron-Martin (1944) :

Corollaire 2.7 (Cameron-Martin) *Soient $(B_t)_{t\geq 0}$ un $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$-mouvement brownien et $f \in L^2([0, T])$.*

1. *La variable aléatoire*
$$D_T=\exp\left(\int_0^T f(s)dB_s-\frac12\int_0^T f(s)^2ds\right)$$
est une densité de probabilité qui définit une probabilité $\mathbb{Q}$ (par $d\mathbb{Q}=D_Td\mathbb{P}$).
2. *Le processus*
$$B_t^{\mathbb{Q}}=B_t-\int_0^{t\wedge T} f(s)ds$$
est un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien. Autrement dit, sous $\mathbb{Q}$, le $\mathbb{P}$-mouvement brownien B s'écrit
$$B_t=B_t^{\mathbb{Q}}+\int_0^t f(s)ds.$$

Démonstration : Il suffit de prouver le point 1). Le point 2) est alors donné par le Corollaire 2.6. On prend $L_t=\int_0^t f(s)dB_s$ dans (2.1). On a $\langle L,L\rangle_t=\int_0^t f(s)^2ds$ et comme f est déterministe, $\mathbb{E}[\exp\langle L,L\rangle_T]<+\infty$ est garanti. Le Théorème 2.2 assure alors la condition de Novikov (2.8) et donc $(D_t)_{t\in[0,T]}$ est bien une densité de probabilité. □

Dans le cadre gaussien pour $L_t=\int_0^t f(s)\ dB_s$ avec $f\in L^2_{[0,T]}(B)$, on donne une condition plus explicite qui garantit (2.8) mais pour un horizon T fini :

Proposition 2.5 *Soient T une date déterminite fixée et $f\in L^2_{[0,T]}(B)$. On suppose qu'il existe $a>0$ et $C\in]0,+\infty[$ tel que pour tout $t\in[0,T]$ on ait*
$$\mathbb{E}\big[\exp(af(t)^2)\big]\le C<+\infty,$$
alors $\mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_T]=1$, ie. la condition (2.8) garantissant le Théorème de Girsanov sur $[0,T]$ est satisfaite.

Démonstration : On localise afin de pouvoir appliquer la Proposition 1.2 qui garantit que si $\int_0^T f(s)^2ds$ est bornée alors $\mathbb{E}[\mathcal{E}(\int_0^\cdot f(s)dB_s)_T]=1$. Pour cela, on pose $\tau_n=\inf\big(t\ge 0:\int_0^t f(s)^2ds\ge n\big)$. La suite $f_n=f\mathbf{1}_{[0,\tau_n]}$ est telle que, quand $n\to+\infty$,
$$\int_0^T f_n(u)^2du\le n,\quad \int_0^T f_n(u)^2du\nearrow\int_0^T f(u)^2du,\quad \int_0^T f_n(u)^2dB_u\to\int_0^T f(u)^2dB_u\quad\text{ps.}$$
On note $V_n=\mathcal{E}(\int_0^\cdot f_n(s)dB_s)$ et $V=\mathcal{E}(\int_0^\cdot f(s)dB_s)$. Fixons r,s tels que $0\le r\le s\le T$ avec $|s-r|\le a/6$ et écrivons
$$\begin{aligned}\left(\frac{V_n(s)}{V_n(r)}\right)^2 &= \exp\left(2\int_r^s f_n(u)dB_u-\int_r^s f_n(u)^2du\right)\\ &= \exp\left(2\int_r^s f_n(u)dB_u-4\int_r^s f_n(u)^2du\right)\exp\left(3\int_r^s f_n(u)^2du\right).\end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left(\frac{V_n(s)}{V_n(r)}\right)^2\right] \\
\le\ & \Bigg(\underbrace{\mathbb{E}\left[\exp\left(4\int_r^s f_n(u)dB_u - 8\int_r^s f_n(u)^2du\right)\right]}_{=1}\Bigg)^{1/2} \times \left(\mathbb{E}\left[\exp\left(6\int_r^s f_n(u)^2du\right)\right]\right)^{1/2} \\
=\ & 1 \times \left(\mathbb{E}\left[\exp\left(6\int_r^s f_n(u)^2du\right)\right]\right)^{1/2} \\
\le\ & \left(\int_r^s \mathbb{E}\big[\exp(6(s-r)f_n(u)^2)\big]\frac{du}{s-r}\right)^{1/2} \\
\le\ & C^{1/2}
\end{aligned}$$

en utilisant le théorème de Fubini, l'inégalité de Jensen pour la fonction convexe exp et la mesure uniforme $du/(s-r)$ sur $[r,s]$ et enfin l'hypothèse sur $a \ge 6(s-r)$ ainsi que la Proposition 1.2 pour

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(4\int_r^s f_n(u)dB_u - 8\int_r^s f_n(u)^2du\right)\right] = 1.$$

Comme les moments d'ordre 2 de $\frac{V_n(s)}{V_n(r)}$ sont bornés, on en déduit que $\frac{V_n(s)}{V_n(r)}$ est uniformément intégrable. Comme de plus, $V_n(t) \xrightarrow{\mathbb{P}} V(t)$, cf. preuve de la Proposition 1.2, on a aussi $\frac{V_n(s)}{V_n(r)} \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{V(s)}{V(r)}$ et avec le Théorème de Vitali :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{V_n(s)}{V_n(r)} = \frac{V(s)}{V(r)} \qquad \text{dans } L^1$$

et par continuité de l'espérance conditionnelle

$$\mathbb{E}\left[\frac{V(s)}{V(r)}\Big|\mathcal{F}_r\right] = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[\frac{V_n(s)}{V_n(r)}\Big|\mathcal{F}_r\right] = 1$$

car, pour f_n, L_n est une vraie martingale, ce qui assure

$$\mathbb{E}\left[\frac{V_n(s)}{V_n(r)}\Big|\mathcal{F}_r\right] = \frac{\mathbb{E}[V_n(s)|\mathcal{F}_r]}{V_n(r)} = \frac{V_n(r)}{V_n(r)} = 1.$$

Pour conclure, il suffit de décomposer $[0,T]$ en une subdivision $t_k = \frac{k}{m}T$, $0 \le k \le m$, avec m assez grand pour que le pas vérifie $T/m \le a/6$. On écrit alors $V(T) = V(t_{m-1}) \times [V(t_m)/V(t_{m-1})]$ avec $V(t_{m-1})$ variable aléatoire $\mathcal{F}_{t_{m-1}}$-mesurable et, par ce qui précède, $\mathbb{E}[V(t_m)/V(t_{m-1})|\mathcal{F}_{t_{m-1}}] = 1$. Finalement, par un raisonnement par récurrence :

$$\mathbb{E}[V(T)] \;=\; \mathbb{E}\big[V(t_{m-1}) \times [V(t_m)/V(t_{m-1})]\big]$$

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E}\big[V(t_{m-1})\mathbb{E}[V(t_m)/V(t_{m-1})|\mathcal{F}_{t_{m-1}}]\big] \\ &= \mathbb{E}[V(t_{m-1})] \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

Exemple 1 : Étude du sup d'un mouvement brownien décentré.
Pour étudier la loi du sup de $\widetilde{B}_t = B_t + bt$ sur $[0, T]$, il suffit de connaître la loi du couple $(B_T, \sup_{t\leq T} B_t)$. En effet, d'après la formule de Cameron-Martin, on a

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\leq T}(B_t + bt) \geq x\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp(bB_T - \frac{1}{2}b^2T)\mathbf{1}_{\{\sup_{t\leq T} B_t\geq x\}}\right].$$

Exemple 2 : Application statistique à la détection d'un signal. Considérons un signal (temporel, déterministe) représenté par une fonction m. On cherche à tester la présence ou non du signal m. La difficulté vient de ce que le test se pratique dans une ambiance bruitée (représentée par B). On observe alors

- soit B (le bruit pur) si le signal est absent,
- soit $m + B$ (le signal utile m bruité par B) si le signal est présent.

L'observateur n'observe qu'une seule des deux fonctions (sans savoir laquelle) $\omega = (\omega_t : t \in [0, T]) \in \{B, m + B\}$ et le but est précisément de déterminer laquelle des deux fonctions il observe.

Plutôt que de considérer les deux fonctions aléatoires B et $m + B$ dont la loi est mesurée par la même probabilité $\mathbb{P}$, il est équivalent de considérer qu'il ne peut observer qu'une fonction X, qui modélise son observation, mais sous deux probabilités différentes selon que le signal est présent ou pas. Ainsi ω est observée avec la probabilité $\mathbb{P}(d\omega)$ ou $\mathbb{Q}(d\omega)$ selon le cas.

On suppose que

- le bruit est modélisé par un mouvement brownien B ;
- le signal est de la forme $m(t) = \int_0^t f(s)ds$ où f est déterministe mesurable.

On interprète alors m comme le crochet $m(t) = \langle B, \int_0^\cdot f(s)dB_s\rangle_t$. Sous la probabilité $\mathbb{Q}$ donnée par $d\mathbb{Q} = D_T d\mathbb{P}$ avec

$$D_T = \exp\left(\int_0^T f(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T f(s)^2 ds\right)$$

B est un processus (mouvement brownien) décentré par m (ie. $B = B^{\mathbb{Q}} + m$), tandis que sous $\mathbb{P}$, B est un mouvement brownien standard donc centré.

La vraisemblance associée à l'observation de la trajectoire ω est donnée par $D_T(\omega)$ qui vaut 1 s'il n'y a pas de signal et qui peut être très grand s'il y en a un. On en déduit une règle de décision : *si on observe ω, on décide que le signal était présent lorsque*

$$U := \int_0^T f(s)dB_s > \frac{1}{2}\operatorname{Var}_{\mathbb{P}}(U) = \frac{1}{2}\int_0^T f(s)^2 ds = \frac{1}{2}\sigma^2.$$

Cette règle n'est pas infaillible : Sous $\mathbb{P}$, $U \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2) \sim \sigma N_0$ (où $N_0 \sim \mathcal{N}(0,1)$) et si le signal m est réellement absent, la probabilité de prendre une mauvaise décision est

$$p = \mathbb{P}\Big(U > \frac{1}{2}\sigma^2\Big) = \mathbb{P}\Big(N_0 > \frac{1}{2}\sigma\Big).$$

Tandis que si le signal est vraiment présent, $\mathbb{Q}$ est la probabilité qui gouverne le phénomène ; sous $\mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} U = \int_0^T f(s)dB_s &= \int_0^T f(s)dB_s^{\mathbb{Q}} + \int_0^T f(s)dm(s) \\ &= \int_0^T f(s)dB_s^{\mathbb{Q}} + \int_0^T f(s)^2 ds \\ &\sim \mathcal{N}(0,\sigma^2) = \sigma^2\mathcal{N}(\sigma^2,\sigma^2). \end{aligned}$$

La probabilité d'erreur est alors

$$\begin{aligned} q &= \mathbb{Q}\Big(U < \frac{1}{2}\operatorname{Var}_{\mathbb{P}}(U)\Big) = \mathbb{P}\Big(\sigma N_0 + \sigma^2 \leq \frac{1}{2}\sigma^2\Big) \\ &= \mathbb{P}\Big(\sigma N_0 \leq -\frac{1}{2}\sigma^2\Big) = \mathbb{P}\Big(\sigma N_0 \geq \frac{1}{2}\sigma^2\Big) = p \end{aligned}$$

(selon les cas, c'est $\mathbb{P}$ ou $\mathbb{Q}$ qui gouverne les lois). D'après la table de la loi $\mathcal{N}(0,1)$, on a $p, q \leq 5\%$ si $\sigma \geq 4$.

Chapitre 3

Équations différentielles stochastiques

On présente dans ce chapitre les équations différentielles stochastiques browniennes. On commence par en donner une motivation en Section 3.1 en tant que généralisation des équations différentielles ordinaires dans un contexte d'incertitude représentée par un bruit aléatoire. Des exemples d'EDS classiques sont présentés en Section 3.2. Les principaux résultats d'existence et d'unicité sont décrits en Section 3.3. On étudie les solutions d'EDS dirigée par un mouvement brownien comme fonctionnelle sur l'espace de Wiener en Section 3.5. La propriété de Markov pour les solutions d'EDS est présentée en Section 3.6.

3.1 Introduction, définitions

Équations différentielles et EDS

Les équations différentielles (standard) gouvernent de nombreux phénonènes déterministes. Pour prendre en compte des phénomènes aléatoires, formellement on doit prendre en compte des « différentielles stochastiques », ce qui transforme les équations en équations différentielles stochastiques (EDS).
Les équations différentielles sont des équations d'évolution du type

$$\dot{x}(t) = a(t, x(t)) \tag{3.1}$$

où l'inconnue est une fonction $x(t)$ qui doit vérifier une équation impliquant sa dérivée $\dot{x}$ et elle même. Les cas les plus simples sont les équations différentielles d'ordre 1 comme en (3.1) (seule la dérivée 1ère est impliquée) avec $a(t, x) = a + bx$ indépendant de t et affine par rapport à x. Symboliquement, l'équation (3.1) se réécrit

$$dx(t) = a(t, x(t))\ dt. \tag{3.2}$$

Cette équation modélise typiquement un système physique $(x(t))_{t\geq 0}$ qui évolue avec le temps de façon que x s'accroît, à la date t, selon le taux $a(t, x(t))$. Par exemple, avec

$a(t,x) = a(t)x$, l'équation $dx(t) = a(t)x(t)\ dt$ modélise le cours d'un actif financier $x(t)$ soumis au taux d'intérêt variable $a(t)$ ou d'une population avec un taux de natalité $a(t)$. Il est bien connu que la solution est

$$x(t) = x_0 \exp\left(\int_0^t a(s)\ ds\right).$$

Les EDS sont des généralisations des équations (3.2) où la dynamique déterministe d'évolution a est perturbée par un terme aléatoire (stochastique). On parle alors d'équation différentielle stochastique. En général la perturbation aléatoire est considérée comme un bruit. Par un argument du type TCL, il est légitime de considérer que ce bruit est un processus gaussien et en général il est modélisé par un mouvement brownien B et une intensité de bruit $\sigma(t,x)$:

$$dX_t = a(t,X_t)\ dt + \sigma(t,X_t)\ dB_t \tag{3.3}$$

où σ est une fonction du temps t et de l'inconnue au temps t (X_t) mais pourrait juste dépendre du temps (σ_t) ou de la valeur X_t en t ($\sigma(X_t)$) ou encore être constante σ.

Définitions

En fait, l'écriture (3.3) est symbolique car dB_t n'a pas vraiment de sens (le mouvement brownien n'est pas dérivable !). Il faudrait écrire (3.3) sous la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s,X_s)\ ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)\ dB_s \tag{3.4}$$

qui, elle, a un sens si l'intégrale stochastique $\int_0^t \sigma(s,X_s)\ dB_s$ a un sens, cf. chapitre **??**. On généralise encore dans la définition suivante la notion d'EDS dans un cadre vectoriel.

Définition 3.1 (EDS) *On appelle équation différentielle stochastique (EDS) une équation en le processus X (à valeurs dans $\mathbb{R}^d$) de la forme*

$$dX_t = a(t,X_t)\ dt + \sigma(t,X_t)\ dB_t \tag{$E(a,\sigma)$}$$

ce qui, en terme intégrale, s'écrit

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t a_i(s,X_s)\ ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{i,j}(s,X_s)\ dB_s^j, \quad 1 \le i \le d \tag{3.5}$$

où, pour m,d des entiers positifs,

- *$a(t,x) = (a_i(t,x))_{1\le i\le d}$ est un vecteur mesurable de $\mathbb{R}^d$ défini sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ appelé* **dérive** *ou* **drift** *de l'EDS,*
- *$\sigma(t,x) = (\sigma_{i,j}(t,x))_{\substack{1\le i\le d\\ 1\le j\le m}}$ est une matrice $d\times m$ mesurable définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ appelé* **coefficient de diffusion** *de l'EDS,*

et $B = (B^1, \dots, B^m)$ est un mouvement brownien standard en dimension m.

La solution d'une EDS est une fonction aléatoire. Il s'agit donc d'un processus qu'on note $X = (X_t)_{t\geq 0}$. Plus précisément, on a :

Définition 3.2 (Solution d'une EDS) *On appelle solution de l'EDS $E(a, \sigma)$ la donnée de*

- *un espace de probabilité filtré $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\big)$ satisfaisant les conditions habituelles ;*
- *un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-mouvement brownien $B = (B^1, \dots, B^m)$ dans $\mathbb{R}^m$ défini sur cet espace de probabilité ;*
- *un processus $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adapté continu $X = (X^1, \dots, X^d)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ tel que (3.4) soit vérifiée, c'est à dire, coordonnée par coordonnée, pour tout $1 \leq i \leq d$: (3.5).*

Lorsque de plus $X_0 = x \in \mathbb{R}^d$, on dira que le processus X est solution de $E_x(a, \sigma)$.

En pratique (dans les cas simples), pour trouver la solution d'une EDS, on intuite la forme de la solution et on vérifie que l'EDS de départ est bien satisfaite en appliquant la formule d'Itô, cf. Section 3.2. On propose des résultats généraux d'existence et d'unicité des EDS, du type théorème de Cauchy-Lipschitz dans la Section 3.3.

3.2 Exemples d'EDS

Les EDS affines admettent des solutions explicites qu'on peut obtenir comme dans le cas déterministe par la méthode de variation de la constante. Le cas affine est important car les EDS affines apparaissent comme des linéarisées d'EDS plus complexes qu'on ne sait pas toujours résoudre. On se place dans le cas réel, ie. $d = m = 1$.

3.2.1 Équations linéaires

Ornstein-Uhlenbeck : équation $a(t, x) = -ax$ **(**$a > 0$**) et** $\sigma(x) = \sigma$. Il s'agit de l'équation de Langevin :

$$dX_t = -aX_t\, dt + \sigma\, dB_t \tag{3.6}$$

c'est à dire avec $a(t, x) = -ax$, et $\sigma(x) = \sigma$. La solution est donnée par

$$X_t = X_0 e^{-at} + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)}\, dB_s. \tag{3.7}$$

Sans le terme σdB_t, l'équation $dX_t = -aX_t\, dt$ se résout immédiatement en $X_t = Ce^{-at}$. Pour tenir compte du terme σdB_t, on fait « varier la constante C » :

$$\begin{aligned} dC\, e^{-at} - aCe^{-at}\, dt &= dX_t = -aX_t\, dt + \sigma\, dB_t \\ dC &= \sigma e^{at}\, dB_t \\ C &= X_0 + \int_0^t \sigma e^{as}\, dB_s \end{aligned}$$

et, avec $X_t = Ce^{-at}$, l'expression (3.7) est obtenue.

On peut observer directement que (3.7) est satisfaite en dérivant $X_t = X_0 e^{-at} + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as}\, dB_s$ avec la formule d'Itô (sous la forme dérivée de l'IPP, Corollaire 1.1) :

$$d(X_tY_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + d\langle X, Y\rangle_t.$$

Il s'agit du processus d'Ornstein-Uhlenbeck (cf. Section **??**). Ce cas se généralise au contexte vectoriel.

Équation $a(t,x) = a_t x$ **et** $\sigma(x) = \sigma_t x$**.** On suppose les processus $(a_t)_{t\geq 0}$ et $(\sigma_t)_{t\geq 0}$ bornés ou vérifiant l'intégrabilité $\int_0^T |a_t|\, dt < +\infty$, $\int_0^T |\sigma_t|^2\, dt < +\infty$. L'EDS

$$dX_t = X_t(a_t dt + \sigma_t dB_t), \quad X_0 = x \tag{3.8}$$

admet pour solution

$$X_t = x \exp\left(\int_0^t a_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds\right). \tag{3.9}$$

Pour le voir, on suppose X positivement borné sur $[0,T]$ (minoré par $1/n$, majoré par n) ; sinon, on introduit le temps d'arrêt $T_n = \inf(t : X_t \leq 1/n \text{ ou } X_t > n)$ et on arrête les processus à ces dates. On applique la formule d'Itô à $X_{t\wedge T_n}$ et à la fonction ln (qui est C^2 sur $[1/n, n]$). De l'équation (3.8), on déduit $d\langle X, X\rangle_t = X_t^2 \sigma_t^2 dt$. Le processus $Y_t = \ln\big(X_{t\wedge T_n}\big)$ vérifie alors

$$dY_t = \frac{1}{X_t} dX_t - \frac{1}{2}\frac{d\langle X, X\rangle_t}{X_t^2} = \big(a_t dt + \sigma_t dB_t\big) - \frac{\sigma_t^2}{2} dt = \big(a_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2\big)\, dt + \sigma_t\, dB_t,$$

ce qui prouve le résultat (3.9).

Black et Scholes. C'est le cas particulier où $a(t,x) = ax$ et $\sigma(t,x) = \sigma x$, ie.

$$dX_t = aX_t\, dt + \sigma X_t\, dB_t. \tag{3.10}$$

Cette EDS modélise l'évolution d'un cours X soumis à un taux d'intérêt déterministe a et à une perturbation stochastique $\sigma X_t dB_t$. Dans un contexte financier, le coefficient de diffusion σ est appelé volatilité. Noter que la partie déterministe de l'accroissement de X_t (aX_t) et sa partie aléatoire (σX_t) sont toutes les deux proportionnelles à la valeur courante, X_t, en t (ce qui est typique des modèles de croissance).
La solution de (3.10) est un cas particulier de (3.9) :

$$X_t = X_0 \exp\left(at - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma B_t\right).$$

On retrouve le **mouvement brownien géométrique** .

