

College Mathematics Guidance Series
大学数学学习辅导丛书

高等数学 习题全解指南

下册 同济·第六版

同济大学数学系 编



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

大学数学学习辅导丛书

高等数学习题全解指南

同济·第六版(下册)

同济大学数学系 编

高等教育出版社

内容提要

本书是与同济大学数学系编《高等数学》第六版相配套的学习辅导书，由同济大学数学系的教师编写。本书内容由三部分组成，第一部分是按《高等数学》（下册）的章节顺序编排，给出习题全解。部分题目在解答之后对该类题的解法作了小结、归纳，有的提供了多种解法；第二部分是全国硕士研究生入学统一考试数学试题选解，所选择的试题以工学类为主，少量涉及经济学类试题；第三部分是同济大学高等数学考卷选编以及考题的参考解答。

本书对教材具有相对的独立性，可为工科和其他非数学类专业学生学习以及准备报考硕士研究生的人员复习高等数学提供解题指导，也可供讲授高等数学的教师在备课和批改作业时参考。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学习题全解指南：同济·第6版·下册/同济大学数学系编. —北京：高等教育出版社，2007.5
ISBN 978-7-04-020746-0

I. 高… II. 同… III. 高等数学—高等学校—解题
IV. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 049008 号

策划编辑 王强 责任编辑 崔梅萍 封面设计 王凌波 责任绘图 杜晓丹
版式设计 张岚 责任校对 金辉 责任印制 韩刚

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总机	010-58581000	网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	北京汇林印务有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com

开本	787×960 1/16	版次	2007 年 5 月 第 1 版
印张	20.25	印次	2007 年 11 月 第 3 次印刷
字数	380 000	定 价	21.40 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 20746-00



《高等数学》(第六版)下册习题全解

第八章 空间解析几何与向量代数	3
习题 8—1 向量及其线性运算	3
习题 8—2 数量积 向量积 混合积	7
习题 8—3 曲面及其方程	10
习题 8—4 空间曲线及其方程	13
习题 8—5 平面及其方程	16
习题 8—6 空间直线及其方程	19
总习题八	25
第九章 多元函数微分法及其应用	34
习题 9—1 多元函数的基本概念	34
习题 9—2 偏导数	37
习题 9—3 全微分	41
习题 9—4 多元复合函数的求导法则	45
习题 9—5 隐函数的求导公式	52
习题 9—6 多元函数微分学的几何应用	58
习题 9—7 方向导数与梯度	65
习题 9—8 多元函数的极值及其求法	68
· 习题 9—9 二元函数的泰勒公式	75
· 习题 9—10 最小二乘法	77
总习题九	79
第十章 重积分	89
习题 10—1 二重积分的概念与性质	89
习题 10—2 二重积分的计算法	92
习题 10—3 三重积分	114
习题 10—4 重积分的应用	126
· 习题 10—5 含参变量的积分	136

总习题十	140
第十一章 曲线积分与曲面积分	153
习题 11-1 对弧长的曲线积分	153
习题 11-2 对坐标的曲线积分	158
习题 11-3 格林公式及其应用	163
习题 11-4 对面积的曲面积分	173
习题 11-5 对坐标的曲面积分	179
习题 11-6 高斯公式 “通量与散度”	183
习题 11-7 斯托克斯公式 “环流量与旋度”	187
总习题十一	193
第十二章 无穷级数	203
习题 12-1 常数项级数的概念和性质	203
习题 12-2 常数项级数的审敛法	207
习题 12-3 幂级数	211
习题 12-4 函数展开成幂级数	214
习题 12-5 函数的幂级数展开式的应用	219
习题 12-6 函数项级数的一致收敛性及一致收敛级数的基本性质	226
习题 12-7 傅里叶级数	229
习题 12-8 一般周期函数的傅里叶级数	235
总习题十二	240



二、全国硕士研究生入学统一考试数学试题选解

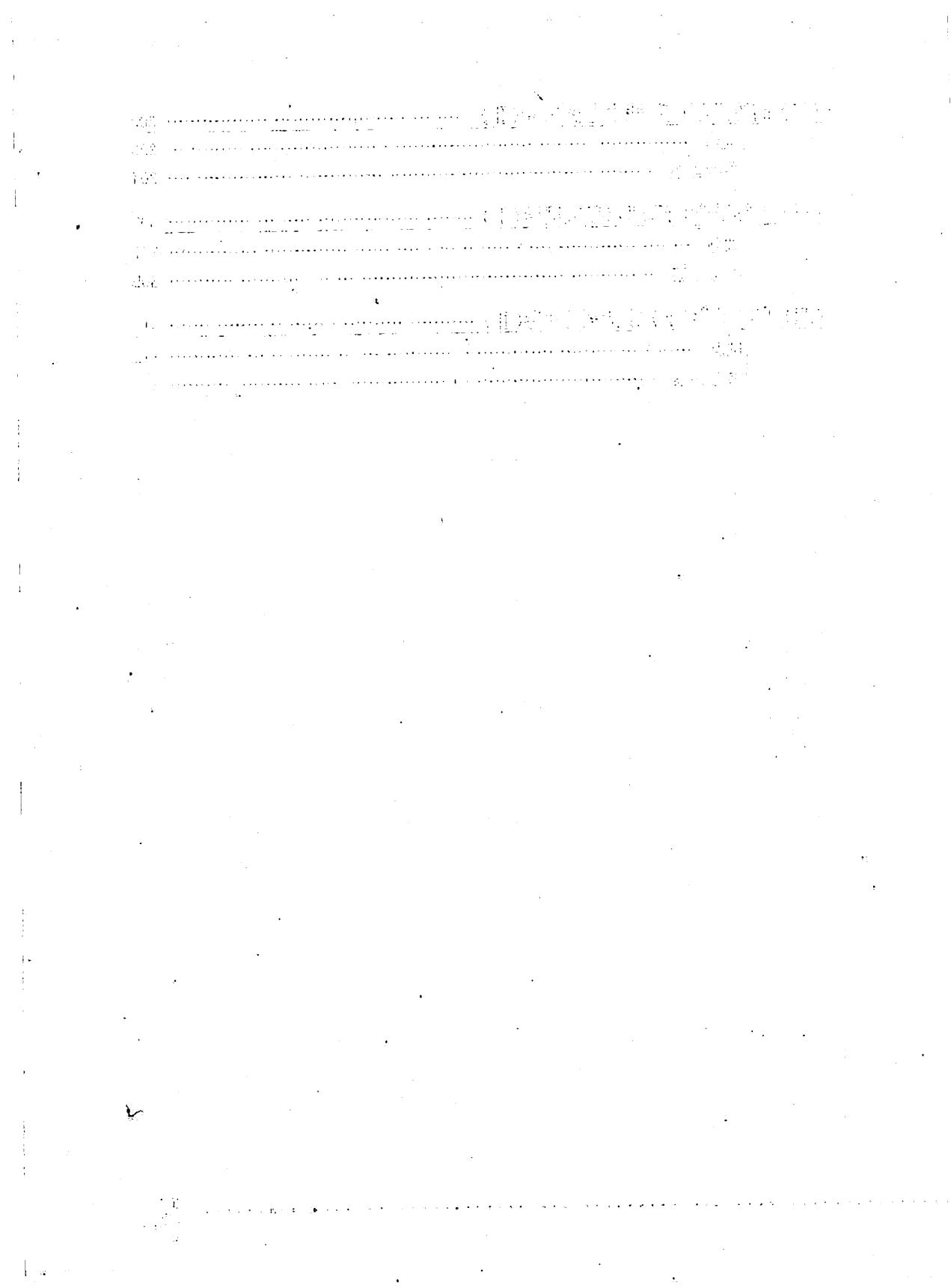
(五) 向量代数与空间解析几何	253
(六) 多元函数微分学	257
(七) 多元函数积分学	270
(八) 无穷级数	286

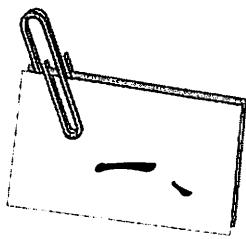


三、同济大学高等数学试卷选编

(一) 高等数学(下)期中考试试卷(I)	299
试题	299
参考答案	300

(二) 高等数学(下)期中考试试卷(Ⅱ)	303
试题	303
参考答案	304
(三) 高等数学(下)期末考试试卷(Ⅰ)	307
试题	307
参考答案	309
(四) 高等数学(下)期末考试试卷(Ⅱ)	313
试题	313
参考答案	314





《高等数学》(第六版)
下册习题全解

1970

1971

第八章 空间解析几何与向量代数

习题 8-1

向量及其线性运算

1. 设 $u = a - b + 2c, v = -a + 3b - c$. 试用 a, b, c 表示 $2u - 3v$.

解 $2u - 3v = 2(a - b + 2c) - 3(-a + 3b - c)$
 $= 5a - 11b + 7c.$

2. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分, 试用向量证明它是平行四边形.

证 如图 8-1, 设四边形 ABCD 中 AC 与 BD 交于点 M, 已知 $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MB}$. 故

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DC}.$$

即 $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$ 且 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$, 因此四边形 ABCD 是平行四边形.

3. 把 $\triangle ABC$ 的 BC 边五等分, 设分点依次为 D_1, D_2, D_3, D_4 , 再把各分点与点 A 连接. 试以 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}, \overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$ 表示向量 $\overrightarrow{D_1A}, \overrightarrow{D_2A}, \overrightarrow{D_3A}$ 和 $\overrightarrow{D_4A}$.

证 如图 8-2, 根据题意知

$$\overrightarrow{BD_1} = \frac{1}{5}\mathbf{a}, \overrightarrow{D_1D_2} = \frac{1}{5}\mathbf{a}, \overrightarrow{D_2D_3} = \frac{1}{5}\mathbf{a}, \overrightarrow{D_3D_4} = \frac{1}{5}\mathbf{a},$$

故

$$\overrightarrow{D_1A} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD_1}) = -\frac{1}{5}\mathbf{a} - \mathbf{c}.$$

$$\overrightarrow{D_2A} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD_2}) = -\frac{2}{5}\mathbf{a} - \mathbf{c}.$$

$$\overrightarrow{D_3A} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD_3}) = -\frac{3}{5}\mathbf{a} - \mathbf{c}.$$

$$\overrightarrow{D_4A} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD_4}) = -\frac{4}{5}\mathbf{a} - \mathbf{c}.$$

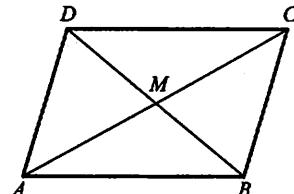


图 8-1

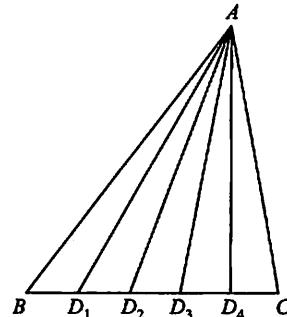


图 8-2

4. 已知两点 $M_1(0, 1, 2)$ 和 $M_2(1, -1, 0)$. 试用坐标表示式表示向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 及 $-2\overrightarrow{M_1M_2}$.

解 $\overrightarrow{M_1M_2} = (1-0, -1-1, 0-2) = (1, -2, -2).$

$$-2\overrightarrow{M_1M_2} = -2(1, -2, -2) = (-2, 4, 4).$$

5. 求平行于向量 $\mathbf{a}=(6,7,-6)$ 的单位向量.

解 向量 \mathbf{a} 的单位向量为 $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$, 故平行于向量 \mathbf{a} 的单位向量为

$$\pm \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \pm \frac{1}{11}(6,7,-6) = \pm \left(\frac{6}{11}, \frac{7}{11}, -\frac{6}{11} \right),$$

其中 $|\mathbf{a}| = \sqrt{6^2 + 7^2 + (-6)^2} = 11$.

6. 在空间直角坐标系中,指出下列各点在哪个卦限?

$$A(1,-2,3); B(2,3,-4); C(2,-3,-4); D(-2,-3,1).$$

解 A 点在第四卦限, B 点在第五卦限, C 点在第八卦限, D 点在第三卦限.

7. 在坐标面上和在坐标轴上的点的坐标各有什么特征? 指出下列各点的位置:

$$A(3,4,0); B(0,4,3); C(3,0,0); D(0,-1,0).$$

解 在坐标面上的点的坐标,其特征是表示坐标的三个有序数中至少有一个为零. 比如 xOy 面上的点的坐标为 $(x_0, y_0, 0)$, xOz 面上的点的坐标为 $(x_0, 0, z_0)$, yOz 面上的点的坐标为 $(0, y_0, z_0)$.

在坐标轴上的点的坐标,其特征是表示坐标的三个有序数中至少有两个为零,比如 Ox 轴上的点的坐标为 $(x_0, 0, 0)$, Oy 轴上的点的坐标为 $(0, y_0, 0)$, Oz 轴上点的坐标为 $(0, 0, z_0)$.

A 点在 xOy 面上, B 点在 yOz 面上, C 点在 x 轴上, D 点在 y 轴上.

8. 求点 (a,b,c) 关于(1)各坐标面;(2)各坐标轴;(3)坐标原点的对称点的坐标.

解 (1)点 (a,b,c) 关于 xOy 面的对称点为 $(a,b,-c)$; 关于 yOz 面的对称点是 $(-a,b,c)$; 关于 zOx 面的对称点为 $(a,-b,c)$.

(2)点 (a,b,c) 关于 x 轴的对称点是 $(a,-b,-c)$; 关于 y 轴的对称点是 $(-a,b,-c)$; 关于 z 轴的对称点是 $(-a,-b,c)$.

(3)点 (a,b,c) 关于坐标原点的对称点是 $(-a,-b,-c)$.

9. 自点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 分别作各坐标面和各坐标轴的垂线,写出各垂足的坐标.

解 设空间直角坐标系如图 8-3,根据题意, P_0F 为点 P_0 关于 xOz 面的垂线,垂足点 F 坐标为 $(x_0, 0, z_0)$; P_0D 为点 P_0 关于 xOy 面的垂线,垂足点 D 坐标为 $(x_0, y_0, 0)$; P_0E 为点 P_0 关于 yOz 面的垂线,垂足点 E 坐标为 $(0, y_0, z_0)$.

P_0A 为点 P_0 关于 x 轴的垂线,垂足点 A 的坐标为 $(x_0, 0, 0)$; P_0B 为点 P_0 关于 y 轴的垂线,垂足点 B 的坐标为 $(0, y_0, 0)$; P_0C 为点 P_0 关于 z 轴的垂线,垂足点 C 的坐标为 $(0, 0, z_0)$.

10. 过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直

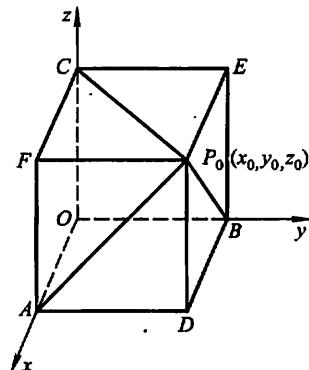


图 8-3

线和平行于 xOy 面的平面,问在它们上面的点的坐标各有什么特点?

解 如图 8-4,过 P_0 且平行于 z 轴的直线 l 上的点的坐标,其特点是:它们的横坐标与纵坐标均相同.

而过点 P_0 且平行于 xOy 面的平面 π 上的点的坐标,其特点是,它们的竖坐标 z_0 均相同.

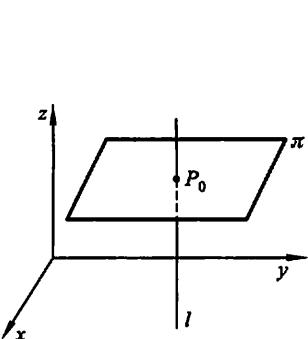


图 8-4

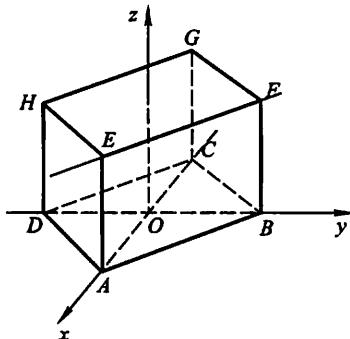


图 8-5

11. 一边长为 a 的立方体放置在 xOy 面上,其底面的中心在坐标原点,底面的顶点在 x 轴和 y 轴上,求它各顶点的坐标.

解 如图 8-5,已知 $AB=a$,故 $OA=OB=\frac{\sqrt{2}}{2}a$,于是各顶点的坐标分别为
 $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, 0\right)$, $B\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a, 0\right)$, $C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, 0\right)$, $D\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0\right)$, $E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, a\right)$,
 $F\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a, a\right)$, $G\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, a\right)$, $H\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}a, a\right)$.

12. 求点 $M(4, -3, 5)$ 到各坐标轴的距离.

解 点 M 到 x 轴的距离 $d_1 = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{34}$, 点 M 到 y 轴的距离 $d_2 = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$, 点 M 到 z 轴的距离 $d_3 = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$.

13. 在 yOz 面上,求与三点 $A(3, 1, 2)$ 、 $B(4, -2, -2)$ 和 $C(0, 5, 1)$ 等距离的点.

解 所求点在 yOz 面上,不妨设为 $P(0, y, z)$, 点 P 与三点 A, B, C 等距离,
 $|\overrightarrow{PA}| = \sqrt{3^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2}$, $|\overrightarrow{PB}| = \sqrt{4^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2}$,
 $|\overrightarrow{PC}| = \sqrt{(y-5)^2 + (z-1)^2}$.

由 $|\overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{PC}|$ 知·

$$\sqrt{3^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2} = \sqrt{4^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2} = \sqrt{(y-5)^2 + (z-1)^2},$$

即

$$\begin{cases} 9 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 16 + (y+2)^2 + (z+2)^2, \\ 9 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = (y-5)^2 + (z-1)^2. \end{cases}$$

解上述方程组,得 $y=1, z=-2$. 故所求点坐标为 $(0, 1, -2)$.

14. 试证明以三点 $A(4, 1, 9), B(10, -1, 6), C(2, 4, 3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

证 由 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(10-4)^2 + (-1-1)^2 + (6-9)^2} = 7$,

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(2-4)^2 + (4-1)^2 + (3-9)^2} = 7,$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(2-10)^2 + (4+1)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

知 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$ 及 $|\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2$. 故 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

15. 设已知两点 $M_1(4, \sqrt{2}, 1)$ 和 $M_2(3, 0, 2)$. 计算向量 $\overrightarrow{M_1 M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解 向量 $\overrightarrow{M_1 M_2} = (3-4, 0-\sqrt{2}, 2-1) = (-1, -\sqrt{2}, 1)$,

其模 $|\overrightarrow{M_1 M_2}| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$. 其方向余弦分别为

$$\cos \alpha = -\frac{1}{2}, \cos \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \gamma = \frac{1}{2}.$$

方向角分别为 $\alpha = \frac{2}{3}\pi, \beta = \frac{3}{4}\pi, \gamma = \frac{\pi}{3}$.

16. 设向量的方向余弦分别满足(1) $\cos \alpha = 0$; (2) $\cos \beta = 1$; (3) $\cos \alpha = \cos \beta = 0$, 问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何?

解 (1) 由 $\cos \alpha = 0$ 知 $\alpha = \frac{\pi}{2}$, 故向量与 x 轴垂直、平行于 yOz 面.

(2) 由 $\cos \beta = 1$ 知 $\beta = 0$, 故向量与 y 轴同向, 垂直于 xOz 面.

(3) 由 $\cos \alpha = \cos \beta = 0$ 知 $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$, 故向量垂直于 x 轴和 y 轴, 即与 z 轴平行, 垂直于 xOy 面.

17. 设向量 r 的模是 4, 它与轴 u 的夹角是 60° , 求 r 在轴 u 上的投影.

解 已知 $|r| = 4$, $\text{Pr}_u r = |r| \cos \theta = 4 \cdot \cos 60^\circ = 4 \times \frac{1}{2} = 2$.

18. 一向量的终点在点 $B(2, -1, 7)$, 它在 x 轴、 y 轴和 z 轴上的投影依次为 4, -4 和 7. 求这向量的起点 A 的坐标.

解 设 A 点坐标为 (x, y, z) , 则

$$\overrightarrow{AB} = (2-x, -1-y, 7-z),$$

由题意知

$$2-x=4, -1-y=-4, 7-z=7,$$

故 $x=-2, y=3, z=0$, 因此 A 点坐标为 $(-2, 3, 0)$.

19. 设 $m=3i+5j+8k, n=2i-4j-7k$ 和 $p=5i+j-4k$. 求向量 $a=4m+3n-p$ 在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分向量.

解 $a = 4m + 3n - p = 4(3i+5j+8k) + 3(2i-4j-7k) - (5i+j-4k)$
 $= 13i+7j+15k$,

a 在 x 轴上的投影为 13, 在 y 轴上的分向量为 $7j$.

习题 3-2 // 数量积 向量积 * 混合积

1. 设 $a=3i-j-2k, b=i+2j-k$, 求

(1) $a \cdot b$ 及 $a \times b$; (2) $(-2a) \cdot 3b$ 及 $a \times 2b$; (3) a, b 的夹角的余弦.

解 (1) $a \cdot b = (3, -1, -2) \cdot (1, 2, -1)$

$$= 3 \times 1 + (-1) \times 2 + (-2) \times (-1) = 3,$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (5, 1, 7).$$

(2) $(-2a) \cdot 3b = -6(a \cdot b) = -6 \times 3 = -18$,

$$a \times 2b = 2(a \times b) = 2(5, 1, 7) = (10, 2, 14).$$

$$(3) \cos(a, b) = \frac{\widehat{a \cdot b}}{|a| |b|} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-2)^2} \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}}$$
$$= \frac{3}{\sqrt{14} \sqrt{6}} = \frac{3}{2\sqrt{21}}.$$

2. 设 a, b, c 为单位向量, 且满足 $a+b+c=0$, 求 $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a$.

解 已知 $|a|=|b|=|c|=1, a+b+c=0$, 故 $(a+b+c) \cdot (a+b+c)=0$.

即 $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + 2a \cdot b + 2b \cdot c + 2c \cdot a = 0$.

因此 $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = -\frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2) = -\frac{3}{2}$.

3. 已知 $M_1(1, -1, 2), M_2(3, 3, 1)$ 和 $M_3(3, 1, 3)$. 求与 $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直的单位向量.

解 $\overrightarrow{M_1M_2} = (3-1, 3-(-1), 1-2) = (2, 4, -1)$,

$\overrightarrow{M_2M_3} = (3-3, 1-3, 3-1) = (0, -2, 2)$,

由于 $\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_2M_3}$ 与 $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直, 故所求向量可取为

$$a = \frac{\pm(\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_2M_3})}{|\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_2M_3}|},$$

由
$$\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_2M_3} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (6, -4, -4),$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_2M_3}| = \sqrt{6^2 + (-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

知
$$a = \frac{\pm 1}{2\sqrt{17}}(6, -4, -4) = \pm \left(\frac{3}{\sqrt{17}}, -\frac{2}{\sqrt{17}}, -\frac{2}{\sqrt{17}} \right).$$

4. 设质量为 100 kg 的物体从点 $M_1(3, 1, 8)$ 沿直线移动到点 $M_2(1, 4, 2)$, 计算重力所作的功(长度单位为 m, 重力方向为 z 轴负方向).

$$\text{解 } \overrightarrow{M_1 M_2} = (1-3, 4-1, 2-8) = (-2, 3, -6),$$

$$\mathbf{F} = (0, 0, -100 \times 9.8) = (0, 0, -980),$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} = (0, 0, -980) \cdot (-2, 3, -6) = 5880(\text{J}).$$

5. 在杠杆上支点 O 的一侧与点 O 的距离为 x_1 的点 P_1 处, 有一与 $\overrightarrow{OP_1}$ 成角 θ_1 的力 \mathbf{F}_1 作用着; 在 O 的另一侧与点 O 的距离为 x_2 的点 P_2 处, 有一与 $\overrightarrow{OP_2}$ 成角 θ_2 的力 \mathbf{F}_2 作用着(图 8-6). 问 $\theta_1, \theta_2, x_1, x_2, |\mathbf{F}_1|, |\mathbf{F}_2|$ 符合怎样的条件才能使杠杆保持平衡?

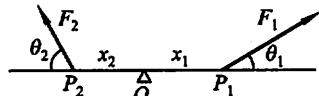


图 8-6

解 如图 8-6, 已知有固定转轴的物体的平衡条件是力矩的代数和为零, 又由对力矩正负符号的规定可得杠杆保持平衡的条件为

$$|\mathbf{F}_1| x_1 \sin \theta_1 - |\mathbf{F}_2| x_2 \sin \theta_2 = 0,$$

$$\text{即 } |\mathbf{F}_1| x_1 \sin \theta_1 = |\mathbf{F}_2| x_2 \sin \theta_2.$$

6. 求向量 $a=(4, -3, 4)$ 在向量 $b=(2, 2, 1)$ 上的投影.

$$\text{解 } \text{Pr}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{(4, -3, 4) \cdot (2, 2, 1)}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{6}{3} = 2.$$

7. 设 $a=(3, 5, -2), b=(2, 1, 4)$, 问 λ 与 μ 有怎样的关系, 能使得 $\lambda a + \mu b$ 与 z 轴垂直?

$$\text{解 } \lambda a + \mu b = \lambda(3, 5, -2) + \mu(2, 1, 4) = (3\lambda + 2\mu, 5\lambda + \mu, -2\lambda + 4\mu).$$

要 $\lambda a + \mu b$ 与 z 轴垂直, 即要 $(\lambda a + \mu b) \perp (0, 0, 1)$, 即

$$(\lambda a + \mu b) \cdot (0, 0, 1) = 0,$$

$$\text{亦即 } (3\lambda + 2\mu, 5\lambda + \mu, -2\lambda + 4\mu) \cdot (0, 0, 1) = 0,$$

故 $-2\lambda + 4\mu = 0$, 因此当 $\lambda = 2\mu$ 时能使 $\lambda a + \mu b$ 与 z 轴垂直.

8. 试用向量证明直径所对的圆周角是直角.

证明 如图 8-7, 设 AB 是圆 O 的直径, C 点在圆周

上, 要证 $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$. 只要证 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ 即可.

$$\begin{aligned} \text{由 } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}) \\ &= \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{BO} + |\overrightarrow{OC}|^2 \\ &= -|\overrightarrow{AO}|^2 + \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OC} + |\overrightarrow{OC}|^2 = 0, \end{aligned}$$

故 $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC}$, $\angle ACB$ 为直角.

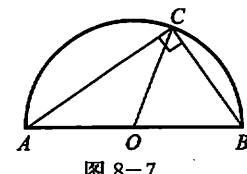


图 8-7

9. 已知向量 $a=2i-3j+k, b=i-j+3k$ 和 $c=i-2j$, 计算:

$$(1) (a \cdot b)c - (a \cdot c)b; (2) (a+b) \times (b+c); (3) (a \times b) \cdot c.$$

$$\text{解 } (1) a \cdot b = (2, -3, 1) \cdot (1, -1, 3) = 8, a \cdot c = (2, -3, 1) \cdot (1, -2, 0) = 8,$$

故 $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} = 8(1, -2, 0) - 8(1, -1, 3) = (0, -8, -24)$
 $= -8\mathbf{j} - 24\mathbf{k}$.

(2) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (2, -3, 1) + (1, -1, 3) = (3, -4, 4)$,
 $\mathbf{b} + \mathbf{c} = (1, -1, 3) + (1, -2, 0) = (2, -3, 3)$,

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -4 & 4 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = (0, -1, -1) = -\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

$$(3) (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

10. 已知 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{i} + 3\mathbf{k}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, 求 $\triangle OAB$ 的面积.

解 由向量积的几何意义知

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}|,$$

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-3, -3, 1),$$

$$|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 1} = \sqrt{19}.$$

故 $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{19}}{2}$.

11. 已知 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$,

试利用行列式的性质证明

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}.$$

证 因为 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$, $(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$,

$$(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},$$

而由行列式的性质知 $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$,

故 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$.

12. 试用向量证明不等式:

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \geq |a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3|,$$

其中 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ 为任意实数. 并指出等号成立的条件.

证明 设向量 $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3), \mathbf{b}=(b_1, b_2, b_3)$.

由 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\hat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$ 知, $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| |\cos(\hat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})| \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$, 从而

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2},$$

当 a_1, a_2, a_3 与 b_1, b_2, b_3 成比例, 即 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$ 时, 上述等式成立.

习题 8-3

曲面及其方程

1. 一动点与两定点 $(2, 3, 1)$ 和 $(4, 5, 6)$ 等距离, 求这动点的轨迹方程.

解 设动点为 $M(x, y, z)$, 由题意知

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-5)^2 + (z-6)^2},$$

经整理得 $4x + 4y + 10z - 63 = 0$.

2. 建立以点 $(1, 3, -2)$ 为球心, 且通过坐标原点的球面方程.

解 设以点 $(1, 3, -2)$ 为球心, R 为半径的球面方程为

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = R^2.$$

球面过原点, 故 $R^2 = (0-1)^2 + (0-3)^2 + (0+2)^2 = 14$,

从而所求球面方程为 $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 14$.

3. 方程 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z = 0$ 表示什么曲面?

解 将已知方程整理成

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = (\sqrt{6})^2,$$

所以此方程表示以 $(1, -2, -1)$ 为球心, 以 $\sqrt{6}$ 为半径的球面.

4. 求与坐标原点 O 及点 $(2, 3, 4)$ 的距离之比为 $1 : 2$ 的点的全体所组成的曲面的方程, 它表示怎样的曲面?

解 设动点坐标为 (x, y, z) , 根据题意有

$$\frac{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2}}{\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2}} = \frac{1}{2},$$

化简整理得 $\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + (y+1)^2 + \left(z + \frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{29}\right)^2$.

它表示以 $\left(-\frac{2}{3}, -1, -\frac{4}{3}\right)$ 为球心, 以 $\frac{2}{3}\sqrt{29}$ 为半径的球面.

5. 将 xOz 坐标面上的抛物线 $z^2 = 5x$ 绕 x 轴旋转一周, 求所生成的旋转曲面的方程.

解 以 $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$ 代替抛物线方程 $z^2 = 5x$ 中的 z , 得

$$(\pm\sqrt{y^2+z^2})^2=5x,$$

即

$$y^2+z^2=5x.$$

注 xOz 面上的曲线 $F(x, z)=0$ 绕 x 轴旋转一周所生成的旋转曲面方程为 $F(x, \pm\sqrt{y^2+z^2})=0$.

6. 将 xOz 坐标面上的圆 $x^2+z^2=9$ 绕 z 轴旋转一周, 求所生成的旋转曲面的方程.

解 以 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 代替圆方程 $x^2+y^2=9$ 中的 x , 得

$$(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2+z^2=9,$$

即

$$x^2+y^2+z^2=9.$$

7. 将 xOy 坐标面上的双曲线 $4x^2-9y^2=36$ 分别绕 x 轴及 y 轴旋转一周, 求所生成的旋转曲面的方程.

解 以 $\pm\sqrt{y^2+z^2}$ 代替双曲线方程 $4x^2-9y^2=36$ 中的 y , 得该双曲线绕 x 轴旋转一周而生成的旋转曲面方程为

$$4x^2-9(\pm\sqrt{y^2+z^2})^2=36,$$

即

$$4x^2-9(y^2+z^2)=36.$$

以 $\pm\sqrt{x^2+z^2}$ 代替双曲线方程 $4x^2-9y^2=36$ 中的 x , 得该双曲线绕 y 轴旋转一周而生成的旋转曲面方程为

$$4(\pm\sqrt{x^2+z^2})^2-9y^2=36,$$

即

$$4(x^2+z^2)-9y^2=36.$$

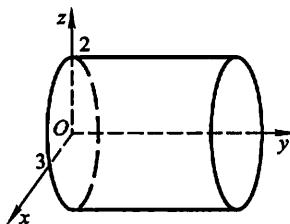
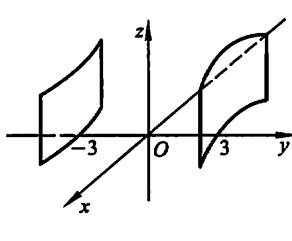
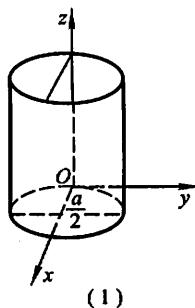
8. 画出下列各方程所表示的曲面:

$$(1) \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2; \quad (2) -\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1;$$

$$(3) \frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1; \quad (4) y^2-z=0; \quad (5) z=2-x^2.$$

解 (1) 如图 8-8(1); (2) 如图 8-8(2); (3) 如图 8-8(3);

(4) 如图 8-8(4); (5) 如图 8-8(5).



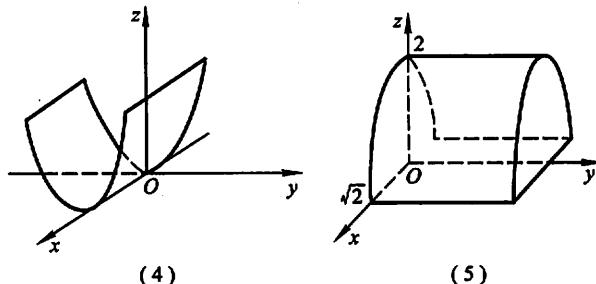


图 8-8

9. 指出下列方程在平面解析几何中和在空间解析几何中分别表示什么图形:

- | | |
|-------------------|-------------------|
| (1) $x=2$; | (2) $y=x+1$; |
| (3) $x^2+y^2=4$; | (4) $x^2-y^2=1$. |

解 (1) $x=2$ 在平面解析几何中表示平行于 y 轴的一条直线, 在空间解析几何中表示与 yOz 面平行的平面.

(2) $y=x+1$ 在平面解析几何中表示斜率为 1, y 轴截距也为 1 的一条直线, 在空间解析几何中表示平行于 z 轴的平面.

(3) $x^2+y^2=4$ 在平面解析几何中表示圆心在原点, 半径为 2 的圆, 在空间解析几何中表示母线平行于 z 轴, 准线为 $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ z=0 \end{cases}$ 的圆柱面.

(4) $x^2-y^2=1$ 在平面解析几何中表示以 x 轴为实轴, y 轴为虚轴的双曲线, 在空间解析几何中表示母线平行于 z 轴, 准线为 $\begin{cases} x^2-y^2=1, \\ z=0 \end{cases}$ 的双曲柱面.

10. 说明下列旋转曲面是怎样形成的:

$$(1) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1; \quad (2) x^2 - \frac{y^2}{4} + z^2 = 1;$$

$$(3) x^2 - y^2 - z^2 = 1; \quad (4) (z-a)^2 = x^2 + y^2.$$

解 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1$ 表示 xOy 面上的椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 绕 x 轴旋转一周而生成的旋转曲面, 或表示 xOz 面上的椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ 绕 x 轴旋转一周而生成的旋转曲面.

(2) $x^2 - \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ 表示 xOy 面上双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 绕 y 轴旋转一周而生成的旋转曲面, 或表示 yOz 面上双曲线 $-\frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ 绕 y 轴旋转一周而生成的旋转曲面.

(3) $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ 表示 xOy 面上双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 绕 x 轴旋转一周而生成的旋转曲面, 或表示 xOz 面上双曲线 $x^2 - z^2 = 1$ 绕 x 轴旋转一周而生成的旋转曲面.

(4) $(z-a)^2 = x^2 + y^2$ 表示 xOz 面上直线 $z = x+a$ 或 $z = -x+a$ 绕 z 轴旋转一周而生成的旋转曲面, 或表示 yOz 面上的直线 $z = y+a$ 或 $z = -y+a$ 绕 z 轴旋转一周而生成的旋转曲面.

11. 画出下列方程所表示的曲面:

$$(1) 4x^2 + y^2 - z^2 = 4; \quad (2) x^2 - y^2 - 4z^2 = 4; \quad (3) \frac{z}{3} = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}.$$

解 (1) 如图 8-9(1); (2) 如图 8-9(2); (3) 如图 8-9(3).

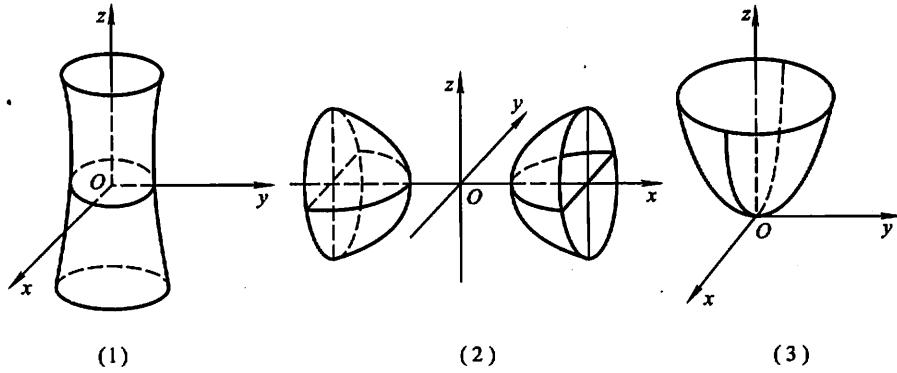


图 8-9

习题 8-4

空间曲线及其方程

1. 画出下列曲线在第一卦限内的图形:

$$(1) \begin{cases} x=1, \\ y=2; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2}, \\ x-y=0; \end{cases} \quad (3) \begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ x^2+z^2=a^2. \end{cases}$$

解 (1) 如图 8-10(1); (2) 如图 8-10(2); (3) 如图 8-10(3).

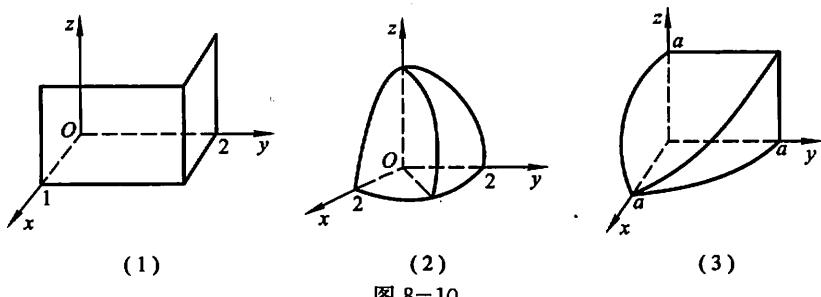


图 8-10

2. 指出下列方程组在平面解析几何中与在空间解析几何中分别表示什么图形:

$$(1) \begin{cases} y=5x+1, \\ y=2x-3; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \\ y=3. \end{cases}$$

解 (1) $\begin{cases} y=5x+1, \\ y=2x-3 \end{cases}$ 在平面解析几何中表示两直线的交点, 在空间解析几何中表示两平面的交线即空间直线.

(2) $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \\ y=3 \end{cases}$ 在平面解析几何中表示椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 与其切线 $y=3$ 的交点即切点. 在空间解析几何中表示椭圆柱面 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 与其切平面 $y=3$ 的交线即空间直线.

3. 分别求母线平行于 x 轴及 y 轴而且通过曲线 $\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16, \\ x^2+z^2-y^2=0 \end{cases}$ 的柱面方程.

解 在 $\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16, \\ x^2+z^2-y^2=0 \end{cases}$ 中消去 x , 得 $3y^2-z^2=16$,

即为母线平行于 x 轴且通过已知曲线的柱面方程.

在 $\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16, \\ x^2+z^2-y^2=0 \end{cases}$ 中消去 y , 得 $3x^2+2z^2=16$,

即为母线平行于 y 轴且通过已知曲线的柱面方程.

4. 求球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $x+z=1$ 的交线在 xOy 面上的投影的方程.

解 在 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9, \\ x+z=1 \end{cases}$ 中消去 z , 得

$$x^2+y^2+(1-x)^2=9, \text{ 即 } 2x^2-2x+y^2=8,$$

它表示母线平行于 z 轴的柱面, 故 $\begin{cases} 2x^2-2x+y^2=8, \\ z=0 \end{cases}$ 表示已知交线在 xOy 面上的

的投影的方程.

5. 将下列曲线的一般方程化为参数方程:

$$(1) \begin{cases} x^2+y^2+z^2=9, \\ y=x; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} (x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4, \\ z=0. \end{cases}$$

解 (1) 将 $y=x$ 代入 $x^2+y^2+z^2=9$, 得 $2x^2+z^2=9$,

取 $x=\frac{3}{\sqrt{2}}\cos t$, 则 $z=3\sin t$, 从而可得该曲线的参数方程

$$\begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{2}} \cos t, \\ y = \frac{3}{\sqrt{2}} \sin t, & (0 \leq t \leq 2\pi) \\ z = 3 \sin t \end{cases}$$

(2) 将 $z=0$ 代入 $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4$, 得 $(x-1)^2 + y^2 = 3$,

取 $x-1 = \sqrt{3} \cos t$, 则 $y = \sqrt{3} \sin t$, 从而可得该曲线的参数方程

$$\begin{cases} x = 1 + \sqrt{3} \cos t, \\ y = \sqrt{3} \sin t, & (0 \leq t \leq 2\pi) \\ z = 0 \end{cases}$$

6. 求螺旋线 $\begin{cases} x = a \cos \theta, \\ y = a \sin \theta, \\ z = b\theta \end{cases}$ 在三个坐标面上的投影曲线的直角坐标方程.

解 由 $x = a \cos \theta, y = a \sin \theta$ 得 $x^2 + y^2 = a^2$, 故该螺旋线在 xOy 面上的投影曲线的直角坐标方程即为 $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ z = 0. \end{cases}$

由 $y = a \sin \theta, z = b\theta$ 得 $y = a \sin \frac{z}{b}$, 故该螺旋线在 yOz 面上的投影曲线的直角坐标方程即为 $\begin{cases} y = a \sin \frac{z}{b}, \\ x = 0. \end{cases}$

由 $x = a \cos \theta, z = b\theta$ 得 $x = a \cos \frac{z}{b}$, 故该螺旋线在 xOz 面上的投影曲线的直角坐标方程即为 $\begin{cases} x = a \cos \frac{z}{b}, \\ y = 0. \end{cases}$

7. 求上半球 $0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 与圆柱体 $x^2 + y^2 \leq ax (a > 0)$ 的公共部分在 xOy 面和 xOz 面上的投影.

解 如图 8-11. 所求立体在 xOy 面上的投影即为 $x^2 + y^2 \leq ax$, 而由

$$\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases}$$

得 $z = \sqrt{a^2 - ax}$. 故所求立体在 xOz 平面上的投影为由 x 轴, z 轴及曲线 $z = \sqrt{a^2 - ax}$ 所围成的区域.

8. 求旋转抛物面 $z = x^2 + y^2 (0 \leq z \leq 4)$ 在三坐标面上的投影.

解 联立 $\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ z=4 \end{cases}$, 得 $x^2+y^2=4$.

故旋转抛物面在 xOy 面上的投影为 $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 4 \\ z=0 \end{cases}$.

如图 8-12, 联立 $\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ z=4 \end{cases}$, 得 $z=y^2$, 故旋转抛物面在 yOz 面上的投影为由 $z=y^2$ 及 $z=4$ 所围成的区域.

同理, 联立 $\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ z=0 \end{cases}$, 得 $z=x^2$.

故旋转抛物面在 xOz 面上的投影为由 $z=x^2$ 及 $z=4$ 所围成的区域.

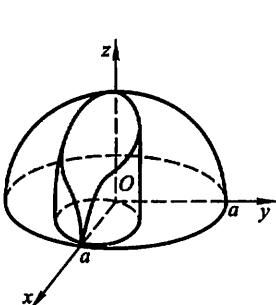


图 8-11

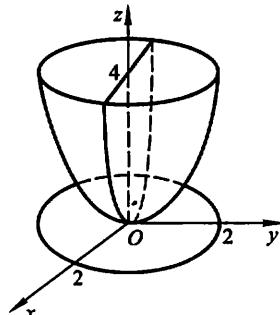


图 8-12

习题 8-5

平面及其方程

- 求过点 $(3, 0, -1)$ 且与平面 $3x - 7y + 5z - 12 = 0$ 平行的平面方程.

解 所求平面与已知平面 $3x - 7y + 5z - 12 = 0$ 平行. 因此所求平面的法向量可取为 $n = (3, -7, 5)$, 设所求平面为

$$3x - 7y + 5z + D = 0.$$

将点 $(3, 0, -1)$ 代入上式得 $D = -4$. 故所求平面方程为

$$3x - 7y + 5z - 4 = 0.$$

- 求过点 $M_0(2, 9, -6)$ 且与连接坐标原点及点 M_0 的线段 OM_0 垂直的平面方程.

解 $\overrightarrow{OM_0} = (2, 9, -6)$. 所求平面与 $\overrightarrow{OM_0}$ 垂直, 可取 $n = \overrightarrow{OM_0}$, 设所求平面方程为

$$2x + 9y - 6z + D = 0.$$

将点 $M_0(2, 9, -6)$ 代入上式, 得 $D = -121$. 故所求平面方程为

$$2x + 9y - 6z - 121 = 0.$$

3. 求过 $(1, 1, -1)$ 、 $(-2, -2, 2)$ 和 $(1, -1, 2)$ 三点的平面方程.

解 由 $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ -2-1 & -2-1 & 2+1 \\ 1-1 & -1-1 & 2+1 \end{vmatrix} = 0$, 得 $x-3y-2z=0$,

即为所求平面方程.

注 设 $M(x, y, z)$ 为平面上任一点, $M_i(x_i, y_i, z_i)$ ($i=1, 2, 3$) 为平面上已知点. 由 $\overrightarrow{M_1M} \cdot (\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}) = 0$, 即

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

它就表示过已知三点 M_i ($i=1, 2, 3$) 的平面方程.

4. 指出下列各平面的特殊位置, 并画出各平面:

- | | |
|-------------------|-----------------------|
| (1) $x=0$; | (2) $3y-1=0$; |
| (3) $2x-3y-6=0$; | (4) $x-\sqrt{3}y=0$; |
| (5) $y+z=1$; | (6) $x-2z=0$; |
| (7) $6x+5y-z=0$. | |

解 (1)–(7) 的平面分别如图 8-13(1)–(7).

(1) $x=0$ 表示 yOz 坐标面.

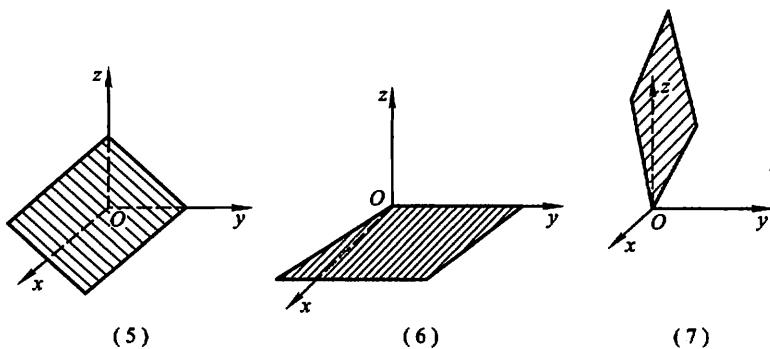
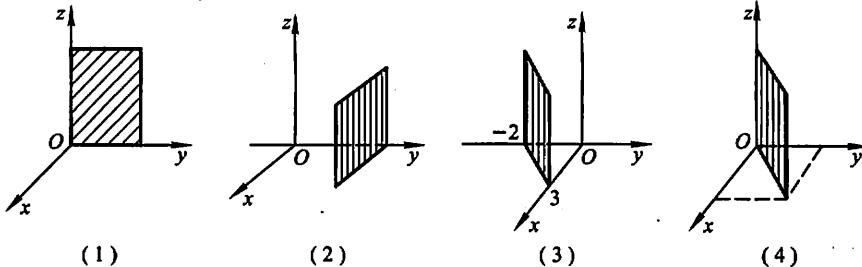


图 8-13

(2) $3y-1=0$ 表示过点 $\left(0, \frac{1}{3}, 0\right)$ 与 y 轴垂直的平面.

(3) $2x-3y-6=0$ 表示与 z 轴平行的平面.

(4) $x-\sqrt{3}y=0$ 表示过 z 轴的平面.

(5) $y+z=1$ 表示平行于 x 轴的平面.

(6) $x-2z=0$ 表示过 y 轴的平面.

(7) $6x+5y-z=0$ 表示过原点的平面.

5. 求平面 $2x-2y+z+5=0$ 与各坐标面的夹角的余弦.

解 平面的法向量为 $n=(2, -2, 1)$. 设平面与三个坐标面 xOy, yOz, zOx 的夹角分别为 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. 则根据平面的方向余弦知

$$\cos \theta_1 = \cos \gamma = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{n}| |\mathbf{k}|} = \frac{(2, -2, 1) \cdot (0, 0, 1)}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} \cdot 1} = \frac{1}{3},$$

$$\cos \theta_2 = \cos \alpha = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}}{|\mathbf{n}| |\mathbf{i}|} = \frac{(2, -2, 1) \cdot (1, 0, 0)}{3 \cdot 1} = \frac{2}{3},$$

$$\cos \theta_3 = \cos \beta = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}}{|\mathbf{n}| |\mathbf{j}|} = \frac{(2, -2, 1) \cdot (0, 1, 0)}{3 \cdot 1} = -\frac{2}{3}.$$

6. 一平面过点 $(1, 0, -1)$ 且平行于向量 $a=(2, 1, 1)$ 和 $b=(1, -1, 0)$, 试求该平面方程.

解 所求平面平行于向量 a 和 b , 可取平面的法向量

$$n=a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1, 1, -3),$$

故所求平面为 $1 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-0) - 3 \cdot (z+1) = 0$,

即 $x+y-3z-4=0$.

7. 求三平面 $x+3y+z=1, 2x-y-z=0, -x+2y+2z=3$ 的交点.

解 联立三平面方程

$$\begin{cases} x+3y+z=1, \\ 2x-y-z=0, \\ -x+2y+2z=3. \end{cases}$$

解此方程组得 $x=1, y=-1, z=3$. 故所求交点为 $(1, -1, 3)$.

8. 分别按下列条件求平面方程:

(1) 平行于 xOz 面且经过点 $(2, -5, 3)$;

(2) 通过 z 轴和点 $(-3, 1, -2)$;

(3) 平行于 x 轴且经过两点 $(4, 0, -2)$ 和 $(5, 1, 7)$.

解 (1) 所求平面平行于 xOz 面, 故设所求平面方程为 $By+D=0$. 将点 $(2, -5, 3)$ 代入, 得

$$-5B+D=0, \text{ 即 } D=5B.$$

因此, 所求平面方程为

$$By+5B=0, \text{ 即 } y+5=0.$$

(2) 所求平面过 z 轴. 故设所求平面方程为 $Ax+By=0$. 将点 $(-3, 1, -2)$ 代入, 得

$$-3A+B=0, \text{ 即 } B=3A.$$

因此, 所求平面方程为

$$Ax+3Ay=0, \text{ 即 } x+3y=0.$$

(3) 所求平面平行于 x 轴, 故设所求平面方程为 $By+Cz+D=0$. 将点 $(4, 0, -2)$ 及 $(5, 1, 7)$ 代入方程得

$$-2C+D=0 \quad \text{及} \quad B+7C+D=0.$$

从而解得

$$C=\frac{D}{2}, B=-\frac{9}{2}D.$$

因此, 所求平面方程为

$$-\frac{9}{2}Dy+\frac{D}{2}z+D=0,$$

即

$$9y-z-2=0.$$

9. 求点 $(1, 2, 1)$ 到平面 $x+2y+2z-10=0$ 的距离.

解 利用点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离公式

$$\begin{aligned} d &= \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ &= \frac{|1+2\cdot 2+2\cdot 1-10|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{|-3|}{3} = 1. \end{aligned}$$

习题 8-6

空间直线及其方程

1. 求过点 $(4, -1, 3)$ 且平行于直线 $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{5}$ 的直线方程.

解 所求直线与已知直线平行, 故所求直线的方向向量 $s=(2, 1, 5)$, 直线方程即为

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{5}.$$

2. 求过两点 $M_1(3, -2, 1)$ 和 $M_2(-1, 0, 2)$ 的直线方程.

解 取所求直线的方向向量

$$s=\overrightarrow{M_1M_2}=(-1-3, 0-(-2), 2-1)=(-4, 2, 1),$$

因此所求直线方程为

$$\frac{x-3}{-4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}.$$

3. 用对称式方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases} x-y+z=1, \\ 2x+y+z=4. \end{cases}$$

解 根据题意可知已知直线的方向向量

$$s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2, 1, 3).$$

取 $x=0$, 代入直线方程得 $\begin{cases} -y+z=1, \\ y+z=4. \end{cases}$, 解得 $y=\frac{3}{2}, z=\frac{5}{2}$. 这样就得到直线

经过的一点 $(0, \frac{3}{2}, \frac{5}{2})$. 因此直线的对称式方程为

$$\frac{x-0}{-2} = \frac{y-\frac{3}{2}}{1} = \frac{z-\frac{5}{2}}{3}.$$

参数方程为

$$\begin{cases} x=-2t, \\ y=\frac{3}{2}+t, \\ z=\frac{5}{2}+3t. \end{cases}$$

注 由于所取的直线上的点可以不同, 因此所得到的直线对称式或参数方程的表达式也可以是不同的.

4. 求过点 $(2, 0, -3)$ 且与直线

$$\begin{cases} x-2y+4z-7=0, \\ 3x+5y-2z+1=0 \end{cases}$$

垂直的平面方程.

解 根据题意, 所求平面的法向量可取已知直线的方向向量, 即

$$n=s=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}=(-16, 14, 11),$$

故所求平面方程为 $-16(x-2)+14(y-0)+11(z+3)=0$.

即 $16x-14y-11z-65=0$.

5. 求直线 $\begin{cases} 5x-3y+3z-9=0, \\ 3x-2y+z-1=0 \end{cases}$ 与直线 $\begin{cases} 2x+2y-z+23=0, \\ 3x+8y+z-18=0 \end{cases}$ 的夹角的

余弦.

解 两已知直线的方向向量分别为

$$\mathbf{s}_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (3, 4, -1), \mathbf{s}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = (10, -5, 10),$$

因此, 两直线的夹角的余弦

$$\cos \theta = \cos(\hat{\mathbf{s}_1}, \hat{\mathbf{s}_2}) = \frac{\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2}{|\mathbf{s}_1| |\mathbf{s}_2|}$$
$$= \frac{3 \times 10 - 4 \times 5 - 1 \times 10}{\sqrt{3^2 + 4^2 + (-1)^2} \sqrt{10^2 + (-5)^2 + 10^2}} = 0.$$

6. 证明直线 $\begin{cases} x+2y-z=7, \\ -2x+y+z=7 \end{cases}$ 与直线 $\begin{cases} 3x+6y-3z=8, \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$ 平行.

证明 已知直线的方向向量分别是

$$\mathbf{s}_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3, 1, 5), \mathbf{s}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-9, -3, -15),$$

由 $\mathbf{s}_2 = -3\mathbf{s}_1$ 知两直线互相平行.

7. 求过点 $(0, 2, 4)$ 且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 平行的直线方程.

解 所求直线与已知的两个平面平行. 因此所求直线的方向向量可取

$$\mathbf{s} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-2, 3, 1),$$

故所求直线方程为

$$\frac{x-0}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{1}.$$

注 本题也可以这样解: 由于所求直线与已知的两个平面平行, 则可视所求直线是分别与已知平面平行的两平面的交线. 不妨设所求直线为

$$\begin{cases} x+2z=a, \\ y-3z=b. \end{cases}$$

将点 $(0, 2, 4)$ 代入上式, 得 $a=8, b=-10$. 故所求直线为

$$\begin{cases} x+2z=8, \\ y-3z=-10. \end{cases}$$

8. 求过点 $(3, 1, -2)$ 且通过直线 $\frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$ 的平面方程.

解 利用平面束方程, 过直线 $\frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$ 的平面束方程为

$$\frac{x-4}{5} - \frac{y+3}{2} + \lambda \left(\frac{y+3}{2} - z \right) = 0,$$

将点 $(3, 1, -2)$ 代入上式得 $\lambda = \frac{11}{20}$.

因此所求平面方程为 $\frac{x-4}{5} - \frac{y+3}{2} + \frac{11}{20} \left(\frac{y+3}{2} - z \right) = 0$,

即

$$8x - 9y - 22z - 59 = 0.$$

9. 求直线 $\begin{cases} x+y+3z=0, \\ x-y-z=0 \end{cases}$ 与平面 $x-y-z+1=0$ 的夹角.

解 已知直线的方向向量 $s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (2, 4, -2)$,

平面的法向量 $n = (1, -1, -1)$.

设直线与平面的夹角为 φ , 则

$$\sin \varphi = |\cos(\hat{n}, s)| = \frac{|s \cdot n|}{|s| |n|} = \frac{|2 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-1)|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = 0,$$

即 $\varphi = 0$.

10. 试确定下列各组中的直线和平面间的关系:

$$(1) \frac{x+3}{-2} = \frac{y+4}{-7} = \frac{z}{3} \text{ 和 } 4x - 2y - 2z = 3;$$

$$(2) \frac{x}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{7} \text{ 和 } 3x - 2y + 7z = 8;$$

$$(3) \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-4} \text{ 和 } x + y + z = 3.$$

解 设直线的方向向量为 s , 平面的法向量为 n , 直线与平面的夹角为 φ , 且

$$\sin \varphi = |\cos(\hat{n}, s)| = \frac{|s \cdot n|}{|s| |n|}.$$

$$(1) s = (-2, -7, 3), n = (4, -2, -2),$$

$$\sin \varphi = \frac{|(-2) \cdot 4 + (-7) \cdot (-2) + 3 \cdot (-2)|}{\sqrt{(-2)^2 + (-7)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = 0,$$

即 $\varphi = 0$. 故直线平行于平面或在平面上, 现将直线上的点 $A(-3, -4, 0)$ 代入平面方程, 方程不成立. 故点 A 不在平面上, 因此直线不在平面上, 直线与平面平行.

$$(2) s = (3, -2, 7), n = (3, -2, 7), \text{ 由于 } s = n \text{ 或}$$

$$\sin \varphi = \frac{|3 \cdot 3 + (-2) \cdot (-2) + 7 \cdot 7|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 7^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 7^2}} = 1,$$

知 $\varphi = \frac{\pi}{2}$, 故直线与平面垂直.

(3) $s = (3, 1, -4)$, $n = (1, 1, 1)$, 由于 $s \cdot n = 0$ 或

$$\sin \varphi = \frac{|3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-4) \cdot 1|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = 0,$$

知 $\varphi = 0$, 将直线上的点 $A(2, -2, 3)$ 代入平面方程. 方程成立. 即点 A 在平面上.
故直线在平面上.

11. 求过点 $(1, 2, 1)$ 而与两直线

$$\begin{cases} x+2y-z+1=0, \\ x-y+z-1=0 \end{cases} \text{ 和 } \begin{cases} 2x-y+z=0, \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

平行的平面的方程.

解 两直线的方向向量为

$$s_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -2, -3), s_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -1, -1),$$

$$\text{取 } n = s_1 \times s_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 1, -1),$$

则过点 $(1, 2, 1)$, 以 n 为法向量的平面方程为

$$-1 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-2) - 1 \cdot (z-1) = 0,$$

即

$$x-y+z=0.$$

12. 求点 $(-1, 2, 0)$ 在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影.

解 作过已知点且与已知平面垂直的直线. 该直线与平面的交点即为所求.

根据题意, 过点 $(-1, 2, 0)$ 与平面 $x+2y-z+1=0$ 垂直的直线为

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-0}{-1},$$

将它化为参数方程 $x = -1+t$, $y = 2+2t$, $z = -t$, 代入平面方程得

$$-1+t+2(2+2t)-(-t)+1=0,$$

整理得 $t = -\frac{2}{3}$. 从而所求点 $(-1, 2, 0)$ 在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影

为 $(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

13. 求点 $P(3, -1, 2)$ 到直线 $\begin{cases} x+y-z+1=0, \\ 2x-y+z-4=0 \end{cases}$ 的距离.

$$\text{解 直线的方向向量 } s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -3, -3).$$

在直线上取点 $(1, -2, 0)$, 这样, 直线的方程可表示成参数方程形式

$$x=1, y=-2-3t, z=-3t. \quad (1)$$

又, 过点 $P(3, -1, 2)$, 以 $s=(0, -3, -3)$ 为法向量的平面方程为

$$-3(y+1)-3(z-2)=0,$$

即

$$y+z-1=0. \quad (2)$$

将式(1)代入式(2)得 $t=-\frac{1}{2}$, 于是直线与平面的交点为 $\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, 故

$$d=\sqrt{(3-1)^2+\left(-1+\frac{1}{2}\right)^2+\left(2-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

14. 设 M_0 是直线 l 外一点, M 是直线 l 上任意一点, 且直线的方向向量为 s , 试证: 点 M_0 到直线 l 的距离

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M} \times s|}{|s|}.$$

证 如图 8-14, 点 M_0 到直线 l 的距离为 d . 由向量积的几何意义知 $|\overrightarrow{M_0M} \times s|$ 表示以 $\overrightarrow{M_0M}, s$ 为邻边的平行四边形的面积. 而 $\frac{|\overrightarrow{M_0M} \times s|}{|s|}$ 表示以 $|s|$ 为边长的该平行四边形的高. 即为点 M_0 到直线 l 的距离. 于是

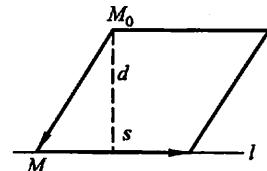


图 8-14

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M} \times s|}{|s|}.$$

15. 求直线 $\begin{cases} 2x-4y+z=0, \\ 3x-y-2z-9=0 \end{cases}$ 在平面 $4x-y+z=1$ 上的投影直线的方程.

解 作过已知直线的平面束, 在该平面束中找出与已知平面垂直的平面, 该平面与已知平面的交线即为所求.

设过直线 $\begin{cases} 2x-4y+z=0, \\ 3x-y-2z-9=0 \end{cases}$ 的平面束方程为

$$2x-4y+z+\lambda(3x-y-2z-9)=0,$$

经整理得 $(2+3\lambda)x+(-4-\lambda)y+(1-2\lambda)z-9\lambda=0$.

由 $(2+3\lambda) \cdot 4 + (-4-\lambda) \cdot (-1) + (1-2\lambda) \cdot 1 = 0$,

得 $\lambda=-\frac{13}{11}$. 代入平面束方程, 得

$$17x+31y-37z-117=0.$$

因此所求投影直线的方程为

$$\begin{cases} 17x+31y-37z-117=0, \\ 4x-y+z=1. \end{cases}$$

16. 画出下列各曲面所围成的立体的图形:

- (1) $x=0, y=0, z=0, x=2, y=1, 3x+4y+2z-12=0;$
 (2) $x=0, z=0, x=1, y=2, z=\frac{y}{4};$
 (3) $z=0, z=3, x-y=0, x-\sqrt{3}y=0, x^2+y^2=1$ (在第一卦限内);
 (4) $x=0, y=0, z=0, x^2+y^2=R^2, y^2+z^2=R^2$ (在第一卦限内).

解 (1) 如图 8-15(1); (2) 如图 8-15(2);
 (3) 如图 8-15(3); (4) 如图 8-15(4).

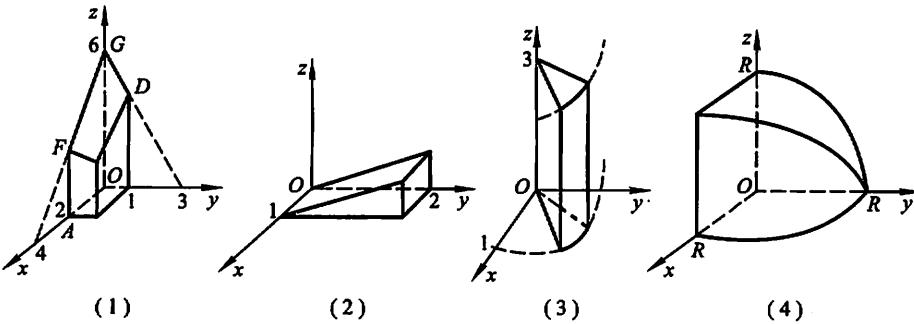


图 8-15

总习题八

1. 填空

- (1) 设在坐标系 $[O; i, j, k]$ 中点 A 和点 M 的坐标依次为 (x_0, y_0, z_0) 和 (x, y, z) , 则在 $[A; i, j, k]$ 坐标系中, 点 M 的坐标为 _____, 向量 \overrightarrow{OM} 的坐标为 _____.
- (2) 设数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 不全为 0, 使 $\lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c} = \mathbf{0}$, 则 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 三个向量是 _____ 的.
- (3) 设 $\mathbf{a} = (2, 1, 2), \mathbf{b} = (4, -1, 10), \mathbf{c} = \mathbf{b} - \lambda \mathbf{a}$, 且 $\mathbf{a} \perp \mathbf{c}$, 则 $\lambda =$ _____.
- (4) 设 $|\mathbf{a}| = 3, |\mathbf{b}| = 4, |\mathbf{c}| = 5$, 且满足 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, 则 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}| =$ _____.

解 (1) 点 M 的坐标为 $(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$, 向量 \overrightarrow{OM} 的坐标为 $(x-x_0+y_0, y-y_0+z_0, z-z_0)$ = (x, y, z) .

(2) 由 $[(\lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c}) \times \mathbf{b}] \cdot \mathbf{c} = 0$ 得 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$. 即 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ 共面.

(3) $\mathbf{c} = \mathbf{b} - \lambda \mathbf{a} = (4, -1, 10) - \lambda(2, 1, 2) = (4-2\lambda, -1-\lambda, 10-2\lambda)$.

$\mathbf{a} \perp \mathbf{c}$, 故 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = (2, 1, 2) \cdot (4-2\lambda, -1-\lambda, 10-2\lambda) = 27-9\lambda = 0$, 从而 $\lambda = 3$.

(4) 由 $(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ 知 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$, 即 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$;

由 $(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ 知 $\mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$, 即 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$.

又,由 $|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2=|\mathbf{c}|^2$ 知以向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为边的三角形为直角三角形,且 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.故

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}| &= 3|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 3|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) \\ &= 3 \times 3 \times 4 \times 1 = 36. \end{aligned}$$

2. 在 y 轴上求与点 $A(1, -3, 7)$ 和点 $B(5, 7, -5)$ 等距离的点.

解 根据题意,设所求点为 $M(0, y, 0)$,由

$$1^2+(y+3)^2+7^2=5^2+(y-7)^2+(-5)^2$$

得 $y=2$.故所求点为 $M(0, 2, 0)$.

3. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点为 $A(3, 2, -1)$ 、 $B(5, -4, 7)$ 和 $C(-1, 1, 2)$,求从顶点 C 所引中线的长度.

解 设 AB 中点的坐标为 (x_0, y_0, z_0) ,由

$$x_0 = \frac{3+5}{2} = 4, y_0 = \frac{-4-2}{2} = -1, z_0 = \frac{7-1}{2} = 3,$$

从而顶点 C 所引中线的长度

$$d = \sqrt{(4+1)^2 + (-1-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{30}.$$

4. 设 $\triangle ABC$ 的三边 $\overrightarrow{BC}=a$, $\overrightarrow{CA}=b$, $\overrightarrow{AB}=c$,三边中点依次为 D 、 E 、 F ,试用向量 a 、 b 、 c 表示 \overrightarrow{AD} 、 \overrightarrow{BE} 、 \overrightarrow{CF} ,并证明

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 0.$$

证明 如图8-16, D 、 E 、 F 分别为 BC 、 CA 、 AB 的中点,因此

$$\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{a}{2}, \overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \frac{b}{2}, \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{c}{2},$$

从而 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = c + \frac{a}{2},$

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = a + \frac{b}{2},$$

$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF} = b + \frac{c}{2},$$

$$\text{故 } \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = c + \frac{a}{2} + a + \frac{b}{2} + b + \frac{c}{2} = \frac{3}{2}(a+b+c) = 0.$$

5. 试用向量证明三角形两边中点的连线平行于第三边,且其长度等于第三边长度的一半.

证明 如图8-17, D 、 E 分别是 CA 与 BC 的中点.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = 2(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE}) = 2\overrightarrow{DE}.$$

知 $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DE}$ 且 $|\overrightarrow{DE}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$.

即三角形两边中点的连线平行于第三边,且长度等于第三边长度的一半.

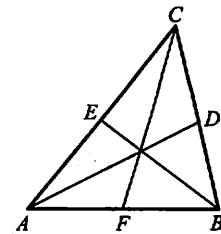


图 8-16

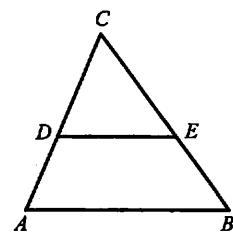


图 8-17

6. 设 $|a+b|=|a-b|$, $a=(3, -5, 8)$, $b=(-1, 1, z)$, 求 z .

解 $a+b=(3-1, -5+1, 8+z)=(2, -4, 8+z)$,

$$a-b=(3-(-1), -5-1, 8-z)=(4, -6, 8-z),$$

由 $|a+b|=|a-b|$ 知

$$\sqrt{2^2+(-4)^2+(8+z)^2}=\sqrt{4^2+(-6)^2+(8-z)^2},$$

经整理得 $z=1$.

7. 设 $|a|=\sqrt{3}$, $|b|=1$, $\hat{(a, b)}=\frac{\pi}{6}$, 求向量 $a+b$ 与 $a-b$ 的夹角.

解 $|a+b|^2=(a+b) \cdot (a+b)=|a|^2+|b|^2+2|a||b|\cos(\hat{a, b})$

$$=(\sqrt{3})^2+1^2+2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{6}$$

$$=4+2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}=7,$$

$$|a-b|^2=(a-b) \cdot (a-b)=|a|^2+|b|^2-2|a||b|\cos(\hat{a, b})$$

$$=(\sqrt{3})^2+1^2-2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{6}$$

$$=4-2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}=1,$$

$$(a+b) \cdot (a-b)=|a|^2-|b|^2=3-1=2,$$

故 $\cos(\hat{a+b, a-b})=\frac{(a+b) \cdot (a-b)}{|a+b||a-b|}=\frac{2}{\sqrt{7} \cdot 1}=\frac{2}{\sqrt{7}},$

所以 $\hat{(a+b, a-b)}=\arccos \frac{2}{\sqrt{7}}$.

8. 设 $a+3b \perp 7a-5b$, $a-4b \perp 7a-2b$, 求 $\hat{(a, b)}$.

解 由 $a+3b \perp 7a-5b$ 知 $(a+3b) \cdot (7a-5b)=0$,

由 $a-4b \perp 7a-2b$ 知 $(a-4b) \cdot (7a-2b)=0$,

故 $7|a|^2+16a \cdot b-15|b|^2=0$, (1)

$$7|a|^2-30a \cdot b+8|b|^2=0$$
. (2)

两式相减得 $46a \cdot b-23|b|^2$, 即 $a \cdot b=\frac{1}{2}|b|^2$, 代入(1)式得

$$|a|=|b|,$$

从而 $\cos(\hat{a, b})=\frac{a \cdot b}{|a||b|}=\frac{a \cdot b}{|b|^2}=\frac{1}{2}$,

所以 $\hat{(a, b)}=\frac{\pi}{3}$.

9. 设 $\mathbf{a} = (2, -1, -2)$, $\mathbf{b} = (1, 1, z)$, 问 z 为何值时 $\hat{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}$ 最小? 并求出此最小值.

$$\begin{aligned}\text{解 } \cos(\hat{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}) &= \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{(2, -1, -2) \cdot (1, 1, z)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + z^2}} \\ &= \frac{1 - 2z}{3\sqrt{2+z^2}}.\end{aligned}$$

设 $f(z) = \frac{1 - 2z}{3\sqrt{2+z^2}}$, 则

$$\begin{aligned}f'(z) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{-2\sqrt{2+z^2} - (1-2z)\frac{z}{\sqrt{2+z^2}}}{2+z^2} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{-4-z}{(2+z^2)^{3/2}},\end{aligned}$$

令 $f'(z) = 0$ 得 $z = -4$.

由于 $0 \leq \hat{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle} \leq \frac{\pi}{2}$ 时, $\cos(\hat{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle})$ 为单调减少函数. $f(z)$ 取得最大值时, $\theta = \hat{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}$ 达到最小值.

经验证 $z = -4$ 时, $f(z)$ 达到最大值, 此时 $\theta = \hat{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}$ 达到最小值且由 $\cos(\hat{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle})|_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 知 $\theta_{\min} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

10. 设 $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 3$, $\hat{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle} = \frac{\pi}{6}$, 求以 $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$ 为边的平行四边形的面积.

解 根据向量积的几何意义知以 $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$ 为边的平行四边形的面积

$$\begin{aligned}S &= |(\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - 3\mathbf{b})| \\ &= 5|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 5|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\hat{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}) \\ &= 5 \times 4 \times 3 \times \sin \frac{\pi}{6} = 5 \times 4 \times 3 \times \frac{1}{2} = 30.\end{aligned}$$

11. 设 $\mathbf{a} = (2, -3, 1)$, $\mathbf{b} = (1, -2, 3)$, $\mathbf{c} = (2, 1, 2)$, 向量 \mathbf{r} 满足 $\mathbf{r} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{r} \perp \mathbf{b}$, $\text{Pr}_{\mathbf{c}} \mathbf{r} = 14$, 求 \mathbf{r} .

解 设向量 $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

$$\text{由 } \mathbf{r} \perp \mathbf{a} \text{ 知 } \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = 0, \text{ 即 } 2x - 3y + z = 0.$$

$$\text{由 } \mathbf{r} \perp \mathbf{b} \text{ 知 } \mathbf{r} \cdot \mathbf{b} = 0, \text{ 即 } x - 2y + 3z = 0.$$

$$\text{由 } \text{Pr}_{\mathbf{c}} \mathbf{r} = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{c}|} = 14 \text{ 知 } 2x + y + 2z = 14|\mathbf{c}| = 14 \times 3 = 42,$$

联立上述三个方程得 $x=14, y=10, z=2$. 故 $r=(14, 10, 2)$.

12. 设 $a=(-1, 3, 2), b=(2, -3, -4), c=(-3, 12, 6)$, 证明三向量 a, b, c 共面, 并用 a 和 b 表示 c .

证明 由 $(a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = 0$ 知 $[a \ b \ c] = 0$, 故三个向量 a, b, c 共面.

设 $c=\lambda a+\mu b$, 则

$$\begin{aligned} (-3, 12, 6) &= \lambda(-1, 3, 2) + \mu(2, -3, -4) \\ &= (-\lambda+2\mu, 3\lambda-3\mu, 2\lambda-4\mu), \end{aligned}$$

即

$$\begin{cases} -\lambda+2\mu=-3, \\ 3\lambda-3\mu=12, \\ 2\lambda-4\mu=6, \end{cases}$$

解得 $\lambda=5, \mu=1$. 故

$$c=5a+b.$$

13. 已知动点 $M(x, y, z)$ 到 xOy 平面的距离与点 M 到点 $(1, -1, 2)$ 的距离相等, 求点 M 的轨迹的方程.

解 根据题意知

$$|z| = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2},$$

即 $(x-1)^2 + (y+1)^2 - 4(z-1) = 0$ 为点 M 的轨迹的方程.

14. 指出下列旋转曲面的一条母线和旋转轴:

$$(1) z=2(x^2+y^2);$$

$$(2) \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1;$$

$$(3) z^2=3(x^2+y^2);$$

$$(4) x^2 - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 1.$$

解 (1) 母线为 $\begin{cases} x=0, \\ z=2y^2, \end{cases}$ 旋转轴为 z 轴.

(2) 母线为 $\begin{cases} x=0, \\ \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1, \end{cases}$ 旋转轴为 y 轴.

(3) 母线为 $\begin{cases} x=0, \\ z=\sqrt{3}y, \end{cases}$ 旋转轴为 z 轴.

(4) 母线为 $\begin{cases} z=0, \\ x-\frac{y^2}{4}=1, \end{cases}$ 旋转轴为 x 轴.

15. 求通过点 $A(3, 0, 0)$ 和 $B(0, 0, 1)$ 且与 xOy 面成 $\frac{\pi}{3}$ 角的平面的方程.

解 设所求平面方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

平面过点 $A(3, 0, 0), B(0, 0, 1)$, 故 $a=3, c=1$. 这样平面方程为

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{b} + z = 1.$$

它与 xOy 面成 $\frac{\pi}{3}$ 角. 故

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{b}, 1\right) \cdot (0, 0, 1)}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + 1^2} \cdot 1},$$

即

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + 1 = 4, \frac{1}{b} = \pm \frac{\sqrt{26}}{3},$$

故所求平面为 $x + \sqrt{26}y + 3z = 3$ 或 $x - \sqrt{26}y + 3z = 3$.

16. 设一平面垂直于平面 $z=0$, 并通过从点 $(1, -1, 1)$ 到直线 $\begin{cases} y-z+1=0, \\ x=0 \end{cases}$ 的垂线, 求此平面的方程.

解 直线 $\begin{cases} y-z+1=0, \\ x=0 \end{cases}$ 的方向向量

$$s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, -1, -1).$$

作过点 $(1, -1, 1)$ 且以 $s=(0, -1, -1)$ 为法向量的平面:

$$-1 \cdot (y+1) - (z-1) = 0, \text{ 即 } y+z=0,$$

联立 $\begin{cases} y-z+1=0, \\ x=0, \\ y+z=0 \end{cases}$ 得垂足 $\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

所求平面垂直于平面 $z=0$. 设平面方程 $Ax+By+D=0$. 平面过点 $(1, -1, 1)$ 及垂足 $\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 故有

$$\begin{cases} A-B+D=0, \\ -\frac{1}{2}B+D=0, \end{cases}$$

由此解得 $B=2D, A=D$. 因此所求平面方程为 $Dx+2Dy+D=0$, 即

$$x+2y+1=0.$$

17. 求过点 $(-1, 0, 4)$, 且平行于平面 $3x-4y+z-10=0$, 又与直线 $\frac{x+1}{1} =$

$\frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$ 相交的直线的方程.

解 设所求直线方程

$$\frac{x+1}{m} = \frac{y-0}{n} = \frac{z-4}{p}.$$

所求直线平行于平面 $3x-4y+z-10=0$, 故有

$$3m-4n+p=0, \quad (1)$$

又所求直线与直线 $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$ 相交, 故有

$$\begin{vmatrix} -1-(-1) & 3-0 & 0-4 \\ 1 & 1 & 2 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$10m-4n-3p=0. \quad (2)$$

联立(1)、(2)式可得

$$\frac{16}{m} = \frac{19}{n} = \frac{28}{p}.$$

因此所求直线方程为

$$\frac{x+1}{16} = \frac{y}{19} = \frac{z-4}{28}.$$

注 若两直线 $l_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$, $l_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$ 相交,

则 l_1 与 l_2 必共面, 故

$$\overrightarrow{M_1M_2} \cdot (\overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2}) = 0,$$

即有

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

18. 已知点 $A(1, 0, 0)$ 及点 $B(0, 2, 1)$, 试在 z 轴上求一点 C , 使 $\triangle ABC$ 的面积最小.

解 所求点位于 z 轴, 设其坐标为 $C(0, 0, z)$, 由向量的几何意义知

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|,$$

$$\text{而 } \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0-1 & 2-0 & 1-0 \\ 0-1 & 0-0 & z-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & z \end{vmatrix} \\ = 2zi + (z-1)j + 2k,$$

$$\text{故 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{(2z)^2 + (z-1)^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \sqrt{5z^2 - 2z + 5}.$$

设 $f(z) = 5z^2 - 2z + 5$, 则由 $f'(z) = 10z - 2 = 0$ 得 $z = \frac{1}{5}$. 因 $f''(\frac{1}{5}) = 10 > 0$, 故当 $z = \frac{1}{5}$ 时, $\triangle ABC$ 的面积取得极小值, 由于驻点唯一, 故当 $z = \frac{1}{5}$, 即 C 的

坐标为 $(0, 0, \frac{1}{5})$ 时, $S_{\triangle ABC}$ 为最小.

19. 求曲线 $\begin{cases} z=2-x^2-y^2, \\ z=(x-1)^2+(y-1)^2 \end{cases}$ 在三个坐标面上的投影曲线的方程.

解 在 $\begin{cases} z=2-x^2-y^2, \\ z=(x-1)^2+(y-1)^2 \end{cases}$ 中消去 z , 得 $2-x^2-y^2=(x-1)^2+(y-1)^2$, 即 $x^2+y^2-x-y=0$. 故 $\begin{cases} x^2+y^2-x-y=0, \\ z=0 \end{cases}$ 为曲线在 xOy 面上的投影曲线方程.

在 $\begin{cases} z=2-x^2-y^2, \\ z=(x-1)^2+(y-1)^2 \end{cases}$ 中消去 y , 得 $z=(x-1)^2+(\pm\sqrt{2-x^2-z^2}-1)^2$, 即 $2x^2+2xz+z^2-4x-3z+2=0$, 故 $\begin{cases} 2x^2+2xz+z^2-4x-3z+2=0, \\ y=0 \end{cases}$ 为曲线在 xOz 面上的投影曲线方程.

同理, 可得 $\begin{cases} 2y^2+2yz+z^2-4y-3z+2=0, \\ x=0. \end{cases}$ 它就是曲线在 yOz 面上的投影曲线方程.

20. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与柱面 $z^2=2x$ 所围立体在三个坐标面上的投影.

解 在 $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2}, \\ z^2=2x \end{cases}$ 中消去 z , 得 $2x=x^2+y^2$, 即 $(x-1)^2+y^2=1$, 故立体在 xOy 面上的投影为 $\begin{cases} (x-1)^2+y^2\leqslant 1, \\ z=0. \end{cases}$

而该立体在 xOz 平面上的投影为 $\begin{cases} x\leqslant z\leqslant\sqrt{2x}, \\ y=0 \end{cases}$, (如图 8-18), 在 yOz 平面上的投影

为 $\begin{cases} \left(\frac{z^2}{2}-1\right)^2+y^2\leqslant 1, z\geqslant 0, \\ x=0. \end{cases}$

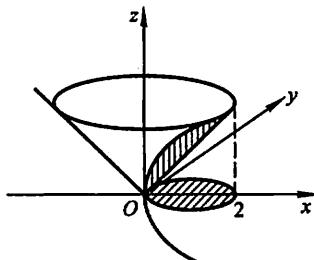


图 8-18

21. 画出下列各曲面所围立体的图形:

(1) 抛物柱面 $2y^2=x$, 平面 $z=0$ 及 $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$;

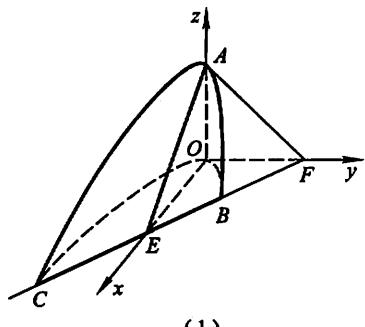
(2) 抛物柱面 $x^2=1-z$, 平面 $y=0, z=0$ 及 $x+y=1$;

(3) 圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及旋转抛物面 $z=2-x^2-y^2$;

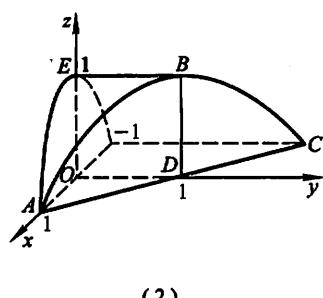
(4) 旋转抛物面 $x^2+y^2=z$, 柱面 $y^2=x$, 平面 $z=0$ 及 $x=1$.

解 (1) 如图 8-19(1); (2) 如图 8-19(2);

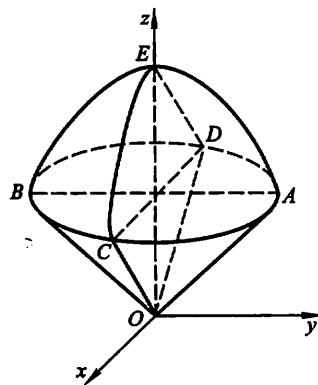
(3) 如图 8-19(3); (4) 如图 8-19(4).



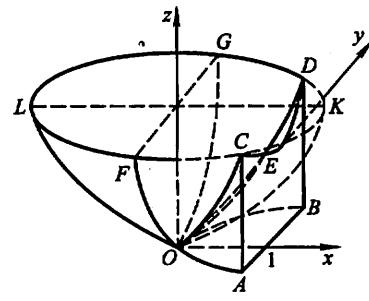
(1)



(2)



(3)



(4)

图 8-19

注 在建立了空间直角坐标系后, 可按下列方法作图:

- 1° 先作出立体的各表面(曲面), 及它们与各坐标面的交线;
- 2° 再作各曲面的交线.

第九章 多元函数微分法及其应用

习题 9-1

多元函数的基本概念

1. 判定下列平面点集中哪些是开集、闭集、区域、有界集、无界集？并分别指出它们的聚点所成的点集（称为导集）和边界。

(1) $\{(x, y) | x \neq 0, y \neq 0\}$; (2) $\{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$;

(3) $\{(x, y) | y > x^2\}$;

(4) $\{(x, y) | x^2 + (y-1)^2 \geq 1\} \cap \{(x, y) | x^2 + (y-2)^2 \leq 4\}$.

解 (1) 集合是开集，无界集；导集为 \mathbb{R}^2 ，边界为 $\{(x, y) | x = 0 \text{ 或 } y = 0\}$.

(2) 集合既非开集，又非闭集，是有界集；导集为 $\{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ ，
边界为 $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) | x^2 + y^2 = 4\}$.

