No.

Date

微积分(Ⅲ), 接上本笔记:

6.3:

1. 无源场: 区域 Ω 上任一点, $\operatorname{div}\vec{v}=\vec{0}=\nabla\cdot\vec{v}$; $\vec{v}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$

对一点 (x,y,z), 若 $\operatorname{div}\vec{v}>0$, 则为正流源; 若 $\operatorname{div}\vec{v}<0$, 则为负流源.

2. 设 Ω 为 $\mathbb{R}^3$ 中球形区域, $\vec{v}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$ 为 Ω 上可微向量场, 若 $\nabla\cdot\vec{v}\equiv0$, 则存在 $\vec{u}=L\vec{i}+M\vec{j}+N\vec{k}$, s.t $\vec{v}=\operatorname{rot}\vec{u}$.

3. 设 Ω 为 $\mathbb{R}^3$ 的区域, $\vec{v}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$ 为 Ω 上连续可微向量场, 则:

(1) $\vec{v}$ 为保守场 $\Leftrightarrow$ (2) $\oint_L\vec{v}\cdot d\vec{l}=0$ $\Leftrightarrow$ $\vec{v}$ 在 Ω 上有势函数. L 为 Ω 内任一有向闭曲线.

4. Ω 为 $\mathbb{R}^3$ 上单连通区域, $\vec{v}=(P,Q,R)$ 为 Ω 上连续可微向量场, 则 $\vec{v}$ 为保守场 $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rot}\vec{v}=\vec{0}$.

5. 若 $\vec{v}=(P,Q,R)$ 满足既有势, 又无源, 则称 $\vec{v}$ 为调和场, 势函数 $f(x,y,z)$,

$\frac{\partial f}{\partial x}=P,\ \frac{\partial f}{\partial y}=Q,\ \frac{\partial f}{\partial z}=R$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$. (Laplace方程). $\nabla^2 f=\nabla\cdot(\nabla f)=0$.

6. 柱坐标 (r,θ,z) 下: $\nabla f(r,\theta,z)=\frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\vec{e}_\theta+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$. (正向为增加)

$$\nabla\cdot\vec{v}=\frac{1}{r}\frac{\partial(rP)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial\theta}+\frac{\partial R}{\partial z},\quad \vec{v}=P(r,\theta,z)\vec{e}_r+Q(r,\theta,z)\vec{e}_\theta+N(r,\theta,z)\vec{e}_z.$$

$$\nabla\times\vec{v}=\left[\frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial\theta}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right]\vec{e}_r+\left[\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial r}\right]\vec{e}_\theta+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rQ)}{\partial r}-\frac{\partial P}{\partial\theta}\right]\vec{e}_z.$$

$$\vec{v}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}=L(r,\theta,z)\vec{e}_r+M(r,\theta,z)\vec{e}_\theta+N(r,\theta,z)\vec{e}_z.$$

$$\Delta f=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

球坐标 (ρ,φ,θ) 下:

$$\nabla f(\rho,\varphi,\theta)=\frac{\partial f}{\partial\rho}\vec{e}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi+\frac{1}{\rho\sin\varphi}\frac{\partial f}{\partial\theta}\vec{e}_\theta.$$

$$\nabla\cdot\vec{v}=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial(\rho^2P)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho\sin\varphi}\frac{\partial(Q\sin\varphi)}{\partial\varphi}+\frac{1}{\rho\sin\varphi}\frac{\partial(R)}{\partial\theta}$$

$\vec{v}=\cancel{(P,Q,R)}$ $P\vec{e}_\rho+Q\vec{e}_\varphi+R\vec{e}_\theta$

No.

Date

$$\nabla \times = \frac{1}{\rho^2 \sin\varphi} \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \vec{e}_\varphi & \vec{e}_\theta \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial \theta} \\ P & \rho Q & \rho R \sin\varphi \end{vmatrix} \qquad \vec{v} = P\vec{e}_\rho + Q\vec{e}_\varphi + R\vec{e}_\theta .$$

$$\Delta f = \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 \frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sin\varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right]$$

章七: 高阶线性常微分方程:

7.1:

1. n阶线性常微分方程一般式: $\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}$
$+a_n(t)x=f(t)$.

$f(t)\equiv 0$时, 称为n阶齐次线性常微分方程.

2. 设 $a_k(t)$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 与 $f(t)$ 在 I 上连续, $t_0\in I$, 则 $\forall \xi_k$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$,

$$\begin{cases}\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^n}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=f(t),\\ x(t_0)=\xi_0,\quad x(t_0)=\xi_1,\quad\cdots,\quad x^{n-1}(t_0)=\xi_{n-1}\end{cases}$$

在区间 I 上存在唯一解 $x(t)$.

7.2:

1. $x^{\langle n\rangle}(t)+a_1x^{\langle n-1\rangle}(t)+\cdots+a_n(t)x(t)=f(t)$ ①

$x^{\langle n\rangle}(t)+\cdots+a_n(t)x(t)=0$ ② ②为①的齐次式.