3.2.2 Équations affines

On suppose que $a(t,x) = a_t x + c_t$ et $\sigma(t,x) = \sigma_t x + \delta_t$, c'est à dire qu'on considère l'EDS affine générale

$$dX_t = X_t(a_t\ dt + \sigma_t\ dB_t) + c_t\ dt + \delta_t\ dB_t. \tag{3.11}$$

Elle a une solution construite à partir de la solution Z de l'EDS linéaire $dZ_t = Z_t(a_t\ dt + \sigma_t\ dB_t)$ de condition initiale $Z_0 = 1$, ie.

$$Z_t = \exp\left(\int_0^t a_s\ ds + \int_0^t \sigma_s\ dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2\ ds\right)$$

donnée, avec $\widetilde{c}_t = c_t - \sigma_t\delta_t$, par

$$X_t = Z_t\left(X_0 + \int_0^t Z_s^{-1}(\widetilde{c}_s\ ds + \delta_s\ dB_s)\right). \tag{3.12}$$

Avec la formule d'Itô, on vérifie que (3.12) satisfait effectivement l'équation (3.11) :

$$\begin{aligned} dX_t &= Z_t\left(Z_t^{-1}(\widetilde{c}_t dt + \delta_t dB_t)\right) + X_t(a_t dt + \sigma_t dB_t) + d\langle Z_t, Z_t^{-1}\delta_t B_t\rangle_t \\ &= \widetilde{c}_t dt + \delta_t dB_t + X_t(a_t dt + \sigma_t dB_t) + \sigma_t\delta_t dt \\ &= X_t(a_t dt + \sigma_t dB_t) + c_t dt + \delta_t dB_t. \end{aligned}$$

3.3 Existence et unicité

Comme d'habitude pour les équations différentielles, les notions d'existence et d'unicité sont essentielles. Dans le contexte des EDS, il existe plusieurs types d'existence et d'unicité des EDS. Dans toute cette section, on considère l'EDS $E(a,\sigma)$.

Définition 3.3 (Existence, unicité des EDS) *Pour l'équation $E(a,\sigma)$, on dit qu'il y a*

- *existence faible si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe une solution de $E_x(a,\sigma)$;*
- *existence et unicité faibles si de plus toutes les solutions de $E_x(a,\sigma)$ ont même loi ;*
- *unicité trajectorielle si, l'espace de probabilité filtré $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\big)$ et le mouvement brownien B étant fixés, deux solutions X et X' de $E(a,\sigma)$ telles que $X_0 = X'_0$ ps sont indistinguables.*

On dit de plus qu'une solution X de $E_x(a,\sigma)$ est une solution forte si X est adapté par rapport à la filtration canonique de B. Il y a unicité forte pour $E(a,\sigma)$ si pour tout mouvement brownien B, deux solutions fortes associées à B sont indistinguables.

Remarque 3.1 Il peut y avoir existence et unicité faibles sans qu'il y ait unicité trajectorielle. Pour voir cela, on considère un mouvement brownien β issu de $\beta_0 = y$ et on pose

$$B_t = \int_0^t \text{sign }(\beta_s)\ d\beta_s$$

avec sign $(x) = 1$ si $x \geq 0$ et sign $(x) = -1$ si $x < 0$. On constate facilement que

$$\beta_t = y + \int_0^t \text{sign } (\beta_s)\ dB_s.$$

Comme B est une martingale locale à trajectoires continues et que

$$\langle B, B\rangle_t = \int_0^t \text{sign } (\beta_s)^2 d\langle \beta, \beta\rangle_s = \int_0^t ds = t,$$

le Théorème de Lévy (Théorème 1.2) justifie que B est un mouvement brownien (issu de 0). On voit alors que β est solution de l'EDS

$$dX_t = \text{sign } (X_t)\ dB_t, \quad X_0 = y, \tag{3.13}$$

pour laquelle il y a donc existence faible. À nouveau, par le Théorème de Lévy, on prouve l'unicité faible : toute solution X de (3.13) est une martingale locale à trajectoires continues et vérifie

$$\langle X, X\rangle_t = \int_0^t \text{sign } (X_s)^2\ d\langle B, B\rangle_s = \int_0^t ds = t$$

et doit donc être un mouvement brownien (Théorème de Lévy : Th. 1.2).
Par contre, il n'y a pas, en général, unicité trajectorielle : pour $y = 0$, on voit facilement que β et $-\beta$ sont deux solutions de (3.13) associées au même brownien B. Noter que $\int_0^t \mathbf{1}_{\{\beta_s=0\}}\ dB_s = 0$ car

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \mathbf{1}_{\{\beta_s=0\}}\ dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \mathbf{1}^2_{\{\beta_s=0\}}\ ds\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \mathbf{1}_{\{\beta_s=0\}}\ ds\right] = \int_0^t \mathbb{P}(\beta_s = 0) ds = 0$$

et donc $\int_0^t \mathbf{1}_{\{\beta_s=0\}}\ dB_s = 0$ ps. Aussi, β n'est pas solution forte de l'EDS : on montre que la filtration de B coïncide avec la filtration canonique de $|\beta|$, qui est strictement plus petite que celle de β.

Le résultat suivant –admis (cf. [KS, Prop 3.20] pour une preuve)– relie les différentes notions d'existence et d'unicité :

Théorème 3.1 (Yamada-Watanabe) *Existence faible et unicité trajectorielle impliquent unicité faible. De plus, dans ce cas, pour tout espace de probabilité filtré $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\big)$ et tout $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-mouvement brownien B, il existe pour chaque $x \in \mathbb{R}^d$ une (unique) solution forte de $E_x(a, \sigma)$.*

Dans toute la suite, on suppose remplies les conditions suivantes :
Hypothèses lipschitziennes. *Les fonctions a et σ sont continues sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ et lipschitziennes en x, ie. il existe une constante $K \in]0, +\infty[$ telle que pour tout $t \geq 0$ et $x, y \in \mathbb{R}^d$*

$$|a(t, x) - a(t, y)| \ \leq \ K|x - y|$$

$$|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)| \quad \leq \quad K|x-y|$$

et $\int_0^T |a(t,0)|+|\sigma(t,0)|^2\,dt < +\infty$ *pour tout* T *où* $|a|$ *et* $|\sigma|$ *représentent la norme du vecteur* a *et de la matrice* σ*.* On a alors

Théorème 3.2 (Cauchy-Lipschitz pour EDS) *Sous les hypothèses lipschitziennes, il y a unicité trajectorielle pour* $E(a,\sigma)$*. De plus, pour tout espace de probabilité filtré* $\big(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P}\big)$ *et tout* $(\mathcal{F}_t)_t$*-mouvement brownien* B*, il existe pour chaque* $x\in\mathbb{R}^d$ *une (unique) solution forte de* $E_x(a,\sigma)$*.*

Ce résultat entraîne en particulier qu'il y a existence faible pour $E(a,\sigma)$. L'unicité faible sera une conséquence du Théorème 3.4 (cf. remarque qui suit ce résultat) ; elle vient aussi de l'unicité trajectorielle si on utilise le théorème de Yamata-Watanabe (Théorème 3.1).

Remarque 3.2 On peut affaiblir l'hypothèse de continuité en t, celle-ci n'intervient essentiellement que pour majorer $\sup_{0\leq t\leq T}|\sigma(t,x)|$ et $\sup_{0\leq t\leq T}|a(t,x)|$ pour x fixé : on peut « localiser » l'hypothèse lipschitzienne sur a et σ se contenter d'une constante K qui dépend du compact sur lequel t et x sont considérés. Il faut alors conserver une condition de croissance sous-linéaire :

$$|\sigma(t,x)|\leq K(1+|x|), \quad |a(t,x)|\leq K(1+|x|).$$

Comme pour les équations différentielles (ordinaires), la croissance sous-linéaire prévient l'explosion de la solution de l'EDS.

Démonstration : Pous simplifier la preuve, on considère le cas $d=m=1$.
Unicité trajectorielle. On considère deux solutions X et X' de $E(a,\sigma)$ avec $X_0=X'_0$, définies sur sur le même espace et avec le même mouvement brownien B. Pour $M>0$ fixé, on considère le temps d'arrêt

$$\tau=\inf\big(t\geq 0:|X_t|\geq M,|X'_t|\geq M\big).$$

D'après $E(a,\sigma)$, on a alors pour tout $t\geq 0$:

$$\begin{aligned} X_{t\wedge\tau} &= X_0+\int_0^{t\wedge\tau}\sigma(s,X_s)\,dB_s+\int_0^{t\wedge\tau}a(s,X_s)\,ds\\ X'_{t\wedge\tau} &= X'_0+\int_0^{t\wedge\tau}\sigma(s,X'_s)\,dB_s+\int_0^{t\wedge\tau}a(s,X'_s)\,ds. \end{aligned}$$

On considère $t\in[0,T]$. Par différence, comme $X_0=X'_0$ et comme X,X' sont bornées par M sur $]0,\tau]$, l'expression de la variance d'une intégrale stochastique L^2, l'inégalité de Cauchy-Schwarz, les hypothèses lipschitziennes et la majoration $(x+y)^2\leq 2(x^2+y^2)$ donnent

$$\mathbb{E}\big[(X_{t\wedge\tau}-X'_{t\wedge\tau})^2\big]$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2\left(\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{t\wedge\tau}(\sigma(s,X_s)-\sigma(s,X'_s))\ dB_s\right)^2\right]+\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{t\wedge\tau}(a(s,X_s)-a(s,X'_s))\ ds\right)^2\right]\right)\\
&\leq 2\left(\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau}(\sigma(s,X_s)-\sigma(s,X'_s))^2\ ds\right]+T\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau}(a(s,X_s)-a(s,X'_s))^2\ ds\right]\right)\\
&\leq 2K^2(1+T)\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau}(X_s-X'_s)^2\right]ds\\
&\leq 2K^2(1+T)\mathbb{E}\left[\int_0^{t}(X_{s\wedge\tau}-X'_{s\wedge\tau})^2\right]ds.
\end{aligned}$$

Si on pose $h(t)=\mathbb{E}\big[(X_{t\wedge\tau}-X'_{t\wedge\tau})^2\big]$ et $C=2K^2(1+T)$, alors on a établi que h vérifie pour $t\in[0,T]$:

$$h(t)\leq C\int_0^t h(s)\ ds.$$

De plus, par définition de τ, la fonction h est bornée par $4M^2$, l'inégalité de Gronwall (lemme suivant) s'applique avec $a=0$ et $b=C$. On obtient $h=0$, c'est à dire $X_{t\wedge\tau}=X'_{t\wedge\tau}$ ps. Finalement, en faisant $M\to+\infty$, on a $\tau\to+\infty$ et donc $X_t=X'_t$ ps. Les processus X et X' sont des modifications à trajectoires continues, ils sont donc indistinguables, ce qui prouve l'unicité trajectorielle.

Lemme 3.1 (Gronwall) *Soient $T>0$ et g une fonction positive mesurable bornée sur $[0,T]$. On suppose qu'il existe des constantes $a\geq 0$, $b\geq 0$ telles que pour tout $t\in[0,T]$, on a*

$$g(t)\leq a+b\int_0^t g(s)ds. \tag{3.14}$$

Alors on a $g(t)\leq a\exp(bt)$ pour tout $t\in[0,T]$.

Démonstration :[Gronwall] En itérant la condition (3.14) sur g, on a pour tout $n\geq 1$,

$$g(t)\leq a+a(bt)+a\frac{(bt)^2}{2}+\cdots+a\frac{(bt)^n}{n!}+b^{n+1}\int_0^t ds_1\int_0^{s_1}ds_2\dots\int_0^{s_n}g(s_{n+1})ds_{n+1}.$$

Si g est majorée par A, le dernier terme se majore par $A(bt)^{n+1}/(n+1)!$ et il tend vers 0 quand $n\to+\infty$, ce qui prouve le lemme car le développement à droite tend vers $a\exp(bt)$. □

Existence forte. On procède comme pour les équations différentielles avec une méthode d'approximation de Picard. Pour cela, on pose

$$\begin{aligned}
X_t^0 &= x\\
X_t^1 &= x+\int_0^t\sigma(s,x)\ dB_s+\int_0^t a(s,x)\ ds\\
X_t^2 &= x+\int_0^t\sigma(s,X_s^1)\ dB_s+\int_0^t a(s,X_s^1)\ ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ldots &= \ldots \\ X_t^n &= x + \int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})\, dB_s + \int_0^t a(s, X_s^{n-1})\, ds. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Les intégrales stochastiques ci-dessus sont bien définies puisque par récurrence, on constate que, pour chaque n, X_t^n est continu et adapté donc localement borné si bien que le processus $\sigma(t, X_t^n)$ l'est aussi (hypothèse lipschitzienne) et l'intégrale correspondante bien définie.

On fixe maintenant $T > 0$ et on raisonne sur $[0, T]$. On prouve par récurrence qu'il existe C_n tel que, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\mathbb{E}\big[(X_t^n)^2\big] \le C_n. \tag{3.16}$$

En effet, (3.16) est immédiate si $n = 0$ avec $C_0 = x$. Puis, on suppose que (3.16) est vraie au rang $n - 1$ avec

$$|\sigma(s, y)| \le K' + K|y|, \quad |a(s, y)| \le K' + K|y|, \quad s \in [0, T], y \in \mathbb{R}.$$

Noter que par la croissance sous-linéaire de σ et l'hypothèse de récurrence (3.16), on a $\mathbb{E}\big[\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})^2\, ds\big] < +\infty$. On a donc

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})\, dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})^2\, ds\right].$$

Comme $(x + y + z)^2 \le 3(x^2 + y^2 + z^2)$, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'isométrie L^2, et les hypothèses lipschitziennes, on majore comme suit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big[(X_t^n)^2\big] &\le 3\left(|x|^2 + \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})\, dB_s\right)^2\right] + \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t a(s, X_s^{n-1})\, ds\right)^2\right]\right) \\ &\quad \text{(convexité)} \\ &\le 3\left(|x|^2 + \mathbb{E}\left[\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})^2\, ds\right] + t\mathbb{E}\left[\int_0^t a(s, X_s^{n-1})^2\, ds\right]\right) \\ &\quad \text{(isométrie } L^2\text{, Cauchy-Schwarz)} \\ &\le 3\left(|x|^2 + 2(1+T)\mathbb{E}\left[\int_0^t ((K')^2 + K^2 (X_s^{n-1})^2)\, ds\right]\right) \\ &\quad \text{(hypothèses lipschitziennes)} \\ &\le 3\big(|x|^2 + 2T(1+T)((K')^2 + K^2 C_{n-1})\big) =: C_n \end{aligned}$$

ce qui établit (3.16) par récurrence.

La borne (3.16) et la croissance sous-linéaire de σ assurent alors que, pour chaque n, la martingale locale $\int_0^t \sigma(s, X_s^n) dB_s$ est une vraie martingale bornée dans L^2 sur l'intervalle $[0, T]$ (cf. Théorème **??**).

Cela va permettre de majorer par récurrence $\mathbb{E}\big[\sup_{0 \le t \le T} |X_t^{n+1} - X_t^n|^2\big]$. On a

$$X_t^{n+1} - X_t^n = \int_0^t \big(\sigma(s, X_s^n) - \sigma(s, X_s^{n-1})\big)\, dB_s + \int_0^t \big(a(s, X_s^n) - a(s, X_s^{n-1})\big)\, ds.$$

En utilisant les inégalités de Doob (Prop. ??) et de Cauchy-Schwarz ainsi que les hypothèses lipschitziennes, on déduit

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t}|X_s^{n+1}-X_s^n|^2\right]\\
\le\ & 2\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t}\left|\int_0^s(\sigma(u,X_u^n)-\sigma(u,X_u^{n-1}))\,dB_u\right|^2+\sup_{0\le s\le t}\left|\int_0^s(a(u,X_u^n)-a(u,X_u^{n-1}))\,du\right|^2\right]\\
&\text{(convexité)}\\
\le\ & 2\left(4\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t(\sigma(u,X_u^n)-\sigma(u,X_u^{n-1}))\,dB_u\right)^2\right]+\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t|a(u,X_u^n)-a(u,X_u^{n-1})|\,du\right)^2\right]\right)\\
&\text{(inégalité de Doob)}\\
\le\ & 2\left(4\mathbb{E}\left[\int_0^t(\sigma(u,X_u^n)-\sigma(u,X_u^{n-1}))^2\,du\right]+T\mathbb{E}\left[\int_0^t(a(u,X_u^n)-a(u,X_u^{n-1}))^2\,du\right]\right)\\
&\text{(isométrie } L^2\text{, Cauchy-Schwarz)}\\
\le\ & 2(4+T)K^2\mathbb{E}\left[\int_0^t|X_u^n-X_u^{n-1}|^2du\right] \qquad (3.17)\\
&\text{(hypothèses lipschitziennes)}\\
\le\ & C_T\mathbb{E}\left[\int_0^t\sup_{0\le r\le u}|X_r^n-X_r^{n-1}|^2du\right] \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

avec $C_T=2(4+T)K^2$. Si on note $g_n(u)=\mathbb{E}\big[\sup_{0\le r\le u}|X_r^n-X_r^{n-1}|^2\big]$ et $g_0(u)=\mathbb{E}\big[\sup_{0\le r\le u}|X_r^0|^2\big]=x^2$ alors on a établi

$$g_{n+1}(t)\le C_T\int_0^t g_n(u)du. \qquad (3.19)$$

Par ailleurs, par (3.16) et les inégalités précédentes (cf. (3.17)), on voit que les fonctions g_n sont bornées sur $[0,T]$. En effet, $g_0(t)=x^2$ pour $t\in[0,T]$ et par une récurrence utilisant (3.19), on établit que pour tout $n\ge1$ et $t\in[0,T]$, on a

$$g_n(t)\le x^2C_T^n\frac{t^n}{n!}.$$

On déduit alors que $\sum_{n=0}^{+\infty}g_n(T)^{1/2}<+\infty$, comme

$$\left\|\sum_{n=0}^{+\infty}\sup_{0\le s\le T}|X_s^{n+1}-X_s^n|\right\|_2\le\sum_{n=0}^{+\infty}\left\|\sup_{0\le s\le T}|X_s^{n+1}-X_s^n|\right\|_2=\sum_{n=0}^{+\infty}g_n(T)^{1/2}<+\infty$$

cela entraîne que ps

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sup_{0\le s\le T}|X_s^{n+1}-X_s^n|<+\infty,$$

et donc ps la suite $(X_t^n)_{t\in[0,T]}$ converge uniformément sur $[0,T]$ vers un processus limite $(X_t)_{t\in[0,T]}$ qui est continu. Comme par récurrence, chaque processus X^n est adapté par rapport à la filtration canonique de B, X l'est aussi à la limite.

Les estimations (3.18) établissent aussi que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq T}|X_s^n - X_s|^2\right] \leq \left(\sum_{k=n}^{+\infty} g_k(T)^{1/2}\right)^2 \to 0, \quad n\to+\infty.$$

On déduit alors de l'isométrie L^2, des hypothèses lipschitziennes que, avec des limites dans L^2, on a :

$$\begin{aligned} L^2\text{-}\lim_{n\to+\infty}\int_0^t \sigma(s,X_s^n)\,dB_s &= \int_0^t \sigma(s,X_s)\,dB_s,\\ L^2\text{-}\lim_{n\to+\infty}\int_0^t a(s,X_s^n)\,ds &= \int_0^t a(s,X_s)\,ds. \end{aligned}$$

Finalement, en passant à la limite dans l'équation de récurrence (3.15), on obtient que X est solution forte de $E_x(a,\sigma)$ sur $[0,T]$. □

3.4 Utilisation de Girsanov pour les EDS

Le théorème de Girsanov permet de montrer l'existence de solution faible d'EDS quand elle n'admet pas nécessairement de solution forte.

Proposition 3.1 *Soit B un mouvement brownien standard dans $\mathbb{R}^d$ et $a:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$. On considère l'EDS*

$$dX_t = a(t,X_t)dt + dB_t. \tag{3.20}$$

1. *Il y a existence faible lorsque a est une fonction bornée.*
2. *Il y a unicité faible sur $[0,T]$ lorsque a est presque sûrement carré intégrable sur $[0,T]$: Soit pour $i=1,2$ X^i une solution sur $\big(\Omega^i,\mathcal{F}^i,(\mathcal{F}_t^i)_{t\geq0},\mathbb{P}^i\big)$ associée au mouvement brownien B^i et de condition initiale μ (indépendante de $i=1,2$). Alors (X^1,B^1) et (X^2,B^2) ont la même loi sous $\mathbb{P}^1$ et $\mathbb{P}^2$ resp. (unicité faible) si*

$$\mathbb{P}^i\left(\int_0^T \|a(t,X_t^i)\|^2dt < +\infty\right) = 1.$$

Remarque 3.3
- La condition sur a est trop faible pour que le Théorème 3.2 s'applique. Le théorème de Girsanov permet de montrer l'existence faible d'une solution.
- On peut affaiblir l'hypothèse a bornée en croissance sous-linéaire :

$$\|a(t,x)\| \leq K(1+\|x\|), \quad 0\leq t\leq T,\ x\in\mathbb{R}^d.$$

- On met ainsi en évidence l'effet régularisant du mouvement brownien B (en fait $\widetilde{B}$, cf. ci-dessous) dans (3.20) puisque sans $\widetilde{B}$, l'équation différentielle ordinaire $x_t = \int_0^t a(s,x_s)ds$ n'admet pas de solution en général lorsque a est seulement borné.

Démonstration : Pour simplifier, on suppose $d=1$.
1) **Existence faible.** En partant de $\big(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0},\mathbb{P}\big)$ et B un mouvement brownien, on construit une solution faible par le théorème de Girsanov. Pour cela, on considère $L_t=\int_0^t a(s,B_s)dB_s$ (bien défini parce que a est bornée) et on pose

$$Z_t=\mathcal{E}(L)_t=\exp\left(\int_0^t a(s,B_s)\ dB_s-\frac{1}{2}\int_0^t a(s,B_s)^2\ ds\right).$$

Comme $\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t a(s,B_s)^2\ ds\right)\leq \exp(t\|a\|_\infty/2)$, le critère de Novikov (Théorème 2.2) est satisfait sur tout intervalle $[0,t]$ et Z est une $\mathcal{F}^B$-martingale sur $\mathbb{R}_+$. On définit alors une probabilité sur chaque $\mathcal{F}_t^B$ en posant $d\mathbb{Q}^a_{|\mathcal{F}_t^B}=Z_td\mathbb{P}$. Le théorème de Girsanov assure que

$$\widetilde{B}_t=B_t-\int_0^t a(s,B_s)ds$$

est un $\mathbb{Q}^a$-mouvement brownien. Sous $\mathbb{Q}^a$, le processus B est solution de

$$X_t=\widetilde{B}_t+\int_0^t a(s,X_s)ds$$

c'est à dire de l'EDS (3.20) dirigée par $\widetilde{B}$. On a donc construit une probabilité $\mathbb{Q}^a$ et des processus $(B,\widetilde{B})$ tels que $\widetilde{B}$ est un mouvement brownien sous $\mathbb{Q}^a$ et B est solution faible de (3.20).