(3) 集合是开集，区域，无界集；导集为 $\{(x, y) | y \geq x^2\}$ ，边界为 $\{(x, y) | y = x^2\}$.

(4) 集合是闭集，有界集；导集为集合本身，边界为 $\{(x, y) | x^2 + (y-1)^2 = 1\} \cup \{(x, y) | x^2 + (y-2)^2 = 4\}$.

2. 已知函数 $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy \tan \frac{x}{y}$ ，试求 $f(tx, ty)$.

解 $f(tx, ty) = (tx)^2 + (ty)^2 - (tx)(ty) \tan \frac{tx}{ty}$
 $= t^2 \left(x^2 + y^2 - xy \tan \frac{x}{y} \right)$
 $= t^2 f(x, y).$

3. 试证函数 $F(x, y) = \ln x \cdot \ln y$ 满足关系式

$$F(xy, uv) = F(x, u) + F(x, v) + F(y, u) + F(y, v).$$

证 $F(xy, uv) = \ln(xy) \cdot \ln(uv) = (\ln x + \ln y)(\ln u + \ln v)$
 $= \ln x \cdot \ln u + \ln x \cdot \ln v + \ln y \cdot \ln u + \ln y \cdot \ln v$
 $= F(x, u) + F(x, v) + F(y, u) + F(y, v).$

4. 已知函数 $f(u, v, w) = u^w + w^{u-v}$ ，试求 $f(x+y, x-y, xy)$.

解 $f(x+y, x-y, xy) = (x+y)^{xy} + (xy)^{(x+y)+(x-y)} = (x+y)^{xy} + (xy)^{2x}.$

5. 求下列各函数的定义域:

$$(1) z = \ln(y^2 - 2x + 1);$$

$$(2) z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x-y}};$$

$$(3) z = \sqrt{x - \sqrt{y}};$$

$$(4) z = \ln(y-x) + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}};$$

$$(5) u = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - r^2}} (R > r > 0);$$

$$(6) u = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

解 (1) $\{(x, y) | y^2 - 2x + 1 > 0\}$.

(2) $\{(x, y) | x+y > 0, x-y > 0\}$.

(3) $\{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x^2 \geq y\}$.

(4) $\{(x, y) | y-x > 0, x \geq 0, x^2 + y^2 < 1\}$.

(5) $\{(x, y, z) | r^2 < x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$.

(6) $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 - z^2 \geq 0, x^2 + y^2 \neq 0\}$.

注 本题是求多元函数的定义域,与求一元函数的定义域相类似,先写出构成该函数的各个简单函数的定义域,再求出表示这些定义域的集合的交集,即得所求定义域.

6. 求下列各极限:

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{1-xy}{x^2 + y^2};$$

$$(2) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$(3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy};$$

$$(4) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{2-e^{xy}}-1};$$

$$(5) \lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{\tan(xy)}{y};$$

$$(6) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2+y^2}}.$$

解 (1) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{1-xy}{x^2 + y^2} = \frac{1-0}{0+1} = 1.$

注 本题利用多元初等函数的连续性求极限,即极限值等于函数值.对于多元初等函数在点 P_0 处的极限,若 P_0 在该函数的定义区域内,均可利用此方法求极限.

$$(2) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1+0}} = \ln 2.$$

$$(3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4-(xy+4)}{xy(2+\sqrt{xy+4})}$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-1}{2+\sqrt{xy+4}} = -\frac{1}{4}.$$

注 本题分母的极限为零,不能运用商的极限运算法则,而采用通过分母或分子有理化等方法,消去分母中趋于零的因子,再运用极限运算法则,这是求极限的基本方法之一.

$$(4) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{2-e^{xy}} - 1} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{1-e^{xy}} \cdot (\sqrt{2-e^{xy}} + 1) = -1 \cdot 2 = -2.$$

注 本题利用 $e^{xy} - 1 \sim xy$ ($(x,y) \rightarrow (0,0)$), 相当于令 $u = xy$, 当 $(x,y) \rightarrow (0,0)$ 且 $xy \neq 0$ 时, 有 $u \rightarrow 0$ 且 $u \neq 0$, 于是

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{1-e^{xy}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{1-u} = -1.$$

$$(5) \lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{\tan(xy)}{y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{\tan(xy)}{xy} \cdot x = 1 \cdot 2 = 2.$$

注 本题利用 $\tan(xy) \sim xy$ ($(x,y) \rightarrow (2,0)$).

$$(6) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{e^{x^2+y^2}} \\ = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.$$

注 本题利用 $1-\cos(x^2+y^2) \sim \frac{1}{2}(x^2+y^2)^2$ ($(x,y) \rightarrow (0,0)$).

* 7. 证明下列极限不存在:

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}; \quad (2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}.$$

证 (1) 当 (x,y) 沿直线 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$ 时, 有

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=kx}} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+k)x}{(1-k)x} = \frac{1+k}{1-k} \quad (k \neq 1).$$

显然它是随着 k 的值不同而改变的, 故所求极限不存在.

(2) 依次取 $(x,y) \rightarrow (0,0)$ 的两种方式: $y=x$, $y=-x$, 分别求极限:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4} = 1,$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=-x}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + 4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + 4} = 0.$$

两种方式求得的极限值不同, 故所求极限不存在.

注 本题证明极限不存在所采用的方法是: 找出两条不同的路径, 使得点 P 沿这两条路径趋于 P_0 时, $f(P)$ 的极限存在但不相等; 或者找出一条特殊的路径, 使得点 P 沿这条路径趋于 P_0 时, $f(P)$ 的极限不存在. 这是证明多元函数极限不存在常用的方法.

8. 函数 $z = \frac{y^2+2x}{y^2-2x}$ 在何处是间断的?

解 这函数的定义域为 $D = \{(x, y) | y^2 - 2x \neq 0\}$, 曲线 $y^2 - 2x = 0$ 上各点均为 D 的聚点, 且函数在这些点处没有定义, 因此曲线 $y^2 - 2x = 0$ 上各点均为函数的间断点.

* 9. 证明 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$.

证 因为 $\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| \leq \frac{\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$,

要使 $\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| < \epsilon$, 只要 $\sqrt{x^2 + y^2} < 2\epsilon$, 所以 $\forall \epsilon > 0$, 取 $\delta = 2\epsilon$, 则当 $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ 时, 就有 $\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| < \epsilon$ 成立, 即 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$.

* 10. 设 $F(x, y) = f(x)$, $f(x)$ 在 x_0 处连续, 证明: 对任意 $y_0 \in R$, $F(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续.

证 设 $P_0(x_0, y_0) \in R^2$, 因为 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 所以 $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. 从而, 当 $P(x, y) \in U(P_0, \delta)$ 时, $|x - x_0| \leq \rho(P, P_0) < \delta$, 因而有

$$|F(x, y) - F(x_0, y_0)| = |f(x) - f(x_0)| < \epsilon,$$

即 $F(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续.

习题 9-2 偏导数

1. 求下列函数的偏导数:

$$(1) z = x^3y - y^3x; \quad (2) s = \frac{u^2 + v^2}{uv};$$

$$(3) z = \sqrt{\ln(xy)}; \quad (4) z = \sin(xy) + \cos^2(xy);$$

$$(5) z = \ln \tan \frac{x}{y}; \quad (6) z = (1 + xy)^y;$$

$$(7) u = x^{\frac{y}{z}}; \quad (8) u = \arctan(x - y)^z.$$

解 (1) $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y - y^3$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 - 3y^2x$.

$$(2) \frac{\partial s}{\partial u} = \frac{\frac{\partial}{\partial u}(u^2 + v^2) \cdot uv - (u^2 + v^2) \cdot \frac{\partial}{\partial u}(uv)}{(uv)^2}$$

$$= \frac{2u^2v - (u^2 + v^2)v}{u^2v^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{v} - \frac{v}{u^2}, \\
\frac{\partial s}{\partial v} &= \frac{\frac{\partial}{\partial v}(u^2 + v^2) \cdot uv - (u^2 + v^2) \cdot \frac{\partial}{\partial v}(uv)}{(uv)^2} \\
&= \frac{2uv^2 - (u^2 + v^2)u}{u^2v^2} \\
&= \frac{1}{u} - \frac{u}{v^2}.
\end{aligned}$$

$$(3) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\ln(xy)}} \cdot \frac{1}{xy} \cdot y = \frac{1}{2x\sqrt{\ln(xy)}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\ln(xy)}} \cdot \frac{1}{xy} \cdot x = \frac{1}{2y\sqrt{\ln(xy)}}.$$

$$\begin{aligned}
(4) \frac{\partial z}{\partial x} &= y\cos(xy) + 2\cos(xy) \cdot [-\sin(xy)] \cdot y \\
&= y[\cos(xy) - \sin(2xy)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial y} &= x\cos(xy) + 2\cos(xy) \cdot [-\sin(xy)] \cdot x \\
&= x[\cos(xy) - \sin(2xy)].
\end{aligned}$$

$$(5) \frac{\partial z}{\partial x} = \cot \frac{x}{y} \cdot \sec^2 \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y} = \frac{2}{y} \csc \frac{2x}{y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cot \frac{x}{y} \cdot \sec^2 \frac{x}{y} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{2x}{y^2} \csc \frac{2x}{y}.$$

$$(6) \frac{\partial z}{\partial x} = y^2(1+xy)^{y-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[e^{y\ln(1+xy)}] = (1+xy)^y [\ln(1+xy) + \frac{xy}{1+xy}].$$

$$(7) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{z} x^{\frac{y}{z}-1}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{z} x^{\frac{y}{z}} \ln x, \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{z^2} x^{\frac{y}{z}} \ln x.$$

$$(8) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{(x-y)^z \ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}.$$

2. 设 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, 求证 $l \frac{\partial T}{\partial l} + g \frac{\partial T}{\partial g} = 0$.

证 因为 $\frac{\partial T}{\partial l} = 2\pi \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{l}{g}}} \cdot \frac{1}{g} = \frac{\pi}{\sqrt{gl}}$,

$$\frac{\partial T}{\partial g} = 2\pi \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{l}{g}}} \cdot \left(-\frac{l}{g^2}\right) = -\frac{\pi\sqrt{l}}{g\sqrt{g}},$$

所以

$$l \frac{\partial T}{\partial l} + g \frac{\partial T}{\partial g} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} - \pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 0.$$

3. 设 $z = e^{-(\frac{1}{x}-\frac{1}{y})}$, 求证 $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 2z$.

证 因为 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x^2} e^{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y^2} e^{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})}$,

所以

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 2e^{-(\frac{1}{x}-\frac{1}{y})} = 2z.$$

4. 设 $f(x, y) = x + (y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$, 求 $f_x(x, 1)$.

解

$$f_x(x, y) = 1 + \frac{y-1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}} \cdot \frac{1}{y},$$

$$f_x(x, 1) = 1.$$

5. 曲线 $\begin{cases} z = \frac{x^2 + y^2}{4}, \\ y = 4 \end{cases}$, 在点 $(2, 4, 5)$ 处的切线对于 x 轴的倾角是多少?

解 设 $z = f(x, y)$. 按偏导数的几何意义, $f_x(2, 4)$ 就是曲线在点 $(2, 4, 5)$ 处的切线对于 x 轴的斜率, 而 $f_x(2, 4) = \frac{1}{2}x|_{x=2} = 1$, 即 $k = \tan \alpha = 1$, 于是倾角 $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

6. 求下列函数的 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$:

$$(1) z = x^4 + y^4 - 4x^2y^2;$$

$$(2) z = \arctan \frac{y}{x};$$

$$(3) z = y^x.$$

$$\text{解 } (1) \frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 8xy^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 8y^2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 - 8x^2y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2 - 8x^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(4x^3 - 8xy^2) = -16xy.$$

$$(2) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{(x^2 + y^2) - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$$(3) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = y^x \ln y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^x \cdot \ln^2 y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = xy^{x-1}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x(x-1)y^{x-2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (y^x \ln y) = y^{x-1}(1 + x \ln y).$$

7. 设 $f(x, y, z) = xy^2 + yz^2 + zx^2$, 求 $f_{xx}(0, 0, 1), f_{xz}(1, 0, 2), f_{yz}(0, -1, 0)$ 及 $f_{xx}(2, 0, 1)$.

解 因为 $f_x = y^2 + 2xz, f_{xx} = 2z, f_{xz} = 2x,$

$$f_y = 2xy + z^2, f_{yz} = 2z,$$

$$f_z = 2yz + x^2, f_{xz} = 2y, f_{xx} = 0,$$

所以 $f_{xx}(0, 0, 1) = 2, f_{xz}(1, 0, 2) = 2, f_{yz}(0, -1, 0) = 0, f_{xx}(2, 0, 1) = 0.$

8. 设 $z = x \ln(xy)$, 求 $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ 及 $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$.

$$\text{解 } \frac{\partial z}{\partial x} = \ln(xy) + x \cdot \frac{y}{xy} = \ln(xy) + 1,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{x}{xy} = \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -\frac{1}{y^2}.$$

9. 验证:

$$(1) \quad y = e^{-kn^2 t} \sin nx \text{ 满足 } \frac{\partial y}{\partial t} = k \frac{\partial^2 y}{\partial x^2};$$

$$(2) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ 满足 } \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{2}{r}.$$

证 (1) 因为 $\frac{\partial y}{\partial t} = -kn^2 e^{-kn^2 t} \sin nx, \frac{\partial y}{\partial x} = n e^{-kn^2 t} \cos nx,$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} (n e^{-kn^2 t} \cos nx) = -n^2 e^{-kn^2 t} \sin nx,$$

$$\text{所以 } \frac{\partial y}{\partial t} = k(-n^2 e^{-kn^2 t} \sin nx) = k \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

$$(2) \quad \text{因为 } \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} \right) = \frac{1}{r} - \frac{x}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = \frac{r^2 - x^2}{r^3},$$

由函数关于自变量的对称性,得

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{r^2 - y^2}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{r^2 - z^2}{r^3},$$

$$\text{所以 } \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^3} + \frac{r^2 - y^2}{r^3} + \frac{r^2 - z^2}{r^3} = \frac{2}{r}.$$

习题 9-3

全微分

1. 求下列函数的全微分:

$$(1) z = xy + \frac{x}{y}; \quad (2) z = e^x;$$

$$(3) z = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad (4) u = x^y.$$

$$\text{解 (1) 因为 } \frac{\partial z}{\partial x} = y + \frac{1}{y}, \frac{\partial z}{\partial y} = x - \frac{x}{y^2},$$

$$\text{所以 } dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \left(y + \frac{1}{y} \right) dx + \left(x - \frac{x}{y^2} \right) dy.$$

$$(2) \text{ 因为 } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} e^x, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x} e^x,$$

$$\text{所以 } dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = -\frac{1}{x^2} e^x (ydx - xdy).$$

$$(3) \text{ 因为 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{-xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - y \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}},$$

$$\text{所以 } dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} (ydx - xdy).$$

$$(4) \text{ 因为 } \frac{\partial u}{\partial x} = yzx^{y-1}, \frac{\partial u}{\partial y} = zx^y \ln x, \frac{\partial u}{\partial z} = yx^y \ln x,$$

$$\text{所以 } du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = yzx^{y-1} dx + zx^y \ln x dy + yx^y \ln x dz.$$

2. 求函数 $z = \ln(1 + x^2 + y^2)$ 当 $x = 1, y = 2$ 时的全微分.

$$\text{解 因为 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2},$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = \frac{1}{3}, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = \frac{2}{3},$$

所以

$$dz \Big|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = \frac{1}{3}dx + \frac{2}{3}dy.$$

3. 求函数 $z = \frac{y}{x}$ 当 $x = 2, y = 1, \Delta x = 0.1, \Delta y = -0.2$ 时的全增量和全微分.

解 $\Delta z = \frac{y + \Delta y}{x + \Delta x} - \frac{y}{x}, dz = -\frac{y}{x^2} \Delta x + \frac{1}{x} \Delta y.$

当 $x = 2, y = 1, \Delta x = 0.1, \Delta y = -0.2$ 时,

全增量 $\Delta z = \frac{1 + (-0.2)}{2 + 0.1} - \frac{1}{2} = -0.119,$

全微分 $dz = -\frac{1}{4} \cdot 0.1 + \frac{1}{2} \cdot (-0.2) = -0.125.$

4. 求函数 $z = e^{xy}$ 当 $x = 1, y = 1, \Delta x = 0.15, \Delta y = 0.1$ 时的全微分.

解 $dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y = ye^{xy} \Delta x + xe^{xy} \Delta y.$

当 $x = 1, y = 1, \Delta x = 0.15, \Delta y = 0.1$ 时, 全微分

$$dz = e \cdot 0.15 + e \cdot 0.1 = 0.25e.$$

5. 考虑二元函数 $f(x, y)$ 的下面四条性质:

(1) $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 连续.

(2) $f_x(x, y), f_y(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 连续.

(3) $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 可微分.

(4) $f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)$ 存在.

若用 " $P \Rightarrow Q$ " 表示可由性质 P 推出性质 Q , 则下列四个选项中正确的是()。

(A) (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1). (B) (3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1).

(C) (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1). (D) (3) \Rightarrow (1) \Rightarrow (4).

解 由于二元函数偏导数存在且连续是二元函数可微分的充分条件, 二元函数可微分必定可(偏)导, 二元函数可微分必定连续, 因此选项(A)正确.

选项(B)中(3) $\not\Rightarrow$ (2), 选项(C)中(4) $\not\Rightarrow$ (1), 选项(D)中(1) $\not\Rightarrow$ (4).

* 6. 计算 $\sqrt{(1.02)^3 + (1.97)^3}$ 的近似值.

解 设 $z = \sqrt{x^3 + y^3}$, 则

$$\begin{aligned} \sqrt{(x + \Delta x)^3 + (y + \Delta y)^3} &= \sqrt{x^3 + y^3} + \Delta z \approx \sqrt{x^3 + y^3} + dz \\ &= \sqrt{x^3 + y^3} + \frac{3x^2 \Delta x + 3y^2 \Delta y}{2\sqrt{x^3 + y^3}}. \end{aligned}$$

取 $x = 1, y = 2, \Delta x = 0.02, \Delta y = -0.03$, 可得

$$\sqrt{(1.02)^3 + (1.97)^3} \approx \sqrt{1+2^3} + \frac{3 \cdot 1 \cdot 0.02 + 3 \cdot 2^2 \cdot (-0.03)}{2\sqrt{1+2^3}} = 2.95.$$

* 7. 计算 $(1.97)^{1.05}$ 的近似值 ($\ln 2 = 0.693$).

解 设 $z = x^y$, 则

$$(x + \Delta x)^{y+\Delta y} = x^y + \Delta z \approx x^y + dz = x^y + yx^{y-1}\Delta x + x^y \ln x \cdot \Delta y.$$

取 $x = 2, y = 1, \Delta x = -0.03, \Delta y = 0.05$, 可得

$$(1.97)^{1.05} \approx 2 - 0.03 + 2\ln 2 \cdot 0.05 = 1.97 + 0.0693 \approx 2.039.$$

* 8. 已知边长为 $x = 6$ m 与 $y = 8$ m 的矩形, 如果 x 边增加 5 cm 而 y 边减少 10 cm, 问这个矩形的对角线的近似变化怎样?

解 矩形的对角线的长为 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x \Delta x + y \Delta y).$$

当 $x = 6, y = 8, \Delta x = 0.05, \Delta y = -0.1$ 时,

$$\Delta z \approx \frac{1}{\sqrt{6^2 + 8^2}}(6 \cdot 0.05 - 8 \cdot 0.1) = -0.05,$$

即, 这个矩形的对角线的长减少大约 5 cm.

* 9. 设有一无盖圆柱形容器, 容器的壁与底的厚度均为 0.1 cm, 内高为 20 cm, 内半径为 4 cm. 求容器外壳体积的近似值.

解 圆柱体的体积公式为 $V = \pi R^2 H$, 圆柱形容器的外壳体积就是圆柱体体积 V 的增量 ΔV , 而

$$\Delta V \approx dV = \frac{\partial V}{\partial R} \Delta R + \frac{\partial V}{\partial H} \Delta H = 2\pi RH \Delta R + \pi R^2 \Delta H.$$

当 $R = 4, H = 20, \Delta R = \Delta H = 0.1$ 时,

$$\Delta V \approx 2 \cdot 3.14 \cdot 4 \cdot 20 \cdot 0.1 + 3.14 \cdot 4^2 \cdot 0.1 \approx 55.3,$$

即容器外壳的体积大约是 55.3 cm³.

* 10. 设有直角三角形, 测得其两直角边的长分别为 7 ± 0.1 cm 和 24 ± 0.1 cm. 试求利用上述二值来计算斜边长度时的绝对误差.

解 设两直角边长度分别为 x 和 y , 则斜边长度为 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\begin{aligned} |\Delta z| &\approx |dz| = \left| \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y \right| \leqslant \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| |\Delta x| + \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| |\Delta y| \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x|\Delta x| + y|\Delta y|) \leqslant \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x\delta_x + y\delta_y), \end{aligned}$$

便得

$$\delta_z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x\delta_x + y\delta_y).$$

当 $x = 7, y = 24, \delta_x = 0.1, \delta_y = 0.1$ 时,

$$\delta_z = \frac{1}{\sqrt{7^2 + 24^2}}(7 \cdot 0.1 + 24 \cdot 0.1) = 0.124.$$

即计算斜边长度 z 的绝对误差约为 0.124 cm.

- * 11. 测得一块三角形土地的两边边长分别为 63 ± 0.1 m 和 78 ± 0.1 m, 这两边的夹角为 $60^\circ \pm 1^\circ$. 试求三角形面积的近似值, 并求其绝对误差和相对误差.

解 设三角形的两边长分别为 a 和 b , 它们的夹角为 θ , 则三角形的面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ab \sin \theta, \\ |\Delta S| \approx |dS| &= \left| \frac{\partial S}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial S}{\partial b} \Delta b + \frac{\partial S}{\partial \theta} \Delta \theta \right| \\ &\leq \left| \frac{\partial S}{\partial a} \right| |\Delta a| + \left| \frac{\partial S}{\partial b} \right| |\Delta b| + \left| \frac{\partial S}{\partial \theta} \right| |\Delta \theta| \\ &= \frac{1}{2}b \sin \theta |\Delta a| + \frac{1}{2}a \sin \theta |\Delta b| + \frac{1}{2}ab \cos \theta |\Delta \theta| \\ &\leq \frac{1}{2}b \sin \theta \delta_a + \frac{1}{2}a \sin \theta \delta_b + \frac{1}{2}ab \cos \theta \delta_\theta, \end{aligned}$$

便得

$$\delta_s = \frac{1}{2}b \sin \theta \delta_a + \frac{1}{2}a \sin \theta \delta_b + \frac{1}{2}ab \cos \theta \delta_\theta.$$

当 $a = 63, b = 78, \theta = \frac{\pi}{3}, \delta_a = 0.1, \delta_b = 0.1, \delta_\theta = \frac{\pi}{180}$ 时, 三角形面积的近似值为

$$S = \frac{1}{2} \cdot 63 \cdot 78 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 2127.8(\text{m}^2),$$

绝对误差为

$$\begin{aligned} \delta_s &= \frac{1}{2} \cdot 78 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0.1 + \frac{1}{2} \cdot 63 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0.1 + \frac{1}{2} \cdot 63 \cdot 78 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \\ &= 27.6(\text{m}^2), \end{aligned}$$

相对误差为

$$\frac{\delta_s}{S} = \frac{27.6}{2127.8} = 1.30\%.$$

- * 12. 利用全微分证明: 两数之和的绝对误差等于它们各自的绝对误差之和.

解 设 $u = x + y$, 则

$$\begin{aligned} |\Delta u| \approx |du| &= \left| \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y \right| \\ &= |\Delta x + \Delta y| \leq |\Delta x| + |\Delta y| \leq \delta_x + \delta_y, \end{aligned}$$

便得

$$\delta_u = \delta_x + \delta_y,$$

即两数之和的绝对误差等于它们各自的绝对误差之和.

* 13. 利用全微分证明:乘积的相对误差等于各因子的相对误差之和;商的相对误差等于被除数及除数的相对误差之和.

解 设 $u = xy, v = \frac{x}{y}$, 则

$$|\Delta u| \approx |du| = |y\Delta x + x\Delta y| \leqslant |y||\Delta x| + |x||\Delta y| \leqslant |y|\delta_x + |x|\delta_y,$$

$$|\Delta v| \approx |dv| = \left| \frac{y\Delta x - x\Delta y}{y^2} \right| \leqslant \frac{|y||\Delta x| + |x||\Delta y|}{|y|^2} \leqslant \frac{|y|\delta_x + |x|\delta_y}{|y|^2},$$

便得

$$\delta_u = |y|\delta_x + |x|\delta_y, \quad \delta_v = \frac{|y|\delta_x + |x|\delta_y}{|y|^2},$$

$$\frac{\delta_u}{|u|} = \frac{|y|\delta_x + |x|\delta_y}{|xy|} = \frac{\delta_x}{|x|} + \frac{\delta_y}{|y|},$$

$$\frac{\delta_v}{|v|} = \frac{1}{|x|} \cdot \frac{|y|\delta_x + |x|\delta_y}{|y|^2} = \frac{\delta_x}{|x|} + \frac{\delta_y}{|y|}.$$

即乘积的相对误差等于各因子的相对误差之和, 商的相对误差等于被除数及除数的相对误差之和.

习题 9-4 多元复合函数的求导法则

1. 设 $z = u^2 + v^2$, 而 $u = x + y, v = x - y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\text{解 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 2u \cdot 1 + 2v \cdot 1 = 2(u + v) = 4x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 2u \cdot 1 + 2v \cdot (-1) = 2(u - v) = 4y.$$

2. 设 $z = u^2 \ln v$, 而 $u = \frac{x}{y}, v = 3x - 2y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\text{解 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 2u \ln v \cdot \frac{1}{y} + \frac{u^2}{v} \cdot 3$$

$$= \frac{2x}{y^2} \ln(3x - 2y) + \frac{3x^2}{(3x - 2y)y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 2u \ln v \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + \frac{u^2}{v} \cdot (-2)$$

$$= -\frac{2x^2}{y^3} \ln(3x-2y) - \frac{2x^2}{(3x-2y)y^2}.$$

3. 设 $z = e^{x-2y}$, 而 $x = \sin t, y = t^3$, 求 $\frac{dz}{dt}$.

$$\begin{aligned}\text{解 } \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = e^{x-2y} \cdot \cos t + e^{x-2y} \cdot (-2) \cdot 3t^2 \\ &= e^{x-2y} (\cos t - 6t^2) = e^{\sin t - 2t^3} (\cos t - 6t^2).\end{aligned}$$

4. 设 $z = \arcsin(x-y)$, 而 $x = 3t, y = 4t^3$, 求 $\frac{dz}{dt}$.

$$\begin{aligned}\text{解 } \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}} \cdot 3 + \frac{(-1)}{\sqrt{1-(x-y)^2}} \cdot 12t^2 \\ &= \frac{3(1-4t^2)}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}.\end{aligned}$$

5. 设 $z = \arctan(xy)$, 而 $y = e^x$, 求 $\frac{dz}{dx}$.

$$\begin{aligned}\text{解 } \frac{dz}{dx} &= \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{y}{1+x^2y^2} + \frac{x}{1+x^2y^2} \cdot e^x \\ &= \frac{(1+x)e^x}{1+x^2e^{2x}}.\end{aligned}$$

6. 设 $u = \frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$, 而 $y = a \sin x, z = \cos x$, 求 $\frac{du}{dx}$.

$$\begin{aligned}\text{解 } \frac{du}{dx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} \\ &= \frac{ae^{ax}(y-z)}{a^2+1} + \frac{e^{ax}}{a^2+1} \cdot a \cos x + \frac{e^{ax}}{a^2+1} \cdot (-1) \cdot (-\sin x) \\ &= \frac{e^{ax}}{a^2+1} (a^2 \sin x - a \cos x + a \cos x + \sin x) \\ &= e^{ax} \sin x.\end{aligned}$$

7. 设 $z = \arctan \frac{x}{y}$, 而 $x = u+v, y = u-v$, 验证

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u-v}{u^2+v^2}.$$

$$\text{证 } \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right) + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \right)$$

$$= \frac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot 1 + \frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot 1 + \frac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot 1$$

$$+\frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot (-1) \\ = \frac{2y}{x^2+y^2} = \frac{u-v}{u^2+v^2},$$

故等式成立.

8. 求下列函数的一阶偏导数(其中 f 具有一阶连续偏导数):

$$(1) u = f(x^2 - y^2, e^{xy}); \quad (2) u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right);$$

$$(3) u = f(x, xy, xyz).$$

解 (1) 将中间变量 $x^2 - y^2, e^{xy}$ 依次编为 1, 2 号, 则

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2) + f'_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy}) = 2xf'_1 + ye^{xy}f'_2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f'_1 \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2) + f'_2 \cdot \frac{\partial}{\partial y}(e^{xy}) = -2yf'_1 + xe^{xy}f'_2.$$

$$(2) \text{令 } s = \frac{x}{y}, t = \frac{y}{z}, \text{则 } u = f(s, t),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{y}f'_s,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}f'_s + \frac{1}{z}f'_t,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial z} = -\frac{y}{z^2}f'_t.$$

(3) 将中间变量 x, xy, xyz 依次编为 1, 2, 3 号, 则

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'_1 \cdot 1 + f'_2 \cdot y + f'_3 \cdot yz = f'_1 + yf'_2 + yzf'_3,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f'_2 \cdot x + f'_3 \cdot xz = xf'_2 + xz f'_3,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = f'_3 \cdot xy = xyf'_3.$$

9. 设 $z = xy + xF(u)$, 而 $u = \frac{y}{x}, F(u)$ 为可导函数, 证明

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z + xy.$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} &= x \left[y + F(u) + xF'(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + y \left[x + xF'(u) \frac{\partial u}{\partial y} \right] \\ &= x \left[y + F(u) - \frac{y}{x} F'(u) \right] + y [x + F'(u)] \end{aligned}$$

$$= xy + xF(u) + xy = z + xy,$$

故等式成立.

10. 设 $z = \frac{y}{f(x^2 - y^2)}$, 其中 $f(u)$ 为可导函数, 验证

$$\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

$$\text{证 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y \cdot f'_u \cdot 2x}{f^2(u)} = -\frac{2xyf'_u}{f^2(u)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{f(u) - yf'_u \cdot (-2y)}{f^2(u)} = \frac{1}{f(u)} + \frac{2y^2 f'_u}{f^2(u)},$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{2yf'_u}{f^2(u)} + \frac{1}{yf(u)} + \frac{2yf'_u}{f^2(u)} = \frac{1}{yf(u)} \\ &= \frac{z}{y^2}. \end{aligned}$$

11. 设 $z = f(x^2 + y^2)$, 其中 f 具有二阶导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

解 令 $u = x^2 + y^2$, 则 $z = f(u)$. 记 $f' = f'(u), f'' = f''(u)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 2xf',$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial y} = 2yf',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2f' + 2xf'' \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 2f' + 4x^2 f'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2xf'' \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 4xyf'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2f' + 2yf'' \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 2f' + 4y^2 f''.$$

* 12. 求下列函数的 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ (其中 f 具有二阶连续偏导数):

$$(1) z = f(xy, y); \quad (2) z = f\left(x, \frac{x}{y}\right);$$

$$(3) z = f(xy^2, x^2y); \quad (4) z = f(\sin x, \cos y, e^{x+y}).$$

解 (1) 令 $s = xy, t = y$, 则 $z = f(s, t)$, s 和 t 是中间变量. 将 s, t 依次编为 1, 2 号, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 \cdot \frac{\partial s}{\partial x} = yf'_1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_1 \cdot \frac{\partial s}{\partial y} + f'_2 \cdot \frac{dt}{dy} = xf'_1 + f'_2.$$

因为 $f(s, t)$ 是 s 和 t 的函数, 所以 f'_1 和 f'_2 也是 s 和 t 的函数, 从而 f'_1 和 f'_2 是以 s 和 t 为中间变量的 x 和 y 的函数. 故

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (y f'_1) = y f''_{11} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} = y^2 f''_{11}, \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (y f'_1) = f'_1 + y \left(f''_{11} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} + f''_{12} \cdot \frac{dt}{dy} \right), \\
&\quad = f'_1 + x y f''_{11} + y f''_{12}, \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (x f'_1 + f'_2) \\
&= x \left(f''_{11} \frac{\partial s}{\partial y} + f''_{12} \frac{dt}{dy} \right) + f''_{21} \frac{\partial s}{\partial y} + f''_{22} \frac{dt}{dy} \\
&= x^2 f''_{11} + 2 x f''_{12} + f''_{22}.
\end{aligned}$$

(2) 令 $s = x, t = \frac{x}{y}$, 并将 s, t 依次编为 1, 2 号, 则

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= f'_1 \frac{ds}{dx} + f'_2 \frac{\partial t}{\partial x} = f'_1 + \frac{1}{y} f'_2, \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= f'_2 \frac{\partial t}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} f'_2.
\end{aligned}$$

因为 $f(s, t)$ 是 s 和 t 的函数, 所以 f'_1 和 f'_2 也是 s 和 t 的函数, 从而 f'_1 和 f'_2 是以 s 和 t 为中间变量的 x 和 y 的函数. 故

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(f'_1 + \frac{1}{y} f'_2 \right) = f''_{11} + f''_{12} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{1}{y} \left(f''_{21} + f''_{22} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} \right) \\
&= f''_{11} + \frac{2}{y} f''_{12} + \frac{1}{y^2} f''_{22}, \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(f'_1 + \frac{1}{y} f'_2 \right) = f''_{12} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} - \frac{1}{y^2} f'_2 + \frac{1}{y} f''_{22} \frac{\partial t}{\partial y} \\
&= -\frac{x}{y^2} f''_{12} - \frac{1}{y^2} f'_2 - \frac{x}{y^3} f''_{22},
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{x}{y^2} f'_2 \right) = \frac{2x}{y^3} f'_2 - \frac{x}{y^2} f''_{22} \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{2x}{y^3} f'_2 + \frac{x^2}{y^4} f''_{22}.$$

(3) 令 $s = xy^2, t = x^2y$, 并将 s, t 依次编为 1, 2 号, 则

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= f'_1 \frac{\partial s}{\partial x} + f'_2 \frac{\partial t}{\partial x} = y^2 f'_1 + 2xy f'_2, \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= f'_1 \frac{\partial s}{\partial y} + f'_2 \frac{\partial t}{\partial y} = 2xy f'_1 + x^2 f'_2. \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (y^2 f'_1 + 2xy f'_2) \\
&= y^2 \left(f''_{11} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + f''_{12} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} \right) + 2y f'_2 + 2xy \left(f''_{21} \frac{\partial s}{\partial x} + f''_{22} \frac{\partial t}{\partial x} \right) \\
&= y^2 (y^2 f''_{11} + 2xy f''_{12}) + 2y f'_2 + 2xy (y^2 f''_{21} + 2xy f''_{22}) \\
&= 2y f'_2 + y^4 f''_{11} + 4xy^3 f''_{12} + 4x^2 y^2 f''_{22},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (y^2 f'_1 + 2xy f'_2) \\
&= 2y f'_1 + y^2 \left(f''_{11} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} + f''_{12} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} \right) \\
&\quad + 2x f'_2 + 2xy \left(f''_{21} \frac{\partial s}{\partial y} + f''_{22} \frac{\partial t}{\partial y} \right) \\
&= 2y f'_1 + y^2 (2xy f''_{11} + x^2 f''_{12}) + 2x f'_2 \\
&\quad + 2xy (2xy f''_{21} + x^2 f''_{22}) \\
&= 2y f'_1 + 2x f'_2 + 2xy^3 f''_{11} + 5x^2 y^2 f''_{12} + 2x^3 y f''_{22},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (2xy f'_1 + x^2 f'_2) \\
&= 2x f'_1 + 2xy \left(f''_{11} \frac{\partial s}{\partial y} + f''_{12} \frac{\partial t}{\partial y} \right) + x^2 \left(f''_{21} \frac{\partial s}{\partial y} + f''_{22} \frac{\partial t}{\partial y} \right) \\
&= 2x f'_1 + 2xy (2xy f''_{11} + x^2 f''_{12}) + x^2 (2xy f''_{21} + x^2 f''_{22}) \\
&= 2x f'_1 + 4x^2 y^2 f''_{11} + 4x^3 y f''_{12} + x^4 f''_{22}.
\end{aligned}$$

(4) 令 $u = \sin x, v = \cos y, w = e^{x+y}$, 并将 u, v, w 依次编为 1, 2, 3 号, 则

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= f'_1 \frac{du}{dx} + f'_3 \frac{\partial w}{\partial x} = \cos x f'_1 + e^{x+y} f'_3, \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= f'_2 \frac{dv}{dy} + f'_3 \frac{\partial w}{\partial y} = -\sin y f'_2 + e^{x+y} f'_3, \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\cos x f'_1 + e^{x+y} f'_3) \\
&= -\sin x f'_1 + \cos x \left(f''_{11} \frac{du}{dx} + f''_{13} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + e^{x+y} f'_3 + e^{x+y} \left(f''_{31} \frac{du}{dx} + f''_{33} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
&= -\sin x f'_1 + \cos x (\cos x f''_{11} + e^{x+y} f''_{13}) + e^{x-y} f'_3 + e^{x+y} (\cos x f''_{31} + e^{x+y} f''_{33}) \\
&= e^{x+y} f'_3 - \sin x f'_1 + \cos^2 x f''_{11} + 2e^{x+y} \cos x f''_{13} + e^{2(x-y)} f''_{33},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (\cos x f'_1 + e^{x+y} f'_3) \\
&= \cos x \left(f''_{12} \frac{dv}{dy} + f''_{13} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + e^{x+y} f'_3 + e^{x+y} \left(f''_{32} \frac{dv}{dy} + f''_{33} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
&= \cos x (-\sin y f''_{12} + e^{x+y} f''_{13}) + e^{x+y} f'_3 + e^{x-y} (-\sin y f''_{32} + e^{x+y} f''_{33}) \\
&= e^{x+y} f'_3 - \cos x \sin y f''_{12} + e^{x+y} \cos x f''_{13} - e^{x+y} \sin y f''_{32} + e^{2(x+y)} f''_{33},
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (-\sin y f'_2 + e^{x+y} f'_3)$$

$$\begin{aligned}
&= -\cos y f'_2 - \sin y \left(f''_{22} \frac{dv}{dy} + f''_{23} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + e^{x+y} f'_3 + e^{x+y} \left(f''_{32} \frac{dv}{dy} + f''_{33} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
&= -\cos y f'_2 - \sin y (-\sin y f''_{22} + e^{-y} f''_{23}) + e^{x+y} f'_3 + e^{-y} (-\sin y f''_{32} + e^{x+y} f''_{33}) \\
&= e^{x+y} f'_3 - \cos y f'_2 + \sin^2 y f''_{22} - 2e^{x+y} \sin y f''_{23} + e^{2(x+y)} f''_{33}.
\end{aligned}$$

* 13. 设 $u = f(x, y)$ 的所有二阶偏导数连续, 而

$$x = \frac{s - \sqrt{3}t}{2}, y = \frac{\sqrt{3}s + t}{2},$$

证明 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$

及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

证 因为 $\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial u}{\partial y}$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y},$$

所以 $\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$
 $= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$

又因为 $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \right)$
 $= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial s} \right)$
 $= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$
 $= \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{3}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial t} \right) \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\
&= \frac{3}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},
\end{aligned}$$

所以 $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

习题 9-5

隐函数的求导公式

1. 设 $\sin y + e^x - xy^2 = 0$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解 设 $F(x, y) = \sin y + e^x - xy^2$, 则

$$F_x = e^x - y^2, F_y = \cos y - 2xy.$$

当 $F_y \neq 0$ 时, 有

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{e^x - y^2}{\cos y - 2xy} \\ &= \frac{y^2 - e^x}{\cos y - 2xy}.\end{aligned}$$

2. 设 $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解 设 $F(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2} - \arctan \frac{y}{x}$, 则一阶偏导数分别为

$$F_x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{x + y}{x^2 + y^2},$$

$$F_y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{y - x}{x^2 + y^2}.$$

当 $F_y \neq 0$ 时, 有

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{x + y}{x^2 + y^2} / \frac{y - x}{x^2 + y^2} = \frac{x + y}{x - y}.$$

3. 设 $x + 2y + z - 2\sqrt{xyz} = 0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解法一 设 $F(x, y, z) = x + 2y + z - 2\sqrt{xyz}$, 则

$$F_x = 1 - \frac{yz}{\sqrt{xyz}}, F_y = 2 - \frac{xz}{\sqrt{xyz}}, F_z = 1 - \frac{xy}{\sqrt{xyz}}.$$

于是当 $F_z \neq 0$ 时, 有 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{yz - \sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{xz - 2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy}.$$

解法二 在所给方程两端分别对 x 求偏导数, 并注意 $z = z(x, y)$, 得

$$1 + \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{\sqrt{xyz}} \left(yz + xy \frac{\partial z}{\partial x} \right) = 0,$$

$$\text{当 } 1 - \frac{xy}{\sqrt{xyz}} \neq 0 \text{ 时, 解得 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{yz}{\sqrt{xyz}} - 1}{1 - \frac{xy}{\sqrt{xyz}}} = \frac{yz - \sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy}.$$

同理, 方程两端分别对 y 求偏导数, 得

$$2 + \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{1}{\sqrt{xyz}} \left(xz + xy \frac{\partial z}{\partial y} \right) = 0,$$

$$\text{当 } 1 - \frac{xy}{\sqrt{xyz}} \neq 0 \text{ 时, 解得 } \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{xz}{\sqrt{xyz}} - 2}{1 - \frac{xy}{\sqrt{xyz}}} = \frac{xz - 2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy}.$$

解法三 对所给方程两端分别求全微分, 得

$$dx + 2dy + dz - \frac{1}{\sqrt{xyz}} (yz dx + xz dy + xy dz) = 0,$$

$$\text{即 } \left(1 - \frac{xy}{\sqrt{xyz}} \right) dz = \left(\frac{yz}{\sqrt{xyz}} - 1 \right) dx + \left(\frac{xz}{\sqrt{xyz}} - 2 \right) dy.$$

$$\text{当 } \sqrt{xyz} - xy \neq 0 \text{ 时, 解得 } dz = \frac{yz - \sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy} dx + \frac{xz - 2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy} dy.$$

$$\text{所以 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz - \sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz - 2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy}.$$

4. 设 $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 令 $F(x, y, z) = \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y}$, 则

$$F_x = \frac{1}{z}, \quad F_y = -\frac{1}{y} \cdot \left(-\frac{z}{y^2} \right) = \frac{1}{y},$$

$$F_z = -\frac{x}{z^2} - \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{y} = -\frac{x+z}{z^2}.$$

$$\text{于是当 } F_z \neq 0 \text{ 时, 有 } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{1}{z} / \left(-\frac{x+z}{z^2} \right) = \frac{z}{x+z},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{1}{y} / \left(-\frac{x+z}{z^2} \right) = \frac{z^2}{y(x+z)}.$$

5. 设 $2\sin(x+2y-3z) = x+2y-3z$, 证明 $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$.

证 设 $F(x, y, z) = 2\sin(x+2y-3z) - x - 2y + 3z$, 则

$$F_x = 2\cos(x+2y-3z) - 1,$$

$$F_y = 2\cos(x+2y-3z) \cdot 2 - 2 = 2F_x,$$

$$F_z = 2\cos(x+2y-3z) \cdot (-3) + 3 = -3F_x,$$

故当 $F_z \neq 0$ 时, 有 $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_x}{F_z} - \frac{F_y}{F_z} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$.

6. 设 $x=x(y, z)$, $y=y(x, z)$, $z=z(x, y)$ 都是由方程 $F(x, y, z)=0$ 所确定的具有连续偏导数的函数, 证明: $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1$.

证 因为 $\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_x}$, $\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{F_z}{F_y}$, $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$,

所以 $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \left(-\frac{F_y}{F_x}\right) \cdot \left(-\frac{F_z}{F_y}\right) \cdot \left(-\frac{F_x}{F_z}\right) = -1$.

7. 设 $\Phi(u, v)$ 具有连续偏导数, 证明由方程 $\Phi(cx-az, cy-bz)=0$ 所确定的函数 $z=f(x, y)$ 满足 $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = c$.

证 令 $u=cx-az$, $v=cy-bz$, 则

$$\Phi_x = \Phi_u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = c\Phi_u,$$

$$\Phi_y = \Phi_v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = c\Phi_v,$$

$$\Phi_z = \Phi_u \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \Phi_v \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = -a\Phi_u - b\Phi_v.$$

故当 $\Phi_z \neq 0$ 时, 有 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\Phi_x}{\Phi_z} = \frac{c\Phi_u}{a\Phi_u + b\Phi_v}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\Phi_y}{\Phi_z} = \frac{c\Phi_v}{a\Phi_u + b\Phi_v}.$$

于是 $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = a \cdot \frac{c\Phi_u}{a\Phi_u + b\Phi_v} + b \cdot \frac{c\Phi_v}{a\Phi_u + b\Phi_v} = c$.

8. 设 $e^z - xyz = 0$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 设 $F(x, y, z) = e^z - xyz$, 则 $F_x = -yz$, $F_z = e^z - xy$.

于是当 $F_z \neq 0$ 时, 有 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{yz}{e^z - xy}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{y \frac{\partial z}{\partial x} (e^z - xy) - yz \left(e^z \frac{\partial z}{\partial x} - y \right)}{(e^z - xy)^2}$$

$$= \frac{y^2 z - yz \left(e^z \cdot \frac{yz}{e^z - xy} - y \right)}{(e^z - xy)^2}$$

$$= \frac{2y^2ze^z - 2xy^3z - y^2z^2e^z}{(e^z - xy)^3}.$$

* 9. 设 $z^3 - 3xyz = a^3$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解 设 $F(x, y, z) = z^3 - 3xyz - a^3$, 则

$$F_x = -3yz, F_y = -3xz, F_z = 3z^2 - 3xy.$$

于是当 $F_z \neq 0$ 时, 有 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{yz}{z^2 - xy}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{xz}{z^2 - xy}$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{yz}{z^2 - xy} \right) \\&= \frac{\left(z + y \frac{\partial z}{\partial y} \right) (z^2 - xy) - yz \left(2z \frac{\partial z}{\partial y} - x \right)}{(z^2 - xy)^2} \\&= \frac{\left(z + \frac{xyz}{z^2 - xy} \right) \cdot (z^2 - xy) - yz \left(\frac{2xz^2}{z^2 - xy} - x \right)}{(z^2 - xy)^2} \\&= \frac{z(z^4 - 2xyz^2 - x^2y^2)}{(z^2 - xy)^3}.\end{aligned}$$

10. 求由下列方程组所确定的函数的导数或偏导数:

$$(1) \text{ 设 } \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20, \end{cases} \text{ 求 } \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx};$$

$$(2) \text{ 设 } \begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \end{cases} \text{ 求 } \frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz};$$

$$(3) \text{ 设 } \begin{cases} u = f(ux, v+y), \\ v = g(u-x, v^2y), \end{cases} \text{ 其中 } f, g \text{ 具有一阶连续偏导数, 求 } \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x};$$

$$(4) \text{ 设 } \begin{cases} x = e^u + usinv, \\ y = e^u - ucosv, \end{cases} \text{ 求 } \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}.$$

解 (1) 分别在两个方程两端对 x 求导, 得

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = 2x + 2y \frac{dy}{dx}, \\ 2x + 4y \frac{dy}{dx} + 6z \frac{dz}{dx} = 0. \end{cases}$$

移项, 得

$$\begin{cases} 2y \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx} = -2x, \\ 2y \frac{dy}{dx} + 3z \frac{dz}{dx} = -x. \end{cases}$$

当 $D = \begin{vmatrix} 2y & -1 \\ 2y & 3z \end{vmatrix} = 6yz + 2y \neq 0$ 时, 解方程组得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} -2x & -1 \\ -x & 3z \end{vmatrix}}{D} = \frac{-6xz - x}{6yz + 2y} = \frac{-x(6z + 1)}{2y(3z + 1)},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} 2y & -2x \\ 2y & -x \end{vmatrix}}{D} = \frac{2xy}{6yz + 2y} = \frac{x}{3z + 1}.$$

(2) 所给方程组确定两个一元隐函数: $x = x(z)$ 和 $y = y(z)$, 将所给方程的两端分别对 z 求导并移项, 得

$$\begin{cases} \frac{dx}{dz} + \frac{dy}{dz} = -1, \\ 2x \frac{dx}{dz} + 2y \frac{dy}{dz} = -2z. \end{cases}$$

当 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 2(y-x) \neq 0$ 时, 解方程组得

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2z & 2y \end{vmatrix}}{D} = \frac{-2y + 2z}{2(y-x)} = \frac{y-z}{x-y},$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2x & -2z \end{vmatrix}}{D} = \frac{-2z + 2x}{2(y-x)} = \frac{z-x}{x-y}.$$

(3) 此方程组可以确定两个二元隐函数: $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$.

分别在方程两端对 x 求偏导数, 得

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = f'_1 \cdot \left(u + x \frac{\partial u}{\partial x}\right) + f'_2 \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} = g'_1 \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} - 1\right) + 2g'_2 yv \cdot \frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

移项整理后得

$$\begin{cases} (xf'_1 - 1) \frac{\partial u}{\partial x} + f'_2 \frac{\partial v}{\partial x} = -uf'_1, \\ g'_1 \frac{\partial u}{\partial x} + (2yvg'_2 - 1) \frac{\partial v}{\partial x} = g'_1. \end{cases}$$

当 $D = \begin{vmatrix} xf'_1 - 1 & f'_2 \\ g'_1 & 2yvg'_2 - 1 \end{vmatrix} = (xf'_1 - 1)(2yvg'_2 - 1) - f'_2 g'_1 \neq 0$ 时, 解

方程组得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} -uf'_1 & f'_2 \\ g'_1 & 2yvg'_2 - 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-uf'_1(2yvg'_2 - 1) - f'_2g'_1}{(xf'_1 - 1)(2yvg'_2 - 1) - f'_2g'_1},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} xf'_1 - 1 & -uf'_1 \\ g'_1 & g'_1 \end{vmatrix} = \frac{g'_1(xf'_1 + uf'_1 - 1)}{(xf'_1 - 1)(2yvg'_2 - 1) - f'_2g'_1}.$$

(4) 此方程组确定两个二元隐函数 $u=u(x,y), v=v(x,y)$ 是已知函数的反函数, 令

$$F(x, y, u, v) = x - e^u - usin v,$$

$$G(x, y, u, v) = y - e^u + ucos v.$$

则 $F_x = 1, F_y = 0, F_u = -e^u - \sin v, F_v = -u \cos v,$

$G_x = 0, G_y = 1, G_u = -e^u + \cos v, G_v = -u \sin v.$

$$\text{当 } J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} -e^u - \sin v & -u \cos v \\ -e^u + \cos v & -u \sin v \end{vmatrix} = ue^u(\sin v - \cos v) + u \neq 0$$

时, 由隐函数求导公式得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)} = -\frac{1}{J} \begin{vmatrix} 1 & -u \cos v \\ 0 & -u \sin v \end{vmatrix} \\ &= \frac{\sin v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)} = -\frac{1}{J} \begin{vmatrix} 0 & -u \cos v \\ 1 & -u \sin v \end{vmatrix} \\ &= \frac{-\cos v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)} = -\frac{1}{J} \begin{vmatrix} -e^u - \sin v & 1 \\ -e^u + \cos v & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{\cos v - e^u}{u[e^u(\sin v - \cos v) + 1]}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)} = -\frac{1}{J} \begin{vmatrix} -e^u - \sin v & 0 \\ -e^u + \cos v & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{\sin v + e^u}{u[e^u(\sin v - \cos v) + 1]}. \end{aligned}$$

11. 设 $y=f(x, t)$, 而 $t=t(x, y)$ 是由方程 $F(x, y, t)=0$ 所确定的函数, 其中 f, F 都具有一阶连续偏导数. 试证明

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial t}}.$$

证法一 由方程组 $\begin{cases} y=f(x, t), \\ F(x, y, t)=0 \end{cases}$ 可确定两个一元隐函数 $y=y(x), t=t(x).$

分别在两个方程两端对 x 求导可得

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dx}, \\ \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dx} = 0. \end{cases}$$

移项得

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} - \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}, \\ \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x}. \end{cases}$$

当 $D = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial t} \end{vmatrix} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ 时, 解方程组得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{D} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & -\frac{\partial f}{\partial t} \\ -\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial t} \end{vmatrix} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial F}{\partial y}}.$$

证法二 分别在 $y=f(x,t)$ 及 $F(x,y,t)=0$ 两端求全微分, 得

$$\begin{cases} dy = f_x dx + f_t dt, \\ F_x dx + F_y dy + F_t dt = 0. \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

由(2), 得

$$F_t dt = -(F_x dx + F_y dy). \quad (3)$$

将 F_t 乘以(1)式两端, 并以(3)式代入, 得

$$F_t dy = f_x F_t dx - f_t (F_x dx + F_y dy),$$

即

$$(F_t + f_t F_y) dy = (f_x F_t - f_t F_x) dx.$$

故当 $F_t + f_t F_y \neq 0$ 时, 有 $\frac{dy}{dx} = \frac{f_x F_t - f_t F_x}{F_t + f_t F_y}$.

习题 9-6

多元函数微分学的几何应用

1. 设 $f(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$, $g(t) = g_1(t)\mathbf{i} + g_2(t)\mathbf{j} + g_3(t)\mathbf{k}$, $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = \mathbf{u}$, $\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = \mathbf{v}$, 证明 $\lim_{t \rightarrow t_0} [f(t) \times g(t)] = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

证

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [f(t) \times g(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) \\ g_1(t) & g_2(t) & g_3(t) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow t_0} \left(f_2(t)g_3(t) - f_3(t)g_2(t), f_3(t)g_1(t) - f_1(t)g_3(t), \right. \\
&\quad \left. f_1(t)g_2(t) - f_2(t)g_1(t) \right) \\
&= \left(\lim_{t \rightarrow t_0} [f_2(t)g_3(t) - f_3(t)g_2(t)], \lim_{t \rightarrow t_0} [f_3(t)g_1(t) - \right. \\
&\quad \left. f_1(t)g_3(t)], \lim_{t \rightarrow t_0} [f_1(t)g_2(t) - f_2(t)g_1(t)] \right), \\
&= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t) & \lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t) & \lim_{t \rightarrow t_0} f_3(t) \\ \lim_{t \rightarrow t_0} g_1(t) & \lim_{t \rightarrow t_0} g_2(t) & \lim_{t \rightarrow t_0} g_3(t) \end{vmatrix} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}.
\end{aligned}$$

这个结果表示:两个向量值函数的向量积的极限等于它们各自的极限(向量)的向量积,即

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [\mathbf{f}(t) \times \mathbf{g}(t)] = [\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{f}(t)] \times [\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{g}(t)].$$

2. 下列各题中, $\mathbf{r} = \mathbf{f}(t)$ 是空间中的质点 M 在时刻 t 的位置,求质点 M 在时刻 t_0 的速度向量和加速度向量,以及在任意时刻 t 的速率.

$$(1) \mathbf{r} = \mathbf{f}(t) = (t+1)\mathbf{i} + (t^2-1)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}, t_0 = 1;$$

$$(2) \mathbf{r} = \mathbf{f}(t) = (2\cos t)\mathbf{i} + (3\sin t)\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}, t_0 = \frac{\pi}{2};$$

$$(3) \mathbf{r} = \mathbf{f}(t) = [2\ln(t+1)]\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}, t_0 = 1.$$

$$\text{解 } (1) \text{ 速度向量 } \mathbf{v}_0 = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \Big|_{t=1} = (\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \Big|_{t=1} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k},$$

$$\text{加速度向量 } \mathbf{a}_0 = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \Big|_{t=1} = 2\mathbf{j},$$

$$\text{速率 } |\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}| = \sqrt{5 + 4t^2}.$$

$$(2) \text{ 速度向量 } \mathbf{v}_0 = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = [(-2\sin t)\mathbf{i} + (3\cos t)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}] \Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{k},$$

$$\text{加速度向量 } \mathbf{a}_0 = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = [(-2\cos t)\mathbf{i} - (3\sin t)\mathbf{j}] \Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = -3\mathbf{j},$$

$$\text{速率 } |\mathbf{v}(t)| = |(-2\sin t)\mathbf{i} + (3\cos t)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}| = \sqrt{9\cos^2 t + 4\sin^2 t + 16}$$

$$= \sqrt{20 + 5\cos^2 t}.$$

$$(3) \text{ 速度向量 } \mathbf{v}_0 = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \Big|_{t=1} = \left(\frac{2}{t+1}\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t\mathbf{k} \right) \Big|_{t=1} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

$$\text{加速度向量 } \mathbf{a}_0 = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \Big|_{t=1} = \left[-\frac{2}{(t+1)^2}\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k} \right] \Big|_{t=1} = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

$$\text{速率 } |\mathbf{v}(t)| = \left| \frac{2}{t+1}\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t\mathbf{k} \right| = \sqrt{5t^2 + \frac{4}{(t+1)^2}}.$$

3. 求曲线 $r=f(t)=(t-\sin t)\mathbf{i}+(1-\cos t)\mathbf{j}+(4\sin \frac{t}{2})\mathbf{k}$ 在与 $t_0=\frac{\pi}{2}$ 相应的点处的切线及法平面方程.

解 与 $t_0=\frac{\pi}{2}$ 相应的点为 $(\frac{\pi}{2}-1, 1, 2\sqrt{2})$, 曲线在该点处的切向量为 $\mathbf{T}=f'(t_0)=(1, 1, \sqrt{2})$, 于是所求切线方程为

$$\frac{x - (\frac{\pi}{2} - 1)}{1} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$

法平面方程为

$$1 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2} + 1\right) + 1 \cdot (y - 1) + \sqrt{2}(z - 2\sqrt{2}) = 0,$$

即

$$x + y + \sqrt{2}z = \frac{\pi}{2} + 4.$$

4. 求曲线 $x=\frac{t}{1+t}, y=\frac{1+t}{t}, z=t^2$ 在对应于 $t=1$ 的点处的切线及法平面方程.

解 曲线在对应于 $t=1$ 的点为 $(\frac{1}{2}, 2, 1)$, 该点处的切向量

$$\mathbf{T} = (x'(1), y'(1), z'(1)) = \left(\frac{1}{(1+t)^2}, -\frac{1}{t^2}, 2t\right) \Big|_{t=1} = \left(\frac{1}{4}, -1, 2\right),$$

于是曲线在该点处的切线方程为

$$\frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z - 1}{2},$$

即

$$\frac{x - \frac{1}{2}}{1} = \frac{y - 2}{-4} = \frac{z - 1}{8}.$$

所求法平面方程为

$$\frac{1}{4} \left(x - \frac{1}{2}\right) - (y - 2) + 2(z - 1) = 0,$$

即

$$2x - 8y + 16z - 1 = 0.$$

5. 求曲线 $y^2=2mx, z^2=m-x$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切线及法平面方程.

解 设曲线的参数方程中的参数为 x , 将方程 $y^2=2mx$ 和 $z^2=m-x$ 两端分别对 x 求导, 得

$$2y \frac{dy}{dx} = 2m, 2z \frac{dz}{dx} = -1, \text{ 即 } \frac{dy}{dx} = \frac{m}{y}, \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{2z}.$$

所以曲线在点 (x_0, y_0, z_0) 的切向量为

$$\mathbf{T} = \left(1, \frac{m}{y_0}, -\frac{1}{2z_0}\right).$$

于是在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{\frac{m}{y_0}} = \frac{z-z_0}{-\frac{1}{2z_0}}.$$

法平面方程为 $(x-x_0) + \frac{m}{y_0}(y-y_0) - \frac{1}{2z_0}(z-z_0) = 0$.

6. 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 3x = 0, \\ 2x - 3y + 5z - 4 = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切线及法平面方程.

解法一 为了求 $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$, 在所给方程两端分别对 x 求导, 得

$$\begin{cases} 2x + 2y \frac{dy}{dx} + 2z \frac{dz}{dx} - 3 = 0, \\ 2 - 3 \frac{dy}{dx} + 5 \frac{dz}{dx} = 0. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 2y \frac{dy}{dx} + 2z \frac{dz}{dx} = -2x + 3, \\ 3 \frac{dy}{dx} - 5 \frac{dz}{dx} = 2. \end{cases}$$

当 $D = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -10y - 6z \neq 0$ 时, 解方程组得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} -2x+3 & 2z \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = \frac{10x - 4z - 15}{-10y - 6z},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 2y & -2x+3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{6x + 4y - 9}{-10y - 6z}.$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(1,1,1)} = \frac{9}{16}, \left. \frac{dz}{dx} \right|_{(1,1,1)} = -\frac{1}{16}.$$

于是在点 $(1, 1, 1)$ 处的切线方程为 $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{9} = \frac{z-1}{-1}$,

$$\text{即 } \frac{x-1}{16} = \frac{y-1}{9} = \frac{z-1}{-1}.$$

法平面方程为 $(x-1) + \frac{9}{16}(y-1) - \frac{1}{16}(z-1) = 0$,

$$\text{即 } 16x + 9y - z - 24 = 0.$$

解法二 所求曲线的切线, 也就是曲面 $x^2 + y^2 + z^2 - 3x = 0$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面与平面 $2x - 3y + 5z - 4 = 0$ 的交线, 利用曲面的切平面方程得所求切线为

$$\begin{cases} -(x-1) + 2(y-1) + 2(z-1) = 0, \\ 2x - 3y + 5z = 4. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} -x + 2y + 2z = 3, \\ 2x - 3y + 5z = 4. \end{cases}$$

这切线的方向向量为 $(16, 9, -1)$, 于是所求法平面方程为

$$16(x-1) + 9(y-1) - (z-1) = 0,$$

即

$$16x + 9y - z - 24 = 0.$$

7. 求出曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上的点, 使在该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

解 因为 $x'_t=1, y'_t=2t, z'_t=3t^2$, 设所求点对应的参数为 t_0 , 于是曲线在该点处的切向量可取为 $\mathbf{T}=(1, 2t_0, 3t_0^2)$. 已知平面的法向量为 $\mathbf{n}=(1, 2, 1)$, 由切线与平面平行, 得 $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}=0$, 即 $1+4t_0+3t_0^2=0$, 解得 $t_0=-1$ 和 $-\frac{1}{3}$. 于是所求

点为 $(-1, 1, -1)$ 或 $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27})$.

8. 求曲面 $e^z-z+xy=3$ 在点 $(2, 1, 0)$ 处的切平面及法线方程.

解 令 $F(x, y, z)=e^z-z+xy-3$, 则

$$\mathbf{n}=(F_x, F_y, F_z)=(y, x, e^z-1), \mathbf{n}\Big|_{(2,1,0)}=(1, 2, 0).$$

曲面在点 $(2, 1, 0)$ 处的切平面方程为

$$1 \cdot (x-2) + 2(y-1) + 0 \cdot (z-0) = 0,$$

即

$$x + 2y - 4 = 0.$$

曲面在点 $(2, 1, 0)$ 处的法线方程为

$$\begin{cases} \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2}, \\ z = 0. \end{cases}$$

9. 求曲面 $ax^2+by^2+cz^2=1$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面及法线方程.

解 令 $F(x, y, z)=ax^2+by^2+cz^2-1$, 则曲面在点 (x, y, z) 处的一个法向量

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= (F_x, F_y, F_z) = (2ax, 2by, 2cz) \\ &= 2(ax, by, cz), \end{aligned}$$

在点 (x_0, y_0, z_0) 处的一个法向量为 (ax_0, by_0, cz_0) , 故曲面在该点处的切平面方程为

$$ax_0(x-x_0) + by_0(y-y_0) + cz_0(z-z_0) = 0,$$

即

$$ax_0x + by_0y + cz_0z = ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2 = 1.$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{ax_0} = \frac{y-y_0}{by_0} = \frac{z-z_0}{cz_0}.$$

10. 求椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$ 上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的切平面方程.

解 设 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2-1$, 则曲面在点 (x,y,z) 处的一个法向量 $\mathbf{n}=(F_x, F_y, F_z)=(2x, 4y, 2z)$. 已知平面的法向量为 $(1, -1, 2)$, 由已知平面与所求切平面平行, 得

$$\frac{2x}{1} = \frac{4y}{-1} = \frac{2z}{2}, \text{ 即 } x = \frac{1}{2}z, y = -\frac{1}{4}z.$$

代入椭球面方程得 $\left(\frac{z}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{z}{4}\right)^2 + z^2 = 1$.

解得 $z = \pm 2\sqrt{\frac{2}{11}}$, 则 $x = \pm \sqrt{\frac{2}{11}}, y = \mp \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}$.

所以切点为 $(\pm\sqrt{\frac{2}{11}}, \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}, \pm 2\sqrt{\frac{2}{11}})$.

所求切平面方程为

$$(x \pm \sqrt{\frac{2}{11}}) - (y \mp \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}) + 2(z \pm 2\sqrt{\frac{2}{11}}) = 0,$$

即 $x - y + 2z = \pm \sqrt{\frac{11}{2}}$.

11. 求旋转椭球面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 上点 $(-1, -2, 3)$ 处的切平面与 xOy 面的夹角的余弦.

解 令 $F(x,y,z)=3x^2+y^2+z^2-16$, 曲面的法向量为

$$\mathbf{n}=(F_x, F_y, F_z)=(6x, 2y, 2z),$$

曲面在点 $(-1, -2, 3)$ 处的法向量为 $\mathbf{n}_1=\mathbf{n}|_{(-1, -2, 3)}=(-6, -4, 6)$, xOy 面的法向量为 $\mathbf{n}_2=(0, 0, 1)$, 记 \mathbf{n}_1 与 \mathbf{n}_2 的夹角为 γ , 则所求的余弦值为

$$\cos \gamma = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{6}{\sqrt{6^2+4^2+6^2} \cdot 1} = \frac{3}{\sqrt{22}}.$$

12. 试证曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ ($a>0$) 上任何点处的切平面在各坐标轴上的截距之和等于 a .

证 设 $F(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{a}$, 则曲面在点 (x,y,z) 处的一个法向量

$$\mathbf{n}=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}, \frac{1}{2\sqrt{y}}, \frac{1}{2\sqrt{z}}\right).$$

在曲面上任取一点 $M(x_0, y_0, z_0)$, 则曲面在点 M 处的切平面方程为

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0) + \frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y-y_0) + \frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z-z_0) = 0,$$

即 $\frac{x}{\sqrt{x_0}} + \frac{y}{\sqrt{y_0}} + \frac{z}{\sqrt{z_0}} = \sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0} = \sqrt{a}$,

化为截距式,得 $\frac{x}{\sqrt{ax_0}} + \frac{y}{\sqrt{ay_0}} + \frac{z}{\sqrt{az_0}} = 1$,

所以截距之和为

$$\sqrt{ax_0} + \sqrt{ay_0} + \sqrt{az_0} = \sqrt{a}(\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}) = a.$$

13. 设 $u(t)$ 、 $v(t)$ 是可导的向量值函数, 证明:

$$(1) \frac{d}{dt}[u(t) \pm v(t)] = u'(t) \pm v'(t);$$

$$(2) \frac{d}{dt}[u(t) \cdot v(t)] = u'(t) \cdot v(t) + u(t) \cdot v'(t);$$

$$(3) \frac{d}{dt}[u(t) \times v(t)] = u'(t) \times v(t) + u(t) \times v'(t).$$

证 (1)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[u(t) \pm v(t)] &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[u(t + \Delta t) \pm v(t + \Delta t)] - [u(t) \pm v(t)]}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} \pm \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = u'(t) \pm v'(t), \end{aligned}$$

其中用到了向量值函数的极限的四则运算法则.

$$\begin{aligned} (2) \frac{d}{dt}[u(t) \cdot v(t)] &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t + \Delta t) \cdot v(t + \Delta t) - u(t) \cdot v(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t + \Delta t) \cdot v(t + \Delta t) - u(t) \cdot v(t + \Delta t)}{\Delta t} + \\ &\quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t) \cdot v(t + \Delta t) - u(t) \cdot v(t)}{\Delta t} \\ &= \left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} \right] \cdot \left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} v(t + \Delta t) \right] + \left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} u(t) \right] \cdot \\ &\quad \left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \right] \\ &= u'(t) \cdot v(t) + u(t) \cdot v'(t), \end{aligned}$$

其中用到了向量值函数极限的四则运算法则以及数量积与极限运算次序的交换.

$$\begin{aligned} (3) \frac{d}{dt}[u(t) \times v(t)] &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t + \Delta t) \times v(t + \Delta t) - u(t) \times v(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t + \Delta t) \times v(t + \Delta t) - u(t) \times v(t + \Delta t) + u(t) \times v(t + \Delta t) - u(t) \times v(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} \times v(t + \Delta t) \right] + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[u(t) \times \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \right] \\ &= \left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} \right] \times \left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} v(t + \Delta t) \right] + \left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} u(t) \right] \times \left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \right] \end{aligned}$$

$$= \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t),$$

其中用到了向量值函数极限的四则运算法则以及向量积与极限运算次序的交换.

习题9-7

方向导数与梯度

1. 求函数 $z=x^2+y^2$ 在点 $(1,2)$ 处沿从点 $(1,2)$ 到点 $(2,2+\sqrt{3})$ 的方向的方向导数.

解 按题意, 方向 $\mathbf{l}=(1,\sqrt{3}), \mathbf{e}_l=\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

又 $\frac{\partial z}{\partial x}=2x, \frac{\partial z}{\partial y}=2y, \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,2)}=2, \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,2)}=4,$

故 $\frac{\partial z}{\partial l}\Big|_{(1,2)}=2 \cdot \frac{1}{2}+4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}=1+2\sqrt{3}.$

2. 求函数 $z=\ln(x+y)$ 在抛物线 $y^2=4x$ 上点 $(1,2)$ 处, 沿着这抛物线在该点处偏向 x 轴正向的切线方向的方向导数.

解 先求切线斜率: 在 $y^2=4x$ 两端分别对 x 求导, 得

$$2y \frac{dy}{dx}=4.$$

于是 $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{y}, k=\frac{dy}{dx}\Big|_{(1,2)}=1,$

切线方向 $\mathbf{l}=(1,1), \mathbf{e}_l=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$

又 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,2)}=\frac{1}{x+y}\Big|_{(1,2)}=\frac{1}{3},$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,2)}=\frac{1}{x+y}\Big|_{(1,2)}=\frac{1}{3}.$$

故 $\frac{\partial z}{\partial l}\Big|_{(1,2)}=\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$

3. 求函数 $z=1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$ 在点 $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 处沿曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在这点的内法线方向的方向导数.

解 先求切线斜率: 在 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 两端分别对 x 求导, 得

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2} \cdot \frac{dy}{dx}=0.$$

于是 $\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2 x}{a^2 y}, k=\frac{dy}{dx}\Big|_{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)}=-\frac{b}{a},$

法线斜率为

$$k' = -\frac{1}{k} = \frac{a}{b},$$

内法线方向 $\boldsymbol{l} = (-b, -a)$, $\boldsymbol{e}_l = \left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$.

又

$$\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})} = -\frac{\sqrt{2}}{a}, \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})} = -\frac{\sqrt{2}}{b}.$$

故

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial l} \Big|_{(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})} &= -\frac{\sqrt{2}}{a} \cdot \left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) - \frac{\sqrt{2}}{b} \cdot \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) \\ &= \frac{1}{ab} \sqrt{2(a^2+b^2)}. \end{aligned}$$

4. 求函数 $u = xy^2 + z^3 - xyz$ 在点 $(1, 1, 2)$ 处沿方向角为 $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$, $\gamma = \frac{\pi}{3}$

的方向的方向导数.

解 因为 $\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 - yz$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy - xz$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 3z^2 - xy$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(1,1,2)} = -1, \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(1,1,2)} = 0, \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{(1,1,2)} = 11.$$

$$\boldsymbol{e}_l = \left(\cos \frac{\pi}{3}, \cos \frac{\pi}{4}, \cos \frac{\pi}{3} \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} \right),$$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{(1,1,2)} = -1 \cdot \frac{1}{2} + 0 + 11 \cdot \frac{1}{2} = 5.$$

5. 求函数 $u = xyz$ 在点 $(5, 1, 2)$ 处沿从点 $(5, 1, 2)$ 到点 $(9, 4, 14)$ 的方向的方向导数.

解 按题意, 方向 $\boldsymbol{l} = (4, 3, 12)$, $\boldsymbol{e}_l = \left(\frac{4}{13}, \frac{3}{13}, \frac{12}{13} \right)$.

又

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz, \frac{\partial u}{\partial y} = xz, \frac{\partial u}{\partial z} = xy,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(5,1,2)} = 2, \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(5,1,2)} = 10, \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{(5,1,2)} = 5,$$

故

$$\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{(5,1,2)} = 2 \cdot \frac{4}{13} + 10 \cdot \frac{3}{13} + 5 \cdot \frac{12}{13} = \frac{98}{13}.$$

6. 求函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在曲线 $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ 上点 $(1, 1, 1)$ 处, 沿曲线在该点的切线正方向(对应于 t 增大的方向)的方向导数.

解 先求曲线在给定点的切线方向.

因为 $x'_t = 1$, $y'_t = 2t$, $z'_t = 3t^2$, 所以曲线在点 $(1, 1, 1)$ 处的切线的方向向量可取为 $\boldsymbol{T} = (1, 2, 3)$, $\boldsymbol{e}_T = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right)$.

又 $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(1,1,1)} = 2, \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(1,1,1)} = 2, \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{(1,1,1)} = 2,$

故 $\frac{\partial u}{\partial T} \Big|_{(1,1,1)} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} + 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{14}} + 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{6}{7}\sqrt{14}.$

7. 求函数 $u=x+y+z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上点 (x_0, y_0, z_0) 处, 沿球面在该点的外法线方向的方向导数.

解 设 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, 则 $F_x = 2x, F_y = 2y, F_z = 2z$, 于是球面在 (x_0, y_0, z_0) 处的外法线方向向量可取为

$$l = (F_x, F_y, F_z) \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} = (2x_0, 2y_0, 2z_0),$$

l 的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}, \cos \beta = \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}, \cos \gamma = \frac{z_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}},$$

又 $\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \frac{\partial u}{\partial z} = 1.$

故 $\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) \Big|_{(x_0, y_0, z_0)}$
 $= 1 \cdot \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} + 1 \cdot \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} + 1 \cdot \frac{z_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}$
 $= \frac{x_0 + y_0 + z_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}$
 $= x_0 + y_0 + z_0.$

8. 设 $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$, 求 $\text{grad } f(0, 0, 0)$ 及 $\text{grad } f(1, 1, 1)$.

解 $\text{grad } f(x, y, z) = f_x i + f_y j + f_z k$
 $= (2x + y + 3)i + (4y + x - 2)j + (6z - 6)k,$
 $\text{grad } f(0, 0, 0) = 3i - 2j - 6k,$
 $\text{grad } f(1, 1, 1) = 6i + 3j.$

9. 设函数 $u(x, y, z), v(x, y, z)$ 的各个偏导数都存在且连续, 证明:

(1) $\nabla(Cu) = C\nabla u$ (其中 C 为常数);

(2) $\nabla(u \pm v) = \nabla u \pm \nabla v$;

(3) $\nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v$;

(4) $\nabla\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\nabla u - u\nabla v}{v^2}.$

证 (1) $\nabla(Cu) = \left(C \frac{\partial u}{\partial x}, C \frac{\partial u}{\partial y}, C \frac{\partial u}{\partial z}\right) = C\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$

$$(2) \quad \begin{aligned} \nabla(u \pm v) &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \pm \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \pm \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \pm \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) \pm \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ &= \nabla u \pm \nabla v. \end{aligned}$$

$$(3) \quad \begin{aligned} \nabla(uv) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}(uv), \frac{\partial}{\partial y}(uv), \frac{\partial}{\partial z}(uv) \right) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}v + u \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}v + u \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}v + u \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ &= v \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) + u \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ &= v \nabla u + u \nabla v. \end{aligned}$$

$$(4) \quad \begin{aligned} \nabla\left(\frac{u}{v}\right) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{v}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{v}\right), \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u}{v}\right) \right) \\ &= \left[\frac{v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x}}{v^2}, \frac{v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y}}{v^2}, \frac{v \frac{\partial u}{\partial z} - u \frac{\partial v}{\partial z}}{v^2} \right] \\ &= \frac{1}{v} \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{u}{v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ &= \frac{v \nabla u - u \nabla v}{v^2}. \end{aligned}$$

10. 求函数 $u = xy^2z$ 在点 $P_0(1, -1, 2)$ 处变化最快的方向, 并求沿这个方向的方向导数.

$$\text{解} \quad \begin{aligned} \nabla u &= \frac{\partial u}{\partial x}i + \frac{\partial u}{\partial y}j + \frac{\partial u}{\partial z}k = y^2zi + 2xyzj + xy^2k, \\ \nabla u \Big|_{P_0} &= 2i - 4j + k. \end{aligned}$$

由方向导数与梯度的关系可知, $u = xy^2z$ 在 P_0 处沿 $n = \nabla u|_{P_0} = 2i - 4j + k$ 的方向增加最快, 其方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{P_0} = |\nabla u|_{P_0}| = |2i - 4j + k| = \sqrt{21};$$

沿 $n_1 = -\nabla u|_{P_0} = -2i + 4j - k$ 方向减少最快, 其方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial n_1} \Big|_{P_0} = -\sqrt{21}.$$



多元函数的极值及其求法

1. 已知函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某个邻域内连续, 且

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1,$$

则下述四个选项中正确的是()。

- (A) 点(0,0)不是 $f(x,y)$ 的极值点.
- (B) 点(0,0)是 $f(x,y)$ 的极大值点.
- (C) 点(0,0)是 $f(x,y)$ 的极小值点.
- (D) 根据所给条件无法判断(0,0)是否为 $f(x,y)$ 的极值点.

解 令 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, 则由题意可知

$$f(x,y) = xy + \rho^4 + o(\rho^4),$$

当 $(x,y) \rightarrow (0,0)$ 时, $\rho \rightarrow 0$.

由于 $f(x,y)$ 在(0,0)附近的值主要由 xy 决定, 而 xy 在(0,0)附近符号不定, 故点(0,0)不是 $f(x,y)$ 的极值点, 应选(A).

本题也可以取两条路径 $y=x$ 和 $y=-x$ 来考虑. 当 $|x|$ 充分小时,

$$f(x,x) = x^2 + 4x^4 + o(x^4) > 0,$$

$$f(x,-x) = -x^2 + 4x^4 + o(x^4) < 0,$$

故点(0,0)不是 $f(x,y)$ 的极值点, 应选(A).

2. 求函数 $f(x,y) = 4(x-y) - x^2 - y^2$ 的极值.

解 解方程组

$$\begin{cases} f_x = 4 - 2x = 0, \\ f_y = -4 - 2y = 0, \end{cases}$$

求得驻点(2, -2).

$$\text{又 } A = f_{xx}(2, -2) = -2 < 0, B = f_{xy}(2, -2) = 0,$$

$$C = f_{yy}(2, -2) = -2, \quad AC - B^2 = 4 > 0,$$

由判定极值的充分条件知: 在点(2, -2)处, 函数取得极大值 $f(2, -2) = 8$.

3. 求函数 $f(x,y) = (6x-x^2)(4y-y^2)$ 的极值.

解 解方程组

$$\begin{cases} f_x = (6-2x)(4y-y^2) = 0, \\ f_y = (6x-x^2)(4-2y) = 0. \end{cases}$$

求得以下五组解:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 0, \\ y_2 = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 3, \\ y_3 = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = 6, \\ y_4 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_5 = 6, \\ y_5 = 4. \end{cases}$$

于是, 得驻点(0,0), (0,4), (3,2), (6,0), (6,4).

$$\begin{aligned} \text{又 } f_{xx}(x,y) &= -2(4y-y^2), \\ f_{xy}(x,y) &= 4(3-x)(2-y), \\ f_{yy}(x,y) &= -2(6x-x^2). \end{aligned}$$

由判定极值的充分条件知：

在点(0,0)处, $A=f_{xx}(0,0)=0$, $B=f_{xy}(0,0)=24$, $C=f_{yy}(0,0)=0$,
 $AC-B^2=-24^2<0$, 故 $f(0,0)$ 不是极值;

在点(0,4)处, $A=f_{xx}(0,4)=0$, $B=f_{xy}(0,4)=-24$, $C=f_{yy}(0,4)=0$,
 $AC-B^2=-24^2<0$, 故 $f(0,4)$ 不是极值;

在点(3,2)处, $A=f_{xx}(3,2)=-8<0$, $B=f_{xy}(3,2)=0$, $C=f_{yy}(3,2)=-18$, $AC-B^2=144>0$, 故函数在点(3,2)处取得极大值, 极大值为 $f(3,2)=36$;

在点(6,0)处, $A=f_{xx}(6,0)=0$, $B=f_{xy}(6,0)=-24$, $C=f_{yy}(6,0)=0$,
 $AC-B^2=-24^2<0$, 故 $f(6,0)$ 不是极值;

在点(6,4)处, $A=f_{xx}(6,4)=0$, $B=f_{xy}(6,4)=24$, $C=f_{yy}(6,4)=0$,
 $AC-B^2=-24^2<0$, 故 $f(6,4)$ 不是极值.

4. 求函数 $f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$ 的极值.

解 解方程组

$$\begin{cases} f_x = e^{2x}(2x+2y^2+4y+1) = 0, \\ f_y = e^{2x}(2y+2) = 0, \end{cases}$$

求得驻点 $(\frac{1}{2}, -1)$.

又 $A=f_{xx}\left(\frac{1}{2}, -1\right)=2e>0$, $B=f_{xy}\left(\frac{1}{2}, -1\right)=0$, $C=f_{yy}\left(\frac{1}{2}, -1\right)=2e$,
 $AC-B^2=4e^2>0$,

由判定极值的充分条件知, 在点 $(\frac{1}{2}, -1)$ 处, 函数取得极小值

$$f\left(\frac{1}{2}, -1\right) = -\frac{e}{2}.$$

5. 求函数 $z=xy$ 在适合附加条件 $x+y=1$ 下的极大值.

解 本题属条件极值问题, 易将它化为无条件极值问题.

条件 $x+y=1$ 可表示成 $y=1-x$, 代入 $z=xy$, 则问题化为求 $z=x(1-x)$ 的极大值.

由 $\frac{dz}{dx}=1-2x=0$, 得 $x=\frac{1}{2}$.

又 $\frac{d^2z}{dx^2}\Big|_{x=\frac{1}{2}}=-2<0$.

由一元函数取得极值的充分条件知, $x=\frac{1}{2}$ 为极大值点, 极大值为

$$z=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}.$$

6. 从斜边之长为 l 的一切直角三角形中, 求有最大周长的直角三角形.

解 设直角三角形的两直角边之长分别为 x, y , 则周长

$$S = x + y + l \quad (0 < x < l, 0 < y < l).$$

本题是求周长 S 在 $x^2 + y^2 = l^2$ 条件下的条件极值问题.

作拉格朗日函数

$$L(x, y) = x + y + l + \lambda(x^2 + y^2 - l^2).$$

令

$$\begin{cases} L_x = 1 + 2\lambda x = 0, \\ L_y = 1 + 2\lambda y = 0. \end{cases}$$

解得 $x = y = -\frac{1}{2\lambda}$. 代入 $x^2 + y^2 = l^2$, 得 $\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2l}$, 于是 $x = y = \frac{l}{\sqrt{2}}$, $(\frac{l}{\sqrt{2}}, \frac{l}{\sqrt{2}})$ 是惟一可能的极值点, 根据问题性质可知这种最大周长的直角三角形一定存在, 所以在斜边之长为 l 的一切直角三角形中, 周长最大的是等腰直角三角形.

注 条件极值的解法, 一般是采用拉格朗日乘数法求解. 但要注意利用乘数法所得到的点只是可能极值点, 究竟这些点是否极值点以及是极大点还是极小点尚需进一步判断. 在实际问题中往往可根据问题本身的性质来判定. 在特殊情形下, 条件极值问题可化为无条件极值问题求解.

7. 要造一个容积等于定数 k 的长方体无盖水池, 应如何选择水池的尺寸, 方可使它的表面积最小.

解 设水池的长为 a , 宽为 b , 高为 c , 则水池的表面积为

$$A = ab + 2ac + 2bc \quad (a > 0, b > 0, c > 0).$$

约束条件 $abc = k$.

作拉格朗日函数 $L(a, b, c) = ab + 2ac + 2bc + \lambda(abc - k)$.

由

$$\begin{cases} L_a = b + 2c + \lambda bc = 0, \\ L_b = a + 2c + \lambda ac = 0, \\ L_c = 2a + 2b + \lambda ab = 0, \\ abc = k, \end{cases}$$

解得 $a = b = \sqrt[3]{2k}$, $c = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2k}$, $\lambda = -\sqrt[3]{\frac{32}{k}}$.

$(\sqrt[3]{2k}, \sqrt[3]{2k}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{2k})$ 是惟一可能的极值点, 由问题本身可知 A 一定有最小值, 所以表面积最小的水池的长和宽都应为 $\sqrt[3]{2k}$, 高为 $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2k}$.

8. 在平面 xOy 上求一点, 使它到 $x=0, y=0$ 及 $x+2y-16=0$ 三直线的距离平方之和为最小.

