深蓝学院
shenlanxueyuan.com

激光的前端配准算法

主讲人 曾书格

越凡创新技术负责人
电子科技大学硕士

课程内容

帧间匹配算法

- 1、ICP匹配方法
- 2、PL-ICP匹配方法
- 3、NICP匹配方法
- 4、IMLS-ICP匹配方法

课程内容

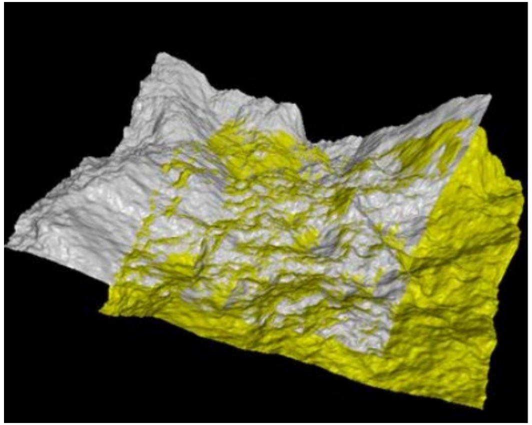
帧间匹配算法

- 1、ICP匹配方法
- 2、PL-ICP匹配方法
- 3、NICP匹配方法
- 4、IMLS-ICP匹配方法

运动畸变去除—ICP(Iterative Closest Point)方法介绍

目的:

ICP方法是用来求解两个点云集合转换关系的最通用的方法。



数学描述:

给定两个点云集合:

$$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_{N_x}\}$$
$$P = \{p_1, p_2, \cdots, p_{N_p}\}$$

其中,

x_i和p_i表示点云的坐标;

N_x和N_p表示点云的数量。

求解旋转矩阵 R 和平移向量 t, 使得下式最小:

$$E(R,t) = \frac{1}{N_p}\sum_{i=1}^{N_p}\|x_i - Rp_i - t\|^2$$

运动畸变去除—ICP方法介绍

已知对应点的求解方法

$$u_x = \frac{1}{N_p}\sum_{i=1}^{N_p} x_i$$ u_x表示点云集合X的几何中心

$$u_p = \frac{1}{N_p}\sum_{i=1}^{N_p} p_i$$ u_p表示点云集合P的几何中心

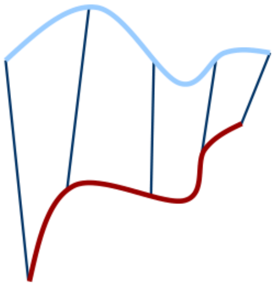
去中心化：
$$x_i' = x_i - u_x$$
$$p_i' = p_i - u_p$$

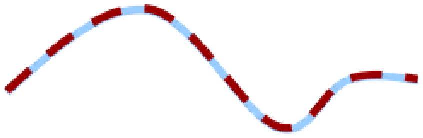
$$W = \sum_{i=1}^{N_p} x_i' p_i'^T = U \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} V^T$$

则ICP的解为：

$$R = VU^T$$

$$t = u_x - Ru_p$$





已知对应点的求解方法—证明

$$E(R,t)=\frac{1}{N_p}\sum_{i=1}^{N_p}\|x_i-Rp_i-t\|^2$$

$$=\frac{1}{N_p}\sum_{i=1}^{N_p}\left\|x_i-Rp_i-t-u_x+Ru_p+u_x-Ru_p\right\|^2$$

$$=\frac{1}{N_p}\sum_{i=1}^{N_p}\left\|x_i-u_x-R(p_i-u_p)+(u_x-Ru_p-t)\right\|^2$$

$$=\frac{1}{N_p}\sum_{i=1}^{N_p}\left[\left\|x_i-u_x-R(p_i-u_p)\right\|^2+\left\|u_x-Ru_p-t\right\|^2+2\left(x_i-u_x-R\left(p_i-u_p\right)\right)^T(u_x-Ru_p-t)\right]$$

$$=\boxed{\frac{1}{N_p}\sum_{i=1}^{N_p}\left\|x_i-u_x-R(p_i-u_p)\right\|^2}+\boxed{\left\|u_x-Ru_p-t\right\|^2}+\boxed{\frac{1}{N_p}\sum_{i=1}^{N_p}2\left(x_i-u_x-R\left(p_i-u_p\right)\right)^T(u_x-Ru_p-t)}$$