2) **Unicité faible.** Soient T une date déterministe fixée et μ une loi initiale. Pour $k\geq 1$ et $i=1,2$, on considère

$$\tau_k^i=T\wedge\inf\left(0\leq t\leq T:\int_0^t\|a(s,X_s^i)\|^2\ ds\geq k\right).$$

Comme précédemment, le critère de Novikov assure que

$$Z_t^{k,i}=\exp\left(\int_0^{t\wedge\tau_k^i} a(s,X_s^i)\ dB_s^i-\frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau_k^i}\|a(s,X_s^i)\|^2\ ds\right)$$

est une martingale. On définit alors des probabilités par $d\mathbb{Q}^{k,i}=Z_T^{k,i}d\mathbb{P}^i$. Le théorème de Girsanov assure alors que sous $\mathbb{Q}^{k,i}$

$$X^i_{t\wedge\tau_k^i}=X_0^i+\int_0^{t\wedge\tau_k^i}a(s,X_s^i)ds+B^i_{t\wedge\tau_k^i},\quad 0\leq t\leq T$$

est un mouvement brownien standard de loi initiale μ, arrêté à τ_k^i. De plus, on montre que τ_k^i, $(B_t^i:t\leq\tau_k^i)$ et $Z_T^{k,i}$ s'expriment en termes de $X^i_{t\wedge\tau_k^i}$ indépendamment de $i=1,2$.

Pour $0=t_0<t_1<\dots<t_n=T$ et $A\in\mathcal{B}\big(\mathbb{R}^{2(n+1)}\big)$, on a

$$\mathbb{P}^1\big((X^1_{t_0},B^1_{t_0},\dots,X^1_{t_n},B^1_{t_n})\in A,\tau_k^1=T\big)\quad=\quad\int_{\Omega^1}\frac{1}{Z_T^{k,1}}\mathbf{1}_{\{(X^1_{t_0},B^1_{t_0},\dots,X^1_{t_n},B^1_{t_n})\in A,\tau_k^1=T\}}\ d\mathbb{Q}^{k,1}$$

$$= \int_{\Omega^2} \frac{1}{Z_T^{k,2}} \mathbf{1}_{\{(X_{t_0}^2, B_{t_0}^2, \ldots, X_{t_n}^2, B_{t_n}^2) \in A, \tau_k^2 = T\}} \, d\mathbb{Q}^{k,2}$$
$$= \mathbb{P}^2\big((X_{t_0}^2, B_{t_0}^2, \ldots, X_{t_n}^2, B_{t_n}^2) \in A, \tau_k^2 = T\big)$$

où la deuxième ligne vient de l'observation précédente et du fait que sous $\mathbb{Q}^{k,i}$, X^{i,τ_k^i} est un mouvement brownien (arrêté, de loi initiale μ). L'hypothèse sur a implique $\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}^i\big(\tau_k^i = T\big) = 1$, $i = 1, 2$. On peut donc passer à la limite $k \to +\infty$ pour conclure. □

Le résultat suivant (admis) est une généralisation de la Proposition 3.1 pour une EDS avec un coefficient de diffusion plus général :

Théorème 3.3 (Beneš) *Soient $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction (globalement) lipschitzienne et ne s'annulant pas et B un mouvement brownien réel standard. L'EDS*
$$dX_t = a(X_t)\ dt + \sigma(X_t)\ dB_t$$
admet une solution faible qui est unique en loi.

L'hypothèse cruciale est que le coefficient de diffusion ne s'annule pas : le processus diffuse tout le temps. La non-nullité de ce coefficient joue un rôle essentiel dans l'étude de la régularité des lois de solutions d'EDS. Cela est exploré à l'aide du *calcul de Malliavin*.

3.5 Flot sur l'espace de Wiener

Dans l'exemple des EDS affines (3.11), la dépendance de la solution par rapport aux conditions initiales est explicite puisque (3.12) se réécrit $X_t = Z_t(X_0 + D_t)$. La solution X_t est donc une fonction affine de la condition initiale X_0. Lorsque les coefficients sont déterministes, les processus Z_t et D_t sont adaptés par rapport à la filtration $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s : s \le t)$ pour tout t. Autrement dit, X_t est une fonction déterministe de X_0 et de la trajectoire du mouvement brownien sur $[0, t]$. En écrivant $[x]_t = \{s \mapsto x_s : s \le t\}$ la trajectoire d'une fonction x sur $[0, t]$, on peut écrire pour l'EDS affine

$$X_t(\omega) = F_{X_0}(t, [B(\omega)]_t)$$

où $F_x(t, w)$ est continue par rapport à x. On généralise cette observation en interprétant la solution de l'EDS $E(a, \sigma)$, ie. $dX_t = a(t, X_t)\ dt + \sigma(t, X_t)\ dB_t$, comme fonctionnelle sur l'espace de Wiener $\big(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m), \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)), \mathbb{W}\big)$ (espace des trajectoires du mouvement brownien).

On rappelle que l'espace de Wiener est l'espace canonique d'un mouvement brownien B, issu de 0 à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, c'est à dire l'ensemble $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)$ des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^m$, muni de la mesure de Wiener $\mathbb{W}$. En particulier, la mesure de Wiener $\mathbb{W}$ est la loi d'un mouvement brownien B.

Théorème 3.4 (Fonctionnelle sur l'espace de Wiener) *Sous les hypothèses lipschitziennes, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe*

$$F_x : \left\{ \begin{array}{ccc} C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m) & \to & C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) \\ w & \mapsto & F_x(w) \end{array} \right.$$

mesurable et satisfaisant les propriétés suivantes :

i) pour tout $t \geq 0$, $F_x(w)_t$ coïncide $\mathbb{W}(dw)$-ps avec une fonction mesurable de $[w]_t = \big(w(r) : 0 \leq r \leq t\big)$; avec un abus de notation, on écrira $F_x(t, [B]_t)$;

ii) pour tout $w \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)$, l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \to & C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m) \\ x & \mapsto & F_x(w) \end{array} \right.$ est continue ;

iii) pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, pour tout choix d'espace de probabilité filtré $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\big)$ et tout $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-mouvement brownien B en dimension m, le processus X défini par $X_t = F_x(B)_t$ est l'unique solution de $E(a, \sigma)$ avec valeur initiale x ; de plus, si Z est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable, le processus $F_Z(B)_t$ est l'unique solution avec valeur initiale Z.

Remarque 3.4 L'assertion iii) montre en particulier qu'il y a unicité faible pour l'EDS $E(a, \sigma)$: les solutions de $E_x(a, \sigma)$ sont toutes de la forme $F_x(B)$ et ont donc la même loi, image de la mesure de Wiener $\mathbb{W}$ par F_x.

Démonstration : À nouveau, on simplifie la présentation de la preuve en considérant le cas $d = m = 1$. On note $\mathcal{N}$ la classe des sous-ensembles $\mathbb{W}$-négligeables de $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et on considère la filtration donnée pour tout $t \in [0, +\infty]$,

$$\mathcal{G}_t = \sigma\big(w(s) : 0 \leq s \leq t\big) \vee \mathcal{N}.$$

D'après la Remarque 1.8, la filtration $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ est continue à droite, comme en plus elle est complète, elle satisfait les conditions habituelles. Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, on note X^x la solution de l'EDS $E_x(a, \sigma)$ associée à l'espace canonique $\big(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \mathcal{G}_\infty, (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{W}\big)$ et au mouvement brownien (canonique) $B_t(w) = w(t)$. D'après le Théorème 3.2, sous les hypothèses lipschitziennes cette solution existe et est unique à indistinguabilité près.

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et T_n le temps d'arrêt défini par

$$T_n = \inf\big(t \geq 0 : |X_t^x| \geq n \text{ ou } |X_t^y| \geq n\big).$$

Soit $p \geq 2$ et $T \geq 1$. En utilisant $(x + y + z)^p \leq 3^{p-1}(x^p + y^p + z^p)$, les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy (Théorème 1.4) et l'inégalité de Hölder, on a pour tout $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[\sup_{s\leq t} |X^x_{s\wedge T_n} - X^y_{s\wedge T_n}|^p\right] \\ \leq\ & C_p \left(|x - y|^p + \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t} \left| \int_0^{s\wedge T_n} \big(\sigma(r, X_r^x) - \sigma(r, X_t^y)\big)\, dB_r \right|^p\right] \right. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad +\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t}\left|\int_0^{s\wedge T_n}\big(a(r,X_r^x)-a(r,X_r^y)\big)\,dr\right|^p\right]\Bigg)\\
&\text{(convexité)}\\
\le\ & C_p\left(|x-y|^p+C_p'\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{t\wedge T_n}\big(\sigma(r,X_r^x)-\sigma(r,X_t^y)\big)^2\,dr\right)^{p/2}\right]\right.\\
&\qquad \left.+\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{t\wedge T_n}\big|a(r,X_r^x)-a(r,X_r^y)\big|\,dr\right)^p\right]\right)\\
&\text{(inégalité BDG droite pour } p\ge 2)\\
\le\ & C_p\left(|x-y|^p+C_p't^{p/2-1}\mathbb{E}\left[\int_0^t\big|\sigma(r\wedge T_n,X^x_{r\wedge T_n})-\sigma(r\wedge T_n,X^y_{t\wedge T_n})\big|^p\,dr\right]\right.\\
&\qquad \left.+t^{p-1}\mathbb{E}\left[\int_0^t\big|a(r\wedge T_n,X^x_{r\wedge T_n})-a(r\wedge T_n,X^y_{r\wedge T_n})\big|^p\,dr\right]\right)\\
&\text{(inégalité de Hölder)}\\
\le\ & C_p''\left(|x-y|^p+T^p\int_0^t\mathbb{E}\big[|X^x_{t\wedge T_n}-X^y_{r\wedge T_n}|^p\big]\,dr\right)\\
&\text{(hypothèses lipschitziennes et } T\ge 1)
\end{aligned}
$$

où la constante $C_p''<+\infty$ dépend de p et de la constante K intervenant dans les hypothèses lipschitziennes sur σ et a mais pas de n,x,y ou T.

Puisque par définition de T_n, la fonction $t\mapsto\mathbb{E}\big[\sup_{s\le t}|X^x_{s\wedge T_n}-X^y_{s\wedge T_n}|^p\big]$ est bornée, l'inégalité de Gronwall (Lemme 3.1) s'applique avec $a=C_p''|x-y|^p$ et $b=C_p''T^p$ et entraîne que pour tout $t\in[0,T]$, on a

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\le t}|X^x_{s\wedge T_n}-X^y_{s\wedge T_n}|^p\right]\le C_p''|x-y|^p\exp(C_p''T^pt). \tag{3.21}$$

Comme

$$\sup_{s\le t}|X^x_{s\wedge T_n}-X^y_{s\wedge T_n}|^p=\sup_{s\le t\wedge T_n}|X^x_s-X^y_s|^p$$

et $T_n\nearrow+\infty$, c'est croissant en $n\ge1$. Par convergence monotone, il vient alors

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\le t}|X^x_s-X^y_s|^p\right]\le C_p''|x-y|^p\exp(C_p''T^pt).$$

On considère sur $C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. Elle est définie par une distance du type

$$d(w,w')=\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k\left(\sup_{s\le k}|w(s)-w'(s)|\wedge 1\right)$$

pour tout choix de la suite de réels positifs $\alpha_k > 0$ tels que la série $\sum_{k\geq 1}\alpha_k$ soit convergente. Ici, on fait le choix des coefficients α_k tels que

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k \exp\left(C_p'' k^{p+1}\right) < +\infty. \tag{3.22}$$

D'après (3.21), ce choix (3.22) garantit que pour une constante $\widetilde{C}_p < +\infty$, on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k \mathbb{E}\left[\sup_{s\leq k}|X_s^x - X_s^y|^p\right] \leq \widetilde{C}_p|x-y|^p. \tag{3.23}$$

Alors les estimations précédentes et l'inégalité de Jensen montrent que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[d(X^x,X^y)^p\big] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k\left(\sup_{s\leq k}|X_s^x - X_s^y|\wedge 1\right)\right)^p\right]\\
&= \left(\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k\right)^p \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\alpha_k}{\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k}\left(\sup_{s\leq k}|X_s^x - X_s^y|\wedge 1\right)\right)^p\right]\\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k\right)^p \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\alpha_k}{\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k}\left(\sup_{s\leq k}|X_s^x - X_s^y|\wedge 1\right)^p\right)\right]\\
&\qquad \text{(inégalité de Jensen pour la mesure } \textstyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\alpha_k}{\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k}\delta_k)\\
&= \left(\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k\right)^{p-1}\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k\mathbb{E}\left[\sup_{s\leq k}|X_s^x - X_s^y|^p\right] \leq \widetilde{C}_p|x-y|^p.\\
&\qquad \text{(avec la borne (3.23))}
\end{aligned}$$

Le théorème de Kolmogorov-Centsov (Théorème **??**) appliqué au processus $(X^x, x\in\mathbb{R})$ à valeurs dans $C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ muni de la distance d donne l'existence d'une modification $(\widetilde{X}^x, x\in\mathbb{R})$ dont les trajectoires sont continues. On note

$$F(t,x,w) = F_x(w)_t = \widetilde{X}_t^x(w).$$

Par choix de la version $\widetilde{X}$, $x\mapsto F_x(w)$ est continue ce qui établit la propriété ii) de l'énoncé.

L'application $w\mapsto F_x(w)$ est mesurable de $C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ muni de la tribu $\mathcal{G}_\infty$ dans $C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ muni de la tribu borélienne $\sigma(w(s): s\geq 0)$. De même, pour chaque $t\geq 0$, $F_x(w)_t = \widetilde{X}_t^x(w)$ est $\mathcal{G}_t$-mesurable donc coïncide ps avec une fonction mesurable de $[w]_t = \{w(s): 0\leq s\leq t\}$, ce qui établit maintenant l'assertion i).

On termine en montrant l'assertion iii). On commence par fixer l'espace de probabilité filtré $\big(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P}\big)$ et un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-mouvement brownien B. Il s'agit de voir que $F_x(B)$ est solution de l'EDS $E_x(a,\sigma)$:

$$dX_t = a(t,X_t)\ dt + \sigma(t,X_t)\ dB_t, \quad X_0 = x.$$

On observe que le processus $F_x(B)$ est continu et adapté d'après i) puisque $F_x(B)_t$ coïncide ps avec une fonction mesurable de $[B]_t = \{B_r : 0 \le r \le t\}$ en effet pour une fonction f_x mesurable sur $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, par le théorème de transfert

$$\mathbb{P}\big(F_x(B)_t = f_x([B]_t)\big) = \mathbb{W}\big(F_x(w)_t = f_x([w]_t)\big) = 1.$$

D'autre part, par construction de F_x, on a $\mathbb{W}(dw)$-ps

$$F_x(w)_t = x + \int_0^t \sigma(s, F_x(w)_s)\ dw(s) + \int_0^t a(s, F_x(w)_s)\ ds.$$

De façon standard, l'intégrale de Stieltjes s'approxime par des sommes de Riemann : on a $\mathbb{W}$-ps

$$\int_0^t a(s, F_x(w)_s)\ ds = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{t^n_{p_n}-1} a(t^n_i, F_x(w)_{t^n_i})\ (t^n_{i+1} - t^n_i)$$

où $0 = t^n_0 \le t^n_1 \le \dots \le t^n_{p_n} = t$ est une subdivision de $[0, t]$ de pas qui tend vers 0. De la même façon, d'après 6) dans la Proposition **??**, on a une approximation à la Riemann pour l'intégrale stochastique $\int_0^t \sigma(s, F_x(w)_s)\ dw(s)$ mais dans le sens de la convergence en probabilité $\mathbb{W}$:

$$\int_0^t \sigma(s, F_x(w)_s)\ dw(s) = \mathbb{W}\text{-}\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{t^n_{p_n}-1} \sigma\left(t^n_i, F_x(w)_{t^n_i}\right)\left(w\left(t^n_{i+1}\right) - w\left(t^n_i\right)\right).$$

En prenant une sous-suite $(n_k)_k$ correctement choisie, on a une convergence $\mathbb{W}$-presque sûre :

$$\int_0^t \sigma(s, F_x(w)_s)\ dw(s) = \lim_{k\to+\infty} \sum_{i=0}^{t^{n_k}_{p_{n_k}}-1} \sigma\left(t^{n_k}_i, F_x(w)_{t^{n_k}_i}\right)\left(w\left(t^{n_k}_{i+1}\right) - w\left(t^{n_k}_i\right)\right).$$

Comme en plus $\mathbb{W}$-ps $F_x(w)_t = f_x([w]_t)$ pour une fonction f_x mesurable sur $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)$, on a finalement

$$\begin{aligned} f_x([w]_t) \quad = \quad x + \lim_{k\to+\infty} \Bigg\{ & \sum_{i=0}^{t^{n_k}_{p_{n_k}}-1} \sigma\left(t^{n_k}_i, F_x(w)_{t^{n_k}_i}\right)\left(w\left(t^{n_k}_{i+1}\right) - w\left(t^{n_k}_i\right)\right) \\ & + \sum_{i=0}^{t^{n_k}_{p_{n_k}}-1} a(t^{n_k}_i, F_x(w)_{t^{n_k}_i})(t^{n_k}_{i+1} - t^{n_k}_i) \Bigg\}. \end{aligned}$$

Maintenant qu'on s'est ramené à une convergence $\mathbb{W}$-presque sûre, on peut, comme précédemment, remplacer w par B (puisque sa loi sous $\mathbb{P}$ est $\mathbb{W}$) :

$$1 \quad = \quad \mathbb{W}\Bigg(f_x([w]_t) = x + \lim_{k\to+\infty} \Bigg\{ \sum_{i=0}^{t^{n_k}_{p_{n_k}}-1} \sigma\left(t^{n_k}_i, F_x(w)_{t^{n_k}_i}\right)\left(w\left(t^{n_k}_{i+1}\right) - w\left(t^{n_k}_i\right)\right)$$

$$
\begin{aligned}
& \qquad\qquad + \sum_{i=0}^{t^{n_k}_{p_{n_k}}-1} a(t_i^{n_k}, F_x(w)_{t_i^{n_k}})(t_{i+1}^{n_k}-t_i^{n_k}) \Bigg\}\Bigg) \\
= \ & \mathbb{P}\Bigg(f_x([B]_t) = x + \lim_{k\to+\infty}\Bigg\{\sum_{i=0}^{t^{n_k}_{p_{n_k}}-1} \sigma\left(t_i^{n_k}, F_x(B)_{t_i^{n_k}}\right)\left(B\left(t_{i+1}^{n_k}\right) - B\left(t_i^{n_k}\right)\right) \\
& \qquad\qquad + \sum_{i=0}^{t^{n_k}_{p_{n_k}}-1} a(t_i^{n_k}, F_x(B)_{t_i^{n_k}})(t_{i+1}^{n_k}-t_i^{n_k}) \Bigg\}\Bigg).
\end{aligned}
$$

Mais, en utilisant encore 6) dans la Proposition **??**, on a

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \sigma(s, F_x(B)_s)\ dB_s &= \mathbb{P}\text{-}\lim_{k\to+\infty} \sum_{i=0}^{t^{n_k}_{p_{n_k}}-1} \sigma\left(t_i^{n_k}, F_x(B)_{t_i^{n_k}}\right)\left(B\left(t_{i+1}^{n_k}\right) - B\left(t_i^{n_k}\right)\right) \ \text{(en proba)} \\
\int_0^t a(s, F_x(B)_s)\ ds &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{t^{n}_{p_n}-1} a(t_i^n, F_x(B)_{t_i^n})(t_{i+1}^n - t_i^n) \quad \mathbb{P}\text{-ps}
\end{aligned}
$$

c'est à dire finalement (par unicité de la limite en probabilité) : $\mathbb{P}$-ps

$$F_x(B)_t = f_x([B]_t) = x + \int_0^t \sigma(s, F_x(B)_s)\ dB_s + \int_0^t a(s, F_x(B)_s)\ ds.$$

On obtient donc que $F_x(B)$ est la solution recherchée de l'EDS $E_x(a,\sigma)$.

Pour finir, on établit la deuxième partie de iii). On fixe à nouveau l'espace de probabilité filtré $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\big)$ et le $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-mouvement brownien B. Soit Z une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable. En remplaçant formellement, dans l'EDS vérifiée par $F_x(B)$, x par Z, on obtient que $F_Z(B)$ est solution de $E(a,\sigma)$ avec valeur initiale Z. On justifie maintenant ce remplacement formel.

D'abord comme $(x,\omega) \mapsto F_x(B)_t$ est continue par rapport à x et $\mathcal{F}_t$-mesurable par rapport à ω, on a facilement que cette application est mesurable pour la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{F}_t$. Comme Z est $\mathcal{F}_0$-mesurable, il s'en déduit, par composition, que $F_Z(B)_t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable et le processus $F_Z(B)$ est donc continu et adapté.

On a vu précédemment que

$$
\begin{aligned}
F_x(B)_t \ = \ & x + \mathbb{P}\text{-}\lim_{k\to+\infty}\Bigg\{\sum_{i=0}^{t^{n_k}_{p_{n_k}}-1} \sigma\left(t_i^{n_k}, F_x(B)_{t_i^{n_k}}\right)\left(B\left(t_{i+1}^{n_k}\right) - B\left(t_i^{n_k}\right)\right) \\
& \qquad\qquad + \sum_{i=0}^{t^{n_k}_{p_{n_k}}-1} a(t_i^{n_k}, F_x(B)_{t_i^{n_k}})(t_{i+1}^{n_k}-t_i^{n_k}) \Bigg\}.
\end{aligned}
$$

De plus, comme Z est $\mathcal{F}_0$-mesurable, on a $Z \perp\!\!\!\perp B$. On peut donc remplacer précédemment x par Z et, en utilisant encore 6) dans la Proposition **??**, avoir (avec $Z \perp\!\!\!\perp B$ encore)

$$F_Z(B)_t = Z + \int_0^t \sigma(s, F_Z(w)_s)\ dB_s + \int_0^t a(s, F_Z(B)_s)\ ds$$

ce qui établit que $F_Z(B)$ est solution de $E(a, \sigma)$ avec valeur initiale Z. □

Propriété de flot

On suppose toujours valides les hypothèses lipschitziennes.