解 设所求点为 (x, y) , 则此点到三直线的距离依次为: $|y|$, $|x|$, $\frac{|x+2y-16|}{\sqrt{5}}$, 三距离平方之和为

$$z = x^2 + y^2 + \frac{1}{5}(x+2y-16)^2.$$

由

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + \frac{2}{5}(x+2y-16) = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + \frac{4}{5}(x+2y-16) = 0 \end{cases}$$

求得惟一可能的极值点 $(\frac{8}{5}, \frac{16}{5})$. 根据问题本身可知, 距离平方和最小的点必定存在, 故所求点即为 $(\frac{8}{5}, \frac{16}{5})$.

9. 将周长为 $2p$ 的矩形绕它的一边旋转而构成一个圆柱体. 问矩形的边长各为多少时, 才可使圆柱体的体积为最大?

解 设矩形的一边长为 x , 则另一边长为 $p-x$, 假设矩形绕长为 $p-x$ 的一边旋转, 则旋转所成圆柱体的体积为 $V=\pi x^2(p-x)$. 由

$$\frac{dV}{dx} = 2\pi x(p-x) - \pi x^2 = \pi x(2p-3x) = 0,$$

求得驻点为 $x=\frac{2}{3}p$.

由于驻点惟一, 由题意又可知这种圆柱体一定有最大值, 所以当矩形的边长为 $\frac{2p}{3}$ 和 $\frac{p}{3}$ 时, 绕短边旋转所得圆柱体体积最大.

10. 求内接于半径为 a 的球且有最大体积的长方体.

解 设球面方程为 $x^2+y^2+z^2=a^2$, (x, y, z) 是它的内接长方体在第一卦限内的一个顶点, 则此长方体的长、宽、高分别为 $2x, 2y, 2z$, 体积为

$$V = 2x \cdot 2y \cdot 2z = 8xyz.$$

令

$$L(x, y, z) = 8xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - a^2),$$

由

$$\begin{cases} L_x = 8yz + 2\lambda x = 0, \\ L_y = 8xz + 2\lambda y = 0, \\ L_z = 8xy + 2\lambda z = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 4yz + \lambda x = 0, \\ 4xz + \lambda y = 0, \\ 4xy + \lambda z = 0, \end{cases}$$

解得 $x=y=z=-\frac{\lambda}{4}$, 代入 $x^2+y^2+z^2=a^2$, 得 $\lambda=-\frac{4}{\sqrt{3}}a$, 故 $(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}})$ 为惟一可能的极值点, 由于内接于球且有最大体积的长方体必定存在, 所以当长方体

的长、宽、高都为 $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ 时其体积最大.

11. 抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一椭圆, 求这椭圆上的点到原点的距离的最大值与最小值.

解 设椭圆上的点为 (x, y, z) , 则椭圆上的点到原点的距离平方为

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

x, y, z 满足条件: $z=x^2+y^2$, $x+y+z=1$.

作拉格朗日函数

$$L = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(z - x^2 - y^2) + \mu(x + y + z - 1).$$

令

$$\begin{cases} L_x = 2x - 2\lambda x + \mu = 0, \\ L_y = 2y - 2\lambda y + \mu = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} L_z = 2z + \lambda + \mu = 0, \\ L_\lambda = z - x^2 - y^2 = 0, \\ L_\mu = x + y + z - 1 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

$$(3)$$

(1)-(2), 得

$$(1-\lambda)(x-y)=0.$$

故有 $\lambda=1$ 或 $x=y$.

由 $\lambda=1 \Rightarrow \mu=0$, $z=-\frac{1}{2}$, 不合题意, 故舍去.

将 $x=y$ 代入 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=1$, 得

$$z = 2x^2, 2x+z = 1 \Rightarrow 2x^2+2x-1 = 0.$$

解得

$$x = y = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}, z = 2 \mp \sqrt{3}.$$

于是得到两个可能的极值点:

$$M_1\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, 2-\sqrt{3}\right), M_2\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, 2+\sqrt{3}\right).$$

由题意可知这种距离的最大值和最小值一定存在, 所以距离的最大值和最小值分别在这两点处取得. 而

$$2\left(\frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}\right)^2 + (2 \mp \sqrt{3})^2 = 9 \mp 5\sqrt{3},$$

故最大值与最小值分别为

$$d_{\max} = d_{M_2} = \sqrt{9 + 5\sqrt{3}}, d_{\min} = d_{M_1} = \sqrt{9 - 5\sqrt{3}}.$$

12. 设有一圆板占有平面闭区域 $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$. 该圆板被加热, 以致在点 (x, y) 的温度是

$$T = x^2 + 2y^2 - x,$$

求该圆板的最热点和最冷点.

解 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x} = 2x - 1 = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial y} = 4y = 0, \end{cases}$$

求得驻点 $(\frac{1}{2}, 0)$. $T_1 = T \Big|_{(\frac{1}{2}, 0)} = -\frac{1}{4}$.

$$\text{在边界 } x^2 + y^2 = 1 \text{ 上, } T = 2 - (x^2 + x) = \frac{9}{4} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2,$$

当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, 有边界上的最大值 $T_2 = \frac{9}{4}$, $x = 1$ 时, 有边界上的最小值 $T_3 = 0$.

比较 T_1, T_2 及 T_3 的值知, 最热点在 $(-\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2})$, $T_{\max} = \frac{9}{4}$, 最冷点在 $(\frac{1}{2}, 0)$, $T_{\min} = -\frac{1}{4}$.

13. 形状为椭球 $4x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 16$ 的空间探测器进入地球大气层, 其表面开始受热, 1 小时后在探测器的点 (x, y, z) 处的温度 $T = 8x^2 + 4yz - 16z + 600$, 求探测器表面最热的点.

解 作拉格朗日函数

$$L = 8x^2 + 4yz - 16z + 600 + \lambda(4x^2 + y^2 + 4z^2 - 16).$$

令

$$\begin{cases} L_x = 16x + 8\lambda x = 0, \\ L_y = 4z + 2\lambda y = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} L_z = 4y - 16 + 8\lambda z = 0. \end{cases} \quad (2)$$

$$(3)$$

由(1)得 $x = 0$ 或 $\lambda = -2$.

若 $\lambda = -2$, 代入(2)、(3), 得 $y = z = -\frac{4}{3}$. 再将 $y = z = -\frac{4}{3}$ 代入约束条件

$$4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16, \quad (4)$$

得 $x = \pm \frac{4}{3}$. 于是得到两个可能的极值点: $M_1 \left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$,

$$M_2 \left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right).$$

若 $x = 0$, 由(2)、(3)、(4)解得 $\lambda = 0, y = 4, z = 0; \lambda = \sqrt{3}, y = -2, z = \sqrt{3}; \lambda = -\sqrt{3}, y = -2, z = -\sqrt{3}$. 于是得到另外三个可能极值点: $M_3(0, 4, 0)$, $M_4(0, -2, \sqrt{3})$, $M_5(0, -2, -\sqrt{3})$.

比较 T 在上述五个可能极值点处的数值知: $T \Big|_{M_1} = T \Big|_{M_2} = \frac{1928}{3}$ 为最大, 故探测器表面最热的点为 $M \left(\pm \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$.

1. 求函数 $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ 在点 $(1, -2)$ 的泰勒公式.

$$\text{解 } f(1, -2) = 5, f_x(1, -2) = (4x - y - 6)|_{(1, -2)} = 0,$$

$$f_y(1, -2) = (-x - 2y - 3)|_{(1, -2)} = 0,$$

$$f_{xx}(1, -2) = 4, f_{xy}(1, -2) = -1, f_{yy}(1, -2) = -2.$$

函数为 2 次多项式, 3 阶及 3 阶以上的各偏导数均为零. 又

$$h = x - 1, k = y + 2.$$

将以上各项代入泰勒公式, 便得

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(1, -2) + (x - 1)f_x(1, -2) + (y + 2)f_y(1, -2) + \frac{1}{2!}[(x - 1)^2 \cdot \\ &\quad f_{xx}(1, -2) + 2(x - 1)(y + 2)f_{xy}(1, -2) + (y + 2)^2 f_{yy}(1, -2)] \\ &= 5 + \frac{1}{2}[4(x - 1)^2 - 2(x - 1)(y + 2) - 2(y + 2)^2] \\ &= 5 + 2(x - 1)^2 - (x - 1)(y + 2) - (y + 2)^2. \end{aligned}$$

2. 求函数 $f(x, y) = e^x \ln(1+y)$ 在点 $(0, 0)$ 的三阶泰勒公式.

$$\text{解 } f_x(x, y) = e^x \ln(1+y), \quad f_y(x, y) = \frac{e^x}{1+y},$$

$$f_{xx}(x, y) = e^x \ln(1+y), \quad f_{xy}(x, y) = \frac{e^x}{1+y},$$

$$f_{yy}(x, y) = -\frac{e^x}{(1+y)^2}, \quad f_{xxx}(x, y) = e^x \ln(1+y),$$

$$f_{xxy}(x, y) = \frac{2e^x}{(1+y)^3}.$$

$$\text{于是 } \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right) f(0, 0) = h f_x(0, 0) + k f_y(0, 0) = k,$$

$$\begin{aligned} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(0, 0) &= h^2 f_{xx}(0, 0) + 2hk f_{xy}(0, 0) + k^2 f_{yy}(0, 0) \\ &= 2hk - k^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(0, 0) &= h^3 f_{xxx}(0, 0) + 3h^2 k f_{xxy}(0, 0) + 3hk^2 f_{xyy}(0, 0) + \\ &\quad k^3 f_{yyy}(0, 0) \\ &= 3h^2 k - 3hk^2 + 2k^3. \end{aligned}$$

又

$$f(0, 0) = 0, h = x, k = y.$$

将以上各项代入三阶泰勒公式, 便得

$$e^x \ln(1+y) = y + \frac{1}{2!}(2xy - y^2) + \frac{1}{3!}(3x^2y - 3xy^2 + 2y^3) + R_3,$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } R_3 &= \frac{1}{4!} \left[\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^4 f(\theta h, \theta k) \right]_{h=x, k=y} \\ &= \frac{e^{\theta x}}{24} \left[x^4 \ln(1+\theta y) + \frac{4x^3 y}{1+\theta y} - \frac{6x^2 y^2}{(1+\theta y)^2} + \frac{8xy^3}{(1+\theta y)^3} - \frac{6y^4}{(1+\theta y)^4} \right], (0 < \theta < 1). \end{aligned}$$

3. 求函数 $f(x, y) = \sin x \sin y$ 在点 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ 的二阶泰勒公式.

解 $f_x(x, y) = \cos x \sin y, \quad f_y(x, y) = \sin x \cos y,$

$$f_{xx}(x, y) = -\sin x \sin y, \quad f_{xy}(x, y) = \cos x \cos y,$$

$$f_{yy}(x, y) = -\sin x \sin y, \quad f_{xx}(x, y) = -\cos x \sin y,$$

$$f_{xy}(x, y) = -\sin x \cos y, \quad f_{yy}(x, y) = -\cos x \sin y,$$

$$f_{yy}(x, y) = -\sin x \cos y.$$

$$\text{于是 } \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right) = h f_x \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right) + k f_y \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} h + \frac{1}{2} k,$$

$$\begin{aligned} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right) &= h^2 f_{xx} \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right) + 2hk f_{xy} \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right) + k^2 f_{yy} \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right) \\ &= -\frac{1}{2} h^2 + hk - \frac{1}{2} k^2. \end{aligned}$$

又

$$f \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2}, h = x - \frac{\pi}{4}, k = y - \frac{\pi}{4}.$$

将以上各项代入二阶泰勒公式,便得

$$\begin{aligned} \sin x \sin y &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2} \left(y - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2!} \left[-\frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \left(y - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{2} \left(y - \frac{\pi}{4} \right)^2 \right] + R_2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2} \left(y - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{4} \left[\left(x - \frac{\pi}{4} \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. 2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \left(y - \frac{\pi}{4} \right) + \left(y - \frac{\pi}{4} \right)^2 \right] + R_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } R_2 &= \frac{1}{3!} \left[\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 f(\xi, \eta) \right]_{h=x-\frac{\pi}{4}, k=y-\frac{\pi}{4}} \\ &= -\frac{1}{6} \left[\cos \xi \sin \eta \cdot \left(x - \frac{\pi}{4} \right)^3 + 3 \sin \xi \cos \eta \cdot \left(x - \frac{\pi}{4} \right)^2 \left(y - \frac{\pi}{4} \right) + \right. \\ &\quad \left. 3 \cos \xi \sin \eta \cdot \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \left(y - \frac{\pi}{4} \right)^2 + \sin \xi \cos \eta \cdot \left(y - \frac{\pi}{4} \right)^3 \right], \\ \xi &= \frac{\pi}{4} + \theta \left(x - \frac{\pi}{4} \right), \eta = \frac{\pi}{4} + \theta \left(y - \frac{\pi}{4} \right), 0 < \theta < 1. \end{aligned}$$

4. 利用函数 $f(x, y) = x^y$ 的三阶泰勒公式,计算 $1.1^{1.02}$ 的近似值.

解 先求函数 $f(x, y) = x^y$ 在点 $(1, 1)$ 的三阶泰勒公式.

$$\begin{aligned}
 f_x(1,1) &= yx^{y-1} \Big|_{(1,1)} = 1, f_y(1,1) = x^y \ln x \Big|_{(1,1)} = 0, \\
 f_{xx}(1,1) &= y(y-1)x^{y-2} \Big|_{(1,1)} = 0, \\
 f_{xy}(1,1) &= (x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x) \Big|_{(1,1)} = 1, \\
 f_{yy}(1,1) &= x^y \ln^2 x \Big|_{(1,1)} = 0, f_{xx}(1,1) = y(y-1)(y-2)x^{y-3} \Big|_{(1,1)} = 0, \\
 f_{xy}(1,1) &= [(2y-1)x^{y-2} + y(y-1)x^{y-2} \ln x] \Big|_{(1,1)} = 1, \\
 f_{yy}(1,1) &= [2x^{y-1} \ln x + yx^{y-1} \ln^2 x] \Big|_{(1,1)} = 0, \\
 f_{yy}(1,1) &= x^y \ln^3 x \Big|_{(1,1)} = 0.
 \end{aligned}$$

又 $f(1,1) = 1, h = x - 1, k = y - 1.$

将以上各项代入三阶泰勒公式,便得

$$\begin{aligned}
 x^y &= 1 + (x-1) + \frac{1}{2!}[2(x-1)(y-1)] + \frac{1}{3!}[3(x-1)^2(y-1)] + R_3 \\
 &= 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2(y-1) + R_3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{因此 } 1.1^{1.02} &\approx 1 + 0.1 + 0.1 \times 0.02 + \frac{1}{2} \times 0.1^2 \times 0.02 \\
 &= 1 + 0.1 + 0.002 + 0.0001 = 1.1021.
 \end{aligned}$$

5. 求函数 $f(x,y) = e^{x+y}$ 在点 $(0,0)$ 的 n 阶泰勒公式.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } f(0,0) &= 1, f_x(0,0) = e^{x+y} \Big|_{(0,0)} = 1, f_y(0,0) = e^{x+y} \Big|_{(0,0)} = 1, \dots, \\
 f_{x^m y^{n-m}}^{(n)}(0,0) &= e^{x+y} \Big|_{(0,0)} = 1 \quad (m=0,1,\dots,n).
 \end{aligned}$$

又 $h=x, k=y.$

将以上各项代入 n 阶泰勒公式,便得

$$\begin{aligned}
 e^{x+y} &= 1 + (x+y) + \frac{1}{2!}(x^2 + 2xy + y^2) + \frac{1}{3!}(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) \\
 &\quad + \dots + \frac{1}{n!}(x+y)^n + R_n = \sum_{k=0}^n \frac{(x+y)^k}{k!} + R_n,
 \end{aligned}$$

$$\text{其中 } R_n = \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta(x+y)} \quad (0 < \theta < 1).$$

习题 9-10

最小二乘法

1. 某种合金的含铅量百分比(%)为 p , 其熔解温度(℃)为 θ , 由实验测得 p 与 θ 的数据如下表:

$p/\%$	36.9	46.7	63.7	77.8	84.0	87.5
$\theta/^\circ\text{C}$	181	197	235	270	283	292

试用最小二乘法建立 θ 与 p 之间的经验公式 $\theta = ap + b$.

解 设 M 是各个数据的偏差平方和, 即

$$M = \sum_{i=1}^6 [\theta_i - (ap_i + b)]^2.$$

令

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial a} = -\sum_{i=1}^6 2p_i[\theta_i - (ap_i + b)] = 0, \\ \frac{\partial M}{\partial b} = -\sum_{i=1}^6 2[\theta_i - (ap_i + b)] = 0. \end{cases}$$

整理, 得

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^6 p_i^2 + b \sum_{i=1}^6 p_i = \sum_{i=1}^6 \theta_i p_i, \\ a \sum_{i=1}^6 p_i + 6b = \sum_{i=1}^6 \theta_i. \end{cases}$$

计算, 得 $\sum_{i=1}^6 p_i^2 = 28365.28$, $\sum_{i=1}^6 p_i = 396.6$,
 $\sum_{i=1}^6 \theta_i p_i = 101176.3$, $\sum_{i=1}^6 \theta_i = 1458$.

代入方程组, 得

$$\begin{cases} 28365.28a + 396.6b = 101176.3, \\ 396.6a + 6b = 1458. \end{cases}$$

解得

$$a = \frac{4802.5}{2150.02} = 2.234,$$

$$b = \frac{572.0}{6} = 95.33.$$

所以经验公式为 $\theta = 2.234p + 95.33$.

2. 已知一组实验数据为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$. 现若假定经验公式是

$$y = ax^2 + bx + c.$$

试按最小二乘法建立 a, b, c 应满足的三元一次方程组.

解 设 M 是各个数据的偏差平方和, 即

$$M = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]^2.$$

令

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] \cdot x_i^2 = 0, \\ \frac{\partial M}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] \cdot x_i = 0, \\ \frac{\partial M}{\partial c} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] = 0. \end{cases}$$

整理,得 a, b, c 应满足的三元一次方程组如下:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i + nc = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases}$$

总习题九

1. 在“充分”、“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内:

(1) $f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微分是 $f(x, y)$ 在该点连续的_____条件. $f(x, y)$ 在点 (x, y) 连续是 $f(x, y)$ 在该点可微分的_____条件.

(2) $z=f(x, y)$ 在点 (x, y) 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 存在是 $f(x, y)$ 在该点可微分的_____条件. $z=f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微分是函数在该点的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 存在的_____条件.

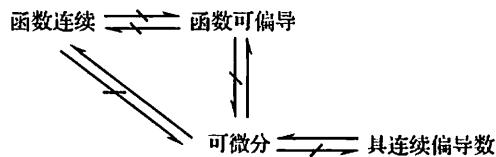
(3) $z=f(x, y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x, y) 存在且连续是 $f(x, y)$ 在该点可微分的_____条件.

(4) 函数 $z=f(x, y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 在区域 D 内连续是这两个二阶混合偏导数在 D 内相等的_____条件.

解 (1) 充分, 必要. (2) 必要, 充分.

(3) 充分. (4) 充分.

注 本题结果给出了二元函数连续、可偏导(两个偏导数均存在)、可微及具有连续偏导数之间的联系,用图表可表示为



2. 选择下述题中给出的四个结论中一个正确的结论:

设函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某邻域内有定义, 且 $f_x(0, 0)=3, f_y(0, 0)=-1$, 则有_____.

- (A) $dz|_{(0,0)} = 3dx - dy$.
- (B) 曲面 $z = f(x, y)$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的一个法向量为 $(3, -1, 1)$.
- (C) 曲线 $\begin{cases} z = f(x, y), \\ y = 0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的一个切向量为 $(1, 0, 3)$.
- (D) 曲线 $\begin{cases} z = f(x, y), \\ y = 0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的一个切向量为 $(3, 0, 1)$.

解 函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处的两个偏导数存在, 不一定可微分, 故(A)不对.

曲面 $z = f(x, y)$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 处的一个法向量是 $(3, -1, -1)$, 而不是 $(3, -1, 1)$, 故(B)不对.

取 x 为参数, 则曲线 $x = x, y = 0, z = f(x, 0)$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 处的一个切向量为 $(1, 0, 3)$, 故(C)正确.

3. 求函数 $f(x, y) = \frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$ 的定义域, 并求 $\lim_{(x,y)\rightarrow(\frac{1}{2},0)} f(x, y)$.

解 函数的定义域为 $D = \{(x, y) | 0 < x^2 + y^2 < 1, y^2 \leqslant 4x\}$.

因为点 $(\frac{1}{2}, 0) \in D$, $f(x, y)$ 为初等函数, 所以

$$\lim_{(x,y)\rightarrow(\frac{1}{2},0)} f(x, y) = f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{\sqrt{2}}{\ln \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\ln 3 - \ln 4}.$$

* 4. 证明极限 $\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ 不存在.

证 取两条趋于 $(0, 0)$ 的路径, $c_1: x = 0, c_2: y^2 = x$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\rightarrow(0,0) \\ (x,y)\in c_1}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y)\rightarrow(0,0) \\ x=0}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = 0;$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\rightarrow(0,0) \\ (x,y)\in c_2}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y)\rightarrow(0,0) \\ y^2=x}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{x\rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}.$$

由于 (x, y) 分别沿 c_1, c_2 趋于 $(0, 0)$ 时 $f(x, y)$ 的极限不相等, 故

$\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ 不存在.

5. 设

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

求 $f_x(x, y)$ 及 $f_y(x, y)$.

解 当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时,

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{2xy(x^2 + y^2) - x^2 y \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2(x^2 + y^2) - x^2 y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

当 $x^2 + y^2 = 0$ 时,

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0,$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta y} = 0,$$

故

$$f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

$$f_y(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

6. 求下列函数的一阶和二阶偏导数:

(1) $z = \ln(x + y^2)$; (2) $z = x^y$.

解 (1) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x + y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x + y^2)^2},$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x + y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(x + y^2) - 4y^2}{(x + y^2)^2} = \frac{2(x - y^2)}{(x + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x + y^2} \right) = -\frac{2y}{(x + y^2)^2}.$$

(2) $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2},$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^y \ln^2 x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (yx^{y-1}) = x^{y-1} + y \cdot x^{y-1} \ln x.$$

7. 求函数 $z = \frac{xy}{x^2 - y^2}$ 当 $x=2, y=1, \Delta x=0.01, \Delta y=0.03$ 时的全增量和全微分.

解 $\Delta z = \frac{(2.01) \cdot (1.03)}{(2.01)^2 - (1.03)^2} - \frac{2}{3} = 0.02.$

又 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-(y^3 + x^2 y)}{(x^2 - y^2)^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^3 + xy^2}{(x^2 - y^2)^2},$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(2,1)} = -\frac{5}{9}, \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(2,1)} = \frac{10}{9}.$$

故

$$dz \Big|_{y=1, \Delta y=0.03} = \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(2,1)} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(2,1)} \cdot \Delta y = 0.03.$$

* 8. 设

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

证明: $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续且偏导数存在, 但不可微分.

证 因为 $0 \leq \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \leq \frac{(x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0,$$

所以

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0.$$

又 $f(0,0)=0$, 故 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0)$, 即 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0,$$

$$f_y(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0,0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta y} = 0.$$

$$\Delta z - [f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y] = \frac{(\Delta x)^2 \cdot (\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{3/2}},$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y = \Delta x}} \frac{\frac{(\Delta x)^2 \cdot (\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{3/2}}}{\rho} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^4}{[2(\Delta x)^2]^2} = \frac{1}{4} \neq 0,$$

故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处偏导数存在, 但不可微分.

9. 设 $u=x^y$, 而 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ 都是可微函数, 求 $\frac{du}{dt}$.

$$\text{解 } \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} = yx^{y-1} \cdot \varphi'(t) + x^y \ln x \cdot \psi'(t).$$

10. 设 $z=f(u,v,w)$ 具有连续偏导数, 而

$$u = \eta - \zeta, v = \zeta - \xi, w = \xi - \eta,$$

求 $\frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}, \frac{\partial z}{\partial \zeta}$.

$$\text{解 } \frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial \xi} = -\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial w},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial w},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \zeta} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial \zeta} = -\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}.$$

11. 设 $z=f(u, x, y)$, $u=x e^y$, 其中 f 具有连续的二阶偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = f_u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + f_x = f_u \cdot e^y + f_x$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (f_u \cdot e^y + f_x) = \left(\frac{\partial}{\partial y} f_u \right) \cdot e^y + f_u \cdot e^y + \frac{\partial}{\partial y} f_x \\ &= \left(f_{uu} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + f_{uy} \right) e^y + f_u \cdot e^y + \left(f_{ux} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + f_{xy} \right) \\ &= (f_{uu} \cdot x e^y + f_{uy}) e^y + f_u \cdot e^y + f_{ux} \cdot x e^y + f_{xy} \\ &= x e^{2y} f_{uu} + e^y f_{uy} + x e^y f_{ux} + f_{xy} + e^y f_{uu}.\end{aligned}$$

12. 设 $x=e^u \cos v$, $y=e^u \sin v$, $z=uv$, 试求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x}$.

分别在 $x=e^u \cos v$, $y=e^u \sin v$ 的两端对 x 求偏导数, 得

$$\begin{cases} e^u \cos v \frac{\partial u}{\partial x} - e^u \sin v \frac{\partial v}{\partial x} = 1, \\ e^u \sin v \frac{\partial u}{\partial x} + e^u \cos v \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

由以上方程组解得 $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-u} \cos v$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -e^{-u} \sin v$.

从而 $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{-u} (v \cos v - u \sin v)$.

同理 $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial y}$.

分别在 $x=e^u \cos v$, $y=e^u \sin v$ 的两端对 y 求偏导数, 得

$$\begin{cases} e^u \cos v \frac{\partial u}{\partial y} - e^u \sin v \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ e^u \sin v \frac{\partial u}{\partial y} + e^u \cos v \frac{\partial v}{\partial y} = 1. \end{cases}$$

由以上方程组解得 $\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-u} \sin v$, $\frac{\partial v}{\partial y} = e^{-u} \cos v$.

从而 $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{-u} (u \cos v + v \sin v)$.

13. 求螺旋线 $x=a \cos \theta$, $y=a \sin \theta$, $z=b\theta$ 在点 $(a, 0, 0)$ 处的切线及法平面方程.

解 $\frac{dx}{d\theta} = -a \sin \theta$, $\frac{dy}{d\theta} = a \cos \theta$, $\frac{dz}{d\theta} = b$.

点 $(a, 0, 0)$ 所对应的参数 $\theta=0$, 故曲线在给定点的切向量

$$\mathbf{T} = (0, a, b).$$

于是切线方程为

$$\frac{x-a}{0} = \frac{y}{a} = \frac{z}{b},$$

即

$$\begin{cases} x=a, \\ by-az=0. \end{cases}$$

法平面方程为

$$a(y-0) + b(z-0) = 0,$$

即

$$ay + bz = 0.$$

14. 在曲面 $z=xy$ 上求一点, 使这点处的法线垂直于平面 $x+3y+z+9=0$, 并写出这法线的方程.

解 设所求点为 $M(x_0, y_0, z_0)$, 曲面在该点处的一个法向量为 $\mathbf{n}=(y_0, x_0, -1)$, 平面的法向量为 $(1, 3, 1)$.

按题意, \mathbf{n} 垂直于平面, 故有

$$\frac{y_0}{1} = \frac{x_0}{3} = \frac{-1}{1}.$$

求得 $x_0 = -3$, $y_0 = -1$, $z_0 = x_0 y_0 = 3$. 于是所求点为 $M(-3, -1, 3)$, 法线方程为

$$\frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{1}.$$

15. 设 $\mathbf{e}_t = (\cos \theta, \sin \theta)$, 求函数

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2$$

在点 $(1, 1)$ 沿方向 \mathbf{l} 的方向导数, 并分别确定角 θ , 使这导数有(1)最大值, (2)最小值, (3)等于 0.

解 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y$,

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(1,1)} = 1, \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(1,1)} = 1.$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(1,1)} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(1,1)} \cos \theta + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(1,1)} \sin \theta = \cos \theta + \sin \theta.$$

因为 $\cos \theta + \sin \theta = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$,

所以 (1) 当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时, 方向导数最大, 其最大值为 $\sqrt{2}$.

(2) 当 $\theta = \frac{5}{4}\pi$ 时, 方向导数最小, 其最小值为 $-\sqrt{2}$.

(3) 当 $\theta = \frac{3}{4}\pi$ 或 $\frac{7}{4}\pi$ 时, 方向导数为 0.

16. 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处沿外法线方向的方向导数.

解 椭球面在点 M_0 处的沿外法线方向的一个向量为 $n=\left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}, \frac{z_0}{c^2}\right)$,

$$e_n = \frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}} \left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}, \frac{z_0}{c^2} \right).$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial n} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}} \left(2x_0 \cdot \frac{x_0}{a^2} + 2y_0 \cdot \frac{y_0}{b^2} + 2z_0 \cdot \frac{z_0}{c^2} \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}}. \end{aligned}$$

17. 求平面 $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1$ 和柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 的交线上与 xOy 平面距离最短的点.

解 设交线上的点为 $M(x, y, z)$, 它到 xOy 面上距离的平方为 z^2 . 问题就成为求函数 z^2 在约束条件 $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1$ 和 $x^2 + y^2 = 1$ 下的最小值问题. 作拉格朗日函数

$$L = z^2 + \lambda \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} - 1 \right) + \mu(x^2 + y^2 - 1).$$

令

$$\begin{cases} L_x = \frac{\lambda}{3} + 2\mu x = 0, \\ L_y = \frac{\lambda}{4} + 2\mu y = 0, \\ L_z = 2z + \frac{\lambda}{5} = 0. \end{cases}$$

又由约束条件, 有

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} &= 1, \\ x^2 + y^2 &= 1. \end{aligned}$$

解此方程组, 得 $x = \frac{4}{5}$, $y = \frac{3}{5}$, $z = \frac{35}{12}$. 于是, 得可能的极值点 $M_0\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{35}{12}\right)$. 由问题本身可知, 距离最短的点必定存在, 因此 M_0 就是所求的点.

18. 在第一卦限内作椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的切平面, 使该切平面与三坐

标面所围成的四面体的体积最小. 求这切平面的切点, 并求此最小体积.

解 设切点为 $M(x_0, y_0, z_0)$, $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$,

$$\mathbf{n} = (F_x, F_y, F_z) = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2} \right).$$

曲面在点 M 处的切平面方程为

$$\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{z_0}{c^2}(z - z_0) = 0,$$

即

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1.$$

于是, 切平面在三个坐标轴上的截距依次为 $\frac{a^2}{x_0}, \frac{b^2}{y_0}, \frac{c^2}{z_0}$, 切平面与三个坐标面所围成的四面体的体积为

$$V = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^2 b^2 c^2}{x_0 y_0 z_0}.$$

在 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的条件下, 求 V 的最小值, 即求分母 xyz 的最大值. 作拉格朗日函数

$$L(x, y, z) = xyz + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right).$$

令

$$\begin{cases} L_x = yz + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0, \\ L_y = xz + \frac{2\lambda y}{b^2} = 0, \\ L_z = xy + \frac{2\lambda z}{c^2} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} L_x = yz + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0, \\ L_y = xz + \frac{2\lambda y}{b^2} = 0, \\ L_z = xy + \frac{2\lambda z}{c^2} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} L_x = yz + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0, \\ L_y = xz + \frac{2\lambda y}{b^2} = 0, \\ L_z = xy + \frac{2\lambda z}{c^2} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

(1) $\cdot x + (2) \cdot y + (3) \cdot z$, 并由约束条件 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, 得

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{3},$$

从而

$$x = \frac{a}{\sqrt{3}}, y = \frac{b}{\sqrt{3}}, z = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

于是, 得可能极值点 $M\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$. 由此问题的性质知, 所求的切点为

$M\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$, 四面体的最小体积为

$$V_{\text{最小}} = \frac{\sqrt{3}}{2}abc.$$

19. 某厂家生产的一种产品同时在两个市场销售, 售价分别为 p_1 和 p_2 , 销售量分别为 q_1 和 q_2 , 需求函数分别为

$$q_1 = 24 - 0.2p_1, \quad q_2 = 10 - 0.05p_2,$$

总成本函数为

$$C = 35 + 40(q_1 + q_2).$$

试问: 厂家如何确定两个市场的售价, 能使其获得的总利润最大? 最大总利润为多少?

解法一 总收入函数为

$$R = p_1 q_1 + p_2 q_2 = 24p_1 - 0.2p_1^2 + 10p_2 - 0.05p_2^2,$$

总利润函数为

$$L = R - C = 32p_1 - 0.2p_1^2 - 0.05p_2^2 + 12p_2 - 1395.$$

由极值的必要条件, 得方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial p_1} = 32 - 0.4p_1 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial p_2} = 12 - 0.1p_2 = 0. \end{cases}$$

解此方程组, 得 $p_1 = 80, p_2 = 120$.

由问题的实际意义可知, 厂家获得总利润最大的市场售价必定存在, 故当 $p_1 = 80, p_2 = 120$ 时, 厂家所获得的总利润最大, 其最大总利润为

$$L \Big|_{p_1=80, p_2=120} = 605.$$

解法二 两个市场的价格函数分别为

$$p_1 = 120 - 5q_1, \quad p_2 = 200 - 20q_2,$$

总收入函数为

$$R = p_1 q_1 + p_2 q_2 = (120 - 5q_1)q_1 + (200 - 20q_2)q_2,$$

总利润函数为

$$\begin{aligned} L = R - C &= (120 - 5q_1)q_1 + (200 - 20q_2)q_2 - [35 + 40(q_1 + q_2)] \\ &= 80q_1 - 5q_1^2 + 160q_2 - 20q_2^2 - 35. \end{aligned}$$

由极值的必要条件, 得方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial q_1} = 80 - 10q_1 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial q_2} = 160 - 40q_2 = 0. \end{cases}$$

解此方程组得 $q_1 = 8, q_2 = 4$.

由问题的实际意义可知,当 $q_1=8, q_2=4$,即 $p_1=80, p_2=120$ 时,厂家所获得的总利润最大,其最大总利润为

$$L|_{q_1=8, q_2=4} = 605.$$

20. 设有一小山,取它的底面所在的平面为 xOy 坐标面,其底部所占的闭区域为 $D=\{(x,y) | x^2+y^2-xy \leqslant 75\}$,小山的高度函数为 $h=f(x,y)=75-x^2-y^2+xy$.

(1) 设 $M(x_0, y_0) \in D$,问 $f(x, y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大?若记此方向导数的最大值为 $g(x_0, y_0)$,试写出 $g(x_0, y_0)$ 的表达式.

(2) 现欲利用此小山开展攀岩活动,为此需要在山脚找一上山坡度最大的点作为攀岩的起点,也就是说,要在 D 的边界线 $x^2+y^2-xy=75$ 上找出(1)中的 $g(x, y)$ 达到最大值的点.试确定攀岩起点的位置.

解 (1) 由梯度与方向导数的关系知, $h=f(x, y)$ 在点 $M(x_0, y_0)$ 处沿梯度

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = (y_0 - 2x_0)\mathbf{i} + (x_0 - 2y_0)\mathbf{j}$$

方向的方向导数最大,方向导数的最大值为该梯度的模,所以

$$g(x_0, y_0) = \sqrt{(y_0 - 2x_0)^2 + (x_0 - 2y_0)^2} = \sqrt{5x_0^2 + 5y_0^2 - 8x_0y_0}.$$

(2) 欲在 D 的边界上求 $g(x, y)$ 达到最大值的点,只需求 $F(x, y)=g^2(x, y)=5x^2+5y^2-8xy$ 达到最大值的点.因此,作拉格朗日函数

$$L = 5x^2 + 5y^2 - 8xy + \lambda(75 - x^2 - y^2 + xy).$$

令

$$\begin{cases} L_x = 10x - 8y + \lambda(y - 2x) = 0, \\ L_y = 10y - 8x + \lambda(x - 2y) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

又由约束条件,有

$$75 - x^2 - y^2 + xy = 0. \quad (3)$$

(1)+(2),得

$$(x+y)(2-\lambda) = 0,$$

解得 $y=-x$ 或 $\lambda=2$.

若 $\lambda=2$,则由(1)得 $y=x$,再由(3)得 $x=y=\pm 5\sqrt{3}$.

若 $y=-x$,则由(3)得 $x=\pm 5, y=\mp 5$.

于是得到四个可能的极值点:

$$M_1(5, -5), \quad M_2(-5, 5), \quad M_3(5\sqrt{3}, 5\sqrt{3}), \quad M_4(-5\sqrt{3}, -5\sqrt{3}).$$

由于 $F(M_1)=F(M_2)=450, F(M_3)=F(M_4)=150$,故 $M_1(5, -5)$ 或 $M_2(-5, 5)$ 可作为攀岩的起点.

第十章 重积分



二重积分的概念与性质

1. 设有一平面薄板(不计其厚度), 占有 xOy 面上的闭区域 D , 薄板上分布有面密度为 $\mu = \mu(x, y)$ 的电荷, 且 $\mu(x, y)$ 在 D 上连续, 试用二重积分表达该板上的全部电荷 Q .

解 用一组曲线网将 D 分成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_i$, 其面积也记为 $\Delta\sigma_i$ ($i=1, 2, \dots, n$). 任取一点 $(\xi_i, \eta_i) \in \Delta\sigma_i$, 则 $\Delta\sigma_i$ 上分布的电荷 $\Delta Q_i \approx \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$. 通过求和、取极限, 便得到该板上的全部电荷为

$$Q = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = \iint_D \mu(x, y) d\sigma,$$

其中 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta\sigma_i\}$ 的直径.

注 以上解题过程也可用元素法简化叙述如下:

设想用曲线网将 D 分成 n 个小闭区域, 取出其中任意一个记作 $d\sigma$ (其面积也记作 $d\sigma$), (x, y) 为 $d\sigma$ 上一点, 则 $d\sigma$ 上分布的电荷近似等于 $\mu(x, y) d\sigma$, 记作

$$dQ = \mu(x, y) d\sigma \quad (\text{称为电荷元素}),$$

以 dQ 作为被积表达式, 在 D 上作重积分, 即得所求的电荷为

$$Q = \iint_D \mu(x, y) d\sigma.$$

2. 设 $I_1 = \iint_{D_1} (x^2 + y^2)^3 d\sigma$, 其中 $D_1 = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$;

又 $I_2 = \iint_{D_2} (x^2 + y^2)^3 d\sigma$, 其中 $D_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$.

试利用二重积分的几何意义说明 I_1 与 I_2 之间的关系.

解 由二重积分的几何意义知, I_1 表示底为 D_1 , 顶为曲面 $z = (x^2 + y^2)^3$ 的曲顶柱体 Ω_1 的体积; I_2 表示底为 D_2 , 顶为曲面 $z = (x^2 + y^2)^3$ 的曲顶柱体 Ω_2 的体积(图 10-1). 由于位于 D_1 上方的曲面 $z = (x^2 + y^2)^3$ 关于 yOz 面和 zOx 面均对称, 故 yOz 面和 zOx 面将 Ω_1 分成四个等积的部分, 其中位于第一卦限的部分即为 Ω_2 . 由此可知

$$I_1 = 4I_2.$$

注 (1) 本题也可利用被积函数和积分区域的对称性来解答. 设 $D_3 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$. 由于 D_1 关于 y 轴对称, 被积函数 $(x^2 + y^2)^3$ 关于 x 是偶函数, 故

$$I_1 = \iint_{D_1} (x^2 + y^2)^3 d\sigma = 2 \iint_{D_3} (x^2 + y^2)^3 d\sigma.$$

又由于 D_3 关于 x 轴对称, 被积函数 $(x^2 + y^2)^3$ 关于 y 是偶函数, 故

$$\iint_{D_3} (x^2 + y^2)^3 d\sigma = 2 \iint_{D_2} (x^2 + y^2)^3 d\sigma = 2I_2.$$

从而得

$$I_1 = 4I_2.$$

(2) 利用对称性来计算二重积分还有以下两个结论值得注意:

如果积分区域 D 关于 x 轴对称, 而被积函数 $f(x, y)$ 关于 y 是奇函数, 即 $f(x, -y) = -f(x, y)$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 0;$$

如果积分区域 D 关于 y 轴对称, 而被积函数 $f(x, y)$ 关于 x 是奇函数, 即 $f(-x, y) = -f(x, y)$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 0.$$

3. 利用二重积分定义证明:

$$(1) \iint_D d\sigma = \sigma \text{ (其中 } \sigma \text{ 为 } D \text{ 的面积);}$$

$$(2) \iint_D kf(x, y) d\sigma = k \iint_D f(x, y) d\sigma \text{ (其中 } k \text{ 为常数);}$$

$$(3) \iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma.$$

其中 $D = D_1 \cup D_2$, D_1, D_2 为两个无公共内点的闭区域.

证 (1) 由于被积函数 $f(x, y) \equiv 1$, 故由二重积分定义得

$$\begin{aligned} \iint_D d\sigma &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \sigma. \end{aligned}$$

$$(2) \iint_D kf(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n kf(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

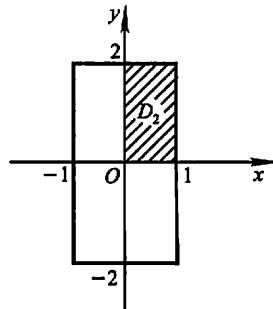


图 10-1

$$= k \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i = k \iint_D f(x, y) d\sigma.$$

(3) 因为函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上可积, 故不论把 D 怎样分割, 积分和的极限总是不变的. 因此在分割 D 时, 可以使 D_1 和 D_2 的公共边界永远是一条分割线. 这样 $f(x, y)$ 在 $D_1 \cup D_2$ 上的积分和就等于 D_1 上的积分和加 D_2 上的积分和, 记为

$$\sum_{D_1 \cup D_2} f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i = \sum_{D_1} f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i + \sum_{D_2} f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i.$$

令所有 $\Delta \sigma_i$ 的直径的最大值 $\lambda \rightarrow 0$, 上式两端同时取极限, 即得

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma.$$

4. 根据二重积分的性质, 比较下列积分的大小:

- (1) $\iint_D (x+y)^2 d\sigma$ 与 $\iint_D (x+y)^3 d\sigma$, 其中积分区域 D 是由 x 轴、 y 轴与直线 $x+y=1$ 所围成;
- (2) $\iint_D (x+y)^2 d\sigma$ 与 $\iint_D (x+y)^3 d\sigma$, 其中积分区域 D 是由圆周 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$ 所围成;

(3) $\iint_D \ln(x+y) d\sigma$ 与 $\iint_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$, 其中 D 是三角形闭区域, 三顶点分别为 $(1, 0), (1, 1), (2, 0)$;

(4) $\iint_D \ln(x+y) d\sigma$ 与 $\iint_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 3 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 1\}$.

解 (1) 在积分区域 D 上, $0 \leq x+y \leq 1$, 故有

$$(x+y)^3 \leq (x+y)^2.$$

根据二重积分的性质 4, 可得

$$\iint_D (x+y)^3 d\sigma \leq \iint_D (x+y)^2 d\sigma.$$

(2) 由于积分区域 D 位于半平面 $\{(x, y) \mid x+y \geq 1\}$ 内, 故在 D 上有 $(x+y)^2 \leq (x+y)^3$. 从而 $\iint_D (x+y)^2 d\sigma \leq \iint_D (x+y)^3 d\sigma$.

(3) 由于积分区域 D 位于条形区域 $\{(x, y) \mid 1 \leq x+y \leq 2\}$ 内, 故知区域 D 上的点满足 $0 \leq \ln(x+y) \leq 1$, 从而有 $[\ln(x+y)]^2 \leq \ln(x+y)$. 因此

$$\iint_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma \leq \iint_D \ln(x+y) d\sigma.$$

(4) 由于积分区域 D 位于半平面 $\{(x, y) \mid x+y \geq e\}$ 内, 故在 D 上有 $\ln(x+y) \geq 1$.

$y) \geq 1$, 从而 $[\ln(x+y)]^2 \geq \ln(x+y)$. 因此

$$\iint_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma \geq \iint_D \ln(x+y) d\sigma.$$

5. 利用二重积分的性质估计下列积分的值:

(1) $I = \iint_D xy(x+y) d\sigma$, 其中 $D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$;

(2) $I = \iint_D \sin^2 x \sin^2 y d\sigma$, 其中 $D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$;

(3) $I = \iint_D (x+y+1) d\sigma$, 其中 $D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$;

(4) $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$, 其中 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

解 (1) 在积分区域 D 上, $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, 从而 $0 \leq xy(x+y) \leq 2$ 又 D 的面积等于 1, 因此

$$0 \leq \iint_D xy(x+y) d\sigma \leq 2.$$

(2) 在积分区域 D 上, $0 \leq \sin x \leq 1, 0 \leq \sin y \leq 1$, 从而 $0 \leq \sin^2 x \sin^2 y \leq 1$, 又 D 的面积等于 π^2 , 因此

$$0 \leq \iint_D \sin^2 x \sin^2 y d\sigma \leq \pi^2.$$

(3) 在积分区域 D 上有 $1 \leq x+y+1 \leq 4$, D 的面积等于 2, 因此

$$2 \leq \iint_D (x+y+1) d\sigma \leq 8.$$

(4) 因为在积分区域 D 上有 $0 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, 所以有

$$9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 \leq 4(x^2 + y^2) + 9 \leq 25.$$

又 D 的面积等于 4π , 因此

$$36\pi \leq \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma \leq 100\pi.$$

习题 10-2 二重积分的计算法

1. 计算下列二重积分:

(1) $\iint_D (x^2 + y^2) d\sigma$, 其中 $D = \{(x,y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$;

(2) $\iint_D (3x + 2y) d\sigma$, 其中 D 是由两坐标轴及直线 $x+y=2$ 所围成的闭区域;

(3) $\iint_D (x^3 + 3x^2y + y^3) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$;

(4) $\iint_D x \cos(x+y) d\sigma$, 其中 D 是顶点分别为 $(0,0)$, $(\pi,0)$ 和 (π,π) 的三角形

闭区域.

$$\begin{aligned} \text{解 } (1) \quad & \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma = \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 (x^2 + y^2) dy \\ &= \int_{-1}^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^1 dx = \int_{-1}^1 \left(2x^2 + \frac{2}{3} \right) dx = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

(2) D 可用不等式表示为

$$0 \leq y \leq 2-x, 0 \leq x \leq 2.$$

于是

$$\begin{aligned} & \iint_D (3x + 2y) d\sigma = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (3x + 2y) dy \\ &= \int_0^2 [3xy + y^2]_0^{2-x} dx = \int_0^2 (4 + 2x - 2x^2) dx = \frac{20}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad & \iint_D (x^3 + 3x^2y + y^3) d\sigma = \int_0^1 dy \int_0^1 (x^3 + 3x^2y + y^3) dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x^4}{4} + x^3y + y^3x \right]_0^1 dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{4} + y + y^3 \right) dy = 1. \end{aligned}$$

(4) D 可用不等式表示为

$$0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq \pi.$$

于是

$$\begin{aligned} & \iint_D x \cos(x+y) d\sigma = \int_0^\pi x dx \int_0^x \cos(x+y) dy \\ &= \int_0^\pi x [\sin(x+y)]_0^x dx = \int_0^\pi x (\sin 2x - \sin x) dx \\ &= \int_0^\pi x d \left(\cos x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) \\ &= \left[x \left(\cos x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) \right]_0^\pi - \int_0^\pi \left(\cos x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx \\ &= \pi \left(-1 - \frac{1}{2} \right) - 0 = -\frac{3}{2}\pi. \end{aligned}$$

2. 画出积分区域, 并计算下列二重积分:

(1) $\iint_D x \sqrt{y} d\sigma$, 其中 D 是由两条抛物线 $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$ 所围成的闭区域;

(2) $\iint_D xy^2 d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 及 y 轴所围成的右半闭区域;

$$(3) \iint_D e^{x+y} d\sigma, \text{ 其中 } D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\};$$

$$(4) \iint_D (x^2 + y^2 - x) d\sigma, \text{ 其中 } D \text{ 是由直线 } y=2, y=x \text{ 及 } y=2x \text{ 所围成的闭区域.}$$

解 (1) D 可用不等式表示为

$$x^2 \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 1 \text{ (图 10-2).}$$

于是

$$\begin{aligned} \iint_D x \sqrt{y} d\sigma &= \int_0^1 x dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \sqrt{y} dy \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 x \left[y^{\frac{3}{2}} \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{3} \int_0^1 (x^{\frac{7}{4}} - x^4) dx \\ &= \frac{6}{55}. \end{aligned}$$

(2) D 可用不等式表示为

$$0 \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}, -2 \leq y \leq 2 \text{ (图 10-3),}$$

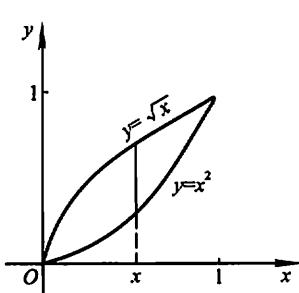


图 10-2

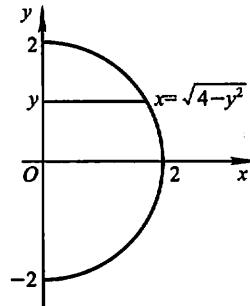


图 10-3

故

$$\begin{aligned} \iint_D xy^2 d\sigma &= \int_{-2}^2 y^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} x dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 y^2 (4 - y^2) dy = \frac{64}{15}. \end{aligned}$$

(3) 如图 10-4, $D = D_1 \cup D_2$, 其中

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y) \mid -x - 1 \leq y \leq x + 1, -1 \leq x \leq 0\}; \\ D_2 &= \{(x, y) \mid x - 1 \leq y \leq -x + 1, 0 \leq x \leq 1\}. \end{aligned}$$

因此

$$\iint_D e^{x+y} d\sigma = \iint_{D_1} e^{x+y} d\sigma + \iint_{D_2} e^{x+y} d\sigma$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^0 e^x dx \int_{-x-1}^{x+1} e^y dy + \int_0^1 e^x dx \int_{x-1}^{-x+1} e^y dy \\
&= \int_{-1}^0 (e^{2x+1} - e^{-1}) dx + \int_0^1 (e - e^{2x-1}) dx \\
&= e - e^{-1}.
\end{aligned}$$

(4) $D: \frac{y}{2} \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 2$ (图 10-5),

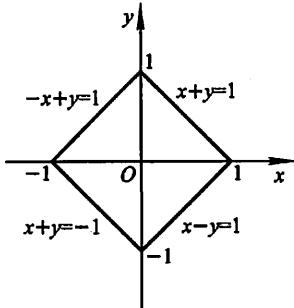


图 10-4

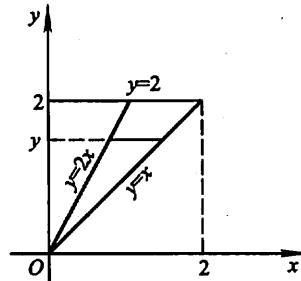


图 10-5

故

$$\begin{aligned}
\iint_D (x^2 + y^2 - x) d\sigma &= \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^y (x^2 + y^2 - x) dx \\
&= \int_0^2 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x - \frac{x^2}{2} \right]_{\frac{y}{2}}^y dy \\
&= \int_0^2 \left(\frac{19}{24} y^3 - \frac{3}{8} y^2 \right) dy = \frac{13}{6}.
\end{aligned}$$

3. 如果二重积分 $\iint_D f(x, y) dxdy$ 的被积函数 $f(x, y)$ 是两个函数 $f_1(x)$ 及 $f_2(y)$ 的乘积, 即 $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, 积分区域 $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, 证明这个二重积分等于两个单积分的乘积, 即

$$\iint_D f_1(x) \cdot f_2(y) dxdy = \left[\int_a^b f_1(x) dx \right] \cdot \left[\int_c^d f_2(y) dy \right].$$

证 $\iint_D f_1(x) \cdot f_2(y) dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f_1(x) \cdot f_2(y) dy \right] dx.$

在上式右端的第一次单积分 $\int_c^d f_1(x) \cdot f_2(y) dy$ 中, $f_1(x)$ 与积分变量 y 无关, 可视为常数提到积分号外, 因此上式右端等于

$$\int_a^b f_1(x) \cdot \left[\int_c^d f_2(y) dy \right] dx.$$

而在这个积分中, 由于 $\int_c^d f_2(y) dy$ 为常数, 故又可提到积分号外, 从而得到

$$\iint_D f_1(x) \cdot f_2(y) dxdy = \left[\int_c^d f_2(y) dy \right] \cdot \left[\int_a^b f_1(x) dx \right]$$

$$= \left[\int_a^b f_1(x) dx \right] \cdot \left[\int_c^d f_2(y) dy \right]. \text{证毕.}$$

4. 化二重积分

$$I = \iint_D f(x, y) d\sigma$$

为二次积分(分别列出对两个变量先后次序不同的两个二次积分),其中积分区域D是:

- (1) 由直线 $y=x$ 及抛物线 $y^2=4x$ 所围成的闭区域;
- (2) 由 x 轴及半圆周 $x^2+y^2=r^2 (y \geq 0)$ 所围成的闭区域;
- (3) 由直线 $y=x, x=2$ 及双曲线 $y=\frac{1}{x} (x > 0)$ 所围成的闭区域;
- (4) 环形闭区域 $\{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

解 (1) 直线 $y=x$ 及抛物线 $y^2=4x$ 的交点为 $(0,0)$ 和 $(4,4)$ (图 10-6). 于是

$$I = \int_0^4 dx \int_x^{4x} f(x, y) dy,$$

或

$$I = \int_0^4 dy \int_{\frac{y}{4}}^y f(x, y) dx.$$

(2) 将 D 用不等式表示为 $0 \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}, -r \leq x \leq r$, 于是可将 I 化为如下的先对 y 、后对 x 的二次积分:

$$I = \int_{-r}^r dx \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} f(x, y) dy;$$

如将 D 用不等式表示为 $-\sqrt{r^2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{r^2 - y^2}, 0 \leq y \leq r$, 则可将 I 化为如下的先对 x 、后对 y 的二次积分:

$$I = \int_0^r dy \int_{-\sqrt{r^2 - y^2}}^{\sqrt{r^2 - y^2}} f(x, y) dx.$$

(3) 如图 10-7. 三条边界曲线两两相交, 先求得 3 个交点为 $(1, 1)$, $(2, \frac{1}{2})$ 和 $(2, 2)$. 于是

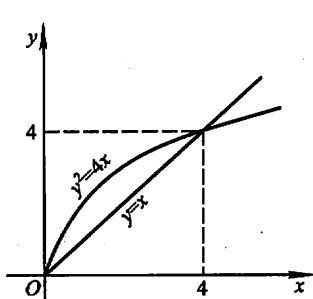


图 10-6

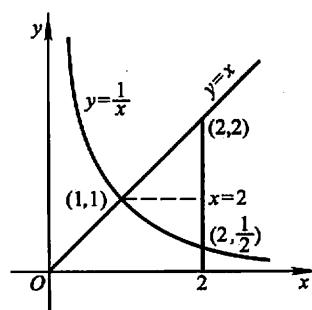


图 10-7

$$I = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x f(x, y) dy;$$

或

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\frac{1}{y}}^2 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_y^2 f(x, y) dx.$$

注 本题说明, 将二重积分化为二次积分时, 需注意根据积分区域的边界曲线的情况, 选取恰当的积分次序, 本题中的积分区域 D 的上、下边界曲线均分别由一个方程给出, 而左边界曲线却分为两段, 由两个不同的方程给出, 在这种情况下采取先对 y 、后对 x 的积分次序比较有利, 这样只需做一个二次积分, 而如果采用相反的积分次序则需计算两个二次积分.

需要指出, 选择积分次序时, 还需考虑被积函数 $f(x, y)$ 的特点. 具体例子可见教材下册第 141 页上的例 2.

(4) 将 D 按图 10-8(a) 和图 10-8(b) 的两种不同方式划分为 4 块, 分别得

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-1}^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \\ &\quad \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy, \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \\ &\quad \int_{-1}^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx. \end{aligned}$$

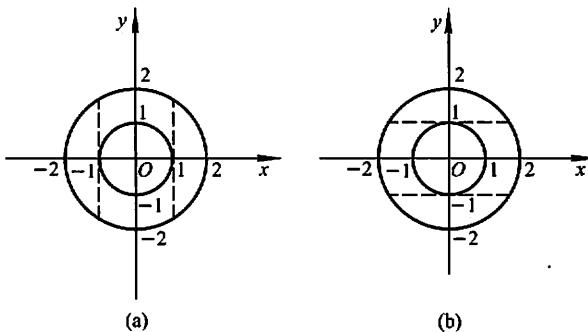


图 10-8

5. 设 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 其中 D 是由直线 $y=x$, $y=a$ 及 $x=b$ ($b>a$) 所围成的闭区域, 证明

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx.$$

证 等式两端的二次积分均等于二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$, 因而它们相等.

6. 改换下列二次积分的积分次序:

$$(1) \int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx;$$

$$(2) \int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx;$$

$$(3) \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx;$$

$$(4) \int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy;$$

$$(5) \int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy;$$

$$(6) \int_0^\pi dx \int_{-\sin \frac{x}{2}}^{\sin \frac{x}{2}} f(x, y) dy.$$

解 (1) 所给二次积分等于二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 1\}$. D 可改写为 $\{(x, y) \mid x \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$ (图 10-9), 于是

$$\text{原式} = \int_0^1 dx \int_x^1 f(x, y) dy.$$

(2) 所给二次积分等于二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid y^2 \leq x \leq 2y, 0 \leq y \leq 2\}$. 又 D 可表示为 $\left\{(x, y) \mid \frac{x}{2} \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 4\right\}$ (图 10-10), 因此

$$\text{原式} = \int_0^4 dx \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy.$$

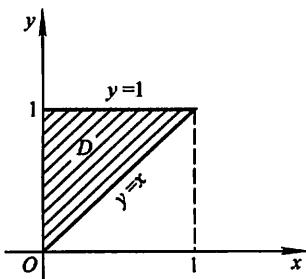


图 10-9

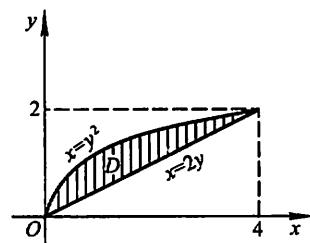


图 10-10

(3) 所给二次积分等于二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}, 0 \leq y \leq 1\}$. 又 D 可表示为 $\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1\}$ (图 10-11), 因此

$$\text{原式} = \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$$

(4) 所给二次积分等于二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 2-x \leq y \leq \sqrt{2x-x^2}, 1 \leq x \leq 2\}$. 又 D 可表示为 $\{(x, y) \mid 2-y \leq x \leq 1+\sqrt{1-y^2}, 0 \leq y \leq 1\}$ (图 10-12), 故

$$\text{原式} = \int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

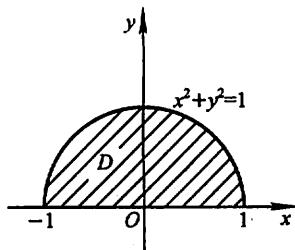


图 10-11

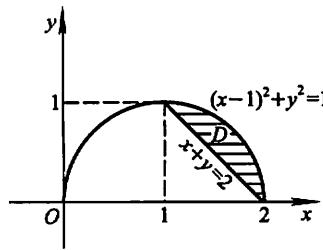


图 10-12

(5) 所给二次积分等于二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \ln x, 1 \leq x \leq e\}$. 又 D 可表示为 $\{(x, y) \mid e^y \leq x \leq e, 0 \leq y \leq 1\}$ (图 10-13), 故

$$\text{原式} = \int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx.$$

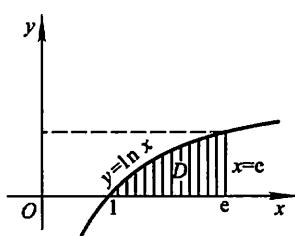


图 10-13

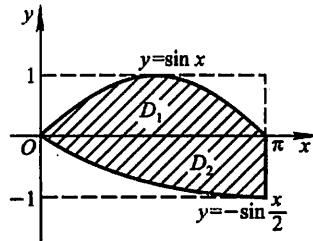


图 10-14

(6) 如图 10-14, 将积分区域 D 表示为 $D_1 \cup D_2$, 其中 $D_1 = \{(x, y) \mid \arcsin y \leq x \leq \pi - \arcsin y, 0 \leq y \leq 1\}$ ^①, $D_2 = \{(x, y) \mid -2\arcsin y \leq x \leq \pi, -1 \leq y \leq 0\}$. 于是

$$\text{原式} = \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_{-2\arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx.$$

7. 设平面薄片所占的闭区域 D 由直线 $x+y=2$, $y=x$ 和 x 轴所围成, 它的面密度 $\mu(x, y)=x^2+y^2$, 求该薄片的质量.

解 D 如图 10-15 所示.

$$\begin{aligned} M &= \iint_D \mu(x, y) d\sigma = \int_0^1 dy \int_y^{2-y} (x^2 + y^2) dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{3}x^3 + xy^2 \right]_y^{2-y} dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{3}(2-y)^3 + 2y^2 - \frac{7}{3}y^3 \right] dy \end{aligned}$$

① 当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, $y = \sin x$ 的反函数是 $x = \arcsin y$. 而当 $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ 时, $\pi - x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. 于是由 $y = \sin x = \sin(\pi - x)$ 可得 $\pi - x = \arcsin y$, 从而得反函数 $x = \pi - \arcsin y$.

$$= \left[-\frac{1}{12}(2-y)^4 + \frac{2}{3}y^3 - \frac{7}{12}y^4 \right]_0^1 = \frac{4}{3}.$$

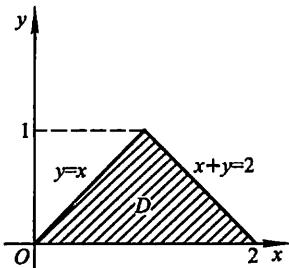


图 10-15

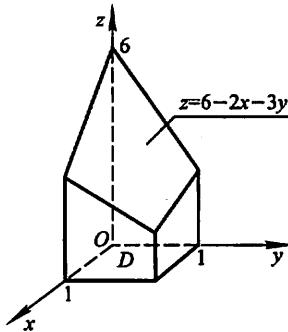


图 10-16

8. 计算由四个平面 $x=0, y=0, x=1, y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及 $2x+3y+z=6$ 截得的立体的体积.

解 此立体为一曲顶柱体, 它的底是 xOy 面上的闭区域 $D=\{(x,y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 顶是曲面 $z=6-2x-3y$ (图 10-16). 因此所求立体的体积

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (6 - 2x - 3y) dxdy = \int_0^1 dx \int_0^1 (6 - 2x - 3y) dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{9}{2} - 2x \right) dx = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

9. 求由平面 $x=0, y=0, x+y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及抛物面 $x^2+y^2=6-z$ 截得的立体的体积.

解 此立体为一曲顶柱体, 它的底是 xOy 面上的闭区域 $D=\{(x,y) | 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq x \leq 1\}$, 顶是曲面 $z=6-(x^2+y^2)$ (图 10-17), 故体积

$$\begin{aligned} V &= \iint_D [6 - (x^2 + y^2)] dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (6 - x^2 - y^2) dy \\ &= \int_0^1 \left[6(1-x) - x^2 + x^3 - \frac{1}{3}(1-x)^3 \right] dx \\ &= \frac{17}{6}. \end{aligned}$$

10. 求由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=6-2x^2-y^2$ 所围成的立体的体积.

解 由 $\begin{cases} z = x^2 + 2y^2 \\ z = 6 - 2x^2 - y^2 \end{cases}$ 消去 z , 得 $x^2 + y^2 = 2$, 故所求立体在 xOy 面上的

投影区域为

$$D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 2\} \text{ (图 10-18).}$$

所求立体的体积等于两个曲顶柱体体积的差:

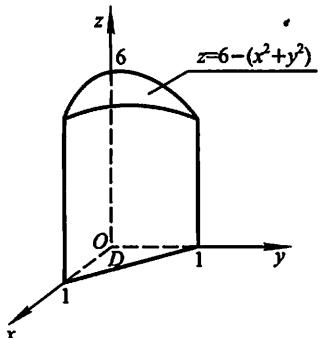


图 10-17

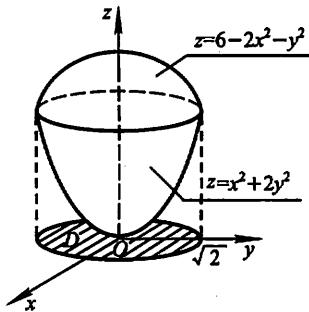


图 10-18

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_D (6 - 2x^2 - y^2) d\sigma - \iint_D (x^2 + 2y^2) d\sigma \\
 &= \iint_D (6 - 3x^2 - 3y^2) d\sigma = \iint_D (6 - 3\rho^2) \rho d\rho d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (6 - 3\rho^2) \rho d\rho = 6\pi.
 \end{aligned}$$

注 求类似于第 8、9、10 题中这样的立体体积时,并不一定要画出立体的准确图形,但一定要会求出立体在坐标面上的投影区域,并知道立体的底和顶的方程,这就需要复习和掌握第八章中学过的空间解析几何的有关知识.

11. 画出积分区域,把积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 表示为极坐标形式的二次积分,

其中积分区域 D 是:

- (1) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$ ($a > 0$);
- (2) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2x\};$
- (3) $\{(x, y) \mid a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$, 其中 $0 < a < b$;
- (4) $\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq x \leq 1\}.$

解 (1) 如图 10-19, 在极坐标系中, $D = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, 故

$$\begin{aligned}
 \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.
 \end{aligned}$$

(2) 如图 10-20, 在极坐标系中,

$$D = \left\{ (\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq 2\cos\theta, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}, \text{故}$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

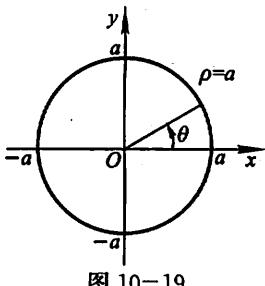


图 10-19

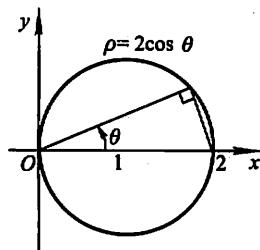


图 10-20

(3) 如图 10-21, 在极坐标系中,

$D = \{(\rho, \theta) | a \leq \rho \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, 故

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho. \end{aligned}$$

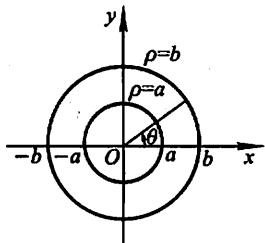


图 10-21

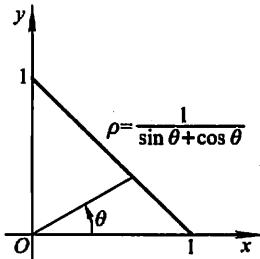


图 10-22

(4) D 如图 10-22 所示. 在极坐标系中, 直线 $x + y = 1$ 的方程为 $\rho =$

$\frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}$, 故 $D = \left\{ (\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq \frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$. 于是

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho. \end{aligned}$$

12. 化下列二次积分为极坐标形式的二次积分:

$$(1) \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy;$$

$$(2) \int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy;$$

$$(3) \int_0^1 dx \int_{-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy;$$

$$(4) \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy.$$

解 (1) 如图 10-23, 用直线 $y=x$ 将积分区域 D 分成 D_1, D_2 两部分:

$$D_1 = \left\{ (\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq \sec \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\};$$

$$D_2 = \left\{ (\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq \csc \theta, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

于是

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sec \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\csc \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

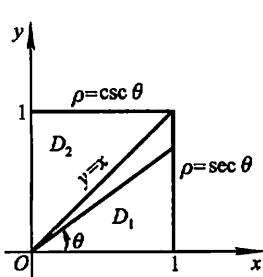


图 10-23

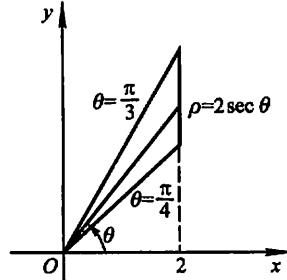


图 10-24

(2) D 如图 10-24 所示. 在极坐标系中, 直线 $x=2$, $y=x$ 和 $y=\sqrt{3}x$ 的方程分别是 $\rho=2\sec \theta$, $\theta=\frac{\pi}{4}$ 和 $\theta=\frac{\pi}{3}$. 因此

$$D = \left\{ (\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq 2\sec \theta, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \right\}.$$

又, $f(\sqrt{x^2+y^2}) = f(\rho)$. 于是

$$\text{原式} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_0^{2\sec \theta} f(\rho) \rho d\rho.$$

(3) D 如图 10-25 所示. 在极坐标系中, 直线 $y=1-x$ 的方程为 $\rho = \frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}$, 圆 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的方程为 $\rho=1$, 因此

$$D = \left\{ (\rho, \theta) \mid \frac{1}{\sin \theta + \cos \theta} \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\},$$

于是

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}}^1 f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

(4) D 如图 10-26 所示. 在极坐标系中, 直线 $x=1$ 的方程是 $\rho=\sec \theta$; 抛物线 $y=x^2$ 的方程是 $\rho \sin \theta = \rho^2 \cos^2 \theta$, 即 $\rho = \tan \theta \sec \theta$; 两者的交点与原点的连线的方程是 $\theta=\frac{\pi}{4}$. 故

$$D = \left\{ (\rho, \theta) \mid \tan \theta \sec \theta \leq \rho \leq \sec \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\},$$

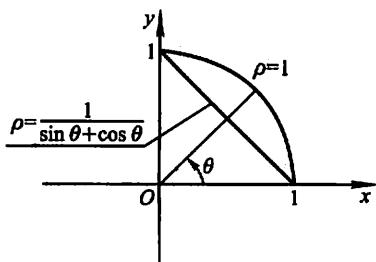


图 10-25

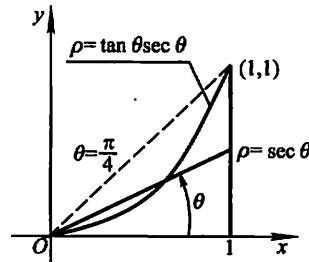


图 10-26

于是

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\frac{1}{\tan \theta \sec \theta}}^{\sec \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

13. 把下列积分化为极坐标形式，并计算积分值：

$$(1) \int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2 + y^2) dy; \quad (2) \int_0^a dx \int_0^x \sqrt{x^2 + y^2} dy;$$

$$(3) \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} dy; \quad (4) \int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2 + y^2) dx.$$

解 (1) 积分区域 D 如图 10-27 所示。在极坐标系中，

$$D = \left\{ (\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq 2a \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\},$$

于是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} \rho^2 \cdot \rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^{2a \cos \theta} d\theta \\ &= 4a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = 4a^4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4} \pi a^4. \end{aligned}$$

注 在多元函数积分学的计算题中，常会遇到定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta$ 。因此记住如下的结果是很有益的：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta \left(= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta \right) = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为正偶数,} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}, & n \text{ 为大于 1 的正奇数.} \end{cases}$$

(2) 如图 10-28，在极坐标系中，

$$D = \left\{ (\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq a \sec \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}.$$

于是

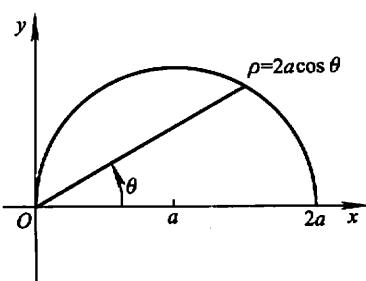


图 10-27

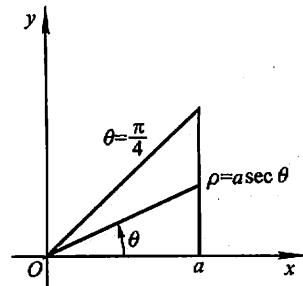


图 10-28

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{a \sec \theta} \rho \cdot \rho d\rho \\
 &= \frac{a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 \theta d\theta \\
 &= \frac{a^3}{6} [\sec \theta \tan \theta + \ln(\sec \theta + \tan \theta)]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= \frac{a^3}{6} [\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)].
 \end{aligned}$$

(3) 积分区域 D 如图 10-29 所示. 在极坐标系中, 抛物线 $y=x^2$ 的方程是 $\rho \sin \theta = \rho^2 \cos^2 \theta$, 即 $\rho = \tan \theta \sec \theta$; 直线 $y=x$ 的方程是 $\theta = \frac{\pi}{4}$, 故

$$D = \left\{ (\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq \tan \theta \sec \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}.$$

于是

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\tan \theta \sec \theta} \frac{1}{\rho} \cdot \rho d\rho \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan \theta \sec \theta d\theta = [\sec \theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1.
 \end{aligned}$$

(4) 积分区域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \sqrt{a^2 - y^2}, 0 \leq y \leq a\}$

$$= \left\{ (\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\},$$

故

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \rho^2 \cdot \rho d\rho = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a^4}{4} = \frac{\pi}{8} a^4.$$

14. 利用极坐标计算下列各题:

(1) $\iint_D e^{x^2+y^2} d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 所围成的闭区域;

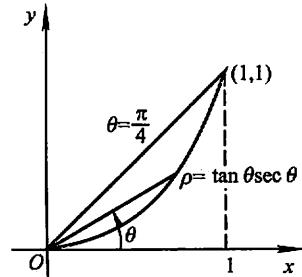


图 10-29

(2) $\iint_D \ln(1+x^2+y^2) d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在

第一象限内的闭区域;

(3) $\iint_D \arctan \frac{y}{x} d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=1$ 及直线 $y=0$,
 $y=x$ 所围成的在第一象限内的闭区域.

解 (1) 在极坐标系中, 积分区域 $D=\{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, 于是

$$\iint_D e^{x^2+y^2} d\sigma = \iint_D e^{\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 e^{\rho^2} \cdot \rho d\rho = 2\pi \cdot \left[\frac{e^{\rho^2}}{2} \right]_0^2 = \pi(e^4 - 1).$$

(2) 在极坐标系中, 积分区域 $D=\left\{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}$, 于是

$$\begin{aligned} \iint_D \ln(1+x^2+y^2) d\sigma &= \iint_D \ln(1+\rho^2) \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \ln(1+\rho^2) \cdot \rho d\rho \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 \ln(1+\rho^2) d(1+\rho^2) \\ &= \frac{\pi}{4} \left[(1+\rho^2) \ln(1+\rho^2) \Big|_0^1 - \int_0^1 2\rho d\rho \right] \\ &= \frac{\pi}{4} (2\ln 2 - 1). \end{aligned}$$

(3) 在极坐标系中, 积分区域 $D=\left\{(\rho, \theta) | 1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right\}$, $\arctan \frac{y}{x} = \theta$, 于是

$$\begin{aligned} \iint_D \arctan \frac{y}{x} d\sigma &= \iint_D \theta \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta d\theta \int_1^2 \rho d\rho = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} (2^2 - 1) \\ &= \frac{3}{64} \pi^2. \end{aligned}$$

15. 选用适当的坐标计算下列各题:

(1) $\iint_D \frac{x^2}{y^2} d\sigma$, 其中 D 是由直线 $x=2$, $y=x$ 及曲线 $xy=1$ 所围成的闭区域;

(2) $\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第

一象限内的闭区域;

(3) $\iint_D (x^2+y^2) d\sigma$, 其中 D 是由直线 $y=x$, $y=x+a$, $y=a$, $y=3a$ ($a>0$) 所围成的闭区域;

(4) $\iint_D \sqrt{x^2+y^2} d\sigma$, 其中 D 是圆环形闭区域 $\{(x, y) | a^2 \leq x^2+y^2 \leq b^2\}$.

解 (1) D 如图 10-30 所示. 根据 D 的形状, 选用直角坐标较宜.

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{x} \leq y \leq x, 1 \leq x \leq 2 \right\}, \text{故}$$

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x^2}{y^2} d\sigma &= \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2}{y^2} dy \\ &= \int_1^2 (-x + x^3) dx = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

(2) 根据积分区域 D 的形状和被积函数的特点, 选用极坐标为宜.

$$D = \left\{ (\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}, \text{故}$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_D \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}} \rho d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}} \rho d\rho \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^1 \frac{1-\rho^2}{\sqrt{1-\rho^4}} \rho d\rho = \frac{\pi}{2} \left(\int_0^1 \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^4}} d\rho - \int_0^1 \frac{\rho^3}{\sqrt{1-\rho^4}} d\rho \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\rho^4}} d\rho^2 + \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\rho^4}} d(1-\rho^4) \right] \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{2} \arcsin \rho^2 \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \sqrt{1-\rho^4} \Big|_0^1 \right] \\ &= \frac{\pi}{8}(\pi - 2). \end{aligned}$$

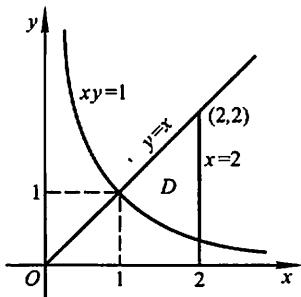


图 10-30

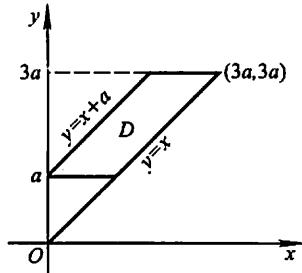


图 10-31

(3) D 如图 10-31 所示. 选用直角坐标为宜. 又根据 D 的边界曲线的情况, 宜采用先对 x 、后对 y 的积分次序. 于是

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma &= \int_a^{3a} dy \int_{y-a}^y (x^2 + y^2) dx \\ &= \int_a^{3a} \left(2ay^2 - a^2 y + \frac{a^3}{3} \right) dy = 14a^4. \end{aligned}$$

(4) 本题显然适于用极坐标计算. $D = \{(\rho, \theta) \mid a \leq \rho \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma &= \iint_D \rho \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b \rho^2 d\rho \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{3} (b^3 - a^3) = \frac{2}{3}\pi(b^3 - a^3). \end{aligned}$$

16. 设平面薄片所占的闭区域 D 由螺线 $\rho = 2\theta$ 上一段弧 ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) 与直线 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 所围成, 它的面密度为 $\mu(x, y) = x^2 + y^2$. 求这薄片的质量.

解 薄片的质量为它的面密度在薄片所占区域 D 上的二重积分(图 10-32), 即

$$\begin{aligned} M &= \iint_D \mu(x, y) d\sigma = \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma \\ &= \iint_D \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\theta} \rho^3 d\rho \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^4 d\theta = \frac{\pi^5}{40}. \end{aligned}$$

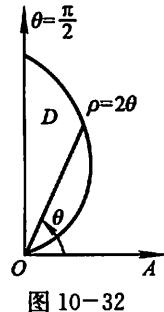


图 10-32

17. 求由平面 $y=0, y=kx(k>0), z=0$ 以及球心在原点、半径为 R 的上半球面所围成的在第一卦限内的立体的体积.

解 如图 10-33,

$$\begin{aligned} V &= \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} d\sigma = \iint_D \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\alpha} d\theta \int_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho = \alpha \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \int_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2} d(R^2 - \rho^2) \\ &= \frac{\alpha R^3}{3} = \frac{R^3}{3} \arctan k. \end{aligned}$$

18. 计算以 xOy 面上的圆周 $x^2 + y^2 = ax$ 围成的闭区域为底, 而以曲面 $z = x^2 + y^2$ 为顶的曲顶柱体的体积.

解 如图 10-34, 设

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{ax - x^2}, 0 \leq x \leq a\} \\ &= \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq a \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}, \end{aligned}$$

由于曲顶柱体关于 xOz 对称, 故

$$\begin{aligned} V &= 2 \iint_{D_1} (x^2 + y^2) dx dy \\ &= 2 \iint_{D_1} \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} \rho^3 d\rho \end{aligned}$$

$$= \frac{a^4}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = \frac{a^4}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{32} \pi a^4.$$

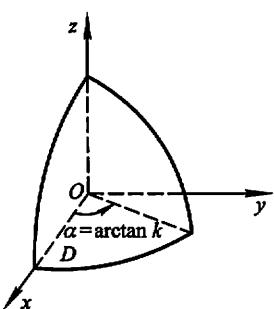


图 10-33

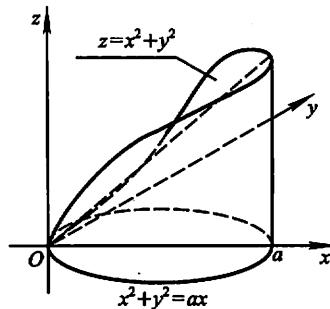


图 10-34

注 在计算立体体积时,要注意充分利用图形的对称性,这样既能简化运算,也能减少错误.

* 19. 作适当的变换,计算下列二重积分:

- (1) $\iint_D (x-y)^2 \sin^2(x+y) dx dy$, 其中 D 是平行四边形闭区域, 它的四个顶点是 $(\pi, 0), (2\pi, \pi), (\pi, 2\pi)$ 和 $(0, \pi)$;
- (2) $\iint_D x^2 y^2 dx dy$, 其中 D 是由两条双曲线 $xy=1$ 和 $xy=2$, 直线 $y=x$ 和 $y=4x$ 所围成的在第 I 象限内的闭区域;
- (3) $\iint_D e^{\frac{x}{y}} dx dy$, 其中 D 是由 x 轴、 y 轴和直线 $x+y=1$ 所围成的闭区域;
- (4) $\iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$.

解 (1) 令 $u=x-y, v=x+y$, 则 $x=\frac{u+v}{2}, y=\frac{v-u}{2}$. 在这变换下, D 的边界 $x-y=-\pi, x+y=\pi, x-y=\pi, x+y=3\pi$ 依次与 $u=-\pi, v=\pi, u=\pi, v=3\pi$ 对应. 后者构成 uv 平面上与 D 对应的闭区域 D' 的边界. 于是

$$D' = \{(u, v) \mid -\pi \leq u \leq \pi, \pi \leq v \leq 3\pi\} \text{ (图 10-35).}$$

又

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2},$$

因此

$$\iint_D (x-y)^2 \sin^2(x+y) dx dy = \iint_{D'} u^2 \sin^2 v \cdot \frac{1}{2} du dv$$

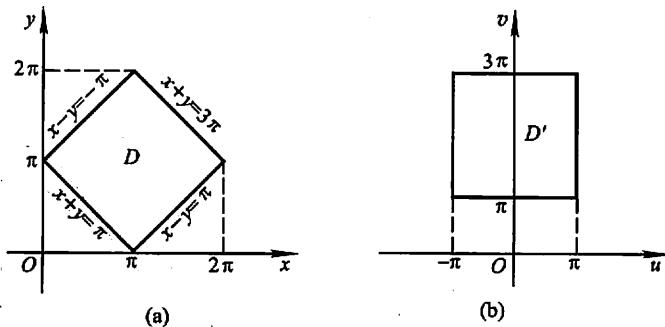


图 10-35

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} u^2 du \int_{\pi}^{3\pi} \sin^2 v dv = \frac{1}{2} \left[\frac{u^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} \cdot \left[\frac{v}{2} - \frac{\sin 2v}{4} \right]_{\pi}^{3\pi} \\
 &= \frac{\pi^4}{3}.
 \end{aligned}$$

(2) 令 $u=xy, v=\frac{y}{x}$, 则 $x=\sqrt{\frac{u}{v}}$, $y=\sqrt{uv}$. 在这变换下, D 的边界 $xy=1$, $y=x$, $xy=2$, $y=4x$ 依次与 $u=1, v=1, u=2, v=4$ 对应, 后者构成 uv 平面上与 D 对应的闭区域 D' 的边界. 于是 $D'=\{(u,v)|1\leq u\leq 2, 1\leq v\leq 4\}$ (图 10-36). 又

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v^3}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v} \right) = \frac{1}{2v}.$$

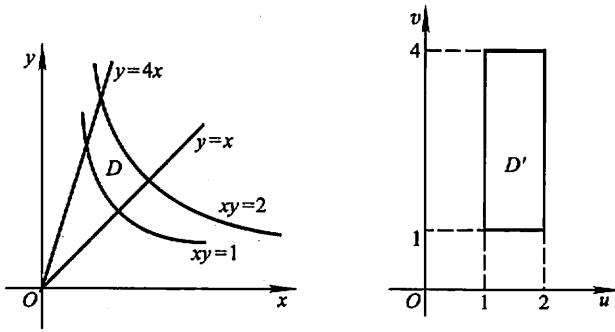


图 10-36

因此

$$\begin{aligned}
 \iint_D x^2 y^2 dx dy &= \iint_{D'} u^2 \cdot \frac{1}{2v} du dv = \frac{1}{2} \int_1^2 u^2 du \int_1^4 \frac{1}{v} dv \\
 &= \frac{7}{3} \ln 2.
 \end{aligned}$$

(3) 令 $u=x+y, v=y$, 即 $x=u-v, y=v$, 则在这变换下, D 的边界 $y=0, x=0, x+y=1$ 依次与 $v=0, u=v, u=1$ 对应. 后者构成 uOv 平面上与 D 对应的闭区域 D' 的边界, 于是

$$D' = \{(u, v) \mid 0 \leq v \leq u, 0 \leq u \leq 1\}.$$

又

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

因此

$$\begin{aligned} \iint_D e^{\frac{x}{x+y}} dx dy &= \iint_{D'} e^{\frac{u}{u+v}} du dv \\ &= \int_0^1 du \int_0^u e^{\frac{v}{u+v}} dv = \int_0^1 u(e-1) du \\ &= \frac{1}{2}(e-1). \end{aligned}$$

(4) 作广义极坐标变换 $\begin{cases} x=a\rho \cos \theta, \\ y=b\rho \sin \theta \end{cases}$ ($a>0, b>0, \rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$). 在此变换下, 与 D 对应的闭区域为 $D'=\{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. 又

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} = \begin{vmatrix} a \cos \theta & -a\rho \sin \theta \\ b \sin \theta & b\rho \cos \theta \end{vmatrix} = ab\rho.$$

故

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy &= \iint_{D'} \rho^2 \cdot ab\rho d\rho d\theta \\ &= ab \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{1}{2}ab\pi. \end{aligned}$$

* 20. 求由下列曲线所围成的闭区域 D 的面积:

(1) D 是由曲线 $xy=4, xy=8, xy^3=5, xy^3=15$ 所围成的第 I 象限部分的闭区域;

(2) D 是由曲线 $y=x^3, y=4x^3, x=y^3, x=4y^3$ 所围成的第 I 象限部分的闭区域.

