2.1 {Z,+}是群

对于$\forall a1\in Z$, $a2\in Z$, 有 $a1+a2\in Z$, 因此满足封闭性。

对于$\forall a1\in Z, a2\in Z, a3\in Z$, $(a1+a2)+a3=a1+(a2+a3)$，因此满足结合律。

Z 中存在 $0\in Z$,对于$\forall a\in Z$,有 $a+0=a$,因此慢足幺元

对于$\forall a\in Z$, 存在 $-a\in Z$, 使得 $a+(-a)=0$,因此满足逆。

2.2 $\{N,+\}$ 不是群；

对于$\forall a\in N$，且$a\neq 0, -a\notin N$,不满足逆的性质要求。因此不是群。

2.3 阿贝尔群 又称交换群或加群，是满足交换律的群。既对任意的 a,b∈G,都有 ab=ba，则称 G 为阿贝尔群。矩阵及乘法构成的群不一定是阿贝尔群

3

封闭性

对于$\forall X,Y\in R3$， $X\times Y$依然是一个向量，即 $X\times Y\in R3$,因此满足封闭性条件。

双线性

对于$\forall X,Y,Z\in R3$，$a,b\in R$，向量叉乘运算满足分配律和线性性，因此有：

$$(aX+bY)\times Z=aX\times Z+bY\times Z=a(X\times Z)+b(Y\times Z)$$

$$Z\times(aX+bY)=aZ\times X+bZ\times Y=a(Z\times X)+b(Z\times Y)$$

因此满足双线性

自反性

对于 $\forall X\in R3, |X\times X|=|X||X|sin0=0$，因此 $X\times X=0$,满足自反性。

雅可比等价

把三适量叉乘展开成点乘，向量的叉乘运算满足一下性质：

对于$\forall X,Y,Z\in R3$，

（$X\times Y$）$\times Z=(XZ)Y-(YZ)X$

$X\times(Y\times Z)=(XZ)Y-(XY)Z$

因此

$$X\times(Y\times Z)+Y\times(Z\times X)+Z\times(X\times Y)=X(YZ)-Z(XY)+(YX)Z-(YZ)X+(ZY)X-(ZX)Y=0$$

因此向量的叉乘运算满足雅可比恒等式。

综上所述，$g=(R3,R,\times)$构成李代数

4

令 $\phi = \theta a$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}(\phi^\wedge)^n = I + \frac{1}{2!}\theta a^\wedge + \frac{1}{3!}\theta^2 a^{\wedge 2} + \frac{1}{4!}\theta^3 a^{\wedge 3} + \frac{1}{5!}\theta^4 a^{\wedge 4} + \cdots$$

$$= I + \left(\frac{1}{2!}\theta - \frac{1}{4!}\theta^3 + \cdots\right)a^\wedge + \left(\frac{1}{3!}\theta^2 - \frac{1}{5!}\theta^4 + \cdots\right)(aa^T - I)$$

$$= I + \frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{2!}\theta^2 - \frac{1}{4!}\theta^4 + \cdots\right)a^\wedge + \frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{3!}\theta^3 - \frac{1}{5!}\theta^5 + \cdots\right)(aa^T - I)$$

$$= \frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{2!}\theta^2 - \frac{1}{4!}\theta^4 + \cdots\right)a^\wedge + \frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{3!}\theta^3 - \frac{1}{5!}\theta^5 + \cdots\right)aa^T + \frac{1}{\theta}\left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 + \cdots\right)I$$

$$= \frac{1-\cos\theta}{\theta}a^\wedge + \frac{1}{\theta}(\theta - \sin\theta)aa^T + \frac{\sin\theta}{\theta}I$$

