

2.1 当 A 为方阵且可逆

2.2 通过逐步消除未知数来将原始线性系统转化为另一个更简单的等价的系统

2.3 将 A 分解成正交矩阵和上三角矩阵的乘积 $A=QR$ ，易解 $Rx=Q^Tb$

2.4 cholesky 分解是把一个对称正定的矩阵表示成一个下三角矩阵 L 和其转置的乘积的分解

2.5 结果截图如下

```
touchair@touchair-2020T1:~/ekf_ws/src/slambook2/ch3/useEigen/build$ cmake ..
-- Configuring done
-- Generating done
-- Build files have been written to: /home/touchair/ekf_ws/src/slambook2/ch3/useEigen/build
touchair@touchair-2020T1:~/ekf_ws/src/slambook2/ch3/useEigen/build$ make
Scanning dependencies of target eigenMatrix
[ 50%] Building CXX object CMakeFiles/eigenMatrix.dir/eigenMatrix.cpp.o
[100%] Linking CXX executable eigenMatrix
[100%] Built target eigenMatrix
touchair@touchair-2020T1:~/ekf_ws/src/slambook2/ch3/useEigen/build$ ./eigenMatrix
qr: 46.8762 -53.3688 86.8692 -103.426 37.3805 76.2208 -22.7419 136.122 108.806 1.02263 47.944 -127.693 -127.809 24.7652 40.2475 5.57849 92.4507 -108.292 25.1959
205.039 -127.948 -13.8321 -38.0046 -46.3376 86.7992 -53.7406 -43.617 18.5372 -15.1606 30.27 -58.5112 43.2286 -59.7442 -10.9114 163.793 175.655 -28.5672 -12.7451 9
7.0405 48.429 141.421 -29.2082 130.377 -100.269 121.016 26.9767 -224.403 -33.3942 -28.0192 84.9899 10.4529 -11.987 -147.886 3.09704 -3.03833 -59.6299 -38.2086 23.9
354 105.268 46.2248 -59.3823 -57.6053 146.934 5.90779 95.255 134.617 0.561815 -113.203 -65.1242 -63.0056 -13.0806 -128.599 -94.4147 -69.111 57.2002 27.8423 -33.5217
-119.786 -139.599 74.8781 80.7161 48.9892 -59.1912 60.9198 -175.812 -6.84092 -48.289 47.8883 -23.8593 -110.295 -19.7938 9.93966 34.2773 -33.5225 -76.4136 16.8938 3
3.2503 22.5197 -82.2214 0.329636
ch: 46.8762 -53.3688 86.8692 -103.426 37.3805 76.2208 -22.7419 136.122 108.806 1.02263 47.944 -127.693 -127.809 24.7652 40.2475 5.57849 92.4507 -108.292 25.1959
205.039 -127.948 -13.8321 -38.0046 -46.3376 86.7992 -53.7406 -43.617 18.5372 -15.1606 30.27 -58.5112 43.2286 -59.7442 -10.9114 163.793 175.655 -28.5672 -12.7451 9
7.0405 48.429 141.421 -29.2082 130.377 -100.269 121.016 26.9767 -224.403 -33.3942 -28.0192 84.9899 10.4529 -11.987 -147.886 3.09704 -3.03833 -59.6299 -38.2086 23.9
354 105.268 46.2248 -59.3823 -57.6053 146.934 5.90779 95.255 134.617 0.561815 -113.203 -65.1242 -63.0056 -13.0806 -128.599 -94.4147 -69.111 57.2002 27.8423 -33.5217
-119.786 -139.599 74.8781 80.7161 48.9892 -59.1912 60.9198 -175.812 -6.84092 -48.289 47.8883 -23.8593 -110.295 -19.7938 9.93966 34.2773 -33.5225 -76.4136 16.8938 3
3.2503 22.5197 -82.2214 0.329636
touchair@touchair-2020T1:~/ekf_ws/src/slambook2/ch3/useEigen/build$
```

3.1 给定一个大小为 $n \times n$ 的实对称矩阵 A，若对于任意长度为 n 的非零向量 X ，有 $X^TAX > 0$

恒成立，则矩阵 A 是一个正定矩阵；给定一个大小为 $n \times n$ 的实对称矩阵 A，若对于任意长度为 n 的非零向量 X ，有 $X^TAX \geq 0$ 恒成立，则矩阵 A 是一个半正定矩阵。

3.2 设 A 为 n 阶实方阵，如果存在某个数 λ_0 及某个 n 维非零列向量 η ，使得 $A\eta = \lambda_0\eta$ ，则称 λ_0 是方阵 A 的一个特征值， η 是方阵 A 的属于特征值 λ_0 的一个特征向量。特征值不一定是实数，通过以下式子构建方程求解特征值。

$$Ax = \lambda x \Rightarrow Ax = \lambda Ex \Rightarrow (\lambda E - A)x = 0$$

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{m1} & -a_{11} & \dots & \lambda - a_{mn} \end{vmatrix} = 0$$

3.3 相似的矩阵是同一个线性变换在不同基/坐标系下的的不同描述。对于同一个向量，选取的基底不同，其所对应的坐标值就不同。

3.4 矩阵不一定能够对角化， $n \times n$ 阶矩阵 A 可对角化的充分必要条件是矩阵 A 有 n 个线性无关的特征向量。Jordan 标准形如下

$$J = \begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s(\lambda_s) \end{bmatrix}$$

$$J_i(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

3.5 一个 $m \times n$ 的实数矩阵 A ，
我们想要把它分解成如下的形式

式 $A = U\Sigma V^T$ ，其中 U 和 V 均为单位正交阵，即有 $UU^T = I$ 和 $VV^T = I$ ， U 称为左奇异矩阵， V 称为右奇异矩阵， Σ 仅在主对角线上有值，称它为奇异值，其它元素均为 0。