On considère maintenant le cas général de l'EDS $E(a, \sigma)$ qui part de x à la date r, ie. avec $X_r = x$ et on note la solution $X_t^{r,x}$ pour $t \geq r$. D'après le Théorème 3.4, on peut écrire

$$X_t^{r,x} = F(r, x, t, [B. - B_r]_t)$$

où $(B. - B_r)_{s+r} = B_{s+r} - B_r$ est la valeur en s du mouvement brownien translaté en temps de r (c'est bien un mouvement brownien d'après la propriété de Markov faible).

Théorème 3.5 (Propriété de flot) *Sous les hypothèses lipschitziennes, la solution de l'EDS $E(a, \sigma)$ avec $X_r = x$ vérifie la propriété de flot*

$$\begin{aligned} F(r, x, t_0 + t, [B. - B_r]_{t_0+t}) &= F(t_0, X_{t_0}^{r,x}, t_0 + t, [B. - B_{t_0}]_{t_0+t}) \\ ie. \quad X_{t_0+t}^{r,x} &= X_{t_0+t}^{t_0, X_{t_0}^{r,x}}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Cette propriété s'étend pour des temps aléatoires : soit $T \geq r$ un temps d'arrêt borné

$$\begin{aligned} F(r, x, T + t, [B. - B_r]_{T+t}) &= F(T, X_T^{r,x}, T + t, [B. - B_T]_{T+t}) \\ ie. \quad X_{T+t}^{r,x} &= X_{T+t}^{T, X_T^{r,x}}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Démonstration : La propriété de flot (3.24) vient de l'unicité forte de la solution de l'EDS $E(a, \sigma)$ due au Théorème 3.2 sous les hypothèses lipschitziennes. Le processus $t \mapsto F(t_0, X_{t_0}^{r,x}, t_0 + t, [B. - B_{t_0}]_{t_0+t})$ est une solution issue de $X_{t_0}^{r,x}$ à l'instant $t = 0$. Il en est de même du processus $t \mapsto F(r, x, t_0 + t, [B. - B_r]_{t_0+t})$: à la date $t = 0$, il est en $X_{t_0}^{r,x}$. Les deux processus sont adaptés par rapport à la filtration $\sigma(B_{t_0+t} - B_{t_0} : t \geq 0) \vee \sigma(B_{t_0} - B_r)$. Par unicité forte, ces deux processus continus en t sont égaux.

Pour un temps d'arrêt T, on procède de même en notant que, par la propriété de Markov forte, $(B_{T+t} - B_T)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien, cf. Théorème **??**. □

3.6 Markov fort pour EDS homogène

Dans cette section, on suppose toujours les hypothèses lipschitziennes de la section précédente remplies. Pour avoir des propriétés markoviennes homogènes, on suppose en outre que l'EDS est homogène, c'est à dire que les coefficients de l'EDS ne dépendent pas du temps :

$$\sigma(t,y)=\sigma(y), \quad a(t,y)=a(y).$$

Pour chaque $x\in\mathbb{R}^d$, on note P_x la loi sur $C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)$ des solutions de $E_x(a,\sigma)$ (d'après le Théorème 3.4, on a $P_x=\mathbb{W}F_x^{-1}$). L'assertion ii) dans le Théorème 3.4 montre que $x\mapsto P_x$ est continue pour la topologie de la convergence étroite : soit $x_n\to x$, pour $f\in C_b(C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d))$

$$\int f\ dP_{x_n}=\int f(F_{x_n}(w))\ d\mathbb{W}(w)\to\int f(F_x(w))\ d\mathbb{W}(w)=\int f\ dP_x$$

où on utilise $F_{x_n}(w)\to F_x(w)$ dû au Théorème 3.4 et la convergence dominée puisque $f\in C_b\big(C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)\big)$. On déduit alors d'un argument de classe monotone que pour toute fonction Φ borélienne de $C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)$ dans $\mathbb{R}$, l'application $x\mapsto\mathbb{E}_x[\Phi]$ est, elle aussi, mesurable.

Théorème 3.6 (Markov fort pour EDS homogène) *Soit X une solution de $E(a,\sigma)$ sur un espace de probabilité filtré $\big(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq0},\mathbb{P}\big)$. Soit aussi T un temps d'arrêt fini ps. Alors pour $\Phi:C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)\to\mathbb{R}_+$ borélienne, on a*

$$\mathbb{E}\big[\Phi(X_{T+t}:t\geq0)|\mathcal{F}_T\big]=\mathbb{E}_{X_T}[\Phi]$$

c'est à dire pour toute variable aléatoire U positive $\mathcal{F}_T$-mesurable

$$\mathbb{E}\big[U\Phi(X_{T+t}:t\geq0)\big]=\mathbb{E}\big[U\mathbb{E}_{X_T}[\Phi]\big]$$

ie. $\mathcal{L}\big((X_{T+t})_{t\geq0}|\mathcal{F}_T\big)=\mathcal{L}\big((X_t)_{t\geq0}|X_T\big)$.

Remarque 3.5 Ce résultat signifie que la solution X de l'EDS vérifie la propriété de Markov forte par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq0}$: pour tout temps d'arrêt fini T, la loi conditionnelle du « futur » $(X_{T+t}:t\geq0)$ connaissant le « passé » $\mathcal{F}_T$ est la loi de X partant de X_T, qui ne dépend que du présent à l'instant T. Dans le cas particulier $\sigma=Id$ et $a=0$, on retrouve la propriété de Markov forte pour le mouvement brownien. C'est du reste sur celle-ci qu'on s'appuie pour la preuve.

Démonstration : Pour simplifier la présentation de la preuve, on suppose encore que $m=1$, $d=1$. Notons $B_t^{(T)}=B_{T+t}-B_T$. Il s'agit d'un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_T$ (propriété de Markov forte pour le brownien B, cf. Théorème **??**). On pose aussi $X'_t=X_{T+t}$ et on remarque que le processus X' est adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}'_t)_{t\geq0}$

où $\mathcal{F}'_t = \mathcal{F}_{T+t}$ et que cette filtration satisfait les conditions habituelles. De plus, d'après l'EDS satisfaite par X,

$$X'_t = X_T + \int_T^{T+t} a(X_s)\ ds + \int_T^{T+t} \sigma(X_s)\ dB_s.$$

Par changement de variable, on a de suite

$$\int_T^{T+t} a(X_s)\ ds = \int_0^t a(X'_s)\ ds$$

(comme il s'agit d'une intégrale de Stieltjes définie ω par ω, on peut faire le changement de variable sans problème ω par ω, la valeur $T = T(\omega)$ étant alors figée).
On fait aussi un changement de variable dans l'intégrale stochastique à l'aide du lemme suivant :

Lemme 3.2 *Si h est un processus continu adapté, on a*

$$\int_T^{T+t} h(s,\omega)\ dB_s = \int_0^t h(T+s,\omega)\ dB_s^{(T)}.$$

Démonstration :[Lemme] En approchant h par des combinaisons linéaires finies de processus de la forme $h(s,\omega) = \varphi(\omega)\mathbf{1}_{]r,r']}(s)$ où φ est $\mathcal{F}_r$-mesurable. Pour simplifier on prend même h de la forme $h(s,\omega) = \varphi(\omega)\mathbf{1}_{]T+r,T+r']}(s)$ où φ est $\mathcal{F}_{T+r}$-mesurable, il suffit de montrer le changement de variables pour ces fonctions particulières :

$$\begin{aligned}
\int_T^{T+t} h(s,\omega)\ dB_s &= \int_T^{T+t} \varphi(\omega)\mathbf{1}_{]T+r,T+r']}(s)\ dB_s \\
&= \varphi(\omega) \int_{(T+r)\wedge(T+t)}^{(T+r')\wedge(T+t)} dB_s \\
&= \varphi(\omega)\big(B((T+r')\wedge(T+t)) - B((T+r)\wedge(T+t))\big) \\
&= \varphi(\omega)\big(B((T+r')\wedge(T+t)) - B_T - B((T+r)\wedge(T+t)) + B_T\big) \\
&= \varphi(\omega)\big(B^T(r'\wedge t) - B^T(r\wedge t)\big) \\
&= \varphi(\omega) \int_{r\wedge t}^{r'\wedge t} dB_u^T \\
&= \int_{r\wedge t}^{r'\wedge t} \varphi(\omega)\ dB_u^T \\
&= \int_0^t \varphi(\omega)\mathbf{1}_{]r,r']}(u)\ dB_u^{(T)} \\
&= \int_0^t \varphi(\omega)\mathbf{1}_{]T+r,T+r']}(T+u)\ dB_u^{(T)} \\
&= \int_0^t h(T+u,\omega)\ dB_u^{(T)}.
\end{aligned}$$

□

On déduit alors du lemme que

$$\int_T^{T+t} \sigma(X_s)\ dB_s = \int_0^t \sigma(X_{T+u})\ dB_u^{(T)} = \int_0^t \sigma(X'_u)\ dB_u^{(T)}$$

et on a donc

$$X'_{T+t} = X_T + \int_0^t \sigma(X'_s)\ dB_s^{(T)} + \int_0^t a(X'_s)\ ds.$$

On remarque que X' est adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}'_t)_{t\geq 0}$, $B^{(T)}$ est un $(\mathcal{F}'_t)$-mouvement brownien et X_T est $\mathcal{F}'_0$-mesurable. D'après iii) dans le Théorème 3.4, on doit avoir ps $X' = F_{X_T}\big(B^{(T)}\big)$. Le résultat du théorème suit alors facilement : comme X_T est $\mathcal{F}_T$-mesurable et $B^{(T)}$ est indépendant de $\mathcal{F}_T$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[\Phi(X'_t : t \geq 0)|\mathcal{F}_T\big] &= \mathbb{E}\big[\Phi\big(F_{X_T}(B^{(T)})\big)|\mathcal{F}_T\big] \\
&= \int_{C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^m)} \Phi(F_{X_T}(w))\ \mathbb{W}(dw) = \mathbb{E}_{X_T}[\Phi(X_t : t \geq 0)].
\end{aligned}$$

□

Chapitre 4

Mouvement brownien et EDP

Des liens importants existent entre probabilités et EDP via les processus stochastiques. Ceux-ci sont souvent reliés à des opérateurs différentiels linéaires, ce qui permet d'exprimer les solutions de certaines EDP en termes de processus stochastiques. L'opérateur le plus simple est celui de Laplace Δ et il est directement relié au mouvement brownien. On étudie dans ce chapitre les connexions entre mouvement brownien et équations liées au laplacien (équation de Laplace, problème de Dirichlet, équation de la chaleur, formule de Feynman-Kac).

4.1 Fonctions harmoniques

Le laplacien Δu d'une fonction C^2 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^d$ est défini par

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x).$$

Le mouvement brownien B dans $\mathbb{R}^d$ est naturellement relié à cet opérateur, en effet la formule d'Itô montre que si $\Phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est C^2 alors

$$\Phi(B_t) = \Phi(B_0) + \int_0^t \nabla\Phi(B_s) \cdot dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \Delta\Phi(B_s)ds. \tag{4.1}$$

Ainsi, si $\Delta\Phi = 0$, alors $\Phi(B)$ est une martingale locale.

Définition 4.1 (Fonction harmonique) *Soit $D \subset \mathbb{R}^d$ un domaine (ouvert, connexe) Une fonction $u : D \to \mathbb{R}$ est dite harmonique si u est de classe C^2 sur D et satisfait l'équation de Laplace $\Delta u = 0$ dans D.*

Exemples. En dimension 2 : $\ln(x_1^2 + x_2^2)$ et $e^{x_1} \sin x_2$ sont harmoniques. En dimension d : $1/|x|^{d-2}$ l'est sur $D = \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

La propriété suivante joue un rôle essentiel pour relier les solutions d'EDP à des espérances de processus arrêtés en des temps de sortie de domaine. Dans la suite, pour G ouvert, on note pour B mouvement brownien :

$$\begin{aligned} \tau_G &= \inf(t \geq 0 : B_t \notin G) \text{ le temps d'entrée dans } G^c, \\ \sigma_G &= \inf(t > 0 : B_t \notin G) \text{ le temps de sortie de } G. \end{aligned}$$

On note que le temps de sortie de G est plus grand que le temps d'entrée dans G^c : $\sigma_G \geq \tau_G$. Par exemple si G est ouvert et B part de ∂G, on a $\tau_G = 0$ mais $\sigma_G > 0$ si B commence par entrer dans G.

Proposition 4.1 *Soit G un ouvert borné avec $\overline{G} \subset D$ et B un mouvement brownien issu de $a \in G$. Si $u : D \to \mathbb{R}$ est harmonique alors*

$$M_t = u(B_{t\wedge\tau_G}) - u(a)$$

est une martingale centrée.

Démonstration : La fonction u n'est définie que sur D. Pour appliquer la formule d'Itô, on commence par la prolonger sur $\mathbb{R}^d$ en $\Phi \in C^2(\mathbb{R}^d)$ (qui coïncide avec u sur G – mais pas nécessairement sur D). Par exemple, on peut obtenir le prolongement par convolution avec :

$$\Phi = \begin{cases} (\mathbf{1}_{G_{2\delta}} * \rho) \times u & \text{dans } D \\ 0 & \text{dans } D^c \end{cases}$$

où $G_{2\delta}$ est le (2δ)-voisinage de G avec $4\delta = \mathrm{dist}(G, D^c) > 0$ et où ρ est une fonction d'intégrale 1, C^∞ et à support dans $B(0,\delta)$. En notant $N_t = \Phi(a) + \int_0^t \nabla\Phi(B_s) \cdot dB_s$ la martingale locale obtenue dans la formule d'Itô (4.1), on a

$$\Phi(B_{t\wedge\tau_G}) = N_{t\wedge\tau_G} + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau_G} \Delta\Phi(B_s)ds.$$

Comme $\Phi_{|G} = u_{|G}$ et comme u est harmonique sur G, on a $\Phi(B_{t\wedge\tau_G}) = N_{t\wedge\tau_G}$ où $N_{t\wedge\tau_G} = u(a) + \int_0^t \mathbf{1}_{[0,\tau_G]}(s)\nabla\Phi(B_s) \cdot dB_s$ est une martingale L^2 puisque $\nabla\Phi$ est borné sur $\overline{G}$. Finalement,

$$M_t = u(B_{t\wedge\tau_G}) - u(a) = \Phi(B_{t\wedge\tau_G}) - \Phi(a) = \int_0^t \mathbf{1}_{[0,\tau_G]}(s)\nabla\Phi(B_s) \cdot dB_s$$

est une martingale L^2 (et donc centrée). □

Définition 4.2 (Formule de la moyenne) *Une fonction réelle u est dite satisfaire la formule de la moyenne sur D si pour toute boule ouverte $B(a,r)$ telle que $\overline{B}(a,r) \subset D$, on a*

$$u(a) = \int_{\partial B(a,r)} u(x)\ \lambda_{a,r}(dx) \tag{4.2}$$

où $\lambda_{a,r}$ est la probabilité uniforme sur la sphère $\partial B(a,r)$.

Cette propriété signifie que la valeur de u en tout point a s'obtient comme moyenne de u sur n'importe quelle sphère centrée en a, d'adhérence dans D.
Notons que le volume de la boule $B(a,r)$ est

$$\mathrm{Vol}\big(B(a,r)\big) = \frac{2r^d\pi^{d/2}}{d\Gamma(\frac{d}{2})} := V_r$$

et son aire de surface est

$$S_r = \partial_r \mathrm{Vol}\big(B(a,r)\big) = \frac{2r^{d-1}\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})} = \frac{d}{r}V_r,$$

ainsi, on déduit l'expression suivante pour les intégrales sur les boules :

$$\int_{B(a,r)} f(x)\ dx = \int_0^r S_\rho \int_{\partial B(a,\rho)} f(x)\ \lambda_{a,\rho}(dx)d\rho. \tag{4.3}$$

Proposition 4.2 *Soit $u : D \to \mathbb{R}$. Alors u est harmonique sur D ssi u vérifie la formule de la moyenne (4.2).*

Démonstration : $\Rightarrow$: On applique la Proposition 4.1 avec $G = B(a,r)$:

$$\mathbb{E}_a[u(B_{t\wedge\tau_G})] - u(a) = \mathbb{E}_a[M_t] = 0.$$

Comme G est borné, $\tau_G < +\infty$ ps, et en faisant $t \to +\infty$, on déduit par convergence dominée (comme u est bornée sur $B(a,r)$) :

$$u(a) = \mathbb{E}_a[u(B_{\tau_G})]. \tag{4.4}$$

On observe que le mouvement brownien standard issu de a est isotrope : aucune direction n'est priviliégiée par le processus, ie. la loi de B est invariante par les rotations de centre a. Par conséquent, la loi du point de sortie de B de la boule $B(a,r)$ est invariante aussi par les rotations de centre a. Comme la probabilité uniforme $\lambda_{a,r}$ est la seule loi sur la sphère $\partial B(a,r)$ invariante par rotation (de centre a), il s'agit nécessairement de la loi de B_{τ_G} : $\mathbb{P}_a(B_{\tau_{\partial B(a,r)}} \in \cdot) = \lambda_{a,r}$. On réécrit alors (4.4) comme suit

$$u(a) = \mathbb{E}_a[u(B_{\tau_G})] = \int_{\partial B(a,r)} u(x)\ \lambda_{a,r}(dx). \tag{4.5}$$

$\Leftarrow$: On suppose maintenant que u vérifie la formule de la moyenne (4.2). On commence par montrer que u est de classe C^∞. Soit, pour $\varepsilon > 0$, $g_\varepsilon : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ la fonction C^∞ donnée par

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} c_\varepsilon \exp\left(\frac{1}{\|x\|^2-\varepsilon^2}\right) & \text{si } \|x\| < \varepsilon \\ 0 & \text{si } \|x\| \geq \varepsilon \end{cases}$$

où la constante c_ε est choisie de façon que

$$\int_{B(0,\varepsilon)} g_\varepsilon(x)\ dx = c_\varepsilon \int_0^\varepsilon S_\rho \exp\left(\frac{1}{\rho^2-\varepsilon^2}\right) d\rho = 1. \tag{4.6}$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $a \in D$ tels que $\overline{B(a,\varepsilon)} \subset D$, on pose

$$u_\varepsilon(a) = \int_{B(0,\varepsilon)} u(a+x) g_\varepsilon(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}^d} u(y) g_\varepsilon(y-a)\ dy.$$

Il est clair que u_ε est C^∞ sur le domaine D où elle est définie. De plus, pour tout $a \in D$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{B(a,\varepsilon)} \subset D$, on déduit alors, à l'aide du théorème de Fubini, de la formule de la moyenne et de (4.6)

$$\begin{aligned}
u_\varepsilon(a) &= \int_{B(0,\varepsilon)} u(a+x) g_\varepsilon(x)\ dx \\
&= c_\varepsilon \int_0^\varepsilon S_\rho \int_{\partial B_\rho} u(a+x) \exp\left(\frac{1}{\rho^2-\varepsilon^2}\right)\ \lambda_{0,\rho}(dx) d\rho \\
&= c_\varepsilon \int_0^\varepsilon S_\rho \int_{\partial B(a,\rho)} u(x)\ \lambda_{a,\rho}(dx)\ \exp\left(\frac{1}{\rho^2-\varepsilon^2}\right)\ d\rho \\
&= c_\varepsilon \int_0^\varepsilon S_\rho u(a) \exp\left(\frac{1}{\rho^2-\varepsilon^2}\right)\ d\rho \\
&= u(a)
\end{aligned}$$

en utilisant l'écriture (4.3) des intégrales. Comme $u = u_\varepsilon$ sur D avec $u_\varepsilon \in C^\infty$, on a aussi u de classe C^∞ sur D.

Pour voir que $\Delta u = 0$ sur D, on choisit $a \in D$ et on écrit la formule de Taylor en a :

$$u(a+y) = u(a) + \sum_{i=1}^d y_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d y_i y_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(a) + o(\|y\|^2), \quad y \in \overline{B(0,\varepsilon)}, \tag{4.7}$$

où $\varepsilon > 0$ est assez petit pour que $\overline{B(a,\varepsilon)} \subset D$ où u est C^∞. Comme par (im)parité, on a

$$\int_{\partial B(0,\varepsilon)} y_i\ \lambda_{0,\varepsilon}(dy) = 0, \quad \int_{\partial B(0,\varepsilon)} y_i y_j\ \lambda_{0,\varepsilon}(dy) = 0,\ i \neq j,$$

en intégrant la formule de Taylor (4.7) sur $\partial B(0,\varepsilon)$, et en utilisant la formule de la moyenne, on obtient

$$u(a) = \int_{\partial B(0,\varepsilon)} u(a+y)\ \lambda_{0,\varepsilon}(dy) = u(a) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(a) \int_{\partial B(0,\varepsilon)} y_i^2\ \lambda_{0,\varepsilon}(dy) + o(\varepsilon^2).$$

Mais comme

$$\int_{\partial B(0,\varepsilon)} y_i^2\ \lambda_{0,\varepsilon}(dy) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \int_{\partial B(0,\varepsilon)} y_i^2\ \lambda_{0,\varepsilon}(dy) = \frac{\varepsilon^2}{d},$$

on a

$$\frac{\varepsilon^2}{2d}\Delta u(a) + o(\varepsilon^2) = 0.$$

D'où il vient $\Delta u(a) = 0$ pour $a \in D$ en faisant $\varepsilon \to 0$. $\square$

Proposition 4.3 (Principe du maximum) *Soit u une fonction harmonique sur D. Alors*

1. *Si u atteint son maximum en un point intérieur à D et si l'ouvert D est connexe alors u est constante sur D.*
2. *Sur tout compact $F \subset D$, u atteint son maximum sur le bord ∂F de F.*

Démonstration : Pour 1), on pose $M = \sup(u(x) : x \in D)$. Si $a \in D$, d'après la formule de la moyenne (satisfaite par u harmonique), $u(a)$ est moyenne des valeurs $\{u(x) : x \in \partial B(a, r)\}$ pour tout r assez petit. Ainsi si $u(a) = M$, nécessairement u est constante égale à M sur toute sphère $\partial B(a, r)$. Comme ceci est valable pour tout r assez petit, cela exige que u soit constante sur un voisinage de a.
L'ensemble $A = \{x \in D : u(x) = M\}$ est donc ouvert mais il est aussi fermé par continuité de u. De plus, comme par hypothèse $A \neq \emptyset$ et D est connexe, on a $A = D$.