解 (1) 令 $u=xy, v=xy^3$ ($x \geq 0, y \geq 0$), 则 $x=\sqrt{\frac{u^3}{v}}, y=\sqrt{\frac{v}{u}}$. 在这变换下, 与 D 对应的 uOv 平面上的闭区域为 $D'=\{(u, v) \mid 4 \leq u \leq 8, 5 \leq v \leq 15\}$.

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u^3}{v^3}} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u^3}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{uv}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v},$$

于是所求面积为

$$A = \iint_D dx dy = \iint_{D'} \frac{1}{2v} du dv = \frac{1}{2} \int_4^8 du \int_5^{15} \frac{1}{v} dv$$

$$= 2\ln 3.$$

(2) 令 $u = \frac{y}{x^3}, v = \frac{x}{y^3}$ ($x > 0, y > 0$), 则 $x = u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{6}}, y = u^{-\frac{1}{6}}v^{-\frac{1}{3}}$. 在这变换下, 与 D 对应的 uOv 平面上的闭区域为 $D' = \{(u, v) | 1 \leq u \leq 4, 1 \leq v \leq 4\}$. 又

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} -\frac{3}{8}u^{-\frac{11}{6}}v^{-\frac{1}{6}} & -\frac{1}{8}u^{-\frac{1}{6}}v^{-\frac{9}{6}} \\ -\frac{1}{8}u^{-\frac{9}{6}}v^{-\frac{3}{6}} & -\frac{3}{8}u^{-\frac{1}{6}}v^{-\frac{11}{6}} \end{vmatrix} = \frac{1}{8}u^{-\frac{3}{2}}v^{-\frac{3}{2}}.$$

于是所求面积为

$$\begin{aligned} A &= \iint_D dx dy = \iint_{D'} \frac{1}{8}u^{-\frac{3}{2}}v^{-\frac{3}{2}} du dv = \frac{1}{8} \int_1^4 u^{-\frac{3}{2}} du \int_1^4 v^{-\frac{3}{2}} dv \\ &= \frac{1}{8}([-2u^{-\frac{1}{2}}]_1^4)^2 = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

* 21. 设闭区域 D 是由直线 $x+y=1, x=0, y=0$ 所围成, 求证

$$\iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx dy = \frac{1}{2} \sin 1.$$

证 令 $u = x-y, v = x+y$, 则 $x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{v-u}{2}$, 在此变换下, D 的边界 $x+y=1, x=0, y=0$ 依次与 $v=1, u+v=0$ 和 $v-u=0$ 对应. 后者构成 uOv 平面上与 D 对应的闭区域 D' 的边界(图 10-37). 于是

$$D' = \{(u, v) | -v \leq u \leq v, 0 \leq v \leq 1\}.$$

又

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2},$$

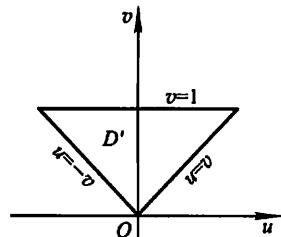


图 10-37

因此有

$$\begin{aligned} \iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx dy &= \iint_{D'} \cos\left(\frac{u}{v}\right) \cdot \frac{1}{2} du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 dv \int_{-v}^v \cos\left(\frac{u}{v}\right) du = \frac{1}{2} \int_0^1 v \left[\sin\left(\frac{u}{v}\right) \right]_{-v}^v dv \\ &= \int_0^1 v \sin 1 dv = \frac{1}{2} \sin 1. \text{ 证毕.} \end{aligned}$$

* 22. 选取适当的变换, 证明下列等式:

$$(1) \iint_D f(x+y) dx dy = \int_{-1}^1 f(u) du, \text{ 其中闭区域 } D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 1\};$$

(2) $\iint_D f(ax+by+c) dx dy = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2} f(u\sqrt{a^2+b^2} + c) du$, 其中 $D = \{(x,y) | x^2+y^2 \leq 1\}$, 且 $a^2+b^2 \neq 0$.

证 (1) 闭区域 D 的边界为 $x+y=-1, x+y=1, x-y=-1, x-y=1$, 故令 $u=x+y, v=x-y$, 即 $x=\frac{u+v}{2}, y=\frac{u-v}{2}$. 在此变换下, D 变为 uv 平面上的闭区域

$$D' = \{(u,v) | -1 \leq u \leq 1, -1 \leq v \leq 1\}.$$

又

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2},$$

于是

$$\begin{aligned} \iint_D f(x+y) dx dy &= \iint_{D'} f(u) \left| -\frac{1}{2} \right| du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(u) du \int_{-1}^1 dv = \int_{-1}^1 f(u) du. \text{ 证毕.} \end{aligned}$$

(2) 比较等式的两端可知需作变换

$$u\sqrt{a^2+b^2} = ax+by, \text{ 即 } u = \frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

再考虑到 D 的边界曲线为 $x^2+y^2=1$, 故令 $v = \frac{bx-ay}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 这样就有 $u^2+v^2=1$,

即 D 的边界曲线 $x^2+y^2=1$ 变为 uv 平面上的圆 $u^2+v^2=1$. 于是与 D 对应的闭区域为 $D' = \{(u,v) | u^2+v^2 \leq 1\}$.

又由 u, v 的表达式可解得

$$x = \frac{au+bv}{\sqrt{a^2+b^2}}, y = \frac{bu-av}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

因此雅可比式

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{vmatrix} = -1,$$

于是

$$\iint_D f(ax+by+c) dx dy = \iint_{D'} f(u\sqrt{a^2+b^2} + c) | -1 | du dv$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^1 du \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} f(u\sqrt{a^2+b^2}+c) dv \\
&= 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2} f(u\sqrt{a^2+b^2}+c) du.
\end{aligned}
\quad \text{证毕.}$$

习题 10-3

三重积分

1. 化三重积分 $I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ 为三次积分, 其中积分区域 Ω 分别是:

- (1) 由双曲抛物面 $xy=z$ 及平面 $x+y-1=0, z=0$ 所围成的闭区域;
- (2) 由曲面 $z=x^2+y^2$ 及平面 $z=1$ 所围成的闭区域;
- (3) 由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=2-x^2$ 所围成的闭区域;
- (4) 由曲面 $cz=xy(c>0), \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z=0$ 所围成的在第一卦限内的闭区域.

解 (1) Ω 的顶 $z=xy$ 和底面 $z=0$ 的交线为 x 轴和 y 轴, 故 Ω 在 xOy 面上的投影区域由 x 轴、 y 轴和直线 $x+y-1=0$ 所围成. 于是 Ω 可用不等式表示为

$$0 \leq z \leq xy, 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq x \leq 1,$$

因此

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{xy} f(x, y, z) dz.$$

(2) 由 $z=x^2+y^2$ 和 $z=1$ 得 $x^2+y^2=1$, 所以 Ω 在 xOy 面上的投影区域为 $x^2+y^2 \leq 1$ (图 10-38). Ω 可用不等式表示为

$$x^2+y^2 \leq z \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1,$$

因此

$$I = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^1 f(x, y, z) dz.$$

(3) 由 $\begin{cases} z=x^2+2y^2 \\ z=2-x^2 \end{cases}$ 消去 z , 得 $x^2+y^2=1$. 故 Ω 在 xOy 面上的投影区域为 $x^2+y^2 \leq 1$ (图 10-39). 于是 Ω 可用不等式表示为

$$x^2+2y^2 \leq z \leq 2-x^2, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1,$$

因此

$$I = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+2y^2}^{2-x^2} f(x, y, z) dz.$$

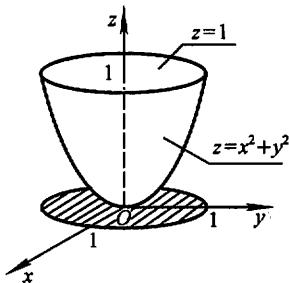


图 10-38

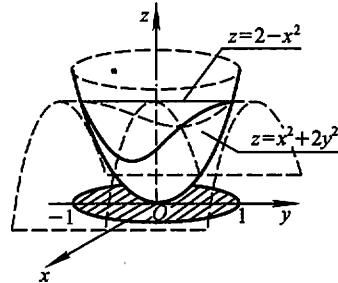


图 10-39

(4) 显然 Ω 在 xOy 面上的投影区域由椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (x \geq 0, y \geq 0)$ 和 x 轴、 y 轴所围成, Ω 的顶为 $z = xy$, 底为 $z = 0$ (图 10-40). 故 Ω 可用不等式表示为

$$0 \leq z \leq \frac{xy}{c}, 0 \leq y \leq b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, 0 \leq x \leq a,$$

因此

$$I = \int_0^a dx \int_0^{b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} dy \int_0^{\frac{xy}{c}} f(x, y, z) dz.$$

注 本题中的 4 个小题,除第 2 小题外, Ω 的图形都不易画出.但是,为确定三次积分的积分限,并非必须画

出 Ω 的准确图形.重要的是要会求出 Ω 在坐标面上的投影区域,以及会定出 Ω 的顶和底面,而做到这点,只需掌握常见曲面的方程和图形特点,并具备一定的空间想像能力即可.本章题解中配了较多插图,请读者注意观察,这对培养空间想像能力是有好处的.

2. 设有一物体,占有空间闭区域 $\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$,在点 (x, y, z) 处的密度为 $\rho(x, y, z) = x + y + z$,计算该物体的质量.

$$\begin{aligned} \text{解 } M &= \iiint_{\Omega} \rho dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x + y + z) dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 \left(x + y + \frac{1}{2} \right) dy = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) dx \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

3. 如果三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dxdydz$ 的被积函数 $f(x, y, z)$ 是三个函数 $f_1(x), f_2(y), f_3(z)$ 的乘积,即 $f(x, y, z) = f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot f_3(z)$,积分区域 $\Omega = \{(x, y, z) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, l \leq z \leq m\}$,证明这个三重积分等于三个单积

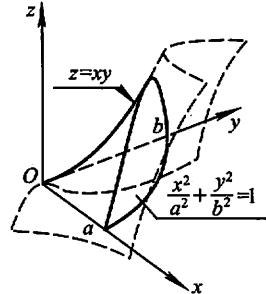


图 10-40

分的乘积, 即

$$\iiint_{\Omega} f_1(x) f_2(y) f_3(z) dx dy dz = \int_a^b f_1(x) dx \int_c^d f_2(y) dy \int_l^m f_3(z) dz.$$

$$\begin{aligned} \text{证 } \iiint_{\Omega} f_1(x) f_2(y) f_3(z) dx dy dz &= \int_a^b \left[\int_c^d \left(\int_l^m f_1(x) f_2(y) f_3(z) dz \right) dy \right] dx \\ &= \int_a^b \left[\int_c^d \left(f_1(x) f_2(y) \cdot \int_l^m f_3(z) dz \right) dy \right] dx \\ &= \int_a^b \left[\left(\int_l^m f_3(z) dz \right) \cdot \left(\int_c^d f_1(x) f_2(y) dy \right) \right] dx \\ &= \left(\int_l^m f_3(z) dz \right) \cdot \int_a^b \left[f_1(x) \cdot \int_c^d f_2(y) dy \right] dx \\ &= \int_l^m f_3(z) dz \cdot \int_c^d f_2(y) dy \cdot \int_a^b f_1(x) dx = \text{右端}. \end{aligned}$$

4. 计算 $\iiint_{\Omega} xy^2 z^3 dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z=xy$, 平面 $y=x$, $x=1$ 和 $z=0$ 所围成的闭区域.

解 如图 10-41, Ω 可用不等式表示为:

$$0 \leq z \leq xy, 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1.$$

因此

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} xy^2 z^3 dx dy dz &= \int_0^1 x dx \int_0^x y^2 dy \int_0^{xy} z^3 dz \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 x dx \int_0^x x^4 y^6 dy = \frac{1}{28} \int_0^1 x^{12} dx = \frac{1}{364}. \end{aligned}$$

5. 计算 $\iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$, 其中 Ω 为平面 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ 所围成的四面体.

解 $\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq 1-x-y, 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq x \leq 1\}$ (图 10-42), 于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3} &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[\frac{-1}{2(1+x+y+z)^2} \right]_0^{1-x-y} dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[-\frac{1}{8} + \frac{1}{2(1+x+y)^2} \right] dy \\ &= \int_0^1 \left[-\frac{y}{8} - \frac{1}{2(1+x+y)} \right]_0^{1-x} dx \\ &= -\int_0^1 \left[\frac{1-x}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2(1+x)} \right] dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{5}{8} \right).$$

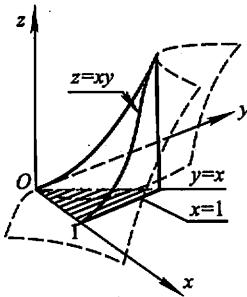


图 10-41

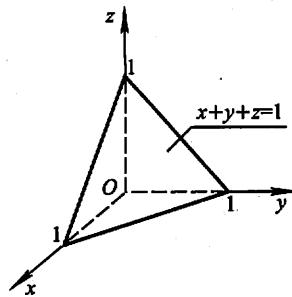


图 10-42

6. 计算 $\iiint_{\Omega} xyz \, dx \, dy \, dz$, 其中 Ω 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 及三个坐标面所围成的在第一卦限内的闭区域.

解法一 利用直角坐标计算. 由于

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1\},$$

故

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} xyz \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 x \, dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y \, dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z \, dz \\ &= \int_0^1 x \, dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y \cdot \frac{1-x^2-y^2}{2} \, dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2}(1-x^2) - \frac{y^4}{4} \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ &= \frac{1}{8} \int_0^1 x(1-x^2)^2 \, dx = \frac{1}{48}. \end{aligned}$$

解法二 利用球面坐标计算, 由于

$$\Omega = \left\{ (r, \varphi, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\},$$

故

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} xyz \, dx \, dy \, dz &= \iiint_{\Omega} (r^3 \sin^2 \varphi \cos \varphi \sin \theta \cos \theta) \cdot r^2 \sin \varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta \, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi \cos \varphi \, d\varphi \int_0^1 r^5 \, dr \\ &= \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{\sin^4 \varphi}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{r^6}{6} \right]_0^1 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{48}.$$

注 比较本题的两种解法,显然用球面坐标计算要简便得多,这是由本题的积分区域 Ω 的形状所决定的.一般说来,凡是 Ω 由球面、圆锥面等曲面围成时,用球面坐标计算三重积分较为方便.

7. 计算 $\iiint_{\Omega} xz \, dx \, dy \, dz$, 其中 Ω 是由平面 $z=0, z=y, y=1$ 以及抛物柱面 $y=x^2$ 所围成的闭区域.

解法一 容易看出, Ω 的顶为平面 $z=y$, 底为平面 $z=0$, Ω 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 由 $y=1$ 和 $y=x^2$ 所围成. 故 Ω 可用不等式表示为

$$0 \leq z \leq y, x^2 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1.$$

因此

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} xz \, dx \, dy \, dz &= \int_{-1}^1 x \, dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^y z \, dz \\ &= \int_{-1}^1 x \, dx \int_{x^2}^1 \frac{y^2}{2} \, dy = \frac{1}{6} \int_{-1}^1 x(1-x^6) \, dx = 0. \end{aligned}$$

解法二 由于积分区域 Ω 关于 yOz 面对称(即若点 $(x, y, z) \in \Omega$, 则 $(-x, y, z)$ 也属于 Ω), 且被积函数 xz , 关于 x 是奇函数(即 $(-x)z = -(xz)$), 因此

$$\iiint_{\Omega} xz \, dx \, dy \, dz = 0.$$

8. 计算 $\iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz$, 其中 Ω 是由锥面 $z = \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2}$ 与平面 $z=h$ ($R>0$, $h>0$) 所围成的闭区域.

解法一 由 $z = \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z=h$ 消去 z , 得

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

故 Ω 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$ (图 10-43),

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h, (x, y) \in D_{xy} \right\}.$$

于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz &= \iint_{D_{xy}} dx \, dy \int_{\frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2}}^h z \, dz \\ &= \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} \left[h^2 - \frac{h^2}{R^2} (x^2 + y^2) \right] dx \, dy \\ &= \frac{1}{2} \left[h^2 \iint_{D_{xy}} dx \, dy - \frac{h^2}{R^2} \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx \, dy \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{h^2}{2} \cdot \pi R^2 - \frac{h^2}{2R^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{1}{4} \pi R^2 h^2.$$

解法二 用过点 $(0, 0, z)$ 、平行于 xOy 面的平面截 Ω 得平面圆域 D_z , 其半径为 $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{Rz}{h}$, 面积为 $\frac{\pi R^2}{h^2} z^2$ (图 10-43).

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D_z, 0 \leq z \leq h\}.$$

于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z dx dy dz &= \int_0^h z dz \iint_{D_z} dx dy \\ &= \int_0^h z \cdot \frac{\pi R^2}{h^2} z^2 dz = \frac{\pi R^2}{4h^2} \cdot h^4 = \frac{1}{4} \pi R^2 h^2. \end{aligned}$$

注 解法二通俗地称为“先重后单”法, 即先在 D_z 上作关于 x, y 的二重积分, 然后再对 z 作定积分. 如果在 D_z 上关于 x 和 y 的二重积分易于计算, 特别地, 如果被积函数与 x, y 无关, 且 D_z 的面积容易表达为 z 的函数, 则采用这种方法比较简便.

解法三 用球面坐标进行计算. 在球面坐标系中, 圆锥面 $z = \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2}$ 的方程为 $\varphi =$

$\alpha (= \arctan \frac{R}{h})$, 平面 $z = h$ 的方程为 $r = h \sec \varphi$, 因此 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \alpha, 0 \leq r \leq h \sec \varphi.$$

于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z dx dy dz &= \iiint_{\Omega} r \cos \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\alpha \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^{h \sec \varphi} r^3 dr \\ &= 2\pi \int_0^\alpha \frac{h^4 \sin \varphi}{4 \cos^3 \varphi} d\varphi = -\frac{\pi h^4}{2} \int_0^\alpha \frac{d(\cos \varphi)}{\cos^3 \varphi} \\ &= \frac{\pi h^4}{4} \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 \right) \left(\text{代入 } \alpha = \arctan \frac{R}{h} \right) \\ &= \frac{\pi h^4}{4} \left(\frac{R^2 + h^2}{h^2} - 1 \right) = \frac{1}{4} \pi R^2 h^2. \end{aligned}$$

9. 利用柱面坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint_{\Omega} z dv$, 其中 Ω 是由曲面 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 及 $z = x^2 + y^2$ 所围成的闭

区域;

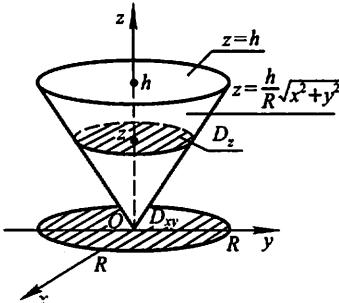


图 10-43

(2) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$, 其中 Ω 是由曲面 $x^2 + y^2 = 2z$ 及平面 $z = 2$ 所围成的闭区域.

解 (1) 由 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 和 $z = x^2 + y^2$ 消去 z , 得

$$(x^2 + y^2)^2 = 2 - (x^2 + y^2), \text{ 即 } x^2 + y^2 = 1.$$

从而知 Ω 在 xOy 面上的投影区域为 $D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ (图 10-44). 利用柱面坐标, Ω 可表示为

$$\rho^2 \leq z \leq \sqrt{2 - \rho^2}, 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z dv &= \iiint_{\Omega} z \rho d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} z dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho (2 - \rho^2 - \rho^4) d\rho \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\pi \left[\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{6} \right]_0^1 = \frac{7}{12}\pi. \end{aligned}$$

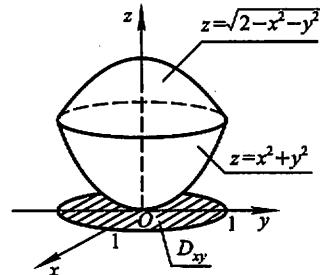


图 10-44

(2) 由 $x^2 + y^2 = 2z$ 及 $z = 2$ 消去 z 得 $x^2 + y^2 = 4$, 从而知 Ω 在 xOy 面上的投影区域为 $D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$. 利用柱面坐标, Ω 可表示为

$$\frac{\rho^2}{2} \leq z \leq 2, 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv &= \iiint_{\Omega} \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3 d\rho \int_{\frac{\rho^2}{2}}^2 dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3 \left(2 - \frac{\rho^2}{2} \right) d\rho = 2\pi \left[\frac{\rho^4}{2} - \frac{\rho^6}{12} \right]_0^2 = \frac{16}{3}\pi. \end{aligned}$$

* 10. 利用球面坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$, 其中 Ω 是由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 所围成的闭区域;

(2) $\iiint_{\Omega} z dv$, 其中闭区域 Ω 由不等式 $x^2 + y^2 + (z - a)^2 \leq a^2$, $x^2 + y^2 \leq z^2$

所确定.

$$\begin{aligned} \text{解 (1)} \quad \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv &= \iiint_{\Omega} r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^1 r^4 dr \\ &= 2\pi [-\cos \varphi]_0^\pi \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^1 = \frac{4}{5}\pi. \end{aligned}$$

(2) 在球面坐标系中, 不等式 $x^2 + y^2 + (z - a)^2 \leq a^2$, 即 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az$, 变为 $r^2 \leq 2ar\cos\varphi$, 即 $r \leq 2a\cos\varphi$; $x^2 + y^2 \leq z^2$ 变为 $r^2 \sin^2\varphi \leq r^2 \cos^2\varphi$, 即 $\tan\varphi \leq 1$, 亦即 $\varphi \leq \frac{\pi}{4}$. 因此 Ω 可表示为

$$0 \leq r \leq 2a\cos\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4},$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ (图 10-45).}$$

于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z \, dv &= \iiint_{\Omega} r \cos\varphi \cdot r^2 \sin\varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} r^3 \, dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi \sin\varphi \cdot \frac{1}{4} (2a\cos\varphi)^4 \, d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4a^4 \cos^5\varphi \sin\varphi \, d\varphi \\ &= 8\pi a^4 \left[-\frac{\cos^6\varphi}{6} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{7}{6}\pi a^4. \end{aligned}$$

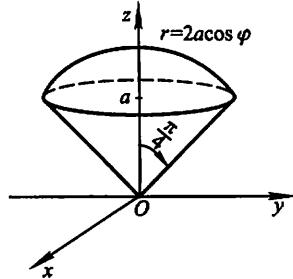


图 10-45

11. 选用适当的坐标计算下列三重积分:

$$(1) \iiint_{\Omega} xy \, dv, \text{ 其中 } \Omega \text{ 为柱面 } x^2 + y^2 = 1 \text{ 及平面 } z = 1, z = 0, x = 0, y = 0$$

所围成的在第一卦限内的闭区域;

$$(2) \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dv, \text{ 其中 } \Omega \text{ 是由球面 } x^2 + y^2 + z^2 = z \text{ 所围成的闭区域;}$$

$$(3) \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \, dv, \text{ 其中 } \Omega \text{ 是由曲面 } 4z^2 = 25(x^2 + y^2) \text{ 及平面 } z = 5 \text{ 所围成的闭区域;}$$

$$(4) \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \, dv, \text{ 其中闭区域 } \Omega \text{ 由不等式 } 0 < a \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq A, z \geq 0 \text{ 所确定.}$$

解 (1) 利用柱面坐标计算. Ω 可表示为

$$0 \leq z \leq 1, 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

于是

$$\iiint_{\Omega} xy \, dv = \iiint_{\Omega} \rho^2 \sin\theta \cos\theta \cdot \rho \, d\rho \, d\theta \, dz$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^1 dz \\
 &= \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 \left[z \right]_0^1 = \frac{1}{8}.
 \end{aligned}$$

* (2) 在球面坐标系中, 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ 的方程为 $r^2 = r \cos \varphi$, 即 $r = \cos \varphi$. Ω 可表示为

$$0 \leq r \leq \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{(图 10-46).}$$

于是

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv &= \iiint_{\Omega} r \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{\cos \varphi} r^3 dr \\
 &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cdot \frac{\cos^4 \varphi}{4} d\varphi \\
 &= -\frac{\pi}{2} \left[\frac{\cos^5 \varphi}{5} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{10}.
 \end{aligned}$$

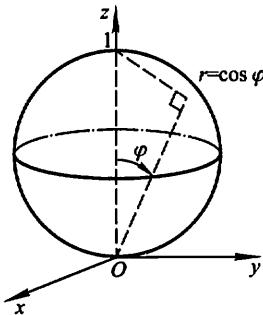


图 10-46

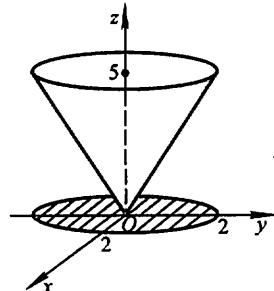


图 10-47

(3) 利用柱面坐标计算. Ω 可表示为

$$\frac{5}{2}\rho \leq z \leq 5, 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{(图 10-47), 于是}$$

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv &= \iiint_{\Omega} \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta dz \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3 d\rho \int_{\frac{5}{2}\rho}^5 dz \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3 \left(5 - \frac{5}{2}\rho \right) d\rho \\
 &= 2\pi \left[\frac{5}{4}\rho^4 - \frac{1}{2}\rho^5 \right]_0^2 = 8\pi.
 \end{aligned}$$

* (4) 在球面坐标系中, Ω 可表示为

$$a \leq r \leq A, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv &= \iiint_{\Omega} r^2 \sin^2 \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi \int_a^A r^4 dr \\ &= 2\pi \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{A^5 - a^5}{5}\right) = \frac{4\pi}{15} (A^5 - a^5). \end{aligned}$$

12. 利用三重积分计算下列由曲面所围成的立体的体积:

$$(1) z = 6 - x^2 - y^2 \text{ 及 } z = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$*(2) x^2 + y^2 + z^2 = 2az (a > 0) \text{ 及 } x^2 + y^2 = z^2 \text{ (含有 } z \text{ 轴的部分);}$$

$$(3) z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ 及 } z = x^2 + y^2;$$

$$(4) z = \sqrt{5 - x^2 - y^2} \text{ 及 } x^2 + y^2 = 4z.$$

解 (1) 利用直角坐标计算. 由 $z = 6 - x^2 - y^2$ 和 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 消去 z , 解得 $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$, 即 Ω 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为 $x^2 + y^2 \leq 4$. 于是

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 6 - (x^2 + y^2), x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

因此

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} dv = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{6-(x^2+y^2)} dz \\ &= \iint_{D_{xy}} [6 - (x^2 + y^2) - \sqrt{x^2 + y^2}] dx dy \text{ (用极坐标)} \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (6 - \rho^2 - \rho) \rho d\rho \\ &= 2\pi \left[3\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^3}{3} \right]_0^2 = \frac{32}{3}\pi. \end{aligned}$$

注 本题也可用“先重后单”的积分次序求解:

对固定的 z , 当 $0 \leq z \leq 2$ 时, $D_z = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq z^2\}$; 当 $2 \leq z \leq 6$ 时, $D_z = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 6 - z\}$ (图 10-48).

于是

$$V = V_1 + V_2 = \int_0^2 dz \iint_{D_z} dx dy + \int_2^6 dz \iint_{D_z} dx dy$$

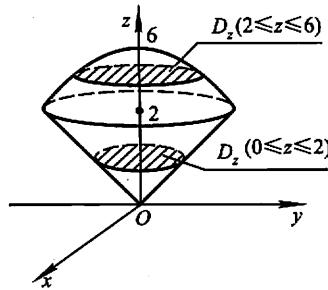


图 10-48

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^2 \pi z^2 dz + \int_2^6 \pi(6-z) dz \\
 &= \frac{8}{3}\pi + 8\pi = \frac{32}{3}\pi.
 \end{aligned}$$

* (2) 利用球面坐标计算. 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ 及圆锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 的球面坐标方程分别为 $r = 2a \cos \varphi$ 和 $\varphi = \frac{\pi}{4}$, 故

$$\Omega = \{(r, \varphi, \theta) \mid 0 \leq r \leq 2a \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \text{ (图 10-45).}$$

于是

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_n dv = \iiint_n r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} r^2 dr \\
 &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{8a^3}{3} \sin \varphi \cos^3 \varphi d\varphi \\
 &= \frac{16\pi a^3}{3} \left[-\frac{1}{4} \cos^4 \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi a^3.
 \end{aligned}$$

注 本题若用“先重后单”的方法计算也很简便.

由 $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ 和 $x^2 + y^2 = z^2$ 解得 $z = a$. 对固定的 z , 当 $0 \leq z \leq a$ 时, $D_z = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq z^2\}$; 当 $a \leq z \leq 2a$ 时, $D_z = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2az - z^2\}$. 于是

$$\begin{aligned}
 V &= V_1 + V_2 = \int_0^a dz \iint_{D_z} dx dy + \int_a^{2a} dz \iint_{D_z} dx dy \\
 &= \int_0^a \pi z^2 dz + \int_a^{2a} \pi(2az - z^2) dz \\
 &= \frac{1}{3}\pi a^3 + \frac{2}{3}\pi a^3 = \pi a^3.
 \end{aligned}$$

(3) 利用柱面坐标计算. 曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和 $z = x^2 + y^2$ 的柱面坐标方程分别为 $z = \rho$ 和 $z = \rho^2$. 消去 z , 得 $\rho = 1$, 故它们所围的立体在 xOy 面上的投影区域为 $\rho \leq 1$ (图 10-49). 因此

$$\Omega = \{(\rho, \theta, z) \mid \rho^2 \leq z \leq \rho, 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

于是

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_n dv = \iiint_n \rho d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^{\rho} dz \\
 &= 2\pi \int_0^1 \rho (\rho - \rho^2) d\rho = \frac{\pi}{6}.
 \end{aligned}$$

(本题也可用“先重后单”的方法方便地求得结果,读者可自己练习.)

(4) 在直角坐标系中用“先重后单”的方法计算. 由 $z = \sqrt{5 - x^2 - y^2}$ 和 $x^2 + y^2 = 4z$ 可解得 $z = 1$.

对固定的 z , 当 $0 \leq z \leq 1$ 时, $D_z = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4z\}$; 当 $1 \leq z \leq \sqrt{5}$ 时, $D_z = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 5 - z^2\}$ (图 10-50).

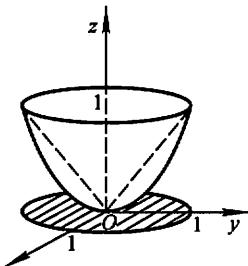


图 10-49

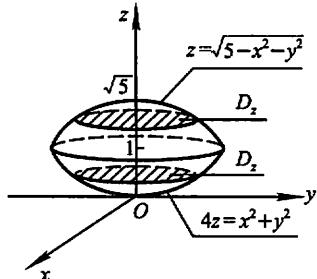


图 10-50

于是

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 = \int_0^1 dz \iint_{D_z} dx dy + \int_1^{\sqrt{5}} dz \iint_{D_z} dx dy \\ &= \int_0^1 \pi(4z) dz + \int_1^{\sqrt{5}} \pi(5 - z^2) dz \\ &= 2\pi + \pi \left[5z - \frac{z^3}{3} \right]_1^{\sqrt{5}} = \frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5} - 4). \end{aligned}$$

(本题用柱面坐标计算也很方便,请读者自己练习.)

- 13. 求球体 $r \leq a$ 位于锥面 $\varphi = \frac{\pi}{3}$ 和 $\varphi = \frac{2}{3}\pi$ 之间的部分的体积.

解 用球面坐标计算. 记 Ω 为立体所占的空间区域,有

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin \varphi d\varphi \int_0^a r^2 dr \\ &= \frac{2\pi a^3}{3}. \end{aligned}$$

14. 求上、下分别为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 和抛物面 $z = x^2 + y^2$ 所围立体的体积.

解 由 $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 和 $z = x^2 + y^2$ 消去 z , 解得 $x^2 + y^2 = 1$. 从而得立体 Ω 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为 $x^2 + y^2 \leq 1$. 于是

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

因此

$$V = \iiint_{\Omega} dv = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} dz$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_D [\sqrt{2-x^2-y^2} - (x^2+y^2)] dx dy \text{(用极坐标)} \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (\sqrt{2-\rho^2} - \rho^2) \rho d\rho \\
&= \frac{8\sqrt{2}-7}{6}\pi.
\end{aligned}$$

注 本题也可用“先重后单”的方法按下式方便地求得结果：

$$\begin{aligned}
V &= \int_1^{\sqrt{2}} dz \iint_{x^2+y^2 \leq z^2} dx dy + \int_0^1 dz \iint_{x^2+y^2 \leq z} dx dy \\
&= \pi \int_1^{\sqrt{2}} (2-z^2) dz + \pi \int_0^1 z dz \\
&= \frac{4\sqrt{2}-5}{3}\pi + \frac{1}{2}\pi = \frac{8\sqrt{2}-7}{6}\pi.
\end{aligned}$$

* 15. 球心在原点、半径为 R 的球体，在其上任意一点的密度的大小与这点到球心的距离成正比，求这球体的质量。

解 用球面坐标计算。 Ω 为 $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$ ，即 $r \leq R$. 按题设，密度函数 $\mu(x, y, z) = k\sqrt{x^2+y^2+z^2} = kr$ ($k > 0$). 于是

$$\begin{aligned}
M &= \iiint_n \mu(x, y, z) dv = \iiint_n kr \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\
&= k \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^R r^3 dr \\
&= k \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^4}{4} = k\pi R^4.
\end{aligned}$$

习题 10-4

重积分的应用

1. 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 含在圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 内部的那部分面积。

解 如图 10-51, 上半球面的方程为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \\
\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} &= \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.
\end{aligned}$$

由曲面的对称性得所求面积为

$$A = 4 \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

$$\begin{aligned}
 &= 4 \iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy \xrightarrow{\text{(极坐标)}} 4a \iint_D \frac{1}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \rho d\rho d\theta \\
 &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} \frac{\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} d\rho \\
 &= 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \theta) d\theta = 2a^2(\pi - 2).
 \end{aligned}$$

2. 求锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $z^2 = 2x$ 所割下部分的曲面面积.

解 由 $\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ z^2 = 2x \end{cases}$, 解得 $x^2 + y^2 = 2x$, 故曲面在 xOy 面上的投影区域

$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 2x\}$ (图 10-52).

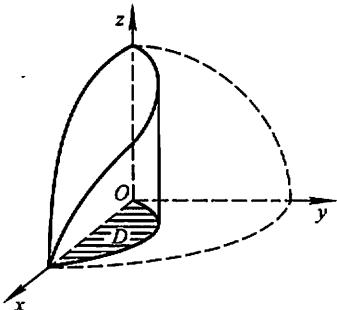


图 10-51

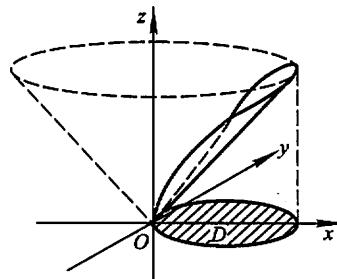


图 10-52

被割曲面的方程为 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{2},$$

于是所求曲面的面积为

$$\begin{aligned}
 A &= \iint_D \sqrt{2} dx dy \xrightarrow{\text{(对称性)}} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos \theta} \sqrt{2} \rho d\rho \\
 &= 4\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = 4\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \\
 &= \sqrt{2}\pi.
 \end{aligned}$$

3. 求底圆半径相等的两个直交圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 及 $x^2 + z^2 = R^2$ 所围立体的表面积.

解 如图 10-53, 设第一卦限内的立体表面位于圆柱面 $x^2 + z^2 = R^2$ 上的那一部分的面积为 A , 则由对称性知全部表面的面积为 $16A$.

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2} + 0} dx dy$$

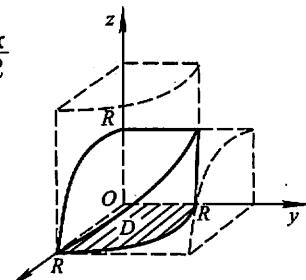


图 10-53

$$\begin{aligned}
&= \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx dy = R \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}} dy \\
&= R \int_0^R dx = R^2,
\end{aligned}$$

故全部表面积为 $16R^2$.

4. 设薄片所占的闭区域 D 如下, 求均匀薄片的质心:

(1) D 由 $y = \sqrt{2px}$, $x = x_0$, $y = 0$ 所围成;

(2) D 是半椭圆形闭区域 $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, y \geq 0 \right\}$;

(3) D 是介于两个圆 $r = a \cos \theta$, $r = b \cos \theta$ ($0 < a < b$) 之间的闭区域.

解 (1) 设质心为 (\bar{x}, \bar{y}) .

$$\begin{aligned}
A &= \iint_D dx dy = \int_0^{x_0} dx \int_0^{\sqrt{2px}} dy = \int_0^{x_0} \sqrt{2px} dx \\
&= \frac{2}{3} \sqrt{2px_0^3};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_D x dx dy &= \int_0^{x_0} x dx \int_0^{\sqrt{2px}} dy = \int_0^{x_0} \sqrt{2px} x^{\frac{3}{2}} dx \\
&= \frac{2}{5} \sqrt{2px_0^5};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_D y dx dy &= \int_0^{x_0} dx \int_0^{\sqrt{2px}} y dy = \int_0^{x_0} px dx \\
&= \frac{px_0^2}{2},
\end{aligned}$$

$$\text{于是 } \bar{x} = \frac{1}{A} \iint_D x dx dy = \frac{3}{5} x_0, \bar{y} = \frac{1}{A} \iint_D y dx dy = \frac{3}{8} \sqrt{2px_0} = \frac{3}{8} y_0,$$

故所求质心为 $\left(\frac{3}{5} x_0, \frac{3}{8} y_0 \right)$.

(2) 因 D 对称于 y 轴, 故质心 (\bar{x}, \bar{y}) 必位于 y 轴上, 于是 $\bar{x} = 0$.

$$\begin{aligned}
\bar{y} &= \frac{1}{A} \iint_D y dx dy = \frac{1}{A} \int_{-a}^a dx \int_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} y dy \\
&= \frac{1}{A} \int_{-a}^a \frac{b^2}{2a^2} (a^2 - x^2) dx \\
&= \frac{1}{\frac{1}{2}\pi ab} \cdot \frac{2}{3} ab^2 = \frac{4b}{3\pi}.
\end{aligned}$$

因此所求质心为 $\left(0, \frac{4b}{3\pi} \right)$.

(3) 因 D 对称于 x 轴, 故质心 (\bar{x}, \bar{y}) 位于 x 轴上,
于是 $\bar{y} = 0$ (图 10-54).

$$A = \pi \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}(b^2 - a^2),$$

$$\begin{aligned} \iint_D x \, dx \, dy &= \iint_D \rho \cos \theta \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \int_{a \cos \theta}^{b \cos \theta} \rho^2 d\rho \\ &= \frac{2}{3}(b^3 - a^3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta \\ &= \frac{2}{3}(b^3 - a^3) \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}(b^3 - a^3), \end{aligned}$$

故

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \iint_D x \, dx \, dy = \frac{a^2 + ab + b^2}{2(a+b)}.$$

所求质心为 $\left(\frac{a^2 + ab + b^2}{2(a+b)}, 0\right)$.

5. 设平面薄片所占的闭区域 D 由抛物线 $y = x^2$ 及直线 $y = x$ 所围成, 它在点 (x, y) 处的面密度 $\mu(x, y) = x^2 y$, 求该薄片的质心.

解 $M = \iint_D x^2 y \, dx \, dy = \int_0^1 x^2 \, dx \int_{x^2}^x y \, dy$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}(x^4 - x^6) \, dx = \frac{1}{35};$$

$$M_x = \iint_D y \mu(x, y) \, dx \, dy = \iint_D x^2 y^2 \, dx \, dy$$

$$= \int_0^1 x^2 \, dx \int_{x^2}^x y^2 \, dy$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{3}(x^5 - x^8) \, dx = \frac{1}{54};$$

$$M_y = \iint_D x \mu(x, y) \, dx \, dy = \iint_D x^3 y \, dx \, dy$$

$$= \int_0^1 x^3 \, dx \int_{x^2}^x y \, dy$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}(x^5 - x^7) \, dx = \frac{1}{48},$$

于是 $\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{35}{48}; \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{35}{54}.$

所求质心为 $\left(\frac{35}{48}, \frac{35}{54}\right)$.

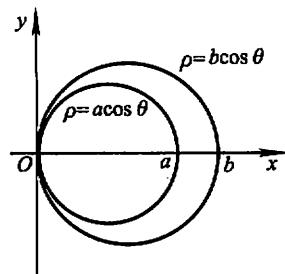


图 10-54

6. 设有一等腰直角三角形薄片, 腰长为 a , 各点处的面密度等于该点到直角顶点的距离的平方, 求这薄片的质心.

解 如图 10-55, 按题设, 面密度 $\mu(x, y) = x^2 + y^2$. 由对称性知 $\bar{x} = \bar{y}$.

$$\begin{aligned} M &= \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^a dx \int_0^{a-x} (x^2 + y^2) dy \\ &= \int_0^a \left[x^2(a-x) + \frac{(a-x)^3}{3} \right] dx = \frac{1}{6}a^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y &= \iint_D x(x^2 + y^2) dx dy = \int_0^a x dx \int_0^{a-x} (x^2 + y^2) dy \\ &= \int_0^a \left[x^3(a-x) + \frac{x(a-x)^3}{3} \right] dx \\ &= \int_0^a \left(-\frac{4}{3}x^4 + 2ax^3 - a^2x^2 + \frac{a^3}{3}x \right) dx = \frac{1}{15}a^5, \end{aligned}$$

因此 $\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2}{5}a, \bar{y} = \bar{x} = \frac{2}{5}a.$

所求质心为 $(\frac{2}{5}a, \frac{2}{5}a)$.

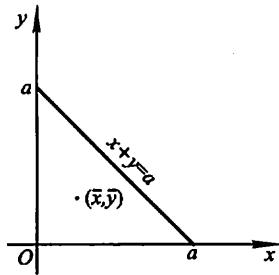


图 10-55

7. 利用三重积分计算下列由曲面所围立体的质心(设密度 $\rho = 1$):

(1) $z^2 = x^2 + y^2, z = 1;$

(2) $z = \sqrt{A^2 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} (A > a > 0), z = 0;$

(3) $z = x^2 + y^2, x + y = a, x = 0, y = 0, z = 0.$

解 (1) 曲面所围立体为圆锥体, 其顶点在原点, 并关于 z 轴对称, 又由于它是匀质的, 因此它的质心位于 z 轴上, 即有 $\bar{x} = \bar{y} = 0$. 立体的体积为 $V = \frac{1}{3}\pi$.

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{V} \iiint_D z dv = \frac{1}{V} \iint_{x^2+y^2 \leqslant 1} dx dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 z dz \\ &= \frac{1}{V} \iint_{x^2+y^2 \leqslant 1} \frac{1}{2}(1-x^2-y^2) dx dy \\ &= \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{1}{2}(1-\rho^2)\rho d\rho \\ &= \frac{3}{\pi} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

故所求质心为 $(0, 0, \frac{3}{4})$.

(2) 立体由两个同心的上半球面和 xOy 面所围成, 关于 z 轴对称, 又由于它

是匀质的,故其质心位于 z 轴上,即有 $\bar{x} = \bar{y} = 0$. 立体的体积为

$$V = \frac{2}{3}\pi(A^3 - a^3).$$

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \frac{1}{V} \iiint_A z \, dv = \frac{1}{V} \iiint_A r \cos \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\ &= \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_a^A r^3 dr \\ &= \frac{3}{2\pi(A^3 - a^3)} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{A^4 - a^4}{4} \\ &= \frac{3(A^4 - a^4)}{8(A^3 - a^3)},\end{aligned}$$

故立体质心为 $(0, 0, \frac{3(A^4 - a^4)}{8(A^3 - a^3)})$.

(3) 如图 10-56, $\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a-x, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$.

$$\begin{aligned}V &= \iiint_{\Omega} dv = \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{x^2+y^2} dz \\ &= \int_0^a dx \int_0^{a-x} (x^2 + y^2) dy \\ &= \int_0^a \left[x^2(a-x) + \frac{1}{3}(a-x)^3 \right] dx \\ &= \int_0^a \left[ax^2 - x^3 + \frac{1}{3}(a-x)^3 \right] dx = \frac{1}{6}a^4;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \frac{1}{V} \iiint_A z \, dv = \frac{1}{V} \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{x^2+y^2} zdz \\ &= \frac{1}{V} \int_0^a dx \int_0^{a-x} \frac{1}{2}(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) dy \\ &= \frac{1}{2V} \int_0^a \left[x^4(a-x) + \frac{2}{3}x^2(a-x)^3 + \frac{1}{5}(a-x)^5 \right] dx \\ &= \frac{3}{a^4} \cdot \frac{7a^6}{90} = \frac{7}{30}a^2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{V} \iiint_A x \, dv = \frac{1}{V} \int_0^a x dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{x^2+y^2} dz \\ &= \frac{1}{V} \int_0^a x \left[x^2(a-x) + \frac{1}{3}(a-x)^3 \right] dx \\ &= \frac{6}{a^4} \cdot \frac{a^5}{15} = \frac{2}{5}a,\end{aligned}$$

由于立体匀质且关于平面 $y = x$ 对称,故

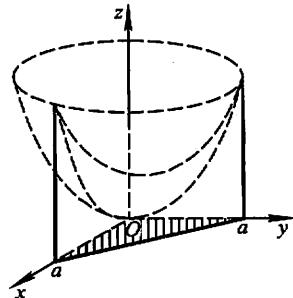


图 10-56

$$\bar{y} = \bar{x} = \frac{2}{5}a.$$

所求质心为 $\left(\frac{2}{5}a, \frac{2}{5}a, \frac{7}{30}a^2\right)$.

* 8. 设球体占有闭区域 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz\}$, 它在内部各点处的密度的大小等于该点到坐标原点的距离的平方. 试求这球体的质心.

解 在球面坐标系中, Ω 可表示为

$$0 \leq r \leq 2R \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

球体内任意一点 (x, y, z) 处的密度大小为

$$\rho = x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

由于球体的几何形状及质量分布均关于 z 轴对称, 故可知其质心位于 z 轴上, 因此 $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

$$\begin{aligned} M &= \iiint_D \rho dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R \cos \varphi} r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{32}{5} R^5 \cos^5 \varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{32}{15} \pi R^5; \\ \bar{z} &= \frac{1}{M} \iiint_D \rho z dv = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R \cos \varphi} r^2 \cdot r \cos \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr \\ &= \frac{2\pi}{M} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{64}{6} R^6 \cos^7 \varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{5}{4} R, \end{aligned}$$

故球体的质心为 $\left(0, 0, \frac{5}{4}R\right)$.

注 从以上两题的题解可看出, 在计算立体的质心时, 要注意利用对称性来减少运算量. 对匀质立体来说, 只要考虑立体几何形状的对称性(如第 7 题); 但对非匀质立体来说, 除了立体的几何形状的对称性外, 还需注意立体的质量分布是否也具有相应的对称性(如第 8 题).

9. 设均匀薄片(面密度为常数 1)所占闭区域 D 如下, 求指定的转动惯量:

$$(1) D = \left\{(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}, \text{求 } I_y;$$

$$(2) D \text{ 由抛物线 } y^2 = \frac{9}{2}x \text{ 与直线 } x = 2 \text{ 所围成, 求 } I_x \text{ 和 } I_y;$$

$$(3) D \text{ 为矩形闭区域 } \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}, \text{求 } I_x \text{ 和 } I_y.$$

$$\begin{aligned} \text{解 (1)} \quad I_y &= \iint_D x^2 dx dy = \int_{-a}^a x^2 dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy \\ &= \frac{2b}{a} \int_{-a}^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx \end{aligned}$$

$$= \frac{4b}{a} \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

令 $x = a \sin t$, 换元, 则

$$\begin{aligned} \text{上式} &= \frac{4b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3 \sin^2 t \cos t \cdot a \cos t dt \\ &= 4a^3 b \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt \right] \\ &= 4a^3 b \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{4} \pi a^3 b. \end{aligned}$$

(2) 如图 10-57, $D = \{(x, y) \mid -3\sqrt{\frac{x}{2}} \leq y \leq 3\sqrt{\frac{x}{2}}, 0 \leq x \leq 2\}$.

$$I_x = \iint_D y^2 dx dy \xrightarrow{\text{对称性}} 2 \int_0^2 dx \int_0^{3\sqrt{\frac{x}{2}}} y^2 dy$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^2 \frac{27}{2\sqrt{2}} x^{\frac{5}{2}} dx = \frac{72}{5};$$

$$I_y = \iint_D x^2 dx dy \xrightarrow{\text{对称性}} 2 \int_0^2 x^2 dx \int_0^{3\sqrt{\frac{x}{2}}} dy$$

$$= 2 \int_0^2 \frac{3}{\sqrt{2}} x^{\frac{5}{2}} dx = \frac{96}{7}.$$

$$(3) I_x = \iint_D y^2 dx dy = \int_0^a dx \int_0^b y^2 dy = \frac{ab^3}{3};$$

$$I_y = \iint_D x^2 dx dy = \int_0^a x^2 dx \int_0^b dy = \frac{a^3 b}{3}.$$

10. 已知均匀矩形板(面密度为常量 μ)的长和宽分别为 b 和 h , 计算此矩形板对于通过其形心且分别与一边平行的两轴的转动惯量.

解 建立如图 10-58 的坐标系, 使原点 O 为矩形板的形心, x 轴和 y 轴分别平行于矩形的两边, 则所求的转动惯量为

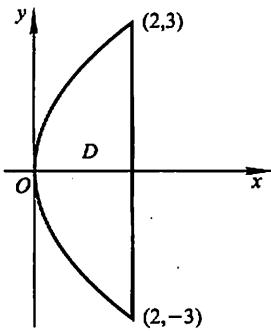


图 10-57

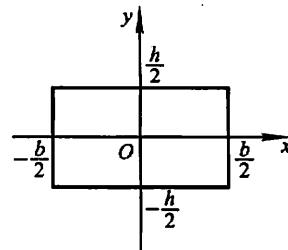


图 10-58

$$I_x = \iint_D y^2 \mu dx dy = \mu \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dy = \frac{1}{12} \mu b h^3;$$

$$I_y = \iint_D x^2 \mu dx dy = \mu \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy = \frac{1}{12} \mu b h^3.$$

11. 一均匀物体(密度 ρ 为常量)占有的闭区域 Ω 由曲面 $z = x^2 + y^2$ 和平面 $z = 0$, $|x| = a$, $|y| = a$ 所围成,

- (1) 求物体的体积;
- (2) 求物体的质心;
- (3) 求物体关于 z 轴的转动惯量.

解 (1) 如图 10-59, 由 Ω 的对称性可知

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^{x^2+y^2} dz \\ &= 4 \int_0^a dx \int_0^a (x^2 + y^2) dy \\ &= 4 \int_0^a \left(ax^2 + \frac{a^3}{3} \right) dx = \frac{8}{3} a^4. \end{aligned}$$

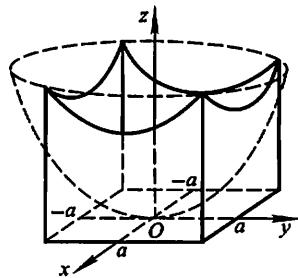


图 10-59

(2) 由对称性可知, 质心位于 z 轴上, 故 $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{M} \iiint_n \rho z dv \stackrel{\text{对称性}}{=} \frac{4}{V} \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^{x^2+y^2} z dz \\ &= \frac{4}{V} \int_0^a dx \int_0^a \frac{1}{2} (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) dy \\ &= \frac{2}{V} \int_0^a \left(ax^4 + \frac{2}{3} a^3 x^2 + \frac{1}{5} a^5 \right) dx = \frac{7}{15} a^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad I_z &= \iiint_n \rho (x^2 + y^2) dv \stackrel{\text{对称性}}{=} 4\rho \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^{x^2+y^2} (x^2 + y^2) dz \\ &= 4\rho \int_0^a dx \int_0^a (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) dy \\ &= \frac{112}{45} \rho a^6. \end{aligned}$$

12. 求半径为 a 、高为 h 的均匀圆柱体对于过中心而平行于母线的轴的转动惯量(设密度 $\rho = 1$).

解 建立空间直角坐标系, 使原点位于圆柱体的中心, z 轴平行于母线, 则圆柱体所占的空间闭区域

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq a^2, -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \right\}$$

$$\underline{\text{柱面坐标}} \left\{ (\rho, \theta, z) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq a, -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \right\}.$$

于是所求的转动惯量为

$$\begin{aligned} I_z &= \iint_D (x^2 + y^2) dv = \iint_D \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \rho^3 d\rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz \\ &= 2\pi \cdot \frac{a^4}{4} \cdot h = \frac{1}{2}\pi ha^4. \end{aligned}$$

13. 设面密度为常量 μ 的匀质半圆环形薄片占有闭区域 $D = \{(x, y, 0) \mid R_1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R_2, x \geq 0\}$, 求它对位于 z 轴上点 $M_0(0, 0, a)$ ($a > 0$) 处单位质量的质点的引力 \mathbf{F} .

解 如图 10-60, 引力元素 $d\mathbf{F}$ 沿 x 轴和 z 轴的分量分别为

$$dF_x = G \frac{\mu x}{(x^2 + y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} d\sigma$$

和 $dF_z = G \frac{\mu(-a)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} d\sigma.$

于是 $F_x = G\mu \iint_D \frac{x}{(x^2 + y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} d\sigma$

$$\xrightarrow{\text{极坐标}} G\mu \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho \cos \theta}{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \rho d\rho$$

$$= G\mu \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho^2}{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} d\rho$$

$$= 2G\mu \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho^2}{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} d\rho (\text{令 } \rho = a \tan t \text{ 换元})$$

$$= 2G\mu \int_{\arctan \frac{R_1}{a}}^{\arctan \frac{R_2}{a}} \frac{a^2 \tan^2 t}{a^3 \sec^3 t} \cdot a \sec^2 t dt$$

$$= 2G\mu \int_{\arctan \frac{R_1}{a}}^{\arctan \frac{R_2}{a}} (\sec t - \cos t) dt$$

$$= 2G\mu \left[\ln (\sec t + \tan t) - \sin t \right]_{\arctan \frac{R_1}{a}}^{\arctan \frac{R_2}{a}}$$

$$= 2G\mu \left(\ln \frac{\sqrt{R_2^2 + a^2} + R_2}{\sqrt{R_1^2 + a^2} + R_1} - \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + a^2}} + \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + a^2}} \right);$$

$$F_z = -G\mu a \iint_D \frac{d\sigma}{(x^2 + y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

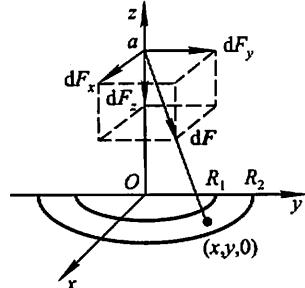


图 10-60

$$\begin{aligned}
 & \xrightarrow{\text{极坐标}} G\mu \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho}{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} d\rho \\
 &= \pi G\mu \left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + a^2}} \right]_{R_1}^{R_2} \\
 &= \pi G\mu \left(\frac{1}{\sqrt{R_2^2 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_1^2 + a^2}} \right),
 \end{aligned}$$

由于 D 关于 x 轴对称, 且质量均匀分布, 故 $F_y = 0$. 因此引力,

$$\begin{aligned}
 F &= \left[2G\mu \left(\ln \frac{\sqrt{R_2^2 + a^2} + R_2}{\sqrt{R_1^2 + a^2} + R_1} - \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + a^2}} + \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + a^2}} \right), 0, \right. \\
 &\quad \left. \pi G\mu \left(\frac{1}{\sqrt{R_2^2 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_1^2 + a^2}} \right) \right].
 \end{aligned}$$

14. 设均匀柱体密度为 ρ , 占有闭区域 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h\}$, 求它对于位于点 $M_0(0, 0, a)$ ($a > h$) 处的单位质量的质点的引力.

解 由柱体的对称性和质量分布的均匀性知 $F_x = F_y = 0$. 引力沿 z 轴的分量

$$\begin{aligned}
 F_z &= \iiint_{\Omega} G\rho \frac{z-a}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{\frac{3}{2}}} dv \\
 &= G\rho \int_0^h (z-a) dz \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{dx dy}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{\frac{3}{2}}} \\
 &\xrightarrow{\text{柱面坐标}} G\rho \int_0^h (z-a) dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{r dr}{[r^2+(z-a)^2]^{\frac{3}{2}}} \\
 &= 2\pi G\rho \int_0^h (z-a) \left[\frac{1}{a-z} - \frac{1}{\sqrt{R^2+(z-a)^2}} \right] dz \\
 &= 2\pi G\rho \int_0^h \left[-1 - \frac{z-a}{\sqrt{R^2+(z-a)^2}} \right] dz \\
 &= -2\pi G\rho [h + \sqrt{R^2+(h-a)^2} - \sqrt{R^2+a^2}].
 \end{aligned}$$

习题 10-5 含参变量的积分

1. 求下列含参变量的积分所确定的函数的极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{1+x} \frac{dy}{1+x^2+y^2}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2+y^2} dy;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^2 y^2 \cos(xy) dy.$$

$$\text{解 } (1) \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{1+x} \frac{dy}{1+x^2+y^2} = \int_0^{1+0} \frac{dy}{1+0+y^2} = [\arctan y]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + y^2} dy = \int_{-1}^1 |y| dy = 2 \int_0^1 y dy = 1.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^2 y^2 \cos(xy) dy = \int_0^2 y^2 (\cos 0) dy = \frac{8}{3}.$$

2. 求下列函数的导数:

$$(1) \varphi(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} (y^2 \sin x - y^3) dy; \quad (2) \varphi(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+xy)}{y} dy;$$

$$(3) \varphi(x) = \int_{x^2}^{x^3} \arctan \frac{y}{x} dy; \quad (4) \varphi(x) = \int_x^{x^2} e^{-xy^2} dy.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } (1) \varphi'(x) &= \int_{\sin x}^{\cos x} y^2 \cos x dy + (\cos^2 x \sin x - \cos^3 x)(\cos x)' \\ &\quad - (\sin^2 x \sin x - \sin^3 x)(\sin x)' \\ &= \frac{1}{3} \cos x (\cos^3 x - \sin^3 x) + (\cos x - \sin x) \sin x \cos^2 x \\ &= \frac{1}{3} \cos x (\cos x - \sin x)(1 + 2 \sin 2x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \varphi'(x) &= \int_0^x \frac{1}{1+xy} dy + \frac{\ln(1+x^2)}{x} \\ &= \frac{1}{x} [\ln(1+xy)]_0^x + \frac{\ln(1+x^2)}{x} \\ &= \frac{2}{x} \ln(1+x^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \varphi'(x) &= \int_{x^2}^{x^3} \left(-\frac{y}{x^2+y^2} \right) dy + \arctan x^2 \cdot 3x^2 - \arctan x \cdot 2x \\ &= -\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \Big|_{x^2}^{x^3} + 3x^2 \arctan x^2 - 2x \arctan x \\ &= \ln \sqrt{\frac{1+x^2}{1+x^4}} + 3x^2 \arctan x^2 - 2x \arctan x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \varphi'(x) &= \int_x^{x^2} e^{-xy^2} (-y^2) dy + e^{-x^5} \cdot 2x - e^{-x^3} \cdot 1 \\ &= 2x e^{-x^5} - e^{-x^3} - \int_x^{x^2} y^2 e^{-xy^2} dy. \end{aligned}$$

3. 设 $F(x) = \int_0^x (x+y)f(y) dy$, 其中 $f(y)$ 为可微分的函数, 求 $F''(x)$.

$$\text{解 } F'(x) = \int_0^x f(y) dy + 2xf(x);$$

$$F''(x) = f(x) + 2f(x) + 2xf'(x) = 3f(x) + 2xf'(x).$$

4. 应用对参数的微分法, 计算下列积分:

$$(1) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1+a \cos x}{1-a \cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x} \quad (|a| < 1);$$

$$(2) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 x + a^2 \sin^2 x) dx \quad (a > 0).$$

$$\text{解 (1) 设 } \varphi(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1+a \cos x}{1-a \cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x},$$

则 $\varphi(0)=0, \varphi(a)=I$. 由于

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\ln \frac{1+a \cos x}{1-a \cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \frac{2}{1-a^2 \cos^2 x},$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \varphi'(a) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{1-a^2 \cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2d \tan x}{\sec^2 x - a^2} \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d \tan x}{(1-a^2) + \tan^2 x} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \left[\arctan \frac{\tan x}{\sqrt{1-a^2}} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } I &= \varphi(a) - \varphi(0) = \int_0^a \varphi'(\alpha) d\alpha = \int_0^a \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}} d\alpha \\ &= \pi \arcsin a. \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 设 } \varphi(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 x + a^2 \sin^2 x) dx,$$

则 $\varphi(1)=0, \varphi(a)=I$. 由于

$$\frac{\partial}{\partial a} [\ln(\cos^2 x + a^2 \sin^2 x)] = \frac{2a \sin^2 x}{\cos^2 x + a^2 \sin^2 x},$$

故

$$\begin{aligned} \varphi'(\alpha) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a \sin^2 x}{\cos^2 x + a^2 \sin^2 x} dx \\ &\stackrel{u=\tan x}{=} 2a \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{1+a^2 u^2} \cdot \frac{du}{1+u^2} \\ &= \frac{2a}{a^2-1} \left[\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} - \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+a^2 u^2} \right] (a \neq 1) \\ &= \frac{2a}{a^2-1} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2a} \right) = \frac{\pi}{a+1}; \end{aligned}$$

$$\text{又当 } a=1 \text{ 时, } \varphi'(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2},$$

因此 $\varphi'(\alpha)$ 在 $x=1$ 处连续. 从而对任一 $a>0$, $\varphi'(\alpha)$ 在区间 $[1, a]$ (或 $[a, 1]$) 上连续. 于是

$$I = \varphi(a) - \varphi(1) = \int_1^a \varphi'(\alpha) d\alpha = \int_1^a \frac{\pi}{\alpha+1} d\alpha$$

$$= \pi \ln \frac{a+1}{2}.$$

5. 计算下列积分:

$$(1) \int_0^1 \frac{\arctan x}{x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(2) \int_0^1 \sin \left(\ln \frac{1}{x} \right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx (0 < a < b).$$

解 (1) 因为 $\frac{\arctan x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2}$,

故 原式 $= \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2} \right] \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (交换积分次序)
 $= \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}} \right] dy,$

由于

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}} &\stackrel{x=\sin t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+y^2 \sin^2 t} \\ &\stackrel{u=\tan t}{=} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+(1+y^2)u^2} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} [\arctan(\sqrt{1+y^2}u)]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}, \end{aligned}$$

因此 原式 $= \int_0^1 \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}} dy = \frac{\pi}{2} [\ln(y + \sqrt{1+y^2})]_0^1$
 $= \frac{\pi}{2} \ln(1 + \sqrt{2}).$

(2) 因为 $\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y dy$,

故 $\int_0^1 \sin \left(\ln \frac{1}{x} \right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_0^1 \sin \left(\ln \frac{1}{x} \right) dx \int_a^b x^y dy$ (交换积分次序)
 $= \int_a^b dy \int_0^1 \sin \left(\ln \frac{1}{x} \right) x^y dx.$

由于 $\int_0^1 \sin \left(\ln \frac{1}{x} \right) x^y dx \stackrel{x=e^{-t}}{=} \int_{+\infty}^0 \sin t \cdot e^{-yt} (-e^{-t}) dt$
 $= \int_0^{+\infty} \sin t \cdot e^{-(y+1)t} dt$ (分部积分)
 $= \frac{1}{1+(y+1)^2} e^{-(y+1)t} [\cos t - (y+1) \sin t] \Big|_0^{+\infty}$
 $= \frac{1}{1+(y+1)^2},$

因此 原式 = $\int_a^b \frac{1}{1+(y+1)^2} dy = [\arctan(y+1)]_a^b$
 $= \arctan(b+1) - \arctan(a+1).$

练习题十

1. 选择以下各题中给出的四个结论中一个正确的结论:

(1) 设有空间闭区域 $\Omega_1 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$, $\Omega_2 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, 则有 _____.

(A) $\iiint_{\Omega_1} x dv = 4 \iiint_{\Omega_2} x dv.$

(B) $\iiint_{\Omega_1} y dv = 4 \iiint_{\Omega_2} y dv.$

(C) $\iiint_{\Omega_1} z dv = 4 \iiint_{\Omega_2} z dv.$

(D) $\iiint_{\Omega_1} xyz dv = 4 \iiint_{\Omega_2} xyz dv.$

(2) 设有平面闭区域 $D = \{(x, y) | -a \leq x \leq a, x \leq y \leq a\}$, $D_1 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq a, x \leq y \leq a\}$. 则 $\iint_D (xy + \cos x \sin y) dx dy = _____.$

(A) $2 \iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy.$

(B) $2 \iint_{D_1} xy dx dy.$

(C) $4 \iint_{D_1} (xy + \cos x \sin y) dx dy.$

(D) 0.

(3) 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx$, 则 $F'(2) = _____.$

(A) $2f(2).$

(B) $f(2).$

(C) $-f(2).$

(D) 0.

解 (1) 先说明(A)不正确. 由于 Ω_1 关于 yOz 面对称, 而被积函数 x 关于 x 是奇函数, 故 $\iiint_{\Omega_1} x dv = 0$, 而 $\iiint_{\Omega_2} x dv \neq 0$, 故(A)不正确. 类似可说明(B)和(D)不正确. 再说明(C)是正确的. 设 $\Omega_3 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0, x \geq 0\}$. 由于被积函数 z 关于 x 是偶函数, 而 Ω_3 与 $\Omega_1 \setminus \Omega_3$ ^① 关于 yOz 面对称, 故 $\iiint_{\Omega_1} z dv = 2 \iiint_{\Omega_3} z dv$. 又由于被积函数 z 关于 y 也是偶函数, 且 Ω_2 与 $\Omega_3 \setminus \Omega_2$ 关于 xOz 面对称, 故 $\iiint_{\Omega_2} z dv = 2 \iiint_{\Omega_3 \setminus \Omega_2} z dv$.

① $\Omega_1 \setminus \Omega_3 = \{(x, y, z) | (x, y, z) \in \Omega_1 \text{ 且 } (x, y, z) \notin \Omega_3\}$, 称为 Ω_1 与 Ω_3 的差集.

称,故 $\iiint_{D_3} z \, d\tau = 2 \iint_{D_2} z \, d\tau$ ^①. 因此应选(C).

(2) 记 D 的三个顶点为 $A(a, a)$, $B(-a, a)$, $C(-a, -a)$ (图 10-61). 联结 O, B , 则 D 为 $\triangle COB$ 和 $\triangle BOA$ 之并. 由于 $\triangle COB$ 关于 x 轴对称, $\triangle BOA$ 关于 y 轴对称, 而函数 xy 关于 y 和 x 均是奇函数, 从而有

$$\iint_D xy \, dx \, dy = \iint_{\triangle COB} xy \, dx \, dy + \iint_{\triangle BOA} xy \, dx \, dy = 0 + 0 = 0;$$

又由于函数 $\cos x \sin y$ 关于 y 是奇函数, 关于 x 是偶函数, 从而有

$$\begin{aligned} \iint_D \cos x \sin y \, dx \, dy &= \iint_{\triangle COB} \cos x \sin y \, dx \, dy + \iint_{\triangle BOA} \cos x \sin y \, dx \, dy \\ &= 0 + 2 \iint_{D_1} \cos x \sin y \, dx \, dy, \end{aligned}$$

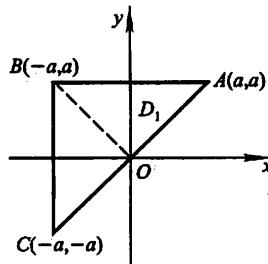


图 10-61

因此应选(A).

(3) 解法一 由于考虑 $F'(2)$, 故可设 $t > 1$. 对所给二重积分交换积分次序, 得

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_1^t f(x) \, dx \int_1^x dy \\ &= \int_1^t (x-1) f(x) \, dx, \end{aligned}$$

于是,

$$F'(t) = (t-1)f(t),$$

从而有

$$F'(2) = f(2). \text{ 故选(B).}$$

解法二 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $G(x)$, 则有

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_1^t dy \int_y^t f(x) \, dx = \int_1^t [G(t) - G(y)] \, dy \\ &= G(t) \int_1^t dy - \int_1^t G(y) \, dy = (t-1)G(t) - \int_1^t G(y) \, dy. \end{aligned}$$

求导得

$$F'(t) = G(t) + (t-1)f(t) - G(t) = (t-1)f(t),$$

因此

$$F'(2) = f(2).$$

2. 计算下列二重积分:

① 关于三重积分中如何利用对称性的问题, 请读者参阅本书习题 10-1 第 2 题题解的注(1)、(2), 得出有关结论.

(1) $\iint_D (1+x)\sin y \, d\sigma$, 其中 D 是顶点分别为 $(0,0), (1,0), (1,2)$ 和 $(0,1)$ 的梯形闭区域;

(2) $\iint_D (x^2 - y^2) \, d\sigma$, 其中 $D = \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq \sin x, 0 \leq x \leq \pi\}$;

(3) $\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \, d\sigma$, 其中 D 是圆周 $x^2 + y^2 = Rx$ 所围成的闭区域;

(4) $\iint_D (y^2 + 3x - 6y + 9) \, d\sigma$, 其中 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

解 (1) D 可表示为 $0 \leq y \leq 1+x, 0 \leq x \leq 1$, 于是

$$\begin{aligned} \iint_D (1+x)\sin y \, d\sigma &= \int_0^1 dx \int_0^{1+x} (1+x)\sin y \, dy \\ &= \int_0^1 [(1+x) - (1+x)\cos(1+x)] \, dx \\ &\stackrel{t=1+x}{=} \int_1^2 (t - t\cos t) \, dt = \left[\frac{t^2}{2} - t\sin t - \cos t \right]_1^2 \\ &= \frac{3}{2} + \sin 1 + \cos 1 - 2\sin 2 - \cos 2. \end{aligned}$$

(2) 由于

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 \, d\sigma &= \int_0^\pi x^2 \, dx \int_0^{\sin x} \, dy \\ &= \int_0^\pi x^2 \sin x \, dx = -[x^2 \cos x]_0^\pi + 2 \int_0^\pi x \cos x \, dx \\ &= \pi^2 + 2(x \sin x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x \, dx) = \pi^2 - 4; \\ \iint_D y^2 \, d\sigma &= \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} y^2 \, dy \\ &= \frac{1}{3} \int_0^\pi \sin^3 x \, dx = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx \text{①} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 - y^2) \, d\sigma &= \iint_D x^2 \, d\sigma - \iint_D y^2 \, d\sigma = (\pi^2 - 4) - \frac{4}{9} \\ &= \pi^2 - \frac{40}{9}. \end{aligned}$$

(3) 利用极坐标计算. 在极坐标系中,

① 一般有: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$, 参阅本书习题 5-3 第 7(13) 题的解答.

$$D = \left\{ (\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq R \cos \theta, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\},$$

于是

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} d\sigma &= \iint_D \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{R \cos \theta} \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{3} [(R^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}}]_0^{R \cos \theta} d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^3}{3} (1 - |\sin^3 \theta|) d\theta \\ &= \frac{2}{3} R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \theta) d\theta \\ &= \frac{2}{3} R^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) = \frac{R^3}{3} \left(\pi - \frac{4}{3} \right). \end{aligned}$$

注 如果忽略 $\sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ 上非正, 而按 $(R^2 - R^2 \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}} = R^3 \sin^3 \theta$ 计算, 将导致错误. 这是一类常见错误, 要注意避免.

(4) 利用对称性可知 $\iint_D 3x d\sigma = 0, \iint_D 6y d\sigma = 0$.

又

$$\begin{aligned} \iint_D 9 d\sigma &= 9x(D \text{ 的面积}) = 9\pi R^2, \\ \iint_D y^2 d\sigma &\stackrel{\text{极坐标}}{=} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^2 \sin^2 \theta \cdot \rho d\rho \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \cdot \int_0^R \rho^3 d\rho \\ &= \pi \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi}{4} R^4, \end{aligned}$$

因此 原式 $= \frac{\pi}{4} R^4 + 9\pi R^2$.

3. 交换下列二次积分的次序:

$$(1) \int_0^4 dy \int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{1}{2}(y-4)} f(x, y) dx;$$

$$(2) \int_0^1 dy \int_0^{2y} f(x, y) dx + \int_1^3 dy \int_0^{3-y} f(x, y) dx;$$

$$(3) \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$$

解 (1) 所给的二次积分等于闭区域 D 上的二重积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$, 其中

$D = \{(x, y) \mid -\sqrt{4-y} \leq x \leq \frac{1}{2}(y-4), 0 \leq y \leq 4\}$ (图 10-62), 将 D 表达为 $2x+4 \leq y \leq 4-x^2, -2 \leq x \leq 0$, 则得

$$\int_0^4 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\frac{1}{2}(y-4)} f(x, y) dx = \int_{-2}^0 dx \int_{2x+4}^{4-x^2} f(x, y) dy.$$

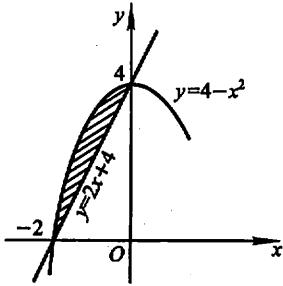


图 10-62

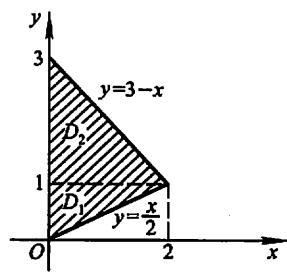


图 10-63

(2) 所给二次积分等于二重积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$, 其中 $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2y, 0 \leq y \leq 1\}$, $D_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 3-y, 1 \leq y \leq 3\}$ (图 10-63). D 可表达为 $\{(x, y) \mid \frac{x}{2} \leq y \leq 3-x, 0 \leq x \leq 2\}$, 于是

$$\text{原式} = \int_0^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{3-x} f(x, y) dy.$$

(3) 所给二次积分等于二重积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$,

其中 $D = \{(x, y) \mid \sqrt{x} \leq y \leq 1 + \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1\}$ (图 10-64). 将 D 表达为 $D_1 \cup D_2$, 其中 $D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y^2, 0 \leq y \leq 1\}$; $D_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \sqrt{2y-y^2}, 1 \leq y \leq 2\}$, 于是

$$\text{原式} = \int_0^1 dy \int_0^{y^2} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x, y) dx.$$

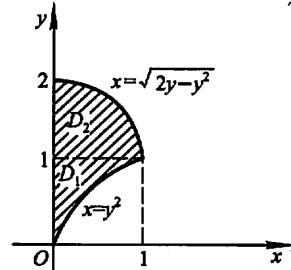


图 10-64

4. 证明:

$$\int_0^a dy \int_0^y e^{m(a-x)} f(x) dx = \int_0^a (a-x) e^{m(a-x)} f(x) dx.$$

证 上式左端的二次积分等于二重积分 $\iint_D e^{m(a-x)} f(x) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq a\} = \{(x, y) \mid x \leq y \leq a, 0 \leq x \leq a\}$. 于是交换积分次序即得

$$\begin{aligned} \int_0^a dy \int_0^y e^{m(a-x)} f(x) dx &= \int_0^a dx \int_x^a e^{m(a-x)} f(x) dy \\ &= \int_0^a (a-x) e^{m(a-x)} f(x) dx. \end{aligned}$$

5. 把积分 $\iint_D f(x, y) dxdy$ 表为极坐标形式的二次积分, 其中积分区域 $D = \{(x, y) | x^2 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\}$.

解 积分域 D 如图 10-65 所示. 抛物线 $y = x^2$ 的极坐标方程为 $\rho = \sec \theta \tan \theta$; 直线 $y = 1$ 的极坐标方程为 $\rho = \csc \theta$. 用射线 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 和 $\theta = \frac{3\pi}{4}$ 将 D 分成 D_1, D_2, D_3 三部分:

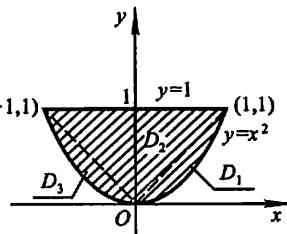


图 10-65

$$D_1: 0 \leq \rho \leq \sec \theta \tan \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4};$$

$$D_2: 0 \leq \rho \leq \csc \theta, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4};$$

$$D_3: 0 \leq \rho \leq \sec \theta \tan \theta, \frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \pi.$$

因此
$$\iint_D f(x, y) dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sec \theta \tan \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho +$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{\csc \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho +$$

$$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\theta \int_0^{\sec \theta \tan \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

6. 设 $f(x, y)$ 在闭区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq y, x \geq 0\}$ 上连续, 且

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} - \frac{8}{\pi} \iint_D f(x, y) dxdy,$$

求 $f(x, y)$.

解 设

$$\iint_D f(x, y) dxdy = A, \text{ 则}$$

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} - \frac{8}{\pi} A,$$

从而

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dxdy - \frac{8}{\pi} A \iint_D dxdy,$$

又

$$\iint_D dx dy = D \text{ 的面积} = \frac{\pi}{8},$$

故得

$$A = \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy - A,$$

因此

$$A = \frac{1}{2} \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy.$$

在极坐标系中,

$$D = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq \sin \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\},$$

因此

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sin \theta} \sqrt{1-\rho^2} \rho d\rho \\ &= \frac{\pi}{6} - \frac{2}{9}, \end{aligned}$$

于是得

$$A = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{9}.$$

从而

$$f(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2} + \frac{8}{9\pi} - \frac{2}{3}.$$

7. 把积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ 化为三次积分, 其中积分区域 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$, $y=x^2$ 及平面 $y=1, z=0$ 所围成的闭区域.

解 Ω 为一曲顶柱体, 其顶为 $z=x^2+y^2$, 底位于 xOy 面上, 其侧面由抛物柱面 $y=x^2$ 及平面 $y=1$ 所组成. 由此可知 Ω 在 xOy 面上的投影区域

$$D_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\}.$$

因此

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz &= \iint_{D_{xy}} dx dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz \\ &= \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz. \end{aligned}$$

8. 计算下列三重积分:

(1) $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$, 其中 Ω 是两个球: $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$ 和 $x^2+y^2+z^2 \leq 2Rz (R > 0)$ 的公共部分;

(2) $\iiint_{\Omega} \frac{z \ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1} dv$, 其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的闭区域;

(3) $\iiint_{\Omega} (y^2+z^2) dv$, 其中 Ω 是由 xOy 平面上曲线 $y^2=2x$ 绕 x 轴旋转而成

的曲面与平面 $x = 5$ 所围成的闭区域.

解 (1) 解法一 利用直角坐标,采用“先重后单”的积分次序.

由 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz \end{cases}$, 解得 $z = \frac{R}{2}$, 于是用平面 $z = \frac{R}{2}$ 把 Ω 分成 Ω_1 和 Ω_2 两部分, 其中

$$\Omega_1 = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leqslant 2Rz - z^2, 0 \leqslant z \leqslant \frac{R}{2} \right\};$$

$$\Omega_2 = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leqslant R^2 - z^2, \frac{R}{2} \leqslant z \leqslant R \right\} (\text{图 } 10-66).$$

于是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{\Omega_1} z^2 dx dy dz + \iiint_{\Omega_2} z^2 dx dy dz \\ &= \int_0^{\frac{R}{2}} z^2 dz \iint_{x^2+y^2 \leqslant 2Rz-z^2} dx dy + \\ &\quad \int_{\frac{R}{2}}^R z^2 dz \iint_{x^2+y^2 \leqslant R^2-z^2} dx dy \\ &= \int_0^{\frac{R}{2}} \pi(2Rz - z^2) \cdot z^2 dz + \\ &\quad \int_{\frac{R}{2}}^R \pi(R^2 - z^2) \cdot z^2 dz \\ &= \frac{1}{40}\pi R^5 + \frac{47}{480}\pi R^5 = \frac{59}{480}\pi R^5. \end{aligned}$$

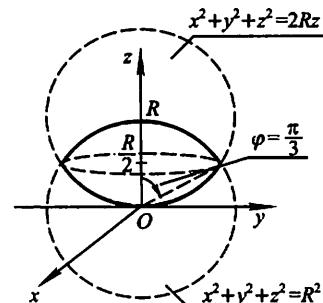


图 10-66

解法二 利用球面坐标计算. 作圆锥面 $\varphi = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, 将 Ω 分成 Ω'_1 和 Ω'_2 两部分:

$$\Omega'_1 = \left\{ (r, \varphi, \theta) \mid 0 \leqslant r \leqslant R, 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{3}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \right\};$$

$$\Omega'_2 = \left\{ (r, \varphi, \theta) \mid 0 \leqslant r \leqslant 2R\cos \varphi, \frac{\pi}{3} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \right\}.$$

于是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{\Omega'_1} z^2 dx dy dz + \iiint_{\Omega'_2} z^2 dx dy dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^R r^4 dr + \\ &\quad \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^{2R\cos \varphi} r^4 dr \\ &= \frac{7}{60}\pi R^5 + \frac{1}{160}\pi R^5 = \frac{59}{480}\pi R^5. \end{aligned}$$

(2) 由于积分区域 Ω 关于 xOy 面对称, 而被积函数关于 z 是奇函数, 故所求积分等于零.

(3) 积分区域 Ω 由旋转抛物面 $y^2 + z^2 = 2x$ 和平面 $x = 5$ 所围成, Ω 在 yOz 面上的投影区域

$$D_{yz} = \{(y, z) \mid y^2 + z^2 \leq 10\}.$$

因此 Ω 可表示为

$$\frac{1}{2}(y^2 + z^2) \leq x \leq 5, \quad 0 \leq y^2 + z^2 \leq 10.$$

于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) dv &= \iint_{D_{yz}} (y^2 + z^2) dy dz \int_{\frac{y^2+z^2}{2}}^5 dx \\ &= \iint_{D_{yz}} (y^2 + z^2) \left(5 - \frac{y^2 + z^2}{2}\right) dy dz \\ &\stackrel{\text{极坐标}}{=} \iint_{D_{yz}} \rho^2 \left(5 - \frac{\rho^2}{2}\right) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{10}} \rho^3 \left(5 - \frac{\rho^2}{2}\right) d\rho \\ &= \frac{250}{3}\pi. \end{aligned}$$

注 根据本题的积分区域 Ω 的特点, 应将 Ω 向 yOz 面投影, 即采用先对 x , 后对 y 和 z 的积分次序较宜.

* 9. 设函数 $f(x)$ 连续且恒大于零,

$$F(t) = \frac{\iiint_{\Omega} f(x^2 + y^2 + z^2) dv}{\iint_{D(t)} f(x^2 + y^2) d\sigma},$$

$$G(t) = \frac{\iint_{D(t)} f(x^2 + y^2) d\sigma}{\int_{-t}^t f(x^2) dx},$$

其中 $\Omega(t) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2\}$, $D(t) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq t^2\}$.

(1) 讨论 $F(t)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内的单调性;

(2) 证明当 $t > 0$ 时, $F(t) > \frac{2}{\pi} G(t)$.

解 (1) 利用球面坐标,

$$\iiint_{\Omega(t)} f(x^2 + y^2 + z^2) dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^t f(r^2) r^2 dr = 4\pi \int_0^t f(r^2) r^2 dr,$$

利用极坐标,

$$\begin{aligned}\iint_D f(x^2 + y^2) d\sigma &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t f(\rho^2) \rho d\rho = 2\pi \int_0^t f(\rho^2) \rho d\rho \\ &= 2\pi \int_0^t f(r^2) r dr.\end{aligned}$$

于是

$$F(t) = \frac{2 \int_0^t f(r^2) r^2 dr}{\int_0^t f(r^2) r dr},$$

求导得

$$F'(t) = \frac{2tf(t^2) \int_0^t f(r^2) r(t-r) dr}{\left[\int_0^t f(r^2) r dr \right]^2},$$

所以在区间 $(0, +\infty)$ 内, $F'(t) > 0$, 故 $F(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加.

(2) 证 因为 $f(x^2)$ 为偶函数, 故

$$\int_{-t}^t f(x^2) dx = 2 \int_0^t f(x^2) dx = 2 \int_0^t f(r^2) dr.$$

所以

$$G(t) = \frac{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t f(r^2) r dr}{2 \int_0^t f(r^2) dr} = \frac{\pi \int_0^t f(r^2) r dr}{\int_0^t f(r^2) dr}.$$

要证明 $t > 0$ 时, $F(t) > \frac{2}{\pi} G(t)$, 即证

$$\frac{2 \int_0^t f(r^2) r^2 dr}{\int_0^t f(r^2) r dr} > \frac{2 \int_0^t f(r^2) r dr}{\int_0^t f(r^2) dr},$$

只需证当 $t > 0$ 时, $H(t) = \int_0^t f(r^2) r^2 dr \cdot \int_0^t f(r^2) dr - \left[\int_0^t f(r^2) r dr \right]^2 > 0$.

