深蓝学院

shenlanxueyuan.com

第十二章：基于优化的IMU与视觉信息融合 作业思路提示

主讲人 Horizon

纲要

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

- 第一部分：作业完成情况
- 第二部分：作业内容提示

作业完成情况

- 样例代码修改：

  尽量避免多版本代码采用注释区分的情况。

- 雅可比矩阵推导：

  没有问题。

- 公式证明：

  没有问题。

纲要

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

- 第一部分：作业完成情况
- 第二部分：作业内容提示

作业第一题

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

样例代码给出了使用 LM 算法来估计曲线 $y=\exp\left(ax^2+bx+c\right)$ 参数 a,b,c 的完整过程。

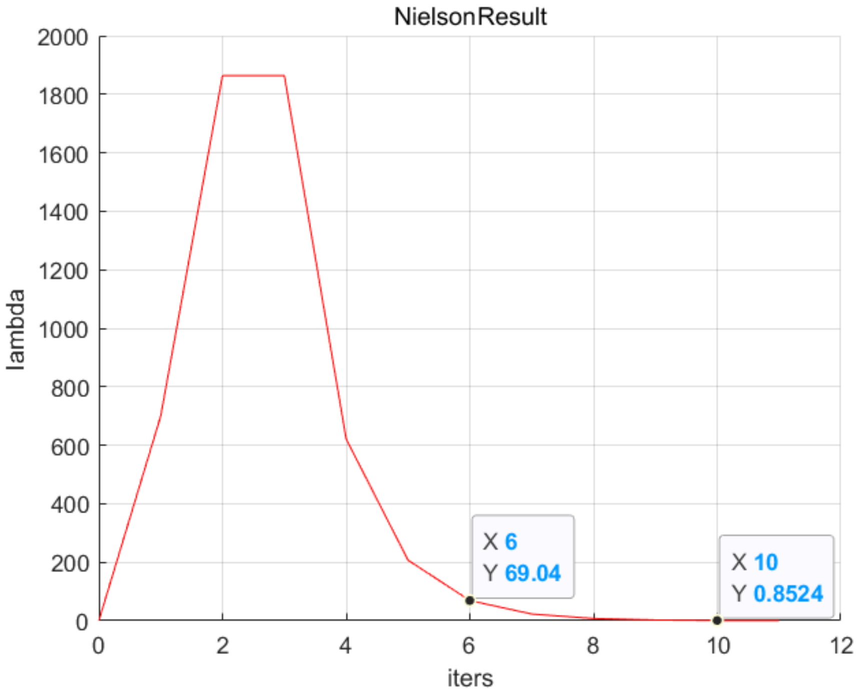
- 请绘制样例代码中 LM 阻尼因子 μ 随着迭代变化的曲线图；
- 请将曲线函数改成 $y=ax^2+bx+c$ ，修改样例代码中残差计算、雅可比计算等函数，完成曲线参数估计；
- 实现其他更优秀的阻尼因子策略，并给出实验对比（选做，评优秀），策略可参考论文的 4.1.1 节。

作业第一题（第一问）

请绘制样例代码中 LM 阻尼因子 μ 随着迭代变化的曲线图。

```
horizon@Horizon-MSI-PC:~/slam_ws/my_slam_code/class

Test CurveFitting start...
iter: 0 , chi= 36048.3 , Lambda= 0.001
iter: 1 , chi= 30015.5 , Lambda= 699.051
iter: 2 , chi= 13421.2 , Lambda= 1864.14
iter: 3 , chi= 7273.96 , Lambda= 1864.17
iter: 4 , chi= 284.409 , Lambda= 621.389
iter: 5 , chi= 107.978 , Lambda= 207.13
iter: 6 , chi= 102.289 , Lambda= 69.0432
iter: 7 , chi= 97.8286 , Lambda= 23.0144
iter: 8 , chi= 93.2756 , Lambda= 7.67147
iter: 9 , chi= 91.5627 , Lambda= 2.55716
iter: 10 , chi= 91.3988 , Lambda= 0.852385
iter: 11 , chi= 91.3959 , Lambda= 0.747288
problem solve cost: 18.8986 ms
   makeHessian cost: 13.4792 ms
-------After optimization, we got these parameters
0.942207  2.09414  0.96572
-------ground truth:
1.0,  2.0,  1.0
horizon@Horizon-MSI-PC:~/slam_ws/my_slam_code/class
```