Pour montrer 2), on considère $a \in F^\circ$, intérieur de F compact et on note G la composante connexe de F° qui contient a. D'après la formule de la moyenne, on a $u(a) \leq \max(u(x) : x \in \partial G)$. Comme $\partial G \subset \partial F^\circ \subset \partial F$, on a donc aussi que $u(a) \leq \max(u(x) : x \in \partial F)$. $\square$

4.2 Problème de Dirichlet

Le problème de Dirichlet consiste en résoudre l'équation de Laplace sur un ouvert D avec des conditions aux bords imposées (sur ∂D). Étant donné un ouvert $D \subset \mathbb{R}^d$ et $f : \partial D \to \mathbb{R}$ une fonction continue, le **problème de Dirichlet** (D, f) consiste à trouver une fonction $u : \overline{D} \to \mathbb{R}$ continue sur $\overline{D}$ et C^2 sur D telle que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Delta u & = & 0 \quad \text{sur } D \\ u_{|\partial D} & = & f. \end{array} \right. \tag{4.8}$$

Il s'agit d'un problème bien connu qu'on peut résoudre explicitement de façon analytique en utilisant la transformation de Fourier sur des domaines pertinents. L'approche probabiliste permet d'avoir accès rapidement à une expression de la solution pour des domaines D de géométrie (relativement) arbitraire. De plus, elle ouvre la porte à des techniques de simulations de ces solutions d'EDP (méthode de Monte-Carlo). Cependant pour simplifier, nous supposons que D est borné.

Théorème 4.1 (Dirichlet 1) *On considère le problème de Dirichlet (4.8). Soit*

$$u(x)=\mathbb{E}_x[f(B_{\tau_D})], \quad x\in \overline{D}. \tag{4.9}$$

1. *Si $\mathbb{E}_x[|f(B_{\tau_D})|]<+\infty$, $\forall x\in D$, alors u donnée par (4.9) vérifie (4.8).*
2. *Si f est bornée et*
$$\mathbb{P}_a(\tau_D<+\infty)=1, \quad \forall a\in D$$
alors toute solution bornée du problème de Dirichlet (D,f) s'écrit (4.9).

Si D est borné alors la condition dans 1) au dessus est satisfaite car B_{τ_D} reste dans D et f est finie sur un domaine borné.

D'après le Théorème 4.1, pour résoudre le problème de Dirichlet (4.8), il reste seulement à voir la continuité sur ∂D de u donnée par (4.9), c'est à dire

$$\lim_{\substack{x\in D\\ x\to a}}\mathbb{E}_x[f(B_{\tau_D})]=f(a), \quad a\in\partial D. \tag{4.10}$$

Ceci est lié à la notion de régularité du bord, cf. ci-dessous.

Démonstration : On montre d'abord 2) puis 1).
2) On suppose d'abord qu'il existe u vérifiant le problème de Dirichlet (4.8). Soient $x\in D$ et $D_-^\varepsilon=\{x\in D:\mathrm{dist}(x,D^c)>\varepsilon\}$ le ε-intérieur de D. Pour ε assez petit, $x\in D_-^\varepsilon$. On applique alors la Proposition 4.1 et en prenant l'espérance de la martingale obtenue, on a

$$u(x)=\mathbb{E}_x\big[u(B_{t\wedge\tau_{D_-^\varepsilon}})\big].$$

Par hypothèse, on a $\tau_{D_-^\varepsilon}<+\infty$ ps ($D_-^\varepsilon\subset D$) : on se ramène facilement, au cas où D est un rectangle et on utilise les temps de sortie des marginales de B qui sont des mouvements browniens unidimensionnels dont les temps de sorties d'intervalles sont bien connus. On utilise le théorème de convergence dominée (u bornée sur $\overline{D}$ puisque D est borné) pour faire successivement $t\to+\infty$ et $\varepsilon\to 0$: d'abord comme $\tau_{D_-^\varepsilon}<+\infty$ ps

$$u(x)=\lim_{t\to+\infty}\mathbb{E}_x\big[u(B_{t\wedge\tau_{D_-^\varepsilon}})\big]=\mathbb{E}_x\big[u(B_{\tau_{D_-^\varepsilon}})\big].$$

Puis comme $D=\bigcup_{\varepsilon>0}D_-^\varepsilon$, on a $\tau_{D_-^\varepsilon}\nearrow\tau_D$ lorsque $\varepsilon\to 0$ donc par continuité de B et de u, à nouveau par convergence dominée :

$$u(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}_x\big[u(B_{\tau_{D_-^\varepsilon}})\big]=\mathbb{E}_x[u(B_{\tau_D})]=\mathbb{E}_x[f(B_{\tau_D})]$$

où la dernière égalité vient de la condition au bord du problème de Dirichlet (4.8) avec $B_{\tau_D}\in\partial D$. Finalement, si $x\in\partial D$, $\tau_D=0$ et on a $u(x)=f(x)$. Si elle existe, la solution de (4.8) est donc unique et nécessairement donnée par (4.9).

1) On considère maintenant u donnée par (4.9). Comme pour 2), il est immédiat que $u(x)=f(x)$ si $x\in\partial D$. Pour montrer que u est harmonique dans D, on montre que u

vérifie la formule de la moyenne, ce qui est équivalent par la Proposition 4.2.
Soit $B(a,r) \subset D$. Quand B part de $a \in B(a,r) \subset D$, comme $\tau_{B(a,r)} \leq \tau_D$, on a $\mathcal{F}_{\tau_{B(a,r)}} \subset \mathcal{F}_{\tau_D}$ et par conditionnement on a

$$u(a) = \mathbb{E}_a[f(B_{\tau_D})] = \mathbb{E}_a\big[\mathbb{E}_a[f(B_{\tau_D})|\mathcal{F}_{\tau_{B(a,r)}}]\big].$$

Mais

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_a[f(B_{\tau_D})|\mathcal{F}_{\tau_{B(a,r)}}] &= \mathbb{E}_a[f(B_{\tau_D} - B_{\tau_{B(a,r)}} + B_{\tau_{B(a,r)}})|\mathcal{F}_{\tau_{B(a,r)}}] \\
&= \mathbb{E}_a[f(B^{(\tau_{B(a,r)})}_{\tau_D - \tau_{B(a,r)}} + B_{\tau_{B(a,r)}})|\mathcal{F}_{\tau_{B(a,r)}}] \\
&= \mathbb{E}_a[f(B^{(\tau_{B(a,r)})}_{\tau'_D} + B_{\tau_{B(a,r)}})|\mathcal{F}_{\tau_{B(a,r)}}] \\
&= u(B_{\tau_{B(a,r)}})
\end{aligned}$$

car par la propriété de Markov forte, $B^{(\tau_{B(a,r)})}_t := B_{t+\tau_{B(a,r)}} - B_{\tau_{B(a,r)}}$, $t \geq 0$, est un mouvement brownien issu de 0, indépendant de $\mathcal{F}_{\tau_{B(a,r)}}$ et donc sachant $\mathcal{F}_{\tau_{B(a,r)}}$, $B^{(\tau_{B(a,r)})}_{t+\tau_{B(a,r)}} + B_{\tau_{B(a,r)}}$ est un mouvement brownien partant de $B_{\tau_{B(a,r)}} \in \partial B(a,r)$ pour lequel $\tau'_D := \tau_D - \tau_{B(a,r)}$ reste le temps de sortie D (il s'agit de τ_D, reinitialisé à la date $\tau_{B(a,r)}$).
Finalement avec (4.5), on a

$$u(a) = \mathbb{E}_a[u(B_{\tau_{B(a,r)}})] = \int_{\partial B(a,r)} u(y)\ \lambda_{a,r}(dy)$$

ce qui établit la formule de la moyenne donc l'harmonicité par la Proposition 4.2, c'est à dire l'équation de Laplace sur D. □

Régularité du bord

Pour avoir une solution au problème de Dirichlet (4.8) à partir de (4.9), il reste à voir la continuité sur ∂D, ie. (4.10). Pour cela, on utilise la notion de régularité du bord tel que décrit dans [KS, p. 245].

Définition 4.3 (Régularité) *On rappelle que* $\sigma_D = \inf(t > 0 : B_t \notin D)$ *est le temps de sortie de* D *d'un mouvement brownien* B*.*

1. *Un point* $x \in \partial D$ *est régulier pour* D *si* $\mathbb{P}_x(\sigma_D = 0) = 1$*.*
2. *Le domaine* D *est régulier si tous ses points frontières le sont :*

$$\mathbb{P}_x(\sigma_D = 0) = 1 \quad \forall x \in \partial D. \tag{4.11}$$

En d'autres termes, la régularité demande que le mouvement brownien partant de ∂D sorte immédiatement de D.

Remarque 4.1 – Un point x est dit irrégulier si $\mathbb{P}_x(\sigma_D = 0) < 1$. Comme $\{\sigma_D = 0\} \in \mathcal{F}^B_{0^+}$, la loi du zéro/un de Blumenthal assure que, pour ces points, $\mathbb{P}_x(\sigma_D = 0) = 0$.
– La condition de régularité est locale : $x \in \partial D$ est régulier pour D ssi x l'est pour $B(x, r) \cap D$ pour $r > 0$.

Exemples (Régularité).
– C'est le cas si $D \subset \mathbb{R}^2$ est de bord une courbe simple C^1 ou $D \subset \mathbb{R}^d$ est le bord d'une variété différentiable de classe C^1.
– En dimension 1, tout point de ∂D est régulier. En effet, par exemple pour 0, le mouvement brownien réel issu de 0 visite $\mathbb{R}^*_+$ et $\mathbb{R}^*_-$ en des temps arbitrairement proches de 0, ce qui garantit $\sigma_D = 0$. Ainsi, on verra avec le Théorème 4.2 que le problème de Dirichlet en dimension 1 est résoluble avec une solution linéaire par morceaux donnée par (4.9).
– En dimension $d \geq 2$, un ouvert privé d'un point intérieur (par exemple $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$) n'est pas régulier.
– Pour $d \geq 2$, $D = \{x \in \mathbb{R}^d : 0 < \|x\| < 1\}$. Pour $x \in D$, le mouvement brownien partant de x quitte D par $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = 1\}$, pas par l'origine. Ainsi u donnée par (4.9) est déterminée seulement par les valeurs de f sur la frontière extérieure S_1 et va coïncider (à part à l'origine) avec la fonction harmonique

$$\widetilde{u}(x) = \mathbb{E}_x[f(B_{\tau_{B(0,1)}})] = \mathbb{E}_x[f(B_{\sigma_D})], \quad x \in B(0, 1).$$

En posant $u(0) = f(0)$, u est continue en 0 ssi $f(0) = \widetilde{u}(0)$.
– Quand $d \geq 3$, il est possible d'avoir ∂D connecté et avec des points irréguliers.

Proposition 4.4 (Régularité du bord) *Soient $d \geq 2$ et $a \in \partial D$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *La condition (4.10) est remplie pour toute fonction mesurable bornée $f : \partial D \to \mathbb{R}$, continue en a.*
2. *Le point a est régulier pour D.*
3. *Pour tout $\varepsilon > 0$, on a*
$$\lim_{\substack{x \in D \\ x \to a}} \mathbb{P}_x(\tau_D > \varepsilon) = 0.$$

Des Théorème 4.1 et Proposition 4.4, on déduit d'abord immédiatement :

Théorème 4.2 (Dirichlet 2) *Si le domaine D est régulier, alors la fonction u donnée par (4.9) est l'unique solution du problème de Dirichlet, ie. u est C^2 sur D et continue sur $\overline{D}$ et (4.8) est satisfait.*

Conséquences sur le mouvement brownien

Exemple 1. Pour $d = 2$, on considère l'anneau D de centre 0 et de rayons intérieur r et extérieur R, $0 < r < R < +\infty$, ie. $D = \{x = (x_1, x_2) : r^2 < x_1^2 + x_2^2 < R^2\}$ et f est donnée sur ∂D par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| = r \\ 0 & \text{si } |x| = R. \end{cases}$$

Comme le domaine D est régulier, d'après le Théorème 4.2, la solution du problème de Dirichlet (D, f) est donnée par (4.9), soit

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathbb{E}_x\big[\mathbf{1}_{\{|B_{\tau_D}|=r\}}\big] \\ &= \mathbb{P}_x\big(B \text{ sort de } D \text{ par le cercle intérieur}\big), \quad x \in \overline{D}. \end{aligned}$$

De plus un calcul direct montre que

$$\frac{\ln R - \ln|x|}{\ln R - \ln|r|}, \quad x \in \overline{D},$$

vérifie l'EDP de Dirichlet (4.8) et donc (par unicité) coïncide avec u. On a établi

$$\mathbb{P}_x\big(B \text{ sort de } D \text{ par le cercle intérieur}\big) = \frac{\ln R - \ln|x|}{\ln R - \ln|r|}, \quad x \in \overline{D}.$$

Exemple 2. On considère maintenant $d \geq 3$ et toujours $D = \{x \in \mathbb{R}^d : r < |x| < R\}$ avec f comme précédemment. On vérifie alors que

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathbb{E}_x\big[\mathbf{1}_{\{|B_{\tau_D}|=r\}}\big] \\ &= \mathbb{P}_x\big(B \text{ sort de } D \text{ par le cercle intérieur}\big) = \frac{|x|^{-d+2} - |R|^{-d+2}}{|r|^{-d+2} - |R|^{-d+2}}, \quad x \in \overline{D}, \end{aligned}$$

où la deuxième égalité vient de ce que, par un calcul direct, on voit que la fonction est solution de l'EDP de Dirichlet (4.8).

Quand $R \to +\infty$, comme le temps d'atteinte de la sphère extérieure tend presque sûrement vers $+\infty$ avec R, on a, par convergence monotone :

$$\lim_{R\to+\infty} \mathbb{P}_x\big(B \text{ sort de } D \text{ par le cercle intérieur}\big) = \mathbb{P}_x\big(B \text{ atteint la boule } B(0,r) \text{ en temps fini}\big).$$

Dans l'Exemple 1, on constate que $u(x) \to 1$ quand $R \to +\infty$; dans l'Exemple 2, $u(x) \to (r/|x|)^{d-2}$. Cela met en évidence deux types de comportements différents du mouvement brownien selon que $d = 2$ ou $d \geq 3$.

En fait, en dimension $d = 2$, le mouvement brownien est récurrent (avec probabilité 1, il finit par atteindre la boule $B(0, r)$ pour tout rayon $r > 0$ et pour tout point de départ (et aussi pour tout rayon positif par scaling). Au contraire, si $d \geq 3$, le mouvement brownien a une probabilité strictement positive de ne jamais atteindre la boule $B(0, r)$, il est transcient. Il y a en quelque sorte trop de place en dimension $d \geq 3$ pour que la « marche au hasard brownienne » soit sûre de repasser près de l'origine.

4.3 Équation de la chaleur

Les lois de la thermodynamique expliquent que la solution u du problème de Dirichlet (D, f) en (4.8) est le champ de température à l'équilibre à l'intérieur D d'un récipient dont les parois ∂D sont maintenues à température f (cette interprétation suppose que $f \geq 0$) . On s'intéresse maintenant aux équations de Laplace avec évolution dans le temps : par exemple, pour poursuivre la même interprétation thermodynamique, on considère une plaque infiniment mince isolée homogène et infinie. La température $u(t; y, z)$ au point (y, z) à l'instant t se détermine en fonction de la température initiale f comme la solution de l'EDP

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

partant de $u(0, \cdot) = f(\cdot)$. Le coefficient $\sigma > 0$ ne dépend pas de (y, z) et caractérise la conductance thermique de la plaque.

En dimension d quelconque, on appelle **équation de la chaleur**, le problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial}{\partial t}u & = & \frac{1}{2}\Delta u \\ u(0, \cdot) & = & f. \end{array}\right. \tag{4.12}$$

Nous allons relier cette EDP à des objets probabilistes. On considère d'abord la loi de B_t sachant $\mathcal{F}_s$: par indépendance et stationnarité des accroissements, en écrivant $B_t = B_t - B_s + B_s$, on constate qu'il s'agit de la loi gaussienne (conditionnelle) $\mathcal{N}_d(B_s, (t-s)I_d)$ de densité au point y, en notant $B_s = x$, donnée par

$$p(t - s; x, y) = g_{t-s}(y - x).$$

On voit sans difficulté que $p = p(t; x, y)$ vérifie

$$p^{-1}\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{d}{2t} + \frac{|y - x|^2}{2t^2}$$

et que

$$p^{-1}\frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} = -\frac{1}{t} + \frac{(y_i - x_i)^2}{t^2}$$

de sorte que la fonction p est solution de l'*équation progressive* (dite forward) (ie. en la variable y de la position future)

$$\frac{\partial}{\partial t}p = \frac{1}{2}\Delta_y p, \quad \lim_{t\searrow 0} p\ dy = \delta_x$$

où δ_x est la mesure de Dirac en 0 et aussi par symétrie solution de l'*équation rétrograde* (dite backward) (ie. en la variable x de la position passée)

$$\frac{\partial}{\partial t}p = \frac{1}{2}\Delta_x p, \quad \lim_{t\searrow 0} p\ dx = \delta_y.$$

Ces relations justifient que p est la solution fondamentale de l'équation de la chaleur. (De ce fait, on appelle p le *noyau de la chaleur*.)

Proposition 4.5 *On suppose que la condition initiale f vérifie $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|e^{-c|x|^2}\,dx < +\infty$ pour une constante $c > 0$. Alors la fonction*

$$u(t,x) = \mathbb{E}_x[f(B_t)]$$

est solution de l'équation de la chaleur (4.12) sur $[0, t_0[\times\mathbb{R}^d$ avec $t_0 = 1/(2c)$.

Démonstration : Par définition, on a $u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)p(t;x,y)\,dy$. La propriété d'intégrabilité de f permet de dériver sous le signe intégrale pour $t \in [0, 1/(2c)[$ et d'avoir

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \int f(y)\frac{\partial}{\partial t}p(t;x,y)\,dy, \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}u = \int f(y)\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}p(t;x,y)\,dy$$

ce qui implique d'après l'équation rétrograde pour p que u est solution de (4.12) sur cet intervalle de temps avec la bonne condition initiale. □

4.4 Formule de Feynman-Kac

On considère l'EDP parabolique linéaire

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u &=& \frac{1}{2}\Delta u - ku, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d, \\ u(0,\cdot) &=& f. \end{cases} \tag{4.13}$$

Le terme supplémentaire $k(x)$ réprésente le taux de dissipation de la chaleur en x dans le cas où $k \geq 0$. Dans le cas où k n'est pas positive, on interprètera plutôt cette équation (avec $f \geq 0$) comme décrivant la densité $u(t,x)$ au temps t et au point x de particules diffusant dans l'espace qui se multiplient dans les sites tels que $k(x) \leq 0$ (à un taux $-k$) et qui sont tuées dans les sites tels que $k(x) \geq 0$ (à un taux k). Puisque cette équation se réduit si $k = 0$ à l'équation de la chaleur, le résultat suivant n'est pas surprenant compte tenu de la Proposition 4.5 :

Proposition 4.6 *On suppose que $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ et $k : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ sont boréliennes avec f à croissance sous-exponentielle et k bornée. Alors toute solution $u(t,x)$ de l'EDP parabolique linéaire (4.13) de classe $C^{1,2}$ dont le gradient est à croissance sous-exponentielle (uniformément en temps), est donnée par la formule*

$$u(t,x) = \mathbb{E}_x\left[f(B_t)\exp\left(-\int_0^t k(B_s)ds\right)\right]. \tag{4.14}$$

En particulier, une telle solution est unique.

On interprètera mieux cette formule, plus tard, avec la notion de générateur associé à la diffusion B.

Démonstration : On fixe $t \geq 0$ et on applique la formule d'Itô au temps $s \in]0,t[$ à $s \mapsto u(t-s,B_s)\exp\big(-\int_0^s k(B_r)dr\big)$. Il vient

$$\begin{aligned}
& d\left[u(t-s,B_s)\exp\Big(-\int_0^s k(B_r)dr\Big)\right] \\
= & \left[-k(B_s)u(t-s,B_s)ds - \frac{\partial}{\partial t}u(t-s,B_s)ds + \nabla u(t-s,B_s)dB_s + \frac{1}{2}\Delta u(t-s,B_s)ds\right] \\
& \times \exp\Big(-\int_0^s k(B_r)dr\Big) \\
= & \nabla u(t-s,B_s)\ dB_s\ \exp\Big(-\int_0^s k(B_r)dr\Big)
\end{aligned}$$

en utilisant l'EDP (4.13). On intègre entre $s=0$ et $s=t$:

$$\begin{aligned}
\exp\left(-\int_0^t k(B_r)dr\right)u(0,B_t) - u(t,B_0) &= \exp\left(-\int_0^t k(B_r)dr\right)f(B_t) - u(t,B_0) \\
&= \int_0^t \exp\left(-\int_0^s k(B_r)dr\right)\nabla u(t-s,B_s)dB_s.
\end{aligned}$$

On passe à l'espérance sous $\mathbb{P}_x$, en notant que l'intégrale stochastique est une martingale L^2 d'après les hypothèses de croissance sous-exponentielle de u et de la bornitude pour k ; elle est donc d'espérance nulle. On obtient alors

$$\mathbb{E}_x\left[\exp\left(-\int_0^t k(B_r)dr\right)f(B_t) - u(t,B_0)\right] = 0$$

soit, puisque $B_0 = x$ sous $\mathbb{P}_x$,

$$u(t,x) = \mathbb{E}_x\left[\exp\left(-\int_0^t k(B_r)dr\right)f(B_t)\right]$$

ce qui est la formule de Feynman-Kac (4.14). □

Cas de l'EDP (4.13) sur un domaine. Soit D un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^d$, k mesurable bornée sur D. On considère maintenant l'EDP

$$\begin{cases}
\frac{\partial}{\partial t}u &= \frac{1}{2}\Delta u - ku, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times D \\
u(0,\cdot) &= f \quad \text{sur } \overline{D} \\
u(\cdot,x) &= 0 \quad \text{pour } x \in \partial D.
\end{cases}$$

Soit u une solution de l'EDP continue sur $\mathbb{R}_+ \times \overline{D}$, de classe $C^{1,2}$ bornée et à dérivées bornées. On peut vérifier qu'alors

$$u(t,x) = \mathbb{E}_x\left[f(B_t)\mathbf{1}_{\{t<\tau_D\}}\exp\left(-\int_0^t k(B_s)ds\right)\right]$$

où τ_D est le temps de sortie de D. Pour cela, comme précédemment, on applique la formule d'Itô à $s \mapsto u(t-s,B_{s\wedge\tau_D})\exp\big(-\int_0^s k(B_{r\wedge\tau_D})dr\big)$. Noter que pour $x \in \partial D$, $\tau_D = 0$ sous $\mathbb{P}_x$ et on récupère la condition au bord $u(\cdot,x) = 0$ pour $x \in \partial D$.