等于0，详细推导见附录I

ICP方法介绍

已知对应点的求解方法—证明

$$E(R,t)=\frac{1}{N_p}\sum_{i=1}^{N_p}\|x_i-Rp_i-t\|^2$$

$$=\underbrace{\frac{1}{N_p}\sum_{i=1}^{N_p}\left\|x_i-u_x-R(p_i-u_p)\right\|^2}_{E_1(R,t)}+\underbrace{\left\|u_x-Ru_p-t\right\|^2}_{E_2(R,t)}$$

$$minE(R,t)=\frac{1}{N_p}\sum_{i=1}^{N_p}\|x_i-Rp_i-t\|^2$$

可转变为：

$$minE_1(R,t)=\frac{1}{N_p}\sum_{i=1}^{N_p}\left\|x_i-u_x-R(p_i-u_p)\right\|^2$$

$$E_1(R,t)=\frac{1}{N_p}\sum_{i=1}^{N_p}\left\|x_i-u_x-R(p_i-u_p)\right\|^2$$ → 只跟R有关

$$E_2(R,t)=\left\|u_x-Ru_p-t\right\|^2$$ → 对于任意R，总能得到$t=u_x-Ru_p$，使得$E_2(R,t)$取最小值0

ICP方法介绍

已知对应点的求解方法—证明

$$
\begin{aligned}
minE_1(R,t) &= \frac{1}{N_p}\sum_{i=1}^{N_p}\left\|x_i - u_x - R(p_i - u_p)\right\|^2 \\
&= \frac{1}{N_p}\sum_{i=1}^{N_p}\|x_i' - Rp_i'\|^2 \\
&= \frac{1}{N_p}\sum_{i=1}^{N_p} x_i'^T x_i' + p_i'^T R^T R p_i' - 2x_i'^T R p_i' \\
&= \frac{1}{N_p}\sum_{i=1}^{N_p} x_i'^T x_i' + p_i'^T p_i' - 2x_i'^T R p_i' \\
&= \frac{1}{N_p}\sum_{i=1}^{N_p} -2x_i'^T R p_i' + \underbrace{\frac{1}{N_p}\sum_{i=1}^{N_p}(x_i'^T x_i' + p_i'^T p_i')}_{\text{与}R\text{无关}}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad max\sum_{i=1}^{N_p} x_i'^T R p_i'$$

ICP方法介绍

已知对应点的求解方法—证明

$$x_i'^T R p_i' = \begin{pmatrix} x_{i0}' & x_{i1}' & x_{i2}' \end{pmatrix} R p_i' = \begin{pmatrix} x_{i0}' & x_{i1}' & x_{i2}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{R}_0 \\ \overline{R}_1 \\ \overline{R}_2 \end{pmatrix} p_i'$$

$$= x_{i0}'\overline{R}_0 p_i' + x_{i1}'\overline{R}_1 p_i' + x_{i2}'\overline{R}_2 p' = \boxed{\overline{R}_0 x_{i0}' p_i'} + \boxed{\overline{R}_1 x_{i1}' p_i'} + \boxed{\overline{R}_2 x_{i2}' p_i'}$$

$$R p_i' x_i'^T = \begin{pmatrix} \overline{R}_0 \\ \overline{R}_1 \\ \overline{R}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i0}' p_i' & x_{i1}' p_i' & x_{i2}' p_i' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\overline{R}_0 x_{i0}' p_i'} & \overline{R}_0 x_{i1}' p_i' & \overline{R}_0 x_{i2}' p_i' \\ \overline{R}_1 x_{i0}' p_i' & \boxed{\overline{R}_1 x_{i1}' p_i'} & \overline{R}_1 x_{i2}' p_i' \\ \overline{R}_2 x_{i0}' p_i' & \overline{R}_2 x_{i1}' p_i' & \boxed{\overline{R}_2 x_{i2}' p_i'} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x_i'^T R p_i' = Trace(R p_i' x_i'^T)$$

$$max \sum_{i=1}^{N_p} x_i'^T R p_i' = max \sum_{i=1}^{N_p} \mathrm{Trace}(R p_i' x_i'^T) = max\mathrm{Trace}(R(\underbrace{\sum_{i=1}^{N_p} p_i' x_i'^T}_{\text{令其为}H}))$$