作业第一题（第二问）

请将曲线函数改成 $y = ax^2 + bx + c$ ，修改样例代码中残差计算、雅可比计算等函数，完成曲线参数估计。

- 修改误差计算方法；
- 修改雅可比矩阵计算方法；
- 修改样本数据生成方法。

作业第一题（第二问）

- 修改误差计算方法和雅可比矩阵计算方法

```cpp
// 误差模型 模板参数：观测值维度，类型，连接顶点类型
class CurveFittingEdge: public Edge
{
public:
    EIGEN_MAKE_ALIGNED_OPERATOR_NEW
    CurveFittingEdge( double x, double y ): Edge(1,1, std::vector<std::string>{"abc"}) {
        x_ = x;
        y_ = y;
    }
    // 计算曲线模型误差
    virtual void ComputeResidual() override
    {
        Vec3 abc = verticies_[0]->Parameters();  // 估计的参数
        residual_(0) = abc(0) * x_ * x_ + abc(1) * x_ + abc(2) - y_;    //构建残差
    }

    // 计算残差对变量的雅克比
    virtual void ComputeJacobians() override
    {
        Vec3 abc = verticies_[0]->Parameters();
        Eigen::Matrix<double, 1, 3> jaco_abc;  // 误差为1维，状态量 3 个，所以是 1x3 的雅克比矩阵
        jaco_abc << x_ * x_, x_ , 1;
        jacobians_[0] = jaco_abc;
    }
    /// 返回边的类型信息
    virtual std::string TypeInfo() const override { return "CurveFittingEdge"; }
public:
    double x_,y_;  // x 值， y 值为 _measurement
};
```

作业第一题（第二问）

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

- 修改样本数据生成方法

```cpp
    double a=1.0, b=2.0, c=1.0;         // 真实参数值
    int N = 100;                          // 数据点
    double w_sigma= 0.02;                 // 噪声Sigma值

    std::default_random_engine generator;
    std::normal_distribution<double> noise(0.,w_sigma);

    // 构建 problem
    Problem problem(Problem::ProblemType::GENERIC_PROBLEM);
    shared_ptr< CurveFittingVertex > vertex(new CurveFittingVertex());

    // 设定待估计参数 a, b, c初始值
    vertex->SetParameters(Eigen::Vector3d (0.,0.,0.));
    // 将待估计的参数加入最小二乘问题
    problem.AddVertex(vertex);

    // 构造 N 次观测
    for (int i = 0; i < N; ++i) {

        double x = i/100.;
        double n = noise(generator);
        // 观测 y
        double y = a*x*x + b*x + c + n;
```

作业第一题（第三问）

实现其他更优秀的阻尼因子策略，并给出实验对比（选做，评优秀），策略可参考论文的 4.1.1 节。

- 第一种策略：

1. $\lambda_0 = \lambda_o$; λ_o is user-specified [5].
   use eq'n (13) for $\mathbf{h}_{\mathsf{lm}}$ and eq'n (16) for ρ
   if $\rho_i(\mathbf{h}) > \epsilon_4$: $\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p} + \mathbf{h}$; $\lambda_{i+1} = \max[\lambda_i / L_\downarrow, 10^{-7}]$;
   otherwise: $\lambda_{i+1} = \min[\lambda_i L_\uparrow, 10^7]$;