Chapitre 5

Diffusions

Dans ce chapitre, on introduit brièvement en Section 5.1 les solutions d'EDS appelées diffusions ainsi que des outils importants pour leur étude. On termine en reliant l'existence d'une solution faible d'une EDS à un problème de martingales en Section 5.4.

5.1 Générateur d'une diffusion

Définition 5.1 (Processus de diffusion) *On appelle processus de diffusion un processus vérifiant la propriété de Markov forte et à trajectoires continues du type considéré dans le Théorème 3.6.*

Ainsi, d'après le Théorème 3.6, les solutions d'EDS homogènes $dX_t = a(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dB_t$ sont des diffusions. On considère ce type de processus dans la suite. De façon générale, on considère X solution forte de l'EDS $E(a,\sigma)$

$$dX_t = a(t, X_t)\,dt + \sigma(t, X_t)\,dB_t$$

avec $a(t,x) \in \mathbb{R}^d$ et $\sigma(t,x) \in \mathcal{M}_{d,m}(\mathbb{R})$ boréliennes et B un mouvement brownien m-dimensionnel. On suppose que pour tout $t \geq 0$ ps, pour tout $1 \leq i \leq d$ et $1 \leq j \leq m$, on a

$$\int_0^t |a_i(s, X_s)|\,ds < +\infty, \qquad \int_0^t |\sigma_{i,j}(s, X_s)|^2\,ds < +\infty.$$

Il est important de pouvoir attacher aux processus de diffusion des martingales (locales) continues. C'est l'objet du théorème suivant où on note σ^* la transposée de la matrice σ. Pour cela, on introduit le générateur d'une diffusion.

Définition 5.2 (Générateur infinitésimal) *Soit X diffusion solution forte de l'EDS $E(a,\sigma)$. On appelle générateur (infinitésimal) de X, l'opérateur elliptique du deuxième ordre qui associe à f, fonction de classe $C^{1,2}$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$,*

$$Lf(t,x) \;=\; \sum_{i=1}^d a_i(t,x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^d\sum_{j=1}^d (\sigma\sigma^*)_{i,j}(t,x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

$$L = a\cdot\nabla_x + \frac{1}{2}\sigma\sigma^*\nabla_x\nabla_x^*.$$

Le Théorème 5.2 justifiera la terminologie "générateur".
Par exemple, pour $X = B$ mouvement brownien, $L = \frac{1}{2}\partial^2/\partial x^2$ (en dimension 1) ou $L = \frac{1}{2}\Delta$ (en dimension d). Le résultat suivant justifie l'importance du générateur L de X pour X.

Théorème 5.1 *Soient X une solution forte de $E(a,\sigma)$ de générateur L et f dans le domaine de l'opérateur L. Alors*

$$f(X_t) - \int_0^t Lf(s,X_s)\ ds$$

est une martingale locale.

Démonstration : On commence par noter que comme $d\langle B^k, B^l\rangle_t = \delta_{k,l}\ dt$, on a :

$$\begin{aligned} d\langle X^i, X^j\rangle_t &= \sum_{k,l=1}^m \sigma_{i,k}(t,X_t)\sigma_{j,l}(t,X_t)d\langle B^k,B^l\rangle_t \\ &= \sum_{k=1}^m \sigma_{i,k}(t,X_t)\sigma_{j,k}(t,X_t)\ dt \\ &= (\sigma\sigma^*)_{i,j}(t,X_t)\ dt. \end{aligned}$$

On applique la formule d'Itô à $f(X_t)$:

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s)dX_s^i + \frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le d}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(X_s)d\langle X^i,X^j\rangle_s \\ &= f(X_0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t a_i(s,X_s)\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s)\ ds + \sum_{i=1}^d\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s)\left(\sum_{k=1}^m \sigma_{i,k}(s,X_s)\ dB_s^k\right) \\ &\qquad + \frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le d}\int_0^t (\sigma\sigma^*)_{i,j}(s,X_s)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(X_s)\ ds \\ &= f(X_0) + \int_0^t Lf(s,X_s)\ ds + \sum_{i=1}^d\sum_{k=1}^m\int_0^t \sigma_{i,k}(s,X_s)\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s)\ dB_s^k. \end{aligned}$$

Finalement

$$f(X_t) - \int_0^t Lf(s,X_s)ds = f(X_0) + \sum_{i=1}^d\sum_{k=1}^m\int_0^t \sigma_{i,k}(s,X_s)\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s)\ dB_s^k \tag{5.1}$$

est bien une martingale locale car en arrêtant l'intégrale en

$$S_n = \inf\left(t\ge 0 : \|X_t\|\ge n,\ \exists (i,j),\ \int_0^t \sigma_{i,j}(s,X_s)^2\ ds \ge n\right)$$

temps d'arrêt (qui tend vers $+\infty$ par hypothèse sur σ) on a bien une vraie martingale. □

Si f est assez régulière, on a même une vraie martingale et en prenant l'espérance avec $X_0 = x$:

$$\mathbb{E}[f(X_t)] = f(x) + \int_0^t \mathbb{E}[Lf(s, X_s)]ds. \tag{5.2}$$

L'opérateur L pour X permet d'interpréter de nombreux résultats probabilistes en analyse et réciproquement. Ce pont, jeté entre probabilité et analyse, se révèle particulièrement fécond et constitue à lui seul une motivation importante pour l'étude des EDS. Le Théorème 5.3 qui suit en est une illustration.

5.2 Semi-groupe d'une diffusion

Définition 5.3 (Noyau de transition) *On associe à $X^{r,x}$ solution de l'EDS $E(a, \sigma)$ partant de x à l'instant r un noyau de transition donné par*

$$P_t^r f(x) = \mathbb{E}[f(X_t^{r,x})] \quad t \geq r. \tag{5.3}$$

On notera aussi $P_t f(r, x) := P_t^r f(x)$. Ce noyau donne la distribution de la variable aléatoire $X_t^{r,x}$ pour $t \geq r$. Par exemple, on voit dans le Chapitre 4 que, dans le cas du mouvement brownien, le noyau est le semi-groupe de la chaleur. Il s'agit encore d'un semi-groupe dans le cas général, cf. Théorème 5.2.

Théorème 5.2 (Propriété de semi-groupe) *Le noyau de transition $(P_t^r)_{t \geq r}$ vérifie la propriété de semi-groupe : pour $r \leq s \leq t$:*

$$P_t^r f(x) = P_s^r(P_t^s f)(x). \tag{5.4}$$

Lorsque les coefficients de l'EDS ne dépendent pas du temps, le semi-groupe de transition P_t^r ne dépend que de $t - r$ (ie. $P_t^r = P_{t-r}$) et on note

$$P_{t+r}^r f(x) := P_t f(x) := \mathbb{E}[f(X_{t+r}) | X_r = x].$$

Démonstration : D'après la propriété de flot (Th. 3.5), on a pour $s \geq r$:

$$\begin{aligned} X_{s+t}^{r,x} &= F(r, x, s+t, [B_{r+\cdot} - B_r]_t) \\ &= F\big(s, X_s^{r,x}, s+t, [B_{s+\cdot} - B_s]_t\big) \end{aligned}$$

c'est à dire $X_{s+t}^{r,x}$ s'écrit comme fonction de $X_s^{r,x}$ et du mouvement brownien indépendant $[B_{s+\cdot} - B_s]_t$.

De plus, comme $[B_{s+\cdot} - B_s]_t$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$, la loi conditionnelle de $X_{s+t}^{r,x}$ sachant $\mathcal{F}_s$ est celle de $X_{s+t}^{s, X_s^{r,x}}$ sachant $X_s^{r,x}$. Ainsi

$$\mathcal{L}(X_{s+t}^{r,x} | \mathcal{F}_s) = \mathcal{L}\left(X_{s+t}^{s, X_s^{r,x}} \middle| X_s^{r,x}\right).$$

En prenant les espérances, il vient

$$\begin{aligned} P^r_{s+t}f(x) &= \mathbb{E}[f(X^{r,x}_{s+t})] = \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}[f(X^{r,x}_{s+t})|\mathcal{F}_s]\Big] = \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}[f(X^{s,X^{r,x}_s}_{s+t})|X^{r,x}_s]\Big] \\ &= \mathbb{E}\Big[\int f(X^{s,y}_{s+t})\mathbb{P}_{X^{r,x}_s}(dy)\Big] = \int \mathbb{E}\big[f(X^{s,y}_{s+t})\big]\ \mathbb{P}_{X^{r,x}_s}(dy) \\ &= \int P^s_{s+t}f(y)\ \mathbb{P}_{X^{r,x}_s}(dy) = \mathbb{E}[P^s_{s+t}f(X^{r,x}_s)] = P^r_s(P^s_{s+t}f)(x). \end{aligned}$$

□

Le semi-groupe du mouvement brownien vérifie l'équation de la chaleur (4.12), cf. Section 4.3. On montre dans le Théorème 5.3 que cela se généralise pour une diffusion solution d'une EDS $E(a,\sigma)$ en une EDP exprimée par le générateur.

Théorème 5.3 (Dérivation et générateur) *Le semi-groupe $(P^r_t)_{t\geq r}$ est dérivable par rapport à t et sa dérivée est le générateur de la diffusion, ie. pour f de classe C^2 assez régulière :*

$$\partial_t P_t f(r,x) \quad = \quad P^r_t[Lf(t,\cdot)](x). \tag{5.5}$$

En particulier, $\partial_t P^r_t f(x)_{|t=r} = Lf(r,x)$.

Dans le cas homogène (ie. $a(t,x)=a(x)$ et $\sigma(t,x)=\sigma(x)$), on a

$$\begin{aligned} \partial_t P_t f(x) &= P_t(Lf)(x) \quad \text{et} \quad \partial_t P_t f(x)_{|t=0} = Lf(x). &(5.6)\\ &= L(P_t f)(x) &(5.7) \end{aligned}$$

Cela explique la terminologie "générateur infinitésimal" pour L, puisqu'on peut écrire symboliquement (5.7) sous la forme "$P_t = \exp(tL)$".

Démonstration : On suppose que la fonction f est régulière de façon que la martingale locale du Théorème 5.1 soit une vraie martingale. Elle est d'espérance nulle et donc l'espérance dans la formule d'Itô (5.1) donne pour les dates t et $t+h$ (avec $t\geq r$ et $h\geq 0$) :

$$\mathbb{E}[f(X^{r,x}_{t+h})] = \mathbb{E}[f(X^{r,x}_t)] + \mathbb{E}\left[\int_t^{t+h} Lf(s,X^{r,x}_s)\ ds\right].$$

Comme $Lf(s,X^{r,x}_s)$ est continue et bornée lorsque f est assez régulière, d'après le théorème de convergence dominée, la fonction de t, $P^r_t f(x) = \mathbb{E}[f(X^{r,x}_t)]$ est dérivable à droite et de dérivée $\mathbb{E}[Lf(t,X^{r,x}_t)] = P^r_t[Lf(t,\cdot)](x)$, ce qui établit l'identité (5.5). En particulier,

$$\partial_t P^r_t f(x)_{|t=r} = Lf(r,x).$$

La dérivabilité précédente a été montrée à droite seulement. Pour conclure, on observe que $P^r_t\partial_t[Lf(t,\cdot)](x) = \mathbb{E}[Lf(t,X^{r,x}_t)]$ est une fonction continue de t par convergence dominée (et régularité de f). Ainsi la fonction

$$t\mapsto \int_r^t P^r_s[Lf(s,\cdot)](x)\ ds$$

est dérivable de dérivée $P_t^r[Lf(t,\cdot)](x)$. Comme la différence de deux fonctions qui ont la même dérivée à droite est nécessairement constante, il existe c tel que

$$P_t^r f(x) = \int_r^t P_s^r[Lf(s,\cdot)](x) + c.$$

En faisant $t = r$, on a $c = f(x)$. Cela achève de prouver complètement la dérivabilité dans (5.5).

Dans le cas homogène, la propriété de semi-groupe s'écrit $P_{t+s}f = P_s P_t f = P_t P_s f$ et montre maintenant la deuxième partie de (5.7)

$$\frac{P_{t+h}f(x) - P_t f(x)}{h} = \frac{P_h P_t f - P_t f}{h}(x) = \frac{P_h g - g}{h}(x)$$

en notant $g = P_t f$. En passant à la limite $h \searrow 0$, on a

$$\partial_t P_t f(x) \quad = \quad \lim_{h\searrow 0} \frac{P_{t+h}f(x) - P_t f(x)}{h} = \partial_u P_u g(x)_{|u=0} = Lg(x) = L[P_t f](x)$$

ce qui établit l'identité (5.7). □

Remarque 5.1 Si le semi-groupe $(P_t^r)_{t\geq r}$ admet une densité $p_t(r,x,y)$ (ie. $P_t^r f(x) = \int p_t(r,x,y)f(y)\,dy$), cette densité vérifie l'équation de convolution

$$\int_{\mathbb{R}^n} p_t(r,x,y)p_s(t,y,z)dy = p_{s+t}(r,x,z).$$

En effet, l'équation de convolution est l'analogue sur les densités de la propriété de semi-groupe (5.4).

Théorème 5.4 (Équation de Kolmogorov) *On suppose que le semi-groupe $(P_t^r)_{t\geq r}$ admet une densité $p_t(r,x,y)$. Alors cette densité vérifie (dans le sens des distributions) l'équation de Kolmogorov progressive en (t,y), au sens des distributions,*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t p_t(r,x,y) & = & L_y^*[p_t(r,x,\cdot)](t,y) \\ \lim_{t\to r} p_t(r,x,\cdot) & = & \delta_x \end{array} \right. \tag{5.8}$$

où L^* est l'opérateur adjoint de L défini par

$$L_y^* f(t,x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}[(\sigma(t,x)\sigma(t,x)^*)_{i,j} f(t,x)] - \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i}[a_i(t,x)f(t,x)].$$

Si en plus l'EDS est homogène alors la densité $p_t(r,x,y)$ satisfait aussi l'équation de Kolmogorov rétrograde en (t,x) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t p_t(r,x,y) & = & L_x[p_t(r\cdot,y)](t,x) \\ \lim_{t\to r} p_t(r\cdot,y) & = & \delta_y. \end{array} \right. \tag{5.9}$$

Démonstration : Pour toute fonction f régulière à support compact, par définition de P_t^r et par convergence dominée, on a :

$$\partial_t P_t^r f(x) = \partial_t \mathbb{E}[f(X_t^{r,x})] = \partial_t \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y) p_t(r,x,y) dy \right) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \partial_t p_t(r,x,y)\ dy.$$

Avec (5.5), pour toute fonction f régulière à support compact, on a :

$$\begin{aligned}
\partial_t P_t f(r,x) &= P_t[L(t,\cdot)](r,x)\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} p_t(r,x,y) Lf(t,y)\ dy\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} p_t(r,x,y) \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d (\sigma(t,y)\sigma(t,y)^*)_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j}(y) + \sum_{i=1}^d a_i(t,y) \frac{\partial f}{\partial y_i}(y) \right)\ dy\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} [(\sigma(t,y)\sigma(t,y)^*)_{i,j} p_t(r,x,y)] - \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial y_i} [a_i(t,y) p_t(r,x,y)] \right) f(y)\ dy\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} L_y^* p_t(r,x,y) f(y)\ dy
\end{aligned}$$

avec quelques IPP. En comparant les deux expressions obtenues, il vient : l'équation progressive (5.8).

Dans le cas homogène, par convergence dominée pour toute fonction f régulière à support compact, d'après (5.7), on a

$$\partial_t P_t^r f(x) = L(P_t^r f)(x) = L\left[\int f(y) p_t(r,\cdot,y)\ dy \right](x) = \int f(y) L_x[p_t(r,\cdot,y)](x)\ dy.$$

En comparant avec l'expression

$$\partial P_t f(r,x) = \partial_t \left(\int p_t(r,x,y) f(y)\ dy \right) = \int \partial_t p_t(r,x,y) f(y)\ dy,$$

il vient l'équation rétrograde (5.9) (avec des dérivées dans le sens des distributions). □

Remarque 5.2 (EDS homogènes) Pour des EDS homogènes, le générateur L de (5.1) ne dépend que de x et le semi-groupe vérifie $P_t^r = P_{t-r}$. Dans ce cas, on a des expressions homogènes en temps :

$$\begin{aligned}
P_t f(x) &= \mathbb{E}[f(X_t^x)]\\
P_{t+s} f &= P_t(P_s f)\\
\partial_t P_t f &= P_t L f = L P_t f\\
P_t &= \exp(tL).
\end{aligned}$$

5.3 Diffusion et EDP

On généralise l'observation du Théorème 5.1 avec la formule de Dynkin.

Théorème 5.5 (Formule de Dynkin) *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une diffusion homogène de générateur*

$$L = \sum_{i,j=1}^{d} (\sigma\sigma^*)_{i,j}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i x_j} + \sum_{i=1}^{d} a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i},$$

$x \in \mathbb{R}^d$, *τ un temps d'arrêt intégrable : $\mathbb{E}_x[\tau] < +\infty$ et $f \in C_c^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Alors*

$$\mathbb{E}_x[f(X_\tau)] = f(x) + \mathbb{E}_x\left[\int_0^\tau Lf(X_s)\ ds\right]. \tag{5.10}$$

Démonstration : Pour simplifier la preuve, on considère le cas $d = m = 1$. Avec la formule d'Itô, comme dans la preuve du Théorème 5.1, on a

$$\mathbb{E}_x[f(X_\tau)] = f(x) + \mathbb{E}_x\left[\int_0^\tau Lf(X_s)\ ds\right] + \mathbb{E}_x\left[\int_0^\tau \sigma(X_s)f'(X_s)\ dB_s\right]. \tag{5.11}$$

Il suffit donc de montrer que l'espérance de l'intégrale stochastique est nulle. Mais pour toute fonction h bornée par M, et $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau\wedge N} h(X_s)\ dB_s\right] = \mathbb{E}_x\left[\int_0^N \mathbf{1}_{\{s<\tau\}}h(X_s)\ dB_s\right] = 0$$

car $\mathbf{1}_{\{s<\tau\}}$ et $h(X_s)$ sont $\mathcal{F}_s$-mesurables. Puis

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\left[\left(\int_0^\tau h(X_s)\ dB_s - \int_0^{\tau\wedge N} h(X_s)\ dB_s\right)^2\right] &= \mathbb{E}_x\left[\int_{\tau\wedge N}^\tau h(X_s)^2\ ds\right] \\
&\leq M^2\mathbb{E}_x[\tau - \tau\wedge N]
\end{aligned}$$

qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$ par convergence dominée, en vertu de l'hypothèse $\mathbb{E}_x[\tau] < +\infty$. On a donc

$$0 = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau\wedge N} h(X_s)\ dB_s\right] = \mathbb{E}_x\left[\int_0^\tau h(X_s)\ dB_s\right] \tag{5.12}$$

ce qui conclut la preuve en reportant cette conclusion dans (5.11) pour $h = \sigma f'$ (borné car continue à support compact).

5.3.1 EDP de type Dirichlet

On considère D un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et τ le temps de première sortie de D d'une diffusion homogène de générateur L. On considère alors le problème avec condition au bord :

$$\left\{\begin{array}{rcll} Lu &=& \theta, & x \in D \\ u &=& \psi, & x \in \partial D. \end{array}\right. \tag{5.13}$$

Si le problème (5.13) admet une unique solution (par exemple si D, θ, ψ sont assez réguliers) alors d'après la formule de Dynkin (5.10), on a

$$u(x) = \mathbb{E}_x \left[\psi(X_\tau) - \int_0^\tau \theta(X_s)\, ds \right].$$

En particulier,
- pour $\psi = 0$ et $\theta = 1$, $u(x)$ est égal à l'espérance de τ partant de x.
- pour $\theta = 0$ et $\psi =$ indicatrice d'une partie A de ∂D, alors $u(x)$ est la probabilité de quitter D par A.

Ainsi la résolution de (5.13) donne des informations sur le temps de sortie τ et le lieu de sortie X_τ de la diffusion X de D.