$$= maxTrace(RH)$$

ICP方法介绍

已知对应点的求解方法—证明

目标 $\max\ Trace(RH)$

- 假设矩阵A为正定对称矩阵，则对于任意的正交矩阵B，都有 $Trace(A) \geq Trace(BA)$
- H并非正定对称矩阵，那么如何应用上述性质呢？

  Step 1 对H进行SVD分解，即$H = U\Lambda V^T$

  Step 2 构建正交矩阵X，令$X = VU^T$

  Step 3 $XH = VU^TU\Lambda V^T = V\Lambda V^T$，为正定对称矩阵

- 对于任意的正交矩阵B，根据上述性质，可得 $Trace(XH) \geq Trace(BXH)$
- 因为B为任意正交矩阵，因此BX可以取遍所有的正交矩阵，当然，也包括需要求解的旋转矩阵R，因此：

$$Trace(RH) \leq Trace(XH)$$

- 当$R = X$时，等式成立，因此得 $R = X = VU^T$， $t = u_x - Ru_p$

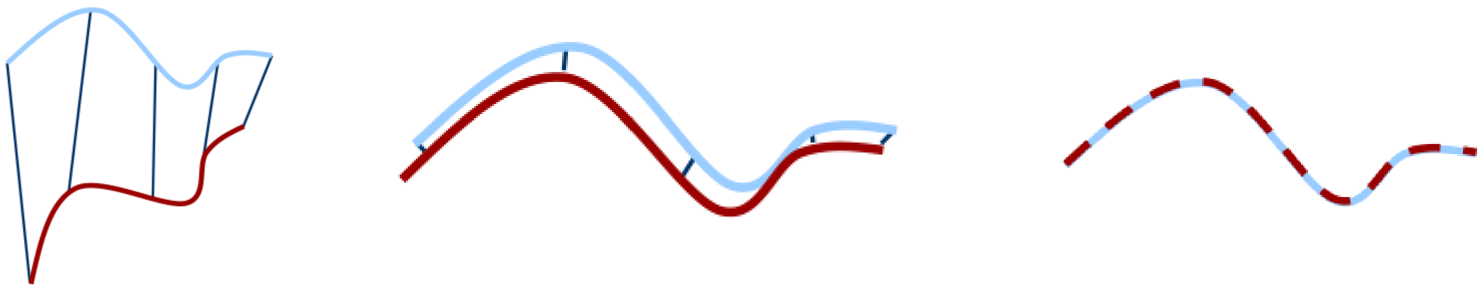
ICP方法介绍

未知对应点的求解方法

- 实际中，不知道对应点匹配
- 不能进一步到位计算出R和t
- 进行迭代计算
- EM算法的一个特例

算法流程：

- 寻找对应点（找最近的点）
- 根据对应点，计算R和t
- 对点云进行姿态变换，计算误差
- 不断迭代，直至误差小于某一个值



课程内容

帧间匹配算法

1、ICP匹配方法

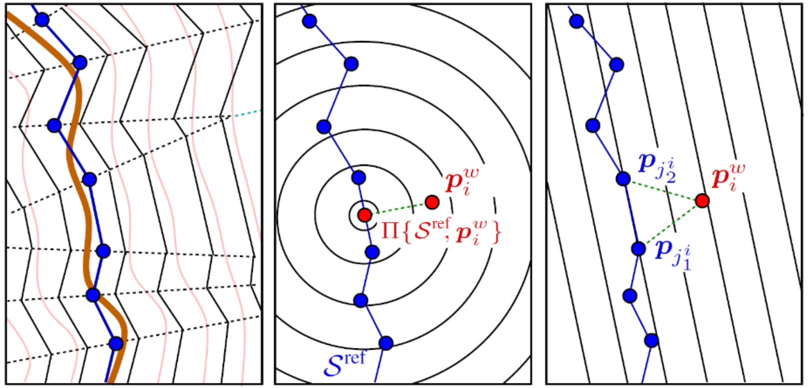
2、PL-ICP匹配方法

3、NICP匹配方法

4、IMLS-ICP匹配方法

PL-ICP方法介绍

示意图



(a) Distance to curve and to polyline (b) Point-to-point metric (c) Point-to-line metric