由于 $H(0) = 0$, 且

$$H'(t) = f(t^2) \int_0^t f(r^2) (t-r)^2 dr > 0,$$

所以 $H(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加, 又 $H(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 故当 $t > 0$ 时,

$$H(t) > H(0) = 0.$$

因此当 $t > 0$ 时, 有

$$F(t) > \frac{2}{\pi} G(t).$$

10. 求平面 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ 被三坐标面所割出的有限部分的面积.

解 平面方程为 $z = c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y$, 它被三坐标面割出的有限部分在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为由 x 轴、 y 轴和直线 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 所围成的三角形区域. 于是所求面积为

$$\begin{aligned} A &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}} dx dy \\ &= \frac{1}{ab} \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} \iint_{D_{xy}} dx dy \\ &= \frac{1}{ab} \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} \cdot \frac{1}{2} ab \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}. \end{aligned}$$

11. 在均匀的半径为 R 的半圆形薄片的直径上, 要接上一个一边与直径等长的同样材料的均匀矩形薄片, 为了使整个均匀薄片的质心恰好落在圆心上, 问接上去的均匀矩形薄片另一边的长度应是多少?

解 设矩形另一边的长度为 l 并建立如图 10-67 所示的坐标系, 则质心的纵标

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{\iint_D y d\sigma}{A} = \frac{\int_{-R}^R dx \int_{-l}^{\sqrt{R^2-x^2}} y dy}{A} \\ &= \frac{\int_{-R}^R (R^2 - x^2 - l^2) dx}{2A} = \frac{\frac{2}{3} R^3 - l^2 R}{A}, \end{aligned}$$

由题设 $\bar{y}=0$ 即可算得

$$l = \sqrt{\frac{2}{3}} R.$$

12. 求由抛物线 $y = x^2$ 及直线 $y = 1$ 所围成的均匀薄片(面密度为常数 μ)对于直线 $y = -1$ 的转动惯量.

解 闭区域 $D = \{(x, y) \mid -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}, 0 \leq y \leq 1\}$, 所求的转动惯量为

$$I = \iint_D \mu(y+1)^2 d\sigma = \mu \int_0^1 (y+1)^2 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx$$

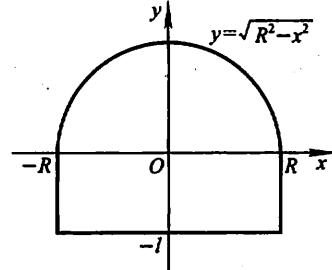


图 10-67

$$\begin{aligned}
&= 2\mu \int_0^1 \sqrt{y}(y+1)^2 dy \\
&= 2\mu \int_0^1 (y^{\frac{5}{2}} + 2y^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{1}{2}}) dy \\
&= \frac{368}{105}\mu.
\end{aligned}$$

13. 设在 xOy 面上有一质量为 M 的匀质半圆形薄片, 占有平面闭区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0\}$, 过圆心 O 垂直于薄片的直线上有一质量为 m 的质点 $P, OP = a$. 求半圆形薄片对质点 P 的引力.

解 求解本题时, 所有的分析和计算过程均与习题 10-4 的第 13 题雷同, 故这里略去详细的计算步骤.

积分区域 $D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi\}$.

由于 D 关于 y 轴对称, 且质量均匀分布, 故 $F_x = 0$. 又薄片的面密度 $\mu = \frac{M}{\frac{1}{2}\pi R^2} = \frac{2M}{\pi R^2}$, 于是

$$\begin{aligned}
F_y &= Gm\mu \iint_D \frac{y}{(x^2 + y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} d\sigma \\
&\stackrel{\text{极坐标}}{=} Gm\mu \int_0^\pi d\theta \int_0^R \frac{\rho \sin \theta}{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \rho d\rho \\
&= 2Gm\mu \int_0^R \frac{\rho^2}{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} d\rho \\
&= \frac{4GmM}{\pi R^2} \left[\ln \frac{\sqrt{R^2 + a^2} + R}{a} - \frac{R}{\sqrt{R^2 + a^2}} \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_z &= -Gam\mu \iint_D \frac{d\sigma}{(x^2 + y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= -Gam\mu \int_0^\pi d\theta \int_0^R \frac{\rho}{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} d\rho \\
&= -\frac{2GamM}{R^2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}} \right) \\
&= -\frac{2GamM}{R^2} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} \right),
\end{aligned}$$

所求引力为 $\mathbf{F} = (0, F_y, F_z)$.

14. 求质量分布均匀的半个旋转椭球体 $\Omega = \{(x, y, z) | \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1, z \geq 0\}$ 的质心.

解 设质心为 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, 由对称性知质心位于 z 轴上, 即 $\bar{x} = \bar{y} = 0$. 由于

$$\begin{aligned}
 \iiint_D z \, dv &= \int_0^b zdz \iint_{D_z} dx dy \quad (\text{其中 } D_z = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2(1 - \frac{z^2}{b^2})\}) \\
 &= \int_0^b \pi a^2 \left(1 - \frac{z^2}{b^2}\right) zdz \\
 &= \pi a^2 \int_0^b \left(z - \frac{z^3}{b^2}\right) dz = \frac{\pi a^2 b^2}{4}, \\
 V &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi a^2 b = \frac{2\pi a^2 b}{3},
 \end{aligned}$$

因此 $\bar{z} = \frac{\frac{\pi a^2 b^2}{4}}{\frac{2\pi a^2 b}{3}} = \frac{3b}{8}$,

即质心为 $(0, 0, \frac{3b}{8})$.

15. 一球形行星的半径为 R , 其质量为 M , 其密度呈球对称分布, 并向着球心线性增加. 若行星表面的密度为零, 那么行星中心的密度是多少?

解 设行星中心的密度为 μ_0 , 则由题设, 在距球心 $r (0 \leq r \leq R)$ 处的密度为 $\mu(r) = \mu_0 - kr$. 由于 $\mu(R) = \mu_0 - kR = 0$, 故 $k = \frac{\mu_0}{R}$, 即

$$\mu(r) = \mu_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right).$$

于是,

$$\begin{aligned}
 M &= \iiint_{r \leq R} \mu_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\
 &= \mu_0 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^R \left(1 - \frac{r}{R}\right) r^2 dr \\
 &= 4\pi \mu_0 \int_0^R \left(1 - \frac{r}{R}\right) r^2 dr = \frac{\mu_0 \pi R^3}{3},
 \end{aligned}$$

因此得

$$\mu_0 = \frac{3M}{\pi R^3}.$$

第十一章 曲线积分与曲面积分

习题十一 对弧长的曲线积分

1. 设在 xOy 面内有一分布着质量的曲线弧 L , 在点 (x, y) 处它的线密度为 $\mu(x, y)$. 用对弧长的曲线积分分别表达:

- (1) 这曲线弧对 x 轴、对 y 轴的转动惯量 I_x, I_y ;
- (2) 这曲线弧的质心坐标 \bar{x}, \bar{y} .

解 (1) 设想将 L 分成 n 个小弧段, 取出其中任意一段记作 ds (其长度也记作 ds), (x, y) 为 ds 上一点, 则 ds 对 x 轴和对 y 轴的转动惯量的近似值分别为

$$dI_x = y^2 \mu(x, y) ds; \quad dI_y = x^2 \mu(x, y) ds.$$

以此作为转动惯量元素并积分, 即得 L 对 x 轴、对 y 轴的转动惯量:

$$I_x = \int_L y^2 \mu(x, y) ds; \quad I_y = \int_L x^2 \mu(x, y) ds.$$

(2) ds 对 x 轴和对 y 轴的静矩的近似值分别为

$$dM_x = y\mu(x, y) ds; \quad dM_y = x\mu(x, y) ds.$$

以此作为静矩元素并积分, 即得 L 对 x 轴、对 y 轴的静矩:

$$M_x = \int_L y\mu(x, y) ds; \quad M_y = \int_L x\mu(x, y) ds.$$

从而 L 的质心坐标为

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\int_L x\mu(x, y) ds}{\int_L y\mu(x, y) ds}; \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\int_L y\mu(x, y) ds}{\int_L x\mu(x, y) ds}.$$

2. 利用对弧长的曲线积分的定义证明性质 3.

证 设对积分弧段 L 任意分割成 n 个小弧段, 第 i 个小弧段的长度为 Δs_i , (ξ_i, η_i) 为第 i 个小弧段上任意取定的一点. 按假设, 有

$$f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i \leq g(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i \leq \sum_{i=1}^n g(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i.$$

令 $\lambda = \max\{\Delta s_i\} \rightarrow 0$, 上式两端同时取极限, 即得

$$\int_L f(x, y) ds \leq \int_L g(x, y) ds.$$

又 $|f(x, y)| \leq |f(x, y)|$, $-f(x, y) \leq |f(x, y)|$, 利用以上结果, 得

$$\int_L f(x, y) ds \leq \int_L |f(x, y)| ds,$$

$$-\int_L f(x, y) ds \leq \int_L |f(x, y)| ds,$$

即

$$\left| \int_L f(x, y) ds \right| \leq \int_L |f(x, y)| ds.$$

3. 计算下列对弧长的曲线积分:

$$(1) \oint_L (x^2 + y^2)^n ds, \text{ 其中 } L \text{ 为圆周 } x = a \cos t, y = a \sin t (0 \leq t \leq 2\pi);$$

$$(2) \int_L (x + y) ds, \text{ 其中 } L \text{ 为连接 } (1, 0) \text{ 及 } (0, 1) \text{ 两点的直线段};$$

$$(3) \oint_L x ds, \text{ 其中 } L \text{ 为由直线 } y = x \text{ 及抛物线 } y = x^2 \text{ 所围成的区域的整个边界};$$

$$(4) \oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds, \text{ 其中 } L \text{ 为圆周 } x^2 + y^2 = a^2, \text{ 直线 } y = x \text{ 及 } x \text{ 轴在第一象限}$$

内所围成的扇形的整个边界;

$$(5) \int_{\Gamma} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} ds, \text{ 其中 } \Gamma \text{ 为曲线 } x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t \text{ 上相应于 } t \text{ 从 } 0 \text{ 变到 } 2 \text{ 的这段弧};$$

$$(6) \int_{\Gamma} x^2 yz ds, \text{ 其中 } \Gamma \text{ 为折线 } ABCD, \text{ 这里 } A, B, C, D \text{ 依次为点 } (0, 0, 0), (0, 0, 2), (1, 0, 2), (1, 3, 2);$$

$$(7) \int_L y^2 ds, \text{ 其中 } L \text{ 为摆线的一拱 } x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) (0 \leq t \leq 2\pi);$$

$$(8) \int_L (x^2 + y^2) ds, \text{ 其中 } L \text{ 为曲线 } x = a(\cos t + t \sin t), y = a(\sin t - t \cos t) (0 \leq t \leq 2\pi).$$

$$\text{解 (1)} \oint_L (x^2 + y^2)^n ds$$

$$= \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t)^n \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} a^{2n-1} dt = 2\pi a^{2n+1}.$$

(2) 直线 L 的方程为 $y = 1 - x (0 \leq x \leq 1)$.

$$\int_L (x + y) ds = \int_0^1 [x + (1 - x)] \sqrt{1 + (-1)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{2} dx = \sqrt{2}.$$

(3) L 由 L_1 和 L_2 两段组成, 其中 $L_1: y=x (0 \leq x \leq 1)$; $L_2: y=x^2 (0 \leq x \leq 1)$.

于是

$$\begin{aligned}\oint_L x \, ds &= \int_{L_1} x \, ds + \int_{L_2} x \, ds = \int_0^1 x \sqrt{1+1^2} \, dx + \int_0^1 x \sqrt{1+(2x)^2} \, dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{2}x \, dx + \int_0^1 x \sqrt{1+4x^2} \, dx \\ &= \frac{1}{12}(5\sqrt{5} + 6\sqrt{2} - 1).\end{aligned}$$

(4) L 由线段 $OA: y=0 (0 \leq x \leq a)$, 圆弧 \widehat{AB} :

$$x=a \cos t, y=a \sin t \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$$

和线段 $OB: y=x$

$(0 \leq x \leq \frac{a}{\sqrt{2}})$ 组成(图 11-1).

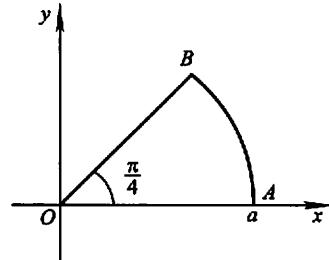


图 11-1

$$\int_{OA} e^{\sqrt{x^2+y^2}} \, ds = \int_0^a e^x \, dx = e^a - 1;$$

$$\begin{aligned}\int_{AB} e^{\sqrt{x^2+y^2}} \, ds &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2} \, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} a e^a \, dt = \frac{\pi}{4} a e^a;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{OB} e^{\sqrt{x^2+y^2}} \, ds &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sqrt{2}x} \sqrt{1+1^2} \, dx \\ &= e^a - 1,\end{aligned}$$

于是 $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} \, ds = e^a - 1 + \frac{\pi}{4} a e^a + e^a - 1 = e^a \left(2 + \frac{\pi a}{4} \right) - 2.$

$$\begin{aligned}(5) \quad ds &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \, dt \\ &= \sqrt{(e^t \cos t - e^t \sin t)^2 + (e^t \sin t + e^t \cos t)^2 + (e^t)^2} \, dt \\ &= \sqrt{3} e^t \, dt, \\ \int_{\Gamma} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \, ds &= \int_0^2 \frac{1}{e^{2t} \cos^2 t + e^{2t} \sin^2 t + e^{2t}} \cdot \sqrt{3} e^t \, dt \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^2 e^{-t} \, dt = \frac{\sqrt{3}}{2} (1 - e^{-2}).\end{aligned}$$

(6) Γ 由直线段 AB 、 BC 和 CD 组成, 其中

$$AB: x=0, y=0, z=t (0 \leq t \leq 2); BC: x=t, y=0, z=2 (0 \leq t \leq 1);$$

$$CD: x=1, y=t, z=2 (0 \leq t \leq 3).$$

于是

$$\int_{\Gamma} x^2 yz \, ds = \int_{AB} x^2 yz \, ds + \int_{BC} x^2 yz \, ds + \int_{CD} x^2 yz \, ds$$

$$= \int_0^2 0 dt + \int_0^1 0 dt + \int_0^3 2t dt = 9.$$

$$\begin{aligned}
(7) \quad ds &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\
&= \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = \sqrt{2a\sqrt{1 - \cos t}} dt, \\
\int_L y^2 ds &= \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 \cdot \sqrt{2a\sqrt{1 - \cos t}} dt \\
&= \sqrt{2}a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^{\frac{5}{2}} dt = \sqrt{2}a^3 \int_0^{2\pi} \left(2 \sin^2 \frac{t}{2}\right)^{\frac{5}{2}} dt \\
&\stackrel{u = \frac{t}{2}}{=} 16a^3 \int_0^\pi \sin^5 u du \\
&= 32a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 u du \text{ ①} = 32a^3 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{256}{15}a^3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(8) \quad ds &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\
&= \sqrt{(at \cos t)^2 + (at \sin t)^2} dt = at dt, \\
\int_L (x^2 + y^2) ds &= \int_0^{2\pi} [a^2(\cos t + t \sin t)^2 + a^2(\sin t - t \cos t)^2] \cdot at dt \\
&= \int_0^{2\pi} a^3(1 + t^2) t dt = 2\pi^2 a^3(1 + 2\pi^2).
\end{aligned}$$

4. 求半径为 a 、中心角为 2φ 的均匀圆弧(线密度 $\mu=1$)的质心.

解 取坐标系如图 11-2 所示, 则由对称性知

$$\bar{y}=0.$$

又 $M = \int_L \mu ds = \int_L ds = 2\varphi a$ (也可由圆弧的弧长公式直接得出),

$$\begin{aligned}
\text{故 } \bar{x} &= \frac{\int_L x \mu ds}{M} = \frac{\int_{-\varphi}^{\varphi} a \cos t \cdot a dt}{2\varphi a} \\
&= \frac{2a^2 \sin \varphi}{2\varphi a} = \frac{a \sin \varphi}{\varphi},
\end{aligned}$$

所求圆弧的质心的位置为 $(\frac{a \sin \varphi}{\varphi}, 0)$.

5. 设螺旋形弹簧一圈的方程为 $x = a \cos t, y = a \sin t, z = kt$, 其中 $0 \leq t \leq 2\pi$, 它的线密度 $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, 求:

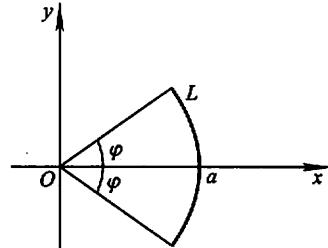


图 11-2

① 参阅上册第五章第 3 节例 12.

(1) 它关于 z 轴的转动惯量 I_z ;

(2) 它的质心.

$$\begin{aligned} \text{解 } (1) I_z &= \int_L (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) ds = \int_L (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2) ds \\ &= \int_0^{2\pi} a^2 (a^2 + k^2 t^2) \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + k^2} dt \\ &= a^2 \sqrt{a^2 + k^2} \int_0^{2\pi} (a^2 + k^2 t^2) dt \\ &= \frac{2}{3} \pi a^2 \sqrt{a^2 + k^2} (3a^2 + 4\pi^2 k^2). \end{aligned}$$

(2) 设质心位置为 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

$$\begin{aligned} M &= \int_L \rho(x, y, z) ds = \int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds \\ &= \int_0^{2\pi} (a^2 + k^2 t^2) \sqrt{a^2 + k^2} dt \\ &= \frac{2}{3} \pi \sqrt{a^2 + k^2} (3a^2 + 4\pi^2 k^2), \\ \bar{x} &= \frac{1}{M} \int_L x \rho(x, y, z) ds = \frac{1}{M} \int_L x (x^2 + y^2 + z^2) ds \\ &= \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} a \cos t (a^2 + k^2 t^2) \cdot \sqrt{a^2 + k^2} dt \\ &= \frac{a \sqrt{a^2 + k^2}}{M} \int_0^{2\pi} (a^2 + k^2 t^2) \cos t dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{由于 } \int_0^{2\pi} (a^2 + k^2 t^2) \cos t dt &= [(a^2 + k^2 t^2) \sin t]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin t \cdot 2k^2 t dt \\ &= [2k^2 t \cos t]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2k^2 \cos t dt = 4\pi k^2, \end{aligned}$$

$$\text{因此 } \bar{x} = \frac{\frac{a \sqrt{a^2 + k^2} \cdot 4\pi k^2}{M}}{\frac{2}{3} \pi \sqrt{a^2 + k^2} (3a^2 + 4\pi^2 k^2)} = \frac{6ak^2}{3a^2 + 4\pi^2 k^2}.$$

$$\text{类似的, } \bar{y} = \frac{1}{M} \int_L y (x^2 + y^2 + z^2) ds = \frac{a \sqrt{a^2 + k^2}}{M} \int_0^{2\pi} (a^2 + k^2 t^2) \sin t dt$$

$$= \frac{a \sqrt{a^2 + k^2} \cdot (-4\pi^2 k^2)}{M} = \frac{-6\pi ak^2}{3a^2 + 4\pi^2 k^2}.$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M} \int_L z (x^2 + y^2 + z^2) ds = \frac{k \sqrt{a^2 + k^2}}{M} \int_0^{2\pi} t (a^2 + k^2 t^2) dt$$

$$= \frac{k \sqrt{a^2 + k^2} (2a^2 \pi^2 + 4k^2 \pi^4)}{M} = \frac{3\pi k (a^2 + 2\pi^2 k^2)}{3a^2 + 4\pi^2 k^2}.$$

1. 设 L 为 xOy 面内直线 $x=a$ 上的一段, 证明:

$$\int_L P(x, y) dx = 0.$$

证 将 L 的方程表达为如下的参数形式:

$$\begin{cases} x=a, \\ y=t, \end{cases} \quad t \text{ 从 } \alpha \text{ 变到 } \beta.$$

于是由第二类曲线积分的计算公式, 得

$$\int_L P(x, y) dx = \int_a^\beta P(a, t) \cdot 0 dt = 0.$$

注 本题给出了第二类曲线积分的一个重要性质:

如果 L 为垂直于 x 轴的有向线段, 则 $\int_L P(x, y) dx = 0$; 如果 L 为垂直于 y 轴的有向线段, 则 $\int_L Q(x, y) dy = 0$. 这一性质常被用来简化第二类曲线积分的计算.

2. 设 L 为 xOy 面内 x 轴上从点 $(a, 0)$ 到点 $(b, 0)$ 的一段直线, 证明:

$$\int_L P(x, y) dx = \int_a^b P(x, 0) dx.$$

证 将 L 的方程表达为如下的参数形式:

$$\begin{cases} x=x, \\ y=0, \end{cases} \quad x \text{ 从 } a \text{ 变到 } b,$$

于是

$$\int_L P(x, y) dx = \int_a^b P(x, 0) dx.$$

3. 计算下列对坐标的曲线积分:

(1) $\int_L (x^2 - y^2) dx$, 其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从点 $(0, 0)$ 到点 $(2, 4)$ 的一段弧;

(2) $\oint_L xy dx$, 其中 L 为圆周 $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$) 及 x 轴所围成的在第一象限内的区域的整个边界(按逆时针方向绕行);

(3) $\int_L y dx + x dy$, 其中 L 为圆周 $x=R\cos t, y=R\sin t$ 上对应 t 从 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 的一段弧;

(4) $\oint_L \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ (按逆时针方向绕行);

(5) $\int_{\Gamma} x^2 dx + z dy - y dz$, 其中 Γ 为曲线 $x = k\theta, y = a \cos \theta, z = a \sin \theta$ 上对应 θ 从 0 到 π 的一段弧;

(6) $\int_{\Gamma} x dx + y dy + (x+y-1) dz$, 其中 Γ 是从点 $(1, 1, 1)$ 到点 $(2, 3, 4)$ 的一段直线;

(7) $\oint_{\Gamma} dx - dy + y dz$, 其中 Γ 为有向闭折线 $ABCA$, 这里的 A, B, C 依次为点 $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$;

(8) $\int_L (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$, 其中 L 是抛物线 $y = x^2$ 上从点 $(-1, 1)$ 到点 $(1, 1)$ 的一段弧.

$$\text{解 } (1) \int_L (x^2 - y^2) dx = \int_0^2 (x^2 - x^4) dx \\ = -\frac{56}{15}.$$

(2) 如图 11-3, L 由 L_1 和 L_2 所组成, 其中 L_1 为有向半圆弧:

$$\begin{cases} x = a + a \cos t, \\ y = a \sin t, \end{cases} \quad t \text{ 从 } 0 \text{ 变到 } \pi;$$

L_2 为有向线段 $y=0, x$ 从 0 变到 $2a$. 于是

$$\begin{aligned} \oint_L xy dx &= \int_{L_1} xy dx + \int_{L_2} xy dx \\ &= \int_0^\pi a(1 + \cos t) \cdot a \sin t \cdot (-a \sin t) dt + 0 \\ &= -a^3 \left(\int_0^\pi \sin^2 t dt + \int_0^\pi \sin^2 t \cos t dt \right) \\ &= -a^3 \left(\frac{\pi}{2} + 0 \right) = -\frac{\pi}{2} a^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \int_L y dx + x dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [R \sin t \cdot (-R \sin t) + R \cos t \cdot R \cos t] dt \\ &= R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt = 0. \end{aligned}$$

(4) L 的参数方程为 $x = a \cos t, y = a \sin t, t$ 从 0 变到 2π . 于是

$$\text{原式} = \frac{1}{a^2} \int_0^{2\pi} [a(\cos t + \sin t) \cdot (-a \sin t) - a(\cos t - \sin t) \cdot a \cos t] dt$$

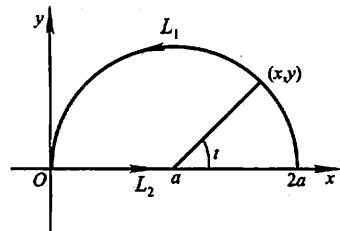


图 11-3

$$= \frac{1}{a^2} \int_0^{2\pi} (-a^2) dt = -2\pi.$$

$$\begin{aligned}(5) \int_L x^2 dx + z dy - y dz \\&= \int_0^\pi [k^2 \theta^2 \cdot k + \cos \theta \cdot (-\sin \theta) - \cos \theta \cdot (\cos \theta)] d\theta \\&= \int_0^\pi (k^3 \theta^2 - a^2) d\theta = \frac{1}{3} k^3 \pi^3 - a^2 \pi.\end{aligned}$$

(6) 直线 Γ 的参数方程为: $x=1+t, y=1+2t, z=1+3t, t$ 从 0 变到 1. 于是

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_0^1 [(1+t) \cdot 1 + (1+2t) \cdot 2 + (1+t+1+2t-1) \cdot 3] dt \\&= \int_0^1 (6+14t) dt = 13.\end{aligned}$$

(7) Γ 由有向线段 AB, BC, CA 依次连接而成, 其中

$AB: x = 1-t, y = t, z = 0, t$ 从 0 变到 1;

$BC: x = 0, y = 1-t, z = t, t$ 从 0 变到 1;

$CA: x = t, y = 0, z = 1-t, t$ 从 0 变到 1.

$$\int_{AB} dx - dy + zdz = \int_0^1 [(-1) - 1 + 0] dt = -2;$$

$$\int_{BC} dx - dy + zdz = \int_0^1 [0 - (-1) + (1-t) \cdot 1] dt = \int_0^1 (2-t) dt = \frac{3}{2};$$

$$\int_{CA} dx - dy + zdz = \int_0^1 (1-0+0) dt = 1,$$

因此 $\oint_L dx - dy + zdz = -2 + \frac{3}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$

$$\begin{aligned}(8) \int_L (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy \\&= \int_{-1}^1 [(x^2 - 2x \cdot x^2) + (x^4 - 2x \cdot x^2) \cdot 2x] dx \\&= \int_{-1}^1 (2x^5 - 4x^4 - 2x^3 + x^2) dx \\&= 2 \int_0^1 (-4x^4 + x^2) dx = -\frac{14}{15}.\end{aligned}$$

4. 计算 $\int_L (x+y) dx + (y-x) dy$, 其中 L 是:

(1) 抛物线 $y^2 = x$ 上从点 $(1,1)$ 到点 $(4,2)$ 的一段弧;

(2) 从点 $(1,1)$ 到点 $(4,2)$ 的直线段;

(3) 先沿直线从点 $(1,1)$ 到点 $(1,2)$, 然后再沿直线到点 $(4,2)$ 的折线;

(4) 曲线 $x = 2t^2 + t + 1, y = t^2 + 1$ 上从点 $(1,1)$ 到点 $(4,2)$ 的一段弧.

解 (1) 化为对 y 的定积分. $L: x=y^2$, y 从 1 变到 2,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_1^2 [(y^2 + y) \cdot 2y + (y - y^2) \cdot 1] dy \\ &= \int_1^2 (2y^3 + y^2 + y) dy = \frac{34}{3}. \end{aligned}$$

(2) L 的方程为 $y-1=\frac{2-1}{4-1}(x-1)$, 即 $x=3y-2$, y 从 1 变到 2. 化为对 y 的定积分计算, 有

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_1^2 [(3y-2+y) \cdot 3 + (y-3y+2) \cdot 1] dy \\ &= \int_1^2 (10y-4) dy = 11. \end{aligned}$$

(3) 记 L_1 为从点 $(1,1)$ 到点 $(1,2)$ 的有向线段, L_2 为从点 $(1,2)$ 到点 $(4,2)$ 的有向线段. 则 $L_1: x=1$, y 从 1 变到 2; $L_2: y=2$, x 从 1 变到 4. 在 L_1 上, $dx=0$; 在 L_2 上, $dy=0$. 于是

$$\begin{aligned} \int_{L_1} (x+y) dx + (y-x) dy &= \int_1^2 (y-1) dy = \frac{1}{2}, \\ \int_{L_2} (x+y) dx + (y-x) dy &= \int_1^4 (x+2) dx = \frac{27}{2}, \end{aligned}$$

因此 原式 $= \frac{1}{2} + \frac{27}{2} = 14.$

· (4) 由 $\begin{cases} 2t^2+t+1=1, \\ t^2+1=1 \end{cases}$, 可得 $t=0$; 由 $\begin{cases} 2t^2+t+1=4, \\ t^2+1=2 \end{cases}$, 可得 $t=1$. 因此

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^1 [(2t^2+t+1+t^2+1) \cdot (4t+1) + (t^2+1-2t^2-t-1) \cdot 2t] dt \\ &= \int_0^1 (10t^3+5t^2+9t+2) dt = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

5. 一力场由沿横轴正方向的常力 \mathbf{F} 所构成. 试求当一质量为 m 的质点沿圆周 $x^2+y^2=R^2$ 按逆时针方向移过位于第一象限的那一段弧时场力所作的功.

解 依题意, $\mathbf{F}=(|\mathbf{F}|, 0)$, $L: x=R\cos t$, $y=R\sin t$, t 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$, 因此

$$\begin{aligned} W &= \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_L |\mathbf{F}| dx + 0 dy \\ &= |\mathbf{F}| \int_0^{\frac{\pi}{2}} -R\sin t dt = -|\mathbf{F}|R. \end{aligned}$$

6. 设 z 轴与重力的方向一致, 求质量为 m 的质点从位置 (x_1, y_1, z_1) 沿直线移到 (x_2, y_2, z_2) 时重力所作的功.

解 重力 $\mathbf{F}=(0, 0, mg)$, 质点移动的直线路径 L 的方程为

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t, \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t, \end{cases} \quad t \text{ 从 } 0 \text{ 变到 } 1.$$

于是

$$\begin{aligned} W &= \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_L 0dx + 0dy + mgdz \\ &= \int_0^1 mg(z_2 - z_1)dt = mg(z_2 - z_1). \end{aligned}$$

7. 把对坐标的曲线积分 $\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ 化成对弧长的曲线积分, 其中 L 为:

- (1) 在 xOy 面内沿直线从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, 1)$;
- (2) 沿抛物线 $y = x^2$ 从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, 1)$;
- (3) 沿上半圆周 $x^2 + y^2 = 2x$ 从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, 1)$.

解 (1) L 为从点 $(0, 0)$ 到 $(1, 1)$ 的有向线段, 其上任一点处的切向量的方向余弦满足 $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 于是

$$\begin{aligned} \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy &= \int_L [P(x, y) \cos \alpha + Q(x, y) \cos \beta] ds \\ &= \int_L \frac{P(x, y) + Q(x, y)}{\sqrt{2}} ds. \end{aligned}$$

(2) L 由如下的参数方程给出: $x = x, y = x^2$, x 从 0 变到 1, 故 L 的切向量的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}, \cos \beta = \frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}} = \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}},$$

于是 $\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_L \frac{P(x, y) + 2xQ(x, y)}{\sqrt{1+4x^2}} ds.$

(3) L 由如下的参数方程给出: $x = x, y = \sqrt{2x-x^2}$, x 从 0 变到 1, 故 L 的切向量的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\right)^2}} = \sqrt{2x-x^2};$$

$$\cos \beta = \frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}} = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} \cdot \sqrt{2x-x^2} = 1-x,$$

于是

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_L [\sqrt{2x-x^2} P(x, y) + (1-x)Q(x, y)] ds.$$

8. 设 Γ 为曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 上相应于 t 从 0 变到 1 的曲线弧. 把对坐

标的曲线积分 $\int_L P dx + Q dy + R dz$ 化成对弧长的曲线积分.

解 $\frac{dx}{dt} = 1, \frac{dy}{dt} = 2t = 2x, \frac{dz}{dt} = 3t^2 = 3y$, 注意到参数 t 由小变到大, 因此 L 的切向量的方向余弦为:

$$\cos \alpha = \frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}} = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}};$$

$$\cos \beta = \frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}} = \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}};$$

$$\cos \gamma = \frac{z'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}} = \frac{3y}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}.$$

从而

$$\int_L P dx + Q dy + R dz = \int_L \frac{P + 2xQ + 3yR}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}} ds.$$

问题 11-3 格林公式及其应用

1. 计算下列曲线积分, 并验证格林公式的正确性:

- (1) $\oint_L (2xy - x^2) dx + (x + y^2) dy$, 其中 L 是由抛物线 $y = x^2$ 和 $y^2 = x$ 所围成的区域的正向边界曲线;
- (2) $\oint_L (x^2 - xy^3) dx + (y^2 - 2xy) dy$, 其中 L 是四个顶点分别为 $(0,0)$ 、 $(2,0)$ 、 $(2,2)$ 和 $(0,2)$ 的正方形区域的正向边界.

解 (1) 先按曲线积分的计算公式直接计算.
记 $L_1: y = x^2$, x 从 0 变到 1; $L_2: x = y^2$, y 从 1 变到 0
(图 11-4). 于是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_{L_1} (2xy - x^2) dx + (x + y^2) dy + \int_{L_2} (2xy - x^2) dx + (x + y^2) dy \\ &= \int_0^1 [(2x^3 - x^2) + (x + x^4) \cdot 2x] dx + \int_1^0 [(2y^3 - y^4) \cdot 2y + (y^2 + y^2)] dy \\ &= \int_0^1 (2x^5 + 2x^3 + x^2) dx + \int_1^0 (-2y^5 + 4y^4 + 2y^2) dy \\ &= \frac{7}{6} - \frac{17}{15} = \frac{1}{30}. \end{aligned}$$

又, $P = 2xy - x^2$, $Q = x + y^2$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$,

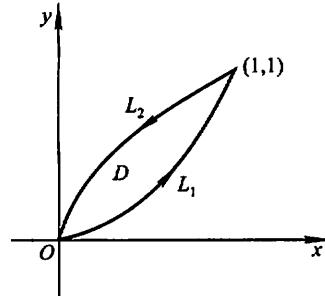


图 11-4

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \iint_D (1 - 2x) dx dy \\ &= \int_0^1 (1 - 2x) dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy = \int_0^1 (1 - 2x)(\sqrt{x} - x^2) dx \\ &= \int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} - x^2 + 2x^3) dx = \frac{1}{30}. \end{aligned}$$

可见 $\oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$

(2) 如图 11-5. L 由有向线段 OA 、 AB 、 BC 和 CO 组成.

$$\int_{OA} (x^2 - xy^3) dx + (y^2 - 2xy) dy = \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3};$$

$$\int_{AB} (x^2 - xy^3) dx + (y^2 - 2xy) dy = \int_0^2 (y^2 - 4y) dy = \frac{8}{3} - 8;$$

$$\int_{BC} (x^2 - xy^3) dx + (y^2 - 2xy) dy = \int_2^0 (x^2 - 8x) dx = 16 - \frac{8}{3};$$

$$\int_{CO} (x^2 - xy^3) dx + (y^2 - 2xy) dy = \int_2^0 y^2 dy = -\frac{8}{3},$$

于是 原式 $= \frac{8}{3} + \left(\frac{8}{3} - 8 \right) + \left(16 - \frac{8}{3} \right) + \left(-\frac{8}{3} \right) = 8.$

又 $\frac{\partial Q}{\partial x} = -2y, \frac{\partial P}{\partial y} = -3xy^2,$

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \iint_D (-2y + 3xy^2) dx dy \\ &= \int_0^2 dx \int_0^2 (-2y + 3xy^2) dy \\ &= \int_0^2 (8x - 4) dx = 8, \end{aligned}$$

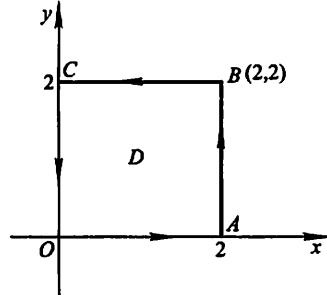


图 11-5

可见 $\oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$

2. 利用曲线积分,求下列曲线所围成的图形的面积:

(1) 星形线 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$;

(2) 椭圆 $9x^2 + 16y^2 = 144$;

(3) 圆 $x^2 + y^2 = 2ax$.

解 (1) 正向星形线的参数方程中的参数 t 从 0 变到 2π ,因此

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [a \cos^3 t (3a \sin^2 t \cos t) - a \sin^3 t (3a \cos^2 t) (-\sin t)] dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t) dt \\
 &= \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt \\
 &= \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{8} (1 - \cos 4t) dt = \frac{3}{8}\pi a^2.
 \end{aligned}$$

(2) 正向椭圆 $9x^2 + 16y^2 = 144$ 的参数方程为

$$x = 4\cos t, y = 3\sin t, t \text{ 从 } 0 \text{ 变到 } 2\pi.$$

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [4\cos t \cdot 3\cos t - 3\sin t(-4\sin t)] dt \\
 &= 6 \int_0^{2\pi} dt = 12\pi.
 \end{aligned}$$

(3) 正向圆周 $x^2 + y^2 = 2ax$, 即 $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ 的参数方程为

$$x = a + a\cos t, y = a\sin t, t \text{ 从 } 0 \text{ 变到 } 2\pi.$$

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(a + a\cos t)a\cos t - a\sin t(-a\sin t)] dt \\
 &= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos t) dt = \pi a^2.
 \end{aligned}$$

3. 计算曲线积分 $\oint_L \frac{y dx - x dy}{2(x^2 + y^2)}$, 其中 L 为圆周 $(x-1)^2 + y^2 = 2$, L 的方向

为逆时针方向.

解 在 L 所围的区域内的点 $(0, 0)$ 处, 函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 均无意义. 现取 r 为适当小的正数, 使圆周 l (取逆时针向): $x = r\cos t, y = r\sin t$ (t 从 0 变到 2π) 位于 L 所围的区域内, 则在由 L 和 l 所围成的复连通区域 D 上(图 11-6), 可应用格林公式, 在 D 上,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2 - y^2}{2(x^2 + y^2)} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

于是由格林公式得

$$\oint_L \frac{y dx - x dy}{2(x^2 + y^2)} + \oint_l \frac{y dx - x dy}{2(x^2 + y^2)} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0,$$

从而

$$\oint_L \frac{y dx - x dy}{2(x^2 + y^2)} = \oint_l \frac{y dx - x dy}{2(x^2 + y^2)}$$

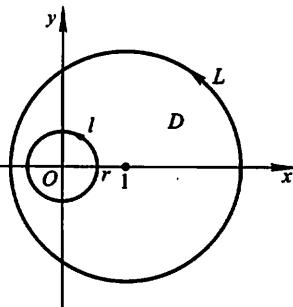


图 11-6

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{2\pi} \frac{-r^2 \sin^2 t - r^2 \cos^2 t}{2r^2} dt \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dt = -\pi.
 \end{aligned}$$

4. 证明下列曲线积分在整个 xOy 面内与路径无关, 并计算积分值:

$$(1) \int_{(1,1)}^{(2,3)} (x+y) dx + (x-y) dy;$$

$$(2) \int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2 - y^3) dx + (6x^2y - 3xy^2) dy;$$

$$(3) \int_{(1,0)}^{(2,1)} (2xy - y^4 + 3) dx + (x^2 - 4xy^3) dy.$$

解 (1) 函数 $P=x+y, Q=x-y$ 在整个 xOy 面这个单连通区域内, 具有一阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故曲线积分在 xOy 面内与路径无关. 取折线积分路径 MNR , 其中 M 为 $(1,1)$, R 为 $(2,1)$, N 为 $(2,3)$, 则有

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int_1^2 (x+1) dx + \int_1^3 (2-y) dy \\
 &= \frac{5}{2} + 0 = \frac{5}{2}.
 \end{aligned}$$

(2) 函数 $P=6xy^2 - y^3, Q=6x^2y - 3xy^2$ 在 xOy 面这个单连通域内具有一阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy - 3y^2 = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故曲线积分在 xOy 面内与路径无关. 取折线积分路径 MNR , 其中 M 为 $(1,2)$, R 为 $(3,2)$, N 为 $(3,4)$, 则有

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int_1^3 (24x-8) dx + \int_2^4 (54y-9y^2) dy \\
 &= 80 + 156 = 236.
 \end{aligned}$$

(3) 函数 $P=2xy - y^4 + 3, Q=x^2 - 4xy^3$ 在 xOy 面这个单连通域内具有一阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x - 4y^3 = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故曲线积分在 xOy 面内与路径无关. 取折线积分路径 MNR , 其中 M 为 $(1,0)$, R 为 $(2,0)$, N 为 $(2,1)$, 则

$$\text{原式} = \int_1^2 3 dx + \int_0^1 (4 - 8y^3) dy$$

$$= 3 + 2 = 5.$$

5. 利用格林公式,计算下列曲线积分:

(1) $\oint_L (2x - y + 4)dx + (5y + 3x - 6)dy$, 其中 L 为三顶点分别为 $(0,0)$ 、 $(3,0)$ 和 $(3,2)$ 的三角形正向边界;

(2) $\oint_L (x^2 y \cos x + 2xy \sin x - y^2 e^x)dx + (x^2 \sin x - 2ye^x)dy$, 其中 L 为正向星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ($a > 0$) ;

(3) $\int_L (2xy^3 - y^2 \cos x)dx + (1 - 2y \sin x + 3x^2 y^2)dy$, 其中 L 为在抛物线 $2x = \pi y^2$ 上由点 $(0,0)$ 到 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ 的一段弧;

(4) $\int_L (x^2 - y)dx - (x + \sin^2 y)dy$, 其中 L 是在圆周 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 上由点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 的一段弧.

解 (1) 设 D 为 L 所围的三角形闭区域, 则由格林公式,

$$\begin{aligned} \oint_L (2x - y + 4)dx + (5y + 3x - 6)dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \\ &= \iint_D [3 - (-1)] dxdy = 4 \iint_D dxdy = 4 \times (D \text{ 的面积}) = 4 \times 3 = 12. \end{aligned}$$

(2) 由于 $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \sin x + x^2 \cos x - 2ye^x$,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x^2 \cos x + 2x \sin x - 2ye^x,$$

故由格林公式得

$$\text{原式} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D 0 \cdot dxdy = 0.$$

(3) 由于 $P = 2xy^3 - y^2 \cos x$, $Q = 1 - 2y \sin x + 3x^2 y^2$ 在 xOy 面内具有一阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2y \cos x + 6xy^2 = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故所给曲线积分与路径无关. 于是将原积分路径 L 改变为折线路径 ORN , 其中 O 为 $(0,0)$, R 为 $(\frac{\pi}{2}, 0)$, N 为 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ (图 11-7), 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 \cdot dx + \int_0^1 \left(1 - 2y \sin \frac{\pi}{2} + 3 \cdot \frac{\pi^2}{4} y^2 \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(1 - 2y + \frac{3}{4} \pi^2 y^2 \right) dy = \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

(4) 由于 $P=x^2-y$, $Q=-(x+\sin^2 y)$ 在 xOy 面内具有一阶连续偏导数, 且 $\frac{\partial Q}{\partial x}=-1=\frac{\partial P}{\partial y}$, 故所给曲线积分与路径无关. 于是将原积分路径 L 改为折线路径 ORN , 其中 O 为 $(0,0)$, R 为 $(1,0)$, N 为 $(1,1)$ (图 11-8), 得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 (1 + \sin^2 y) dy \\ &= \frac{1}{3} - 1 - \int_0^1 \frac{1 - \cos 2y}{2} dy \\ &= -\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sin 2 = -\frac{7}{6} + \frac{1}{4} \sin 2.\end{aligned}$$

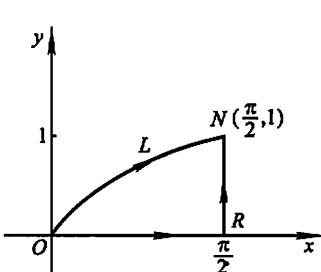


图 11-7

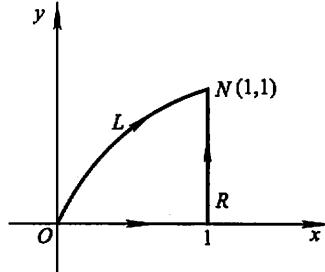


图 11-8

6. 验证下列 $P(x, y)dx+Q(x, y)dy$ 在整个 xOy 平面上是某一函数 $u(x, y)$ 的全微分, 并求这样的一个 $u(x, y)$:

- (1) $(x+2y)dx+(2x+y)dy$;
- (2) $2xydx+x^2dy$;
- (3) $4\sin x \sin 3y \cos x dx - 3\cos 3y \cos 2x dy$;
- (4) $(3x^2y+8xy^2)dx+(x^3+8x^2y+12ye^y)dy$;
- (5) $(2x \cos y + y^2 \cos x)dx + (2y \sin x - x^2 \sin y)dy$.

解 (1) 在整个 xOy 面内, 函数 $P=x+2y$, $Q=2x+y$ 具有一阶连续偏导数, 且 $\frac{\partial Q}{\partial x}=2=\frac{\partial P}{\partial y}$, 因此所给表达式是某一函数 $u(x, y)$ 的全微分. 取 $(x_0, y_0)=(0, 0)$, 则有

$$\begin{aligned}u(x, y) &= \int_0^x x dx + \int_0^y (2x+y) dy \\ &= \frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y^2}{2}.\end{aligned}$$

(2) 在整个 xOy 面内, 函数 $P=2xy$ 和 $Q=x^2$ 具有一阶连续偏导数, 且 $\frac{\partial Q}{\partial x}=2x=\frac{\partial P}{\partial y}$, 故所给表达式是某一函数 $u(x, y)$ 的全微分. 取 $(x_0, y_0)=(0, 0)$, 则有

$$u(x, y) = \int_0^x 2x \cdot 0 dx + \int_0^y x^2 dy = x^2 y.$$

(3) 在整个 xOy 面内, $P=4\sin x \sin 3y \cos x$ 和 $Q=-3\cos 3y \cos 2x$ 具有一阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 6\cos 3y \sin 2x = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故所给表达式是某一函数 $u(x, y)$ 的全微分. 取 $(x_0, y_0) = (0, 0)$, 则有

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x 0 \cdot dx + \int_0^y (-3\cos 3y \cos 2x) dy \\ &= [-\sin 3y \cos 2x]_0^y \\ &= -\cos 2x \sin 3y. \end{aligned}$$

(4) 在整个 xOy 面内, 函数 $P=3x^2 y + 8xy^2$ 和 $Q=x^3 + 8x^2 y + 12ye^x$ 具有一阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 + 16xy = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故所给表达式为某一函数 $u(x, y)$ 的全微分. 取 $(x_0, y_0) = (0, 0)$, 则有

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x 0 \cdot dx + \int_0^y (x^3 + 8x^2 y + 12ye^x) dy \\ &= x^3 y + 4x^2 y^2 + 12(ye^x - e^x). \end{aligned}$$

(5) 方法一 在整个 xOy 面内, $P=2x \cos y + y^2 \cos x$ 和 $Q=2y \sin x - x^2 \sin y$ 具有一阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y \cos x - 2x \sin y = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故所给表达式是某一函数 $u(x, y)$ 的全微分. 取 $(x_0, y_0) = (0, 0)$, 则有

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x 2x dx + \int_0^y (2y \sin x - x^2 \sin y) dy \\ &= y^2 \sin x + x^2 \cos y. \end{aligned}$$

注 在已经证明了所给表达式 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 是某一函数 $u(x, y)$ 的全微分后, 为了求 $u(x, y)$, 除了采用上面题解中的曲线积分方法外, 还可用以下两种方法:

方法二 (偏积分法) 因函数 $u(x, y)$ 满足

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y) = 2x \cos y + y^2 \cos x,$$

$$\begin{aligned} \text{故 } u(x, y) &= \int (2x \cos y + y^2 \cos x) dx \\ &= x^2 \cos y + y^2 \sin x + \varphi(y), \end{aligned}$$

其中 $\varphi(y)$ 是 y 的某个可导函数, 由此得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x^2 \sin y + 2y \sin x + \varphi'(y).$$

又 $u(x, y)$ 必需满足

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) = 2y \sin x - x^2 \sin y,$$

从而得 $\varphi'(y) = 0, \varphi(y) = C$ (C 为任意常数). 因此

$$u(x, y) = x^2 \cos y + y^2 \sin x + C,$$

取 $C=0$, 就得到满足要求的一个 $u(x, y)$.

方法三 利用微分运算法则直接凑出 $u(x, y)$.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= (2x \cos y dx - x^2 \sin y dy) + (y^2 \cos x dx + 2y \sin x dy) \\ &= (\cos y dx^2 + x^2 d \cos y) + (y^2 dsin x + \sin x dy^2) \\ &= d(x^2 \cdot \cos y) + d(y^2 \cdot \sin x) \\ &= d(x^2 \cos y + y^2 \sin x). \end{aligned}$$

因此可取 $u(x, y) = x^2 \cos y + y^2 \sin x$.

7. 设有一变力在坐标轴上的投影为 $X=x^2+y^2, Y=2xy-8$, 这变力确定了一个力场. 证明质点在此场内移动时, 场力所作的功与路径无关.

证 场力所作的功

$$W = \int_L X dx + Y dy = \int_L (x^2 + y^2) dx + (2xy - 8) dy,$$

由于 $P=x^2+y^2$ 和 $Q=2xy-8$ 在整个 xOy 面内具有一阶连续偏导数, 且 $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y = \frac{\partial P}{\partial y}$, 故曲线积分在 xOy 面内与路径无关, 即场力所作的功与路径无关.

8. 判别下列方程中哪些是全微分方程? 对于全微分方程, 求出它的通解.

- (1) $(3x^2 + 6xy)dx + (6x^2y + 4y^2)dy = 0$;
- (2) $(a^2 - 2xy - y^2)dx - (x + y)^2 dy = 0$;
- (3) $e^x dx + (xe^x - 2y)dy = 0$;
- (4) $(x \cos y + \cos x)y' - y \sin x + \sin y = 0$;
- (5) $(x^2 - y)dx - x dy = 0$;
- (6) $y(x - 2y)dx - x^2 dy = 0$;
- (7) $(1 + e^{2\theta})d\rho + 2\rho e^{2\theta} d\theta = 0$;
- (8) $(x^2 + y^2)dx + xy dy = 0$.

说明

① 在单连通区域内, 若 $P(x, y), Q(x, y)$ 有连续的偏导数, 则 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 是方程 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ 为全微分方程的充要条件. 本题利用这一条件来

判别方程是否为全微分方程.

② 在条件 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 下, 存在函数 $u=u(x,y)$, 满足 $du=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$, 而 $u(x,y)=C$ 即是方程 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 的通解. 函数 $u(x,y)$ 可用三种方法求得, 其一为曲线积分法, 其二为凑微分法, 其三为偏积分法.

解 (1) $\frac{\partial P}{\partial y} = (3x^2 + 6xy^2)'_y = 12xy$;

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = (6x^2y + 4y^2)'_x = 12xy,$$

因 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 故原方程是全微分方程.

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_0^x P(x,0)dx + \int_0^y Q(x,y)dy \\ &= \int_0^x 3x^2 dx + \int_0^y (6x^2y + 4y^2)dy \\ &= x^3 + 3x^2y^2 + \frac{4}{3}y^3, \end{aligned}$$

故所求通解为

$$x^3 + 3x^2y^2 + \frac{4}{3}y^3 = C.$$

(2) $\frac{\partial P}{\partial y} = (a^2 - 2xy - y^2)'_y = -2x - 2y$;

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = [-(x+y)^2]'_x = -2(x+y),$$

因 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 故原方程是全微分方程.

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_0^x P(x,0)dx + \int_0^y Q(x,y)dy \\ &= \int_0^x a^2 dx - \int_0^y (x+y)^2 dy = a^2x - \frac{1}{3}(x+y)^3 + \frac{1}{3}x^3 \\ &= a^2x - x^2y - xy^2 - \frac{1}{3}y^3, \end{aligned}$$

故所求通解为

$$a^2x - x^2y - xy^2 - \frac{1}{3}y^3 = C.$$

(3) $\frac{\partial P}{\partial y} = (e^y)'_y = e^y$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = (xe^y - 2y)'_x = e^y$, 因 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 故原方程是全微分方程. 下面用凑微分法求通解:

$$\begin{aligned} \text{方程的左端} &= e^y dx + (xe^y - 2y)dy \\ &= (e^y dx + xe^y dy) - 2y dy \end{aligned}$$

$$= d(xe^y) - d(y^2) = d(xe^y - y^2),$$

即原方程为

$$d(xe^y - y^2) = 0,$$

故所求通解为

$$xe^y - y^2 = C.$$

(4) 将原方程改写成

$$(\sin y - y \sin x)dx + (x \cos y + \cos x)dy = 0.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (\sin y - y \sin x)'_y = \cos y - \sin x,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = (x \cos y + \cos x)'_x = \cos y - \sin x,$$

因 $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$, 故原方程是全微分方程.

$$\begin{aligned}\text{方程的左端} &= (\sin y - y \sin x)dx + (x \cos y + \cos x)dy \\ &= (\sin y dx + x \cos y dy) + (-y \sin x dx + \cos x dy) \\ &= d(x \sin y) + d(y \cos x),\end{aligned}$$

即原方程为

$$d(x \sin y + y \cos x) = 0,$$

故所求通解为

$$x \sin y + y \cos x = C.$$

(5) $\frac{\partial P}{\partial y} = (x^2 - y)'_y = -1$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = (-x)'_x = -1$, 因 $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$, 故原方程是全微分方程.

$$\begin{aligned}\text{方程的左端} &= (x^2 - y)dx - xdy \\ &= x^2 dx - (y dx + x dy) = d\left(\frac{x^3}{3}\right) - d(xy),\end{aligned}$$

即原方程为

$$d\left(\frac{x^3}{3} - xy\right) = 0,$$

故所求通解为

$$\frac{x^3}{3} - xy = C.$$

(6) $\frac{\partial P}{\partial y} = [y(x - 2y)]'_y = x - 4y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = (-x^2)'_x = -2x$. 因 $\frac{\partial P}{\partial y} \not\equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$, 故原方程不是全微分方程.

(7) $\frac{\partial P}{\partial \theta} = (1 + e^{2\theta})'_\theta = 2e^{2\theta}$, $\frac{\partial Q}{\partial \rho} = (2\rho e^{2\theta})'_\rho = 2e^{2\theta}$, 因 $\frac{\partial P}{\partial \theta} \equiv \frac{\partial Q}{\partial \rho}$, 故原方程是全微分方程.

$$\begin{aligned}\text{方程的左端} &= (1 + e^{2\theta})d\rho + 2\rho e^{2\theta}d\theta \\ &= d\rho + (e^{2\theta}d\rho + 2\rho e^{2\theta}d\theta) = d\rho + d(\rho e^{2\theta}),\end{aligned}$$

即原方程为
故所求通解为

$$d(\rho + \rho e^{2\theta}) = 0,$$

$$\rho + \rho e^{2\theta} = C.$$

(8) $\frac{\partial P}{\partial y} = (x^2 + y^2)'_y = 2y, \frac{\partial Q}{\partial x} = (xy)'_x = y$. 因 $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$, 故原方程不是全微分方程.

9. 确定常数 λ , 使在右半平面 $x > 0$ 内的向量 $A(x, y) = 2xy(x^4 + y^2)^\lambda i - x^2(x^4 + y^2)^\lambda j$ 为某二元函数 $u(x, y)$ 的梯度, 并求 $u(x, y)$.

解 在单连通域 G 内, 若 $P(x, y), Q(x, y)$ 具有一阶连续偏导数, 则向量 $A(x, y) = P(x, y)i + Q(x, y)j$ 为某二元函数 $u(x, y)$ 的梯度 (此条件相当于 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 是 $u(x, y)$ 的全微分) 的充分必要条件是 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 在 G 内恒成立.

本题中, $P(x, y) = 2xy(x^4 + y^2)^\lambda, Q(x, y) = -x^2(x^4 + y^2)^\lambda$.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x(x^4 + y^2)^\lambda + 2\lambda xy(x^4 + y^2)^{\lambda-1} \cdot 2y;$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2x(x^4 + y^2)^\lambda - x^2\lambda(x^4 + y^2)^{\lambda-1} \cdot 4x^3.$$

由等式 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 得到 $4x(x^4 + y^2)^\lambda(1 + \lambda) = 0$,

由于 $4x(x^4 + y^2)^\lambda > 0$, 故 $\lambda = -1$, 即 $A(x, y) = \frac{2xyi - x^2j}{x^4 + y^2}$.

在半平面 $x > 0$ 内, 取 $(x_0, y_0) = (1, 0)$, 则得

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_1^x \frac{2x \cdot 0}{x^4 + 0^2} dx - \int_0^y \frac{x^2}{x^4 + y^2} dy \\ &= -\arctan \frac{y}{x^2}. \end{aligned}$$

习题1-4 对面积的曲面积分

1. 设有一分布着质量的曲面 Σ , 在点 (x, y, z) 处它的面密度为 $\mu(x, y, z)$, 用对面积的曲面积分表示这曲面对于 x 轴的转动惯量.

解 设想将 Σ 分成 n 小块, 取出其中任意一块记作 dS (其面积也记作 dS), (x, y, z) 为 dS 上一点, 则 dS 对 x 轴的转动惯量近似等于

$$dI_x = (y^2 + z^2)\mu(x, y, z)dS.$$

以此作为转动惯量元素并积分, 即得 Σ 对 x 轴的转动惯量为

$$I_x = \iint_{\Sigma} (y^2 + z^2)\mu(x, y, z)dS.$$

2. 按对面积的曲面积分的定义证明公式

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS + \iint_{\Sigma_2} f(x, y, z) dS,$$

其中 Σ 是由 Σ_1 和 Σ_2 组成的.

证 由于 $f(x, y, z)$ 在曲面 Σ 上可积, 故不论把 Σ 如何分割, 积分和的极限总是不变的. 因此在分割 Σ 时, 可以使 Σ_1 和 Σ_2 的公共边界曲线永远作为一条分割线. 这样, $f(x, y, z)$ 在 $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$ 上的积分和等于 Σ_1 上的积分和加上 Σ_2 上的积分和, 记为

$$\sum_{(\Sigma_1 + \Sigma_2)} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i = \sum_{(\Sigma_1)} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i + \sum_{(\Sigma_2)} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i.$$

令 $\lambda = \max\{\Delta S_i\}$ 的直径 $\rightarrow 0$, 上式两端同时取极限, 即得

$$\iint_{\Sigma_1 + \Sigma_2} f(x, y, z) dS = \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS + \iint_{\Sigma_2} f(x, y, z) dS.$$

3. 当 Σ 是 xOy 面内的一个闭区域时, 曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$ 与二重积分

有什么关系?

解 当 Σ 为 xOy 面内的一个闭区域时, Σ 的方程为 $z=0$, 因此在 Σ 上取值的 $f(x, y, z)$ 恒为 $f(x, y, 0)$, 且 $dS = \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2} dx dy = dx dy$. 又 Σ 在 xOy 面上的投影区域即为 Σ 自身, 因此有

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{\Sigma} f(x, y, 0) dx dy.$$

4. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$, 其中 Σ 为抛物面 $z = 2 - (x^2 + y^2)$ 在 xOy 面上方的部分, $f(x, y, z)$ 分别如下:

- (1) $f(x, y, z) = 1$;
- (2) $f(x, y, z) = x^2 + y^2$;
- (3) $f(x, y, z) = 3z$.

解 抛物面 Σ 与 xOy 面的交线为 $x^2 + y^2 = 2$, 故 Σ 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2\}$. 又

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy.$$

于是,

$$(1) \iint_{\Sigma} 1 \cdot dS = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy$$

$$\begin{aligned} & \text{极坐标} \iint_{D_{xy}} \sqrt{1+4\rho^2} \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4\rho^2} \rho d\rho \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{12} (1+4\rho^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{13}{6}\pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS &= \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) \sqrt{1+4x^2+4y^2} dx dy \\ &\text{极坐标} \iint_{D_{xy}} \rho^2 \sqrt{1+4\rho^2} \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 \sqrt{1+4\rho^2} d\rho \\ &\text{令 } \rho = \frac{1}{2} \tan t \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{16} \int_0^{\arctan 2\sqrt{2}} \sec^3 t \cdot \tan^3 t dt \\ &= \frac{\pi}{8} \int_0^{\arctan 2\sqrt{2}} \sec^2 t (\sec^2 t - 1) d\sec t = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{596}{15} = \frac{149}{30}\pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \iint_{\Sigma} 3z dS &= 3 \iint_{D_{xy}} [2 - (x^2 + y^2)] \sqrt{1+4x^2+4y^2} dx dy \\ &\text{极坐标} 3 \iint_{D_{xy}} (2 - \rho^2) \sqrt{1+4\rho^2} \rho d\rho d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (2 - \rho^2) \sqrt{1+4\rho^2} \rho d\rho \\ &\text{令 } \rho = \frac{1}{2} \tan t \\ &= 6\pi \left[\frac{1}{2} \int_0^{\arctan 2\sqrt{2}} \sec^3 t \cdot \tan t dt - \frac{1}{16} \int_0^{\arctan 2\sqrt{2}} \sec^3 t \cdot \tan^3 t dt \right] \\ &= 6\pi \left[\frac{1}{2} \int_0^{\arctan 2\sqrt{2}} \sec^2 t d\sec t - \frac{1}{16} \int_0^{\arctan 2\sqrt{2}} \sec^2 t (\sec^2 t - 1) d\sec t \right] \\ &= 6\pi \left(\frac{13}{3} - \frac{149}{60} \right) = \frac{111}{10}\pi. \end{aligned}$$

5. 计算 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS$, 其中 Σ 是:

(1) 锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及平面 $z = 1$ 所围成的区域的整个边界曲面;

(2) 锥面 $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ 被平面 $z = 0$ 和 $z = 3$ 所截得的部分.

解 (1) Σ 由 Σ_1 和 Σ_2 组成, 其中 Σ_1 为平面 $z = 1$ 上被圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 所围的部分; Σ_2 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($0 \leq z \leq 1$).

在 Σ_1 上, $dS = dx dy$;

在 Σ_2 上, $dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy = \sqrt{2} dx dy$.

Σ_1 和 Σ_2 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 均为 $x^2 + y^2 \leq 1$.

$$\begin{aligned} \text{因此 } \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS &= \iint_{\Sigma_1} (x^2 + y^2) dS + \iint_{\Sigma_2} (x^2 + y^2) dS \\ &= \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy + \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) \sqrt{2} dx dy \\ &\stackrel{\text{极坐标}}{=} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho + \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\pi = \frac{1+\sqrt{2}}{2}\pi. \end{aligned}$$

(2) 由题设, Σ 的方程为 $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$,

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\ &= \sqrt{1 + \frac{9x^2}{3(x^2 + y^2)} + \frac{9y^2}{3(x^2 + y^2)}} dx dy = 2 dx dy. \end{aligned}$$

又由 $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ 和 $z = 3$ 消去 z 得 $x^2 + y^2 = 3$, 故 Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为 $x^2 + y^2 \leq 3$. 于是

$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS = \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) \cdot 2 dx dy \stackrel{\text{极坐标}}{=} 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \rho^2 \cdot \rho d\rho = 9\pi.$$

6. 计算下列对面积的曲面积分:

$$(1) \iint_{\Sigma} \left(z + 2x + \frac{4}{3}y \right) dS, \text{ 其中 } \Sigma \text{ 为平面 } \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1 \text{ 在第一卦限中的部分};$$

$$(2) \iint_{\Sigma} (2xy - 2x^2 - x + z) dS, \text{ 其中 } \Sigma \text{ 为平面 } 2x + 2y + z = 6 \text{ 在第一卦限中的部分};$$

$$(3) \iint_{\Sigma} (x + y + z) dS, \text{ 其中 } \Sigma \text{ 为球面 } x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \text{ 上 } z \geq h (0 < h < a) \text{ 的部分};$$

$$(4) \iint_{\Sigma} (xy + yz + zx) dS, \text{ 其中 } \Sigma \text{ 为锥面 } z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ 被柱面 } x^2 + y^2 = 2ax \text{ 所截得的有限部分}.$$

解 (1) 在 Σ 上, $z = 4 - 2x - \frac{4}{3}y$. Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为由 x

轴、 y 轴和直线 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ 所围成的三角形闭区域. 因此

$$\iint_{\Sigma} \left(z + 2x + \frac{4}{3}y \right) dS$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_{D_{xy}} \left[\left(4 - 2x - \frac{4}{3}y \right) + 2x + \frac{4}{3}y \right] \sqrt{1 + (-2)^2 + \left(-\frac{4}{3} \right)^2} dx dy \\
&= \iint_{D_{xy}} 4 \cdot \frac{\sqrt{61}}{3} dx dy = \frac{4\sqrt{61}}{3} \cdot (D_{xy} \text{ 的面积}) \\
&= \frac{4\sqrt{61}}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \right) = 4\sqrt{61}.
\end{aligned}$$

(2) 在 Σ 上, $z = 6 - 2x - 2y$. Σ 在 xOy 面上的投影区域为由 x 轴、 y 轴和直线 $x + y = 3$ 所围成的三角形闭区域. 因此

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Sigma} (2xy - 2x^2 - x + z) dS \\
&= \iint_{D_{xy}} [2xy - 2x^2 - x + (6 - 2x - 2y)] \sqrt{1 + (-2)^2 + (-2)^2} dx dy \\
&= 3 \int_0^3 dx \int_0^{3-x} (6 - 3x - 2x^2 + 2xy - 2y) dy \\
&= 3 \int_0^3 [(6 - 3x - 2x^2)(3 - x) + x(3 - x)^2 - (3 - x)^2] dx \\
&= 3 \int_0^3 (3x^3 - 10x^2 + 9) dx = -\frac{27}{4}.
\end{aligned}$$

(3) 在 Σ 上, $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Σ 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2 - h^2\}$.

由于积分曲面 Σ 关于 yOz 面和 xOz 面均对称, 故有

$$\iint_{\Sigma} x dS = 0, \iint_{\Sigma} y dS = 0.$$

于是 $\iint_{\Sigma} (x + y + z) dS = \iint_{\Sigma} z dS$

$$\begin{aligned}
&= \iint_{D_{xy}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\
&= a \iint_{D_{xy}} dx dy = a\pi(a^2 - h^2).
\end{aligned}$$

(4) Σ 如图 11-9 所示, Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为圆域 $x^2 + y^2 \leq 2ax$. 由于 Σ 关于 xOz 面对称, 而函数 xy 和 yz 关于 y 均为奇函数, 故

$$\iint_{\Sigma} xy dS = 0, \iint_{\Sigma} yz dS = 0.$$

于是

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Sigma} (xy + yz + zx) dS &= \iint_{\Sigma} zx dS \\
 &= \iint_{D_{xy}} x \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}} dx dy \\
 &= \sqrt{2} \iint_{D_{xy}} x \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \\
 &\stackrel{\text{极坐标}}{=} \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} \rho \cos \theta \cdot \rho \cdot \rho d\rho \\
 &= 8\sqrt{2} a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \theta d\theta \\
 &= 8\sqrt{2} a^4 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{64}{15} \sqrt{2} a^4.
 \end{aligned}$$

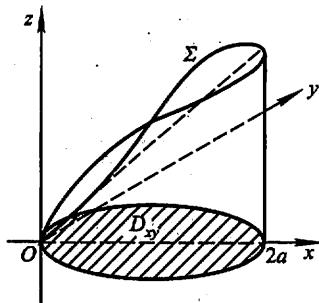


图 11-9

7. 求抛物面壳 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ ($0 \leq z \leq 1$) 的质量, 此壳的面密度为 $\mu = z$.

解 $\Sigma: z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ ($0 \leq z \leq 1$) 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2\}$, $z_x = x$, $z_y = y$. 故 $dS = \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy$. 因此

$$\begin{aligned}
 M &= \iint_{\Sigma} z dS = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy \\
 &\stackrel{\text{极坐标}}{=} \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} \rho^2 \sqrt{1 + \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 \sqrt{1 + \rho^2} d\rho \\
 &\stackrel{t = \rho^2}{=} \frac{\pi}{2} \int_0^2 t \sqrt{1+t} dt \\
 &\stackrel{\text{分部法}}{=} \frac{\pi}{2} \left[\frac{2}{3} t(1+t)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 - \frac{2}{3} \int_0^2 (1+t)^{\frac{3}{2}} dt \right] \\
 &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{4}{3} \cdot 3^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15} (3^{\frac{5}{2}} - 1) \right] = \frac{2\pi}{15} (6\sqrt{3} + 1).
 \end{aligned}$$

8. 求面密度为 μ_0 的均匀半球壳 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($z \geq 0$) 对于 z 轴的转动惯量.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } I_z &= \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) \mu_0 dS \\
 &= \mu_0 \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} (x^2 + y^2) \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mu_0 \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} (x^2 + y^2) \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\
&\stackrel{\text{极坐标}}{=} \mu_0 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \frac{a\rho^2}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \cdot \rho d\rho \\
&\stackrel{\rho = a\sin t}{=} 2\pi a \mu_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^3 \sin^3 t}{a \cos t} \cdot a \cos t dt \\
&= 2\pi a^4 \mu_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t dt = 2\pi a^4 \mu_0 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}\pi a^4 \mu_0.
\end{aligned}$$

习题 11-5 对坐标的曲面积分

1. 按对坐标的曲面积分的定义证明公式

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Sigma} [P_1(x, y, z) \pm P_2(x, y, z)] dy dz \\
&= \iint_{\Sigma} P_1(x, y, z) dy dz \pm \iint_{\Sigma} P_2(x, y, z) dy dz.
\end{aligned}$$

证 把 Σ 任意分成 n 块小曲面 ΔS_i (其面积也记为 ΔS_i), ΔS_i 在 yOz 面上的投影为 $(\Delta S_i)_{yz}$, 在 ΔS_i 上任意取定一点 (ξ_i, η_i, ζ_i) . 设 λ 是各小块曲面的直径的最大值, 则

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Sigma} [P_1(x, y, z) \pm P_2(x, y, z)] dy dz \\
&= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [P_1(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \pm P_2(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)] (\Delta S_i)_{yz} \\
&= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P_1(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{yz} \pm \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P_2(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{yz} \\
&= \iint_{\Sigma} P_1(x, y, z) dy dz \pm \iint_{\Sigma} P_2(x, y, z) dy dz.
\end{aligned}$$

2. 当 Σ 为 xOy 面内的一个闭区域时, 曲面积分 $\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy$ 与二重积分有什么关系?

解 此时 Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 就是 Σ 自身(但不定侧), 且在 Σ 上, $z = 0$, 因此

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, 0) dx dy,$$

当 Σ 取上侧时为正号, 取下侧时为负号.

3. 计算下列对坐标的曲面积分:

$$(1) \iint_{\Sigma} x^2 y^2 z \, dxdy, \text{ 其中 } \Sigma \text{ 是球面 } x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \text{ 的下半部分的下侧;}$$

$$(2) \iint_{\Sigma} z \, dxdy + x \, dydz + y \, dzdx, \text{ 其中 } \Sigma \text{ 是柱面 } x^2 + y^2 = 1 \text{ 被平面 } z = 0 \text{ 及}$$

$z = 3$ 所截得的在第一卦限内的部分的前侧;

$$(3) \iint_{\Sigma} [f(x, y, z) + x] \, dydz + [2f(x, y, z) + y] \, dzdx + [f(x, y, z) + z] \, dxdy, \text{ 其}$$

中 $f(x, y, z)$ 为连续函数, Σ 是平面 $x - y + z = 1$ 在第四卦限部分的上侧;

$$(4) \oint_{\Sigma} xz \, dxdy + xy \, dydz + yz \, dzdx, \text{ 其中 } \Sigma \text{ 是平面 } x = 0, y = 0, z = 0, x +$$

$y + z = 1$ 所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧.

解 (1) Σ 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$, 在 Σ 上,
 $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. 因 Σ 取下侧, 故

$$\iint_{\Sigma} x^2 y^2 z \, dxdy = - \iint_{D_{xy}} x^2 y^2 (-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) \, dxdy$$

$$\xrightarrow{\text{极坐标}} \iint_{D_{xy}} \rho^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \sin^2 2\theta d\theta \cdot \int_0^R \rho^5 \sqrt{R^2 - \rho^2} d\rho$$

$$\xrightarrow{\rho = R \sin t} \frac{\pi}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^5 \sin^5 t \cdot R \cos t \cdot R \cos t dt$$

$$= \frac{\pi}{4} R^7 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^5 t - \sin^7 t) dt$$

$$= \frac{\pi}{4} R^7 \cdot \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} - \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{105} \pi R^7.$$

(2) 由于柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 在 xOy 面上的投影为零, 因此 $\iint_{\Sigma} z \, dxdy = 0$. 又,
 $D_{yz} = \{(y, z) \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 3\}, D_{xz} = \{(x, z) \mid 0 \leq z \leq 3, 0 \leq x \leq 1\}$
(图11-10), 因 Σ 取前侧, 所以

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} x \, dydz + \iint_{\Sigma} y \, dzdx$$

$$= \iint_{D_{yz}} \sqrt{1 - y^2} \, dydz + \iint_{D_{xz}} \sqrt{1 - x^2} \, dzdx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^3 dz \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy + \int_0^3 dz \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \\
 &= 2 \cdot 3 \left[\frac{y}{2} \sqrt{1-y^2} + \frac{1}{2} \arcsin y \right]_0^1 \\
 &= \frac{3}{2} \pi.
 \end{aligned}$$

(3) 在 Σ 上, $z = 1 - x + y$. 由于 Σ 取上侧, 故 Σ 在任一点处的单位法向量为

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}(-z_x, -z_y, 1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1).$$

由两类曲面积分之间的联系, 可得

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iint_{\Sigma} [(f+x)\cos \alpha + (2f+y)\cos \beta + (f+z)\cos \gamma] dS \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} [(f+x) - (2f+y) + (f+z)] dS \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (x - y + z) dS = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} dS \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (\Sigma \text{ 的面积}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

(4) 在坐标面 $x = 0$, $y = 0$ 和 $z = 0$ 上, 积分值均为零, 因此只需计算在 Σ' : $x + y + z = 1$ (取上侧) 上的积分值(图 11-11). 下面用两种方法计算.

$$\begin{aligned}
 \text{方法一} \quad \iint_{\Sigma} xz dx dy &= \iint_{D_{xy}} x(1-x-y) dx dy \\
 &= \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} (1-x-y) dy = \frac{1}{24},
 \end{aligned}$$

由被积函数和积分曲面关于积分变量的对称性, 可得

$$\iint_{\Sigma} xy dy dz = \iint_{\Sigma} yz dz dx = \iint_{\Sigma} xz dx dy = \frac{1}{24},$$

$$\text{因此 } \iint_{\Sigma} xz dx dy + xy dy dz + yz dz dx = 3 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{8}.$$

方法二 利用两类曲面积分的联系, 将 $\iint_{\Sigma} xy dy dz$ 和 $\iint_{\Sigma} yz dz dx$ 均化为关于坐标 x 和 y 的曲面积分计算.

由于 $\Sigma': x + y + z = 1$ 取上侧, 故 Σ' 在任一点处的单位法向量

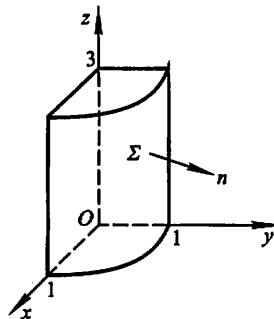


图 11-10

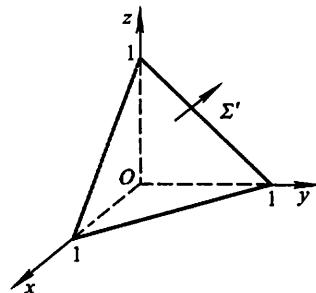


图 11-11

$$\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right),$$

于是 $\iint_{\Sigma} xy dy dz = \iint_{\Sigma} xy \cos \alpha dS = \iint_{\Sigma} xy \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} dx dy = \iint_{\Sigma} xy dx dy,$
 $\iint_{\Sigma} yz dz dx = \iint_{\Sigma} yz \cos \beta dS = \iint_{\Sigma} yz \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} dx dy = \iint_{\Sigma} yz dx dy.$

因此
$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} xz dx dy + xy dy dz + yz dz dx \\ &= \iint_{\Sigma} (xz + xy + yz) dx dy \\ &= \iint_{\substack{\Sigma \\ D_{xy}}} [x(1-x-y) + xy + y(1-x-y)] dx dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (-x^2 - y^2 - xy + x + y) dy = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

于是原式 = $\frac{1}{8}$.

注 计算本题最方便的方法是利用下节的高斯公式：

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} xz dx dy + xy dy dz + yz dz dx = \iiint_n (y+z+x) dv \\ & \xrightarrow{\text{对称性}} 3 \iiint_n z dv = 3 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} z dz \\ &= 3 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{(1-x-y)^2}{2} dy \\ &= 3 \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{6} dx = 3 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

4. 把对坐标的曲面积分

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy$$

化成对面积的曲面积分，其中：

- (1) Σ 是平面 $3x + 2y + 2\sqrt{3}z = 6$ 在第一卦限的部分的上侧；
- (2) Σ 是抛物面 $z = 8 - (x^2 + y^2)$ 在 xOy 面上方的部分的上侧。

解 (1) 由于 $\Sigma: 3x + 2y + 2\sqrt{3}z = 6$ 取上侧，故 Σ 在任一点处的单位法向量为

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (2\sqrt{3})^2}} (3, 2, 2\sqrt{3}) \\ &= \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2\sqrt{3}}{5} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } \iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy &= \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS \\ &= \iint_{\Sigma} \left(\frac{3}{5} P + \frac{2}{5} Q + \frac{2\sqrt{3}}{5} R \right) dS. \end{aligned}$$

(2) 由于 $\Sigma: z = 8 - (x^2 + y^2)$ 取上侧, 故 Σ 在其上任一点 (x, y, z) 处的单位法向量为

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} (-z_x, -z_y, 1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+(-2x)^2+(-2y)^2}} (2x, 2y, 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } \iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy &= \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS \\ &= \iint_{\Sigma} \frac{2xP + 2yQ + R}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} dS. \end{aligned}$$

习题11-6 高斯公式 *通量与散度

1. 利用高斯公式计算曲面积分:

- (1) $\iint_{\Sigma} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, 其中 Σ 为平面 $x = 0, y = 0, z = 0, x = a, y = a, z = a$ 所围成的立体的表面的外侧;
- (2) $\iint_{\Sigma} x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧;
- (3) $\iint_{\Sigma} xz^2 dy dz + (x^2 y - z^3) dz dx + (2xy + y^2 z) dx dy$, 其中 Σ 为上半球体 $0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq a^2$ 的表面外侧;
- (4) $\iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy$, 其中 Σ 是界于 $z = 0$ 和 $z = 3$ 之间的圆柱体 $x^2 + y^2 \leq 9$ 的整个表面的外侧;
- (5) $\iint_{\Sigma} 4xz dy dz - y^2 dz dx + yz dx dy$, 其中 Σ 是平面 $x = 0, y = 0, z = 0, x = 1, y = 1, z = 1$ 所围成的立方体的全表面的外侧.

解 (1) 原式 = $\iiint_a (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}) dv$
 $= 2 \iiint_a (x + y + z) dv$
 $\xrightarrow{\text{对称性}} 6 \iiint_a z dv = 6 \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a z dz$
 $= 6 \cdot a \cdot a \cdot \frac{a^2}{2} = 3a^4.$

(2) 原式 = $\iiint_a (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}) dv$
 $= 3 \iiint_a (x^2 + y^2 + z^2) dv$
 $\xrightarrow{\text{球面坐标}} 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^a r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr$
 $= 3 \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{a^5}{5} = \frac{12}{5}\pi a^5.$

(3) 原式 = $\iiint_a (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}) dv$
 $= \iiint_a (z^2 + x^2 + y^2) dv$
 $\xrightarrow{\text{球面坐标}} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr$
 $= 2\pi \cdot 1 \cdot \frac{a^5}{5} = \frac{2}{5}\pi a^5.$

(4) 原式 = $\iiint_a (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}) dv$
 $= \iiint_a (1 + 1 + 1) dv = 3 \iiint_a dv$
 $= 3 \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 3 = 81\pi.$

(5) 原式 = $\iiint_a (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}) dv$
 $= \iiint_a (4z - 2y + y) dv$
 $= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (4z - y) dz$
 $= \int_0^1 dx \int_0^1 (2 - y) dy = \frac{3}{2}.$

注 在计算上面的积分 $\iiint_A (4z - 2y + y) dv$ 时, 如果利用被积函数和积分区域关于积分变量的对称性, 可知 $\iiint_A z dv = \iiint_A y dv$, 于是

$$\iiint_A (4z - 2y + y) dv = \iiint_A 3z dv = 3 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 z dz = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

从而可简化运算.

* 2. 求下列向量 \mathbf{A} 穿过曲面 Σ 流向指定侧的通量:

(1) $\mathbf{A} = yzi + xzj + xyk$, Σ 为圆柱 $x^2 + y^2 \leq a^2$ ($0 \leq z \leq h$) 的全表面, 流向外侧;

(2) $\mathbf{A} = (2x - z)i + x^2 y j - xz^2 k$, Σ 为立方体 $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$ 的全表面, 流向外侧;

(3) $\mathbf{A} = (2x + 3z)i - (xz + y)j + (y^2 + 2z)k$, Σ 是以点 $(3, -1, 2)$ 为球心, 半径 $R=3$ 的球面, 流向外侧.

解 (1) 通量 $\Phi = \iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$

$$= \iiint_A \operatorname{div} \mathbf{A} dv = \iiint_A \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv$$

$$= \iiint_A \left[\frac{\partial(yz)}{\partial x} + \frac{\partial(xz)}{\partial y} + \frac{\partial(xy)}{\partial z} \right] dv = \iiint_A 0 dv = 0.$$

(2) 通量 $\Phi = \iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_A \operatorname{div} \mathbf{A} dv$

$$= \iiint_A \left[\frac{\partial(2x - z)}{\partial x} + \frac{\partial(x^2 y)}{\partial y} + \frac{\partial(-xz^2)}{\partial z} \right] dv$$

$$= \iiint_A (2 + x^2 - 2xz) dv$$

$$= 2a^3 + \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (x^2 - 2xz) dz$$

$$= 2a^3 - \frac{a^5}{6} = a^3 \left(2 - \frac{a^2}{6} \right).$$

(3) 通量 $\Phi = \iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_A \operatorname{div} \mathbf{A} dv$

$$= \iiint_A \left[\frac{\partial(2x + 3z)}{\partial x} + \frac{\partial(-xz - y)}{\partial y} + \frac{\partial(y^2 + 2z)}{\partial z} \right] dv$$

$$= \iiint_A (2 - 1 + 2) dv = 3 \iiint_A dv$$

$$= 3 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 3^3 = 108\pi.$$

* 3. 求下列向量场 \mathbf{A} 的散度:

$$(1) \mathbf{A} = (x^2 + yz)\mathbf{i} + (y^2 + xz)\mathbf{j} + (z^2 + xy)\mathbf{k};$$

$$(2) \mathbf{A} = e^{xy}\mathbf{i} + \cos(xy)\mathbf{j} + \cos(xz^2)\mathbf{k};$$

$$(3) \mathbf{A} = y^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + xz\mathbf{k}.$$

解 (1) $P = x^2 + yz, Q = y^2 + xz, R = z^2 + xy,$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2x + 2y + 2z.$$

$$(2) P = e^{xy}, Q = \cos(xy), R = \cos(xz^2),$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = ye^{xy} - x\sin(xy) - 2xz\sin(xz^2).$$

$$(3) P = y^2, Q = xy, R = xz,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0 + x + x = 2x.$$

4. 设 $u(x, y, z), v(x, y, z)$ 是两个定义在闭区域 Ω 上的具有二阶连续偏导数的函数, $\frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial v}{\partial n}$ 依次表示 $u(x, y, z), v(x, y, z)$ 沿 Σ 的外法线方向的方向导数.

证明

$$\iiint_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) dx dy dz = \iint_{\Sigma} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS,$$

其中 Σ 是空间闭区域 Ω 的整个边界曲面. 这个公式叫做格林第二公式.

证 由教材本节例 3 证明的格林第一公式知:

$$\iiint_{\Omega} u\Delta v dx dy dz = \iint_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} dS - \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

在此公式中将函数 u 和 v 交换位置, 得

$$\iiint_{\Omega} v\Delta u dx dy dz = \iint_{\Sigma} v \frac{\partial u}{\partial n} dS - \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dx dy dz$$

将上面两个式子相减即得

$$\iiint_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) dx dy dz = \iint_{\Sigma} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS.$$

* 5. 利用高斯公式推证阿基米德原理: 浸没在液体中的物体所受液体的压力的合力(即浮力)的方向铅直向上、其大小等于这物体所排开的液体的重力.

证 取液面为 xOy 面, z 轴铅直向上. 设液体的密度为 ρ . 在物体表面 Σ 上取面积元素 $dS, M(x, y, z)$ 为 dS 上的一点 ($z \leq 0$), Σ 在点 M 处的外法线向量的方向余弦为 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$, 则 dS 所受液体的压力在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的分量

分别为

$$\rho z \cos \alpha dS, \rho z \cos \beta dS, \rho z \cos \gamma dS.$$

Σ 所受的液体的总压力在各坐标轴上的分量等于上列各分量元素在 Σ 上的积分. 由高斯公式可算得

$$F_x = \iint_{\Sigma} \rho z \cos \alpha dS = \iiint_a \frac{\partial(\rho z)}{\partial x} dv = \iiint_a 0 dv = 0;$$

$$F_y = \iint_{\Sigma} \rho z \cos \beta dS = \iiint_a \frac{\partial(\rho z)}{\partial y} dv = \iiint_a 0 dv = 0;$$

$$F_z = \iint_{\Sigma} \rho z \cos \gamma dS = \iiint_a \frac{\partial(\rho z)}{\partial z} dv = \iiint_a \rho dv = \rho V,$$

(V 为 Ω 的体积), 故合力

$$\mathbf{F} = \rho V \mathbf{k},$$

此力的方向铅直向上, 大小等于被物体排开的液体的重力.