作业第一题（第三问）

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

- 第二种策略：

2. $\lambda_0 = \lambda_o \max\left[\mathsf{diag}[\mathbf{J}^\mathsf{T}\mathbf{W}\mathbf{J}]\right]$; λ_o is user-specified.
use eq'n (12) for $\mathbf{h}_{\mathsf{lm}}$ and eq'n (15) for ρ
$\alpha = \left(\left(\mathbf{J}^\mathsf{T}\mathbf{W}(\mathbf{y}-\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{p}))\right)^\mathsf{T}\mathbf{h}\right) / \left(\left(\chi^2(\mathbf{p}+\mathbf{h})-\chi^2(\mathbf{p})\right)/2 + 2\left(\mathbf{J}^\mathsf{T}\mathbf{W}(\mathbf{y}-\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{p}))\right)^\mathsf{T}\mathbf{h}\right)$;
if $\rho_i(\alpha\mathbf{h}) > \epsilon_4$: $\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}+\alpha\mathbf{h}$; $\lambda_{i+1} = \max\left[\lambda_i/(1+\alpha), 10^{-7}\right]$;
otherwise: $\lambda_{i+1} = \lambda_i + |\chi^2(\mathbf{p}+\alpha\mathbf{h}) - \chi^2(\mathbf{p})|/(2\alpha)$;

作业第一题（第三问）

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

- 第三种策略：

3. $\lambda_0 = \lambda_o \max\left[\text{diag}[\mathbf{J}^\top \mathbf{W} \mathbf{J}]\right]$; λ_o is user-specified [6].
   use eq'n (12) for $\mathbf{h}_{\mathsf{lm}}$ and eq'n (15) for ρ
   if $\rho_i(\mathbf{h}) > \epsilon_4$: $\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p} + \mathbf{h}$; $\lambda_{i+1} = \lambda_i \max\left[1/3, 1-(2\rho_i - 1)^3\right]$; $\nu_i = 2$;
   otherwise: $\lambda_{i+1} = \lambda_i \nu_i$; $\quad \nu_{i+1} = 2\nu_i$;

作业第二题

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

公式推导，根据课程知识，完成 F 和 G 中如下两项的推导过程：

$$f_{15} = \frac{\partial \alpha_{b_i b_{k+1}}}{\partial \delta b_k^g} = -\frac{1}{4}\left(R_{b_i b_{k+1}}\left[\left(a^{b_{k+1}} - b_k^g\right)\right]_\times \delta t^2\right)(-\delta t)$$

$$g_{12} = \frac{\partial \alpha_{b_i b_{k+1}}}{\partial n_k^g} = -\frac{1}{4}\left(R_{b_i b_{k+1}}\left[\left(a^{b_{k+1}} - b_k^a\right)\right]_\times \delta t^2\right)\left(\frac{1}{2}\delta t\right)$$

作业第二题

$$f_{15}=\frac{\partial \alpha_{b_ib_{k+1}}}{\partial \delta b_k^g}=\frac{\partial \frac{1}{2}a\delta t^2}{\partial \delta b_k^g}$$

消除无关项

$$=\frac{1}{4}\delta t^2\frac{\partial\left[q_{b_ib_k}\otimes\begin{bmatrix}1\\ \frac{1}{2}\omega\delta t\end{bmatrix}(a^{b_{k+1}}-b_k^a)\right]}{\partial \delta b_k^g}$$

四元数变换为旋转矩阵

$$=\frac{1}{4}\delta t^2\frac{\partial\left[R_{b_ib_k}\exp([\omega\delta t]_\times)(a^{b_{k+1}}-b_k^a)\right]}{\partial \delta b_k^g}$$

变换为求极限形式，在ω中的b_k^g项上增加扰动$(+\delta b_k^g)$

$$=\frac{1}{4}\delta t^2\lim_{\delta b_k^g\to 0}\frac{R_{b_ib_k}\exp([\omega-\delta b_k^g]_\times\delta t)(a^{b_{k+1}}-b_k^a)-R_{b_ib_k}\exp([\omega]_\times\delta t)(a^{b_{k+1}}-b_k^a)}{\delta b_k^g}$$

$$\exp([\phi+\delta\phi]_\times)\approx\exp([\phi]_\times)\exp([J_r(\phi)\delta\phi]_\times)$$

$$=\frac{1}{4}\delta t^2\lim_{\delta b_k^g\to 0}\frac{\left\{R_{b_ib_k}\exp([\omega\delta t]_\times)\exp([J_r(\omega\delta t)\cdot(-\delta b_k^g\delta t)]_\times)-R_{b_ib_k}\exp([\omega\delta t]_\times)\right\}(a^{b_{k+1}}-b_k^a)}{\delta b_k^g}$$