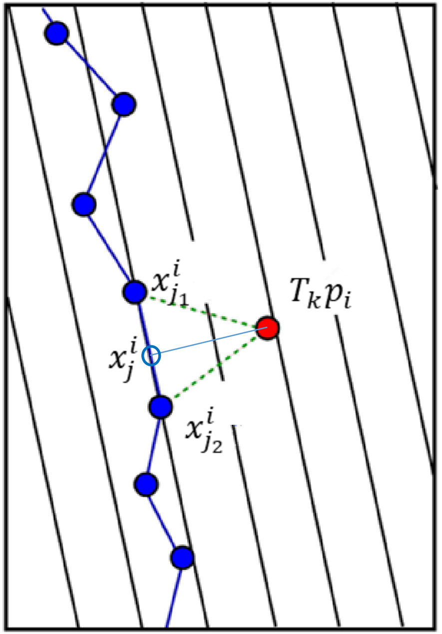
PL-ICP方法示意图：图(a)中棕色的曲线表示实际场景的墙，蓝色是某时刻的激光扫描点。

基本思想

- 激光点是对实际环境中曲面的离散采样；
- 重要的不是激光点，而是隐藏在激光点中的曲面；
- 最好的误差尺度为当前激光点到实际曲面的距离；关键的问题在于如何恢复曲面；
- PL-ICP的思想：用分段线性的方法来对实际曲面进行近似，用激光点到最近两点连线的距离来模拟实际激光点到曲面的距离。

PL-ICP方法介绍

数学描述



- 变量说明

  p_i：点云集合P中点i的三维坐标

  $x_{j_1}^i, x_{j_2}^i$：点云集合X中，距离p_i最近的两个点

  n_i^T：点$x_{j_1}^i, x_{j_2}^i$组成的直线的法向量

- PL-ICP的目标函数

$$\min_{T_k} \sum_i \left\| n_i^T (x_{j2}^i - T_k p_i) \right\|^2 \Leftrightarrow \min_{T_k} \sum_i \left\| x_j^i - T_k p_i \right\|^2$$

其中，$T_k = \begin{bmatrix} R_k & t_k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad T_k p_i = R_k p_i + t_k$

PL-ICP的目标函数实际上表示点到曲面的距离，即点到直线的距离

PL-ICP方法求解

已知数据

- 当前激光帧 P
- 参考激光帧 X
- 初始位姿 T_0

待求数据

- 两帧激光之间的相对位姿 T^*

算法流程

1. 把当前帧的数据p_i根据初始位姿进行变换，得到$T_k p_i$；
2. 对于当前帧中的点 $T_k p_i$， 在参考帧中找到最近的两个点 $x_{j_1}^i, x_{j_2}^i$， 并计算直线法向量 n_i^T 和投影点 x_j^i；
3. 计算点$T_k p_i$与投影点x_j^i的距离，去除误差过大的点；
4. 最小化误差函数 $\min_{T_k} \sum_i \left\| x_j^i - T_k p_i \right\|^2$

PL-ICP方法介绍

跟ICP的区别

1. 误差函数的形式不同，ICP为点对点的距离作为误差，PL-ICP为点到线的距离作为误差；PL-ICP的误差形式更符合实际情况。

2. 收敛速度不同，ICP为一阶收敛，PL-ICP为二阶收敛。

$$\left\|T_k - T_\infty\right\| < k\left\|T_{k-1} - T_\infty\right\| \qquad \left\|T_k - T_\infty\right\|^2 < k\left\|T_{k-1} - T_\infty\right\|^2$$

