

第一题:

详见代码和截图

第二题:

第二题: 定义误差函数: $F(t) = \sum_{i=1}^n w_i \|R p_i + t - q_i\|^2$

对 t 求导: $\frac{\partial F}{\partial t} = \sum_{i=1}^n 2w_i (R p_i + t - q_i) = 2R \sum_{i=1}^n w_i p_i + 2t \sum_{i=1}^n w_i - 2 \sum_{i=1}^n w_i q_i = 0$

令 $\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i p_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$, $\bar{q} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i q_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$, 得 $t = \bar{q} - R\bar{p}$

将 t 代入优化方程: $\sum_{i=1}^n w_i \|R p_i + t - q_i\|^2 = \sum_{i=1}^n w_i \|R p_i + \bar{q} - R\bar{p} - q_i\|^2$
 $= \sum_{i=1}^n w_i \|R(p_i - \bar{p}) - (q_i - \bar{q})\|^2$

令 $x_i = p_i - \bar{p}$, $y_i = q_i - \bar{q}$, 优化问题变为 $R = \arg \min \sum_{i=1}^n w_i \|R x_i - y_i\|^2$

$\|R x_i - y_i\|^2 = x_i^T R^T R x_i - 2 y_i^T R x_i + y_i^T y_i = x_i^T \cdot x_i - 2 y_i^T R x_i + y_i^T y_i$

$\arg \min \sum_{i=1}^n w_i \|R x_i - y_i\|^2 = \arg \min \sum_{i=1}^n w_i (x_i^T \cdot x_i - 2 y_i^T R x_i + y_i^T y_i)$
 $= \arg \min \left(\sum_{i=1}^n w_i x_i^T x_i - 2 \sum_{i=1}^n w_i y_i^T R x_i + \sum_{i=1}^n w_i y_i^T y_i \right)$
 $= \arg \min \left(-2 \sum_{i=1}^n w_i y_i^T R x_i \right)$

$\sum_{i=1}^n w_i y_i^T R x_i = \text{tr}(W Y^T R X)$, $\arg \min \left(-2 \sum_{i=1}^n w_i y_i^T R x_i \right) = \arg \max \left(\sum_{i=1}^n w_i y_i^T R x_i \right)$
 $= \arg \max \text{tr}(W Y^T R X)$

$$\text{tr}(WY^T R X) = \text{tr}(R X W Y^T)$$

令 $S = X W Y^T$ ，求 S 的 SVD 分解， $S = U \Sigma V^T$ 。

$$\text{则 } \text{tr}(WY^T R X) = \text{tr}(R S) = \text{tr}(R U \Sigma V^T) = \text{tr}(\Sigma V^T R U)$$

$M = V^T R U$ ， V^T, R, U 为单位正交阵， M 也为单位正交阵， $M M^T = I$

$$m_j^T m_j = \sum_i m_{ij}^2 = 1, \max |m_{ij}| \leq 1.$$

$$\text{tr}(\Sigma M) = \sum_{i=1}^n \sigma_i m_{ii} \leq \sum_{i=1}^n \sigma_i, \text{ 当 } M = I, \text{tr}(\Sigma M) \text{ 取最大值.}$$

$$\text{此时 } I = M = V^T R U \Rightarrow V = R U \Rightarrow R = V U^T$$

第三题：

- (1) 激光器发射一个激光脉冲，并由计时器记录下出射的时间，回返光经接收器接收，并由计时器记录下回返的时间。两个时间相减即得到了光的飞行时间，而光速是一定的，因此在已知速度和时间后很容易就可以计算出距离。
- (2) 激光测量光束模型是四种概率密度的混合，有四种类型测量误差， z_{tk} 是激光束计算的范围， z_{max} 是传感器最大测量范围，蓝线代表实际测量的不确定性，为高斯分布，绿线代表可能的动态障碍物，红线代表不确定来源的噪声，粉线代表测量失败的可能性。

第四题：

- (1) 线加速度精度差，随时间累计误差大
- (2) 读取激光雷达和 IMU 数据，进行时间同步，记录当前帧激光雷达数据的开始和结束时间，根据 IMU 的线加速度积分和角速度积分得到对应时刻激光点在激光雷达坐标系下的位姿，根据位姿把每个激光点转换到同一个坐标系下，重新发布激光雷达数据。