深蓝学院
shenlanxueyuan.com

视觉SLAM：从理论到实践
第二次课 三维空间刚体运动

主讲人 高翔

清华大学 自动控制与工程 博士
慕尼黑工业大学计算机视觉组 博士后
Email: gao.xiang.thu@gmail.com

第二讲 三维空间的刚体运动

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

1. 点与坐标系
2. 旋转矩阵
3. 旋转向量和欧拉角
4. 四元数
5. 实践：Eigen

1. 点与坐标系

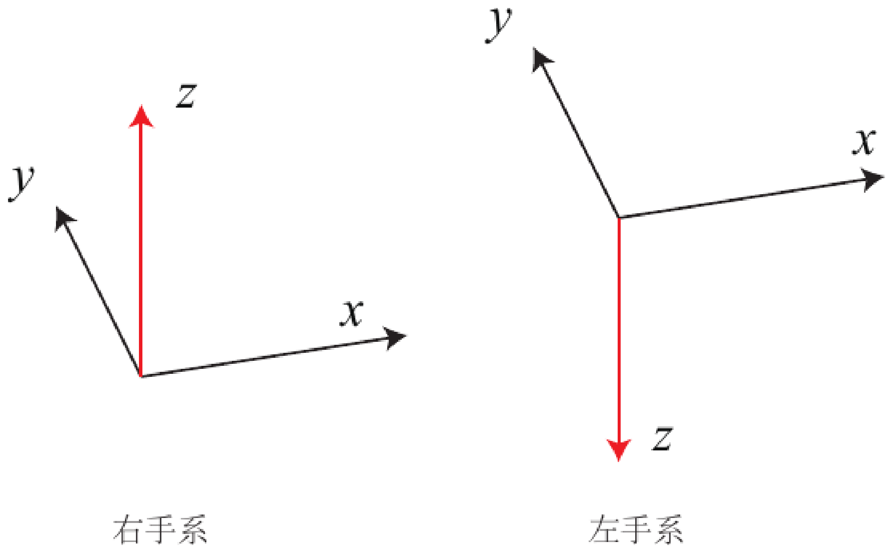
1. 点与坐标系

- 2D的情况：用两个坐标加旋转角表达

- 3D 的情况？

1. 点与坐标系

- 坐标系（参考系）
- 点
- 向量
- 向量的坐标



1. 点与坐标系

- 向量的运算可由坐标运算表达
- 加法和减法
- 内积

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = |\boldsymbol{a}| \, |\boldsymbol{b}| \cos \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle .$$

- 外积

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{b} \triangleq \boldsymbol{a}^{\wedge} \boldsymbol{b}.$$

1. 点与坐标系

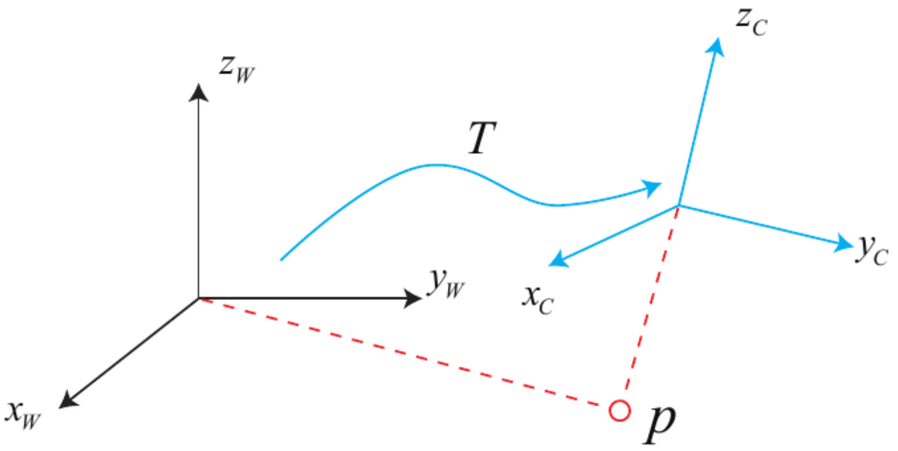
- 问题
  - 如何描述坐标系与坐标系之间的变化？
  - 如何计算同一个向量在不同坐标系里的坐标？