3. PL-ICP的求解精度高于ICP，特别是在结构化环境中。

4. PL-ICP对初始值更敏感；不单独使用，与里程计、CSM等一起使用。

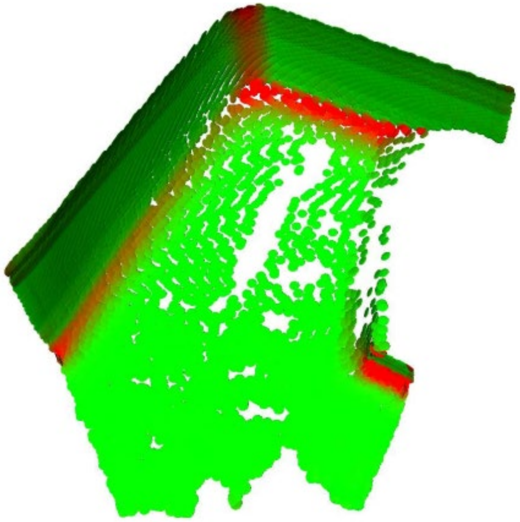
课程内容

帧间匹配算法

- 1、ICP匹配方法
- 2、PL-ICP匹配方法
- 3、NICP匹配方法
- 4、IMLS-ICP匹配方法

NICP(Normal ICP)匹配方法

NICP特征示意图



NICP特征示意图

基本思想

- 替换原始ICP方法中的对应点匹配(point correspondences)方法；
- 充分利用实际曲面的特征来对错误的点匹配进行滤除，主要的特征为法向量和曲率；
- 误差项除了考虑对应点的欧氏距离之外，同时还考虑对应点法向量的角度差。

NICP(Normal ICP)匹配方法

数学描述

p_i, p_j： 点云集合P^C, P^r中点的三维坐标
n_i： 点i处曲面的法向量
σ_i： 点i处曲面的曲率
T： 欧氏变换矩阵
$\mathcal{C}$： 两个点云P^C, P^r中对应点对的集合

$$\tilde{p}_i = \begin{pmatrix} p_i \\ n_i \end{pmatrix}$$

$$T \oplus \tilde{p}_i = \begin{pmatrix} Rp_i + t \\ Rn_i \end{pmatrix}$$

- 误差定义为：

$$\mathbf{e}_{ij}(\mathbf{T}) = \left(\tilde{\mathbf{p}}_i^{\mathrm{c}} - \mathbf{T} \oplus \tilde{\mathbf{p}}_j^{\mathrm{r}}\right)$$

- 目标函数的定义为：

$$\sum_{\mathcal{C}} \mathbf{e}_{ij}(\mathbf{T})^T \tilde{\mathbf{\Omega}}_{ij} \mathbf{e}_{ij}(\mathbf{T})$$

$$\tilde{\mathbf{\Omega}}_{ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Omega}_i^{\mathrm{s}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Omega}_i^{\mathrm{n}} \end{pmatrix}$$

$\tilde{\Omega}_{ij}$为信息矩阵，详细定义见下一页

NICP(Normal ICP)匹配方法

法向量和曲率的计算

- 找到点p_i周围半径R球形空间内的所有点V_i

$$\mu_i^s = \frac{1}{|\mathcal{V}_i|}\sum_{\mathbf{p}_j\in\mathcal{V}_i}\mathbf{p}_i$$

$$\mathbf{\Sigma}_i^s = \frac{1}{|\mathcal{V}_i|}\sum_{\mathbf{p}_j\in\mathcal{V}_i}(\mathbf{p}_i-\mu_i)^T(\mathbf{p}_i-\mu_i)$$

$$\Sigma_i^s = R\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}R^T$$

- 曲率的定义:

$$\sigma_{\mathrm{i}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

- 法向量的定义：最小特征值对应的特征向量。

- 信息矩阵$\widetilde{\Omega}_{ij}$的定义:

$$\Omega_i^s = \left(\Sigma_i^s\right)^{-1}$$

$$\Omega_i^n = \begin{cases} R\begin{bmatrix}\frac{1}{\varepsilon} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}R^T & \text{曲率足够小}\\ I & \end{cases}$$

NICP(Normal ICP)匹配方法

点匹配规则

- 如果没有well define的法向量，则拒绝。
- 两点间的距离大于阈值，则拒绝。 $\|\mathbf{p}_i^{\mathrm{c}} - \mathbf{T} \oplus \mathbf{p}_j^{\mathrm{r}}\| > \epsilon_d$
- 两点的曲率之差距大于阈值，则拒绝。 $|\log \sigma_i^{\mathrm{c}} - \log \sigma_j^{\mathrm{r}}| > \epsilon_\sigma$
- 两点的法向量角度之差大于阈值，则拒绝。 $\mathbf{n}_i^{\mathrm{c}} \cdot \mathbf{T} \oplus \mathbf{n}_j^{\mathrm{r}} < \epsilon_n$