$$\exp(A)\approx I+A$$

$$\approx\frac{1}{4}\delta t^2\lim_{\delta b_k^g\to 0}\frac{\left\{R_{b_ib_k}\exp([\omega\delta t]_\times)(I+[-J_r(\omega\delta t)\delta b_k^g\delta t]_\times)-R_{b_ib_k}\exp([\omega\delta t]_\times)\right\}(a^{b_{k+1}}-b_k^a)}{\delta b_k^g}$$

合并同类项

$$=\frac{1}{4}\delta t^2\lim_{\delta b_k^g\to 0}\frac{R_{b_ib_k}\exp([\omega\delta t]_\times)[-J_r(\omega\delta t)\delta b_k^g\delta t]_\times(a^{b_{k+1}}-b_k^a)}{\delta b_k^g}$$

$$[a]_\times b=-[b]_\times a$$

作业第二题

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

$$\approx \frac{1}{4}\delta t^2 \lim_{\delta b_k^g \to 0} \frac{\left\{R_{b_ib_k}\exp([w\delta t]_\times)(I+[-J_r(w\delta t)\delta b_k^g \delta t]_\times) - R_{b_ib_k}\exp([w\delta t]_\times)\right\}(a^{b_{k+1}} - b_k^a)}{\delta b_k^g}$$

合并同类项

$$= \frac{1}{4}\delta t^2 \lim_{\delta b_k^g \to 0} \frac{R_{b_ib_k}\exp([w\delta t]_\times)[-J_r(w\delta t)\delta b_k^g \delta t]_\times (a^{b_{k+1}} - b_k^a)}{\delta b_k^g}$$

$[a]_\times b = -[b]_\times a$

$$= \frac{1}{4}\delta t^2 \lim_{\delta b_k^g \to 0} \frac{-R_{b_ib_k}\exp([w\delta t]_\times)[a^{b_{k+1}} - b_k^a]_\times (-J_r(w\delta t)\delta b_k^g \delta t)}{\delta b_k^g}$$

消元 δb_k^g 并求极限

$$= \frac{1}{4} R_{b_ib_k}\exp([w\delta t]_\times)[a^{b_{k+1}} - b_k^a]_\times J_r(w\delta t)\delta t^3$$

$R_{b_ib_{k+1}} = R_{b_ib_k}\exp([w\delta t]_\times)$，正如 $q_{b_ib_{k+1}} = q_{b_ib_k} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}w\delta t \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{4} R_{b_ib_{k+1}}[a^{b_{k+1}} - b_k^a]_\times J_r(w\delta t)\delta t^3$$

取 $J_r(w\delta t)$ 约等于 I

$$\approx \frac{1}{4} R_{b_ib_{k+1}}[a^{b_{k+1}} - b_k^a]_\times \delta t^3$$

作业第二题

$$g_{12} = \frac{\partial \alpha_{b_i b_{k+1}}}{\partial \delta n_k^g} = \frac{\partial \frac{1}{2} a \delta t^2}{\partial \delta n_k^g}$$

消除无关项

$$= \frac{1}{4}\delta t^2 \frac{\partial \left[q_{b_i b_k} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\omega \delta t \end{bmatrix} (a^{b_{k+1}} - b_k^a) \right]}{\partial \delta n_k^g}$$

四元数变换为旋转矩阵

$$= \frac{1}{4}\delta t^2 \frac{\partial \left[R_{b_i b_k} \exp([\omega \delta t]_\times)(a^{b_{k+1}} - b_k^a) \right]}{\partial \delta n_k^g}$$

变换为求极限形式，在ω中的n_k^g项上增加扰动$(+\delta n_k^g)$

$$= \frac{1}{4}\delta t^2 \lim_{\delta n_k^g \to 0} \frac{R_{b_i b_k} \exp([\omega + \frac{1}{2}\delta n_k^g]_\times \delta t)(a^{b_{k+1}} - b_k^a) - R_{b_i b_k} \exp([\omega]_\times \delta t)(a^{b_{k+1}} - b_k^a)}{\delta n_k^g}$$