若 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 均为②的解, 则 $\forall c_1,c_2\in C$, $c_1x_1(t)+c_2x_2(t)$ 也为②的解.

若 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 均为①的解, 则 $x_1(t)-x_2(t)$ 为②的解

若 $x_1(t)$ 为①的解, $x_0(t)$ 为②的解, 则 $x_1(t)+x_0(t)$ 为①的解.

2. 设 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m$ 为 I 上一个连续函数组, 若存在一组不全为0的实数 $c_1,c_2,\cdots,c_m$, 使得 $c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\cdots+c_m\varphi_m(t)\equiv 0$, $(t\in I)$, 则称 $\varphi_1\cdots\varphi_m$ 在 I 上线性相关.

3. 设 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m\in C^m(I)$, 朗斯基行列式 $W(t)=\begin{bmatrix}\varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \cdots & \varphi_m(t)\\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \cdots & \varphi_m'(t)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \varphi_1^{\langle m-1\rangle}(t) & \varphi_2^{\langle m-1\rangle}(t) & \cdots & \varphi_m^{\langle m-1\rangle}(t)\end{bmatrix}$

Date

4. $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m \in C^m(I)$ 在 I 上线性相关 $\Rightarrow$ $W(t) \equiv 0$.

证: 设 $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \cdots + c_m\varphi_m = 0$.

求导: $c_1\varphi_1' + c_2\varphi_2' + \cdots + c_m\varphi_m' = 0$ $\cdots$

$c_1\varphi_1^{(m-1)} + c_2\varphi_2^{(m-1)} + \cdots + c_m\varphi_m^{(m-1)} = 0$

$\therefore W[\varphi_1, \cdots, \varphi_m]\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = 0$. ∵ ~~$W(t)=0$，故有非0根~~，

∵ $\varphi_1, \cdots \varphi_m$ 线性相关. ∴ 有非零根，∴ $W(t)=0$.

5. 设 $a_k(t) \in C(I)$; $\varphi_1, \cdots, \varphi_n \in C^n(I)$ 为n阶齐次线性常微分方程的解.

则: ① $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 在 I 上线性相关; $\Leftrightarrow$ ② $W(t) \equiv 0$ $\Leftrightarrow$ ③ $\exists t_0 \in I$, 使得 $W(t_0)=0$.

①⇒② 见上. ②⇒③ 显然.

③⇒①: 若 $\exists t_0 \in I$, $W(t_0)=0$, 则:

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(t_0) & \varphi_2(t_0) & \cdots & \varphi_n(t_0) \\ \varphi_1'(t_0) & \varphi_2'(t_0) & \cdots & \varphi_n'(t_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t_0) & \varphi_2^{(n-1)}(t_0) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix} = 0,$$

则存在一组不全为0的实数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$, $W[\varphi_1, \cdots, \varphi_n]\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = 0$.

令 $x(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \cdots + c_n\varphi_n(t)$,

则 $x(t)$ 仍是原齐次线性常微分方程的解, 且 $x(t_0) = x'(t_0) = \cdots = x^{(n-1)}(t_0) = 0$,

由于 $x_1(t) \equiv 0$ 也为原方程的解, 由唯一性定理, $x(t) = x_1(t) \equiv 0$.

6. n阶齐次线性常微分方程②的所有解的集合是 $C(I)$ 的一个n维线性空间，即存在n个线性无关解 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$, 使得任一解 $x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(t)$.

证: 令 $\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \cdots 0)$ $\cdots$ $\vec{e}_n = (0, 0, \cdots 0, 1)$ $\varphi_k(t)$ 为②的满足初值 $(\varphi_k(t_0), \varphi_k'(t_0), \cdots, \varphi_k^{(n-1)}(t_0)) = \vec{e}_k$ 的解, 则 $W[\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n](t_0) = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$

$W(t_0) = 1 \neq 0$, 则 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ 线性无关.

设 $x(t)$ 为②的一个解且 $x(t_0)=\xi_1, x'(t_0)=\xi_2, \cdots, x^{(n-1)}(t_0)=\xi_n$.

则令 $y(t)=\xi_1\varphi_1(t)+\cdots+\xi_n\varphi_n(t)$，$y(t)$ 也为②的一个解

且 $y(t_0)=\xi_1, y'(t_0)=\xi_2, \cdots, y^{(n-1)}(t_0)=\xi_n$. 由解的存在唯一定理，$x(t)\equiv y(t)$.

7. 二阶线性常微分方程 变动~~系数~~常数法：

①：设 $x_0(t)$ 为 $x''+p(t)x'+q(t)x=0$ 的一个非零解，(a)

令 $x(t)=u(t)x_0(t)$ 为 $x''+p(t)x'+q(t)x=f(t)$ 的一个解.

$x'=u'x_0+ux_0'$　$x''=u''x_0+2u'x_0'+ux_0''$ 代入并代入 (a) 有：

$u''x_0+(2x_0'+p(t)x_0)u'=f(t)$. 不显含 u，可以降阶.

