深蓝学院
shenlanxueyuan.com

基于已知位姿的构图算法
(Grid-based)

主讲人 曾书格

越凡创新技术负责人
电子科技大学硕士

课程内容

建图算法

1. 地图分类
2. 覆盖栅格建图算法
3. 计数(Count Model)建图算法
4. TSDF建图算法

课程内容

建图算法

1. 地图分类
2. 覆盖栅格建图算法
3. 计数(Count Model)建图算法
4. TSDF建图算法

地图分类

概念

- 地图即为环境的空间模型
- 环境地图是机器人进行定位和规划的前提
- 地图主要分为三类：

尺度地图

拓扑地图

语义地图

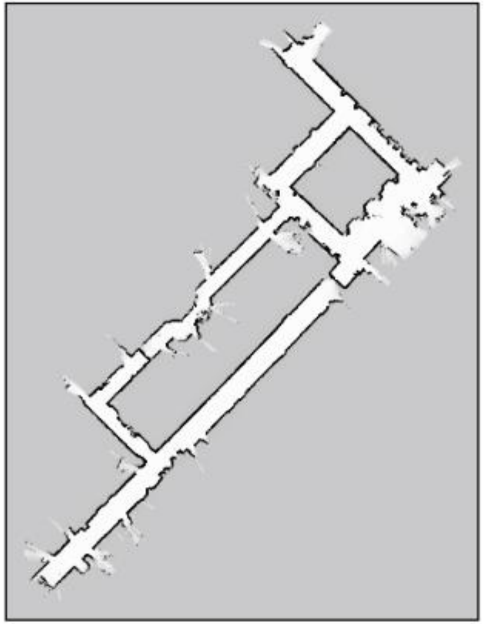
课程内容

建图算法

1. 地图分类
2. **覆盖栅格建图算法**
3. 计数(Count Model)建图算法
4. TSDF建图算法

覆盖栅格建图算法

栅格地图的特点

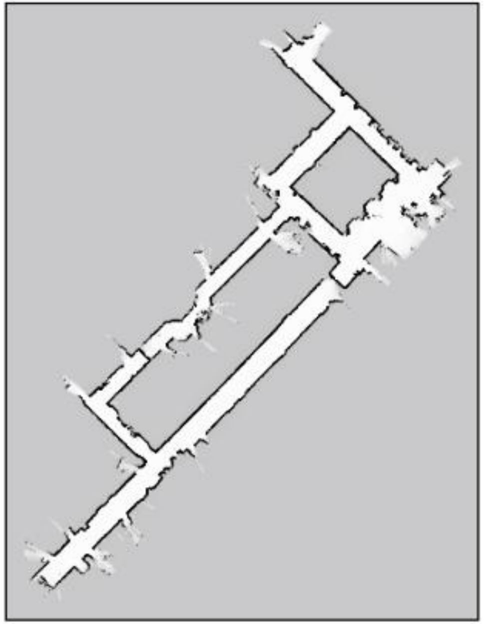


尺度地图

- 把环境分解成一个一个的小栅格
- 每个栅格有两种状态：占用(Occupied)或者空闲(free)
- 非参模型
- 随着地图的增大，内存需求急剧增加
- 天然区分可通行区域，适合进行轨迹规划

覆盖栅格建图算法

构建栅格地图



尺度地图

数学描述

- 给定机器人的位姿和传感器的观测数据(主要指激光雷达)。

$$data = \{x_1, z_1, x_2, z_2, \cdots x_t, z_t\}$$

- 估计出最可能的地图

$$m^* = arg \max_m P(m|data)$$

$$\downarrow$$

$$m^* = arg \max_m P(m|x_{1:t}, z_{1:t})$$

覆盖栅格建图算法

假设

- 栅格地图中的栅格m_i是一个二值随机变量，只能取两个值：占用(Occupied)或者空闲(Free)