NICP(Normal ICP)匹配方法

目标函数的求解

- 目标函数的定义为:

$$\sum_{\mathcal{C}} \mathbf{e}_{ij}(\mathbf{T})^T \tilde{\mathbf{\Omega}}_{ij} \mathbf{e}_{ij}(\mathbf{T})$$

- 非线性最小二乘问题，通过LM方法进行求解。

$$(\mathbf{H} + \lambda \mathbf{I})\mathbf{\Delta T} = \mathbf{b}.$$

$$H = \sum J_i^T J_i$$

$$J_{\mathrm{i}} = \frac{\partial e_{ij}(T)}{\partial T} \qquad \mathbf{T} \leftarrow \mathbf{\Delta T} \oplus \mathbf{T}$$

- 当迭代过程收敛即得到需要的解。
- 由于在寻找点匹配的过程中，考虑了环境曲面的法向量和曲率，因此可以提前排除一些明显是错误的匹配。
- 在误差定义中，除了考虑欧氏距离之外，还考虑了法向量之间的距离，因此具有更加准确的角度。
- 在开源领域，效果最好的ICP匹配方法。

NICP(Normal ICP)匹配方法

算法流程总结

- 计算参考激光帧和当前激光帧中每一个点的法向量和曲率。
- 根据当前解，把当前激光帧的点转换到参考坐标系中，并且根据欧氏距离、法向量、曲率等信息来选择匹配点(也有可能没有匹配点)。
- 根据上面介绍的方法，用LM方法进行迭代求解，迭代收敛即可得到两帧激光数据之间的相对位姿。

课程内容

帧间匹配算法

- 1、ICP匹配方法
- 2、PL-ICP匹配方法
- 3、NICP匹配方法
- **4、IMLS-ICP匹配方法**

IMLS(Implicit Moving Least Square)-ICP匹配方法

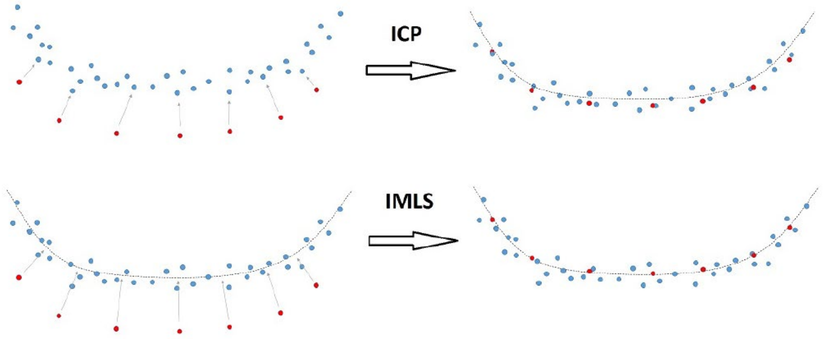
基本思想

思考1：每次激光扫描时，未必会扫描到同一个点，但大概率会扫描到同一个平面，因此传统点对点的ICP匹配并不合理，更恰当的方式是点与点云所在的曲面进行匹配。

问题：那么如何重建出点云所在的曲面呢？

思考2：对于新一帧点云，利用其所有点云进行匹配，从而求得该帧点云的旋转与平移姿态。这样操作计算量大，同时该帧点云分布不均匀时会导致计算结果出现便宜。是否可以仅选用具有代表性的点参与匹配环节。