习题 15.7 斯托克斯公式 *环流量与旋度

1. 试对曲面 $\Sigma: z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1, P = y^2, Q = x, R = z^2$ 验证斯托克斯公式.

解 按右手法则, Σ 取上侧, Σ 的边界 Γ 为圆周 $x^2 + y^2 = 1, z = 1$, 从 z 轴正向看去, 取逆时针方向.

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = \iint_{\Sigma} (1 - 2y) dx dy = \iint_{D_{xy}} (1 - 2y) dx dy \\ & \xrightarrow{\text{极坐标}} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 - 2\rho \sin \theta) \rho d\rho = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{2}{3} \rho^3 \sin \theta \right]_0^1 d\theta \\ & = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin \theta \right) d\theta = \pi; \end{aligned}$$

Γ 的参数方程可取为 $x = \cos t, y = \sin t, z = 1, t$ 从 0 变到 2π , 故

$$\oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = \int_0^{2\pi} (-\sin^3 t + \cos^2 t) dt = \pi,$$

两者相等, 斯托克斯公式得到验证.

* 2. 利用斯托克斯公式, 计算下列曲线积分:

(1) $\oint_{\Gamma} y dx + z dy + x dz$, 其中 Γ 为圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0$,

若从 x 轴的正向看去, 这圆周是取逆时针方向;

(2) $\oint_{\Gamma} (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, 其中 Γ 为椭圆 $x^2 + y^2 = a^2$,

$\frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1 (a > 0, b > 0)$, 若从 x 轴正向看去, 这椭圆是取逆时针方向;

(3) $\oint_{\Gamma} 3ydx - xzdy + yz^2dz$, 其中 Γ 是圆周 $x^2 + y^2 = 2z, z = 2$, 若从 z 轴正向看去, 这圆周是取逆时针方向;

(4) $\oint_{\Gamma} 2ydx + 3xdy - z^2dz$, 其中 Γ 是圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = 9, z = 0$, 若从 z 轴正向看去, 这圆周是取逆时针方向.

解 (1) 取 Σ 为平面 $x + y + z = 0$ 的上侧被 Γ 所围成的部分, 则 Σ 的面积为 πa^2 , Σ 的单位法向量为

$$n = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \text{(图 11-12).}$$

由斯托克斯公式,

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} ydx + zd़y + xdz &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} dS \\ &= \iint_{\Sigma} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) dS = -\frac{3}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} dS \\ &= -\sqrt{3}\pi a^2. \end{aligned}$$

(2) 如图 11-13, 取 Σ 为平面 $\frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1$ 的上侧被 Γ 所围成的部分, Σ 的单位法向量 $n = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$. 由斯托克斯公式

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} & 0 & \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} dS \\ &= \frac{-2(a+b)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \iint_{\Sigma} dS, (*) \end{aligned}$$

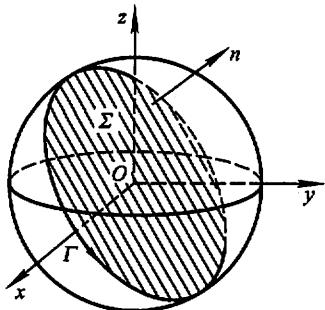


图 11-12

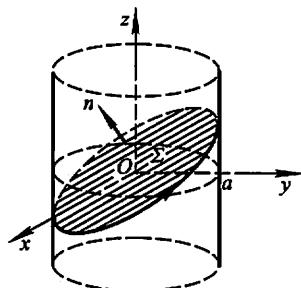


图 11-13

现用两种方法来求 $\iint_{\Sigma} dS$.

方法一 由于 $\iint_{\Sigma} dS = \Sigma$ 的面积 A , 而 $A \cdot \cos \gamma = A \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \Sigma$ 在 xOy 面上的投影区域的面积 $= \pi a^2$, 故

$$\iint_{\Sigma} dS = \pi a^2 / \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pi a \sqrt{a^2 + b^2}.$$

方法二 用曲面积分计算法

由于在 Σ 上, $z = b - \frac{b}{a}x$,

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} dx dy \\ &= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} dx dy, \end{aligned}$$

又 $D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2\}$, 故

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} dS &= \iint_{D_{xy}} \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} dx dy = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \cdot \pi a^2 \\ &= \pi a \sqrt{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

将所求得的 $\iint_{\Sigma} dS$ 代入 (*) 式, 得

$$\text{原式} = \frac{-2(a+b)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \pi a \sqrt{a^2 + b^2} = -2\pi a(a+b).$$

(3) 取 Σ 为平面 $z=2$ 的上侧被 Γ 所围成的部分, 则 Σ 的单位法向量为 $n=(0,0,1)$, Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为 $x^2 + y^2 \leq 4$. 于是由斯托克斯公式,

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} 3ydx - xzdy + yz^2dz &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3y & -xz & yz^2 \end{vmatrix} dS \\ &= -\iint_{\Sigma} (z+3)dS = -\iint_{D_{xy}} (2+3)dx dy = -5 \cdot \pi \cdot 2^2 \\ &= -20\pi. \end{aligned}$$

(4) Γ 即为 xOy 面上的圆周 $x^2 + y^2 = 9$, 取 Σ 为圆域 $x^2 + y^2 \leq 9$ 的上侧, 则由斯托克斯公式

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} 2ydx + 3xdy - z^2dz &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dy dz & dz dx & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y & 3x & -z^2 \end{vmatrix} \\ &= \iint_{\Sigma} dx dy = \iint_{D_{xy}} dx dy = 9\pi. \end{aligned}$$

* 3. 求下列向量场 \mathbf{A} 的旋度:

$$(1) \mathbf{A} = (2z - 3y)\mathbf{i} + (3x - z)\mathbf{j} + (y - 2x)\mathbf{k};$$

$$(2) \mathbf{A} = (z + \sin y)\mathbf{i} - (z - x\cos y)\mathbf{j};$$

$$(3) \mathbf{A} = ix^2 \sin y + jy^2 \sin(xz) + kxys \sin(\cos z).$$

$$\text{解 } (1) \operatorname{rot} \mathbf{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z - 3y & 3x - z & y - 2x \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}.$$

$$(2) \operatorname{rot} \mathbf{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z + \sin y & -(z - x\cos y) & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + (\cos y - \cos y)\mathbf{k}$$

$$= \mathbf{i} + \mathbf{j}.$$

$$(3) \operatorname{rot} \mathbf{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 \sin y & y^2 \sin(xz) & xys \sin(\cos z) \end{vmatrix}$$

$$= [x \sin(\cos z) - xy^2 \cos(xz)]\mathbf{i} - y \sin(\cos z)\mathbf{j}$$

$$+ [y^2 z \cos(xz) - x^2 \cos y]\mathbf{k}.$$

* 4. 利用斯托克斯公式把曲面积分 $\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$ 化为曲线积分, 并计算积分

值,其中 A 、 Σ 及 n 分别如下:

(1) $A = y^2 i + xyj + xzk$, Σ 为上半球面 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 的上侧, n 是 Σ 的单位法向量;

(2) $A = (y - z)i + yzj - xzk$, Σ 为立方体 $\{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2\}$ 的表面外侧去掉 xOy 面上的那个底面, n 是 Σ 的单位法向量.

解 (1) Σ 的正向边界曲线 Γ 为 xOy 面上的圆周 $x^2 + y^2 = 1$, 从 z 轴正向看去 Γ 取逆时针向, Γ 的参数方程为 $x = \cos t, y = \sin t, z = 0$, t 从 0 变到 2π .

由斯托克斯公式,

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \text{rot } A \cdot n dS &= \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz \\ &= \oint_{\Gamma} y^2 dx + xy dy + xz dz \\ &= \int_0^{2\pi} [\sin^2 t \cdot (-\sin t) + \cos t \cdot \sin t \cdot \cos t] dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos^2 t) d\cos t = 0. \end{aligned}$$

(2) Σ 的边界曲线 Γ 为 xOy 面上由直线 $x = 0, y = 0, x = 2, y = 2$ 所围成的正方形的边界, 从 z 轴正向看去取逆时针向. 由斯托克斯公式,

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \text{rot } A \cdot n dS &= \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz \\ &= \oint_{\Gamma} (y - z) dx + yz dy - xz dz \quad (\text{代入 } z = 0) \\ &= \oint_{\Gamma} y dx = \int_2^0 2 dx = -4. \end{aligned}$$

* 5. 求下列向量场 A 沿闭曲线 Γ (从 z 轴正向看 Γ 依逆时针方向)的环流量:

(1) $A = -yi + xj + ck$ (c 为常量), Γ 为圆周 $x^2 + y^2 = 1, z = 0$;

(2) $A = (x - z)i + (x^3 + yz)j - 3xy^2k$, 其中 Γ 为圆周 $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}, z = 0$.

解 (1) Γ 的参数方程为 $x = \cos t, y = \sin t, z = 0$, t 从 0 变到 2π , 于是所求环流量为

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} A \cdot r ds &= \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz \\ &= \oint_{\Gamma} -y dx + x dy + cdz \\ &= \int_0^{2\pi} [(-\sin t)(-\sin t) + \cos t(\cos t)] dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \end{aligned}$$

(2) Γ 是 xOy 面上的圆周 $x^2 + y^2 = 4$ (从 z 轴正向看 Γ 依逆时针方向), 它的参数方程为 $x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = 0, t$ 从 0 变到 2π . 于是所求的环流量为

$$\begin{aligned}\oint_r \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} &= \oint_r P dx + Q dy + R dz \\ &= \oint_r (x - z) dx + (x^3 + yz) dy - 3xy^2 dz \quad (\text{代入 } z = 0) \\ &= \oint_r x dx + x^3 dy \\ &= \int_0^{2\pi} [2\cos t \cdot (-2\sin t) + 8\cos^3 t \cdot 2\cos t] dt \\ &= -4 \int_0^{2\pi} \sin t \cos t dt + 16 \int_0^{2\pi} \cos^4 t dt \\ &= 0 + 64 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt^{\oplus} \\ &= 64 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = 12\pi.\end{aligned}$$

注^① $\int_0^{2\pi} \cos^4 t dt$ 周期性 $= 2 \int_0^{\pi} \cos^4 t dt$
 $= 2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^4 t dt \right],$

由于 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^4 t dt = \int_0^0 \cos^4 u du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 u du,$

故得 $\int_0^{2\pi} \cos^4 t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt.$

* 6. 证明 $\operatorname{rot}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \operatorname{rot} \mathbf{a} + \operatorname{rot} \mathbf{b}$.

证 设 $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$,

其中 $a_x, a_y, a_z; b_x, b_y, b_z$ 均为 x, y, z 的函数, 则

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \operatorname{rot}((a_x + b_x)\mathbf{i} + (a_y + b_y)\mathbf{j} + (a_z + b_z)\mathbf{k}) \\ &= \left[\frac{\partial(a_z + b_z)}{\partial y} - \frac{\partial(a_y + b_y)}{\partial z} \right] \mathbf{i} + \left[\frac{\partial(a_x + b_x)}{\partial z} - \frac{\partial(a_z + b_z)}{\partial x} \right] \mathbf{j} \\ &\quad + \left[\frac{\partial(a_y + b_y)}{\partial x} - \frac{\partial(a_x + b_x)}{\partial y} \right] \mathbf{k} \\ &= \left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right] \\ &\quad + \left[\left(\frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right] \\ &= \operatorname{rot} \mathbf{a} + \operatorname{rot} \mathbf{b}.\end{aligned}$$

* 7. 设 $u = u(x, y, z)$ 具有二阶连续偏导数, 求 $\text{rot}(\text{grad } u)$.

解 $\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k$,

$$\begin{aligned}\text{rot}(\text{grad } u) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right) i + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \right) j \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) k \text{ (由于各二阶偏导数连续)} \\ &= 0i + 0j + 0k = \mathbf{0}.\end{aligned}$$



1. 填空

(1) 第二类曲线积分 $\int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz$ 化成第一类曲线积分是_____，

其中 α, β, γ 为有向曲线弧 Γ 在点 (x, y, z) 处的_____的方向角；

(2) 第二类曲面积分 $\iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$ 化成第一类曲面积分是_____，

其中 α, β, γ 为有向曲面 Σ 在点 (x, y, z) 处的_____的方向角.

解 (1) 由教材本章第二节的公式(3), 可知第一个空格应填: $\int_{\Gamma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS$; 第二个空格应填: 切向量.

(2) 由教材本章第五节的公式(9), 可知第一个空格应填: $\iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS$; 第二个空格应填: 法向量.

2. 选择下述题中给出的四个结论中一个正确的结论:

设曲面 Σ 是上半球面: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (z \geq 0)$, 曲面 Σ_1 是曲面 Σ 在第一卦限中的部分, 则有_____.

(A) $\iint_{\Sigma} x dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS$.

(B) $\iint_{\Sigma} y dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS$.

(C) $\iint_{\Sigma} z dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS$.

(D) $\iint_{\Sigma} xyz dS = 4 \iint_{\Sigma_1} xyz dS$.

解 应选(C). 先说明(A)不对. 由于 Σ 关于 yOz 面对称, 被积函数 x 关于 x 是

奇函数,所以 $\iint_{\Sigma} x dS = 0$. 但在 Σ_1 上, 被积函数 x 连续且大于零, 所以 $\iint_{\Sigma_1} x dS > 0$. 因此 $\iint_{\Sigma} x dS \neq 4 \iint_{\Sigma_1} x dS$. 类似可说明(B)和(D)不对. 再说明(C)正确. 由于 Σ 关于 yOz 面和 zOx 面均对称, 被积函数 z 关于 x 和 y 均为偶函数, 故 $\iint_{\Sigma} z dS = 4 \iint_{\Sigma_1} z dS$; 而在 Σ_1 上, 字母 x, y, z 是对称的. 故 $\iint_{\Sigma_1} z dS = \iint_{\Sigma_1} x dS$, 因此有 $\iint_{\Sigma} z dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS$.

3. 计算下列曲线积分:

$$(1) \oint_L \sqrt{x^2 + y^2} ds, \text{ 其中 } L \text{ 为圆周 } x^2 + y^2 = ax;$$

$$(2) \int_{\Gamma} z ds, \text{ 其中 } \Gamma \text{ 为曲线 } x = t \cos t, y = t \sin t, z = t (0 \leq t \leq t_0);$$

$$(3) \int_L (2a - y) dx + x dy, \text{ 其中 } L \text{ 为摆线 } x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$$

上对应 t 从 0 到 2π 的一段弧;

$$(4) \int_{\Gamma} (y^2 - z^2) dx + 2yz dy - x^2 dz, \text{ 其中 } \Gamma \text{ 是曲线 } x = t, y = t^2, z = t^3 \text{ 上由 } t_1 = 0 \text{ 到 } t_2 = 1 \text{ 的一段弧};$$

$$(5) \int_{\Gamma} (e^x \sin y - 2y) dx + (e^x \cos y - 2) dy, \text{ 其中 } L \text{ 为上半圆周 } (x - a)^2 + y^2 = a^2, y \geq 0, \text{ 沿逆时针方向};$$

$$(6) \oint_{\Gamma} xyz dz, \text{ 其中 } \Gamma \text{ 是用平面 } y = z \text{ 截球面 } x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ 所得的截痕, 从 } z \text{ 轴的正向看去, 沿逆时针方向.}$$

解 (1) 解法一 L 的方程即为 $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$, 故可取 L 的参数方程为 $x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos t, y = \frac{a}{2} \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$. 于是

$$\begin{aligned} \oint_L \sqrt{x^2 + y^2} ds &= \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}a}{2} \sqrt{1 + \cos t} \cdot \sqrt{\left(-\frac{a}{2} \sin t\right)^2 + \left(\frac{a}{2} \cos t\right)^2} dt \\ &= \frac{\sqrt{2}a^2}{4} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos t} dt = \frac{\sqrt{2}a^2}{4} \cdot \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{t}{2} \right| dt \\ &= 2a^2 \int_0^{\pi} \cos \frac{t}{2} d \frac{t}{2} = 2a^2. \end{aligned}$$

解法二 L 的极坐标方程为 $\rho = a \cos \theta (-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$,

$$ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta = ad\theta,$$

因此 $\oint_L \sqrt{x^2 + y^2} ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a \cos \theta \cdot a d\theta = 2a^2$.

$$(2) \quad \begin{aligned} \int_R z ds &= \int_0^{t_0} t \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 + 1} dt \\ &= \int_0^{t_0} t \sqrt{2 + t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{t_0} \sqrt{2 + t^2} d(2 + t^2) \\ &= \frac{1}{3} (2 + t^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{t_0} = \frac{1}{3} [(2 + t_0^2)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{2}]. \end{aligned}$$

$$(3) \quad \begin{aligned} &\int_L (2a - y) dx + x dy \\ &= \int_0^{2\pi} [(2a - a + a \cos t) \cdot a(1 - \cos t) + a(t - \sin t) \cdot a \sin t] dt \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} t \sin t dt = a^2 [-t \cos t]_0^{2\pi} + a^2 \int_0^{2\pi} \cos t dt \\ &= -2\pi a^2 + 0 = -2\pi a^2. \end{aligned}$$

$$(4) \quad \begin{aligned} &\int_R (y^2 - z^2) dx + 2yz dy - x^2 dz \\ &= \int_0^1 [(t^4 - t^6) \cdot 1 + 2t^2 \cdot t^3 \cdot 2t - t^2 \cdot 3t^2] dt \\ &= \int_0^1 (3t^6 - 2t^4) dt = \frac{1}{35}. \end{aligned}$$

(5) 如图 11-14, 添加有向线段 OA ; $y=0$, x 从 0 变到 $2a$, 则在由 L 与 OA 所围成的闭区域 D 上应用格林公式可得

$$\begin{aligned} &\int_{L+OA} (e^x \sin y - 2y) dx + (e^x \cos y - 2) dy \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_D (e^x \cos y - e^x \cos y + 2) dx dy \\ &= 2 \iint_D dx dy = \pi a^2, \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} &\int_L (e^x \sin y - 2y) dx + (e^x \cos y - 2) dy \\ &= \pi a^2 - \int_{OA} (e^x \sin y - 2y) dx + (e^x \cos y - 2) dy \\ &= \pi a^2 - \int_0^{2a} (e^x \sin 0 - 2 \cdot 0) dx = \pi a^2. \end{aligned}$$

注 本题通过添加辅助路径并利用格林公式, 将难以直接计算的曲线积分

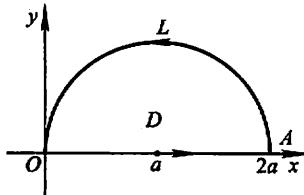


图 11-14

化为一个易于计算的二重积分和另一个易于计算的曲线积分之差,从而方便地求得结果.这是格林公式的用处之一,值得注意.

(6) 由 Γ 的一般方程 $\begin{cases} y = z, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$ 可得 $x^2 + 2y^2 = 1$.

从而可令 $x = \cos t, y = \frac{\sin t}{\sqrt{2}}, z = \frac{\sin t}{\sqrt{2}}$, t 从 0 变到 2π . 于是

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} xyz \, dz &= \int_0^{2\pi} \cos t \left(\frac{\sin t}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot \frac{\cos t}{\sqrt{2}} \, dt \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t \, dt \\ &= \frac{1}{8\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \sin^2(2t) \, dt \\ &= \frac{1}{8\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4t}{2} \, dt = \frac{\pi}{8\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{16}. \end{aligned}$$

4. 计算下列曲面积分:

$$(1) \iint_{\Sigma} \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2}, \text{ 其中 } \Sigma \text{ 是介于平面 } z = 0 \text{ 及 } z = H \text{ 之间的圆柱面 } x^2 + y^2 = R^2;$$

$$(2) \iint_{\Sigma} (y^2 - z) dy dz + (z^2 - x) dz dx + (x^2 - y) dx dy, \text{ 其中 } \Sigma \text{ 为锥面 } z = \sqrt{x^2 + y^2} (0 \leq z \leq h) \text{ 的外侧};$$

$$(3) \iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy, \text{ 其中 } \Sigma \text{ 为半球面 } z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \text{ 的上侧};$$

$$(4) \iint_{\Sigma} xyz dx dy, \text{ 其中 } \Sigma \text{ 为球面 } x^2 + y^2 + z^2 = 1 (x \geq 0, y \geq 0) \text{ 的外侧}.$$

解 (1) 将 Σ 分成 Σ_1 和 Σ_2 两片, Σ_1 为 $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, Σ_2 为 $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$, Σ_1 和 Σ_2 在 zOx 面上的投影区域均为

$$D_x = \{(x, z) \mid 0 \leq z \leq H, -R \leq x \leq R\}.$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_1} \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2} &= \iint_{D_x} \frac{1}{R^2 + z^2} \sqrt{1 + \frac{(-x)^2}{R^2 - x^2}} \, dx \, dz \\ &= \int_0^H \frac{1}{R^2 + z^2} \, dz \cdot \int_{-R}^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} \, dx \\ &= \left[\frac{1}{R} \arctan \frac{z}{R} \right]_0^H \cdot \left[R \arcsin \frac{x}{R} \right]_{-R}^R \\ &= \pi \arctan \frac{H}{R}. \end{aligned}$$

又由于被积函数关于 y 是偶函数, 积分曲面 Σ_1 和 Σ_2 关于 zOx 面对称, 故

$$\iint_{\Sigma_2} \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2} = \iint_{\Sigma_1} \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2} = \pi \arctan \frac{H}{R}.$$

由此得

$$\iint_{\Sigma} \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2} = 2\pi \arctan \frac{H}{R}.$$

(2) 添加辅助曲面 $\Sigma_1 = \{(x, y, z) | z = h, x^2 + y^2 \leq h^2\}$, 取上侧, 则在由 Σ 和 Σ_1 所包围的空间闭区域 Ω 上应用高斯公式得

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma + \Sigma_1} (y^2 - z) dy dz + (z^2 - x) dz dx + (x^2 - y) dx dy \\ &= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial(y^2 - z)}{\partial x} + \frac{\partial(z^2 - x)}{\partial y} + \frac{\partial(x^2 - y)}{\partial z} \right] dv = \iiint_{\Omega} 0 \cdot dv = 0, \end{aligned}$$

于是 原式 = $-\iint_{\Sigma_1} (y^2 - z) dy dz + (z^2 - x) dz dx + (x^2 - y) dx dy$
 $= -\iint_{\Sigma_1} (x^2 - y) dx dy = -\iint_{D_{xy}} (x^2 - y) dx dy,$

其中

$$D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq h^2\}.$$

在计算 $\iint_{D_{xy}} (x^2 - y) dx dy$ 时, 由对称性易知 $\iint_{D_{xy}} y dx dy = 0$, 又 $\iint_{D_{xy}} x^2 dx dy = \iint_{D_{xy}} y^2 dx dy$, 故

$$\begin{aligned} & \iint_{D_{xy}} (x^2 - y) dx dy = \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy \\ & \stackrel{\text{极坐标}}{=} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h \rho^2 \cdot \rho d\rho = \frac{\pi}{4} h^4. \end{aligned}$$

从而得

$$\text{原式} = -\frac{\pi}{4} h^4.$$

注 本题若用第二类曲面积分的计算公式直接计算, 则运算将十分繁复. 现在通过添加辅助曲面并利用高斯公式, 就将原积分化为辅助曲面上的一个容易计算的曲面积分, 从而达到了化繁为简、化难为易的目的. 这种做法与前面第 3(5) 题利用格林公式化简曲线积分计算的做法是类似的, 请读者注意比较, 并思考这样的问题: 要使这种做法可行, 所给的曲线积分(曲面积分)应具备什么条件?

(3) 添加辅助曲面 $\Sigma_1 = \{(x, y, z) | z = 0, x^2 + y^2 \leq R^2\}$, 取下侧, 则在由 Σ 和 Σ_1 所围成的空间闭区域 Ω 上应用高斯公式得

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma+\Sigma_1} x dy dz + y dz dx + z dx dy &= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) dv \\ &= 3 \iiint_{\Omega} dv = 3 \cdot \frac{2\pi R^3}{3} = 2\pi R^3, \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 2\pi R^3 - \iint_{\Sigma_1} x dy dz + y dz dx + z dx dy \\ &= 2\pi R^3 - 0 = 2\pi R^3. \end{aligned}$$

(4) 解法一 将 Σ 分成 Σ_1 和 Σ_2 两片, 其中 Σ_1 :

$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ($x \geq 0, y \geq 0$), 取上侧; $\Sigma_2: z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ($x \geq 0, y \geq 0$), 取下侧. Σ_1 和 Σ_2 在 xOy 面上的投影区域均为 $D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ (图 11-15). 于是

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_1} xyz dx dy &= \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy \\ &\stackrel{\text{极坐标}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \cdot \int_0^1 \rho^2 \sqrt{1 - \rho^2} \rho d\rho \\ &\stackrel{\rho = \sin t}{=} \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cdot \cos^2 t dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 t - \sin^5 t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{15}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_2} xyz dx dy &= - \iint_{D_{xy}} xy (-\sqrt{1 - x^2 - y^2}) dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy = \frac{1}{15}, \end{aligned}$$

因而

$$\iint_{\Sigma} xyz dx dy = \frac{1}{15} + \frac{1}{15} = \frac{2}{15}.$$

解法二 应用高斯公式计算.

添加辅助曲面 $\Sigma_3: x = 0$ (取后侧); $\Sigma_4: y = 0$ (取左侧), 则有

$$\iint_{\Sigma_3} xyz dx dy = \iint_{\Sigma_4} xyz dx dy = 0.$$

在由 Σ, Σ_3 和 Σ_4 所围成的空间闭区域 Ω 上应用高斯公式, 得

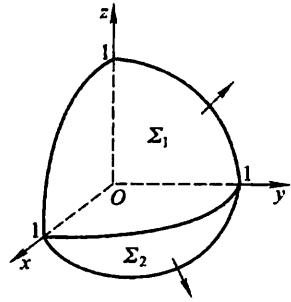


图 11-15

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma} xyz \, dx \, dy &= \iint_{\Sigma_3 + \Sigma_4} xyz \, dx \, dy = \iiint_{\Omega} \frac{\partial(xyz)}{\partial z} \, dv \\
&= \iiint_{\Omega} xy \, dv = \iint_{D_{xy}} xy \, dx \, dy \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz \\
&= 2 \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx \, dy = \frac{2}{15}.
\end{aligned}$$

5. 证明: $\frac{x \, dx + y \, dy}{x^2 + y^2}$ 在整个 xOy 平面除去 y 的负半轴及原点的区域 G 内是某个二元函数的全微分, 并求出一个这样的二元函数.

证 G 为平面单连通域, 在 G 内 $P = \frac{x}{x^2 + y^2}, Q = \frac{y}{x^2 + y^2}$ 具有一阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故 $\frac{x \, dx + y \, dy}{x^2 + y^2}$ 在 G 内是某个二元函数 $u(x, y)$ 的全微分.

取折线积分路径 $(0, 1) \rightarrow (x, 1) \rightarrow (x, y)$ (图 11-16), 则

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \int_0^x \frac{x \, dx}{x^2 + 1} + \int_1^y \frac{y \, dy}{x^2 + y^2} \\
&= \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + \frac{1}{2} [\ln(x^2 + y^2)]_1^y \\
&= \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2).
\end{aligned}$$

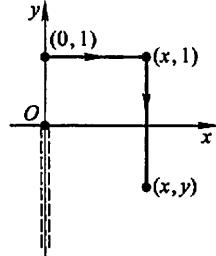


图 11-16

6. 设在半平面 $x > 0$ 内有力 $\mathbf{F} = -\frac{k}{\rho^3}(xi + yj)$ 构成力场, 其中 k 为常数, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. 证明在此力场中场力所作的功与所取的路径无关.

证 半平面 $x > 0$ 是单连通域. 在此区域内, $P = -\frac{kx}{\rho^3}, Q = -\frac{ky}{\rho^3}$ 具有一阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{3kxy}{\rho^5} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故在此区域内, 场力 \mathbf{F} 沿曲线 L 所作的功, 即

$$\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -k \int_L \frac{x \, dx + y \, dy}{\rho^3}$$

与路径无关.

7. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有一阶连续导数, L 是上半平面 ($y > 0$) 内的有向分段光滑曲线, 其起点为 (a, b) , 终点为 (c, d) . 记

$$I = \int_L \frac{1}{y} [1 + y^2 f(xy)] dx + \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] dy,$$

(1) 证明曲线积分 I 与路径无关;

(2) 当 $ab = cd$ 时, 求 I 的值.

(1) 证 因为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{y} [1 + y^2 f(xy)] \right\} &= f(xy) - \frac{1}{y^2} + xyf'(xy) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] \right\} \end{aligned}$$

在上半平面这个单连通域内处处成立, 所以在上半平面内曲线积分与路径 L 无关.

(2) 解 由于 I 与路径无关, 故可取积分路径 L 为由点 (a, b) 到点 (c, b) 再到点 (c, d) 的有向折线, 从而得

$$\begin{aligned} I &= \int_a^c \frac{1}{b} [1 + b^2 f(bx)] dx + \int_b^d \frac{c}{y^2} [y^2 f(cy) - 1] dy \\ &= \frac{c-a}{b} + \int_a^c b f(bx) dx + \int_b^d c f(cy) dy + \frac{c}{d} - \frac{c}{b} \\ &= \frac{c}{d} - \frac{a}{b} + \int_{ab}^{bc} f(t) dt + \int_{bc}^{cd} f(t) dt \\ &= \frac{c}{d} - \frac{a}{b} + \int_{ab}^{cd} f(t) dt, \end{aligned}$$

当 $ab = cd$ 时, $\int_{ab}^{cd} f(t) dt = 0$, 由此得

$$I = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}.$$

8. 求均匀曲面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的质心的坐标.

解 设质心位置为 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. 由对称性可知质心位于 z 轴上, 故 $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

Σ 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$.

由于

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} z dS &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= a \iint_{D_{xy}} dx dy = a \cdot \pi a^2 = \pi a^3, \end{aligned}$$

又

Σ 的面积 $A = 2\pi a^2$,

$$\bar{z} = \frac{\iint_{\Sigma} z dS}{A} = \frac{\pi a^3}{2\pi a^2} = \frac{a}{2},$$

所求的质心为 $(0, 0, \frac{a}{2})$.

9. 设 $u(x, y), v(x, y)$ 在闭区域 D 上都具有二阶连续偏导数, 分段光滑的曲线 L 为 D 的正向边界曲线. 证明:

$$(1) \iint_D v \Delta u \, dx \, dy = - \iint_D (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v) \, dx \, dy + \int_L v \frac{\partial u}{\partial n} \, ds;$$

$$(2) \iint_D (u \Delta v - v \Delta u) \, dx \, dy = \int_L \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) \, ds,$$

其中 $\frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial v}{\partial n}$ 分别是 u, v 沿 L 的外法线向量 n 的方向导数, 符号 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 称二维拉普拉斯算子.

证 (1) 如图 11-17, n 为有向曲线 L 的外法线向量, τ 为 L 的切线向量. 设 x 轴到 n 和 τ 的转角分别为 φ 和 α , 则 $\alpha = \varphi + \frac{\pi}{2}$, 且 n 的方向余弦为 $\cos \varphi, \sin \varphi; \tau$ 的方向余弦为 $\cos \alpha, \sin \alpha$. 于是

$$\begin{aligned} \oint_L v \frac{\partial u}{\partial n} \, ds &= \oint_L v (u_x \cos \varphi + u_y \sin \varphi) \, ds \\ &= \oint_L v (u_x \sin \alpha - u_y \cos \alpha) \, ds \quad (\cos \alpha \, ds = dx, \sin \alpha \, ds = dy) \\ &= \oint_L vu_x \, dy - vu_y \, dx \\ &\stackrel{\text{格林公式}}{=} \iint_D \left[\frac{\partial(vu_x)}{\partial x} - \frac{\partial(-vu_y)}{\partial y} \right] \, dx \, dy \\ &= \iint_D [(u_x v_x + vu_{xx}) + (u_y v_y + vu_{yy})] \, dx \, dy \\ &= \iint_D v(u_{xx} + u_{yy}) \, dx \, dy + \iint_D (u_x v_x + u_y v_y) \, dx \, dy \\ &= \iint_D v \Delta u \, dx \, dy + \iint_D (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v) \, dx \, dy, \end{aligned}$$

把上式右端第二个积分移到左端即得所要证明的等式.

(2) 在(1)证得的等式中交换 u, v 的位置, 可得

$$\iint_D u \Delta v \, dx \, dy = - \iint_D (\operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} u) \, dx \, dy + \int_L u \frac{\partial v}{\partial n} \, ds,$$

在此式的两端分别减去(1)中等式的两端, 即得所需证明的等式.

* 10. 求向量 $A = xi + yj + zk$ 通过闭区域 $\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ 的边界曲面流向外侧的通量.

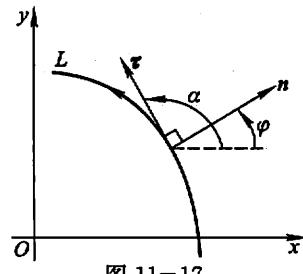


图 11-17

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \text{通量 } \Phi &= \iint_S A \cdot n dS = \iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy \\
 &\stackrel{\text{高斯公式}}{=} \iiint_V \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) dv \\
 &= \iiint_V (1+1+1) dv = 3 \iiint_V dv = 3 \cdot 1 = 3.
 \end{aligned}$$

11. 求力 $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ 沿有向闭曲线 Γ 所作的功, 其中 Γ 为平面 $x+y+z=1$ 被三个坐标面所截成的三角形的整个边界, 从 z 轴正向看去, 沿顺时针方向.

$$\text{解} \quad W = \oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\Gamma} y dx + z dy + x dz.$$

下面用两种方法来计算上面这个积分.

方法一 化为定积分直接计算. 如图 11-18, Γ

由 AB 、 BC 、 CA 三条有向线段组成,

$$AB: z=0, x=t, y=1-t, t \text{ 从 } 0 \text{ 变到 } 1;$$

$$BC: y=0, x=t, z=1-t, t \text{ 从 } 1 \text{ 变到 } 0;$$

$$CA: x=0, y=t, z=1-t, t \text{ 从 } 0 \text{ 变到 } 1.$$

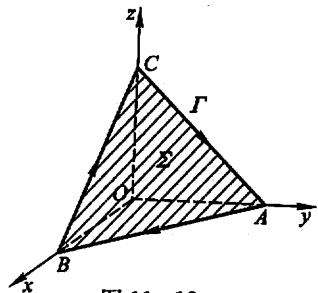


图 11-18

于是

$$\int_{AB} y dx + z dy + x dz = \int_{AB} y dx = \int_0^1 (1-t) dt = \frac{1}{2};$$

$$\int_{BC} y dx + z dy + x dz = \int_{BC} x dz = \int_1^0 t \cdot (-1) dt = \frac{1}{2};$$

$$\int_{CA} y dx + z dy + x dz = \int_{CA} z dy = \int_0^1 (1-t) dt = \frac{1}{2}.$$

$$\text{因此} \quad W = \oint_{\Gamma} y dx + z dy + x dz = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA} = \frac{3}{2}.$$

方法二 利用斯托克斯公式计算. 取 Σ 为平面 $x+y+z=1$ 的下侧被 Γ 所围的部分, 则 Σ 在任一点处的单位法向量为 $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, 由斯托克斯公式得

$$\begin{aligned}
 \oint_{\Gamma} y dx + z dy + x dz &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} dS \\
 &= \iint_{\Sigma} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) dS = \sqrt{3} \iint_{\Sigma} dS \\
 &= \sqrt{3} \cdot (\Sigma \text{ 的面积}) = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

第十二章 无穷级数

习题12-1

常数项级数的概念和性质

1. 写出下列级数的前五项:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 2n};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{5^n};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

解 (1) $\frac{1+1}{1+1^2} + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \frac{1+4}{1+4^2} + \frac{1+5}{1+5^2} + \dots$.

(2) $\frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} + \dots$.

(3) $\frac{1}{5} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^5} - \dots$.

(4) $\frac{1!}{1} + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \frac{4!}{4^4} + \frac{5!}{5^5} + \dots$.

2. 写出下列级数的一般项:

(1) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots;$

(2) $\frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \frac{6}{5} - \dots;$

(3) $\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{x}{2 \cdot 4} + \frac{x\sqrt{x}}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{x^2}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \dots;$

(4) $\frac{a^2}{3} - \frac{a^3}{5} + \frac{a^4}{7} - \frac{a^5}{9} + \dots$.

解 设 u_n 为级数的一般项, 通过观察, 不难看出:

(1) $u_n = \frac{1}{2n-1}.$

(2) $u_n = (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n}.$

(3) $u_n = \frac{x^{\frac{n}{2}}}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2n)}.$

$$(4) u_n = (-1)^{n+1} \frac{a^{n+1}}{2n+1}.$$

3. 根据级数收敛与发散的定义判定下列级数的收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n});$$

$$(2) \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \cdots;$$

$$(3) \sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{2\pi}{6} + \cdots + \sin \frac{n\pi}{6} + \cdots.$$

解 设级数的部分和为 s_n .

(1) 因为

$$\begin{aligned} s_n &= (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \\ &= \sqrt{n+1} - 1, \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty,$$

所以根据定义可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ 发散.

(2) 由于 $u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$, 从而

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2n+1} \right], \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{2},$$

所以根据定义可知级数收敛.

$$(3) \text{ 由于 } u_n = \sin \frac{n\pi}{6} = \frac{2\sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{n\pi}{6}}{2\sin \frac{\pi}{12}} = \frac{\cos \frac{2n-1}{12}\pi - \cos \frac{2n+1}{12}\pi}{2\sin \frac{\pi}{12}},$$

从而

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{2\sin \frac{\pi}{12}} \left[\left(\cos \frac{\pi}{12} - \cos \frac{3\pi}{12} \right) + \left(\cos \frac{3\pi}{12} - \cos \frac{5\pi}{12} \right) + \cdots + \right. \\ &\quad \left. \left(\cos \frac{2n-1}{12}\pi - \cos \frac{2n+1}{12}\pi \right) \right] \\ &= \frac{1}{2\sin \frac{\pi}{12}} \left(\cos \frac{\pi}{12} - \cos \frac{2n+1}{12}\pi \right), \end{aligned}$$

因为当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\cos \frac{2n+1}{12}\pi$ 的极限不存在, 所以 s_n 的极限不存在, 即级数发散.

4. 判定下列级数的收敛性:

$$(1) -\frac{8}{9} + \frac{8^2}{9^2} - \frac{8^3}{9^3} + \cdots + (-1)^n \frac{8^n}{9^n} + \cdots;$$

$$(2) \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3n} + \cdots;$$

$$(3) \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[n]{3}} + \cdots;$$

$$(4) \frac{3}{2} + \frac{3^2}{2^2} + \frac{3^3}{2^3} + \cdots + \frac{3^n}{2^n} + \cdots;$$

$$(5) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \cdots.$$

解 (1) 此级数为公比 $q = -\frac{8}{9}$ 的等比级数, 因 $|q| < 1$, 故该级数收敛.

(2) 此级数的部分和

$$s_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3n} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right),$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = +\infty$, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty,$$

即该级数发散.

(3) 此级数的一般项 $u_n = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$, 不满足级数收敛的必要条件, 故该级数发散.

(4) 此级数为公比 $q = \frac{3}{2}$ 的等比级数, 因 $|q| > 1$, 故该级数发散.

(5) 此级数的一般项 $u_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$, 注意到 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ 分别是公比 $q = \frac{1}{2}$ 与 $q = \frac{1}{3}$ 的等比级数, 而 $|q| < 1$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ 均收敛. 根据收敛级数的性质可知, 原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$ 收敛.

5. 利用柯西审敛原理判定下列级数的收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n};$$

$$(2) 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n};$$

$$(4) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3} \right).$$

$$\text{解 } (1) |s_{n+p} - s_n| = |u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots + u_{n+p}|$$

$$= \left| \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} + \frac{(-1)^{n+3}}{n+2} + \frac{(-1)^{n+4}}{n+3} + \dots + \frac{(-1)^{n+p+1}}{n+p} \right| \\ = \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \dots + \frac{(-1)^{p-1}}{n+p} \right|.$$

$$\text{由于 } \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \dots + \frac{(-1)^{p-1}}{n+p}$$

$$= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \right) + \dots + \begin{cases} \frac{1}{n+p}, & p \text{ 为奇数} \\ \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}, & p \text{ 为偶数}. \end{cases}$$

$$\text{故 } \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \dots + \frac{(-1)^{p-1}}{n+p} > 0, \forall p \in \mathbb{N}^*.$$

于是,当 p 为奇数时,

$$|s_{n+p} - s_n| = \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) - \dots - \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \right) < \frac{1}{n+1};$$

当 p 为偶数时,

$$|s_{n+p} - s_n| = \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) - \dots - \left(\frac{1}{n+p-2} - \frac{1}{n+p-1} \right) - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n+1}.$$

因此,对任意给定的正数 ϵ ,取正整数 $N \geq \frac{1}{\epsilon}$,则当 $n > N$ 时,对任何正整数 p ,都有

$$|s_{n+p} - s_n| < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \epsilon,$$

根据柯西收敛原理知,级数收敛.

(2) 当 n 是 3 的倍数时,如果取 $p = 3n$,则必有

$$|s_{n+p} - s_n| = \left| \frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) + \frac{1}{n+4} + \left(\frac{1}{n+5} - \frac{1}{n+6} \right) + \dots + \frac{1}{4n-2} + \left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n} \right) \right| \\ > \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+4} + \dots + \frac{1}{4n-2} > \underbrace{\frac{1}{4n} + \frac{1}{4n} + \dots + \frac{1}{4n}}_{n \uparrow} = \frac{1}{4}.$$

于是对 $\epsilon_0 = \frac{1}{4}$,不论 N 为何正整数,当 $n > N$ 并 n 是 3 的倍数,且当 $p = 3n$ 时,

就有

$$|s_{n+p} - s_n| > \epsilon_0,$$

根据柯西收敛原理知, 级数发散.

注 柯西收敛原理是这样叙述的: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件为“对任意给定的正数 ϵ , 总存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 对任意的正整数 p , 都有 $|s_{n+p} - s_n| < \epsilon$. ”

因此按柯西收敛原理, 判别级数发散的充要条件就是对上述条件的否定, 即“对某个正数 ϵ_0 , 不论 N 取什么正整数, 至少有一个 $n (> N)$ 且至少有一个 $p \in \mathbb{N}^*$, 使得 $|s_{n+p} - s_n| \geq \epsilon_0$. ”

$$\begin{aligned}(3) |s_{n+p} - s_n| &= |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| \\&= \left| \frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)x}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}} \right| \\&\leqslant \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}} \\&< \frac{1}{2^n}.\end{aligned}$$

由此可知, 对任意给定的正数 ϵ , 取正整数 $N \geq \log_2 \frac{1}{\epsilon}$, 当 $n > N$ 时, 对一切正整数 p , 都有 $|s_{n+p} - s_n| < \epsilon$. 按柯西收敛原理, 该级数收敛.

(4) 本题与(2) 类同, 因 $u_n = \frac{1}{3n+1} + \left(\frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3} \right) > \frac{1}{3n+1} > \frac{1}{9n}$, 对 $\epsilon_0 = \frac{1}{9}$, 不论 n 取什么正整数, 取 $p = n$ 时, 就有 $|s_{n+p} - s_n| > \frac{1}{9}$. 因此该级数发散.

习题 12-2 常数项级数的审敛法

1. 用比较审敛法或极限形式的比较审敛法判定下列级数的收敛性:

$$(1) 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)} + \cdots;$$

$$(2) 1 + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \cdots + \frac{1+n}{1+n^2} + \cdots;$$

$$(3) \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+4)} + \cdots;$$

$$(4) \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2^2} + \sin \frac{\pi}{2^3} + \cdots + \sin \frac{\pi}{2^n} + \cdots;$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} \quad (a > 0).$$

解 (1) 方法一: $u_n = \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n}$ ($n = 1, 2, \dots$), 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故各项乘以 $\frac{1}{2}$ 后的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 也发散, 由比较审敛法知原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ 发散.

方法二: 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故由极限形式的比较审敛法知

原级数发散.

(2) $u_n = \frac{1+n}{1+n^2} > \frac{1+n}{n+n^2} = \frac{1}{n}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 由比较审敛法知原级数发散.

(3) 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(n+4)}}{\frac{1}{n^2}} = 1$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 由极限形式的比较审敛法

知原级数收敛.

(4) 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sin \frac{\pi}{2^n}}{\frac{1}{2^n}}}{\frac{\pi}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}} = \pi$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛, 故由极限形式的比

较审敛法知原级数收敛.

(5) 当 $0 < a \leq 1$ 时, $\frac{1}{1+a^n} \geq \frac{1}{2}$, 一般项不趋于零, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$ 发散; 当 $a > 1$ 时, $\frac{1}{1+a^n} < \frac{1}{a^n}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n}$ 收敛, 故由比较审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$ 收敛.

2. 用比值审敛法判定下列级数的收敛性:

$$(1) \frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{3^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{3^3}{3 \cdot 2^3} + \cdots + \frac{3^n}{n \cdot 2^n} + \cdots; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

解 (1) 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} / \frac{3^n}{n \cdot 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{3}{2} > 1$, 故级数发散.

(2) 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} / \frac{n^2}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{1}{3} < 1$, 故级数收敛.

(3) 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} / \frac{2^n n!}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(\frac{n}{1+n} \right)^n = \frac{2}{e} < 1$, 故级数收敛.

$$(4) \text{ 因 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \tan \frac{\pi}{2^{n+2}} / n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1, \text{ 故级数收敛.}$$

3. 用根值审敛法判定下列级数的收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[\ln(n+1)]^n}; \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{2n-1};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{a_n} \right)^n, \text{ 其中 } a_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty), a_n, b, a \text{ 均为正数.}$$

解 (1) 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$, 故级数收敛.

(2) 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0 < 1$, 故级数收敛.

(3) 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{\frac{2n-1}{n}} = \left(\frac{1}{3} \right)^2 < 1$, 故级数收敛.

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{a_n} = \frac{b}{a}$,

当 $b < a$ 时, 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} < 1$, 故级数收敛;

当 $b > a$ 时, 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} > 1$, 故级数发散;

当 $b = a$ 时, 级数的收敛性不能确定 (例如, $b = 1, a_n = 1, \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{a_n} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 1$ 发散; 又如, $b = 1, a_n = n^{\frac{2}{n}} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty), \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{a_n} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛).

4. 判定下列级数的收敛性:

$$(1) \frac{3}{4} + 2 \left(\frac{3}{4} \right)^2 + 3 \left(\frac{3}{4} \right)^3 + \cdots + n \left(\frac{3}{4} \right)^n + \cdots;$$

$$(2) \frac{1^4}{1!} + \frac{2^4}{2!} + \frac{3^4}{3!} + \cdots + \frac{n^4}{n!} + \cdots;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n};$$

$$(5) \sqrt{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \dots + \sqrt{\frac{n+1}{n}} + \dots;$$

$$(6) \frac{1}{a+b} + \frac{1}{2a+b} + \dots + \frac{1}{na+b} + \dots (a>0, b>0).$$

解 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} < 1$, 由比值审敛法知级数收敛.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^4 \cdot \frac{1}{n+1} = 0 < 1$, 由比值审敛法知级数收敛.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n(n+2)} / \frac{1}{n} = 1$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 由极限形式的比较审敛法

知原级数发散.

(4) 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n} / \left(\frac{2}{3}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{3^n}}{\frac{\pi}{3^n}} = \pi$, 而几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ 收敛,

故由极限形式的比较审敛法知原级数收敛.

(5) 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 \neq 0$, 故级数发散.

(6) 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{na+b} / \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a+\frac{b}{n}} = \frac{1}{a}$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故由极限形

式的比较极限审敛法知原级数发散.

5. 判定下列级数是否收敛? 如果是收敛的, 是绝对收敛还是条件收敛?

$$(1) 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{3^{n-1}};$$

$$(3) \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^4} + \dots;$$

$$(4) \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \dots;$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n^2}}{n!}.$$

解 (1) $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{1}{2}}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ 是发散的; 又 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是交错级数, 满足 $|u_n| > |u_{n+1}|$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 故由莱布尼茨定理知原级数收敛且条

件收敛.

(2) 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{3} < 1$, 由比值审敛法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 故原级数绝对收敛.

(3) $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{3 \cdot 2^n}$, 因 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 2^n}$ 是公比 $q = \frac{1}{2} (|q| < 1)$ 的等比级数, 故收敛, 从而原级数绝对收敛.

(4) $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$, $|u_n| = \frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n+1}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ 是发散的, 故由比较审敛法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 又 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是交错级数, 满足 $|u_n| > |u_{n+1}|$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 故由莱布尼茨定理知原级数收敛且条件收敛.

(5) $u_n = \frac{(-1)^{n+1} 2^{n^2}}{n!}$, $|u_n| = \frac{2^n \cdot 2^n \cdot \cdots \cdot 2^n}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n}$, 由于 $2^n > k (k = 1, 2, \dots, n)$, 故 $|u_n| > 1$, 即原级数的一般项 u_n 随 n 增大而不趋于零, 故该级数发散.

习题 12-3 幂级数

1. 求下列幂级数的收敛区间:

$$(1) x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n + \cdots;$$

$$(2) 1 - x + \frac{x^2}{2^2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n^2} + \cdots;$$

$$(3) \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2 \cdot 4} + \frac{x^3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots + \frac{x^n}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2n)} + \cdots;$$

$$(4) \frac{x}{1 \cdot 3} + \frac{x^2}{2 \cdot 3^2} + \frac{x^3}{3 \cdot 3^3} + \cdots + \frac{x^n}{n \cdot 3^n} + \cdots;$$

$$(5) \frac{2}{2} x + \frac{2^2}{5} x^2 + \frac{2^3}{10} x^3 + \cdots + \frac{2^n}{n^2 + 1} x^n + \cdots;$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1};$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2};$$

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}.$$

解 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$, 故收敛半径为 1, 收敛区间是

$(-1, 1)$.

(2) $n \geq 1$ 起, $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{(n+1)^2} / \frac{1}{n^2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$, 故收敛半径为 1, 收敛区间为 $(-1, 1)$.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n+1)} = 0$, 故收敛半径为 $+\infty$, 收敛区间是 $(-\infty, +\infty)$.

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{1}{3}$, 故收敛半径为 3, 收敛区间为 $(-3, 3)$.

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{n^2 + 1}{(n+1)^2 + 1} = 2$, 故收敛半径为 $\frac{1}{2}$, 收敛区间为 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(6) 这是缺(偶次幂)项的级数, 把 $(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 视为数项级数的一般项 u_n , 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+3} |x|^2 = |x|^2,$$

当 $|x| < 1$ 时, 级数绝对收敛; 当 $|x| > 1$ 时, 因一般项 $u_n \neq 0 (n \rightarrow \infty)$, 级数发散, 故原级数收敛半径为 1, 收敛区间为 $(-1, 1)$.

(7) 这是缺(奇次幂)项的级数.

方法一 与(6) 类似, 将它按数项级数处理, 用比值法确定收敛半径和收敛区间.

方法二 令 $t = x^2$, 先讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} t^{n-1}$ 的收敛区间.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{2n+1}{2n-1} = \frac{1}{2},$$

故该级数的收敛半径为 2, 因此, 原级数的收敛半径为 $\sqrt{2}$, 收敛区间为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

(8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1$, 故收敛半径为 1.

当 $|x-5| < 1$ 时, 级数收敛; 当 $|x-5| > 1$ 时, 级数发散.
故级数的收敛区间为 $(4, 6)$.

2. 利用逐项求导或逐项积分, 求下列级数的和函数:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$;

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1};$$

$$(3) x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots.$$

解 (1) 容易求出此级数的收敛半径为 1. 当 $-1 < x < 1$ 时,

$$\int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^x nx^{n-1} dx \right) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

在上式两端对 x 求导得

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

又原级数在 $x = \pm 1$ 处发散, 故它的和函数 $s(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ ($-1 < x < 1$).

(2) 不难求出此级数的收敛半径为 1. 当 $-1 < x < 1$ 时,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{4n+1}}{4n+1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{4n} = \frac{x^4}{1-x^4},$$

在上式两端分别从 0 至 x 积分, 并由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ 在 $x=0$ 处收敛于 0. 故得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} &= \int_0^x \frac{x^4}{1-x^4} dx \\ &= \int_0^x \left(-1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \arctan x - x. \end{aligned}$$

又原级数在 $x = \pm 1$ 处均发散, 故它的和函数

$$s(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \arctan x - x (-1 < x < 1).$$

(3) 记级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, 其收敛半径为 1. 当 $-1 < x < 1$ 时,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} = \frac{1}{1-x^2},$$

在上式两端分别从 0 至 x 积分, 并注意到 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ 在 $x=0$ 处收敛于 0,

故得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \int_0^x \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

又原级数在 $x = \pm 1$ 处均发散, 故它的和函数

$$s(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (-1 < x < 1).$$

习题 12

函数展开成幂级数

1. 求函数 $f(x) = \cos x$ 的泰勒级数，并验证它在整个数轴上收敛于这个函数。

解 在定点 x_0 处，因

$$f^{(n)}(x_0) = \cos\left(x_0 + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

故 $f(x)$ 的泰勒级数为

$$\begin{aligned} &\cos x_0 + \cos\left(x_0 + \frac{\pi}{2}\right)(x - x_0) + \frac{\cos(x_0 + \pi)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \\ &\frac{\cos\left(x_0 + \frac{n\pi}{2}\right)}{n!}(x - x_0)^n + \dots. \end{aligned}$$

因为对任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$ ，

$$|R_n(x)| = \left| \frac{\cos\left(\xi + \frac{n+1}{2}\pi\right)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!},$$

(其中 ξ 介于 x_0 与 x 之间)，而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ ，于是得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

所以在整个数轴上，有

$$\begin{aligned} f(x) = \cos x &= \cos x_0 + \cos\left(x_0 + \frac{\pi}{2}\right)(x - x_0) + \frac{\cos(x_0 + \pi)}{2!}(x - x_0)^2 + \\ &\dots + \frac{\cos\left(x_0 + \frac{n\pi}{2}\right)}{n!}(x - x_0)^n + \dots. \end{aligned}$$

2. 将下列函数展开成 x 的幂级数，并求展开式成立的区间：

$$(1) \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$

$$(2) \ln(a+x) \quad (a > 0);$$

$$(3) a^x;$$

$$(4) \sin^2 x;$$

$$(5) (1+x)\ln(1+x);$$

$$(6) \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

解 (1) 由于 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in (-\infty, +\infty)$ 故

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n, x \in (-\infty, +\infty).$$

于是

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, x \in (-\infty, +\infty).$$

(2) $\ln(a+x) = \ln a + \ln\left(1 + \frac{x}{a}\right)$, 利用

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad x \in (-1, +1],$$

得

$$\ln(a+x) = \ln a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x}{a}\right)^n, \quad x \in (-a, +a].$$

(3) 利用 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in (-\infty, +\infty)$, 得

$$a^x = e^{x \ln a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln a)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n, x \in (-\infty, +\infty).$$

(4) 方法一 利用

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, x \in (-\infty, +\infty)$$

得 $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}$
 $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2x)^{2n}}{2(2n)!}, x \in (-\infty, +\infty).$

方法二 $(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2x)^{2n-1}}{(2n-1)!}, x \in (-\infty, +\infty),$$

将上式两端从 0 至 x 积分并逐项积分, 得

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \int_0^x (\sin^2 x)' dx = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2x)^{2n-1}}{(2n-1)!} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}, x \in (-\infty, +\infty). \end{aligned}$$

(5) 方法一 因为

$$[(1+x)\ln(1+x)]' = \ln(1+x) + 1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, x \in (-1, 1).$$

将上式两端从 0 至 x 积分并逐项积分得

$$\begin{aligned} (1+x)\ln(1+x) &= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{n+1}}{n(n+1)} \\ &= x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n-1)n}, x \in (-1, 1), \end{aligned}$$

又在 $x=1$ 处, 上式右端的幂级数收敛, 且函数 $(1+x)\ln(1+x)$ 连续, 故

$$(1+x)\ln(1+x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)}, x \in (-1, 1].$$

方法二 利用 $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, x \in (-1, 1]$, 得

$$\begin{aligned} (1+x)\ln(1+x) &= \ln(1+x) + x\ln(1+x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{n+1}}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n-1} \\ &= x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{n} + \frac{(-1)^n}{n-1} \right] x^n \\ &= x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)}, x \in (-1, 1]. \end{aligned}$$

(6) **方法一** 利用 $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \dots, x \in [-1, 1]$,

并因为 $\int_0^x \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{1+x^2} - 1$, 以 x^2 替换上面幂级数中的 x , 得

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \sqrt{1+x^2} - 1 \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 - \dots + \\ &\quad (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} x^{2n} + \dots \end{aligned}$$

在 $(-1, 1)$ 内将上式两端对 x 求导, 得

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} &= x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^5 - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2)} x^{2n-1} + \dots \\ &= x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2)} x^{2n-1} \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1}, x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

在 $x=\pm 1$ 处上式右端的级数均收敛且函数 $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 连续, 故

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1}, x \in [-1, 1].$$

方法二 将 x^2 替换展开式

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} x^n, (x \in (-1, 1])$$

中的 x , 得

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} x^{2n}, x \in [-1, 1],$$

从而得

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} &= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} x^{2n+1} \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}, x \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

3. 将下列函数展开成 $(x-1)$ 的幂级数, 并求展开式成立的区间:

$$(1) \sqrt{x^3}; \quad (2) \lg x.$$

解 (1) 当 $m > 0$ 时, 因

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n + \cdots, \\ x \in [-1, 1],$$

而

$$\sqrt{x^3} = [1 + (x-1)]^{\frac{3}{2}},$$

在以上二项展开式中取 $m = \frac{3}{2}$, 并用 $(x-1)$ 替换其中的 x , 得

$$\begin{aligned} \sqrt{x^3} &= 1 + \frac{3}{2}(x-1) + \frac{1}{2!} \cdot \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2}-1\right)(x-1)^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2}-1\right) \cdots \left(\frac{3}{2}-n+1\right)(x-1)^n + \cdots \\ &= 1 + \frac{3}{2}(x-1) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 \cdot (-1)^n 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^{n+2} (n+2)!} (x-1)^{n+2} \\ &= 1 + \frac{3}{2}(x-1) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{3}{(n+1)(n+2)2^n} \left(\frac{x-1}{2}\right)^{n+2}, x \in [0, 2]. \end{aligned}$$

$$(2) \lg x = \frac{\ln x}{\ln 10} = \frac{1}{\ln 10} \ln[1 + (x-1)], \text{ 利用}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, x \in (-1, 1],$$

将上式中的 x 换成 $(x-1)$, 得

$$\lg x = \frac{1}{\ln 10} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}, x \in (0, 2].$$

4. 将函数 $f(x) = \cos x$ 展开成 $\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的幂级数.

$$\text{解 } \cos x = \cos \left[\left(x + \frac{\pi}{3} \right) - \frac{\pi}{3} \right] = \frac{1}{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right).$$

将 $x + \frac{\pi}{3}$ 替换以下两式

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n},$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

中的 x , 得

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(x + \frac{\pi}{3} \right)^{2n} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(x + \frac{\pi}{3} \right)^{2n+1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{(2n)!} \left(x + \frac{\pi}{3} \right)^{2n} + \frac{\sqrt{3}}{(2n+1)!} \left(x + \frac{\pi}{3} \right)^{2n+1} \right], x \in (-\infty, +\infty). \end{aligned}$$

5. 将函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 展开成 $(x-3)$ 的幂级数.

解 利用 $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, x \in (-1, 1)$ 得

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{1}{3+x-3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-3}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{x-3}{3}\right)} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x-3}{3}\right)^n, \frac{3-x}{3} \in (-1, 1), \end{aligned}$$

即

$$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-1}} (x-3)^n, x \in (0, 6).$$

6. 将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数.

$$\text{解 } \frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2},$$

其中

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{-3+(x+4)} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{x+4}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+4}{3}\right)^n,$$

$\frac{x+4}{3} \in (-1, 1)$ 即 $x \in (-7, -1)$;

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{-2+(x+4)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x+4}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+4}{2}\right)^n,$$

$\frac{x+4}{2} \in (-1, 1)$ 即 $x \in (-6, -2)$. 于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2+3x+2} &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+4}{2}\right)^n - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+4}{3}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right) (x+4)^n,\end{aligned}$$

$x \in (-7, -1) \cap (-6, -2) = (-6, -2)$.

习题 12-5 函数的幂级数展开式的应用

1. 利用函数的幂级数展开式求下列各数的近似值:

- (1) $\ln 3$ (误差不超过 0.000 1);
- (2) \sqrt{e} (误差不超过 0.001);
- (3) $\sqrt[9]{522}$ (误差不超过 0.000 01);
- (4) $\cos 2^\circ$ (误差不超过 0.000 1).

解 (1) $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots \right), x \in (-1, 1)$.

令 $\frac{1+x}{1-x} = 3$, 可得 $x = \frac{1}{2}$. 从而

$$\ln 3 = \ln \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^{2n-1}} + \cdots \right).$$

$$\begin{aligned}|r_n| &= 2 \left(\frac{1}{(2n+1) \cdot 2^{2n+1}} + \frac{1}{(2n+3) \cdot 2^{2n+3}} + \cdots \right) \\ &= \frac{2}{(2n+1)2^{2n+1}} \left(1 + \frac{(2n+1) \cdot 2^{2n+1}}{(2n+3) \cdot 2^{2n+3}} + \frac{(2n+1) \cdot 2^{2n+1}}{(2n+5) \cdot 2^{2n+5}} + \cdots \right)\end{aligned}$$

$$< \frac{2}{(2n+1) \cdot 2^{2n+1}} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \cdots \right)$$

$$= \frac{2}{(2n+1)2^{2n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3(2n+1)2^{2n-2}},$$

$$|r_5| < \frac{1}{3 \cdot 11 \cdot 2^8} \approx 0.000 12,$$

$$|r_6| < \frac{1}{3 \cdot 13 \cdot 2^{10}} \approx 0.000 03 < 10^{-4},$$

故取 $n=6$, 则

$\ln 3 \approx 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \cdots + \frac{1}{11 \cdot 2^{11}} \right)$, 考虑到舍入误差, 计算时应取五位小数, 从而得 $\ln 3 \approx 1.0986$.

$$(2) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty).$$

令 $x = \frac{1}{2}$, 得

$$\begin{aligned}\sqrt{e} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2! \cdot 2^2} + \cdots + \frac{1}{n! 2^n} + \cdots. \\ r_n &= \frac{1}{(n+1)! 2^{n+1}} + \frac{1}{(n+2)! 2^{n+2}} + \cdots \\ &= \frac{1}{(n+1)! 2^{n+1}} \left[1 + \frac{1}{(n+2) \cdot 2} + \frac{1}{(n+2)(n+3) \cdot 2^2} + \cdots \right] \\ &< \frac{1}{(n+1)! 2^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)! 2^{n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{(n+1)! 2^n}, \\ r_4 &< \frac{1}{5! 2^4} \approx 0.0005 < 10^{-3},\end{aligned}$$

故取 $n=4$, 计算时取四位小数可得

$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2! 2^2} + \frac{1}{3! 2^3} + \frac{1}{4! 2^4} \approx 1.648.$$

$$(3) \sqrt[9]{522} = \sqrt[9]{2^9 + 10} = 2 \left(1 + \frac{10}{2^9} \right)^{\frac{1}{9}}, \text{ 因}$$

$$\begin{aligned}(1+x)^m &= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \cdots + \\ &\quad \frac{m(m-1) \cdots (m-n+1)}{n!} x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1).\end{aligned}$$

$$\text{故 } \sqrt[9]{522} = 2 \left(1 + \frac{10}{2^9} \right)^{\frac{1}{9}}$$

$$\begin{aligned}&= 2 \left[1 + \frac{1}{9} \cdot \frac{10}{2^9} + \frac{\frac{1}{9}(\frac{1}{9}-1)}{2!} \cdot \frac{10^2}{2^{18}} + \cdots + \right. \\ &\quad \left. \frac{\frac{1}{9}(\frac{1}{9}-1) \cdots (\frac{1}{9}-n+1)}{n!} \cdot \frac{10^n}{2^{9n}} + \cdots \right] \\ &= 2 \cdot \left[1 + \frac{1}{9} \cdot \frac{10}{2^9} - \frac{\frac{1}{9} \cdot \frac{8}{9}}{2!} \cdot \frac{10^2}{2^{18}} + \cdots \right]\end{aligned}$$

$$= 2 + \frac{2}{9} \cdot \frac{10}{2^9} - \frac{1}{9} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10^2}{2^{18}} + \dots$$

上式右端从第 2 项起为一交错级数, 故有

$$|r_3| \leq u_4 = \frac{8 \cdot 17}{3 \cdot 9^3} \cdot \frac{10^3}{2^{27}} < 10^{-6},$$

取 3 项, 并在计算时取六位小数, 可得

$$\sqrt{522} \approx 2 + \frac{2}{9} \cdot \frac{10}{2^9} - \frac{8}{9^2} \cdot \frac{10^2}{2^{18}} \approx 2.00430.$$

$$(4) \cos 2^\circ = \cos \frac{\pi}{90} = 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\pi}{90} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{90} \right)^4 - \dots,$$

$$|r_2| \leq u_3 = \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{90} \right)^4 \approx 10^{-8},$$

故取 2 项并在计算时取五位小数, 可得

$$\cos 2^\circ \approx 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\pi}{90} \right)^2 \approx 0.9994.$$

2. 利用被积函数的幂级数展开式求下列定积分的近似值:

$$(1) \int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^4} dx \text{ (误差不超过 } 0.0001\text{);}$$

$$(2) \int_0^{0.5} \frac{\arctan x}{x} dx \text{ (误差不超过 } 0.001\text{).}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } (1) \int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^4} dx &= \int_0^{0.5} (1 - x^4 + x^8 - x^{12} + \dots + (-1)^n x^{4n} + \dots) dx \\ &= \left(x - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{13}x^{13} + \dots \right) \Big|_0^{0.5} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^9} - \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{2^{13}} + \dots, \end{aligned}$$

上式右端为一交错级数, 有

$$|r_3| \leq u_4 = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{2^{13}} \approx 0.000009 < 10^{-4},$$

故取 3 项, 并在计算时取五位小数, 可得

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^4} dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^9} \approx 0.4940.$$

$$(2) \text{ 因 } \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots (-1 < x < 1),$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \int_0^{0.5} \frac{\arctan x}{x} dx &= \int_0^{0.5} \left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} + \dots \right) dx \\ &= \left(x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^5}{25} - \frac{x^7}{49} + \dots \right) \Big|_0^{0.5} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{2^5} - \frac{1}{49} \cdot \frac{1}{2^7} + \dots,$$

由于

$$|r_3| \leq u_4 = \frac{1}{49} \cdot \frac{1}{2^7} \approx 0.0002 < 10^{-3},$$

所以取 3 项,并在计算时取四位小数,可得

$$\int_0^{0.5} \frac{\arctan x}{x} dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{2^5}$$

$$\approx 0.4874 \approx 0.487.$$

3. 试用幂级数求下列各微分方程的解:

- (1) $y' - xy - x = 1;$
- (2) $y'' + xy' + y = 0;$
- (3) $(1-x)y' = x^2 - y.$

解 (1) 设方程的解为 $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$ (a_0 为任意常数),代入方程,则有如下竖式(注意对齐同次幂项)

$$\begin{array}{r} y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + (n+1)a_{n+1}x^n + \dots \\ -xy = -a_0x - a_1x^2 - \dots - a_{n-1}x^n - \dots \\ \hline -x = -x \end{array}$$

$$1 = a_1 + (2a_2 - a_0 - 1)x + (3a_3 - a_1)x^2 + \dots + [(n+1)a_{n+1} - a_{n-1}]x^n + \dots$$

比较系数可得

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{a_0 + 1}{2},$$

$$a_3 = \frac{1}{3}, \quad a_4 = \frac{a_2 + 1}{4} = \frac{a_0 + 1}{2 \times 4},$$

$$a_5 = \frac{a_3 + 1}{5} = \frac{1}{3 \times 5}, \quad a_6 = \frac{a_4 + 1}{6} = \frac{a_0 + 1}{2 \times 4 \times 6},$$

...

$$a_{2n-1} = \frac{1}{3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}, \quad a_{2n} = \frac{a_0 + 1}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n} = \frac{a_0 + 1}{n! 2^n}.$$

不难求出 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}x^{2n-1}$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}x^{2n}$ 的收敛域都是 $(-\infty, +\infty)$,故

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} x^{2n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)} + (a_0 + 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n! 2^n} - 1 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)} + (a_0 + 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n - 1. \end{aligned}$$

由于 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n = e^{\frac{x^2}{2}}$, 记 $a_0 + 1 = C, 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1) = (2n-1)!!$,
则

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!!} x^{2n-1} - 1, x \in (-\infty, +\infty).$$

(2) 设 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 是方程的解, 其中 a_0, a_1 是任意常数, 则

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n,$$

代入方程 $y'' + xy' + y = 0$, 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n + a_n] x^n = 0.$$

故必有

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n = 0,$$

$$\text{即 } a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

可见, 当 $n = 2(k-1)$ 时,

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \left(-\frac{1}{2k}\right) a_{2k-2} = \left(-\frac{1}{2k}\right) \left(-\frac{1}{2k-2}\right) \cdots \left(-\frac{1}{2}\right) a_0 \\ &= \frac{a_0 (-1)^k}{k! 2^k}. \end{aligned}$$

当 $n = 2k-1$ 时,

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= \left(-\frac{1}{2k+1}\right) a_{2k-1} = \left(-\frac{1}{2k+1}\right) \left(-\frac{1}{2k-1}\right) \cdots \left(-\frac{1}{3}\right) a_1 \\ &= \frac{a_1 (-1)^k}{(2k+1)!!}. \end{aligned}$$

由于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n}$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ 的收敛域均为 $(-\infty, +\infty)$, 故

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_0 (-1)^n}{n! 2^n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_1 (-1)^n}{(2n+1)!!} x^{2n+1}, \end{aligned}$$

$$\text{即 } y = a_0 e^{-\frac{x^2}{2}} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!!} x^{2n+1}, x \in (-\infty, +\infty).$$

(3) 设 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 是方程的解, 代入方程, 得

$$(1-x) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = x^2 - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^2,$$

将上式左边第一个级数写成 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$, 则有

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1) a_{n+1} + (1-n) a_n] x^n = x^2.$$

比较系数, 得

$$\begin{aligned} a_1 + a_0 &= 0, \quad 2a_2 = 0, \quad 3a_3 - a_2 = 1, \\ (n+1)a_{n+1} + (1-n)a_n &= 0 \quad (n \geq 3). \end{aligned}$$

即

$$a_1 = a_0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{n-1}{n+1} a_n \quad (n \geq 3),$$

或写成

$$a_n = \frac{n-2}{n} a_{n-1} = \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{n-4}{n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{n(n-1)} \quad (n \geq 4).$$

$$\text{于是 } y = a_0 - a_0 x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{6} x^4 + \frac{1}{10} x^5 + \cdots + \frac{2}{n(n-1)} x^n + \cdots,$$

$$\text{或写成 } y = a_0(1-x) + x^3 \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{6} x + \frac{1}{10} x^2 + \cdots + \frac{2}{(n+2)(n+3)} x^n + \cdots \right].$$

4. 试用幂级数求下列方程满足所给初始条件的特解:

$$(1) y' = y^2 + x^3, y|_{x=0} = \frac{1}{2};$$

$$(2) (1-x)y' + y = 1+x, y|_{x=0} = 0.$$

解 (1) 因 $y|_{x=0} = \frac{1}{2}$, 故设方程的特解为 $y = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, 则

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

代入方程, 有

$$\begin{aligned} a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n &= x^3 + \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \right)^2 \\ &= x^3 + \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \right)^2 \\ &= x^3 + \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + [a_1^2 x^2 + 2a_1 a_2 x^3 + (a_2^2 + 2a_1 a_3) x^4 + (\sum_{i+j=n} a_i a_j) x^n + \cdots]. \end{aligned}$$

$$\text{即 } a_1 + (2a_2 - a_1)x + (3a_3 - a_2 - a_1^2)x^2 + (4a_4 - a_3 - 2a_1 a_2)x^3$$

$$+\cdots+[(n+1)a_{n+1}-a_n-\sum_{i+j=n}a_ia_j]x^n+\cdots=\frac{1}{4}+x^3.$$

比较系数,得 $a_1=\frac{1}{4}$, $2a_2-a_1=0$, $3a_3-a_2-a_1^2=0$, $4a_4-a_3-2a_1a_2=1$,

$$\cdots, (n+1)a_{n+1}-a_n-\sum_{i+j=n}a_ia_j=0 \quad (n \geq 4).$$

依次解得 $a_1=\frac{1}{4}$, $a_2=\frac{1}{8}$, $a_3=\frac{1}{16}$, $a_4=\frac{9}{32}$,

故 $y=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\frac{9}{32}x^4+\cdots$.

(2) 因 $y|_{x=0}=0$, 故设 $y=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 是方程的特解, 则 $y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$, 代入方程, 有

$$(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=1+x,$$

$$\text{即 } \sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=1+x,$$

或写成

$$a_1+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)a_{n+1}+(1-n)a_n]x^n=1+x.$$

比较系数, 得 $a_1=1$, $a_2=\frac{1}{2}$, $a_{n+1}=\frac{n-1}{n+1}a_n$ ($n \geq 2$), 或写成

$$a_n=\frac{n-2}{n}a_{n-2}=\frac{(n-2)(n-3)\cdots 1}{n(n-1)\cdots 3} \cdot \frac{1}{2}=\frac{1}{n(n-1)} \quad (n \geq 3).$$

故 $y=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}x^n+\cdots$.

5. 利用欧拉公式将函数 $e^x \cos x$ 展开成 x 的幂级数.

解 由欧拉公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ 知

$$\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix}),$$

故

$$e^x \cos x = e^x \cdot \operatorname{Re}(e^{ix}) = \operatorname{Re}(e^x \cdot e^{ix}) = \operatorname{Re}[e^{(1+i)x}].$$

因为

$$\begin{aligned} e^{(1+i)x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (1+i)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^n \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right) 2^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{x^n}{n!}, x \in (-\infty, +\infty), \end{aligned}$$

所以

$$e^x \cos x = \operatorname{Re}[e^{(1+i)x}]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{n\pi}{4} \cdot 2^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{x^n}{n!}, x \in (-\infty, +\infty).$$

习题 12-6

函数项级数的一致收敛性及一致收敛级数的基本性质

1. 已知函数序列 $S_n(x) = \sin \frac{x}{n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛于 0.

(1) 问 $N(\epsilon, x)$ 取多大, 能使当 $n > N$ 时, $S_n(x)$ 与其极限之差的绝对值小于正数 ϵ ;

(2) 证明 $S_n(x)$ 在任一有限区间 $[a, b]$ 上一致收敛.

解 (1) 由于 $|S_n(x) - 0| = \left| \sin \frac{x}{n} \right| \leq \frac{|x|}{n}$, 因此对于正数 ϵ , 取 $N(\epsilon, x) \geq \frac{|x|}{\epsilon}$, 则当 $n > N$ 时, 就有

$$|S_n(x) - 0| \leq \frac{|x|}{n} < \epsilon.$$

证 (2) 记 $M = \max\{|a|, |b|\}$, 则 $\forall x \in [a, b]$, $|x| \leq M$, 于是

$$|S_n(x) - 0| \leq \frac{|x|}{n} \leq \frac{M}{n}.$$

故 $\forall \epsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{M}{\epsilon} \right] + 1$, 当 $n > N$ 时, 对一切 $x \in [a, b]$ 都有

$$|S_n(x) - 0| \leq \frac{|x|}{n} < \frac{M}{N} < \epsilon,$$

即 $S_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 0.

2. 已知级数 $x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \dots$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛.

(1) 求出该级数的和;

(2) 问 $N(\epsilon, x)$ 取多大, 能使当 $n > N$ 时, 级数的余项 r_n 的绝对值小于正数 ϵ ;

(3) 分别讨论级数在区间 $[0, 1]$, $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上的一致收敛性.

解 (1) 设该级数的和函数为 $s(x)$, 当 $x=0$ 时, $s(0)=0$; 当 $x \neq 0$ 时, 该级数是公比为 $\frac{1}{1+x^2}$ 的等比级数, 且 $\frac{1}{1+x^2} < 1$, 故

$$s(x) = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2.$$

于是

$$s(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$(2) r_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n} + \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} + \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+2}} + \dots$$
$$= \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \left[1 + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{(1+x^2)^2} + \dots \right].$$

当 $x=0$ 时, $r_n(x) = 0$, $\forall \epsilon > 0$, 取 $N=1$, 则当 $n > N$ 时, 就有

$$|r_n(x)| < \epsilon;$$

$$\text{当 } x \neq 0 \text{ 时}, r_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}, \forall \epsilon > 0, \text{ 取}$$
$$N = \left\lceil \frac{\ln \frac{1}{\epsilon}}{\ln(1+x^2)} \right\rceil + 1,$$

则 $|r_n(x)| = \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} < \frac{1}{(1+x^2)^{N-1}} = \epsilon.$

(3) 该级数的各项 $u_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) 在区间 $[0, 1]$ 上是连续的, 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛, 则由定理 1 知, 其和函数 $s(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续. 今 $s(x)$ 在 $[0, 1]$ 有间断点 $x=0$, 由此推知该级数在 $[0, 1]$ 上不一致收敛.

在区间 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上, 因为

$$|r_n(x)| = \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} \leqslant \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{n-1}} = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1},$$

所以, $\forall \epsilon > 0$, 取 $N = \lceil \log_{\frac{4}{5}} \epsilon \rceil + 1$, 当 $n > N$ 时, 对一切 $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, 有

$$|r_n(x)| \leqslant \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} < \left(\frac{4}{5}\right)^{N-1} = \epsilon.$$

即级数在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上一致收敛.

3. 按定义讨论下列级数在所给区间上的一致收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}, -\infty < x < +\infty;$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n, 0 < x < 1.$$

解 (1) 此级数为交错级数,且满足莱布尼茨定理的条件.

$\forall x \in (-\infty, +\infty)$,

$$|r_n(x)| \leq \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} < \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \frac{x^2}{1+nx^2+\cdots+x^{2n}} < \frac{1}{n},$$

故 $\forall \epsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{1}{\epsilon} \right]$, 当 $n > N$ 时, 对一切 $x \in (-\infty, +\infty)$, 有

$$|r_n(x)| < \epsilon,$$

即该级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n - x^{n+1}), \text{ 其部分和函数}$$

$$s_n(x) = (1-x) + (x-x^2) + \cdots + (x^n - x^{n+1}) = 1 - x^{n+1},$$

有和函数 $s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x^{n+1}) = 1, x \in (0, 1).$

且 $|r_n(x)| = |s_n(x) - s(x)| = x^{n+1}, x \in (0, 1).$

取一列 $x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{n+1}}$ ($n = 1, 2, \dots$), $x_n \in (0, 1)$. 于是对 $\epsilon_0 = \frac{1}{4}$, 不论 n 多么大, 总有 $x_n \in (0, 1)$, 使得

$$|r_n(x_n)| = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{n+1}} \right]^{n+1} = \frac{1}{3} > \frac{1}{4} = \epsilon_0.$$

因此, 该级数在开区间 $(0, 1)$ 内不一致收敛.

4. 利用魏尔斯特拉斯判别法证明下列级数在所给区间上的一致收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}, -\infty < x < +\infty;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[n]{n^4 + x^4}}, -\infty < x < +\infty;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}, 0 \leq x < +\infty;$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n!}, |x| < 10;$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (1 - e^{-nx})}{n^2 + x^2}, 0 \leq x < +\infty.$$

证 (1) $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, 因为 $|\cos nx| \leq 1$, 所以

$$\left| \frac{\cos nx}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛, 从而原级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

(2) $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, 因为 $|\sin nx| \leq 1$, 所以

$$\left| \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}} \right| \leq \frac{1}{(n^4 + x^4)^{\frac{1}{3}}} \leq \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ 收敛, 从而原级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} x^2 \cdot e^{-nx} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{e^{nx}}, \text{ 由于当 } x \in [0, +\infty) \text{ 时,}$$

$$e^{-nx} = 1 + nx + \frac{1}{2!}(nx)^2 + \frac{1}{3!}(nx)^3 + \dots > \frac{1}{2!}(nx)^2 = \frac{n^2 x^2}{2},$$

故

$$\left| \frac{x^2}{e^{nx}} \right| < \frac{2}{n^2},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ 收敛, 故原级数在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

$$(4) \forall x \in (-10, 10), \left| \frac{e^{-nx}}{n!} \right| < \frac{(e^{10})^n}{n!},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^{10})^n}{n!}$ 收敛(收敛于 $e^{e^{10}} - 1$), 故原级数在 $(-10, 10)$ 上一致收敛.

(5) $\forall x \in [0, +\infty)$, 由于 $0 < e^{-nx} < 1$, 故

$$\left| \frac{(-1)^n (1 - e^{-nx})}{n^2 + x^2} \right| = \frac{1 - e^{-nx}}{n^2 + x^2} < \frac{1}{n^2},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 从而原级数在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

习题 12-7 傅里叶级数

1. 下列周期函数 $f(x)$ 的周期为 2π , 试将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数, 如果 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的表达式为:

$$(1) f(x) = 3x^2 + 1 (-\pi \leq x < \pi);$$

$$(2) f(x) = e^{2x} (-\pi \leq x < \pi);$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} bx, & -\pi \leq x < 0, \\ ax, & 0 \leq x < \pi (a, b \text{ 为常数, 且 } a > b > 0). \end{cases}$$

$$\text{解 } (1) a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (3x^2 + 1) dx = 2(\pi^2 + 1);$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (3x^2 + 1) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n} (3x^2 + 1) \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} 6x \sin nx dx \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{6}{n^2\pi} \left(x \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx \right) \\
&= \frac{12}{n^2} (-1)^n - \frac{6}{n^3\pi} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{(-1)^n 12}{n^2} (n = 1, 2, \dots);
\end{aligned}$$

由于 $(3x^2 + 1)\sin nx$ 是奇函数, 故

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (3x^2 + 1)\sin nx dx = 0.$$

因为 $f(x)$ 满足收敛定理的条件且在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 故

$$\begin{aligned}
f(x) &= \pi^2 + 1 + 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx, x \in (-\infty, +\infty). \\
(2) \quad a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} dx = \frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{2\pi}; \\
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} \cos nx dx = \frac{1}{2\pi} \left(e^{2x} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} \cdot n \sin nx dx \right) \\
&= \frac{(-1)^n (e^{2\pi} - e^{-2\pi})}{2\pi} + \frac{n}{4\pi} \left(e^{2x} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} n \cos nx dx \right) \\
&= \frac{(-1)^n (e^{2\pi} - e^{-2\pi})}{2\pi} - \frac{n^2}{4} a_n,
\end{aligned}$$

故

$$a_n = \frac{2(-1)^n (e^{2\pi} - e^{-2\pi})}{(n^2 + 4)\pi} (n = 1, 2, \dots);$$

用分部积分法得

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} \sin nx dx = -\frac{n}{2} a_n = -\frac{n(-1)^n (e^{2\pi} - e^{-2\pi})}{(n^2 + 4)\pi} (n = 1, 2, \dots).$$

$f(x)$ 满足收敛定理的条件, 而在 $x = (2k+1)\pi$ 处不连续 ($k \in \mathbb{Z}$), 故

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{\pi} \left[\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 4} (2\cos nx - n \sin nx) \right], \\
&\quad x \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}. \\
(3) \quad a_0 &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 bx dx + \int_0^{\pi} ax dx \right] = \frac{\pi}{2} (a - b); \\
a_n &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 bx \cos nx dx + \int_0^{\pi} ax \cos nx dx \right].
\end{aligned}$$

在上式右端第一个积分中令 $x = -t$,

$$\int_{-\pi}^0 bx \cos nx dx = \int_0^{\pi} -bt \cos nt dt = \int_0^{\pi} -bx \cos nx dx,$$

故

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (a-b) x \cos nx dx = \frac{a-b}{n\pi} \left(x \sin nx \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin nx dx \right) \\ &= \frac{a-b}{n^2\pi} (\cos \pi - 1) = \frac{b-a}{n^2\pi} [1 - (-1)^n] (n=1,2,\dots); \end{aligned}$$

同理,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 bx \sin nx dx + \int_0^\pi ax \sin nx dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (a+b) x \sin nx dx = \frac{a+b}{n\pi} \left(-x \cos nx \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos nx dx \right) \\ &= \frac{a+b}{n\pi} \left[(-1)^{n+1}\pi + \frac{1}{n} \sin nx \Big|_0^\pi \right] = \frac{a+b}{n} (-1)^{n+1} (n=1,2,\dots). \end{aligned}$$

$f(x)$ 满足收敛定理的条件,而在 $x = (2k+1)\pi (k \in \mathbb{Z})$ 处不连续. 故

$$f(x) = \frac{\pi}{4}(a-b) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{[1-(-1)^n](b-a)}{n^2\pi} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1}(a+b)}{n} \sin nx \right\},$$

$$x \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

2. 将下列函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数:

$$(1) f(x) = 2 \sin \frac{x}{3} \quad (-\pi \leq x \leq \pi);$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} e^x, & -\pi \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

解 (1) 设 $\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 经周期延拓而得的函数, $\varphi(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 内连续, $x = \pm \pi$ 是 $\varphi(x)$ 的间断点. 又 $\varphi(x)$ 满足收敛定理的条件, 故在 $(-\pi, \pi)$ 内, 它的傅里叶级数收敛于 $f(x)$.