$p(m_i)=1$表示被占用，
$p(m_i)=0$表示空闲。

- 考虑建图的过程中环境不会发生改变的情况，假设地图中的每一个栅格都是独立的，因此数学表达式可以表示为：

$$\mathrm{p}(m)=\prod p(m_i)$$

- 地图估计问题表示为：

$$p(m|x_{1:t},z_{1:t})=\prod p(m_i|x_{1:t},z_{1:t}) \quad (1)$$

$x_{1:t}$表示第1到t时刻机器人的位姿；
$z_{1:t}$表示第1到t时刻的激光数据；
m_i表示第i个栅格地图。

因此，估计环境的地图只需要对每一个独立的栅格进行估计即可。

覆盖栅格建图算法

地图估计

- 对于$p(m_i|x_{1:t},z_{1:t})$，根据贝叶斯公式可得：

$$\mathrm{p}(m_i|x_{1:t},z_{1:t})=\frac{p(z_t|m_i,z_{1:t-1},x_{1:t})p(m_i|z_{1:t-1},x_{1:t})}{p(z_t|z_{1:t-1},x_{1:t})}\quad(2)$$

由于每帧激光数据都是相互独立的，所以$p(z_t|m_i,z_{1:t-1},x_{1:t})= p(z_t|m_i,x_t)$，此外每个栅格$m_i$与$x_t$，$z_t$同时相关，单与其中某一项不相关。所以可化简得：

$$\mathrm{p}(m_i|x_{1:t},z_{1:t})=\frac{p(z_t|m_i,x_t)p(m_i|z_{1:t-1},x_{1:t-1})}{p(z_t|x_t)}\quad(3)$$

其中，$p(z_t|m_i,x_t)$可通过贝叶斯公式得：

$$\mathrm{p}(z_t|m_i,x_t)=\frac{p(m_i|z_t,x_t)p(z_t|x_t)}{p(m_i|x_t)}\quad(4)$$

覆盖栅格建图算法

地图估计

- 根据公式(3)与公式(4)可得：

$$p(m_i|x_{1:t},z_{1:t}) = \frac{p(m_i|z_t,x_t)p(z_t|x_t)}{p(m_i|x_t)}\frac{p(m_i|z_{1:t-1},x_{1:t-1})}{p(z_t|x_t)} = \frac{p(m_i|z_t,x_t)p(m_i|z_{1:t-1},x_{1:t-1})}{p(m_i)} \tag{5}$$

- 同理，对于$\neg m_i$：

$$p(\neg m_i|x_{1:t},z_{1:t}) = \frac{p(\neg m_i|z_t,x_t)p(z_t|x_t)}{p(\neg m_i|x_t)}\frac{p(\neg m_i|z_{1:t-1},x_{1:t-1})}{p(z_t|x_t)} = \frac{p(\neg m_i|z_t,x_t)p(\neg m_i|z_{1:t-1},x_{1:t-1})}{p(\neg m_i)} \tag{6}$$

栅格地图

地图估计

- 两者之比：

$$\frac{p(m_i|x_{1:t},z_{1:t})}{p(\neg m_i|x_{1:t},z_{1:t})}=\frac{p(\neg m_i)}{p(m_i)}\frac{p(m_i|z_t,x_t)p(m_i|z_{1:t-1},x_{1:t-1})}{p(\neg m_i|z_t,x_t)p(\neg m_i|z_{1:t-1},x_{1:t-1})}$$
$$=\frac{p(m_i|z_t,x_t)}{p(\neg m_i|z_t,x_t)}\frac{p(m_i|z_{1:t-1},x_{1:t-1})}{p(\neg m_i|z_{1:t-1},x_{1:t-1})}\frac{p(\neg m_i)}{p(m_i)}$$

由于$p(m_i)$非0即1，因此可得：

$$\frac{p(m_i|x_{1:t},z_{1:t})}{p(\neg m_i|x_{1:t},z_{1:t})}=\frac{p(m_i|x_{1:t},z_{1:t})}{1-p(m_i|x_{1:t},z_{1:t})}$$
$$=\frac{p(m_i|z_t,x_t)}{1-p(m_i|z_t,x_t)}\frac{p(m_i|z_{1:t-1},x_{1:t-1})}{1-p(m_i|z_{1:t-1},x_{1:t-1})}\frac{1-p(m_i)}{p(m_i)}$$