$$(Ra)^\wedge v = (Ra) \times v$$

$$= (Ra) \times (RR^{-1} v)$$

$$= R[a \times (R^{-1} v)]$$

$$= R a^\wedge R^{-1} v$$

$$\therefore (Ra)^\wedge = R a^\wedge R^{-1} = R a^\wedge R^T$$

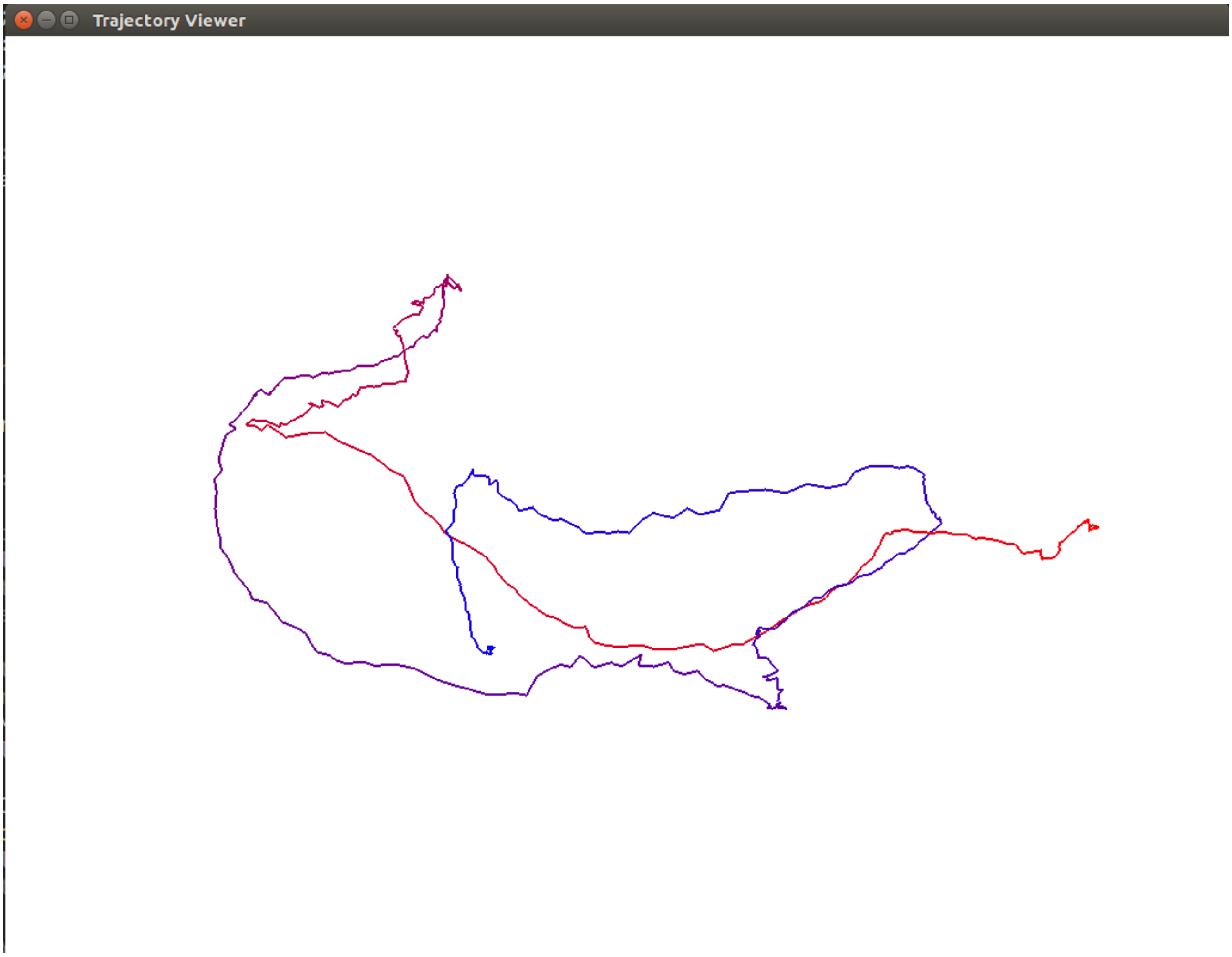
令 $\rho = \theta a$， $R\exp(\theta a^\wedge) R^T = R(\cos\theta I + (1-\cos\theta) a a^T + \sin\theta a^\wedge) R^T$