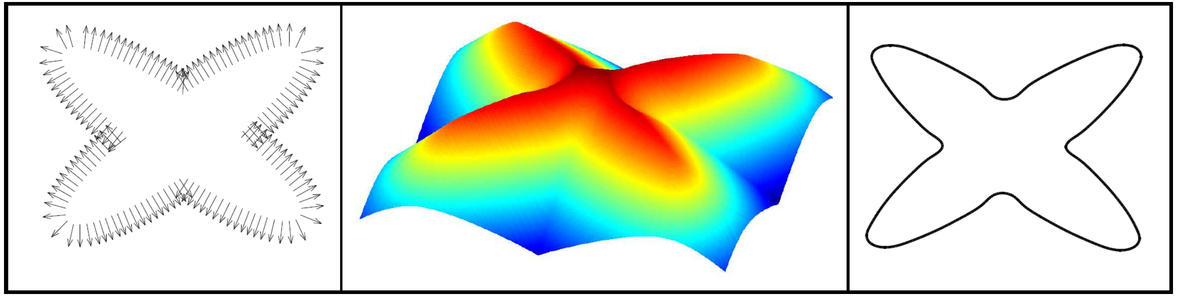
问题：如何定义具有代表性的点？



IMLS-ICP示意图

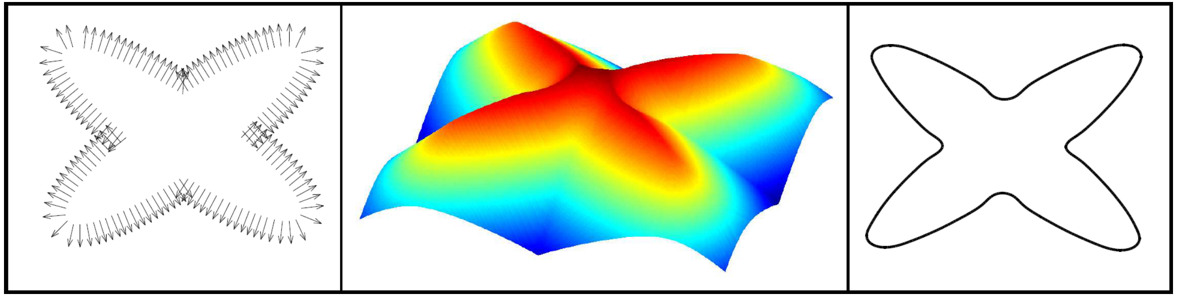
IMLS(Implicit Moving Least Square)-ICP匹配方法

曲面重建



IMLS(Implicit Moving Least Square)-ICP匹配方法

曲面重建



符号说明

P_k：前 n 帧激光数据组成的子图；

$I^{P_k}(\boldsymbol{x})$：$\mathbb{R}^3$空间的点 $\boldsymbol{x}$ 到点云集 P_k 蕴含的曲面的距离；

$\boldsymbol{p}_i$：点云集 P_k 中的点；

$\overrightarrow{\boldsymbol{n}_i}$：点 $\boldsymbol{p}_i$ 的法向量；

曲面表达式

$$I^{P_k}(\boldsymbol{x})=\frac{\sum_{\boldsymbol{p}_i\in P_k}\left(W_{\boldsymbol{p}_i}(x)\left((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}_i)\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{n}_i}\right)\right)}{\sum_{\boldsymbol{p}_j\in P_k}W_{\boldsymbol{p}_j}(x)}$$

其中，权重$W_{\boldsymbol{p}_i}(x)=e^{-\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}_i\|^2/h^2}$。

点云集合P_k蕴含的曲面：$I^{P_k}(\boldsymbol{x})=0$。

IMLS(Implicit Moving Least Square)-ICP匹配方法

匹配求解

符号说明

P_k: 前 n 帧激光数据组成的子图;

S_k: 新一帧激光数据;

$I^{P_k}(\boldsymbol{x}_j)$: 当前帧$S_k$中的点$\boldsymbol{x}_j$到曲面的距离;

$\overrightarrow{\boldsymbol{n}_i}$: 点 $\boldsymbol{p}_i$ 的法向量。

求解姿态$\boldsymbol{R},\boldsymbol{t}$

$$min \sum_{\boldsymbol{x}_j \in S_k} \left| I^{P_k}(\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}_j + \boldsymbol{t}) \right|$$

其中,

$$I^{P_k}(\boldsymbol{x}) = \frac{\sum_{\boldsymbol{p}_i \in P_k} \left(W_{\boldsymbol{p}_i}(x) \left((\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}_i) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{n}_i} \right) \right)}{\sum_{\boldsymbol{p}_j \in P_k} W_{\boldsymbol{p}_j}(x)}$$