覆盖栅格建图算法

地图估计

$$\frac{p(m_i|x_{1:t},z_{1:t})}{p(\neg m_i|x_{1:t},z_{1:t})}=\frac{p(m_i|z_t,x_t)}{1-p(m_i|z_t,x_t)}\frac{p(m_i|z_{1:t-1},x_{1:t-1})}{1-p(m_i|z_{1:t-1},x_{1:t-1})}\frac{1-p(m_i)}{p(m_i)} \tag{7}$$

- 对于$p(x)$，定义对应的Log-Odd项： $l(x)=\log\frac{p(x)}{1-p(x)}$

  则： $p(x)=1-\frac{1}{1+\exp(l(x))}$

- 将公式(7)两边同时取log，可得：

$$log\frac{p(m_i|x_{1:t},z_{1:t})}{p(\neg m_i|x_{1:t},z_{1:t})}$$

$$=log\frac{p(m_i|z_t,x_t)}{1-p(m_i|z_t,x_t)}+log\frac{p(m_i|z_{1:t-1},x_{1:t-1})}{1-p(m_i|z_{1:t-1},x_{1:t-1})}+log\frac{1-p(m_i)}{p(m_i)}$$

覆盖栅格建图算法

地图估计

$$log\frac{p(m_i|x_{1:t},z_{1:t})}{p(\neg m_i|x_{1:t},z_{1:t})}=log\frac{p(m_i|z_t,x_t)}{1-p(m_i|z_t,x_t)}+log\frac{p(m_i|z_{1:t-1},x_{1:t-1})}{1-p(m_i|z_{1:t-1},x_{1:t-1})}+log\frac{1-p(m_i)}{p(m_i)}$$

根据$l(x)$的定义，上式可变成：

$$l(m_i|x_{1:t},z_{1:t})=l(m_i|z_t,x_t)+l(m_i|z_{1:t-1},x_{1:t-1})-l(m_i) \qquad (8)$$

- $l(m_i|x_t,z_t)$表示激光雷达的逆观测模型(inverse measurement Model)
- $l(m_i|x_{1:t-1},z_{1:t-1})$表示栅格$m_i$在$t$-1时刻的状态
- $l(m_i)$表示栅格m_i的先验值，该值对所有栅格都相同

覆盖栅格建图算法

算法流程

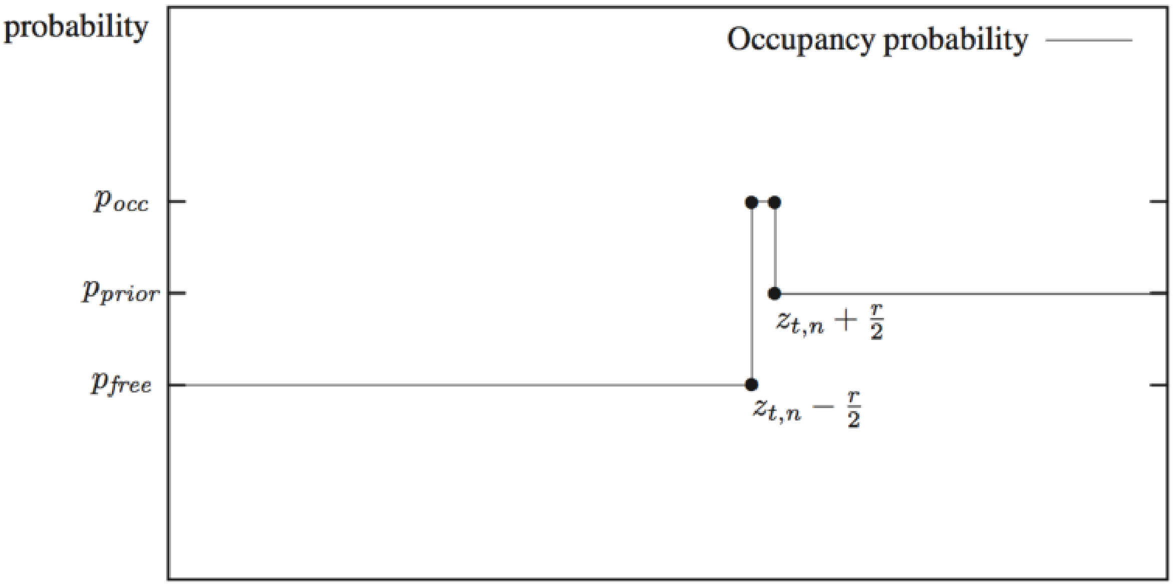
occupancy_grid_mapping($\{l_{t-1,i}\}, x_t, z_t$):