由于 $2 \sin \frac{x}{3}$ 是奇函数, 故 $a_n = 0 \quad (n=0,1,2,\dots)$;

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi 2 \sin \frac{x}{3} \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi [\cos \left(\frac{1}{3} - n \right)x - \cos \left(\frac{1}{3} + n \right)x] dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin \left(n - \frac{1}{3} \right)\pi}{n - \frac{1}{3}} - \frac{\sin \left(n + \frac{1}{3} \right)\pi}{n + \frac{1}{3}} \right] \\ &= \frac{6}{\pi} \left[\frac{-\cos n\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{3n-1} - \frac{\cos n\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{3n+1} \right] \\ &= (-1)^{n+1} \cdot \frac{18\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{n}{9n^2-1} (n=1,2,\dots). \end{aligned}$$

故

$$f(x) = \frac{18\sqrt{3}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{9n^2 - 1} \sin nx, x \in (-\pi, \pi).$$

(2) 设 $\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 经周期延拓而得的函数, 它在 $(-\pi, \pi)$ 内连续, $x = \pm \pi$ 是 $\varphi(x)$ 的间断点. 又 $\varphi(x)$ 满足收敛定理的条件, 故在 $(-\pi, \pi)$ 内它的傅里叶级数收敛于 $f(x)$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 e^x dx + \int_0^\pi dx \right] = \frac{1 + \pi - e^{-\pi}}{\pi},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 e^x \cos nx dx + \int_0^\pi \cos nx dx \right] = \frac{1 - (-1)^n e^{-\pi}}{\pi(1+n^2)} (n = 1, 2, \dots);$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 e^x \sin nx dx + \int_0^\pi \sin nx dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{-n[1 - (-1)^n e^{-\pi}]}{1+n^2} + \frac{1 - (-1)^n}{n} \right\} (n = 1, 2, \dots).$$

故

$$f(x) = \frac{1 + \pi - e^{-\pi}}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{1 - (-1)^n e^{-\pi}}{1+n^2} \right] \cos nx + \left[\frac{-n + (-1)^n n e^{-\pi}}{1+n^2} + \frac{1 - (-1)^n}{n} \right] \sin nx \right\}, x \in (-\pi, \pi).$$

3. 将函数 $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ ($-\pi \leq x \leq \pi$) 展开成傅里叶级数.

解 $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ 是偶函数, 故 $b_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$).

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos \frac{x}{2} \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[\cos \left(n - \frac{1}{2} \right)x + \cos \left(n + \frac{1}{2} \right)x \right] dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin \left(n - \frac{1}{2} \right)\pi}{n - \frac{1}{2}} + \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right)\pi}{n + \frac{1}{2}} \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{-\cos n\pi}{2n-1} + \frac{\cos n\pi}{2n+1} \right) = (-1)^{n+1} \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= (-1)^{n+1} \frac{4}{\pi(4n^2-1)} (n = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

因 $f(x)$ 满足收敛定理的条件, 且在 $[-\pi, \pi]$ 上连续, 故

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{4n^2-1} \cos nx, x \in [-\pi, \pi].$$

4. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 它在 $[-\pi, \pi]$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2}, \\ x, & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi, \end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

解 $f(x)$ 是奇函数, 故 $a_n = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$);

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{\pi}{2} \sin nx dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{-x \cos nx}{n} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx dx \right] + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin nx dx \\ &= \frac{-\cos \frac{n\pi}{2}}{n} + \frac{2 \sin \frac{n\pi}{2}}{\pi n^2} + \frac{\cos \frac{n\pi}{2} - \cos n\pi}{n} \\ &= \frac{2}{n^2 \pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

因 $f(x)$ 满足收敛定理的条件, 而在 $x = (2k+1)\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) 处间断, 故

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{n^2 \pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right] \sin nx, x \neq (2k+1)\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

5. 将函数 $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$ ($0 \leq x \leq \pi$) 展开成正弦级数.

解 作

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0, \pi], \\ 0, & x = 0, \\ -f(-x), & x \in (-\pi, 0), \end{cases}$$

$\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 的奇延拓. 令 $\Phi(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的周期延拓, 则 $\Phi(x)$ 满足收敛定理的条件, 而在 $x = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) 处间断, 又在 $(0, \pi]$ 上, $\Phi(x) \equiv f(x)$, 因此 $\Phi(x)$ 的傅里叶级数在 $(0, \pi]$ 上收敛于 $f(x)$.

$$a_n = 0 (n = 0, 1, 2, \dots);$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\pi-x}{2} \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x-\pi}{2n} \cos nx - \frac{1}{2n^2} \sin nx \right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{n} (n = 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

故

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx, x \in (0, \pi].$$

6. 将函数 $f(x) = 2x^2 (0 \leq x \leq \pi)$ 分别展开成正弦级数和余弦级数.

解 (1) 展开成正弦级数.

令

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \in [0, \pi], \\ -2x^2, & x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

是 $f(x)$ 的奇延拓, 又 $\Phi(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的周期延拓函数, 则 $\Phi(x)$ 满足收敛定理的条件, 而在 $x = (2k+1)\pi (k \in \mathbb{Z})$ 处间断, 又在 $[0, \pi]$ 上 $\Phi(x) = f(x)$, 故它的傅里叶级数在 $[0, \pi]$ 上收敛于 $f(x)$.

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi 2x^2 \sin nx dx \\ &= \frac{4}{\pi} \left[\frac{-x^2}{n} \cos nx + \frac{2x}{n^2} \sin nx + \frac{2}{n^3} \cos nx \right]_0^\pi \\ &= \frac{4}{\pi} \left[\frac{-\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n 2}{n^3} - \frac{2}{n^3} \right] \quad (n = 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

故

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{n^3} - \frac{\pi^2}{n} \right) (-1)^n - \frac{2}{n^3} \right] \sin nx, x \in [0, \pi].$$

(2) 展开成余弦级数.

令 $\varphi(x) = 2x^2, x \in (-\pi, \pi]$ 是 $f(x)$ 的偶延拓, 又 $\Phi(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的周期延拓函数, 则 $\Phi(x)$ 满足收敛定理的条件且处处连续, 又在 $[0, \pi]$ 上, $\Phi(x) \equiv f(x)$, 故它的傅里叶级数在 $[0, \pi]$ 上收敛于 $f(x)$.

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi 2x^2 dx = \frac{4}{3}\pi^2;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi 2x^2 \cos nx dx = (-1)^n \frac{8}{n^2} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

故

$$f(x) = \frac{2}{3}\pi^2 + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx, x \in [0, \pi].$$

7. 设周期函数 $f(x)$ 的周期为 2π . 证明:

(1) 如果 $f(x-\pi) = -f(x)$, 则 $f(x)$ 的傅里叶系数 $a_0 = 0, a_{2k} = 0, b_{2k} = 0$ ($k = 1, 2, \dots$);

(2) 如果 $f(x-\pi) = f(x)$, 则 $f(x)$ 的傅里叶系数 $a_{2k+1} = 0, b_{2k+1} = 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

$$\begin{aligned} \text{证 (1)} \quad a_0 &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) dx + \int_0^\pi f(x) dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) dx + \int_0^\pi -f(x-\pi) dx \right] \end{aligned}$$

在上式第二个积分中令 $x - \pi = u$, 则

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) dx - \int_{-\pi}^0 f(u) du \right] = 0.$$

同理可得

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \cos nx dx + \int_0^\pi f(x) \cos nx dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \cos nx dx + \int_0^\pi -f(x-\pi) \cos nx dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \cos nx dx - \int_{-\pi}^0 f(u) \cos (n\pi + nu) du \right] \end{aligned}$$

及

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \sin nx dx - \int_{-\pi}^0 f(u) \sin (n\pi + nu) du \right].$$

当 $n = 2k (k \in \mathbb{N}^*)$ 时, $\cos(n\pi + nu) = \cos nu$, $\sin(n\pi + nu) = \sin nu$,
于是有

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \cos 2kx dx + \int_0^\pi f(x) \cos 2kx dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \cos 2kx dx - \int_{-\pi}^0 f(u) \cos 2ku du \right] = 0, \end{aligned}$$

及

$$b_{2k} = 0 \quad (k \in \mathbb{N}^*).$$

(2) 与(1) 的做法类似, 有

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \cos nx dx + \int_{-\pi}^0 f(u) \cos (n\pi + nu) du \right] \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \sin nx dx + \int_{-\pi}^0 f(u) \sin (n\pi + nu) du \right] \end{aligned}$$

当 $n = 2k+1 (k \in \mathbb{N})$ 时, $\cos(n\pi + nu) = -\cos nu$,

$$\sin(n\pi + nu) = -\sin nu,$$

故有

$$a_{2k+1} = 0, b_{2k+1} = 0 \quad (k \in \mathbb{N}).$$



一般周期函数的傅里叶级数

- 将下列各周期函数展开成傅里叶级数(下面给出函数在一个周期内的表

达式)：

$$(1) \quad f(x) = 1 - x^2 \left(-\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{1}{2} \right);$$

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leqslant x < 0, \\ 1, & 0 \leqslant x < \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2} \leqslant x < 1; \end{cases}$$

$$(3) \quad f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & -3 \leqslant x < 0, \\ 1, & 0 \leqslant x < 3. \end{cases}$$

解 (1) 函数 $f(x)$ 是半周期 $l = \frac{1}{2}$ 的偶函数, 故

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots);$$

$$a_0 = \frac{2}{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - x^2) dx = \frac{11}{6};$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - x^2) \cos \frac{n\pi x}{\frac{1}{2}} dx = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - x^2) \cos 2n\pi x dx \\ &= 4 \left[\frac{1-x^2}{2n\pi} \sin 2n\pi x - \frac{2x}{4n^2\pi^2} \cos 2n\pi x + \frac{2}{8n^3\pi^3} \sin 2n\pi x \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2} \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

因 $f(x)$ 满足收敛定理的条件且处处连续, 故有

$$f(x) = \frac{11}{12} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos (2n\pi x), x \in (-\infty, +\infty).$$

(2) 函数 $f(x)$ 的半周期 $l = 1$.

$$a_0 = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 x dx + \int_0^{\frac{1}{2}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (-1) dx = -\frac{1}{2};$$

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-1}^1 f(x) \cos n\pi x dx \\ &= \int_{-1}^0 x \cos n\pi x dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \cos n\pi x dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 \cos n\pi x dx \\ &= \left[\frac{x}{n\pi} \sin n\pi x + \frac{1}{n^2\pi^2} \cos n\pi x \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{n\pi} \sin n\pi x \right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{1}{n\pi} \sin n\pi x \right]_1^1 \\ &= \frac{1}{n^2\pi^2} [1 - (-1)^n] + \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \quad (n = 1, 2, \dots); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \int_{-1}^1 f(x) \sin n\pi x dx \\
&= \int_{-1}^0 x \sin n\pi x dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \sin n\pi x dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 \sin n\pi x dx \\
&= -\frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n\pi} \quad (n = 1, 2, \dots).
\end{aligned}$$

因 $f(x)$ 满足收敛定理的条件, 其间断点为 $x = 2k, 2k + \frac{1}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 故有

$$\begin{aligned}
f(x) &= -\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{1 - (-1)^n}{n^2 \pi^2} + \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right] \cos n\pi x + \frac{1}{n\pi} \left(1 - 2 \cos \frac{n\pi}{2} \right) \sin n\pi x \right\}, \\
x &\in \mathbf{R} \setminus \{2k, 2k + \frac{1}{2} \mid k \in \mathbf{Z}\}.
\end{aligned}$$

(3) 函数 $f(x)$ 的半周期 $l = 3$.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) dx = \frac{1}{3} \left[\int_{-3}^0 (2x+1) dx + \int_0^3 dx \right] = -1; \\
a_n &= \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) \cos \frac{n\pi x}{3} dx = \frac{1}{3} \left[\int_{-3}^0 (2x+1) \cos \frac{n\pi x}{3} dx + \int_0^3 \cos \frac{n\pi x}{3} dx \right] \\
&= \frac{6}{n^2 \pi^2} [1 - (-1)^n] \quad (n = 1, 2, \dots); \\
b_n &= \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) \sin \frac{n\pi x}{3} dx = \frac{1}{3} \left[\int_{-3}^0 (2x+1) \sin \frac{n\pi x}{3} dx + \int_0^3 \sin \frac{n\pi x}{3} dx \right] \\
&= \frac{6}{n\pi} (-1)^{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots).
\end{aligned}$$

因 $f(x)$ 满足收敛定理的条件, 其间断点为 $x = 3(2k+1), k \in \mathbf{Z}$, 故有

$$\begin{aligned}
f(x) &= -\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{6}{n^2 \pi^2} [1 - (-1)^n] \cos \frac{n\pi x}{3} + (-1)^{n+1} \frac{6}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{3} \right\}, \\
x &\in \mathbf{R} \setminus \{3(2k+1) \mid k \in \mathbf{Z}\}.
\end{aligned}$$

2. 将下列函数分别展开成正弦级数和余弦级数:

$$(1) f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \frac{l}{2}, \\ l-x, & \frac{l}{2} \leq x \leq l; \end{cases}$$

$$(2) f(x) = x^2 \quad (0 \leq x \leq l).$$

解 (1) 展开为正弦级数:

将 $f(x)$ 作奇延拓得 $\varphi(x)$, 又将 $\varphi(x)$ 作周期延拓得 $\Phi(x)$, 则 $\Phi(x)$ 是以 $2l$ 为周期的奇函数, $\Phi(x)$ 处处连续, 又满足收敛定理的条件, 且在 $[0, l]$ 上, $\Phi(x) \equiv f(x)$.

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

$$b_n = \frac{2}{l} \left[\int_0^{\frac{l}{2}} x \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \int_{\frac{l}{2}}^l (l-x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right],$$

在上式第二个积分中令 $l-x=t$, 则有

$$\int_{\frac{l}{2}}^l (l-x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = - \int_0^{\frac{l}{2}} t \cdot \cos n\pi \sin \frac{n\pi t}{l} dt = (-1)^{n-1} \int_0^{\frac{l}{2}} t \sin \frac{n\pi t}{l} dt,$$

于是

$$b_n = \frac{2}{l} [1 + (-1)^{n-1}] \int_0^{\frac{l}{2}} x \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

当 $n=2k$ 时, $b_{2k}=0$; 当 $n=2k-1$ 时,

$$b_{2k-1} = \frac{4}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} x \sin \frac{(2k-1)\pi x}{l} dx = \frac{4l}{(2k-1)^2 \pi^2} (-1)^{k-1} \quad (k=1,2,\dots).$$

故

$$f(x) = \frac{4l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{l}, \quad x \in [0, l].$$

展开为余弦级数:

将 $f(x)$ 作偶延拓得 $\psi(x)$, 再将 $\psi(x)$ 作周期延拓得 $\Psi(x)$, 则 $\Psi(x)$ 是以 $2l$ 为周期的周期函数. $\Psi(x)$ 处处连续又满足收敛定理的条件, 且在 $[0, l]$ 上 $\Psi(x) \equiv f(x)$.

$$a_0 = \frac{2}{l} \left[\int_0^{\frac{l}{2}} x dx + \int_{\frac{l}{2}}^l (l-x) dx \right] = \frac{l}{2};$$

$$a_n = \frac{2}{l} \left[\int_0^{\frac{l}{2}} x \cos \frac{n\pi x}{l} dx + \int_{\frac{l}{2}}^l (l-x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \right],$$

在上式第二个积分中令 $l-x=t$, 则有

$$\int_{\frac{l}{2}}^l (l-x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = (-1)^n \int_0^{\frac{l}{2}} t \cos \frac{n\pi t}{l} dt,$$

于是

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l} [1 + (-1)^n] \int_0^{\frac{l}{2}} x \cos \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{2}{l} [1 + (-1)^n] \left(\frac{l}{\pi} \right)^2 \left[\frac{\pi}{2n} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n^2} \right]. \end{aligned}$$

当 $n=2m-1$ 时, $a_{2m-1}=0$; 当 $n=2m$ 时,

$$\begin{aligned} a_{2m} &= \frac{4l}{\pi^2} \cdot \frac{l}{(2m)^2} [(-1)^m - 1] \\ &= \begin{cases} 0, & m=2k, \\ \frac{l}{\pi^2} \cdot \frac{(-2)}{(2k-1)^2}, & m=2k-1 \end{cases} \quad (k=1,2,\dots). \end{aligned}$$

故

$$f(x) = \frac{l}{4} - \frac{2l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos \frac{2(2k-1)\pi x}{l}, x \in [0, l].$$

(2) 展开为正弦级数:

将 $f(x)$ 作奇延拓得 $\varphi(x)$, 再将 $\varphi(x)$ 作周期延拓, 得以 4 为周期的周期函数 $\Phi(x)$, 则 $\Phi(x)$ 满足收敛定理的条件, 除了间断点 $x = 2(2k+1)(k \in \mathbb{Z})$ 外处处连续, 且在 $[0, 2]$ 上, $\Phi(x) \equiv f(x)$.

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{2} \int_0^2 x^2 \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \left[-\frac{2}{n\pi} x^2 \cos \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 + \frac{4}{n\pi} \int_0^2 x \cos \frac{n\pi x}{2} dx \\ &= (-1)^{n+1} \frac{8}{n\pi} + \frac{8}{(n\pi)^2} \left[x \sin \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 + \frac{16}{(n\pi)^3} \left[\cos \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 \\ &= (-1)^{n+1} \frac{8}{n\pi} + \frac{16}{(n\pi)^3} [(-1)^n - 1] \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

故

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{n^3 \pi^2} [(-1)^n - 1] \right\} \sin \frac{n\pi x}{2}, x \in [0, 2].$$

展开为余弦级数:

将 $f(x)$ 作偶延拓得 $\psi(x)$, 再将 $\psi(x)$ 作周期延拓, 得以 4 为周期的周期函数 $\Psi(x)$, 则 $\Psi(x)$ 处处连续又满足收敛定理的条件. 且在 $[0, 2]$ 上 $\Psi(x) \equiv f(x)$.

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3};$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2} \int_0^2 x^2 \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{2}{n\pi} \left[x^2 \sin \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 - \frac{4}{n\pi} \int_0^2 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx \\ &= \frac{8}{(n\pi)^2} \left[x \cos \frac{n\pi x}{2} - \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 \\ &= (-1)^n \frac{16}{(n\pi)^2} \quad (n = 1, 2, \dots); \end{aligned}$$

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

故

$$f(x) = \frac{4}{3} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{2}, x \in [0, 2].$$

3. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 它在 $[-1, 1]$ 上的表达式为 $f(x) = e^{-x}$. 试将 $f(x)$ 展开成复数形式的傅里叶级数.

解. $f(x)$ 满足收敛定理的条件, 且除了点 $x = 2k+1(k \in \mathbb{Z})$ 外处处连续.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{-x} e^{-inx} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{-(1+inx)x} dx \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+inx} [e^{-(1+inx)x}]_{-1}^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1-n\pi i}{1+(n\pi)^2} (e^{-1} \cdot e^{-n\pi i} - e \cdot e^{n\pi i}) \\
&= \frac{1-n\pi i}{1+(n\pi)^2} \frac{e \cos n\pi - e^{-1} \cos n\pi}{2} \\
&= (-1)^n \frac{e-e^{-1}}{2} \frac{1-n\pi i}{1+n^2\pi^2} \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots),
\end{aligned}$$

故

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{e-e^{-1}}{2} \frac{1-n\pi i}{1+n^2\pi^2} \cdot e^{inx}, x \in \mathbb{R} \setminus \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

* 4. 设 $u(t)$ 是周期为 T 的周期函数. 已知它的傅里叶级数的复数形式为(参阅本节例题)

$$u(t) = \frac{h\tau}{T} + \frac{h}{\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi\tau}{T} e^{\frac{2\pi i n t}{T}} \quad (-\infty < t < +\infty),$$

试写出 $u(t)$ 的傅里叶级数的实数形式(即三角形式).

$$\text{解 由题设知 } c_n = \frac{h}{n\pi} \sin \frac{n\pi\tau}{T} \quad (n=\pm 1, \pm 2, \dots).$$

因

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \overline{c_n} \quad (n=1, 2, \dots),$$

可见

$$a_n = \operatorname{Re}(2 \overline{c_n}), b_n = \operatorname{Im}(2 \overline{c_n}).$$

而 c_n 为实数, 故

$$a_n = \frac{2h}{n\pi} \sin \frac{n\pi\tau}{T}, b_n = 0 \quad (n=1, 2, \dots),$$

故

$$u(t) = \frac{h\tau}{T} + \frac{2h}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi\tau}{T} \cdot \cos \frac{2n\pi t}{T} \quad (-\infty < t < +\infty).$$

总习题十一

1. 填空

(1) 对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 是它收敛的 _____ 条件, 不是它收敛的 _____ 条件;

(2) 部分和数列 $\{S_n\}$ 有界是正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的 _____ 条件;

(3) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 必定 _____; 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件

收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 必定_____.

解 (1) 必要, 充分; (2) 充要; (3) 收敛, 发散.

2. 判定下列级数的收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2n^2}; \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n};$$

$$(4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^{10} n}; \quad (5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^s} (a > 0, s > 0).$$

解 (1) $u_n = \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$, 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$. 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故由极限形式的比较审敛法知原级数发散.

(2) $u_n = \frac{(n!)^2}{2n^2} = \frac{[(n-1)!]^2}{2} \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$, 由于一般项不趋于零, 故级数发散.

(3) $u_n = \frac{n \cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n} \leqslant \frac{n}{2^n} = v_n$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 是收敛的(事实上, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1$, 据比值审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 收敛), 故由比较审敛法知原级数收敛.

(4) $u_n = \frac{1}{\ln^{10} n}$, 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln^{10} n} = +\infty$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故由极限形式的比较审敛法知原级数发散.

注 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln^{10} n}$ 时, 可考虑极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^{10} n}{n}$.

因 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^{10} x}{x}$ 洛必达法则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10 \ln^9 x}{x} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10!}{x} = 0$,

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^{10} n}{n} = 0,$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln^{10} n} = +\infty.$$

$$(5) u_n = \frac{a^n}{n^s}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a \left(\frac{n}{n+1} \right)^s = a.$$

由比值审敛法知, 当 $a < 1$ 时级数收敛, 当 $a > 1$ 时级数发散.

当 $a = 1$ 时, 原级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, 由 p -级数的结论知, 当 $s > 1$ 时级数收敛,

当 $s \leq 1$ 时级数发散.

3. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$ 也收敛.

证 根据题设条件知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 收敛, 故有 $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = 0$. 由极限定义知, 存在正整数 N , 当 $n \geq N$ 时, 有 $u_n + v_n < 1$, 从而

$$(u_n + v_n)^2 < u_n + v_n (n \geq N),$$

故由比较审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$ 收敛.

4. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$. 问级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是否也收敛? 试说明理由.

解 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 不一定收敛.

当 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数时, 在题设条件下 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 必定收敛. 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$. 根据收敛数列的保号性知, 存在正整数 N , 当 $n \geq N$ 时有 $\frac{v_n}{u_n} > 0$, 即有 $v_n > 0$. 于是,

按正项级数的比较审敛法知 $\sum_{n=N}^{\infty} v_n$ 收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛.

当 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 不是正项级数时, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 可能不收敛. 例如: 若 $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$, $v_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \right] = 1$, 然而 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

5. 讨论下列级数的绝对收敛性与条件收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin \frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}.$$

解 (1) $u_n = \frac{(-1)^n}{n^p}$, $|u_n| = \frac{1}{n^p}$, 当 $p > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛; 当 $0 < p \leq 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ 是交错级数, 且满足莱布尼茨定理的条件, 因而收敛且为条件收敛; 当 $p \leq 0$ 时, 由于 $u_n \not\rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 此时级数发散. 综上可知, 当 $p > 1$ 时, 级数绝对收敛, 当 $0 < p \leq 1$ 时, 级数条件收敛, 当 $p \leq 0$ 时, 级数发散.

(2) $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi^{n+1}} \sin \frac{\pi}{n+1}$, $|u_n| \leq \left(\frac{1}{\pi}\right)^{n+1}$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi}\right)^{n+1}$ 收敛, 由比较审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 即原级数绝对收敛.

$$(3) u_n = (-1)^n \ln \frac{n+1}{n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_n|}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1, \text{而级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

发散, 由极限形式的比较审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散.

而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是交错级数且满足莱布尼茨定理的条件, 因而收敛, 故该级数条件收敛.

$$(4) u_n = (-1)^n \frac{(n+1)!}{n^{n+1}},$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)n^{n+1}}{(n+1)^{n+2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{1}{e} < 1. \end{aligned}$$

由比值审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 即原级数绝对收敛.

6. 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2}; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} [2^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{9}} \cdot 8^{\frac{1}{27}} \cdots (2^n)^{\frac{1}{3^n}}].$$

解 (1) 由于 $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2}$ 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 的部分和, 注意到

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e,$$

故

$$\frac{1}{3^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} < \frac{1}{3^n} e^n = \left(\frac{e}{3}\right)^n.$$

因 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{3}\right)^n$ 收敛, 故由比较审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 收敛, 于是部分和 s_n 有界, 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n} = 0.$$

$$(2) 2^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{9}} \cdot 8^{\frac{1}{27}} \cdots (2^n)^{\frac{1}{3^n}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{9}} \cdot 2^{\frac{3}{27}} \cdots 2^{\frac{n}{3^n}} = 2^{\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \cdots + \frac{n}{3^n}},$$

为此,先求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \cdots + \frac{n}{3^n} \right)$.

记

$$s_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \cdots + \frac{n}{3^n},$$

则

$$\frac{1}{3}s_n = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{3^4} + \cdots + \frac{n-1}{3^n} + \frac{n}{3^{n+1}},$$

将以上两式相减,得

$$\frac{2}{3}s_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^n} - \frac{n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{n}{3^{n+1}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right) - \frac{n}{3^n},$$

即

$$s_n = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right) - \frac{3}{2} \cdot \frac{n}{3^n},$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2} \cdot \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4} - 0 = \frac{3}{4}$.

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{9}} \cdot 8^{\frac{1}{27}} \cdot \cdots \cdot (2^n)^{\frac{1}{3^n}} = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{8}.$$

7. 求下列幂级数的收敛区间:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 5^n}{n} x^n; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} x^n;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} n(x+1)^n; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^{2^n}.$$

解 (1) $u_n = a_n x^n, a_n = \frac{3^n + 5^n}{n}$. 因

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{3^{n+1} + 5^{n+1}}{3^n + 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{3 \left(\frac{3}{5} \right)^n + 5}{\left(\frac{3}{5} \right)^n + 1} = 5,$$

故收敛半径为 $R = \frac{1}{5}$, 收敛区间为 $(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$.

(2) $u_n = a_n x^n, a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}$. 因

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{(n+1)^2}}{\left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{2n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n} \right)^{n^2}} = \frac{e^2}{e} = e,$$

故收敛半径为 $R = \frac{1}{e}$, 收敛区间为 $(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$.

(3) 令 $x+1=t$, 即 $x=t-1$, 先讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nt^n$ 的收敛区间.

因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$, 故收敛半径 $R = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} nt^n$ 的收敛区间为 $(-1, 1)$, 从而原级数的收敛区间为 $(-2, 0)$.

(4) 令 $\frac{x^2}{2} = t$, 原级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} nt^n$, 由第(3)题知该级数的收敛区间为 $(-1, 1)$. 因 $x = \pm \sqrt{2t}$, 故原级数的收敛区间为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

8. 求下列幂级数的和函数:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2(n-1)}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

$$\text{解 } (1) u_n(x) = \frac{2n-1}{2^n} x^{2(n-1)},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n-1} \cdot \frac{|x|^2}{2} = \frac{|x|^2}{2}.$$

当 $\frac{|x|^2}{2} < 1$ 时, 原级数收敛; 当 $\frac{|x|^2}{2} \geq 1$ 时, 因级数的一般项 $u_n(x)$

$\not\rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 故级数发散. 因此原级数的收敛域为 $\frac{|x|^2}{2} < 1$, 即 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

设和函数为 $s(x)$, 即 $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2(n-1)}$, 从 0 到 x 积分并逐项积分:

$$\begin{aligned} \int_0^x s(x) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{2n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} x^{2n+1} = \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n \\ &= \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2}} = \frac{x}{2 - x^2}, x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}). \end{aligned}$$

上式两端对 x 求导, 得

$$s(x) = \left(\frac{x}{2-x^2}\right)' = \frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}, x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

$$(2) u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} |x|^2 = |x|^2.$$

当 $|x| < 1$ 时, 级数收敛; 当 $|x| > 1$ 时, 因级数一般项 $u_n(x) \not\rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$,

故级数发散；当 $x = \pm 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$ 是收敛的交错级数，因此原级数的收敛域为 $[-1, 1]$. 设和函数为 $s(x)$ ，则

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}, \text{ 且 } s(0) = 0.$$

在 $(-1, 1)$ 内，上式两端对 x 求导，得

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}.$$

于是

$$s(x) = s(x) - s(0) = \int_0^x s'(x) dx = \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x.$$

又由于幂级数在 $x = \pm 1$ 处收敛，且 $\arctan x$ 在 $x = \pm 1$ 处连续，故

$$s(x) = \arctan x, \quad x \in [-1, 1].$$

(3) 令 $x-1=t$ ，幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nt^n$ 的收敛域为 $(-1, 1)$. 记其和函数为 $\varphi(t)$ ，即有

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} nt^n = t \sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1} = t \left(\sum_{n=1}^{\infty} t^n \right)' \\ &= t \left(\frac{t}{1-t} \right)' = \frac{t}{(1-t)^2}, \quad t \in (-1, 1). \end{aligned}$$

于是原级数的和函数

$$s(x) = \varphi(x-1) = \frac{x-1}{(2-x)^2}, \quad x \in (0, 2).$$

$$(4) u_n(x) = a_n x^n, a_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} = 1$ ，得幂级数的收敛半径 $R = 1$. 当 $x = \pm 1$ 时，级

数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ 均收敛，故幂级数的收敛域为 $[-1, 1]$.

设和函数为 $s(x)$ ，即 $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$.

当 $x = 0$ 时， $s(0) = 0$ ；

当 $0 < |x| < 1$ 时，

$$xs(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)},$$

上式两端对 x 求导，得

$$[xs(x)]' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},$$

再求导,得

$$[xs(x)]' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}.$$

注意到 $[xs(x)]'_{x=0} = 0$, 上式两端从 0 到 x 积分, 得

$$[xs(x)]' = \int_0^x \frac{dx}{1-x} = -\ln(1-x),$$

再积分,得

$$xs(x) = -\int_0^x \ln(1-x) dx = (1-x)\ln(1-x) + x,$$

于是

$$s(x) = \frac{1-x}{x} \ln(1-x) + 1, x \in (-1, 0) \cup (0, 1).$$

由于幂级数在 $x=\pm 1$ 处收敛, 故和函数分别在 $x=\pm 1$ 处左连续与右连续,

$$\text{于是 } s(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} s(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{x} \ln(1-x) + 1 = 1.$$

因此

$$s(x) = \begin{cases} 1 + \left(\frac{1}{x} - 1\right) \ln(1-x), & x \in [-1, 0) \cup (0, 1), \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

9. 求下列数项级数的和:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}; \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!}.$$

解 (1) 利用 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, x \in (-\infty, +\infty)$, 取 $x=1$, 有 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.

又

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!},$$

其中 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$,

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2e.$

(2) 因 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sin x, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \cos x, x \in (-\infty, +\infty)$,

故取 $x=1$, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} = \sin 1, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} = \cos 1.$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!} &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+2}{(2n+1)!} \\&= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \right] \\&= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \right] \\&= \frac{1}{2} (\cos 1 + \sin 1).\end{aligned}$$

10. 将下列函数展开成 x 的幂级数:

$$(1) \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) ; \quad (2) \frac{1}{(2-x)^2}.$$

解 (1) 因 $[\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})]' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}$,

而

$$(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}, x \in [-1, 1],$$

故

$$\begin{aligned}\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) &= \int_0^x (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} dx \\&= \int_0^x \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} \right] dx \\&= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} x^{2n+1}, x \in [-1, 1].\end{aligned}$$

(2) 因 $\frac{1}{(2-x)^2} = \left(\frac{1}{2-x}\right)', x \neq 2.$

而 $\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} x^n, x \in (-2, 2).$

故 $\frac{1}{(2-x)^2} = \left(\frac{1}{2-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} x^n\right)' = \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} x^n\right)'$
 $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}} x^{n-1}, x \in (-2, 2).$

11. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数, 它在 $[-\pi, \pi]$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi, 0), \\ e^x, & x \in [0, \pi). \end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

解 $f(x)$ 满足收敛定理的条件, 且除了 $x = k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) 外处处连续.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^x dx = \frac{e^{\pi} - 1}{\pi}; \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^x \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx de^x \\ &= \frac{1}{\pi} \left(e^x \cos nx \Big|_0^{\pi} + n \int_0^{\pi} e^x \sin nx dx \right) \\ &= \frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{\pi} + \frac{n}{\pi} \left(e^x \sin nx \Big|_0^{\pi} - n \int_0^{\pi} e^x \cos nx dx \right) \\ &= \frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{\pi} - n^2 a_n, \end{aligned}$$

故

$$a_n = \frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{(n^2 + 1)\pi} \quad (n = 1, 2, \dots);$$

而

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^x \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx de^x \\ &= \frac{1}{\pi} \left(e^x \sin nx \Big|_0^{\pi} - n \int_0^{\pi} e^x \cos nx dx \right) = -na_n \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^{\pi} - 1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{n^2 + 1} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1} e^{\pi} + 1}{n^2 + 1} n \sin nx \right], \\ &\qquad\qquad\qquad x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}. \end{aligned}$$

12. 将函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant h, \\ 0, & h < x \leqslant \pi \end{cases}$$

分别展开成正弦级数和余弦级数.

解 (1) 展开成正弦级数:

$$\text{将 } f(x) \text{ 作奇延拓, 得 } \varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0, \pi], \\ 0, & x = 0, \\ -f(-x), & x \in (-\pi, 0), \end{cases} \quad \text{再将 } \varphi(x) \text{ 作周期延拓, 得 } \Phi(x).$$

周期延拓, 得 $\Phi(x)$, 则 $\Phi(x)$ 满足收敛定理的条件, 且在 $(0, \pi]$ 上 $\Phi(x) \equiv f(x)$, 并有间断点 $x = 0, x = h$.

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^h \sin nx dx = \frac{2(1 - \cos nh)}{n\pi} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

故

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos nh}{n} \sin nx, x \in (0, h) \cup (h, \pi].$$

(2) 展开成余弦级数:

将 $f(x)$ 作偶延拓, 得 $\psi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, \pi] \\ f(-x), & x \in (-\pi, 0] \end{cases}$, 再将 $\psi(x)$ 作

周期延拓得 $\Psi(x)$, 则 $\Psi(x)$ 满足收敛定理的条件, 在 $[0, \pi]$ 上 $\Psi(x) \equiv f(x)$, 且有间断点 $x = h$.

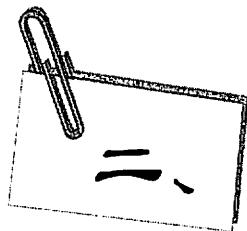
$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^h dx = \frac{2h}{\pi};$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^h \cos nx dx = \frac{2 \sin nh}{n\pi} (n = 1, 2, \dots);$$

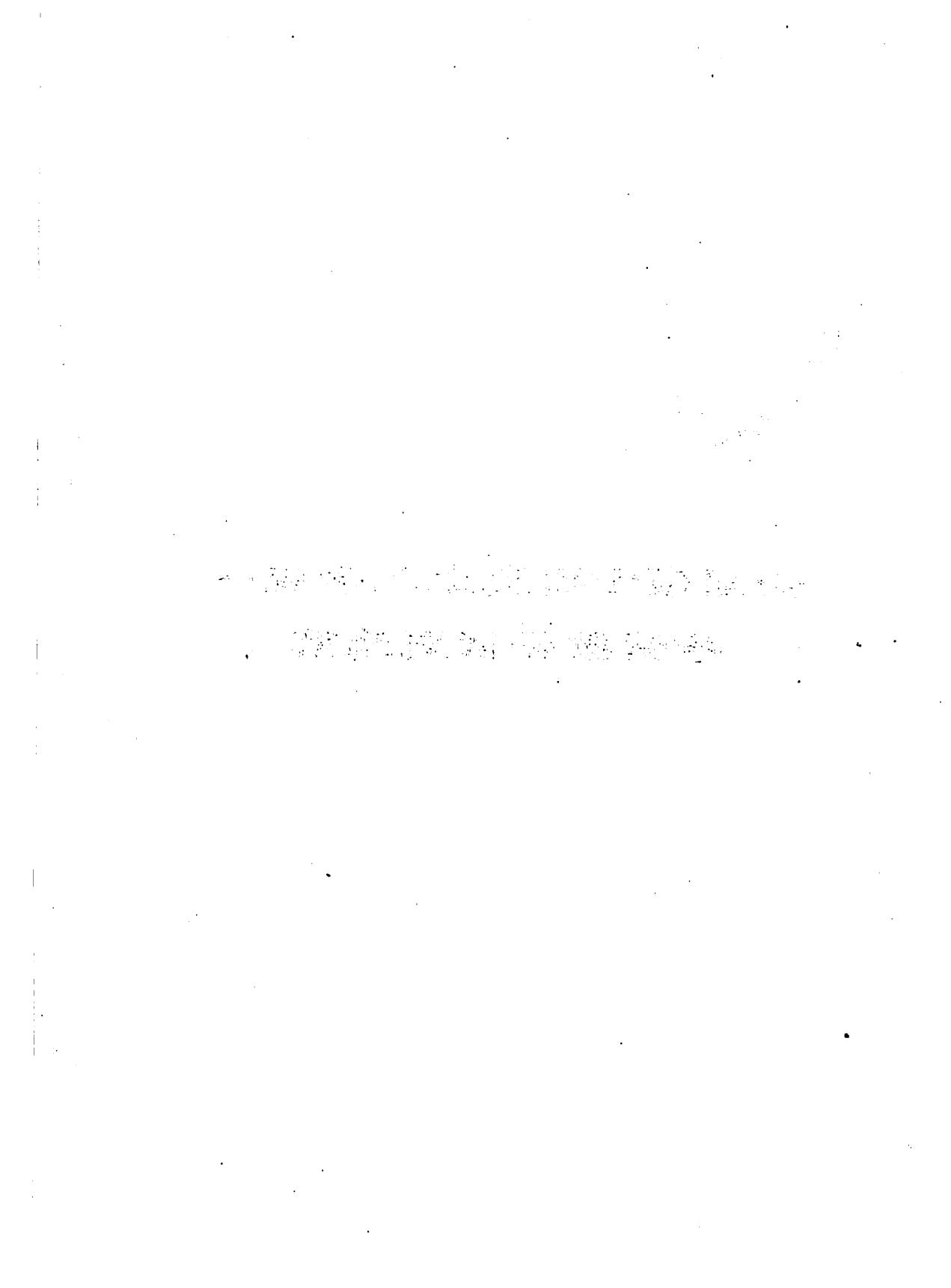
$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

故

$$f(x) = \frac{h}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nh}{n} \cos nx, x \in [0, h) \cup (h, \pi].$$



全国硕士研究生入学统一 考试数学试题选解



(五) 向量代数与空间解析几何

1. (1987. I, II) 与两直线 $\begin{cases} x=1, \\ y=-1+t, \text{ 及 } \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1} \\ z=2+t \end{cases}$ 都平行,

且过原点的平面方程为_____.

解 两已知直线的方向向量分别为 $s_1=(1,2,1)$ 和 $s_2=(0,1,1)$, 所求平面的法向量 n 与 s_1 和 s_2 均垂直, 故取 $n=s_1 \times s_2=(1,-1,1)$. 又平面过原点, 故平面方程为 $x-y+z=0$.

2. (1990. I, II) 过点 $M(1,2,-1)$ 且与直线 $\begin{cases} x=-t+2, \\ y=3t-4, \\ z=t-1 \end{cases}$ 垂直的平面方程

是_____.

解 已知直线的方向向量 $s=(-1,3,1)$, 所求平面的法向量 $n // s$, 故可取 $n=s$. 于是平面的点法式方程为 $-1(x-1)+3(y-2)+(z+1)=0$, 即 $x-3y-z+4=0$.

3. (1991. I, II) 已知两条直线的方程是

$$L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-1}, \quad L_2: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1},$$

则过 L_1 且平行于 L_2 的平面方程是_____.

解 两已知直线的方向向量分别是 $s_1=(1,0,-1)$ 和 $s_2=(2,1,1)$. 所求平面的法向量 n 与 s_1 和 s_2 都垂直, 故可取 $n=s_1 \times s_2=(1,-3,1)$. 又平面过 L_1 上的一点 $(1,2,3)$, 故所求平面的点法式方程为

$$(x-1)-3(y-2)+(z-3)=0, \text{ 即 } x-3y+z+2=0.$$

4. (1995. I, II) 设 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 2$, 则 $[(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})] \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{a}) =$ _____.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & [(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})] \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{a}) \\ & = (\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{a}) \\ & = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} \\ & = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} + (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 2(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 4. \end{aligned}$$

5. (1996. I, II) 设一平面经过原点及点 $(6, -3, 2)$, 且与平面 $4x - y +$

$2z = 8$ 垂直，则此平面方程为_____.

解 平面 $4x - y + 2z = 8$ 的法向量 n_1 为 $(4, -1, 2)$, 过原点和点 $(6, -3, 2)$ 的直线的方向向量 s 为 $(6, -3, 2)$. 按题设，所求平面的法向量 $n \perp n_1$ 且 $n \perp s$, 故可取 $n = n_1 \times s = (4, 4, -6)$. 于是得平面的方程为 $4x + 4y - 6z = 0$, 或 $2x + 2y - 3z = 0$.

6. (2006. I) 点 $(2, 1, 0)$ 到平面 $3x + 4y + 5z = 0$ 的距离 $d = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 由点到平面的距离公式,

$$d = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 0|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}} = \sqrt{2}.$$

7. (1993. I, II) 设有直线 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z+8}{1}$ 与 $L_2: \begin{cases} x-y=6, \\ 2y+z=3, \end{cases}$ 则 L_1 与 L_2 的夹角为()。

(A) $\frac{\pi}{6}$.

(B) $\frac{\pi}{4}$.

(C) $\frac{\pi}{3}$.

(D) $\frac{\pi}{2}$.

解 L_1 和 L_2 的方向向量分别为 $s_1 = (1, -2, 1)$ 和 $s_2 = (1, -1, 0) \times (0, 2, 1) = (-1, -1, 2)$, $\cos \theta = \frac{s_1 \cdot s_2}{|s_1||s_2|} = \frac{1}{2}$, 故 $\theta = \frac{\pi}{3}$. 应选(C).

8. (1995. I, II) 设有直线 $L: \begin{cases} x+3y+2z+1=0, \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$ 及平面 $\pi: 4x-2y+z-2=0$, 则直线 L ().

(A) 平行于 π .

(B) 在 π 上.

(C) 垂直于 π .

(D) 与 π 斜交.

解 直线 L 的方向向量 $s = (1, 3, 2) \times (2, -1, -10) = (-28, 14, -7) // (4, -2, 1)$, 而 $(4, -2, 1)$ 为平面 π 的法向量, 故直线 L 垂直于 π . 应选(C).

9. (1998. I) 设矩阵 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ 是满秩的, 则直线 $\frac{x-a_3}{a_1-a_2} = \frac{y-b_3}{b_1-b_2} = \frac{z-c_3}{c_1-c_2}$ 与直线 $\frac{x-a_1}{a_2-a_3} = \frac{y-b_1}{b_2-b_3} = \frac{z-c_1}{c_2-c_3}$ ().

(A) 相交于一点.

(B) 重合.

(C) 平行但不重合.

(D) 异面.

解 记点 M 为 (a_3, b_3, c_3) , 点 N 为 (a_1, b_1, c_1) . 两已知直线的方向向量分别为 $s_1 = (a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2)$, $s_2 = (a_2 - a_3, b_2 - b_3, c_2 - c_3)$. 由于

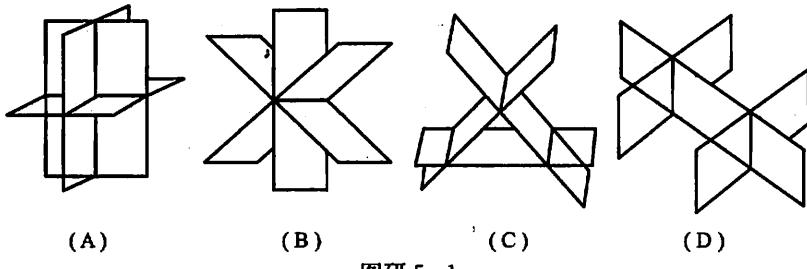
$$\begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_2 - a_3 & b_2 - b_3 & c_2 - c_3 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 & c_3 - c_1 \end{vmatrix} = 0,$$

故三向量 $s_1, s_2, \overrightarrow{MN}$ 共面. 又由于矩阵 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ 是满秩的, 故

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_2 - a_3 & b_2 - b_3 & c_2 - c_3 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 & c_3 - c_1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

因此 $\frac{a_1 - a_2}{a_2 - a_3} = \frac{b_1 - b_2}{b_2 - b_3} = \frac{c_1 - c_2}{c_2 - c_3}$ 不成立, 从而 s_1 与 s_2 不平行, 于是两直线必交于一点. 应选(A).

10. (2002. I) 设有三张不同平面的方程 $a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z = b_i, i = 1, 2, 3$, 它们所组成的线性方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩都为 2, 则这三张平面可能的位置关系为().



图研 5-1

解 由于线性方程组系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩, 且小于未知数的个数 3, 故线性方程组有无穷多个解, 因此三张平面不可能没有公共交点, 也不可能仅交于一点, 这样就排除了 C、D 和 A. 又由于系数矩阵的秩为 2, 故必有两张平面的法向量线性无关, 即不共线, 因此三平面必交于一线. 应选(B).

11. (1998. I) 求直线 $l: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$ 在平面 $\pi: x - y + 2z - 1 = 0$

上的投影直线 l_0 的方程, 并求 l_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程.

解法一 直线 l 的方向向量 $s = (1, 1, -1)$, 平面 π 的法向量 $n = (1, -1, 2)$. 设经过 l 且垂直于平面 π 的平面方程为 $\pi_1: A(x-1) + By + C(z-1) = 0$. 则由题设, π_1 的法向量 (A, B, C) 与 s 和 n 均垂直, 从而有

$$A + B - C = 0, A - B + 2C = 0,$$

由此解得 $A : B : C = (-1) : 3 : 2$. 于是得 π_1 的方程为 $x - 3y - 2z + 1 = 0$.

从而得 l_0 的方程为

$$\begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0, \\ x - 3y - 2z + 1 = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x = 2y, \\ z = -\frac{1}{2}(y - 1). \end{cases}$$

设 l_0 绕 y 轴旋转一周所得的旋转曲面为 S , (x, y, z) 为 S 上任意一点. 则该点由直线 l_0 上的一点 (x_0, y_0, z_0) 绕 y 轴旋转而得, 于是有关系: $y = y_0$,

$$x^2 + z^2 = x_0^2 + z_0^2 = (2y_0)^2 + \left[-\frac{1}{2}(y_0 - 1)\right]^2 = 4y^2 + \frac{1}{4}(y - 1)^2,$$

从而得 S 的方程为

$$4x^2 - 17y^2 + 4z^2 + 2y - 1 = 0.$$

解法二 将直线 l 的方程改写为一般方程: $\begin{cases} x - y - 1 = 0, \\ y + z - 1 = 0. \end{cases}$ 过 l 的平面束

方程为

$$(x - y - 1) + \lambda(y + z - 1) = 0,$$

即 $x + (\lambda - 1)y + \lambda z - (1 + \lambda) = 0.$

现确定 λ 的值, 使向量 $(1, \lambda - 1, \lambda)$ 与平面 π 的法向量 $n = (1, -1, 2)$ 垂直, 即令 $1 - (\lambda - 1) + 2\lambda = 0$, 解得 $\lambda = -2$. 从而得过 l 且垂直于 π 的平面方程为 $x - 3y - 2z + 1 = 0$. (下同解法一)

解法三 经过 l 且垂直于平面 π 的平面 π_1 的法向量 n_1 可取为 $(1, 1, -1) \times (1, -1, 2) = (1, -3, -2)$. 又 π_1 通过 l 上的点 $(1, 0, 1)$, 故 π_1 的方程为

$$(x - 1) - 3y - 2(z - 1) = 0, \text{ 即 } x - 3y - 2z + 1 = 0.$$

(下同解法一)

(六) 多元函数微分学

1. (1997. I) 二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 在点 $(0, 0)$ 处()。

- (A) 连续、偏导数存在。 (B) 连续、偏导数不存在。
 (C) 不连续、偏导数存在。 (D) 不连续、偏导数不存在。

解 $f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0$, 同理, $f_y(0, 0) = 0$, 故偏导数存在。又当 (x, y) 沿 $y = kx$ 趋向于 $(0, 0)$ 时

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ y=kx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{x^2 + (kx)^2} = \frac{k}{1+k^2}.$$

随着 k 的不同, 该极限值也不同, 所以极限 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ 不存在, $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 不连续。应选(C)。

2. (1991. I, II) 由方程 $xyz + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$ 所确定的函数 $z = z(x, y)$ 在点 $(1, 0, -1)$ 处的全微分 $dz = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解 在所给方程两端分别取全微分, 得

$$yz dx + xz dy + xy dz + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (xdx + ydy + zdz) = 0,$$

因此, 在点 $(1, 0, -1)$ 处 $dz = dx - \sqrt{2}dy$.

3. (1987. II) 设 $z = f(u, x, y)$, $u = xe^y$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = f_u \frac{\partial u}{\partial x} + f_x = f_u \cdot e^y + f_x$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (f_u \cdot e^y + f_x) = \left(f_{uu} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + f_{uy} \right) e^y + f_u \cdot e^y + f_{ux} \frac{\partial u}{\partial y} + f_{xy} \\ &= f_{uu} \cdot xe^{2y} + f_{uy} \cdot e^y + f_u \cdot e^y + f_{ux} \cdot xe^y + f_{xy}. \end{aligned}$$

4. (1995. I, II) 设 $u = f(x, y, z)$, $\varphi(x^2, e^y, z) = 0$, $y = \sin x$, 其中 f, φ 都具有一阶连续偏导数, 且 $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$, 求 $\frac{du}{dx}$.

解 $\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx}$. 易见 $\frac{dy}{dx} = \cos x$. 由

$$2x\varphi'_1 + e^y \cos x \cdot \varphi'_2 + \varphi'_3 \cdot \frac{dz}{dx} = 0,$$

得 $\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{\varphi'_3}(2x\varphi'_1 + e^y \cos x \cdot \varphi'_2)$,

故

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cos x - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{1}{\varphi'_3}(2x\varphi'_1 + e^{\sin x} \cos x \cdot \varphi'_2).$$

5. (1996. I, II) 设变换 $\begin{cases} u = x - 2y, \\ v = x + ay \end{cases}$ 可把方程

$$6 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

简化为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$, 求常数 a .

解法一 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial y} = -2 \frac{\partial z}{\partial u} + a \frac{\partial z}{\partial v},$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 4a \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + (a-2) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

将上述结果代入原方程, 经整理后得

$$(10+5a) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + (6+a-a^2) \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0.$$

依题意 a 应满足

$$6+a-a^2=0 \quad \text{且} \quad 10+5a \neq 0,$$

解之得 $a=3$.

解法二 将 z 视为以 x, y 为中间变量的 u, v 的二元复合函数, 由题设可解得

$$x = \frac{au+2v}{a+2}, \quad y = \frac{-u+v}{a+2}.$$

从而 $\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{a}{a+2}, \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{2}{a+2}, \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{1}{a+2}, \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{a+2},$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{a}{a+2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{a+2} \frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{a}{a+2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \right) - \frac{1}{a+2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial v} \right)$$

$$= \frac{2a}{(a+2)^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{a-2}{(a+2)^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{1}{(a+2)^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

依题意 $6 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, 即 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

代入前式, 得 $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{2a-6}{(a+2)^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{a-3}{(a+2)^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

令 $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$, 得 $a-3=0, a+2 \neq 0$, 故 $a=3$.

6. (1999. I) 设 $y=y(x), z=z(x)$ 是由方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数, 其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数, 求 $\frac{dz}{dx}$.

解 分别在 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 的两端对 x 求导或求偏导, 得

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = f + x \left(1 + \frac{dy}{dx}\right) f', \\ F_x + F_y \frac{dy}{dx} + F_z \frac{dz}{dx} = 0. \end{cases}$$

整理后得

$$\begin{cases} -xf' \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = f + xf', \\ F_y \frac{dy}{dx} + F_z \frac{dz}{dx} = -F_x. \end{cases}$$

由此解得

$$\frac{dz}{dx} = \frac{(f+xf')F_y - xf'F_x}{F_y + xf'F_z} (F_y + xf'F_z \neq 0).$$

7. (2000. I) 设 $z=f\left(xy, \frac{x}{y}\right)+g\left(\frac{y}{x}\right)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, g 具有二阶连续导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

$$\text{解 } \frac{\partial z}{\partial x} = yf'_1 + \frac{1}{y}f'_2 - \frac{y}{x^2}g',$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(yf'_1 + \frac{1}{y}f'_2 - \frac{y}{x^2}g' \right) \\ &= f'_1 + y \left(xf''_{11} - \frac{x}{y^2}f''_{12} \right) - \frac{1}{y^2}f'_2 + \frac{1}{y} \left(xf''_{21} - \frac{x}{y^2}f''_{22} \right) - \frac{1}{x^2}g' - \frac{y}{x^3}g'' \\ &= f'_1 - \frac{1}{y^2}f'_2 + xyf''_{11} - \frac{x}{y^3}f''_{22} - \frac{1}{x^2}g' - \frac{y}{x^3}g''. \end{aligned}$$

8. (2001. I) 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处可微, 且 $f(1,1)=1$, $\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,1)}=2$, $\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,1)}=3$, $\varphi(x)=f(x,f(x,x))$. 求 $\frac{d}{dx}\varphi^3(x)\Big|_{x=1}$.

$$\text{解 } \varphi(1) = f(1, f(1,1)) = f(1,1) = 1,$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\varphi^3(x) \Big|_{x=1} &= \left[3\varphi^2(x) \frac{d\varphi(x)}{dx} \right] \Big|_{x=1} = 3\varphi^2(x)[f'_1(x, f(x, x)) + \\ &\quad f'_2(x, f(x, x))(f'_1(x, x) + f'_2(x, x))] \Big|_{x=1} \\ &= 3 \cdot 1 \cdot [2 + 3(2 + 3)] = 51.\end{aligned}$$

9. (2005. I, II) 设函数 $u(x, y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} \psi(t) dt$, 其中

函数 φ 具有二阶导数, ψ 具有一阶导数, 则必有()。

(A) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(B) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(D) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(x+y) + \varphi'(x-y) + \psi(x+y) - \psi(x-y)$,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(x+y) - \varphi'(x-y) + \psi(x+y) + \psi(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''(x+y) + \varphi''(x-y) + \psi'(x+y) - \psi'(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \varphi''(x+y) - \varphi''(x-y) + \psi'(x+y) + \psi'(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \varphi''(x+y) + \varphi''(x-y) + \psi'(x+y) - \psi'(x-y).$$

由此可知

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

故应选(B)。

10. (2005. III, IV) 设 $f(u)$ 具有二阶连续导数, 且 $g(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right) + yf\left(\frac{x}{y}\right)$, 求 $x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

解 由已知条件可得

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} f'\left(\frac{y}{x}\right) + f'\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{2y}{x^3} f'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^4} f''\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{y} f''\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right) + f\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y} f'\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2} f''\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{x}{y^2} f'\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y^2} f'\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x^2}{y^3} f''\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2} f''\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{x^2}{y^3} f''\left(\frac{x}{y}\right),$$

所以

$$x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{2y}{x} f' \left(\frac{y}{x} \right) + \frac{y^2}{x^2} f'' \left(\frac{y}{x} \right) + \frac{x^2}{y} f'' \left(\frac{x}{y} \right) - \frac{y^2}{x^2} f'' \left(\frac{y}{x} \right) - \frac{x^2}{y} f'' \left(\frac{x}{y} \right)$$

$$= \frac{2y}{x} f' \left(\frac{y}{x} \right).$$

11. (1992. I, II) 在曲线 $x = t$, $y = -t^2$, $z = t^3$ 的所有切线中, 与平面 $x + 2y + z = 4$ 平行的切线().

- (A) 只有 1 条. (B) 只有 2 条.
 (C) 至少有 3 条. (D) 不存在.

解 曲线在对应于参数 t_0 的点处的切线的方向向量为 $\mathbf{T} = (1, -2t_0, 3t_0^2)$, 该切线与平面平行 $\Leftrightarrow \mathbf{T}$ 与该平面的法向量 $\mathbf{n} = (1, 2, 1)$ 垂直 $\Leftrightarrow \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = 0 \Leftrightarrow$

$$1 - 4t_0 + 3t_0^2 = 1 \Leftrightarrow t_0 = 1 \text{ 或 } t_0 = \frac{1}{3}, \text{ 故选(B).}$$

12. (2003. I) 曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $2x + 4y - z = 0$ 平行的切平面的方程是 .

解 曲面 $z = x^2 + y^2$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面方程为

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

利用 $z_0 = x_0^2 + y_0^2$, 得

$$2x_0x + 2y_0y - z - z_0 = 0.$$

由题设可知，

$$\frac{2x_0}{2} = \frac{2y_0}{4} = \frac{-1}{-1},$$

故 $x_0 = 1, y_0 = 2, z_0 = x_0^2 + y_0^2 = 5$, 所求切平面方程是 $2x + 4y - z = 5$.

13. (1988. II) 求椭球面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 上某点 M 处的切平面 π 的方程, 使 π 过已知直线 $L: \frac{x-6}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{2z-1}{-2}$.

解 设 $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 21$, 则

$$F_x = 2x, F_y = 4y, F_z = 6z.$$

椭球面在点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 处的切平面 π 的方程为

$$2x_0(x - x_0) + 4y_0(y - y_0) + 6z_0(z - z_0) = 0,$$

即

$$x_0x + 2y_0y + 3z_0z = 21.$$

因为平面 π 过直线 L ,故 L 上任意两点,比如 $A\left(6,3,\frac{1}{2}\right)$, $B\left(0,0,\frac{7}{2}\right)$ 应满足 π 的方程,代入有

$$6x_0 + 6y_0 + \frac{3}{2}z_0 = 21, \quad (1)$$

$$z_0 = 2. \quad (2)$$

又因为 (x_0, y_0, z_0) 在椭球面上, 有

$$x_0^2 + 2y_0^2 + 3z_0^2 = 21. \quad (3)$$

解(1), (2), (3), 得 $x_0 = 3, y_0 = 0, z_0 = 2$ 及 $x_0 = 1, y_0 = 2, z_0 = 2$.

故所求切平面方程为

$$x + 2z = 7 \quad \text{和} \quad x + 4y + 6z = 21.$$

14. (1997. I) 设直线 $l: \begin{cases} x + y + b = 0, \\ x + ay - z - 3 = 0 \end{cases}$ 在平面 Π 上, 而平面 Π 与曲面 $z = x^2 + y^2$ 相切于点 $(1, -2, 5)$, 求 a, b 之值.

解法一 曲面在点 $(1, -2, 5)$ 处的一个法向量 $n = (2, -4, -1)$, 故曲面的切平面即平面 Π 的方程为

$$2(x - 1) - 4(y + 2) - (z - 5) = 0,$$

即

$$2x - 4y - z - 5 = 0.$$

再由 $l: \begin{cases} x + y + b = 0, \\ x + ay - z - 3 = 0 \end{cases}$ 可得 $y = -(x + b), z = x - a(x + b) - 3$, 代入平面 Π 的方程, 得 $2x + 4(x + b) - x + a(x + b) + 3 - 5 = 0$,

因而有

$$5 + a = 0, 4b + ab - 2 = 0.$$

由此方程组解得

$$a = -5, b = -2.$$

解法二 过 l 的平面方程设为 $x + ay - z - 3 + \lambda(x + y + b) = 0$, 即

$$(1 + \lambda)x + (a + \lambda)y - z - 3 + \lambda b = 0.$$

曲面 $z = x^2 + y^2$ 在点 $(1, -2, 5)$ 处的一个法向量 $n = (2, -4, -1)$, 故由题设知

$$\frac{1 + \lambda}{2} = \frac{a + \lambda}{-4} = \frac{-1}{-1},$$

解得

$$\lambda = 1, a = -5.$$

又点 $(1, -2, 5)$ 在平面 Π 上, 故 $(1 + \lambda) - 2(a + \lambda) - 8 + \lambda b = 0$.

将 $\lambda = 1, a = -5$ 代入, 解得 $b = -2$. 因此 $a = -5, b = -2$.

15. (1993. I, II) 由曲线 $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 12, \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转面

在点 $(0, \sqrt{3}, \sqrt{2})$ 处的指向外侧的单位法向量为_____.

解 给定曲线绕 y 轴旋转一周得到的旋转面方程为 $3x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 12 = 0$, 此旋转面在点 $(0, \sqrt{3}, \sqrt{2})$ 处指向外侧的单位法向量为

$$\mathbf{e}_n = \frac{1}{|\mathbf{n}|} (6x, 4y, 6z) \Big|_{(0, \sqrt{3}, \sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{5}} (0, \sqrt{2}, \sqrt{3}).$$

16. (2000. I) 曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 在点 $(1, -2, 2)$ 的法线方程为_____.

解 令 $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 21$, 则在点 $(1, -2, 2)$ 处 $F_x = 2, F_y = -8, F_z = 12$. 故所求的法线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-2}{6}.$$

17. (1996. I, II) 函数 $u = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$ 在点 $A(1, 0, 1)$ 处沿点 A 指向点 $B(3, -2, 2)$ 方向的方向导数为_____.

解 方向 $l = \overrightarrow{AB} = (2, -2, 1)$, $\cos \alpha = \frac{2}{3}, \cos \beta = -\frac{2}{3}, \cos \gamma = \frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} \text{方向导数} \frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{(1,0,1)} &= \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right] \Big|_{(1,0,1)} \\ &= \left[\frac{1}{x + \sqrt{y^2 + z^2}} \cos \alpha + \frac{1}{x + \sqrt{y^2 + z^2}} \left(\frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}} \cos \beta + \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}} \cos \gamma \right) \right] \Big|_{(1,0,1)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \left(0 + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

18. (1991. I, II) 设 n 是曲面 $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$ 在点 $P(1, 1, 1)$ 处的指向外侧的法向量, 求函数 $u = \frac{\sqrt{6x^2 + 8y^2}}{z}$ 在点 P 处沿方向 n 的方向导数.

解 设 $F(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 6$, 则

$$F_x = 4x, F_y = 6y, F_z = 2z.$$

$$n = (4x, 6y, 2z)|_P = (4, 6, 2), e_n = \frac{1}{\sqrt{14}}(2, 3, 1).$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_P = \frac{6x}{z\sqrt{6x^2 + 8y^2}} \Big|_P = \frac{6}{\sqrt{14}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_P = \frac{8y}{z\sqrt{6x^2 + 8y^2}} \Big|_P = \frac{8}{\sqrt{14}}, \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_P = -\frac{\sqrt{6x^2 + 8y^2}}{z^2} \Big|_P = -\sqrt{14}.$$

从而

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_P &= \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos(\hat{n}, i) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\hat{n}, j) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(\hat{n}, k) \right] \Big|_P \\ &= \frac{6}{\sqrt{14}} \cdot \frac{2}{\sqrt{14}} + \frac{8}{\sqrt{14}} \cdot \frac{3}{\sqrt{14}} - \sqrt{14} \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} = \frac{11}{7}. \end{aligned}$$

19. (1998. I) 确定常数 λ , 使在右半平面 $x > 0$ 上的向量 $A(x, y) = 2xy(x^4 + y^2)^\lambda i - x^2(x^4 + y^2)^\lambda j$ 为某二元函数 $u(x, y)$ 的梯度, 并求 $u(x, y)$.

解 令 $P = 2xy(x^4 + y^2)^\lambda, Q = -x^2(x^4 + y^2)^\lambda$. $A(x, y)$ 在右半平面 $x > 0$ 上为某二元函数 $u(x, y)$ 的梯度的充要条件是 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 即

$$-2x(x^4+y^2)^\lambda - 4\lambda x^5(x^4+y^2)^{\lambda-1} = 2x(x^4+y^2)^\lambda + 4\lambda xy^2(x^4+y^2)^{\lambda-1},$$

或

$$4x(x^4+y^2)^\lambda(\lambda+1) = 0,$$

解得 $\lambda = -1$. 于是, 在右半平面内任取一点, 例如 $(1, 0)$ 作为积分路径的起点, 则得

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{2xy \, dx - x^2 \, dy}{x^4 + y^2} = \int_1^x \frac{2x \cdot 0}{x^4 + 0^2} \, dx - \int_0^y \frac{x^2}{x^4 + y^2} \, dy + C \\ &= -\arctan \frac{y}{x^2} + C. \end{aligned}$$

20. (2001. I) 设 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} r)|_{(1,-2,2)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 由梯度的定义

$$\operatorname{grad} r = \left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z} \right) = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right).$$

由散度的定义

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{grad} r) &= \operatorname{div}\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r}\right) \\ &= \frac{2}{r}. \end{aligned}$$

故 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} r)|_{(1,-2,2)} = \frac{2}{3}$.

21. (2005. I) 设有三元方程 $xy - z \ln y + e^x = 1$, 根据隐函数存在定理, 存在点 $(0, 1, 1)$ 的一个邻域, 在此邻域内该方程()。

- (A) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z = z(x, y)$.
- (B) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y = y(x, z)$ 和 $z = z(x, y)$.
- (C) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y, z)$ 和 $z = z(x, y)$.
- (D) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y, z)$ 和 $y = y(x, z)$.

解 令 $F(x, y, z) = xy - z \ln y + e^x - 1$, 则

$$F_x = y + ze^x, F_y = x - \frac{z}{y}, F_z = -\ln y + xe^x.$$

$$F_x(0, 1, 1) = 2 \neq 0, F_y(0, 1, 1) = -1 \neq 0, F_z(0, 1, 1) = 0.$$

由隐函数存在定理知(A)、(B)、(C)均不成立, 只有(D)成立.

22. (1994. II) 在椭圆 $x^2 + 4y^2 = 4$ 上求一点, 使其到直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 的距离最短.

解 设 $P(x, y)$ 为椭圆 $x^2 + 4y^2 = 4$ 上任意一点, 则 P 到直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 的距离为 $d = \frac{|2x + 3y - 6|}{\sqrt{13}}$. 求 d 的最小值点即求 d^2 的最小值点. 作

拉格朗日函数

$$L(x, y) = \frac{1}{13}(2x + 3y - 6)^2 + \lambda(x^2 + 4y^2 - 4),$$

令

$$\begin{cases} L_x = \frac{4}{13}(2x + 3y - 6) + 2\lambda x = 0, \\ L_y = \frac{6}{13}(2x + 3y - 6) + 8\lambda y = 0. \end{cases}$$

由此得 $y = \frac{3}{8}x$, 代入 $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$. 求得

$$x_1 = \frac{8}{5}, y_1 = \frac{3}{5}; x_2 = -\frac{8}{5}, y_2 = -\frac{3}{5}.$$

于是

$$d|_{(x_1, y_1)} = \frac{1}{\sqrt{13}}, d|_{(x_2, y_2)} = \frac{11}{\sqrt{13}}.$$

由问题的实际意义知最短距离存在, 因此 $(\frac{8}{5}, \frac{3}{5})$ 即为所求点.

23. (1995. V) 求二元函数 $z = f(x, y) = x^2y(4-x-y)$ 在由直线 $x+y=6$ 、 x 轴和 y 轴所围成的闭区域 D 上的极值, 最大值与最小值.

解 由方程组

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 2xy(4-x-y) - x^2y = 0, \\ f_y(x, y) = x^2(4-x-y) - x^2y = 0. \end{cases}$$

得 $x = 0 (0 \leq y \leq 6)$ 及点 $(4, 0), (2, 1)$.

点 $(4, 0)$ 及线段 $x=0 (0 \leq y \leq 6)$ 在 D 的边界上, 只有点 $(2, 1)$ 在 D 的内部(见图研 6-1), 是可能极值点.

$$f_{xx} = 8y - 6xy - 2y^2, f_{xy} = 8x - 3x^2 - 4xy, f_{yy} = -2x^2.$$

在点 $(2, 1)$ 处

$$A = f_{xx} \Big|_{\substack{x=2 \\ y=1}} = -6, B = f_{xy} \Big|_{\substack{x=2 \\ y=1}} = -4, C = f_{yy} \Big|_{\substack{x=2 \\ y=1}} = -8.$$

$AC - B^2 = 32 > 0$, 且 $A < 0$, 因此点 $(2, 1)$ 是 $z = f(x, y)$ 的极大值点, 极大值 $f(2, 1) = 4$.

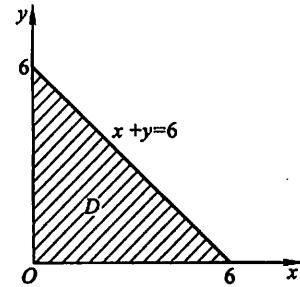
在 D 的边界 $x=0 (0 \leq y \leq 6)$ 及 $y=0 (0 \leq x \leq 6)$ 上 $f(x, y) = 0$. 在边界 $x+y=6$ 上, $y=6-x$, 代入 $f(x, y)$ 中得

$$z = 2x^3 - 12x^2 \quad (0 \leq x \leq 6).$$

由 $z' = 6x^2 - 24x = 0$ 得 $x = 0, x = 4$.

在边界 $x+y=6$ 上对应 $x=0, 4, 6$ 处的函数值分别为:

$$z|_{x=0} = 2x^3 - 12x^2|_{x=0} = 0,$$



图研 6-1

$$\begin{aligned} z|_{x=4} &= 2x^3 - 12x^2|_{x=4} = -64, \\ z|_{x=6} &= 2x^3 - 12x^2|_{x=6} = 0. \end{aligned}$$

因此, $z = f(x, y)$ 在边界上的最大值为 0, 最小值为 $f(4, 2) = -64$, 将边界上最大值和最小值与驻点 $(2, 1)$ 处的值比较得, $z = f(x, y)$ 在闭区域上的最大值为 $f(2, 1) = 4$; 最小值为 $f(4, 2) = -64$.

24. (2006. I) 设 $f(x, y)$ 与 $\varphi(x, y)$ 均为可微函数, 且 $\varphi'_y(x, y) \neq 0$. 已知 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 在约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是 () .

- (A) 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$.
- (B) 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$.
- (C) 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$.
- (D) 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

解 由拉格朗日乘数法, 得

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) + \lambda \varphi'_x(x_0, y_0) = 0, \\ f'_y(x_0, y_0) + \lambda \varphi'_y(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

消去 λ , 得

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{f'_y(x_0, y_0) \varphi'_x(x_0, y_0)}{\varphi'_y(x_0, y_0)}.$$

故当 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$ 时, 必有 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$, 应选(D).

25. (2004. I) 设 $z = z(x, y)$ 是由 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$ 确定的函数, 求 $z = z(x, y)$ 的极值点和极值.

解 在 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$ 两端分别对 x, y 求导, 得

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - 6y - 2y \frac{\partial z}{\partial x} - 2z \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -6x + 20y - 2z - 2y \frac{\partial z}{\partial y} - 2z \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \end{array} \right. \quad (2)$$

令 $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, 得

$$\begin{cases} x - 3y = 0, \\ -3x + 10y - z = 0. \end{cases}$$

解得 $x = 3y$, $z = y$. 代入 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$, 得

$$\begin{cases} x = 9, \\ y = 3, \text{ 或} \\ z = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -9, \\ y = -3, \\ z = -3. \end{cases}$$

在(1)两端对 x 求导, (2)两端分别对 x, y 求导, 得

$$2 - 2y \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - 2z \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0,$$

$$-6 - 2 \frac{\partial z}{\partial x} - 2y \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0,$$

$$20 - 2 \frac{\partial z}{\partial y} - 2 \frac{\partial z}{\partial y} - 2y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 - 2z \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

将 $x = 9, y = 3, z = 3$ 代入以上各式, 求得

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(9,3,3)} = \frac{1}{6}, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(9,3,3)} = -\frac{1}{2}, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(9,3,3)} = \frac{5}{3},$$

$$AC - B^2 = \frac{1}{36} > 0, \text{ 又 } A = \frac{1}{6} > 0, \text{ 从而点 } (9, 3) \text{ 是 } z(x, y) \text{ 的极小值点, 极小值为 } z(9, 3) = 3.$$

类似的, 可得

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(-9,-3,-3)} = -\frac{1}{6}, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(-9,-3,-3)} = \frac{1}{2},$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(-9,-3,-3)} = -\frac{5}{3},$$

$$AC - B^2 = \frac{1}{36} > 0,$$

又 $A = -\frac{1}{6} < 0$, 从而点 $(-9, -3)$ 是 $z(x, y)$ 的极大值点, 极大值为 $z(-9, -3) = -3$.

26. (2005. II) 已知函数 $z = f(x, y)$ 的全微分 $dz = 2xdx - 2ydy$, 并且 $f(1, 1) = 2$. 求 $f(x, y)$ 在椭圆域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$ 上的最大值和最小值.

解法一 由 $dz = 2xdx - 2ydy$ 可知

$$z = f(x, y) = x^2 - y^2 + C.$$

再由 $f(1, 1) = 2$, 得 $C = 2$, 故

$$z = f(x, y) = x^2 - y^2 + 2.$$

令 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = -2y = 0$, 求得驻点 $(0, 0)$.

在椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 上, $z = x^2 - (4 - 4x^2) + 2$, 即

$$z = 5x^2 - 2 \quad (-1 \leq x \leq 1),$$

其最大值为 $z|_{x=\pm 1} = 3$, 最小值为 $z|_{x=0} = -2$. 再与 $f(0, 0) = 2$ 比较, 可知 $f(x, y)$ 在椭圆域 D 上的最大值为 3, 最小值为 -2.

解法二 同解法一, 求得驻点 $(0, 0)$.

用拉格朗日乘数法求此函数在椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 上的极值.

设 $L = x^2 - y^2 + 2 + \lambda \left(x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 \right)$,

令

$$\begin{cases} L_x = 2x + 2\lambda x = 0, \\ L_y = -2y + \frac{\lambda}{2}y = 0. \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} L_x = 2x + 2\lambda x = 0, \\ L_y = -2y + \frac{\lambda}{2}y = 0. \end{cases} \quad (2)$$

又

$$x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0. \quad (3)$$

由(1)、(2)、(3)解得:

$$\lambda = -1, x = \pm 1, y = 0; \lambda = 4, x = 0, y = \pm 2.$$

即有 4 个可能的极值点 $(1, 0), (-1, 0), (0, 2), (0, -2)$.

又 $f(1, 0) = f(-1, 0) = 3, f(0, 2) = f(0, -2) = -2$, 再与 $f(0, 0) = 2$ 比较, 得 $f(x, y)$ 在 D 上的最大值为 3, 最小值为 -2.

27. (2006. I) 设函数 $f(u)$ 在 $(0, +\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ 满足等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

(I) 验证 $f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0$;

(II) 若 $f(1) = 0, f'(1) = 1$, 求函数 $f(u)$ 的表达式.

解 (I) 由 $z = f(u), u = \sqrt{x^2 + y^2}$, 得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f' \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f'' \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2} + f' \cdot \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f' \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f'' \cdot \frac{y^2}{x^2 + y^2} + f' \cdot \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

由已知条件, 得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f'' + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} f' = 0,$$

即

$$f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0. \quad (1)$$

(II) 方程(1)是可降阶的二阶微分方程, 令 $f'(u) = p$, 则得

$$\frac{dp}{du} + \frac{1}{u}p = 0,$$

解得

$$p = Ce^{-\int \frac{1}{u} du} = \frac{C}{u},$$

由已知条件 $p|_{u=1} = 1$, 得 $C = 1$, 故 $f'(u) = \frac{1}{u}$, 从而

$$f(u) = \ln u + C.$$

由 $f(1) = 0$, 得 $C = 0$, 因此 $f(u) = \ln u$.

(七) 多元函数积分学

1. (2001. I) 交换二次积分的积分次序: $\int_{-1}^0 dy \int_2^{1-y} f(x, y) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \int_{-1}^0 dy \int_2^{1-y} f(x, y) dx &= - \int_{-1}^0 dy \int_{1-y}^2 f(x, y) dx = - \iint_D f(x, y) dxdy \\ &= - \int_1^2 dx \int_{1-x}^0 f(x, y) dy = \int_1^2 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy, \end{aligned}$$

其中 $D = \{(x, y) \mid 1-y \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 0\}$
 $= \{(x, y) \mid 1-x \leq y \leq 0, 1 \leq x \leq 2\}.$

注 交换二次积分的积分次序时, 需先将二次积分化为二重积分(尽管解题时往往省略这一步), 而将二次积分化为二重积分时, 必须保证二次积分中的每个定积分的下限 \leq 上限. 本题中, 由于当 $-1 \leq y \leq 0$ 时, $1-y \leq 2$, 故需将 $\int_{-1}^0 dy \int_2^{1-y} f(x, y) dx$ 先写为 $-\int_{-1}^0 dy \int_{1-y}^2 f(x, y) dx$. 如果不注意这一点, 就会得到错误结果: $\int_1^2 dx \int_{1-x}^0 f(x, y) dy$.

2. (2006. I, II) 设 $f(x, y)$ 为连续函数, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho$ 等于 ().

- (A) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$. (B) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$.
 (C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$. (D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$.

$$\begin{aligned} \text{解 积分区域 } D &= \left\{ (\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \mid y \leq x \leq \sqrt{1-y^2}, 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}, \end{aligned}$$

故选(C).

3. (2006. I, II) 设区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$, 计算二重积分

$$I = \iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2} dxdy.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解法一} \quad I_1 &= \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy \xrightarrow{\text{极坐标}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{1}{1+\rho^2} \rho d\rho \\
 &= \frac{\pi}{2} \ln(1+\rho^2) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} \ln 2; \\
 I_2 &= \iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2} dx dy \xrightarrow{\text{极坐标}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{\rho^2 \cos \theta \sin \theta}{1+\rho^2} \rho d\rho \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^1 \frac{\rho^3}{1+\rho^2} d\rho = 0,
 \end{aligned}$$

所以 $I = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{2} \ln 2.$

解法二 I_1 同上.

由于积分区域 D 关于 x 轴对称, 函数 $\frac{xy}{1+x^2+y^2}$ 关于 y 是奇函数, 所以

$$I_2 = \iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2} dx dy = 0,$$

因此 $I = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{2} \ln 2.$

4. (2001. I) 计算二重积分 $\iint_D e^{\max(x^2, y^2)} dx dy$, 其中

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

解 设 $D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\},$

$$D_2 = \{(x, y) \mid x \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1\},$$

$$\begin{aligned}
 \text{则 } \iint_D e^{\max(x^2, y^2)} dx dy &= \iint_{D_1} e^{\max(x^2, y^2)} dx dy + \iint_{D_2} e^{\max(x^2, y^2)} dx dy \\
 &= \iint_{D_1} e^{x^2} dx dy + \iint_{D_2} e^{y^2} dx dy \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^x e^{x^2} dy + \int_0^1 dy \int_0^y e^{y^2} dx \\
 &= \int_0^1 x e^{x^2} dx + \int_0^1 y e^{y^2} dy = 2 \int_0^1 x e^{x^2} dx = e - 1.
 \end{aligned}$$

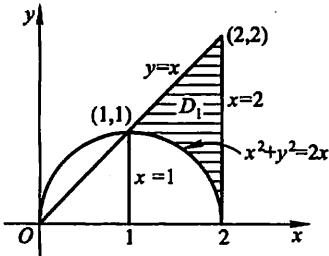
5. (2000. IV) 设 $f(x, y) = \begin{cases} x^2 y, & \text{若 } 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

求 $\iint_D f(x, y) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 2x\}.$

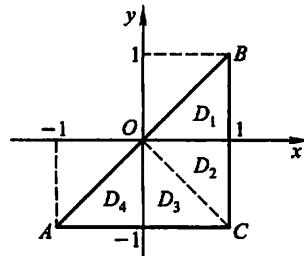
解 如图研 7-1, 记 $D_1 = \{(x, y) \mid \sqrt{2x-x^2} \leq y \leq x, 1 \leq x \leq 2\}$, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} x^2 y dx dy = \int_1^2 x^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^x y dy$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_1^2 x^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{\sqrt{2x-x^2}}^x dx \\
 &= \int_1^2 (x^4 - x^3) dx = \frac{49}{20}.
 \end{aligned}$$



图研 7-1



图研 7-2

6. (2001. III) 求二重积分 $\iint_D y [1 + xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}] dxdy$ 的值, 其中 D 是由直线 $y = x, y = -1$ 及 $x = 1$ 围成的平面区域.

解 原式 $= \iint_D y dxdy + \iint_D xy e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dxdy.$

如图研 7-2, 将 D 划分成 D_1, D_2, D_3, D_4 四块. 由于 $xye^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$ 关于 y 是奇函数, 而闭区域 $D_1 \cup D_2$ 关于 x 轴对称, 故 $\iint_{D_1 \cup D_2} xy e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dxdy = 0$;

类似可说明 $\iint_{D_3 \cup D_4} xy e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dxdy = 0$.

从而 $\iint_D xy e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dxdy = 0$.

又 $\iint_D y dxdy = \int_{-1}^1 y dy \int_{-1}^1 dx = \int_{-1}^1 y(1-y) dy = -\frac{2}{3}$,

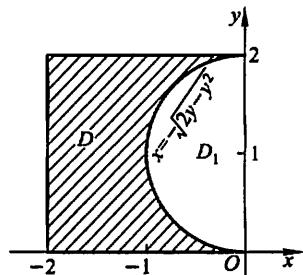
故 原式 $= -\frac{2}{3}$.

7. (1999. III, IV) 计算二重积分 $\iint_D y dxdy$, 其中 D 是由直线 $x = -2, y = 0, y = 2$ 以及曲线 $x = -\sqrt{2y - y^2}$ 所围成的平面区域.

解法一 设闭区域 D 和 D_1 如图研 7-3 所示, 则有

$$\iint_D y dxdy = \iint_{D \cup D_1} y dxdy - \iint_{D_1} y dxdy,$$

而 $\iint_{D \cup D_1} y dxdy = \int_{-2}^0 dx \int_0^2 y dy = 4$,



图研 7-3

$$\begin{aligned}
 \iint_D y \, dx \, dy &\stackrel{\text{极坐标}}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^{2\sin \theta} \rho \sin \theta \cdot \rho d\rho \\
 &= \frac{8}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^4 \theta d\theta \stackrel{t = \pi - \theta}{=} \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt \\
 &= \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2},
 \end{aligned}$$

故原式 $= 4 - \frac{\pi}{2}$.

解法二 $D = \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq -\sqrt{2y - y^2}, 0 \leq y \leq 2\}$.

$$\begin{aligned}
 \iint_D y \, dx \, dy &= \int_0^2 y \, dy \int_{-2}^{-\sqrt{2y-y^2}} dx \\
 &= \int_0^2 y(2 - \sqrt{2y - y^2}) \, dy \\
 &= 2 \int_0^2 y \, dy - \int_0^2 y \sqrt{2y - y^2} \, dy \\
 &= 4 - \int_0^2 y \sqrt{1 - (y - 1)^2} \, dy,
 \end{aligned}$$

令 $y - 1 = \sin t$, 则

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 y \sqrt{1 - (y - 1)^2} \, dy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin t) \cos^2 t dt \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{\pi}{2},
 \end{aligned}$$

于是原式 $= 4 - \frac{\pi}{2}$.

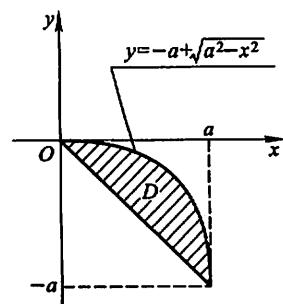
8. (2000. III) 计算二重积分 $\iint_D \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}} d\sigma$, 其中 D 是由曲线 $y = -a + \sqrt{a^2 - x^2}$ ($a > 0$) 和直线 $y = -x$ 围成的区域.

解 积分区域 D 在极坐标系中可表示为

$$D = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq -2a \sin \theta, -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq 0\}$$

(图研 7-4),

$$\begin{aligned}
 \text{故} \quad \text{原式} &= \iint_D \frac{\rho}{\sqrt{4a^2 - \rho^2}} \cdot \rho d\rho d\theta \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 d\theta \int_0^{-2a \sin \theta} \frac{\rho^2}{\sqrt{4a^2 - \rho^2}} d\rho,
 \end{aligned}$$



图研 7-4

令 $\rho = 2a \sin t$, 则

$$\begin{aligned} \int_0^{2a \sin \theta} \frac{\rho^2}{\sqrt{4a^2 - \rho^2}} d\rho &= \int_0^{-\theta} 4a^2 \sin^2 t dt = 2a^2 \int_0^{-\theta} (1 - \cos 2t) dt \\ &= 2a^2 \left(-\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right). \end{aligned}$$

于是

$$\text{原式} = 2a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \left(-\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) d\theta = a^2 \left(\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} \right).$$

9. (1995. I) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 并设 $\int_0^1 f(x) dx = A$, 求 $\int_0^1 dx \int_x^1 f(x) f(y) dy$.