- SLAM中：
  - 固定的世界坐标系和移动的机器人坐标系
  - 不同的传感器坐标系

1. 点与坐标系

- 坐标系之间
- 直观地
  - 原点间的平移
  - 三个轴的旋转

- 平移是向量
- 旋转是什么？



2. 旋转矩阵

2. 旋转矩阵

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

- 考虑一次旋转
  - 坐标系 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ 发生了旋转，变成 $(\boldsymbol{e}_1^{'}, \boldsymbol{e}_2^{'}, \boldsymbol{e}_3^{'})$
  - 向量 $\boldsymbol{a}$ 不动，那么它的坐标如何变化？

$$[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \left[\boldsymbol{e}_1^{'}, \boldsymbol{e}_2^{'}, \boldsymbol{e}_3^{'}\right] \begin{bmatrix} a_1^{'} \\ a_2^{'} \\ a_3^{'} \end{bmatrix} . \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1^T \boldsymbol{e}_1^{'} & \boldsymbol{e}_1^T \boldsymbol{e}_2^{'} & \boldsymbol{e}_1^T \boldsymbol{e}_3^{'} \\ \boldsymbol{e}_2^T \boldsymbol{e}_1^{'} & \boldsymbol{e}_2^T \boldsymbol{e}_2^{'} & \boldsymbol{e}_2^T \boldsymbol{e}_3^{'} \\ \boldsymbol{e}_3^T \boldsymbol{e}_1^{'} & \boldsymbol{e}_3^T \boldsymbol{e}_2^{'} & \boldsymbol{e}_3^T \boldsymbol{e}_3^{'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^{'} \\ a_2^{'} \\ a_3^{'} \end{bmatrix} \triangleq \boldsymbol{R}\boldsymbol{a}^{'} .$$

2. 旋转矩阵

- R 称为旋转矩阵
- 可以验证：
  - R是一个正交矩阵；
  - R的行列式为+1。
- 满足这两个性质的矩阵称为旋转矩阵

$$SO(n) = \{\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{n \times n} | \boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{I}, \det(\boldsymbol{R}) = 1\}.$$

- Special Orthogonal Group 特殊正交群

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1^T \boldsymbol{e}_1^{'} & \boldsymbol{e}_1^T \boldsymbol{e}_2^{'} & \boldsymbol{e}_1^T \boldsymbol{e}_3^{'} \\ \boldsymbol{e}_2^T \boldsymbol{e}_1^{'} & \boldsymbol{e}_2^T \boldsymbol{e}_2^{'} & \boldsymbol{e}_2^T \boldsymbol{e}_3^{'} \\ \boldsymbol{e}_3^T \boldsymbol{e}_1^{'} & \boldsymbol{e}_3^T \boldsymbol{e}_2^{'} & \boldsymbol{e}_3^T \boldsymbol{e}_3^{'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^{'} \\ a_2^{'} \\ a_3^{'} \end{bmatrix} \triangleq \boldsymbol{R}\boldsymbol{a}^{'}.$$

于是，1到2的旋转可表达为：

$$a_1 = R_{12} a_2$$

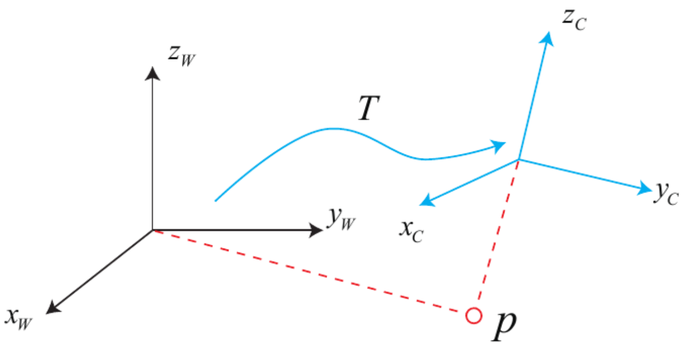
反之： $a_2 = R_{21} a_1$

矩阵关系： $\boxed{R_{21} = R_{12}^{-1} = R_{12}^T}$

2. 旋转矩阵

- 旋转加平移

$$a' = Ra + t.$$



- 两个坐标系间的运动可用R,t完全描述

- 欧拉定理（Euler’s rotation theorem）：刚体在三维空间里的一般运动，可分解为刚体上方某一点的平移，以及绕经过此点的旋转轴的转动。

2. 旋转矩阵

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

$$a' = Ra + t.$$

- 齐次坐标与变换矩阵
- 旋转加平移在表达复合情况下有不便之处：

$$b = R_1 a + t_1, \quad c = R_2 b + t_2. \quad \longrightarrow \quad c = R_2 \left(R_1 a + t_1 \right) + t_2.$$

- 齐次形式（Homogeneous）：

变换矩阵

$$\begin{bmatrix} a' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix} \triangleq T \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\tilde{b} = T_1 \tilde{a}, \ \tilde{c} = T_2 \tilde{b} \quad \Rightarrow \tilde{c} = T_2 T_1 \tilde{a}.$$

2. 旋转矩阵

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

- 齐次坐标

$$\tilde{a} = \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix}$$

乘任意非零常数时仍表达同一坐标

$$\tilde{a} = \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 变换矩阵的集合称为特殊欧氏群 SE(3)（Special Euclidean Group）

$$SE(3) = \left\{ \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times4} | \boldsymbol{R} \in SO(3), \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