$\quad$ *for all cells* m_i *do*
$\quad\quad$ *if* m_i *in perceptual field of* z_t *then*
$\quad\quad\quad$ $l_{t,i} = l_{t-1,i} + \text{inv\_sensor\_model}(m_i, x_t, z_t) - l_0$
$\quad\quad$ *else*
$\quad\quad\quad$ $l_{t,i} = l_{t-1,i}$
$\quad\quad$ *endif*
$\quad$ *endfor*
$\quad$ *return* $\{l_{t,i}\}$

- 该算法对某一个栅格进行操作的时候，只有加法操作，因此具有非常快的更新速度。
- 更新的时候，需要知道传感器的逆测量模型。

覆盖栅格建图算法

激光雷达的逆观测模型



- 经过的栅格都为Free
- 击中的栅格为Occupied
- 其余栅格为Unknown

课程内容

建图算法

1. 地图分类
2. 覆盖栅格建图算法
3. 计数(Count Model)建图算法
4. TSDF建图算法

计数建图算法

概念

- 对于每一个栅格统计两个量：misses(i)和hits(i)，

  misses(i)表示栅格i被激光束通过的次数，即被标为free的次数；

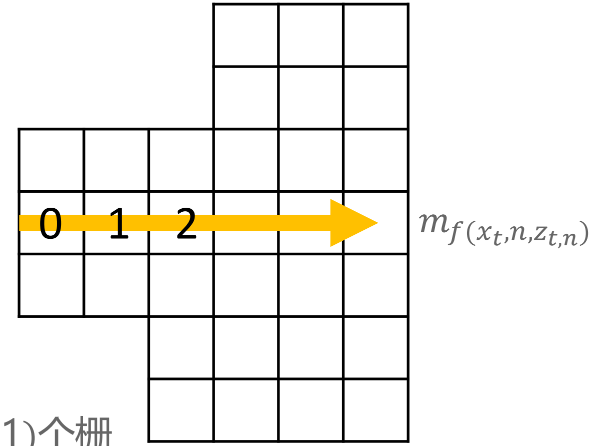
  hits(i)表示栅格i被激光束击中的次数，即被标为occupied的次数。

- 当hits(i) / (misses(i)+hits(i))超过阈值则认为该栅格为Occupied，否则认为栅格是Free的。

- hits(i)/(misses(i)+hits(i))表示栅格i的极大似然估计。

计数建图算法

观测模型



- t时刻的机器人位姿为x_t
- t时刻的激光雷达数据为z_t，第n个激光束为$z_{t,n}$(经过第$0-(z_{t,n}-1)$个栅格)
- $c_{t,n}$表示t时刻的第n个激光束是否为最大值（达到激光的测距极限，比如说打在空气上或者光被吸收）。$c_{t,n}$=1表示最大值，$c_{t,n}$=0表示正常值
- $f(x_t,n,z_{t,n})$表示t时刻第n个激光束击中的栅格的下标，$m_{f(x_t,n,z_{t,n})}$表示对应的栅格的占用概率。

$$p(z_{t,n}|x_t,m)=\begin{cases}\prod_{k=0}^{z_{t,n}-1}\left(1-m_{f(x_t,n,k)}\right) & c_{t,n}=1\\ m_{f(x_t,n,z_{t,n})}\prod_{k=0}^{z_{t,n}-1}\left(1-m_{f(x_t,n,k)}\right) & c_{t,n}=0\end{cases}$$