$\exp([\varphi + \delta\varphi]_\times) \approx \exp([\varphi]_\times)\exp([J_r(\varphi)\delta\varphi]_\times)$

$$= \frac{1}{4}\delta t^2 \lim_{\delta n_k^g \to 0} \frac{\left\{ R_{b_i b_k} \exp([\omega \delta t]_\times)\exp([J_r(\omega\delta t)\cdot \frac{1}{2}\delta n_k^g \delta t]_\times) - R_{b_i b_k}\exp([\omega \delta t]_\times) \right\}(a^{b_{k+1}} - b_k^a)}{\delta n_k^g}$$

$\exp(A) \approx I + A$

$$\approx \frac{1}{4}\delta t^2 \lim_{\delta n_k^g \to 0} \frac{\left\{ R_{b_i b_k} \exp([\omega \delta t]_\times)(I + [\frac{1}{2}J_r(\omega\delta t)\delta n_k^g \delta t]_\times) - R_{b_i b_k}\exp([\omega \delta t]_\times) \right\}(a^{b_{k+1}} - b_k^a)}{\delta n_k^g}$$

合并同类项

$$= \frac{1}{4}\delta t^2 \lim_{\delta n_k^g \to 0} \frac{R_{b_i b_k} \exp([\omega \delta t]_\times)[\frac{1}{2}J_r(\omega\delta t)\delta n_k^g \delta t]_\times (a^{b_{k+1}} - b_k^a)}{\delta n_k^g}$$

$[a]_\times b = -[b]_\times a$

作业第二题

$\exp(x) \approx I + x$

$$\approx \frac{1}{4}\delta t^2 \lim_{\delta n_k^g \to 0} \frac{\left\{R_{b_ib_k}\exp([\omega\delta t]_\times)\left(I + [\tfrac{1}{2}J_r(\omega\delta t)\delta n_k^g \delta t]_\times\right) - R_{b_ib_k}\exp([\omega\delta t]_\times)\right\}(a^{b_{k+1}} - b_k^a)}{\delta n_k^g}$$

合并同类项

$$= \frac{1}{4}\delta t^2 \lim_{\delta n_k^g \to 0} \frac{R_{b_ib_k}\exp([\omega\delta t]_\times)\,[\tfrac{1}{2}J_r(\omega\delta t)\delta n_k^g \delta t]_\times\,(a^{b_{k+1}} - b_k^a)}{\delta n_k^g}$$

$[a]_\times b = -[b]_\times a$

$$= \frac{1}{4}\delta t^2 \lim_{\delta n_k^g \to 0} \frac{-R_{b_ib_k}\exp([\omega\delta t]_\times)\,[a^{b_{k+1}} - b_k^a]_\times \cdot \tfrac{1}{2}J_r(\omega\delta t)\,\delta n_k^g\,\delta t}{\delta n_k^g}$$

消元 δn_k^g 并求极限

$$= -\frac{1}{8}R_{b_ib_k}\exp([\omega\delta t]_\times)\,[a^{b_{k+1}} - b_k^a]_\times J_r(\omega\delta t)\,\delta t^3$$

$R_{b_ib_{k+1}} = R_{b_ib_k}\exp([\omega\delta t]_\times)$，正如 $q_{b_ib_{k+1}} = q_{b_ib_k} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\omega\delta t \end{bmatrix}$

$$\approx -\frac{1}{8}R_{b_ib_{k+1}}\,[a^{b_{k+1}} - b_k^a]_\times J_r(\omega\delta t)\,\delta t^3$$

取 $J_r(\omega\delta t)$ 约等于 I

$$\approx -\frac{1}{8}R_{b_ib_{k+1}}\,[a^{b_{k+1}} - b_k^a]_\times\,\delta t^3$$

作业第三题

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

根据课程知识，证明 LM 方法求解增量的公式：

$$\Delta x_{lm} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{v_j^T F'^T}{\lambda_j + \mu} v_j$$