Exemple 1. On considère la diffusion $dX_t = X_t\, dB_t$ (mouvement brownien géométrique $X_t = X_0 \exp(B_t - t^2/2)$). On a $L = x^2 \partial_x^2$. Comme les solutions de $Lu = 0$ sont $u(x) = c_1 x + c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, en notant τ_a et τ_b les temps d'atteinte de $0 < a < b$, on montre qu'on a

$$\mathbb{P}_x(\tau_a < \tau_b) = \frac{b - x}{b - a}, \quad x \in [a, b].$$

Exemple 2. On considère la diffusion $dX_t = rX_t\, dt + X_t\, dB_t$, $r \in \mathbb{R}$ (Black et Scholes : $X_t = X_0 \exp(rt + B_t - t^2/2)$, on suppose $X_0 > 0$ donc $X_t > 0$ pour tout $t \geq 0$). On a $L = rx\partial_x + \frac{1}{2} x^2 \partial_x^2$. Pour $r \neq 1/2$, les solutions de $Lu = 0$ sont $u(x) = c_1 x^{1-2r} + c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

- Pour $r < 1/2$, en notant τ_a et τ_b les temps d'atteinte de $0 < a < b$, En appliquant la formule de Dynkin (5.10) avec $\theta = 0$ et $\psi(a) = 0$, $\psi(b) = 1$, on a

  $$u(x) = \mathbb{E}_x[\mathbf{1}_{\{X_\tau = b\}}] = \mathbb{P}_x(\tau_b < \tau_a).$$

  D'après l'unicité de la solution de l'EDP, en déterminant les constantes à l'aide de $u(b) = 1$, $u(a) = 0$, on a

  $$\mathbb{P}_x(\tau_b < \tau_a) = \frac{x^{1-2r} - a^{1-2r}}{b^{1-2r} - a^{1-2r}}, \quad x \in [a, b].$$

  Comme $\lim_{a \to 0} a^{1-2r} = 0$ et $\tau_a \searrow \tau_0$, par convergence monotone, on a

  $$\mathbb{P}_x(\tau_b < \tau_0) = \left(\frac{x}{b} \right)^{1-2r}.$$

  Comme $\tau_0 = +\infty$, la probabilité que X n'atteigne jamais b est $1 - (x/b)^{1-2r}$.
- Pour $r > 1/2$, on a

  $$\mathbb{P}_x(\tau_a < \tau_b) = \frac{x^{1-2r} - b^{1-2r}}{a^{1-2r} - b^{1-2r}}, \quad x \in [a, b].$$

  Comme $\lim_{a \to 0} a^{1-2r} = +\infty$ et $\tau_a \searrow \tau_0$, on a

  $$\mathbb{P}_x(\tau_0 < \tau_b) = 0, \quad x < b.$$

  Comme $\tau_0 = +\infty$, la probabilité que X n'atteigne jamais b est nulle.

Puis comme la solution de

$$\begin{cases} Lu(x) = -1, & 0 < x < b \\ u(x) = 0, & x = b \end{cases}$$

est

$$u(x) = \frac{\ln b - \ln x}{r - 1/2}.$$

Mais avec $\theta = -1$ et $\psi = 0$, et $\tau = \tau_b$, on a

$$u(x) = \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_b} 1 \ ds \right] = \mathbb{E}_x[\tau_b].$$

On en déduit de l'unicité de la solution de l'EDP que

$$\mathbb{E}_x[\tau_b] = \frac{1}{r - 1/2} \ln \left(\frac{b}{x} \right).$$

Remarque : Cela montre que les solutions tendent à croître exponentiellement puisque $\mathbb{E}_x[\tau_b] = T$ pour $b = x \exp\big((r - 1/2)T\big)$.

5.3.2 Formule de Feynman-Kac

Parfois, il n'est pas utile de connaître explicitement tout le semi-groupe de transition $(P_t^r)_{t \geq r}$ mais, en utilisant des EDP rétrogrades, seulement certaines intégrales.

Théorème 5.6 (Feynman-Kac) *Soit g une fonction continue. S'il existe une solution régulière $u(t, x)$ à l'EDP rétrograde*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + Lu(t, x) = 0, \quad u(T, x) = g(x), \tag{5.14}$$

alors $u(t, x) = \mathbb{E}[g(X_T) | X_t = x]$.

L'intérêt d'une telle formule est de pouvoir donner une solution d'EDP sous forme d'espérance. À l'aide de méthodes de Monte-Carlo pour approximer les espérances, on peut simuler la solution de l'EDP.

Démonstration : Comme pour (5.1), on applique la formule d'Itô à $u(s, X_s)$ entre t et T et on utilise que u vérifie l'EDP (5.14). On a

$$\begin{aligned} u(T, X_T) &= u(t, X_t) + \int_t^T \frac{\partial u}{\partial s}(s, X_s) \ ds + \int_0^t Lu(s, X_s) \ ds + \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^m \int_t^T \sigma_{ij}(s, X_s) \frac{\partial u}{\partial x_i}(s, X_s) \ dB_s^j \qquad (5.15) \\ &= u(t, X_t) + \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^m \int_t^T \sigma_{i,j}(s, X_s) \frac{\partial u}{\partial x_i}(s, X_s) \ dB_s^j. \end{aligned}$$

Avec assez de régularité, les intégrales $\int_t^T \sigma_{ij}(s,X_s)\frac{\partial u}{\partial x_i}(s,X_s)\ dB_s^j$ sont de vraies martingales. En prenant l'espérance, la propriété de martingale annule l'espérance correspondante et avec la condition terminale en T, on a :

$$\mathbb{E}[g(X_T)|X_t=x]=\mathbb{E}[u(T,X_T)|X_t=x]=\mathbb{E}[u(t,X_t)|X_t=x]=u(t,x).$$

□

Corollaire 5.1 *Soit g une fonction continue. S'il existe une solution régulière $v(t,x)$ à l'EDP rétrograde*

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,x)+Lv(t,x)-k(t,x)v(t,x)=0, \quad v(T,x)=g(x), \tag{5.16}$$

alors $v(t,x)=\mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_t^T k(s,X_s)\ ds\right)g(X_T)|X_t=x\right]$.

Démonstration : Comme dans la preuve précédente et dans celle de la Proposition 4.6, on applique la formule d'Itô (de la même façon que pour (5.1)) au produit de processus $u(s,X_s)$ et $\exp\left(-\int_t^s k(u,X_u)du\right)$ et on utilise l'EDP (5.16). En prenant l'espérance, la partie martingale disparaît et on a

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_t^s k(u,X_u)du\right)u(s,X_s)\Big|X_t=x\right]\\ =\ &\mathbb{E}\left[u(t,X_t)|X_t=x\right]+\int_s^t\mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_t^v k(u,X_u)du\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}+Lu-ku\right)(v,X_v)\Big|X_t=x\right]\ dv.\end{aligned}$$

On conclut en utilisant le fait que u est solution de l'EDP (5.16). □

5.4 Problème de martingales

5.4.1 Introduction

On considère l'EDS $E(a,\sigma)$

$$dX_t=a(t,X_t)\ dt+\sigma(t,X_t)\ dB_t$$

où $a(t,x)\in\mathbb{R}^d$ et $\sigma(t,x)\in\mathcal{M}_{d,m}(\mathbb{R})$ sont mesurables pour $t\in\mathbb{R}_+$ et $x\in\mathbb{R}^d$ et B est un mouvement brownien m dimensionnel.

Dans cette section, on ne suppose plus les hypothèses lipschitziennes du Chapitre 3 et on cherche une solution faible à l'EDS $E(a,\sigma)$, c'est à dire un triplet X, B, $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$ tel que B soit un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-mouvement brownien et X un processus adapté et continu vérifiant ps

$$\int_0^t \big(|a_i(s,X_s)| + \sigma_{i,j}^2(s,X_s)\big)\ ds < +\infty, \quad 1 \leq i \leq d,\ 1 \leq j \leq m,\ t \geq 0 \quad (5.17)$$

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s,X_s)\ ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)\ dB_s, \quad t \geq 0. \quad (5.18)$$

Noter que pour une telle solution X_t est bien définie pour tout t. Si bien que lorsqu'on considère les temps d'arrêt

$$S_n = \inf\big(t \geq 0 : \|X_t\| \geq n\big)$$

on a $S_n \to +\infty$ ps quand $n \to +\infty$.
Une solution faible peut être vue comme une loi sur l'espace $\big(C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d), \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)\big)$. On parle alors de **mesure-solution**.
Dans cette section, on montre qu'une probabilité sur $\big(C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d), \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)\big)$ est solution faible (mesure-solution) de $E(a,\sigma)$ si et seulement si c'est la solution d'un problème de martingales. Ce type de problème a été introduit par Stroock et Varadhan en 1969.

Exemple. Si on considère l'équation $E(0,1)$ avec $m = d = 1$ et $a = 0$, $\sigma(t,x) = 1$ avec la condition initiale $x = 0$, ie.

$$dX_t = dB_t, \quad X_0 = 0,$$

la seule solution est $X = B$ et la solution faible est donc la mesure de Wiener $\mathbb{W}$ sur

$$(\Omega', \mathcal{F}') = \big(C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}), \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}))\big)$$

muni de la filtration $(\mathcal{F}'_t)_{t\geq 0}$ engendrée par le processus canonique $X'_t(\omega') = \omega'(t)$. Dans ce cas, on observe avec le Théorème de Lévy (Th. 1.2) que la mesure de Wiener $\mathbb{W}$ est la seule probabilité sur $(\Omega', \mathcal{F}', (\mathcal{F}'_t)_{t\geq 0})$ sous laquelle X'_t et $X'^2_t - t$ sont des martingales locales.

Le but dans cette section est de généraliser cette observation à (presque toutes) les équations $E(a,\sigma)$ sous l'hypothèse :

$$a \text{ et } \sigma \text{ sont des fonctions boréliennes localement bornées.} \quad (loc)$$

On note $c = \sigma\sigma^*$ la fonction de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ dans l'espace des matrices $d \times d$ symétriques positives, ie.

$$c_{i,j}(t,x) = \sum_{k=1}^m \sigma_{i,k}(t,x)\sigma_{j,k}(t,x).$$

La fonction c est borélienne et sous (loc) elle est aussi localement bornée.

On associe à l'EDS $E(a,\sigma)$ le générateur (5.1), ie.

$$Lf(t,x) = \sum_{i=1}^d a_i(t,x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d c_{i,j}(t,x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x), \quad f \in C^2(\mathbb{R}^d).$$

Si $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$, on applique $L \cdot (t, \cdot)$ à $f(t, \cdot)$ et on pose

$$Lf(t,x) = \sum_{i=1}^d a_i(t,x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d c_{i,j}(t,x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t,x).$$

Proposition 5.1 *Soit X, B, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ une solution faible de l'EDS $E(a,\sigma)$. Pour toute fonction $f(t,x) \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$,*

$$M_t^f = f(t, X_t) - f(0, X_0) - \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial t} + Lf \right)(s, X_s)\ ds \tag{5.19}$$

est une martingale locale continue. De plus si $g \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ alors

$$\langle M^f, M^g \rangle_t = \sum_{i,j=1}^d \int_0^t c_{i,j}(s, X_s) \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, X_s) \frac{\partial g}{\partial x_j}(s, X_s)\ ds. \tag{5.20}$$

Puis si $f \in C_c^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ et les coefficients $\sigma_{i,j}$ sont bornés sur le support de f alors $M^f \in L^2(B)$.

Démonstration : La formule d'Itô exprime M^f comme une somme d'intégrales stochastiques :

$$M_t^f = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^m M_t^{i,j} \qquad \text{avec} \qquad M_t^{i,j} = \int_0^t \sigma_{i,j}(s, X_s) \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, X_s)\ dB_s^j$$

cf. par exemple (5.15). On considère les temps d'arrêt

$$S_n = \inf \left(t \geq 0 : \|X_t\| \geq n \text{ ou } \int_0^t \sigma_{i,j}(s, X_s)^2\ ds \geq n \text{ pour un } (i,j) \right).$$

Comme ps pour chaque (i,j), on a pour la solution X de l'EDS $\int_0^t \sigma_{i,j}(s, X_s)^2\ ds < +\infty$ alors $S_n \to +\infty$. Les processus

$$(M_t^f)^{S_n} = M_{t\wedge S_n}^f = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^m M_{t\wedge S_n}^{i,j} = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^m \int_0^{t\wedge S_n} \sigma_{i,j}(s, X_s) \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, X_s)\ dB_s^j$$

sont des martingales continues. Le crochet (5.20) vient de l'expression obtenue pour M^f et de $\langle B^i, B^j \rangle_t = \delta_{i,j} t$:

$$\begin{aligned}
\langle M^f, M^g \rangle_t &= \sum_{i,k=1}^d \sum_{j,l=1}^m \left\langle \int_0^\cdot \sigma_{i,j}(s, X_s) \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, X_s)\ dB_s^j, \int_0^\cdot \sigma_{k,l}(s, X_s) \frac{\partial g}{\partial x_k}(s, X_s)\ dB_s^l \right\rangle_t \\
&= \sum_{i,k=1}^d \sum_{j,l=1}^m \int_0^t \sigma_{i,j}(s, X_s) \sigma_{k,l}(s, X_s) \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, X_s) \frac{\partial g}{\partial x_k}(s, X_s) d\langle B^j, B^l \rangle_s
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,k=1}^{d}\sum_{j=1}^{m}\int_0^t \sigma_{i,j}(s,X_s)\sigma^*_{j,k}(s,X_s)\frac{\partial f}{\partial x_i}(s,X_s)\frac{\partial g}{\partial x_k}(s,X_s)\ ds\\
&= \sum_{i,k=1}^{d}\int_0^t (\sigma\sigma^*)_{i,j}(s,X_s)\frac{\partial f}{\partial x_i}(s,X_s)\frac{\partial g}{\partial x_k}(s,X_s)\ ds.
\end{aligned}
$$

Si de plus f est à support compact sur lequel chaque $\sigma_{i,j}$ est borné alors l'intégrand dans $M^{i,j}$ est borné et $M^f \in L^2(B)$. □

5.4.2 EDS et problème de martingales

On va montrer une sorte de réciproque : si M^f est une martingale locale lorsque $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ alors on a une solution faible de l'EDS $E(a,\sigma)$. En fait, on montre qu'il suffit de le voir pour les fonctions $f_i(x) = x_i$, $1 \le i \le d$, et $f_{i,j}(x) = x_i x_j$, $1 \le i,j \le d$. Dans ce cas,

$$
Lf_i(t,x) = a_i(t,x), \quad Lf_{i,j}(t,x) = a_i(t,x)x_j + a_j(t,x)x_i + c_{i,j}(t,x)
$$

et on note $M^i = M^{f_i}$ et $M^{i,j} = M^{f_{i,j}}$:

$$
\begin{aligned}
M^i_t &= X^i_t - x^i_0 - \int_0^t a_i(s,X_s)\ ds, \quad i = 1,\dots,d && (5.21)\\
M^{i,j}_t &= X^i_t X^j_t - x^i_0 x^j_0 - \int_0^t \big(a_i(s,X_s)X^j_s + a_j(s,X_s)X^i_s + c_{i,j}(s,X_s)\big)\ ds. && (5.22)
\end{aligned}
$$

On introduit pour $i,j = 1,\dots,d$

$$
\begin{aligned}
N^{i,j}_t &= M^i_t M^j_t - \int_0^t c_{i,j}(s,X_s)\ ds && (5.23)\\
&= M^{i,j}_t - X^i_0 M^j_t - X^j_0 M^i_t + K^{i,j}_t && (5.24)
\end{aligned}
$$

avec le terme correctif

$$
\begin{aligned}
K^{i,j}_t &= \int_0^t (X^i_s - X^i_t)a_j(s,X_s)\ ds + \int_0^t (X^j_s - X^j_t)a_i(s,X_s)\ ds + \int_0^t a_i(s,X_s)\ ds \int_0^t a_j(s,X_s)\ ds\\
&= \int_0^t (M^i_s - M^i_t)a_j(s,X_s)\ ds + \int_0^t (M^j_s - M^j_s)a_i(s,X_s)\ ds && (5.25)\\
&= -\int_0^t \left(\int_0^s a_j(s,X_s)\ ds\right)\ dM^i_s - \int_0^t \left(\int_0^s a_i(s,X_s)\ ds\right)\ dM^j_s && (5.26)
\end{aligned}
$$

où (5.25) s'obtient par intégration par parties classique

$$
\left(\int_0^t a_i(s,X_s)\ ds\right)\left(\int_0^t a_j(s,X_s)\ ds\right)
$$

$$= \int_0^t \left(\int_s^t a_i(u, X_u)\ du\right) a_j(s, X_s)\ ds + \int_0^t \left(\int_s^t a_j(s, X_s)\ du\right) a_i(s, X_s)\ ds$$

avec $X_s^i - X_t^i + \int_s^t a_i(s, X_s)\ ds = M_s^i - M_t^i$ et (5.26) est obtenu par IPP avec la formule d'Itô pour XY avec $X = M$ et $Y = \int_0^{\cdot} a(s, X_s)\ ds$. Finalement $N^{i,j}$ est une martingale locale ssi $M^{i,j}$ en est une.

Comme a priori on ne dispose pas de solution (ie. de triplet X, B, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ où B est un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-mouvement brownien B et sur lequel X est solution comme en (5.17)–(5.18)), on va exprimer le problème de martingales sur l'espace canonique

$$(\Omega', \mathcal{F}') = \big(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d), \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d))\big).$$

On le munit de la filtration $(\mathcal{F}'_t)_{t\geq 0}$ engendrée par le processus canonique donné par $X'_t(\omega') = \omega'(t)$.

Définition 5.4 (Problème de martingales) *Une probabilité $\mathbb{P}'$ sur $(\Omega', \mathcal{F}')$ sous laquelle M'^f définie par*

$$M_t'^f = f(X'_t) - f(X'_0) - \int_0^t Lf(s, X'_s)\ ds \tag{5.27}$$

est une martingale (resp. martingale locale) pour tout $f \in C_c^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ (resp. $f \in C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$) est appelée solution du problème de martingale (resp. martingale locale).

On considère les équivalents de M^{f_i}, $M^{f_{i,j}}$ sur Ω' comme en (5.21)-(5.23)

$$\begin{aligned} M'^i &= M'^{f_i} = X'^i - x^i - A'^i, \quad i = 1, \dots, d \\ N'^{i,j} &= M'^i M'^j - C'^{i,j}, \quad i, j = 1, \dots, d \end{aligned}$$

où

$$A_t'^i = \int_0^t a_i(s, X'_s)\ ds, \quad C_t'^{i,j} = \int_0^t c_{i,j}(s, X'_s)\ ds \tag{5.28}$$

sont des processus continus et adaptés sur Ω'.

Le résultat principal est alors le suivant :

Théorème 5.7 (Problème de martingales) *On suppose l'hypothèse (loc) satisfaite pour l'EDS $E(a, \sigma)$. Une probabilité $\mathbb{P}'$ sur $(\Omega', \mathcal{F}')$ est solution faible (ou mesure-solution) ssi les processus M'^i et $M'^{i,j}$ sont des martingales locales sous $\mathbb{P}'$ avec $M_0'^i = 0$ $\mathbb{P}'$-ps pour tout $1 \leq i \leq d$ (soit $\mathbb{P}'(X'_0 = x) = 1$).*

Remarque 5.3 Lorsque M'^i, M'^j sont des martingales locales, d'aprés (5.24), il est équivalent d'avoir $M'^{i,j}$ martinagle locale ou $N'^{i,j}$ martingale locale. Dans la preuve qui suit nous utiliserons l'hyothèse sous la forme $N'^{i,j}$ martingale locale.

De la Proposition 5.1 et du Théorème 5.7, on déduit :

Corollaire 5.2 *Considérons les assertions suivantes :*

(A) *Il existe une solution faible de l'EDS $E(a,\sigma)$.*

(B) *Il existe une solution au problème de martingale locale (5.27).*

(C) *Il existe une solution au problème de martingale (5.27).*

Alors $(C) \Rightarrow \{(A) \Leftrightarrow (B)\}$.

Démonstration :[Théorème 5.7] On procède par étape : étape 1 : la condition est nécessaire ; étape 2 : travail préliminaire pour la suffisance ; étape 3 : la condition est suffisante.

Étape 1 : On montre que la condition du Théorème 5.7 est nécessaire.
On suppose que $\mathbb{P}'$ est solution faible. Il existe alors $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, B $(\mathcal{F}_t)_t$-mouvement brownien et X processus adapté à trajectoires continues ps, triplet solution de $E(a,\sigma)$ avec (5.17)-(5.18) sur Ω avec B et X de loi $\mathbb{P}'$.
D'après la Proposition 5.1, chaque M^i et $M^{i,j}$ sont des martingales locales et les crochets des M^i sont donnés par

$$\langle M^i, M^j\rangle_t = \int_0^t c_{i,j}(s, X_s)\, ds.$$

En particulier, chaque $N^{i,j} = M^i M^j - C_{i,j}$ est une martingale locale. Il reste à transférer cette observation aux martingales M'^i, $M'^{i,j}$ et $N'^{i,j}$ qui sont leur analogue sur Ω'. On effectue le transfert par le processus solution $X : \Omega \to \Omega'$. Plus précisément en notant $N = \{\omega : \text{ la fonction } t \mapsto X_t(\omega) \text{ n'est pas continue}\}$, on considère $\phi : \Omega \to \Omega'$ donnée par

$$\phi(\omega)(t) = \begin{cases} X_t(\omega) & \text{si } \omega \notin N \\ 0 & \text{si } \omega \in N \end{cases}$$

alors $\mathbb{P}' = \mathbb{P} \circ X^{-1} = \mathbb{P} \circ \phi^{-1}$.

On note $T_n = \inf(t \geq 0 : \|X_t\| \geq n)$ et $T'_n = \inf(t \geq 0 : \|X'_t\| \geq n)$. Comme d'après (loc) les processus arrêtés $(M^i)^{T_n}$ et $(N^{i,j})^{T_n}$ sont bornés sur chaque intervalle de temps, ce sont de (vraies) martingales.
D'après les définitions de ϕ, des processus M^i, $N^{i,j}$ et des processus M'^i et $N'^{i,j}$, hors de N, on a

$$(M^i)^{T_n} = (M'^i)^{T'_n} \circ \phi, \quad (N^{i,j})^{T_n} = (N'^{i,j})^{T'_n} \circ \phi. \tag{5.29}$$

Comme $\mathbb{P}(N) = 0$, les égalités restent vraies $\mathbb{P}$-ps.

Lemme 5.1 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ et $(\Omega', \mathcal{F}', (\mathcal{F}'_t)_{t\geq 0})$ et $\phi : \Omega \to \Omega'$ qui respecte les filtrations. On pose $\mathbb{P}' = \mathbb{P} \circ \phi^{-1}$. Alors si M est une martingale sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, le processus continu M' sur Ω' associé à M par $M = M' \circ \phi$ en dehors de N (bien défini $\mathbb{P}'$-ps) est une martingale sur $(\Omega', \mathcal{F}', (\mathcal{F}'_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}')$.*

Démonstration : En effet, si $s < t$ et $A' \in \mathcal{F}'_s$, on a $A = \phi^{-1}(A') \in \mathcal{F}_s$ (car X est prévisible) et

$$\mathbb{E}'[(M'_t - M'_s)\mathbf{1}_{A'}] = \mathbb{E}[(M_t - M_s)\mathbf{1}_A] = 0$$

par transfert à l'aide de ϕ. Ainsi M' est une martingale sur $(\Omega',\mathcal{F}',(\mathcal{F}'_t)_{t\geq 0},\mathbb{P}')$. □

D'après cette remarque, les expressions (5.29) assurent que $(M'^i)^{T'_n}$ et $(N'^{i,j})^{T'_n}$ sont des martingales sur Ω'. Comme $T'_n\to+\infty$ (sous $\mathbb{P}'$ avec les condition (loc)), on obtient que M'^i et $N'^{i,j}$ sont des $\mathbb{P}'$-martingales locales $\mathbb{P}'$-ps nulles en 0, ce qui prouve l'étape 1.