地图估计

- 地图估计的数学表达式：

$$m^* = arg\max_m P(m|x_{1:t}, z_{1:t})$$

等价于：

$$\begin{aligned} m^* &= arg\max_m P(z_{1:t}|m, x_{1:t}) \\ &= arg\max_m \prod P(z_t|m, x_t) \\ &\Leftrightarrow arg\max_m \sum \ln P(z_t|m, x_t) \end{aligned}$$

计数建图算法

地图估计

$$m^* = arg\max_m \sum \ln P(z_t|m, x_t)$$

$$\Updownarrow$$

$$m^* = arg\max_m \sum_{j=0}^{J}\sum_{t=1}^{T}\sum_{n=1}^{N}\left(I(f(x_t, n, z_{t,n}) = j)\cdot(1-c_{t,n})\cdot\ln m_j + \sum_{k=0}^{z_{t,n}-1} I(f(x_t, n, z_{t,k}) = j)\cdot\ln(1-m_j)\right)$$

$a_j = \sum_{t=1}^{T}\sum_{n=1}^{n} I(f(x_t, n, z_{t,n}) = j))\cdot(1-c_{t,n})$表示栅格 j 被激光集中的次数，即hits(j)

$b_j = \sum_{t=1}^{T}\sum_{n=1}^{n}\sum_{k=0}^{z_{t,n}-1} I(f(x_t, n, z_{t,k}) = j))$表示栅格 j 被激光通过的次数，即misses(j)

则：

$$m^* = arg\max_m \sum_{j=0}^{J} a_j \ln m_j + b_j \ln(1-m_j)$$

地图估计

- 目标函数：

$$m^* = arg\max_{m}\sum_{j=0}^{J} a_j \ln m_j + b_j \ln(1-m_j)$$

显然是关于m_j的函数，其极值可直接求对于m_j的导数，令其等于0即可：

$$\frac{\partial F(x)}{\partial m_j} = \frac{a_j}{m_j} - \frac{b_j}{1-m_j} = 0$$

可得：$m_j = \frac{a_j}{a_j+b_j}$,

其中，a_j表示$hits(j)$，b_j表示$misses(j)$

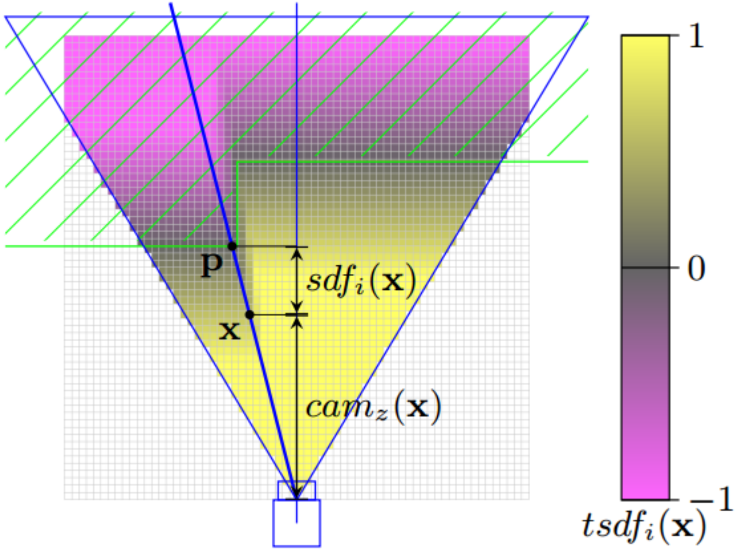
课程内容

建图算法

1. 地图分类
2. 覆盖栅格建图算法
3. 计数(Count Model)建图算法
4. TSDF建图算法

TSDF建图算法

TSDF示意图



TSDF示意图

基本思想

- 充分考虑传感器测量的不确定性，利用多次测量数据来实现更精确的表面重构，从而得到更精确、更细、更薄的地图。
- 为障碍物表面建立Signed Distance Function。
- 距离表面较远的点忽略不计，因为不会影响到表面重构。