逆形式：

$$\boldsymbol{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}^T & -\boldsymbol{R}^T t \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{bmatrix}.$$

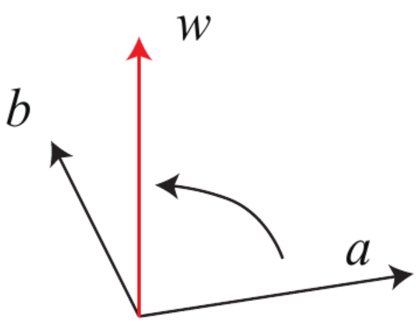
下一讲将深入介绍SO(3)和SE(3)

3. 旋转向量和欧拉角

3. 旋转向量与欧拉角

- 除了旋转矩阵/变换矩阵之外，还存在其他的表示方式
- 旋转矩阵 R 有九个元素，但仅有三个自由度
- 能否以更少的元素表达旋转？

- 旋转向量
  - 方向为旋转轴，长度为转过的角度
  - 称为角轴/轴角（Angle Axis）或旋转向量（Rotation Vector）



旋转表示

3. 旋转向量与欧拉角

- 旋转向量与矩阵的不同：
  - 仅有三个量
  - 无约束
  - 更直观
- 它们可以是同一个东西的不同表达方式

- 罗德里格斯公式（Rodrigues’ s Formula）： $\boldsymbol{R} = \cos\theta \boldsymbol{I} + (1-\cos\theta)\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^T + \sin\theta \boldsymbol{n}^{\wedge}.$
- 旋转矩阵转向量：

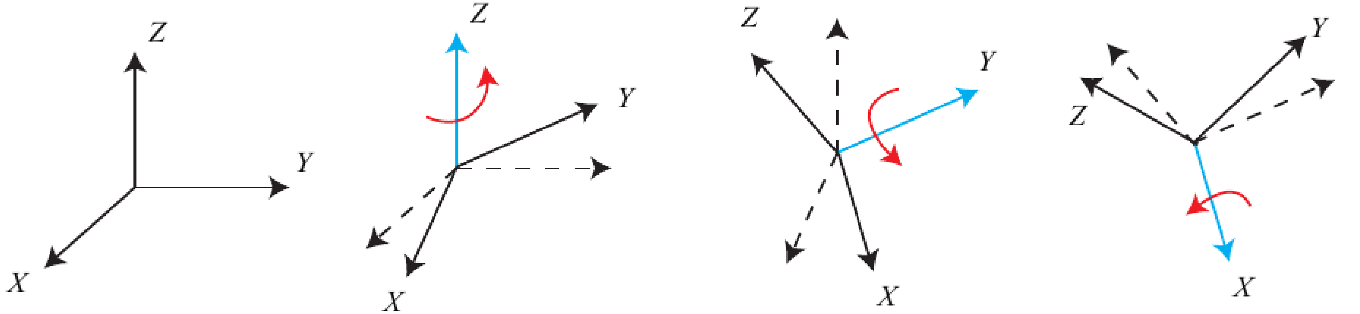
角度： $\theta = \arccos(\frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{R})-1}{2}).$

轴： $\boldsymbol{R}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}.$

3. 旋转向量与欧拉角

- 欧拉角（Euler Angles）
  - 将旋转分解为三个方向上的转动
  - 例，按Z-Y-X顺序转动
  - 轴可以是定轴或动轴，顺序亦可不同
  - 常见的有：yaw-pitch-roll，东北天
  - 不同领域的习惯有所不同