$$= \cos\theta I + (1-\cos\theta) Ra(Ra)^T + \sin\theta R a^\wedge R^T$$

$$= \cos\theta I + (1-\cos\theta) Ra(Ra)^T + \sin\theta (Ra)^\wedge$$

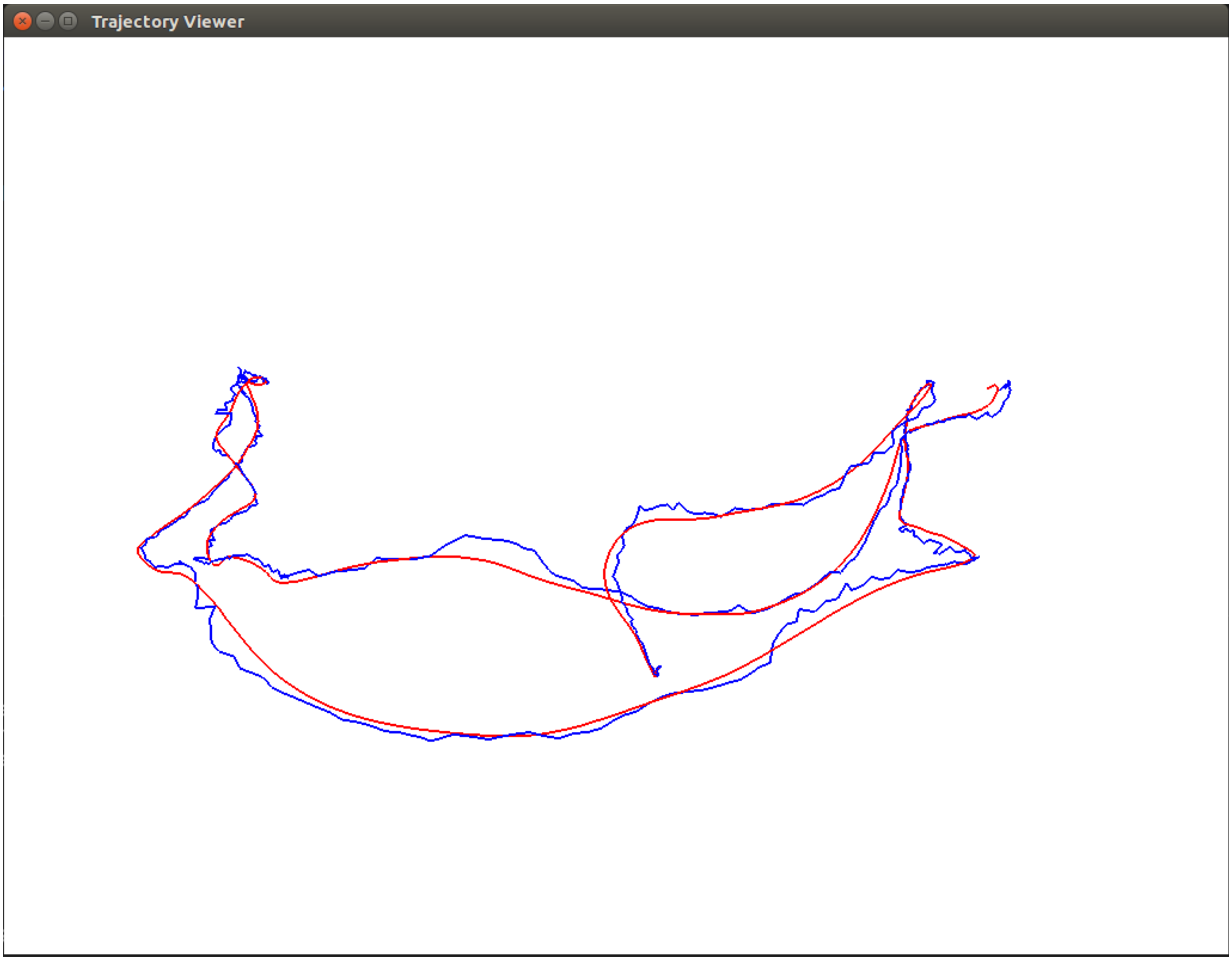
$$= \exp(\theta (Ra)^\wedge)$$

$$= \exp((R\rho)^\wedge)$$



8

```
touchair@touchair-2020T:~/dev_ws/src/code/build$ ./drawTrajectory
rmse: 2.20727
Framebuffer with requested attributes not available. Using available framebuffer. You may see visual artifacts.
```


Trajectory Viewer