② 设 $x_1(t), x_2(t)$ 为 $x''+p(t)x'+q(t)x=0$ 的两个线性无关解，令 $x(t)=u(t)x_1(t)$ $+v(t)x_2(t)$. 则 $x'(t)=u'x_1+ux_1'+v'x_2+vx_2'$

$x''=u''x_1+2u'x_1'+ux_1''+v''x_2+2v'x_2'+vx_2''$.

再令 $u'x_1+v'x_2=0$，有 $x''=u'x_1'+ux_1''+v'x_2'+vx_2''$ 得：

$u'x_1'+v'x_2'=f(t)$.

$\therefore \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$　又 $x_1(t), x_2(t)$ 线性无关 $\Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix}\neq 0$.

得：$u'=-\dfrac{x_2 f}{W}$，$v'=-\dfrac{x_1 f}{W}$.

No.

Date

7.3: 高阶常系数线性常微分方程.

1. $\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = 0$ ①. $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为常数.

设 $z(t) = u(t) + i v(t)$ 为 I 上复值函数, $\frac{dz}{dt} = \frac{du}{dt} + i\frac{dv}{dt}$.

若 $z(t)$ 为①的解, 则 $u(t)$, $v(t)$ 为①的实解.

2. 一般称 $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$ 为①的特征方程, 其解为特征根.

(1) 设 λ 为一个单重实根, 则 $e^{\lambda t}$ 为方程①的一个实解.

(2) 设 $\alpha \pm i\beta$ 为一对单重复根, 则 $e^{\alpha t}\cos\beta t$, $e^{\alpha t}\sin\beta t$ 为方程①的两个线性无关实解.

(3) 设 λ 为 k 重实根 $(1<k\leq n)$, 则 $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \cdots, t^{k-1}e^{\lambda t}$ 为方程①的 k 个线性无关实解.

(4) 设 $\alpha \pm i\beta$ 是一对 k 重复根 $(1<k\leq \frac{n}{2})$, 则 $e^{\alpha t}\cos\beta t$, $e^{\alpha t}\sin\beta t$, $te^{\alpha t}\cos\beta t$, $te^{\alpha t}\sin\beta t$, $\cdots$, $t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t$, $t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t$ 为方程①的 $2k$ 个线性无关的实解.

3. $\frac{d^n x}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = f(t)$. a_i 为常数, $f(t)$ 连续.

当 $f(t)$ 为某些简单类型时, 可用待定系数法求特解.

设 $\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + bx = f(t)$. $f(t) = P(t)e^{\lambda t}$ $P(t)$ 为 t 的一多项式.

假设一解 $x(t) = Q(t)e^{\lambda t}$. $Q(t)$ 也为一多项式.

$x'(t) = Q'(t)e^{\lambda t} + \lambda Q(t)e^{\lambda t}$ $x''(t) = Q''(t)e^{\lambda t} + 2\lambda Q'(t)e^{\lambda t} + \lambda^2 Q(t)e^{\lambda t}$.

$\therefore Q''(t) + (2\lambda + a)Q'(t) + (\lambda^2 + a\lambda + b)Q(t) = P(t)$.

① 当 λ 不是特征方程 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ 的根时, $\lambda^2 + a\lambda + b \neq 0$, $Q(t)$ 与 $P(t)$ 同次.

② 当 λ 是 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ 单根时, $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$, $2\lambda + a \neq 0$. $Q(t)$ 与 $P(t)$ 高一次, 可设 $Q(t) = tR(t)$, $R(t)$ 与 $P(t)$ 同次.

③ 当 λ 为 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ 的重根时, $\lambda^2 + a\lambda + b = 2\lambda + a = 0$. $Q(t)$ 与 $P(t)$ 高二次, 可设 $Q(t) = t^2R(t)$. $R(t)$ 与 $P(t)$ 同次.

4. 形如 $x'' + ax' + bx = P(t)e^{\alpha t}(d_1\cos\beta t + d_2\sin\beta t)$ $P(t)$ 为多项式, d_1, d_2 为常数的方程可用比较系数法. 若 $\alpha + i\beta$ 不是 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ 的根时, 可假定方程有形如 $e^{\alpha t}(Q_1(t)\cos\beta t + Q_2(t)\sin\beta t)$ 的解. Q_1, Q_2 与 $P(t)$ 同次.

5. 方程：$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n x = f(t)+g(t)$ ①

若 $x_1(t)$ 为 $\frac{d^nx}{dt^n}+\cdots+a_nx=f(t)$ 的一个特解.

$x_2(t)$ 为 — — — — — $=g(t)$ 的一个特解，则 $x_1(t)+x_2(t)$ 为①的一个特解.

6. 欧拉方程：$t^n\frac{d^nx}{dt^n}+a_1t^{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}t\frac{dx}{dt}+a_nx=f(t)$.

当 $t>0$ 时，作 $t=e^s$，令 $D=\frac{d}{ds}$，有 $t^k\frac{d^kx}{dt^k}=D(D-1)\cdots(D-k+1)x$，

可化为常系数.

当 $t<0$ 时，作 $t=-e^s$. 一般作 $|t|=e^s$ 或 $s=\ln|t|$ 可求解.