解法一 交换积分次序可得

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_x^1 f(x) f(y) dy &= \int_0^1 dy \int_0^y f(x) f(y) dx \\ &= \int_0^1 dy \int_0^x f(y) f(x) dy. \end{aligned}$$

上式中的第二个等号是由于将积分变量 x, y 分别改记为 y, x , 不影响二次积分的值. 从而有

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 dx \int_x^1 f(x) f(y) dy &= \int_0^1 dx \int_0^x f(x) f(y) dy + \int_0^1 dx \int_x^1 f(x) f(y) dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 f(x) f(y) dy = \int_0^1 f(x) dx \cdot \int_0^1 f(y) dy = A^2, \end{aligned}$$

故

$$\int_0^1 dx \int_x^1 f(x) f(y) dy = \frac{1}{2} A^2.$$

解法二 记函数 $F(x) = \int_x^1 f(t) dt$, 则 $F(0) = A, F(1) = 0$, 且 $dF(x) = -f(x) dx$. 利用分部积分公式, 有

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_x^1 f(x) f(y) dy &= \int_0^1 \left[\int_x^1 f(y) dy \right] f(x) dx = - \int_0^1 F(x) dF(x) \\ &= - \left[\frac{F^2(x)}{2} \right]_0^1 = \frac{A^2}{2}. \end{aligned}$$

10. (1989. I, II) 设半径为 R 的球面 Σ 的球心在定球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$) 上, 问当 R 取何值时, 球面 Σ 在定球面内部的那部分的面积最大?

解 不妨设 z 轴通过球面 Σ 的中心, 则 Σ 的方程为

$$x^2 + y^2 + (z - a)^2 = R^2.$$

与定球面方程 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 联立, 消去 z , 可得两球面的交线在 xOy 面上的投影曲线为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{R^2}{4a^2}(4a^2 - R^2), \\ z = 0. \end{cases}$$

记投影曲线所围的平面区域为 D_{xy} . 球面 Σ 在定球面内部的那部分曲面的方程为

$$z = a - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$

该部分曲面的面积为

$$\begin{aligned} S(R) &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = \iint_{D_{xy}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{R}{2a}\sqrt{4a^2-R^2}} \frac{\rho R d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \\ &= 2\pi R^2 - \frac{\pi R^3}{a}. \end{aligned}$$

$$S'(R) = 4\pi R - \frac{3\pi R^2}{a}, S''(R) = 4\pi - \frac{6\pi R}{a}.$$

令 $S'(R) = 0$, 得驻点 $R_1 = 0$ (舍去), $R_2 = \frac{4}{3}a$,

$$S''\left(\frac{4}{3}a\right) = -4\pi < 0,$$

故当 $R = \frac{4}{3}a$ 时, 球面 Σ 在定球面内部的那部分的面积最大.

11. (2000. I) 设有一半径为 R 的球体, P_0 是此球的表面上的一个定点, 球体上任一点的密度与该点到 P_0 距离的平方成正比(比例常数 $k > 0$), 求球体的重心位置.

解 记球体为 Ω , 以 Ω 的球心为原点 O , 射线 OP_0 为正 z 轴建立直角坐标系, 则 P_0 的坐标是 $(0, 0, R)$, 球面方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. 设重心位置为 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, 则由对称性得 $\bar{x} = 0, \bar{y} = 0$,

$$\bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} z \cdot k[x^2 + y^2 + (z - R)^2] dv}{\iiint_{\Omega} k[x^2 + y^2 + (z - R)^2] dv}.$$

由对称性可知 $\iiint_{\Omega} z dv = 0$; $\iiint_{\Omega} z^3 dv = 0$; $\iiint_{\Omega} z(x^2 + y^2) dv = 0$;

$$\iiint_{\Omega} z^2 dv = \frac{1}{3} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv,$$

于是

$$\begin{aligned}\iiint_n [x^2 + y^2 + (z - R)^2] dv &= \iiint_n (x^2 + y^2 + z^2) dv + \iiint_n R^2 dv \\&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^R r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr + \frac{4}{3}\pi R^5 \\&= \frac{4}{5}\pi R^5 + \frac{4}{3}\pi R^5 = \frac{32}{15}\pi R^5;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iiint_n z[x^2 + y^2 + (z - R)^2] dv &= -2R \iiint_n z^2 dv \\&= -\frac{2R}{3} \iiint_n (x^2 + y^2 + z^2) dv = -\frac{8}{15}\pi R^6,\end{aligned}$$

故 $\bar{z} = \left(-\frac{8}{15}\pi R^6\right) / \left(\frac{32}{15}\pi R^5\right) = -\frac{R}{4}$,

因此球体 Ω 的重心位置为 $(0, 0, -\frac{R}{4})$.

12. (1998. I) 设 l 为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 其周长记为 a , 则 $\oint_l (2xy + 3x^2 + 4y^2) ds = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 因为 l 关于 y 轴对称, 且 $2xy$ 关于 x 是奇函数, 所以 $\oint_l 2xy ds = 0$. 又在 l 上, $3x^2 + 4y^2 = 12$, 所以

$$\text{原积分} = \oint_l 2xy ds + \oint_l (3x^2 + 4y^2) ds = 0 + \oint_l 12 ds = 12a.$$

13. (2006. II) 设 Σ 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($0 \leq z \leq 1$) 的下侧, 则 $\iint_{\Sigma} x dy dz + 2y dz dx + 3(z-1) dx dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 添加辅助曲面 $\Sigma' : \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\}$, 取上侧, 则由高斯公式得

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma+\Sigma'} x dy dz + 2y dz dx + 3(z-1) dx dy &= \iiint_n (1+2+3) dv = 6 \iiint_n dv \\&= 6 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot 1^2 \cdot 1 = 2\pi,\end{aligned}$$

而在 Σ' 上,

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma'} x dy dz + 2y dz dx + 3(z-1) dx dy &= \iint_{\Sigma'} 3(z-1) dx dy \\&= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} 3(1-1) dx dy = 0,\end{aligned}$$

于是

$$\text{原式} = 2\pi - 0 = 2\pi.$$

14. (1996. I, II) 已知 $\frac{(x+ay)dx + ydy}{(x+y)^2}$ 为某函数的全微分, 则 a 等于 () .

(A) -1.

(B) 0

(C) 1.

(D) 2.

解

$$P(x, y) = \frac{x+ay}{(x+y)^2}, Q(x, y) = \frac{y}{(x+y)^2},$$

由 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 即可解得 $a=2$. 应选(D).

15. (1995. I, II) 设曲线 $Q(x, y)$ 在 xOy 平面上具有一阶连续偏导数, 曲线积分 $\int_L 2xy dx + Q(x, y) dy$ 与路径无关, 并且对任意 t 恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy dx + Q(x, y) dy = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy dx + Q(x, y) dy,$$

求 $Q(x, y)$.

解 由曲线积分与路径无关的条件知

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x,$$

因此 $Q(x, y) = x^2 + \varphi(y)$, 其中 $\varphi(y)$ 为待定的可导函数, 采用从点 $(0, 0)$ 到点 $(t, 0)$ 再到点 $(t, 1)$ 的有向折线作为积分路径, 可得

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy dx + Q(x, y) dy = \int_0^1 [t^2 + \varphi(y)] dy = t^2 + \int_0^1 \varphi(y) dy;$$

采用从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, 0)$ 再到点 $(1, t)$ 的有向折线作为积分路径, 可得

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy dx + Q(x, y) dy = \int_0^t [1^2 + \varphi(y)] dy = t + \int_0^t \varphi(y) dy.$$

由题设知

$$t^2 + \int_0^1 \varphi(y) dy = t + \int_0^t \varphi(y) dy.$$

两边对 t 求导, 得

$$2t = 1 + \varphi(t), \quad \varphi(t) = 2t - 1.$$

从而 $\varphi(y) = 2y - 1$. 因此

$$Q(x, y) = x^2 + 2y - 1.$$

16. (2006. I) 设在上半平面 $D = \{(x, y) \mid y > 0\}$ 内, 函数 $f(x, y)$ 具有连续偏导数, 且对任意的 $t > 0$ 都有 $f(tx, ty) = t^{-2}f(x, y)$. 证明: 对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L , 都有 $\oint_L yf(x, y) dx - xf(x, y) dy = 0$.

证 在单连通域 D 内, 对任意有向简单闭曲线 L ,

$$\oint_L yf(x, y) dx - xf(x, y) dy = 0$$

的充分必要条件是, 对任意的 $(x, y) \in D$, 有

$$0 = \frac{\partial}{\partial y}[yf(x, y)] - \frac{\partial}{\partial x}[-xf(x, y)]$$

$$= 2f(x,y) + yf'_2(x,y) + xf'_1(x,y). \quad (*)$$

由于对任意的 $(x,y) \in D$ 及 $t > 0$, 都有

$$f(tx,ty) = t^{-2} f(x,y),$$

两边对 t 求导, 得

$$xf'_1(tx,ty) + yf'_2(tx,ty) = -2t^{-3} f(x,y).$$

在上式中令 $t=1$, 得

$$2f(x,y) + xf'_1(x,y) + yf'_2(x,y) = 0,$$

(*) 式成立. 所以结论成立.

17. (1991. I, II) 在过点 $O(0,0)$ 和 $A(\pi,0)$ 的曲线族 $y = a \sin x (a > 0)$ 中, 求一条曲线 L , 使沿该曲线 L 从 O 到 A 的积分 $\int_L (1+y^3)dx + (2x+y)dy$ 的值最小.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad I(a) &= \int_0^\pi [1 + a^3 \sin^3 x + (2x + a \sin x) \cdot a \cos x] dx \\ &= \pi - 4a + \frac{4}{3}a^3. \end{aligned}$$

令 $I'(a) = -4 + 4a^2 = 0$, 得 $a=1$ (舍去 $a=-1$), 且 $a=1$ 是 $I(a)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内的唯一驻点, 又 $I''(1)=8>0$, 因此 $I(a)$ 在 $a=1$ 处取得最小值. 从而所求曲线为 $y = \sin x (0 \leq x \leq \pi)$.

18. (2005. I) 设函数 $\varphi(y)$ 具有连续导数, 在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上, 曲线积分

$$\oint_L \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4}$$

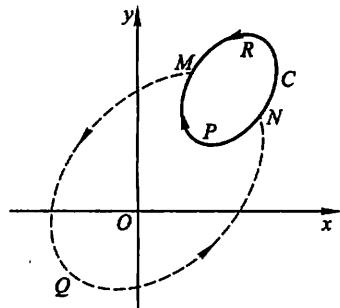
的值恒为同一常数.

(I) 证明: 对右半平面 $x > 0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 C , 有

$$\oint_C \frac{\varphi(y)dy + 2xydy}{2x^2 + y^4} = 0;$$

(II) 求函数 $\varphi(y)$ 的表达式.

(I) 证 如图研 7-5, 设 C 是半平面 $x > 0$ 内的任一分段光滑简单闭曲线, 在 C 上任意取定两点 M, N , 作围绕原点的闭曲线 \overbrace{MQNRM} , 同时得到另一围绕原点的闭曲线 \overbrace{MQNPM} . 根据题设, 有



图研 7-5

$$\oint_{\overbrace{MQNRM}} \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} - \oint_{\overbrace{MQNPM}} \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4}$$

$$(记作 \left(\oint_{\overbrace{MQNRM}} - \oint_{\overbrace{MQNPM}} \right) \varphi(y) dx + 2xy dy = 0)$$

根据第二类曲线积分的性质,再利用上式可得

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} &= \left(\int_{\overbrace{NRM}} + \int_{\overbrace{MPN}} \right) \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} \\ &= \left(\int_{\overbrace{NRM}} - \int_{\overbrace{NPM}} \right) \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} \\ &= \left[\left(\int_{\overbrace{MQN}} + \int_{\overbrace{NRM}} \right) - \left(\int_{\overbrace{MQN}} + \int_{\overbrace{NPM}} \right) \right] \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} \\ &= \left(\oint_{\overbrace{MQNRM}} - \oint_{\overbrace{MQNPM}} \right) \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} = 0. \end{aligned}$$

(II) 解 设 $P = \frac{\varphi(y)}{2x^2 + y^4}, Q = \frac{2xy}{2x^2 + y^4}$, P, Q 在单连通区域 $x > 0$ 内具有
一阶连续偏导数. 由(I)知, 曲线积分 $\int_L \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4}$ 在该区域内与路径无关, 故当 $x > 0$ 时, 恒有 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2y(2x^2 + y^4) - 4x \cdot 2xy}{(2x^2 + y^4)^2} = \frac{-4x^2y + 2y^5}{(2x^2 + y^4)^2},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\varphi'(y)(2x^2 + y^4) - 4\varphi(y)y^3}{(2x^2 + y^4)^2} = \frac{2x^2\varphi'(y) + \varphi'(y)y^4 - 4\varphi(y)y^3}{(2x^2 + y^4)^2},$$

比较上列两式的右端, 要使它们恒等, 需有

$$\varphi'(y) = -2y \quad \text{和} \quad \varphi'(y)y^4 - 4\varphi(y)y^3 = 2y^5.$$

由 $\varphi'(y) = -2y$ 得 $\varphi(y) = -y^2 + C$, 代入第二式得

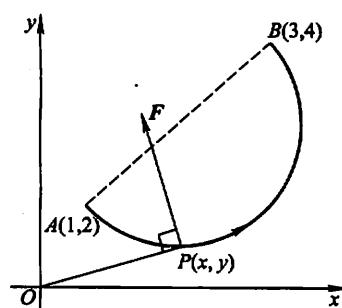
$$\varphi'(y)y^4 - 4\varphi(y)y^3 = -2y^5 + 4y^5 - 4Cy^3 = 2y^5,$$

因此 $C=0$, 从而得 $\varphi(y) = -y^2$.

19. (1990. I, II) 质点 P 沿着以 AB 为直径的半圆周, 从点 $A(1, 2)$ 运动到点 $B(3, 4)$ 的过程中受变力 F 的作用(图研 7-6), F 的大小等于点 P 与原点 O 之间的距离, 其方向垂直于线段 OP , 且与 y 轴正向的夹角小于 $\frac{\pi}{2}$. 求变力 F 对质点 P 所作的功.

$$\text{解 } \overrightarrow{OP} = xi + yj,$$

按题意, $|F| = |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.



图研 7-6

由于 \mathbf{F} 与 \overrightarrow{OP} 垂直且与 y 轴正向夹角小于 $\frac{\pi}{2}$, 故 \mathbf{F} 在 y 轴上的投影为正, 因此与 \mathbf{F} 同方向的单位向量为

$$\mathbf{e}_F = \frac{-yi + xj}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

于是

$$\mathbf{F} = |\mathbf{F}| \mathbf{e}_F = -yi + xj.$$

又圆弧 \widehat{AB} 的参数方程为 $x = 2 + \sqrt{2}\cos t, y = 3 + \sqrt{2}\sin t$ (t 从 $-\frac{3}{4}\pi$ 变到 $\frac{\pi}{4}$), 因此变力 \mathbf{F} 所作的功为

$$\begin{aligned} W &= \int_{\widehat{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\widehat{AB}} -ydx + xdy \\ &= \int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}} [(3 + \sqrt{2}\sin t)\sqrt{2}\sin t + (2 + \sqrt{2}\cos t)\sqrt{2}\cos t] dt \\ &= 3\sqrt{2} \int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}} \sin t dt + 2\sqrt{2} \int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}} \cos t dt + 2 \int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}} dt \\ &= 2(\pi - 1). \end{aligned}$$

注 也可以利用格林公式来计算 $\int_{\widehat{AB}} -ydx + xdy$. 为此添加有向线段 $BA : y = x + 1, x$ 从 3 变到 1. 由格林公式得

$$\oint_{\widehat{AB}+BA} -ydx + xdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 2 \iint_D dx dy = 2\pi;$$

而 $\int_{BA} -ydx + xdy = \int_3^1 [-(x+1) + x] dx = 2,$

因此 $W = \int_{\widehat{AB}} -ydx + xdy = 2\pi - 2 = 2(\pi - 1).$

20. (1992. I, II) 在变力 $\mathbf{F} = yzi + zxj + xyk$ 的作用下, 质点由原点沿直线运动到椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 上第一卦限的点 $M(\xi, \eta, \zeta)$, 问 ξ, η, ζ 取何值时, 力 \mathbf{F} 所作的功 W 最大? 并求 W 的最大值.

解 直线段 OM 的参数方程可取为

$$x = \xi t, y = \eta t, z = \zeta t, t$$
 从 0 变到 1.

\mathbf{F} 所作的功为

$$\begin{aligned} W &= \int_{OM} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{OM} yz dx + zx dy + xy dz \\ &= \int_0^1 3\xi\eta\zeta t^2 dt = \xi\eta\zeta. \end{aligned}$$

下面求 $W = \xi\eta\zeta$ 在条件 $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1 (\xi \geq 0, \eta \geq 0, \zeta \geq 0)$ 下的最大值.

$$\text{令 } L(\xi, \eta, \zeta) = \xi\zeta + \lambda \left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} - 1 \right),$$

由 $\frac{\partial L}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial L}{\partial \eta} = 0, \frac{\partial L}{\partial \zeta} = 0$ 得

$$\xi\zeta = -\frac{2\lambda}{a^2}\xi, \xi\zeta = -\frac{2\lambda}{b^2}\eta, \xi\zeta = -\frac{2\lambda}{c^2}\zeta.$$

若 $\lambda = 0$, 则由 $\xi\zeta = 0$ 得 $\eta = 0$ 或 $\zeta = 0$, 从而

$$W = \xi\zeta = 0 \quad (\text{显然不是 } W \text{ 的最大值, 舍去});$$

若 $\lambda \neq 0$, 则得

$$\frac{\xi^2}{a^2} = \frac{\eta^2}{b^2} = \frac{\zeta^2}{c^2} \left(= -\frac{\xi\zeta}{2\lambda} \right),$$

从而 $\frac{\xi^2}{a^2} = \frac{\eta^2}{b^2} = \frac{\zeta^2}{c^2} = \frac{1}{3}$. 于是得惟一可能极值点:

$$\xi = \frac{a}{\sqrt{3}}, \eta = \frac{b}{\sqrt{3}}, \zeta = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

由问题的实际意义知功的最大值为

$$W_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{9}abc.$$

21. (1999. I) 求 $I = \int_L (e^x \sin y - b(x+y)) dx + (e^x \cos y - ax) dy$, 其中 a, b 为正的常数, L 为从点 $A(2a, 0)$ 沿曲线 $y = \sqrt{2ax - x^2}$ 到点 $O(0, 0)$ 的弧.

解法一 添加从点 $O(0, 0)$ 沿 $y=0$ 到点 $A(2a, 0)$ 的有向线段 L_1 , 则由格林公式得

$$\begin{aligned} & \oint_{L+L_1} (e^x \sin y - b(x+y)) dx + (e^x \cos y - ax) dy \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (b-a) d\sigma = \frac{\pi}{2} a^2 (b-a), \end{aligned}$$

其中 D 为由 L 和 L_1 所围成的半径为 a 的半圆域.

$$\begin{aligned} \text{又 } & \int_{L_1} (e^x \sin y - b(x+y)) dx + (e^x \cos y - ax) dy \\ &= \int_0^{2a} (-bx) dx = -2a^2 b, \end{aligned}$$

$$\text{从而 } I = \frac{\pi}{2} a^2 (b-a) - (-2a^2 b) = \left(\frac{\pi}{2} + 2 \right) a^2 b - \frac{\pi}{2} a^3.$$

解法二 将 I 写成两个积分之差:

$$I = \int_L e^x \sin y dx + e^x \cos y dy - \int_L b(x+y) dx + ax dy,$$

前一积分与路径无关,故可将 L 改为有向线段 $AO:y=0,x$ 从 $2a$ 变到 0 , 得

$$\int_L e^x \sin y dx + e^x \cos y dy = \int_{2a}^0 e^x \cdot 0 dx = 0;$$

对后一积分,取 L 的参数方程: $x = a + a \cos t, b = a \sin t, t$ 从 0 变到 π , 得

$$\begin{aligned} I &= 0 - \int_0^\pi [b(a + a \cos t + a \sin t)(-a \sin t) + a(a + a \cos t)(a \cos t)] dt \\ &= \int_0^\pi (a^2 b \sin t + a^2 b \sin t \cos t + a^2 b \sin^2 t - a^3 \cos t - a^3 \cos^2 t) dt \\ &= \left(\frac{\pi}{2} + 2\right) a^2 b - \frac{\pi}{2} a^3. \end{aligned}$$

22. (2000. I) 计算曲线积分 $I = \oint_L \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2}$, 其中 L 是以点 $(1, 0)$ 为圆心, R 为半径的圆周 ($R > 1$), 取逆时针方向.

$$\text{解 } P = \frac{-y}{4x^2 + y^2}, Q = \frac{x}{4x^2 + y^2}.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - 4x^2}{(4x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}, (x, y) \neq (0, 0).$$

在 L 所围的圆域内作足够小的椭圆 $C: x = \frac{r}{2} \cos t, y = r \sin t (r > 0)$, t 从 0 变到 2π . 于是在由 L 和 C^- 所围成的区域 D 上应用格林公式, 得

$$\oint_{L+C^-} \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma = 0,$$

从而有

$$\begin{aligned} I &= \oint_L \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2} = \oint_C \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{r^2} dt = \pi. \end{aligned}$$

23. (2001. I) 计算 $I = \oint_L (y^2 - z^2) dx + (2z^2 - x^2) dy + (3x^2 - y^2) dz$, 其中 L 是平面 $x + y + z = 2$ 与柱面 $|x| + |y| = 1$ 的交线, 从 z 轴正向看去, L 为逆时针方向.

解 记 Σ 为平面 $x + y + z = 2$ 的上侧被 L 所围成的部分, 则 Σ 上各点处的法向量的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

Σ 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy} = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$.

由斯托克斯公式,

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{\Sigma} \left| \begin{array}{ccc} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{array} \right| dS \\
&= \iint_{\Sigma} \left| \begin{array}{ccc} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & 2z^2 - x^2 & 3x^2 - y^2 \end{array} \right| dS \\
&= -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (4x + 2y + 3z) dS \\
&= -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_{D_{xy}} (x - y + 6) \sqrt{3} dx dy \quad (\text{由对称性易知 } \iint_D (x - y) dx dy = 0) \\
&= -12 \iint_{D_{xy}} dx dy = -24.
\end{aligned}$$

24. (1999. I) 设 S 为椭球面 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1$ 的上半部分, 点 $P(x, y, z) \in S, II$

为 S 在点 P 处的切平面, $\rho(x, y, z)$ 为点 $O(0, 0, 0)$ 到平面 II 的距离, 求 $\iint_S \frac{z}{\rho(x, y, z)} dS$.

解 设 (X, Y, Z) 为切平面 II 上任意一点, 则 II 的方程为 $\frac{xX}{2} + \frac{yY}{2} + zZ = 1$, 原点 $O(0, 0, 0)$ 到 II 的距离 $\rho(x, y, z) = (\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2)^{-\frac{1}{2}}$.

由于 S 的方程为 $z = \sqrt{1 - (\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2})}$, 故

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{2\sqrt{1 - (\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2})}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{2\sqrt{1 - (\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2})}},$$

于是

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} d\sigma = \frac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{2\sqrt{1 - (\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2})}} d\sigma.$$

又 S 在 xOy 面上的投影区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$, 从而

$$\begin{aligned}
\iint_S \frac{z}{\rho(x, y, z)} dS &= \frac{1}{4} \iint_D (4 - x^2 - y^2) d\sigma \\
&= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (4 - \rho^2) \rho d\rho = \frac{3}{2}\pi.
\end{aligned}$$

25. (1987. I, II) 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} (8y+1)x dy dz + 2(1-y^2) dz dx - 4yz dx dy,$$

其中 Σ 是由曲线 $\begin{cases} z = \sqrt{y-1}, & (1 \leq y \leq 3) \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周所成的曲面, 它的法向量与 y 轴正向的夹角恒大于 $\frac{\pi}{2}$.

解 设 Σ_1 为平面 $y=3$ 的右侧被 $x^2 + z^2 = 2$ 所围成的部分(图研 7-7), Ω 为由 Σ 和 Σ_1 所围成的空间闭区域, 则由高斯公式得

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [(8y+1)x] + \frac{\partial}{\partial y} [2(1-y^2)] + \frac{\partial}{\partial z} (-4yz) \right\} dv \\ &\quad - \iint_{\Sigma_1} (8y+1)x dy dz + 2(1-y^2) dz dx - 4yz dx dy \\ &= \iiint_{\Omega} dv - \iint_{\Sigma_1} 2(1-y^2) dz dx \\ &= \int_1^3 \pi(y-1) dy - \iint_{x^2+z^2 \leq 2} 2(1-3^2) dz dx \\ &= 2\pi + 32\pi = 34\pi. \end{aligned}$$

26. (2000. I) 对于半空间 $x > 0$ 内任意的光滑有向封闭曲面 S , 都有

$$\iint_S xf(x) dy dz - xyf(x) dz dx - e^{2x} z dx dy = 0,$$

其中函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内具有连续的一阶导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$. 求 $f(x)$.

解 由题设和高斯公式得

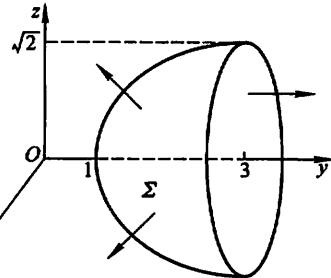
$$\begin{aligned} 0 &= \iint_S xf(x) dy dz - xyf(x) dz dx - e^{2x} z dx dy \\ &= \pm \iiint_{\Omega} [xf'(x) + f(x) - xf(x) - e^{2x}] dv, \end{aligned}$$

其中 Ω 为由 S 围成的有界闭区域, 当 S 取外侧时, 取“+”号, 当 S 取内侧时, 取“-”号. 由 S 的任意性及 $f(x)$ 、 $f'(x)$ 的连续性, 可知必有

$$xf'(x) + f(x) - xf(x) - e^{2x} = 0 \quad (x > 0),$$

即 $f'(x) + \left(\frac{1}{x} - 1\right)f(x) = \frac{1}{x}e^{2x} \quad (x > 0).$

按一阶线性非齐次微分方程通解公式(教材上册第七章第四节), 有



图研 7-7

$$f(x) = e^{\int(1-\frac{1}{x})dx} \left[\int \frac{1}{x} e^{2x} \cdot e^{\int(\frac{1}{x}-1)dx} dx + C \right]$$

$$= \frac{e^x}{x} \left[\int \frac{1}{x} e^{2x} \cdot xe^{-x} dx + C \right] = \frac{e^x}{x} (e^x + C).$$

由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x} + Ce^x}{x} = 1$, 故必有

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{2x} + Ce^x) = 0,$$

从而 $C = -1$. 于是

$$f(x) = \frac{e^x}{x} (e^x - 1).$$

(八) 无穷级数

1. (1988. I, II) 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 它在区间 $(-1, 1]$ 上的定义为

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x \leq 0, \\ x^3, & 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x = 1$ 处收敛于 _____.

解 $x = 1$ 是 $f(x)$ 的间断点, 故级数在该点处收敛于 $\frac{f(1^-) + f(1^+)}{2} = \frac{3}{2}$.

2. (1993. I, II) 设函数 $f(x) = \pi x + x^2$ ($-\pi < x < \pi$) 的傅里叶级数展开式为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

则其中系数 b_3 的值为 _____.

$$\text{解 } b_3 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin 3x dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi x + x^2) \sin 3x dx,$$

其中 $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin 3x dx = 0$, 故

$$\begin{aligned} b_3 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \pi x \sin 3x dx = 2 \int_0^{\pi} x \sin 3x dx \\ &= -\frac{2}{3} [x \cos 3x]_0^{\pi} + \frac{2}{3} \int_0^{\pi} \cos 3x dx = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

3. (1995. I, II) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n + (-3)^n} x^{2n-1}$ 的收敛半径 $R =$ _____.

解 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{|2^n + (-3)^n|}{|2^{n+1} + (-3)^{n+1}|} |x^2| = \frac{|x|^2}{3}$, 从

$\frac{|x|^2}{3} < 1$ 得 $|x| < \sqrt{3}$, 故 $R = \sqrt{3}$.

4. (1997. I) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 3, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为 _____.

解 由幂级数的性质知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n+1}$ 的收敛半

径相同,故幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为 $|x-1| < 3$, 即 $(-2, 4)$.

5. (1988. I, II) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x = -1$ 处收敛, 则此级数在 $x = 2$ 处() .

- (A) 条件收敛. (B) 绝对收敛.
(C) 发散. (D) 收敛性不能确定.

解 (1) 因为 $x = -1$ 是级数的收敛点, 由阿贝尔 (Abel) 定理知, 在 $|x-1| < |-1-1| = 2$ 内, 级数绝对收敛. 现 $x = 2$ 满足 $|x-1| < 2$, 故选(B).

6. (1989. I, II) 设 $f(x) = x^2, 0 \leq x < 1$, 而正弦级数

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x, \text{ 其中 } b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx (n = 1, 2, \dots).$$

则 $S\left(-\frac{1}{2}\right) = (\quad)$.

- (A) $-\frac{1}{2}$; (B) $-\frac{1}{4}$; (C) $\frac{1}{4}$; (D) $\frac{1}{2}$.

解 由 b_n 的表达式可推知, $S(x)$ 是 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上作奇延拓后所得函数的傅里叶级数的和函数. $x = -\frac{1}{2}$ 是奇延拓后所得函数的连续点, 故

$$S\left(-\frac{1}{2}\right) = -S\left(\frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}. \text{ 故选(B).}$$

7. (1990. I, II) 设 a 为常数, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(na)}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right] (\quad)$.

- (A) 绝对收敛. (B) 条件收敛.
(C) 发散. (D) 收敛性与 a 的取值有关.

解 因 $|\sin(na)| \leq 1$, 故由比较审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{n^2}$ 绝对收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散, 故所给级数发散. 选(C).

8. (1994. I, II) 设常数 $\lambda > 0$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2 + \lambda}}$ ().

- (A) 发散. (B) 条件收敛.
(C) 绝对收敛. (D) 收敛性与 λ 有关.

解 因 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \lambda}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + \frac{1}{n^2 + \lambda} \right)$ 收敛.

又 $\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2 + \lambda}} \leq \frac{1}{2} \left(a_n^2 + \frac{1}{n^2 + \lambda} \right)$, 由比较审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2 + \lambda}}$ 收敛, 故所给级数绝对收敛. 选(C).

9. (1996. I, II) 设 $a_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 常数 $\lambda \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(n \tan \frac{\lambda}{n} \right) a_{2n}$ ().

- (A) 绝对收敛. (B) 条件收敛.
(C) 发散. (D) 收敛性与 λ 有关.

解 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛于 S , 则正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 的部分和显然不超过 S , 故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 收敛. 又 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \tan \frac{\lambda}{n} a_{2n}}{a_{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan \frac{\lambda}{n}}{\frac{\lambda}{n}} \cdot \lambda = \lambda$, 由比较审敛法知

$\sum_{n=1}^{\infty} n \tan \frac{\lambda}{n} a_{2n}$ 收敛. 故选(A).

10. (2000. I) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则必收敛的级数为().

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n}$. (B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$.
(C) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$. (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$.

解 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=2}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}$ 也收敛, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$ 必收敛. 故选(D). 下面各举一例说明级数(A)(B)(C) 不必收敛. 如:

(A) 中取 $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n+1)}$ 发散(见下面的说明).

(B) 中取 $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

(C) 中取 $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n}) =$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \right)$ 发散.

(A) 中提及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n+1)}$ 发散是这样证明的: 注意到函数 $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$

在 $(1, +\infty)$ 单调减少, 有 $\frac{1}{n \ln n} > \frac{1}{x \ln x}, x \in (n, n+1)$.

因而有 $\frac{1}{n \ln n} = \int_n^{n+1} \frac{1}{n \ln n} dx > \int_n^{n+1} \frac{1}{x \ln x} dx$.

于是 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n+1)}$ 的部分和

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \ln(k+1)} > \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} > \sum_{k=1}^n \int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{x \ln x} dx \\ = \int_2^{n+2} \frac{1}{x \ln x} dx = [\ln \ln x]_2^{n+2} = \ln[\ln(n+2)] - \ln(\ln 2),$$

因部分和无界, 故级数发散.

11. (2002. I) 设 $u_n \neq 0 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{u_n} = 1$, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right) (\quad).$$

(A) 发散. (B) 绝对收敛.

(C) 条件收敛. (D) 收敛性根据所给条件不能判定.

解 应选(C).

首先可以用特例来排除(A)与(B), 依条件取 $u_n = n$, 则由莱布尼茨判别法

知 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{u_n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{u_{n+1}}$ 均收敛, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right)$ 收敛,

这就排除了(A); 又 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)}$ 发散, 这就排除了(B).

要证明(C)是正确的, 考察级数的前 n 项部分和

$$S_n = \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} \right) - \left(\frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} \right) + \left(\frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} \right) - \cdots + (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right) \\ = \frac{1}{u_1} + (-1)^{n+1} \frac{1}{u_{n+1}},$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{u_n} = 1$, 说明 $\frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{n} (n \rightarrow \infty)$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{u_{n+1}} = 0$,

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{u_1}$,

因此, 级数收敛且条件收敛.

12. (2003. I) 设 $x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx (-\pi \leq x \leq \pi)$, 则 $a_2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 a_2 是偶函数 x^2 的周期为 2π 的傅里叶级数中对应于 $\cos 2x$ 的系数, 故

$$a_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos 2x dx = \frac{1}{\pi} (x^2 \sin 2x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi 2x \sin 2x dx)$$

$$= \frac{1}{\pi} (x \cos 2x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos 2x dx) \\ = 1.$$

13. (2003. III) 设 $p_n = \frac{a_n + |a_n|}{2}$, $q_n = \frac{a_n - |a_n|}{2}$, $n = 1, 2, \dots$, 则下列命题中正确的是()。

- (A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 都收敛.
- (B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 都收敛.
- (C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 的敛散性都不定.
- (D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 的敛散性都不定.

解 应选(B). 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 有 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 都收敛, 同时排除了(D). 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 都发散, 因此排除了(A)与(C).

14. (2004. III) 设有以下命题:

- ① 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.
- ② 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+100}$ 收敛.
- ③ 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.
- ④ 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛.

则以上命题中正确的是()。

- (A) ① ②. (B) ② ③. (C) ③ ④. (D) ① ④.

解 应选(B). 因为 ① 与 ④ 中两个收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 取 $(1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots$ 时, 不难看出 ①、④ 的结论都是不成立的.

由于级数添加或去除有限项后, 不改变级数的收敛性, 故②是正确的.

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, 说明自某项起有 $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, 即 $u_{n+1} > u_n$, 从而 $u_n \not\rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$,

故 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, ③ 是正确的.

15. (2004. I) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数, 下列结论中正确的是() .

(A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(B) 若存在非零常数 λ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lambda$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

(C) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = 0$.

(D) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则存在非零常数 λ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lambda$.

解 应选(B), 这是极限形式的比较审敛法的一个常用结论.

取 $a_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 可排除(C); 取 $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, 可排除(D); 至于排除(A)的例子, 可取

$a_n = \frac{1}{n \ln n}$ ($n = 2, 3, \dots$), 由于

$$a_n = \frac{1}{n \ln n} > \int_n^{n+1} \frac{1}{x \ln x} dx,$$

故部分和

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n > a_1 + \int_2^3 \frac{1}{x \ln x} dx + \int_3^4 \frac{1}{x \ln x} dx + \cdots + \int_n^{n+1} \frac{1}{x \ln x} dx \\ &= a_1 + \int_2^{n+1} \frac{1}{x \ln x} dx, \end{aligned}$$

而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_2^{n+1} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \ln n |_2^{n+1} = +\infty,$$

说明部分和 s_n 无界, 因此级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 发散, 从而(A)是错误的.

16. (1994. I, II) 设 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 的某一邻域内具有二阶连续导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

证 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ 可推知 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. 由于 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 故有 $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 从而 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$. 于是 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某一邻域可用泰勒公式表为

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\theta x)}{2}x^2 = \frac{f''(\theta x)}{2}x^2 \quad (0 < \theta < 1).$$

又因 $f''(x)$ 在该邻域内连续, 故必在该邻域的某闭区间 $[-\delta, \delta]$ 上有界, 即当 $x \in [-\delta, \delta]$ 时, $|f''(x)| \leq M$, 于是 $|f(x)| \leq \frac{M}{2}x^2$. 当 n 充分大后, $x =$

$\frac{1}{n} \in [-\delta, \delta]$, 就有

$$\left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2} \frac{1}{n^2}.$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 有 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{2} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 由比较审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right|$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

17. (1989. I, II) 将函数 $f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x}$ 展为 x 的幂级数.

解 因 $f'(x) = (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, -1 < x < 1,$

故 $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$

又

$$f(0) = \arctan \frac{1+0}{1-0} = \frac{\pi}{4},$$

因此 $f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, -1 < x < 1.$

由于上式右端的幂级数在 $x = -1$ 处收敛, 且 $f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x}$ 在 $x = -1$ 处连续, 故

$$\arctan x = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, -1 \leq x < 1.$$

18. (1993. I, II) 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2 - n + 1)}{2^n}$ 的和.

解 所给级数是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - n + 1)x^n$ 中 x 取 $-\frac{1}{2}$ 的情形. 易见 $\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - n + 1)x^n$ 的收敛域为 $(-1, 1)$, 记和函数为 $S(x)$, 于是 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2 - n + 1)}{2^n} = S\left(-\frac{1}{2}\right)$. 下面求 $S(x)$.

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - n + 1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n + \frac{1}{1-x} \\ &= x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} + \frac{1}{1-x}. \end{aligned}$$

设 $\varphi(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$, 则

$$\int_0^x \varphi(x) dx = \sum_{n=2}^{\infty} nx^{n-1},$$

$$\int_0^x \left[\int_0^x \varphi(x) dx \right] dx = \sum_{n=2}^{\infty} x^n = \frac{x^2}{1-x}, -1 < x < 1.$$

于是

$$\varphi(x) = \left(\frac{x^2}{1-x} \right)' = \frac{2}{(1-x)^3},$$

从而

$$S(x) = x^2 \varphi(x) + \frac{1}{1-x} = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{1}{1-x}.$$

所以原级数的和为 $S\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{27} + \frac{2}{3} = \frac{22}{27}$.

19. (1995. I, II) 将 $f(x) = x - 1 (0 \leq x \leq 2)$ 展开成周期为 4 的余弦级数.

解 先将 $f(x)$ 在 $(-2, 0)$ 作偶延拓, 再以 4 为周期作周期延拓得 $F(x)$, 则 $F(x)$ 满足收敛定理的条件是处处连续, 在 $[0, 2]$ 上 $F(x) \equiv f(x)$.

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_0^2 (x-1) dx = 0,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2} \int_0^2 (x-1) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{2}{n\pi} \int_0^2 (x-1) d\left(\sin \frac{n\pi x}{2}\right) \\ &= -\frac{2}{n\pi} \int_0^2 \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{4}{(n\pi)^2} \left[\cos \frac{n\pi x}{2} \right]_0 \\ &= \frac{4}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} \frac{-8}{(2k-1)^2 \pi^2}, & n = 2k-1 \\ 0, & n = 2k \end{cases} (k = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

故

$$f(x) = -\frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2}, x \in [0, 2].$$

20. (1997. I) 设 $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right) (n = 1, 2, \dots)$. 证明:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在; (2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$ 收敛.

证 (1) 显然 $a_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$, 且

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right) \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{1}{a_n}} = 1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right) - a_n = \frac{1 - a_n^2}{2a_n} \leq 0.$$

故 a_n 是单调递减有下界的数列, 从而必有极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

(2) 由(1)知 $0 \leq \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}} \leq a_n - a_{n+1}$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$ 为正

项级数. 又若 S_n 是 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ 的部分和, 则

$$S_n = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1},$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在, 即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ 收敛. 由比较审敛法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$ 收敛.

21. (1999. I) 设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$, (1) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n + a_{n+2})$ 的和;

(2) 试证: 对任意常数 $\lambda > 0$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛.

$$\begin{aligned} (1) \text{解} \quad \text{由于 } a_n + a_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x (1 + \tan^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \sec^2 x dx \\ &= \frac{1}{n+1} [\tan^{n+1} x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

$$\text{故} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n + a_{n+2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right),$$

$$\text{于是} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n + a_{n+2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

(2) 证 因 $a_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$, 且 $a_n + a_{n+2} = \frac{1}{n+1}$, 有

$$\frac{a_n}{n^\lambda} < \frac{a_n + a_{n+2}}{n^\lambda} = \frac{1}{n^\lambda (n+1)} < \frac{1}{n^{1+\lambda}},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\lambda}}$ 收敛, 故由比较审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛.

22. (1998. I) 设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 发散, 试问

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n + 1} \right)^n$ 是否收敛? 并说明理由.

解 级数收敛.

由于 $a_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$ 并且单调减少, 故必有极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 且 $a \geq 0$. 若 $a = 0$, 则由莱布尼茨定理知 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛, 与条件矛盾, 故 $a > 0$.

因为 $a_n \geq a > 0$, 故

$$\left(\frac{1}{a_n + 1} \right)^n \leq \left(\frac{1}{a + 1} \right)^n.$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a + 1} \right)^n$ 收敛, 故由比较审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n + 1} \right)^n$ 收敛.

23. (2001, I) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{x} \arctan x, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ 试将 $f(x)$ 展开成 x

的幂级数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

解 因为

$$\begin{aligned} \arctan x &= \int_0^x (\arctan x)' dx = \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \right] dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, x \in [-1, 1], \end{aligned}$$

所以

$$\frac{\arctan x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n}, x \in [-1, 0) \cup (0, 1],$$

于是

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+2} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{2n+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \right] x^{2n} \\ &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} x^{2n}, x \in [-1, 0) \cup (0, 1]. \end{aligned}$$

由于当 $x=0$ 时上式右端取值为 1，而由题设， $f(0)=1$ ，故

$$f(x) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} x^{2n}, x \in [-1, 1].$$

令 $x=1$ ，得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} = \frac{1}{2}[f(1)-1] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$

24. (2003, III) 求幂级数 $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n} (|x|<1)$ 的和函数 $f(x)$ 及其极值.

解

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n} (|x|<1),$$

则 $f(0)=1$ ，且

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n-1} = -\frac{x}{1+x^2}.$$

上式两端从 0 到 x 积分，得

$$f(x) - f(0) = - \int_0^x \frac{x}{1+x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln(1+x^2),$$

即

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2).$$

令 $f'(x) = 0$, 得唯一驻点 $x=0$. 由于 $f''(x) = \frac{x^2 - 1}{(1+x^2)^2}$, $f''(0) < 0$, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 取得极大值 $f(0)=1$.

25. (2005. I) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[1 + \frac{1}{n(2n-1)} \right] x^{2n}$ 的收敛区间与和函数 $f(x)$.

解 令 $t = x^2$, 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[1 + \frac{1}{n(2n-1)} \right] t^n$ 的收敛半径

$$R' = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n(2n-1)}}{1 + \frac{1}{(n+1)(2n+1)}} = 1,$$

故原级数的收敛半径 $R = \sqrt{R'} = 1$, 从而收敛区间为 $(-1, 1)$.

容易得出 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n} = -\sum_{n=1}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{x^2}{1+x^2}, x \in (-1, 1)$.

记 $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n(2n-1)} x^{2n}$, 则 $\varphi(0) = 0$, 且

$$\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2}{2n-1} x^{2n-1}, \text{且 } \varphi'(0) = 0,$$

$$\varphi''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 2x^{2n-2} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{2}{1+x^2}, x \in (-1, 1).$$

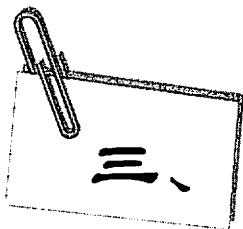
于是对 $x \in (-1, 1)$, 从 0 到 x 作积分得

$$\varphi'(x) = \int_0^x \varphi''(x) dx = 2 \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \arctan x,$$

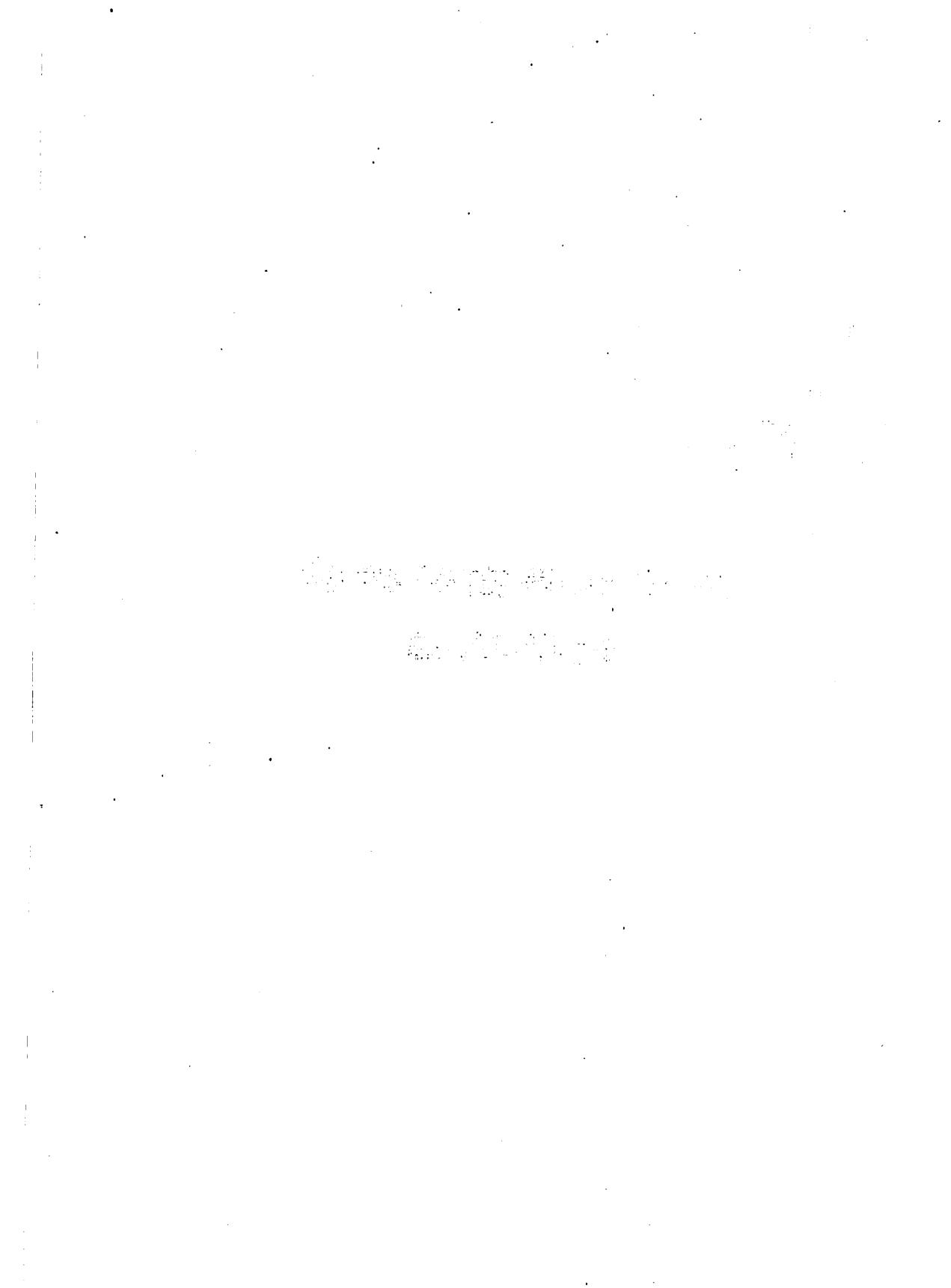
$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int_0^x \varphi'(x) dx = 2 \int_0^x \arctan x dx \\ &= 2 \left(x \arctan x - \int_0^x \frac{x}{1+x^2} dx \right) \\ &= 2x \arctan x - \ln(1+x^2). \end{aligned}$$

因此

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2} + 2x \arctan x - \ln(1+x^2), x \in (-1, 1).$$



同济大学高等数学
试卷选编



(一) 高等数学(下)期中考试试卷(I)

试 题

一、填空、选择题

1. 如果函数 $f(x, y)$ 满足如下条件中的 _____, 则该函数在点 (x_0, y_0) 处连续.

(A) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y_0) = f(x_0, y_0)$ 且 $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x_0, y) = f(x_0, y_0)$.

(B) $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处沿 l 方向有 $\frac{\partial f}{\partial l}$.

(C) $f(x, y)$ 有偏导数 $f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)$.

(D) $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微分.

2. 设函数 $f(x, y, z)$ 可微分且 $f_x(0, 0, 0) = 1, f_y(0, 0, 0) = 2, f_z(0, 0, 0) = 3$.

如果 $u = f(x, \sin x, \tan x)$, 则 $\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=0} = _____$.

3. 如果函数 $f(x, y) = x^y$ 在点 $(1, 1)$ 处沿某方向 l 取得最大增长率, 则 $l = _____$.

4. 设曲面 Σ 由曲线 $\begin{cases} 3x^2 - y^2 = 1, \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 x 轴旋转而成, 则 Σ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的单位法向量为 _____.

5. 曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3, \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ 在点 $(1, 1, -1)$ 处的切线的对称式方程是 _____.

6. 设 $f(x, y)$ 为连续函数, 若交换积分次序, 则 $\int_0^2 dx \int_{x^2-2x}^{\sqrt{2x}} f(x, y) dy = _____$.

二、设 $f(x-y, \ln x) = \left(1 - \frac{y}{x}\right) \frac{e^{x-y}}{x \ln x}$, 写出 $f(x, y)$ 的表达式并求 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial y}$.

三、设二元函数 f 有连续的偏导数, 又函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $x^2 + y^2 + z^2 = f(xy, z)$ 确定, 求全微分 dz .

四、设 $\begin{cases} x+y=u+v, \\ x\sin v=y\sin u, \end{cases}$ 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial v}{\partial x}$.

五、在八分之一球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 5r^2$ ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$) 上求一点, 使得函数 $f(x, y, z) = xyz^3$ 达到最大, 并写出该最大值.

六、设 $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & |y| > |x|, \\ xy, & \text{其他}, \end{cases}$ 计算二重积分 $I = \iint_D f(x, y) d\sigma$,

其中 $D: x^2 + y^2 \leq 1$.

七、设 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 与球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az$ 的交集, 它的密度为 $\mu(x, y, z) = z$ (单位省略). 求 Ω 的质量 M .

八、设曲线 Γ 的方程为 $x = t, y = -t^2, z = t^3$.

(1) 写出 Γ 的所有与平面 $3y + 2z = 6$ 平行的切线方程;

(2) 这些切线之间的距离是多少?

参考答案

一、1. 由于可微必连续. 故选(D).

2. $\frac{du}{dx} \Big|_{x=0} = [f_x(x, \sin x, \tan x) + \cos x f_y(x, \sin x, \tan x) + \sec^2 x f_z(x, \sin x, \tan x)]_{x=0} = 6$.

3. $\mathbf{l} = \mathbf{grad} f(1, 1) = (f_x(1, 1), f_y(1, 1)) = (1, 0)$.

4. 曲面 Σ 的方程为 $3x^2 - y^2 - z^2 = 1$, 因此所求法向量为 $\pm(6x, -2y, -2z) \Big|_{(1, 1, 1)} = \pm(6, -2, -2)$, 其单位法向量为 $\pm\left(\frac{3}{\sqrt{11}}, -\frac{1}{\sqrt{11}}, -\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$.

5. 对 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3, \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ 两端求微分, 并代入点的坐标, 得

$$\begin{cases} dx + dy - dz = 0, \\ dx + dy + dz = 0, \end{cases}$$

故 $dx:dy:dz = 1:-1:0$, 因此切线的方向向量为 $(1, -1, 0)$, 所求切线的对称式方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{0}.$$

$$6. \int_0^2 dx \int_{x^2-2x}^{\sqrt{2x}} f(x, y) dy = \int_{-1}^0 dy \int_{1-\sqrt{y-1}}^{1+\sqrt{y-1}} f(x, y) dx + \int_0^2 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^2 f(x, y) dx.$$

二、记 $x-y=u, \ln x=v$, 则 $x=e^v, y=e^v-u$, 代入右端, 得

$$f(u, v) = \frac{u}{v} e^{u-2v},$$

即

$$f(x, y) = \frac{x}{y} e^{x-2y}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1+x}{y} e^{x-2y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x(1+2y)}{y^2} e^{x-2y}.$$

三、对 $x^2 + y^2 + z^2 = f(xy, z)$ 两端求微分, 得

$$2xdx + 2ydy + 2zdz = f'_1(ydx + xdy) + f'_2 dz,$$

即得

$$dz = \frac{(yf'_1 - 2x)dx + (xf'_1 - 2y)dy}{2z - f'_2} \quad (2z - f'_2 \neq 0).$$

四、方程两端对 x 求偏导, 得

$$\begin{cases} 1 = u_x + v_x, \\ \sin v + x(\cos v)v_x = y(\cos u)u_x, \end{cases}$$

解得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x \cos v + \sin v}{x \cos v + y \cos u}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{y \cos u - \sin v}{x \cos v + y \cos u}.$$

五、设 $F(x, y, z) = xyz^3 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 5r^2)$, 令

$$F_x = yz^3 + 2\lambda x = 0,$$

$$F_y = xz^3 + 2\lambda y = 0,$$

$$F_z = 3xyz^2 + 2\lambda z = 0,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 5r^2,$$

解得 $x = y = r, z = \sqrt{3}r$. 即在 $(r, r, \sqrt{3}r)$ 点处, 函数达到最大, 其最大值为

$$\max f = f(r, r, \sqrt{3}r) = 3\sqrt{3}r^5.$$

六、两直线 $|y| = |x|$ 将 D 划分为有 y 轴穿过的上下四分之一圆盘记为 D_1 与 D_2 , 有 x 轴穿过的左右四分之一圆盘记为 D_3 与 D_4 , 则

$$I = \iint_{D_1+D_2} (x^2 + y^2) d\sigma + \iint_{D_3+D_4} xy d\sigma.$$

由对称性, $\iint_{D_3+D_4} xy d\sigma = 0$, 故

$$I = \iint_{D_1+D_2} (x^2 + y^2) d\sigma = 2 \iint_{D_1} (x^2 + y^2) d\sigma = 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{4}.$$

七、 Ω 在 xOy 面上的投影区域为 $D: x^2 + y^2 \leqslant \frac{3}{4}a^2$. 因此

$$\begin{aligned}
M &= \iiint_D z \, dV = \iint_D dx dy \int_{a-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} z \, dz \\
&= \frac{1}{2} \iint_D [2a\sqrt{a^2-x^2-y^2} - a^2] \, dx dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}a} [2a\sqrt{a^2-\rho^2} - a^2] \rho \, d\rho = \frac{5}{24}\pi a^4.
\end{aligned}$$

八、(1) $\tau = (1, -2t, 3t^2)$, $n = (0, 3, 2)$.

令 $\tau \cdot n = 0$, 得 $t_1 = 0, t_2 = 1$, 即

$$\tau_1 = (1, 0, 0), \tau_2 = (1, -2, 3).$$

所求切线方程为

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0} \text{ 与 } \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{3}.$$

(2) 取 $M_1(0, 0, 0), M_2 = (1, -1, 1)$, $\overrightarrow{M_1 M_2} = (1, -1, 1)$. 所求距离为

$$d = \frac{|(\tau_1 \times \tau_2) \cdot \overrightarrow{M_2 M_1}|}{|\tau_1 \times \tau_2|} = \frac{1}{\sqrt{13}}.$$

(二) 高等数学(下)期中考试试卷(II)

试 题

一、填空、选择题

1. 函数 $z = \ln(1 + x^2 + y^2)$ 在点 $(1, 2)$ 处的全微分是 _____.

2. 曲面 $\frac{x^2 + y^2}{2} - z^2 = 1$ 在点 $M(1, 1, 0)$ 处的切平面方程是 _____.

3. 设 $f(x, y) = e^{xy} + x \ln y$, 则 $\text{grad } f(1, 2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 设 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则由积分中值定理, 在 D 上至少存在一点 (ξ, η) , 使 _____.

5. 将二次积分 $I = \int_0^1 dy \int_{y-1}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$ 交换积分次序, 得 $I = \underline{\hspace{2cm}}$.

6. 设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$, 则 $\iint_D \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}\right) dx dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 在点 $(0, 0)$ 处 ().

(A) 连续、偏导数存在. (B) 连续、偏导数不存在.

(C) 不连续、偏导数存在. (D) 不连续、偏导数不存在.

8. 根据判定极值的充分条件, 函数 $f(x, y) = 2x^2 - xy + 3y^2 + 5$ 在点 $(0, 0)$ 处 ().

(A) 取得极大值. (B) 取得极小值.

(C) 不取得极值. (D) 不能判定是否取得极值.

9. 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx$, 则 $F'(2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(A) $f(2)$. (B) $2f(2)$. (C) $-f(2)$. (D) 0.

二、设 $z = x^3 f\left(xy, \frac{y}{x}\right)$, f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

三、设有螺旋线 $x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = \frac{4}{\pi}t$.

(1) 求出螺旋线上点 $M(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$ 处的指向朝下的单位切向量 e_r ;

(2) 求出螺旋线上点 M 处的切线方程;

(3) 求函数 $u = x + 2y + 3z$ 在点 M 处沿方向 e_r 的方向导数.

四、设闭曲面 Σ 的方程为 $F(x, y, z) = 0$, 其中 $F(x, y, z)$ 具有一阶连续偏导数且三个偏导数不同时为零. 点 $P(x_1, y_1, z_1)$ 为 Σ 外一点. 若点 $Q(x_2, y_2, z_2)$ 为 Σ 上离开点 P 最近的一点, 试用拉格朗日乘子法证明: 直线 PQ 为曲面 Σ 在点 Q 处的法线.

五、计算二重积分 $\iint_D (x^2 y^3 + e^x) dx dy$, 其中 D 为由直线 $y = x, y = -x$ 和 $x = 1$ 所围成的闭区域.

六、计算三重积分 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$, 其中 Ω 为由锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$ 和平面 $z = 1$ 所围成的闭区域.

七、求过点 $M(-1, 0, 4)$ 且平行于平面 $3x - 4y + z - 10 = 0$, 又与直线 $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$ 相交的直线的方程.

参考答案

一、1. $dz|_{(1,2)} = \left[\frac{2x}{1+x^2+y^2} dx + \frac{2y}{1+x^2+y^2} dy \right]_{(1,2)} = \frac{1}{3}dx + \frac{2}{3}dy.$

2. 法向量为 $(x, y, -2z)|_{(1,1,0)} = (1, 1, 0)$, 因此所求切平面方程为
$$x + y - 2 = 0.$$

3. $\text{grad } f(1,2) = (f_x(1,2), f_y(1,2)) = \left(2e^2 + \ln 2, e^2 + \frac{1}{2}\right).$

4. $\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta)\sigma$, 其中 σ 为区域 D 的面积.

5. $I = \int_{-1}^0 dx \int_0^{x+1} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$

6. 因为 $\iint_D x^2 dx dy = \iint_D y^2 dx dy$, 所以

$$\iint_D \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}\right) dx dy = \frac{5}{12} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \frac{5}{12} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{5}{24} \pi R^4.$$

7. 因为 $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=kx}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{k}{1+k^2}$, 所以 $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0)}} f(x, y)$ 不存在. 又

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0,$$

$$f_y(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = 0,$$

故选(C).

8. 因为

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= f_y(0,0) = 0, \\ f_{xx}(0,0) &= 4, f_{xy}(0,0) = -1, f_{yy}(0,0) = 6, \\ f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) - f_{xy}^2(0,0) &= 25 > 0, \end{aligned}$$

故选(B).

9. 当 $t > 1$ 时,

$$F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx = \int_1^t dx \int_1^x f(x) dy = \int_1^t (x-1) f(x) dx,$$

因此 $F'(2) = (t-1)f(t)|_{t=2} = f(2)$. 故选(A).

$$\text{二、} \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 (xf'_1 + \frac{1}{x}f'_2).$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^4 \left(xf''_{11} + \frac{1}{x} f''_{12} \right) + x^2 \left(xf''_{21} + \frac{1}{x} f''_{22} \right) = x^5 f''_{11} + 2x^3 f''_{12} + xf''_{22}.$$

三、(1) 曲线在其上任意点处的切向量为 $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = (-2\sin t, 2\cos t,$

$\frac{4}{\pi})$, 因此曲线在 M 点指向朝下的切向量为

$$\tau = - \left(-2\sin t, 2\cos t, \frac{4}{\pi} \right) \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\frac{4}{\pi} \right),$$

其单位向量为 $e_\tau = \frac{\pi}{2\sqrt{\pi^2+4}} (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\frac{4}{\pi})$.

(2) 螺旋线上点 M 处的切线方程为

$$\frac{x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{y-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = \frac{z-1}{-\frac{4}{\pi}}.$$

(3) $\nabla u|_M = (1, 2, 3)$,

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}|_M = \nabla u \cdot e_\tau = -\frac{\pi}{2\sqrt{\pi^2+4}} \left(\sqrt{2} + \frac{12}{\pi} \right).$$

四、任意一点 (x, y, z) 到 P 的距离平方为 $(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2$, 因此 Σ 上离开点 P 最近的一点, 相当于 $(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2$ 在条件 $F(x, y, z) = 0$ 下的条件极小值, 为此令

$$L = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 + \lambda F(x, y, z),$$

该函数的驻点满足

$$\begin{cases} 2(x-x_1)+\lambda F_x=0, \\ 2(y-y_1)+\lambda F_y=0, \\ 2(z-z_1)+\lambda F_z=0, \\ F(x,y,z)=0. \end{cases}$$

由条件知 $Q(x_2, y_2, z_2)$ 必是该方程组的解, 代入 $x=x_2, y=y_2, z=z_2$ 后消去 λ , 得

$$\frac{x_2-x_1}{F_x(x_2, y_2, z_2)} = \frac{y_2-y_1}{F_y(x_2, y_2, z_2)} = \frac{z_2-z_1}{F_z(x_2, y_2, z_2)},$$

即

$$\overrightarrow{PQ}/\|n = (F_x, F_y, F_z)|_Q$$

因此, 直线 PQ 是曲面的法线.

五、由于函数 $x^2 y^3$ 是 y 的奇函数, 积分区域关于 x 轴对称, 因此

$$\iint_D x^2 y^3 d\sigma = 0,$$

故

$$\iint_D (x^2 y^3 + e^{x^2}) dx dy = \int_0^1 dx \int_{-x}^x e^{x^2} dy = 2 \int_0^1 x e^{x^2} dx = e - 1.$$

$$\begin{aligned} \text{六、} I &= \int_0^1 dz \iint_{z^2 \leq x^2+y^2 \leq 4z^2} (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_z^{2z} \rho^3 d\rho = \frac{15}{2}\pi \int_0^1 z^4 dz = \frac{3}{2}\pi. \end{aligned}$$

七、解法一 过点 M 且平行已知平面的平面方程为

$$3(x+1) - 4y + z - 4 = 0;$$

取已知直线上一点 $N(-1, 3, 0)$, 则

$$\overrightarrow{MN} = (0, 3, -4), n_2 = \overrightarrow{MN} \times s = (10, -4, -3),$$

因此, 过 M 与已知直线的平面方程为

$$10(x+1) - 4y - 3(z-4) = 0.$$

故, 所求直线的方程为

$$\begin{cases} 3x - 4y + z - 1 = 0, \\ 10x - 4y - 3z + 22 = 0. \end{cases}$$

解法二 取已知直线上一点 $N(t-1, t+3, 2t)$, 则

$$\overrightarrow{MN} = (t, t+3, 2t-4),$$

令 $\overrightarrow{MN} \perp n = (3, -4, 1)$, 得 $t = 16$, 故

$$s = \overrightarrow{MN} = (16, 19, 28),$$

所求直线为

$$\frac{x+1}{16} = \frac{y}{19} = \frac{z-4}{28}.$$

(三) 高等数学(下)期末考试试卷(I)

试 题

一、填空、选择题

1. 函数 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处 _____.

- (A) 有二重极限但不连续. (B) 不连续但可偏导.
(C) 连续但不可偏导. (D) 连续且可偏导.

2. 三元函数 $u = \sin(xy) + \cos(yz)$ 在点 $\left(1, \frac{\pi}{4}, 1\right)$ 处的全微分 $du =$ _____.

3. 曲线 $\begin{cases} z = x^2 + 2y^2, \\ x + 2y + z = 6 \end{cases}$ 在点 $(1, 1, 3)$ 处的一个单位切向量为 _____.

4. 设平面区域 $D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 (a > 0, b > 0)$, 则 $\iint_D (x+y)^5 d\sigma =$ _____.

5. 设曲线 L 是三角形 ABC 区域的正向边界, 其中 A, B, C 的坐标分别为 $(-1, 0), (1, 0), (0, 1)$, 则 $\oint_L 2y \cos^2 x dx + (\sin x \cos x - x) dy =$ _____.

6. 设 $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} (n = 1, 2, \dots)$, 则以下级数中收敛的是 _____.

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n.$

(B) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2.$

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}.$

(D) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} + a_n).$

二、1. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $f(x+y, xz) = 0$ 确定, 且 $x=1, y=0$ 对应于 $z=1$, 其中 $f(u, v)$ 具有连续的偏导数, 且 $f_u(1, 1) = f_v(1, 1) \neq 0$, 求 $\text{grad}z(1, 0)$.

2. 设一个直椭圆锥体的锥面方程为 $(z-1)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} (0 \leq z \leq 1, a > 0)$,

$b > 0$), 若将该直椭圆锥体切削成长方体(长方体的长、宽、高平行于坐标轴, 如图 1 所示), 试用拉格朗日乘数法求所能获得的长方体的最大体积.

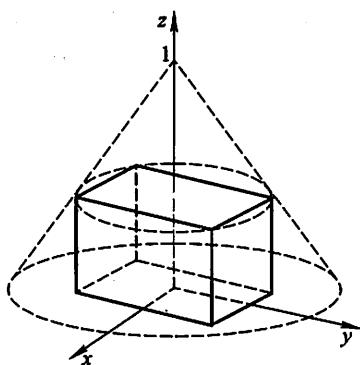


图 1

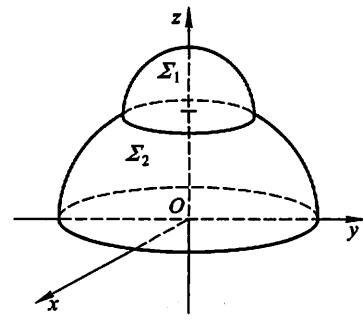


图 2

三、1. 图 2 所示的是某一建筑物的屋顶, 它由曲面 Σ_1 与 Σ_2 拼接而成. Σ_1 是半径为 1 的半球面, Σ_2 是半径为 2 的半球面的一部分, 试问该屋顶的面积是多少?

2. 设立体 Ω 由旋转抛物面 $\Sigma: z = x^2 + y^2$ 与 Σ 在点 $(a, b, a^2 + b^2)$ ($a > 0, b > 0$) 处的切平面以及圆柱面 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ($r > 0$) 所围成, 证明 Ω 的体积 V 仅与圆柱面的半径 r 相关, 而与点 (a, b) 的位置无关.

四、1. 求线密度为常数 μ 的摆线 $L: \begin{cases} x = a(t + \sin t), \\ y = a(1 + \cos t) \end{cases}$ ($t \in [0, 2\pi]$, $a > 0$) 关于 x 轴的转动惯量(单位从略).

2. 设定向曲面 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($0 \leq z \leq 2$) 的下侧, 求积分

$$I = \iint_{\Sigma} (x - y) dy dz + (y - z) dz dx + (z - x) dx dy.$$

五、1. 判别以下命题的真假:(在真命题后的括弧内填入“√”, 否则填入“×”)

(1) 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 那么部分和 S_n 有界. []

(2) 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. []

(3) 设 $f(x) = 1 - \cos x$, 那么 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛. []

(4) 设 $a_n > 0$, 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 那么 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho < 1$. []

(5) 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间是 $(-R, R)$, 那么 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{3n+l}$ (l 是某自然数) 的

收敛区间是 $(-\sqrt[3]{R}, \sqrt[3]{R})$.

[]

(6) 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径是 R , 那么 $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$ 的收敛半径也是 R .

[]

2. 把 $[0, \pi]$ 上的函数 $f(x) = \begin{cases} k_1, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ k_2, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$ (常数 k_1, k_2 非零且 $k_1 \neq k_2$)

展开成余弦级数, 并指出展开式成立的范围.

六、在平面 $x + y + z = 1$ 上求一直线, 使它与直线 $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ 垂直相交.

参考答案

一、1. 因为 $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=kx^2}} f(x,y) = \frac{k}{1+k^2}$, 即 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ 不存在, $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, 故选(B).

$$\begin{aligned} 2. du &= \cos(xy)(xdy + ydx) - \sin(yz)(ydz + zd़y) \Big|_{(1, \frac{\pi}{4}, 1)} \\ &= \frac{\pi\sqrt{2}}{8}dx - \frac{\pi\sqrt{2}}{8}dz. \end{aligned}$$

3. 对 $\begin{cases} z = x^2 + 2y^2, \\ x + 2y + z = 6 \end{cases}$ 两端求微分, 并代入点的坐标, 得

$$\begin{cases} dz = 2dx + 4dy, \\ dx + 2dy + dz = 0, \end{cases}$$

解得 $dz = 0, dx = -2dy$, 由此得到一个切向量为

$$(-2, 1, 0),$$

因此所求单位切向量为 $\pm \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0)$.

4. 由于被积函数展开后的每一项或者是 x 的奇函数或者是 y 的奇函数, 而积分区域关于 x 轴和 y 轴都对称, 因此 $\iint_D (x+y)^5 d\sigma = 0$.

5. 由格林公式, 得 $\oint_L 2y \cos^2 x dx + (\sin x \cos x - x) dy = \iint_D -2 d\sigma = -2$.

6. 因为交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ 均收敛, 而两个收敛级数的和仍收敛, 因此

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} + a_n)$ 收敛, 故选(D).

二、1. $df(x+y, xx) \Big|_{(1,0,1)} = f_u(1,1)(dx+dy) + f_v(1,1)(dz+dx)$,
方程 $f(x+y, xx) = 0$ 两端微分, 并把点的坐标代入, 得

$$dz = -2dx - dy,$$

即 $z_x(1,0) = -2, z_y(1,0) = -1$, 因此 $\text{grad}z(1,0) = (-2, -1)$.

2. 设长方体在第1卦限内的顶点为 (x, y, z) , 则体积为

$$V = 4xyz.$$

令

$$L = xyz + \lambda \left[(z-1)^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right],$$

求偏导, 得

$$L_x = yz - \frac{2\lambda x}{a^2} = 0,$$

$$L_y = xz - \frac{2\lambda y}{b^2} = 0,$$

$$L_z = xy + 2\lambda(z-1) = 0,$$

由此得到 $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = -z(z-1)$, 结合条件 $(z-1)^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ 解得驻点 $(\frac{\sqrt{2}}{3}a, \frac{\sqrt{2}}{3}b, \frac{1}{3})$.

所能获得的长方体的最大体积为 $4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}a \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}b \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{27}ab$.

三、1. Σ_2 所在半球面含在 Σ_1 所在球面中部分面积为

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} dx dy &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{2\rho}{\sqrt{4-\rho^2}} d\rho = 4\pi(2-\sqrt{3}). \end{aligned}$$

因此, 屋顶的面积 $= \frac{1}{2}(4\pi \cdot 2^2) - 4\pi(2-\sqrt{3}) + \frac{1}{2} \cdot 4\pi = 2\pi(1+2\sqrt{3})$.

2. Σ 在点 (a, b, a^2+b^2) ($a>0, b>0$) 处的法向量为 $n=(2a, 2b, -1)$, 故切平面方程为

$$2ax + 2by - z - a^2 - b^2 = 0, \text{ 即 } z = 2ax + 2by - a^2 - b^2.$$

Ω 的体积

$$\begin{aligned} V &= \iint_{(x-a)^2+(y-b)^2 \leq r^2} (x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2) dx dy \\ &= \iint_{(x-a)^2+(y-b)^2 \leq r^2} [(x-a)^2 + (y-b)^2] dx dy \end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r \rho^2 \cdot \rho d\rho \\ = \frac{\pi r^4}{2},$$

可见 V 与 r 有关, 而与点 (a, b) 的位置无关.

$$\text{四、1. } I_x = \iint_L y^2 ds = \int_0^{2\pi} a^2 (1 + \cos t)^2 \sqrt{a^2 (1 + \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt \\ = \int_0^{2\pi} 8a^3 \cos^4 \frac{t}{2} \left| \cos \frac{t}{2} \right| dt \stackrel{t=2u}{=} \int_0^\pi 16a^3 \cos^4 u |\cos u| du \\ = 32a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 u du = \frac{256}{15} a^3.$$

$$\text{2. } I = \iint_{\Sigma} [-z_x(x-y) - z_y(y-z) + (z-x)] dx dy \\ = \iint_{D_{xy}} \left[-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}(x-y) - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}(y-\sqrt{x^2+y^2}) + \right. \\ \left. (\sqrt{x^2+y^2}-x) \right] dx dy \\ = \iint_{D_{xy}} \left[-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \sqrt{x^2+y^2} \right] dx dy = 0.$$

五、1. (1) 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 即数列 s_n 收敛, 由此 S_n 有界, 故选 \checkmark .

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 是级数收敛的必要条件而非充分条件, 例如发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 故选 \times .

(3) 因为 $\left| (-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = 1 - \cos \frac{1}{n} \sim \frac{1}{2n^2} (n \rightarrow \infty)$, 故选 \checkmark .

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho < 1$ 是正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分条件而非必要条件, 例如

收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, 故选 \times .

(5) 令 $y = x^3$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{3n+l} = x^l \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$. 对于级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$, 由条件得,

$|y| < R$ 时绝对收敛, $|y| > R$ 时发散, 即得级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{3n+l}$, 在 $|x| < \sqrt[3]{R}$ 时绝对收敛, $|x| > \sqrt[3]{R}$ 时发散, 故选 \checkmark .

(6) $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \left(\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n \right)''$, 由幂级数逐项求导后收敛半径不变,

故选√.

2. $f(x)$ 偶延拓和周期延拓后, 只在 $x = \frac{2k+1}{2}\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$) 处间断, 而 $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1 dx + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi k_2 dx = k_1 + k_2$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1 \cos nx dx + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi k_2 \cos nx dx \\ &= \frac{2(k_1 - k_2)}{n\pi} \sin \frac{n}{2}\pi, \end{aligned}$$

因此

$$f(x) = \frac{k_1 + k_2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}(k_1 - k_2)}{(2n-1)\pi} \cos(2n-1)x \quad \left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]\right).$$

六、已知直线的参数方程为

$$x = 1+t, y = t, z = -2-t,$$

代入平面求得 $t=2$, 已知直线与平面的交点为 $(3, 2, -4)$. 所求直线的方向向量为

$$(1, 1, 1) \times (1, 1, -1) = -2(1, -1, 0),$$

因此所求直线为

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+4}{0}.$$

(四) 高等数学(下)期末考试试卷(II)

试 题

一、简答题(要求:简洁、明确)

1. 写出 $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$ 的定义域, 并求 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

2. 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $x + y - z = e^x$ 所确定, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

3. 函数 $z = x^2 + y^2 - xy$ 在点 $(-1, 1)$ 处沿什么方向的方向导数最大? 最大方向导数的值为多少?

4. 求 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} dy \int_y^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{x} dx$.

5. 求 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + xz) dS$, 其中 Σ 为圆柱面 $x^2 + y^2 = 2$ 被平面 $z = 0$ 和 $z = 4$ 所割下的部分.

二、记曲面 $z = x^2 + y^2$ 在点 $(-1, 0, 1)$ 处的切平面为 Π , 立体 Ω 由曲面 $z = -(1 + x^2 + y^2)$ 及平面 Π 所围成, 求 Ω 的体积.

三、计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} (x^3 + y^2) dy dz + (y^3 + z^2) dz dx + (z^3 + x^2) dx dy$, 其中 Σ 为上半球面 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 的上侧.

四、设质点在平面力场 $\mathbf{F} = xy^2 \mathbf{i} + x^2 y \mathbf{j}$ 的作用下从原点 O 沿光滑曲线 L 移动到椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上位于第一象限内的点 $M(x_0, y_0)$ 处.

(1) 试将 \mathbf{F} 所作的功 W 表达为曲线积分, 并证明 W 与路径无关;

(2) 当 x_0, y_0 分别取何值时, \mathbf{F} 所作的功最大? 求出此最大值(单位从略).

五、把函数 $f(x) = \frac{\pi - x}{2} (0 \leq x \leq \pi)$ 展开成余弦级数.

六、设 $a_0 = \frac{\pi}{4}, a_n = \iint_D \frac{n \arctan^{\pi-1} y}{(1+x^2)(1+y^2)} dx dy \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$,

其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\}$.

(1) 求出 a_n ;

(2) 求出幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域及和函数.

七、1. 求椭球面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 上的点 M , 使该点处的切平面 Π 过已知直线 $L: \frac{x-6}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{-2}$.

2. 设数列 u_n 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = 1$.

(1) 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (u_n + u_{n+1})$ 收敛并求出其和.

(2) 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (u_n + u_{n+1})$ 是条件收敛还是绝对收敛(须说明理由).

参考答案

一、1. $f(x, y)$ 的定义域为 $\{(x, y) \mid xy \geq -1, xy \neq 0\}$,

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sqrt{1+xy} + 1}{1} = 2.$$

2. 方程两端分别对 x, y 求偏导, 得

$$1 - z_x = e^z z_x, 1 - z_y = e^z z_y,$$

即

$$z_x = z_y = \frac{1}{1 + e^z},$$

因此

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{1 + e^z} \right) = -\frac{1}{(1 + e^z)^2} \cdot e^z z_x = -\frac{e^z}{(1 + e^z)^3}.$$

3. $\text{grad } z|_{(-1,1)} = (2x - y, 2y - x)|_{(-1,1)} = (-3, 3)$. 因此, 函数沿 $(-1, 1)$ 方向的方向导数最大, 最大方向导数等于 $3\sqrt{2}$.

$$4. \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_y^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^x \frac{\cos x}{x} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{1}{2}.$$

5. 由于 Σ 关于平面 $x = 0$ 对称, 有 $\iint_{\Sigma} xz dS = 0$, 故

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + xz) dS &= \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS = \iint_{\Sigma} 2dS = 2S \\ &= 2 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{2}\pi = 16\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

二、法向量

$n = (z_x, z_y, -1)|_{(-1,0)} = (2x, 2y, -1)|_{(-1,0)} = (-2, 0, -1)$,
切平面 II 的方程为

$$2x + z + 1 = 0.$$

Ω 的体积

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\substack{x^2+y^2 \leq 2x \\ x^2+y^2 \leq 2x}} [-(1+x^2+y^2) + 2x+1] dx dy \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} (2\rho\cos\theta - \rho^2) \rho d\rho \\ &= \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

三、 $\Sigma_1 : z = 0(x^2 + y^2 \leq 1)$ 下侧, 则

$$\begin{aligned} &\iint_{\Sigma} (x^3 + y^2) dy dz + (y^3 + z^2) dz dx + (z^3 + x^2) dx dy \\ &= \iint_{\Sigma + \Sigma_1} (x^3 + y^2) dy dz + (y^3 + z^2) dz dx + (z^3 + x^2) dx dy \\ &- \iint_{\Sigma_1} (x^3 + y^2) dy dz + (y^3 + z^2) dz dx + (z^3 + x^2) dx dy \\ &= \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq 0}} (3x^2 + 3y^2 + 3z^2) dV - \iint_{\Sigma_1} x^2 dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 3r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 \cos^2 \theta \cdot \rho d\rho \\ &= \frac{6\pi}{5} + \frac{\pi}{4} = \frac{29}{20}\pi. \end{aligned}$$

四、 $W = \int_L xy^2 dx + x^2 y dy$, 由于 $Q_x = 2xy = P_y$, 因此 W 与路径无关.

$$W = \int_{(0,0)}^{(x_0, y_0)} xy^2 dx + x^2 y dy = \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_{(0,0)}^{(x_0, y_0)} = \frac{1}{2} x_0^2 y_0^2,$$

当 $\frac{x_0^2}{9} = \frac{y_0^2}{4} = \frac{1}{2}$, 即 $x_0 = \frac{3}{2}\sqrt{2}, y_0 = \sqrt{2}$ 时 F 所作的功最大, 其最大值等于 $\frac{9}{2}$.

$$\text{五、} a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\pi-x}{2} dx = \frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\pi-x}{2} \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{(\pi-x)\sin nx}{n} - \frac{\cos nx}{n^2} \right]_0^\pi = \frac{1 - (-1)^n}{n^2 \pi},$$

其余弦级数为

$$f(x) = \frac{\pi-x}{2} = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^2 \pi} \cos (2n-1)x \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

$$\text{六、} a_n = \int_0^1 dx \int_0^x \frac{n \arctan^{n-1} y}{(1+x^2)(1+y^2)} dy = \int_0^1 \frac{\arctan^n x}{1+x^2} dx = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\pi}{4}, R = \frac{4}{\pi}.$$

当 $x = \frac{4}{\pi}$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{4(n+1)}$ 发散;

当 $x = -\frac{4}{\pi}$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi(-1)^n}{4(n+1)}$ 收敛,

因此收敛域为 $\left[-\frac{4}{\pi}, \frac{4}{\pi}\right)$, 记和函数为 $s(x)$, 则

$$[xs(x)]' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1} \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1}\right]' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1} x^n = \frac{\frac{\pi}{4}}{1 - \frac{\pi x}{4}} = \frac{\pi}{4 - \pi x},$$

故

$$xs(x) = \int_0^x \frac{\pi}{4 - \pi x} dx = -\ln(4 - \pi x) + \ln 4,$$

因此其和函数为

$$s(x) = \begin{cases} \frac{-\ln(4 - \pi x) + \ln 4}{x}, & x \in \left[-\frac{4}{\pi}, 0\right) \cup (0, \frac{4}{\pi}), \\ \frac{\pi}{4}, & x = 0. \end{cases}$$

七、1. 设 $M(x_0, y_0, z_0)$ 为所求的点, 则椭球面在该点处的法向量为 $(2x_0, 4y_0, 6z_0)$, 切平面 Π 的方程为

$$x_0 x + 2y_0 y + 3z_0 z = 21.$$

由条件, 得 $(2x_0, 4y_0, 6z_0) \perp (2, 1, -2)$ 即

$$(2x_0, 4y_0, 6z_0) \cdot (2, 1, -2) = 4x_0 + 4y_0 - 12z_0 = 0.$$

而直线 L 上的点 $(6, 3, 1)$ 必在切平面 Π 上, 因此

$$6x_0 + 6y_0 + 3z_0 = 21,$$

而 $M(x_0, y_0, z_0)$ 在椭球面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 上, 即

$$x_0^2 + 2y_0^2 + 3z_0^2 = 21.$$

解得 $x_0 = 0, y_0 = 3, z_0 = 1$ 和 $x_0 = 4, y_0 = -1, z_0 = 1$, 即 M 点为

$$(0, 3, 1) \text{ 或 } (4, -1, 1).$$

2. (1) 记级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (u_n + u_{n+1})$ 的前 n 项之和为 S_n , 则

$$S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} (u_k + u_{k+1}) = u_1 + (-1)^{n+1} u_{n+1}.$$

由条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$, 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = u_1$, 即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}(u_n + u_{n+1})$ 收敛, 其和为 u_1 .

(2) 由条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$, 得 n 足够大后 $u_n \geq 0$, 且 $u_n \sim \frac{1}{n}$ ($n \rightarrow \infty$). 因此当 n 足够大后,

$$|(-1)^{n+1}(u_n + u_{n+1})| = u_n + u_{n+1} \sim \frac{2}{n} (n \rightarrow \infty),$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n+1}(u_n + u_{n+1})|$ 发散.

因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}(u_n + u_{n+1})$ 条件收敛.

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 58581897/58581896/58581879

传 真：(010) 82086060

E - mail: dd@hep. com. cn

通信地址：北京市西城区德外大街 4 号

高等教育出版社打击盗版办公室

邮 编：100011

购书请拨打电话：(010)58581118



College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

- 高等数学 第六版 上册 同济大学数学系
- 高等数学 第六版 下册 同济大学数学系
- 高等数学附册 学习辅导与习题选解 同济·第六版 同济大学数学系
- 高等数学习题全解指南 上册 同济·第六版 同济大学数学系
- 高等数学习题全解指南 下册 同济·第六版 同济大学数学系
- 工程数学——线性代数 第五版 同济大学数学系
- 线性代数附册 学习辅导与习题全解 同济·第五版 同济大学数学系
- 工程数学——新编统计学 同济大学数学系
- 工程数学——概率统计简明教程 同济大学应用数学系
- 概率统计简明教程附册 学习辅导与习题全解 同济大学应用数学系

ISBN 978-7-04-020746-0

9 787040 20746 >

定价 21.40元