Étape 2 : On montre quelques résultats préliminaires avant d'établir que la condition du Théorème 5.7 est suffisante dans l'étape 3 : pour montrer que $\mathbb{P}'$ est solution faible, il s'agit de trouver un espace Ω sur lequel X' (de loi $\mathbb{P}'$) est encore défini et est solution de $E(a,\sigma)$, ie. vérifie (5.17)–(5.18).

Pour cela, on considère un espace auxiliaire $(\Omega'',\mathcal{F}'',(\mathcal{F}''_t)_{t\geq 0},\mathbb{P}'')$ sur lequel est défini un mouvement brownien m-dimensionnel B'' (par exemple Ω'' peut être l'espace de Wiener m-dimensionnel). On pose alors

$$\Omega=\Omega'\times\Omega'',\quad \mathcal{F}=\mathcal{F}'\otimes\mathcal{F}'',\quad \mathcal{F}_t=\bigcap_{s>t}\mathcal{F}'_s\otimes\mathcal{F}''_s,\quad \mathbb{P}=\mathbb{P}'\otimes\mathbb{P}''.$$

Avec un abus de notation, on étend toutes les fonctions sur Ω' ou Ω'' de manière usuelle à Ω en gardant le même symbole, par exemple

$$X'_t(\omega',\omega'')=X'_t(\omega'),\quad B''_t(\omega',\omega'')=B''_t(\omega'').$$

Par construction, B'' est indépendant de Ω'. Soit U' et U'' des martingales locales sur $(\Omega',\mathcal{F}',(\mathcal{F}'_t)_t,\mathbb{P}')$ et $(\Omega'',\mathcal{F}'',(\mathcal{F}''_t)_t,\mathbb{P}'')$. On les suppose réduites respectivement par $(T'_n)_{n\geq 1}$ et $(T''_n)_{n\geq 1}$. Pour tous $s\leq t$ et $A'\in\mathcal{F}'_s$, $A''\in\mathcal{F}''_s$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[U_t'^{T'_n}\mathbf{1}_{A'\times A''}\big] &= \mathbb{E}'\big[U_t'^{T'_n}\mathbf{1}_{A'}\big]\mathbb{P}''(A'')=\mathbb{E}'\big[U_s'^{T'_n}\mathbf{1}_{A'}\big]\mathbb{P}''(A'')=\mathbb{E}\big[U_s'^{T'_n}\mathbf{1}_{A'\times A''}\big]\\
\mathbb{E}\big[U_t'^{T'_n}U_t''^{T''_n}\mathbf{1}_{A'\times A''}\big] &= \mathbb{E}'\big[U_t'^{T'_n}\mathbf{1}_{A'}\big]\mathbb{E}''\big[U_t''^{T''_n}\mathbf{1}_{A''}\big]=\mathbb{E}'\big[U_s'^{T'_n}\mathbf{1}_{A'}\big]\mathbb{E}''\big[U_s''^{T''_n}\mathbf{1}_{A''}\big]\\
&= \mathbb{E}\big[U_s'^{T'_n}U_s''^{T''_n}\mathbf{1}_{A'\times A''}\big].
\end{aligned}\tag{5.30}$$

Donc U' et U'' sont des martingales locales sur $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_t,\mathbb{P})$. Comme $U_t'^{T'_n}U_t''^{T''_n}$ est aussi une martingale,

$$\big(U_t'^{T'_n}U_t''^{T''_n}\big)^{T'_n\wedge T''_n}=U_t'^{T'_n\wedge T''_n}U_t''^{T'_n\wedge T''_n}=\big(U'_tU''_t\big)^{T'_n\wedge T''_n}$$

est une martingale (car martingale arrêtée) et donc $U'U''$ est une martingale locale car $T'_n\wedge T''_n\to+\infty$. Par conséquent, $\langle U',U''\rangle_t=0$. Il s'ensuit que sur cet espace $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$, B'' est un mouvement brownien et les M'^i et $N'^{i,j}$ sont des martingales locales avec $\langle M'^i,B''^j\rangle=0$ d'après (5.30).

On utilise maintenant des résultats élémentaires d'algèbre linéaire : on rappelle que si $c=\sigma\sigma^*$ est de rang $\zeta(\leq d,m)$ alors σ est aussi de rang ζ. Le fait que $\sigma\sigma^*$ soit dégénérée est la difficulté qui oblige à construire un mouvement brownien sur une extension Ω de

l'espace Ω'.
Soit $c' = \sigma^*\sigma$ une matrice de taille $m \times m$ symétrique positive. Elle s'écrit $c' = \Pi\Lambda\Pi^*$ où Π est orthogonale de taille $m \times m$ et Λ est diagonale avec $\Lambda_{i,i} > 0$ si $i \leq \zeta$ et $\Lambda_{i,i} = 0$ si $i > \zeta$. Soit Λ' la matrice diagonale avec

$$\Lambda'_{i,i} = 1/\Lambda_{i,i} \;\text{ si } i \leq \zeta \quad \text{ et } \quad \Lambda'_{i,i} = 0 \;\text{ si } i > \zeta.$$

On a $\Lambda\Lambda' = I_{m,\zeta}$ en notant $I_{m,\zeta}$ la matrice diagonale de taille $m \times m$ ayant 1 pour les ζ premiers éléments diagonaux et 0 pour les suivants. Soit enfin $\sigma' = \Lambda'\Pi^*\sigma^*$ une matrice de taille $m \times d$. On a alors

$$\sigma' c {\sigma'}^* = (\Lambda'\Pi^*\sigma^*)(\sigma\sigma^*)(\sigma\Pi\Lambda') = (\Lambda'\Pi^*)(\Pi\Lambda\Pi^*)(\Pi\Lambda\Pi^*)(\Pi\Lambda') = \Lambda'\Lambda\Lambda\Lambda' = I_{m,\zeta}. \quad (5.31)$$

Enfin comme $\Lambda = \Pi^* c' \Pi = \Pi^*\sigma^*\sigma\Pi = (\sigma\Pi)^*(\sigma\Pi)$, en regardant les termes diagonaux pour $k > \zeta$, on a $\sum_{j=1}^d (\sigma\Pi)_{j,k}^2 = 0$ si $k > \zeta$. Ainsi, $(\sigma\Pi)_{j,k} = 0$ pour tout j si $k > \zeta$, ce qui s'écrit $\sigma\Pi = \sigma\Pi I_{m,\zeta}$. Par suite, il vient :

$$\begin{aligned}
\sigma\Pi\sigma' c &= \sigma\Pi(\Lambda'\Pi^*\sigma^*)(\sigma\sigma^*) = \sigma\Pi\Lambda'\Pi^*(\Pi\Lambda\Pi^*)\sigma^* \\
&= (\sigma\Pi)(\Lambda'\Lambda)\Pi^*\sigma^* = \sigma\Pi I_{m,\zeta}\Pi^*\sigma^* \\
&= \sigma\Pi\Pi^*\sigma^* = \sigma\sigma^* = c. \qquad (5.32)
\end{aligned}$$

Étape 3 : On montre maintenant que la condition du Théorème 5.7 est suffisante.
Comme la fonction matricielle σ est borélienne sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$, il en est de même pour son rang ζ. On peut aussi vérifier qu'on peut choisir pour les matrices Π et Λ des fonctions boréliennes. De même, les fonctions Λ' et σ' le sont encore.
Soit aussi $\alpha = \sup_{i \leq m, j \leq d} |\sigma'_{i,j}|$ (elle est encore borélienne). La fonction σ'/α (avec la convention $0/0 = 0$) étant bornée, pour tout $i = 1, \ldots, m$ on peut définir les intégrales

$$U_t^i = \sum_{j=1}^d \int_0^t \frac{\sigma'_{i,j}}{\alpha}(s, X'_s) dM'^j_s.$$

D'après l'hypothèse de cette étape et la Remarque 5.3, $N'^{i,j}$ définie en (5.23) est une $\mathbb{P}'$-martingale locale. D'après sa définition, on a donc $\langle M'^i, M'^j \rangle = C'^{i,j}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\langle U^i, U^j \rangle_t &= \int_0^t \sum_{k,l=1}^d \frac{\sigma'_{i,k}\sigma'_{j,l}}{\alpha^2}(s, X'_s) d\langle M'^k, M'^l \rangle_s \\
&= \int_0^t \sum_{k,l=1}^d \frac{\sigma'_{i,k}\sigma'_{j,l} c_{k,l}}{\alpha^2}(s, X'_s)\, ds \\
&= \int_0^t \frac{(\sigma' c {\sigma'}^*)_{i,j}}{\alpha^2}(s, X'_s)\, ds \\
&= \delta_{i,j} \int_0^t \frac{1}{\alpha(s, X'_s)^2} \mathbf{1}_{\{\zeta(s, X'_s) \geq i\}}\, ds
\end{aligned}$$

en utilisant $\sigma' c {\sigma'}^* = I_{m,\zeta}$ (cf. (5.31)). Cela assure que les intégrales stochastiques $V_t^i = \int_0^t \alpha(s, X'_s) dU_s^i$ sont bien définies et en plus

$$\langle V^i, V^j \rangle_t = \delta_{i,j} \int_0^t \mathbf{1}_{\{\zeta(s,X'_s) \geq i\}}\, ds. \tag{5.33}$$

Dans la suite, on utilise

$$\begin{aligned}
\langle {M'}^i, V^j \rangle_t &= \int_0^t \alpha(s, X'_s) d\langle {M'}^i, U^j \rangle_s \\
&= \sum_{k=1}^d \int_0^t \alpha(s, X'_s) \frac{\sigma'_{j,k}}{\alpha}(s, X'_s) d\langle {M'}^i, {M'}^k \rangle_s \\
&= \sum_{k=1}^d \int_0^t \sigma'_{j,k}(s, X'_s) d\langle {M'}^i, {M'}^k \rangle_s \\
&= \int_0^t \sum_{k=1}^d \sigma'_{j,k}(s, X'_s) c_{i,k}(s, X'_s)\, ds \\
&= \int_0^t (c{\sigma'}^*)_{i,j}(s, X'_s)\, ds. \qquad (5.34)
\end{aligned}$$

On rappelle que B'' est un mouvement brownien sur Ω et qu'il est indépendant de l'espace facteur Ω'. Pour $i \leq m$, on définit les $\mathbb{P}$-martingales locales continues suivantes

$$Z_t^i = V_t^i + \int_0^t \mathbf{1}_{\{\zeta(s,X'_s) < i\}}\, d{B''}_s^i \quad \text{et} \quad B_t^i = \sum_{k=1}^m \int_0^t \Pi_{i,k}(s, X'_s) dZ_s^k. \tag{5.35}$$

Noter que, par indépendance sur les espaces facteurs Ω' et Ω'' (voir (5.30)), on a $\langle {M'}^i, {B''}^k \rangle = 0$ et donc il vient $\langle U^i, {B''}^k \rangle = 0$ puis aussi $\langle V^i, {B''}^k \rangle = 0$. Avec (5.33) et $\langle {B''}^i, {B''}^j \rangle_t = \delta_{i,j} t$ (mouvements browniens indépendants), on obtient

$$\begin{aligned}
\langle Z^i, Z^j \rangle_t &= \langle V^i, V^j \rangle_t + \delta_{i,j} \int_0^t \mathbf{1}_{\{\zeta(s,X'_s) < i\}}\, ds = \delta_{i,j} t \\
\langle B^i, B^j \rangle_t &= \sum_{k,l=1}^m \int_0^t (\Pi_{i,k}\Pi_{j,l})(s, X'_s) d\langle Z^k, Z^l \rangle_s \\
&= \sum_{k=1}^m \int_0^t (\Pi_{i,k}\Pi_{j,k})(s, X'_s)\, ds \\
&= \int_0^t (\Pi\Pi^*)_{i,j}(s, X'_s)\, ds = \delta_{i,j} t
\end{aligned}$$

puisque $\Pi\Pi^* = I_m$. Par conséquent, Z et B sont des $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$-mouvements browniens m-dimensionnels (Th. 1.2 (Lévy)). En particulier, B est le mouvement brownien cherché sur

Ω pour résoudre l'EDS $E(a,\sigma)$ sur $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$ comme en (5.18). Pour le voir, on considère les processus

$$\begin{aligned} Y_t^i &= X_t'^i - x^i - \int_0^t a_i(s,X_s')\,ds - \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{i,j}(s,X_s')\,dB_s^j \\ &= M_t'^i - \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{i,j}(s,X_s')\,dB_s^j. \end{aligned}$$

Ce sont des martingales locales continues nulles en 0 et il s'agit de voir qu'elles sont indistinguables de 0 pour établir que $X'=(X'^1,\dots,X'^d)$ est solution de l'EDS $E(a,\sigma)$ comme en (5.18). Pour le voir, on calcule $\langle Y^i,Y^i\rangle_t$ pour montrer que le crochet est identiquement nul.

On a

$$\begin{aligned} &\langle Y^i,Y^i\rangle_t = \langle M'^i,M'^i\rangle_t \\ &+\sum_{k,l=1}^m \int_0^t \sigma_{i,k}(s,X_s')\sigma_{i,l}(s,X_s')d\langle B^k,B^l\rangle_s - 2\sum_{k=1}^m \int_0^t \sigma_{i,k}(s,X_s')d\langle M'^i,B^k\rangle_s. \end{aligned} \tag{5.36}$$

D'abord, on a

$$\langle M'^i,M'^i\rangle_t = \int_0^t c_{i,i}(s,X_s')\,ds. \tag{5.37}$$

Ensuite, pour le premier terme de (5.36), on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k,l=1}^m \int_0^t \sigma_{i,k}(s,X_s')\sigma_{i,l}(s,X_s')d\langle B^k,B^l\rangle_s &= \sum_{k=1}^m \int_0^t \sigma_{i,k}^2(s,X_s')\,ds \\ &= \int_0^t \sum_{k=1}^m \sigma_{i,k}^2(s,X_s')\,ds \\ &= \int_0^t c_{i,i}(s,X_s')\,ds. \end{aligned} \tag{5.38}$$

Pour le deuxième terme de (5.36) : d'abord, comme $\langle M'^i,B''^k\rangle\equiv 0$, on a

$$\begin{aligned} \langle M'^i,B^j\rangle_t &= \sum_{k=1}^m \int_0^t \Pi_{j,k}(s,X_s')d\langle M'^i,Z^k\rangle_s \\ &= \sum_{k=1}^m \int_0^t \Pi_{j,k}(s,X_s')\Big(d\langle M'^i,V^k\rangle_s + \mathbf{1}_{\{\zeta(s,X_s')<k\}}d\langle M'^i,B''^k\rangle_s\Big) \\ &= \sum_{k=1}^m \int_0^t \Pi_{j,k}(s,X_s')d\langle M'^i,V^k\rangle_s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^m \int_0^t (\Pi_{j,k}(c{\sigma'}^*)_{i,k})(s,X'_s)\,ds \\ &= \int_0^t (c{\sigma'}^*\Pi^*)_{i,j}(s,X'_s)\,ds \qquad (5.39) \end{aligned}$$

d'après (5.34). Et donc le deuxième terme de (5.36) s'écrit avec (5.39) :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \int_0^t \sigma_{i,k}(s,X'_s)d\langle {M'}^i, B^k\rangle_s &= \sum_{k=1}^m \int_0^t \sigma_{i,k}(s,X'_s)(c{\sigma'}^*\Pi^*)_{i,k}(s,X'_s)\,ds \\ &= \int_0^t (c{\sigma'}^*\Pi^*\sigma^*)_{i,i}(s,X'_s)\,ds \\ &= \int_0^t c_{i,i}(s,X'_s)\,ds \qquad (5.40) \end{aligned}$$

car par symétrie de c et avec (5.32) obtenu dans l'étape 2

$$c{\sigma'}^*\Pi^*\sigma^* = c^*{\sigma'}^*\Pi^*\sigma^* = (\sigma\Pi{\sigma'}c)^* = c^* = c.$$

Finalement, (5.36) s'écrit

$$\langle Y^i, Y^i\rangle_t = \int_0^t c_{i,i}(s,X'_s)\,ds + \int_0^t c_{i,i}(s,X'_s)\,ds - 2\int_0^t (\sigma\Pi\sigma' c)_{i,i}(s,X'_s)\,ds = 0.$$

Comme en plus $Y_0^i = 0$ $\mathbb{P}$-ps, on en déduit que Y^i est $\mathbb{P}$-indistinguable de 0. Cela signifie que X' considéré comme processus sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ est solution de l'EDS $E(a,\sigma)$ relativement au mouvement brownien B construit en (5.35).

Comme par construction $\mathbb{P}'$ est la loi de X', cela signifie aussi que $\mathbb{P}'$ est solution faible (ou mesure-solution) de l'EDS $E(a,\sigma)$ et on a le résultat cherché. □

Corollaire 5.3 *On suppose l'hypothèse (loc) satisfaite pour l'EDS $E(a,\sigma)$. Si $m = d$ et si la fonction σ est inversible d'inverse σ^{-1} localement borné, une probabilité $\mathbb{P}'$ sur $(\Omega', \mathcal{F}')$ est solution faible de $E(a,\sigma)$ ssi il existe un $(\mathcal{F}'_t)_{t\geq 0}$-mouvement brownien d-dimensionnel B' sur $(\Omega', \mathcal{F}')$ tel que X' soit solution faible de $E(a,\sigma)$ relativement à B'.*

Remarque 5.4 L'intérêt du corollaire est donc d'assurer que sous de bonnes conditions, on peut construire la solution faible directement sur l'espace canonique $\Omega' = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ sans étendre l'espace Ω' en $\Omega' \times \Omega''$.

Démonstration : La condition est clairement suffisante. Pour voir qu'elle est nécessaire, on suppose que $d = m$, que $\mathbb{P}'$ est une solution faible et que la fonction σ^{-1} existe (elle est alors borélienne) et est localement bornée.
D'après le Théorème 5.7, les processus ${M'}^i$ et ${N'}^{i,j}$ sont des $\mathbb{P}'$-martingales locales ps nulles

en 0.
On reprend alors l'étape 3 dans la preuve précédente avec $\zeta(x,t) = m$ (presque sûrement par hypothèse sur σ) et $\Lambda' = \Lambda^{-1}$. Dans ce cas ($\zeta(x,t) = m$), par les définitions en (5.35), on a $Z^i = V^i$ et donc B ne dépend pas de B''. C'est donc un mouvement brownien directement sur $(\Omega', \mathcal{F}', (\mathcal{F}'_t)_t, \mathbb{P}')$ (et pas seulement sur Ω comme dans l'étape 3). En d'autres termes, on n'a pas besoin d'introduire l'espace auxiliaire Ω'' et les processus Y^i sont définis sur Ω' également. On a le résultat avec $B' = B$. $\square$

Bibliographie

[App] David Applebaum. *Lévy Processes and Stochastic Calculus*. Cambridge series in advanced mathematics, vol. 93, 2004.

[BC] Bernard Bercu, Djalil Chafaï. *Modélisation stochastique et simulation*. Dunod, 2007.

[JCB-L3] Jean-Christophe Breton. *Fondement des Probabilités*. Notes de cours, L3 Mathématiques, Université de Rennes 1, 2013.

[Bil2] Patrick Billingsley. *Convergence of Probability measures*. 2nd Edition, Wiley series in probabilities and mathematical statistics, 1999.

[Chung] Kai Lai Chung. *A course in probability theory*. 3rd Edition, Academic Press, 2001.

[CM] Francis Comets, Thierry Meyre. *Calcul stochastique et modèles de diffusions*. Dunod, 2006.

[CT] Rama Cont, Peter Tankov. *Financial modelling with Jump Processes*. Chapman & Hall, 2003.

[Dav] Youri Davydov. *Cours de DEA "Processus stochastiques"*. Université Lille 1, 1999–2000.

[DM] Claude Dellacherie, Pierre-André Meyer. *Probabilités et potentiels*. Hermann, 1975.

[EGK] Nicole El Karoui, Emmanuel Gobet, Etienne Pardoux. *Introduction au calcul stochastique*. École Polytechnique, 2001.

[Fel] William Feller. *An introduction to probability theory and its applications*. Vol. 1. 3rd Edition, Wiley series in probabilities and mathematical statistics, 1968.

[Gal] Léonard Gallardo. *Mouvement brownien et calcul d'Itô*. Coll. Méthodes mathématiques. Ed. Hermann. 2008.

[Gué] Hélène Guérin. *Processus à temps continu*. Notes de cours, M2 Mathématiques, Université de Rennes 1, 2009.

[Kal] Olav Kallenberg. *Foundations of modern probability*. 2nd Edition, Springer Series in Statistics. Probability and its Applications, 2002.

[KS] Ioannis Karatzas, Steven E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*. Springer, 1987.

[Kin] John Kingman. *Poisson processes*. Oxford University Press, 1993.

[LG0] Jean-François Le Gall. *Introduction au mouvement brownien*. Gazette des Mathématiciens, vol. 40, 1989.

[LG1] Jean-François Le Gall. *Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique*. Spinger, Coll. Mathématiques et applications, vol. 71, 2013. Voir les notes de cours M2 Mathématiques de l'Université Paris sud-Orasy.

[Lif] Michel Lisfhits. *Gaussian random functions*, Kluwer, 1995.

[Mal] Florent Malrieu. *Processus de Markov et inégalités fonctionnelles*. Notes de cours de Master 2, 2005–2006.

[Pro] Philipp Protter. *Stochastic integration and differential equations*. Springer, 1995.

[RY] Daniel Revuz, Marc Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*. Springer, 1991.

[Tud] Ciprian Tudor. *Cours de calcul stochastique*. Notes de cours M2 Mathématiques, Université Lille 1, 2011.