TSDF建图算法

数学描述

- $sdf(x)$的定义：

$$sdf_i(x) = laser_i(x) - dist_i(x)$$

$laser_i(x)$表示激光测量距离

$dist_i(x)$表示栅格离传感器原点的距离

- $tsdf(x)$的定义：

$$tsdf_i(\mathbf{x}) = \max(-1, \min(1, \frac{sdf_i(\mathbf{x})}{t}))$$

- 多次观测的融合更新方法：

$$TSDF_i(\mathbf{x}) = \frac{W_{i-1}(\mathbf{x})TSDF_{i-1}(\mathbf{x}) + w_i(\mathbf{x})tsdf_i(\mathbf{x})}{W_{i-1}(\mathbf{x}) + w_i(\mathbf{x})}$$

$$W_i(\mathbf{x}) = W_{i-1}(\mathbf{x}) + w_i(\mathbf{x})$$

- 不同的观测值不断按照上式进行融合，即可构造出整个地图的TSDF场，从地图的TSDF场中可以重构得到曲面。

TSDF建图算法

TSDF实例

- 假设机器人位置为(0,0)，障碍物的位置在(10,0)。
- 对障碍物进行了5次测量，测量值分别为9.9494　10.0178　9.9733　10.0068　9.9676。
- 分辨率为0.05，截断距离为0.1。
- 需要更新的栅格一共有5个，终点距离分别为：9.90,9.95,10.00,10.05,10.10。分别分cell1~cell5表示。

cell1	0.049376	0.117762	0.073328	0.106820	0.067608
cell2	0.00062	0.06776	0.02332	0.05682	0.017608
cell3	-0.0506	0.01776	-0.026675	0.00682	-0.03239
cell4	-0.100624	-0.032238	-0.076672	-0.043180	-0.082392
cell5	-0.150624	-0.082238	-0.126672	-0.093180	-0.132392

TSDF建图算法

TSDF实例

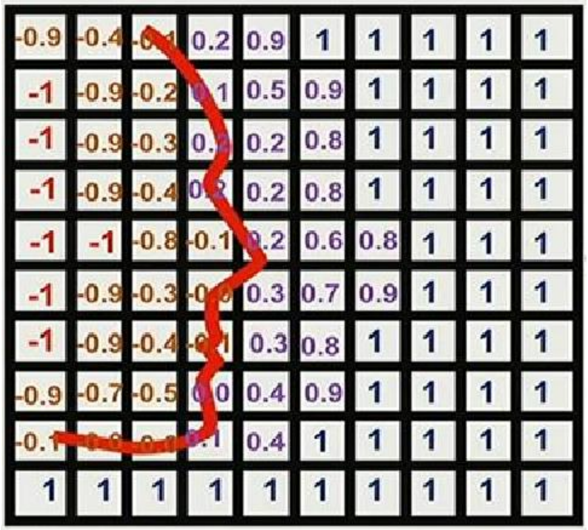
- 按照公式进行更新得：

cell1-9.90	cell2-9.95	cell3-10.00	cell4-10.05	cell5-10.10
0.082979	0.032979(b)	-0.010702(a)	-0.067021	-0.11702

- 插值得到的表面位置：x = 9.95 - 0.05*b/(a - b) = 9.9830
- 原始数据直接进行平均得到位置为：(9.9494+10.0178+9.9733+10.0068+9.9676)/5.0 = 9.9830
- TSDF等价于加权最小二乘！！！！
- 因此如果传感器的噪声服从高斯分布，那么通过TSDF进行融合，等价于通过最小二乘来进行融合，能比较好的进行曲面重构。

TSDF建图算法

TSDF算法



TSDF场示意图

- 寻找TSDF场中，符号进行变化的栅格，符号进行变化的地方即是曲面的所在。
- 在两个栅格之间进行插值，插值得到值为0的坐标就是曲面的精确位置。
- 融合多帧观测，等价于用加权最小二乘方法来对多帧数据进行融合。
- 能插值出确切的曲面，构建的地图最多只有一个栅格的厚度。

参考资料

[1]Probabilistic Robotics

[2]Truncated Signed Distance Function-Experiments on Voxel Size

作业

- 详细见作业说明

感谢聆听！

Thanks for Listening