3.6 伪逆矩阵 A^+ 的极限形式定义： $A^+ = \lim A^* (A^* A + \delta I)^{-1}$ ，伪逆矩阵更加常用的定义（基于 SVD 奇异值分解）： $A = U\Sigma V^*$ 伪逆矩阵公式： $A^+ = V\Sigma^+ U^*$ 。

3.7(a) $x = (A^T A)^{-1} A^T b$

4.1 激光传感器下看到的点左乘激光传感器相对世界坐标系下的变换矩阵。

4.2 结果截图如下

```
touchair@touchair-2020T:~/ekf_ws/src/slambook2/ch3/useEigen/build$ ./calCoord
这个点在激光系下的坐标: -0.641551 0.137248 1.10744
这个点在世界系下的坐标: 2.37806 -0.134779 0.873485
touchair@touchair-2020T:~/ekf_ws/src/slambook2/ch3/useEigen/build$
```

5.1 证明如下

$$\begin{aligned}
 1. \quad R &= \begin{bmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ e_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e'_1 & e'_2 & e'_3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} e_1^T e'_1 & e_1^T e'_2 & e_1^T e'_3 \\ e_2^T e'_1 & e_2^T e'_2 & e_2^T e'_3 \\ e_3^T e'_1 & e_3^T e'_2 & e_3^T e'_3 \end{bmatrix} \\
 R^T R &= \begin{bmatrix} e_1^T e'_1 & e_2^T e'_1 & e_3^T e'_1 \\ e_1^T e'_2 & e_2^T e'_2 & e_3^T e'_2 \\ e_1^T e'_3 & e_2^T e'_3 & e_3^T e'_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e'_1 e'_1 & e'_1 e'_2 & e'_1 e'_3 \\ e'_2 e'_1 & e'_2 e'_2 & e'_2 e'_3 \\ e'_3 e'_1 & e'_3 e'_2 & e'_3 e'_3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ e_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e'_1 & e'_2 & e'_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e'_1 & e'_2 & e'_3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ e_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ e_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} \\
 &= I \\
 |I| &= |R R^T| = |R| |R^T| = |R|^2, \text{ 所以 } \det R = \pm 1
 \end{aligned}$$

5.2 ε 的维度为 3, η 的维度为 1

5.3 证明如下

1. $q_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \eta_1 \end{bmatrix}$ $q_2 = \begin{bmatrix} \varepsilon_2 \\ \eta_2 \end{bmatrix}$

$q_1 q_2^T = \begin{bmatrix} \eta_1 \varepsilon_2^T + \eta_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \times \varepsilon_2 \\ \eta_1 \eta_2 - \varepsilon_1^T \varepsilon_2 \end{bmatrix}$

$q_1^T q_2 = \begin{bmatrix} \eta_1^T + \varepsilon_1^T \times & \varepsilon_1^T \\ -\varepsilon_1^T & \eta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_2 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\eta_1^T + \varepsilon_1^T \times) \varepsilon_2 + \varepsilon_1^T \eta_2 \\ \eta_1 \times \eta_2 - \varepsilon_1^T \varepsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1^T \varepsilon_2 + \varepsilon_1^T \eta_2 + \varepsilon_1^T \varepsilon_2 \\ \eta_1 \times \eta_2 - \varepsilon_1^T \varepsilon_2 \end{bmatrix} = q_2^T q_1$

$q_2^{\oplus} q_1 = \begin{bmatrix} \eta_2^T - \varepsilon_2^T \times & \varepsilon_2^T \\ -\varepsilon_2^T & \eta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \eta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_2^T \varepsilon_1 + \varepsilon_2^T \eta_1 - \varepsilon_2^T \varepsilon_1 \\ \eta_2 \times \eta_1 - \varepsilon_2^T \varepsilon_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_2^T \varepsilon_1 + \varepsilon_2^T \eta_1 + \varepsilon_2^T \varepsilon_1 \\ \eta_2 \times \eta_1 - \varepsilon_2^T \varepsilon_1 \end{bmatrix} = q_1^{\oplus} q_2$

$\varepsilon_2^T \varepsilon_1 = \varepsilon_1^T \varepsilon_2$

$\varepsilon_1^T \times \varepsilon_2 = \varepsilon_1 \times \varepsilon_2$

$-\varepsilon_2^T \cdot \varepsilon_1 = -\varepsilon_2 \times \varepsilon_1 = \varepsilon_1 \times \varepsilon_2$

8

第 9 行: 使用了初始化列表来初始化字段;

第 15 行: 使用了初始化列表来初始化对象: C++11 把初始化列表的概念绑定到了类型上, 并将其称之为 `std::initializer_list`, 允许构造函数或其他函数像参数一样使用初始化列表, 这就为类对象的初始化与普通数组和 POD 的初始化方法提供了统一的桥梁;

第 16 行: 使用了 lambda 表达式来比较元素大小, 其中: `const A&a1`, `const A&a2` 是参数列表, `return a1.index < a2.index;` 是函数体, 返回值是布尔型的大小比较结果;

第 17 行: 用 `auto` 关键字实现了自动类型推导, 让编译器自动设置变量 `a` 的类型;

第 17 行: C++ 引入了基于范围的 `for` 循环, 不用下标就能访问元素;