IMLS(Implicit Moving Least Square)-ICP匹配方法

匹配求解

符号说明

P_k：前 n 帧激光数据组成的子图；

S_k：新一帧激光数据；

$I^{P_k}(\boldsymbol{x}_j)$：当前帧$S_k$中的点$\boldsymbol{x}_j$到曲面的距离；

$\overrightarrow{\boldsymbol{n}_j}$：点$\boldsymbol{x}_j$在曲面上投影点$\boldsymbol{y}_j$处的法向量。

$$\cancel{min \sum_{\boldsymbol{x}_j \in S_k} \left| I^{P_k}(\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}_j + \boldsymbol{t}) \right|}$$

求解姿态$\boldsymbol{R},\boldsymbol{t}$

计算点$\boldsymbol{x}_j$在曲面上的投影点$\boldsymbol{y}_j$，得到投影点$\boldsymbol{y}_j$后，通过点对点的ICP，即

$$min \sum_{\boldsymbol{x}_j \in S_k} \left| \overrightarrow{\boldsymbol{n}_j} \cdot (\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}_j + \boldsymbol{t} - \boldsymbol{y}_j) \right|^2$$

如何计算投影点$\boldsymbol{y}_j$

点$\boldsymbol{x}_j$、投影点$\boldsymbol{y}_j$、法向量$\overrightarrow{\boldsymbol{n}_j}$，三者之间的关系：

$$\boldsymbol{y}_j = \boldsymbol{x}_j - \beta \overrightarrow{\boldsymbol{n}_j}$$

定义：

$\beta = I^{P_k}(\boldsymbol{x}_j)$

$\overrightarrow{\boldsymbol{n}_j}$为$P_k$中距离点$\boldsymbol{x}_j$最近的点的法向量

IMLS(Implicit Moving Least Square)-ICP匹配方法

代表点(Informative Point)的选取

原则1：该点特征丰富，即为结构化的点：具有良好的曲率和法向量的定义。

原则2：曲率越小的点越好，因为曲率为0代表着直线，代表着最结构化的点，也代表着具有非常好的法向量定义，能够提供足够的约束。

原则3：选点的时候需要注意选取的激光点的均衡以保证可观性，因为是平面匹配，不存在角度不可观的情况。只需要考虑 X 方向和 Y 方向的可观性。要保证两者的约束基本上是一致的，才能让结果不出现偏移。

$$a_{2D}^2(x_i \times \overrightarrow{n_i}) \cdot X_v$$

$$-a_{2D}^2(x_i \times \overrightarrow{n_i}) \cdot X_v$$

$$a_{2D}^2(x_i \times \overrightarrow{n_i}) \cdot Y_v$$

$$-a_{2D}^2(x_i \times \overrightarrow{n_i}) \cdot Y_v$$

$$a_{2D}^2(x_i \times \overrightarrow{n_i}) \cdot Z_v$$

$$-a_{2D}^2(x_i \times \overrightarrow{n_i}) \cdot Z_v$$

$$a_{2D}^2|\overrightarrow{n_i} \cdot X_v|$$

$$a_{2D}^2|\overrightarrow{n_i} \cdot Y_v|$$

$$a_{2D}^2|\overrightarrow{n_i} \cdot Z_v|$$

参考资料

[1] Provably good moving least square

[2] An ICP variant using a point-to-line metric

[3] NICP:Dense Normal Based Point Cloud Registration

[4] IMLS:SLAM-scan-to-model matching based on 3D data

[5] Geometrically Stable Sampling for the ICP Algorithm

作业

- 详细见作业说明

结语

感谢聆听！

Thanks for Listening

附录

$$\frac{1}{N_p}\sum_{i=1}^{N_p} 2\left(x_i - u_x - R(p_i - u_p)\right)^T (u_x - Ru_p - t)$$

$$= 2(u_x - Ru_p - t)\ \frac{1}{N_p}\sum_{i=1}^{N_p}\left(x_i - u_x - R(p_i - u_p)\right)^T$$

$$= 2(u_x - Ru_p - t)\left(\frac{1}{N_p}\sum_{i=1}^{N_p}\left(x_i - u_x - R(p_i - u_p)\right)\right)^T$$

$$= 2(u_x - Ru_p - t)\left(\underbrace{\frac{1}{N_p}\textstyle\sum_{i=1}^{N_p} x_i}_{u_x} - u_x + Ru_p - \underbrace{\frac{1}{N_p}\textstyle\sum_{i=1}^{N_p} Rp_i}_{Ru_p}\right)^T$$

$$= 0$$