1. 绕物体的Z轴旋转，得到偏航角yaw；
2. 绕旋转之后的Y轴旋转，得到俯仰角pitch；
3. 绕旋转之后的X轴旋转，得到滚转角roll。

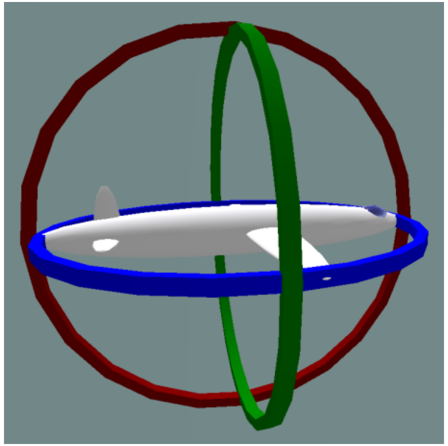


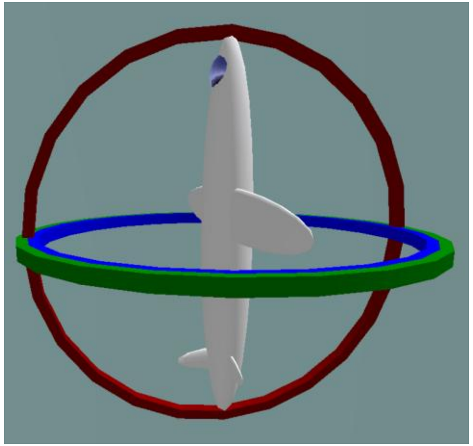
原始坐标系　　第一次旋转　　第二次旋转　　第三次旋转

3. 旋转向量与欧拉角

- 万向锁（Gimbal Lock）
  - 欧拉角的奇异性问题
  - 在特定值时，旋转自由度减1；
  - Yaw-pitch-roll顺序下，当pitch为90度时，存在奇异性

正常情况





奇异情况

3. 旋转向量与欧拉角

- 由于万向锁的存在，欧拉角不适合插值或迭代
- 多用于人机交互中

- 可以证明：仅用三个实数表达旋转时，不可避免地存在奇异性问题

- SLAM中亦很少用欧拉角表达姿态

4. 四元数

4. 四元数

- 2D 情况下，可用单位复数表达旋转

$$z = x + iy = re^{i\theta}$$

乘 i 即转90度，乘 –i 转-90度

- 三维情况下，四元数可作为复数的扩充
- 四元数（Quaternion）
  - 有三个虚部和一个实部
  - 虚部之间满足关系：

$$\boxed{\boldsymbol{q} = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k,}$$

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ ij = k, ji = -k \\ jk = i, kj = -i \\ ki = j, ik = -j \end{cases}.$$

自己和自己的运算像复数
自己和别人的运算像叉乘

4. 四元数

- 单位四元数可表达旋转

$$\boldsymbol{q} = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k, \qquad \boldsymbol{q} = [s, \boldsymbol{v}], \quad s = q_0 \in \mathbb{R}, \boldsymbol{v} = [q_1, q_2, q_3]^T \in \mathbb{R}^3,$$

- 为理解旋转的计算方式，先看四元数间如何运算

4. 四元数

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

- 四元数的运算

$$\boldsymbol{q}_a \pm \boldsymbol{q}_b = [s_a \pm s_b, \boldsymbol{v}_a \pm \boldsymbol{v}_b].$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{q}_a\boldsymbol{q}_b &= s_a s_b - x_a x_b - y_a y_b - z_a z_b \\ &+ (s_a x_b + x_a s_b + y_a z_b - z_a y_b)\, i \\ &+ (s_a y_b - x_a z_b + y_a s_b + z_a x_b)\, j \\ &+ (s_a z_b + x_a y_b - y_b x_a + z_a s_b)\, k.\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{q}_a\boldsymbol{q}_b = \left[s_a s_b - \boldsymbol{v}_a^T \boldsymbol{v}_b, s_a \boldsymbol{v}_b + s_b \boldsymbol{v}_a + \boldsymbol{v}_a \times \boldsymbol{v}_b\right].$$

$$\boldsymbol{q}_a^* = s_a - x_a i - y_a j - z_a k = [s_a, -\boldsymbol{v}_a].$$

$$\|\boldsymbol{q}_a\| = \sqrt{s_a^2 + x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}.$$

$$\boldsymbol{q}^{-1} = \boldsymbol{q}^* / \|\boldsymbol{q}\|^2.$$

$$k\boldsymbol{q} = [ks, k\boldsymbol{v}].$$

$$\boldsymbol{q}_a \cdot \boldsymbol{q}_b = s_a s_b + x_a x_b i + y_a y_b j + z_a z_b k.$$

4. 四元数

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

- 四元数到角轴： $$\boldsymbol{q} = \left[\cos\frac{\theta}{2}, n_x \sin\frac{\theta}{2}, n_y \sin\frac{\theta}{2}, n_z \sin\frac{\theta}{2}\right]^T.$$
- 角轴到四元数： $$\begin{cases} \theta = 2\arccos q_0 \\ [n_x, n_y, n_z]^T = [q_1, q_2, q_3]^T / \sin\frac{\theta}{2} \end{cases}.$$

4. 四元数

- 如何用四元数旋转一个空间点？
- 设点 p 经过一次以 q 表示的旋转后，得到了 p' ，它们关系如何表示？
  - 将 p 的坐标用四元数表示（虚四元数）： $\boldsymbol{p} = [0, x, y, z] = [0, \boldsymbol{v}].$
  - 旋转之后的关系为：

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{q}\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^{-1}.$$

- 四元数相比于角轴、欧拉角的优势：紧凑、无奇异性

小结

- 本章介绍了：
  - 坐标系、点、向量的表达
  - 旋转矩阵/变换矩阵
  - 旋转向量、欧拉角
  - 四元数

- 下面进入实践环节