作业第三题

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

求证LM方法的解为 $\Delta x = -\sum_{j=1}^{m} \frac{v_j^T F'(x)^T}{\lambda_j + \mu} v_j$，证明过程如下：

考虑最小二乘问题 $\Delta x = \arg\min_{\Delta x} F(x+\Delta x)$

$$= \arg\min_{\Delta x} \frac{1}{2}\|f(x+\Delta x)\|^2$$

$$= \arg\min_{\Delta x} \frac{1}{2}\|f(x) + J\Delta x\|^2$$

$$= \arg\min_{\Delta x} \left\{\frac{1}{2}f(x)^T f(x) + \Delta x^T J^T f(x) + \frac{1}{2}\Delta x^T J^T J \Delta x\right\}$$

可得 $F(x) = \frac{1}{2}f(x)^T f(x)$，$\underline{F'(x) = (J^T f(x))^T}$，$F''(x) \approx J^T J$

$F'(x)^T \in R^{m\times 1}$ 是列向量

令 $\partial F(x+\Delta x)/\partial \Delta x = 0$，并加入阻尼因子 μ，可得LM方法的增量方程 $(J^T J + \mu I)\Delta x = -J^T f(x)$

作业第三题

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

对矩阵 J^TJ 进行特征值分解得 $J^TJ = V\Lambda V^T = [v_1\ v_2\ \cdots\ v_m]\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_m^T\end{bmatrix}$

$= v_1\lambda_1 v_1^T + v_2\lambda_2 v_2^T + \cdots + v_m\lambda_m v_m^T$，其中对 $\forall i=1,\cdots,m$ 都有 $v_i\lambda_i v_i^T \in R^{m\times m}$

其中，$\lambda_i \in R^{1\times 1}$ 为 J^TJ 的第 i 个特征值，$v_i \in R^{m\times 1}$ 为对应的特征向量，且 $VV^T = V^TV = I$

则 $J^TJ + \mu I = V\Lambda V^T + \underline{VV^T\mu I VV^T}$ → $V^T\mu I V = \mu V^T I V = \mu I$，则此项为 $V(\mu I)V^T$

$= V\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m\end{bmatrix}V^T + V\begin{bmatrix}\mu & & & \\ & \mu & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu\end{bmatrix}V^T$

$= [v_1\ v_2\ \cdots\ v_m]\begin{bmatrix}\lambda_1+\mu & & & \\ & \lambda_2+\mu & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m+\mu\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_m^T\end{bmatrix} = V\underbrace{\Lambda'}_{\text{合并后的特征值对角阵}}V^T$

作业第三题

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

将 $\Lambda' = V^T(J^TJ+\mu I)V$，以及 $F'(x) = (J^Tf(x))^T$ 代入增量方程 $(J^TJ+\mu I)\Delta x = -J^Tf(x)$ 得

$$V^T(J^TJ+\mu I)\underbrace{V\cdot V^T}_{I}\Delta x = -V^TF'(x)^T \Rightarrow \boxed{\Lambda'}(V^T\Delta x) = -V^TF'(x)^T$$

多出来的

左右同时左乘 Λ'^{-1}

$$\Rightarrow V^T\Delta x = -\Lambda'^{-1}V^TF'(x)^T$$

左右同时左乘 V

$$\Rightarrow \underbrace{I}_{VV^T=I}\Delta x = -V\Lambda'^{-1}V^TF'(x)^T$$

$$= -\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1+\mu & & & \\ & \lambda_2+\mu & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m+\mu \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_m^T \end{bmatrix}F'(x)^T$$

$$= -\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{v_jv_j^T}{\lambda_j+\mu}\right\}F'(x)^T$$

$\frac{v_jv_j^T}{\lambda_j+\mu} \in R^{m\times m}$，$F'(x)^T \in R^{m\times 1}$

$$= -\sum_{j=1}^{m}\frac{v_jv_j^TF'(x)^T}{\lambda_j+\mu}$$

$$\Delta x_{lm} = -\sum_{j=1}^{n}\frac{v_j^TF'^T}{\lambda_j+\mu}v_j$$

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

感谢各位聆听！

Thanks for Listening