



湖南大學
HUNAN UNIVERSITY

有限元方法及应用

课程名称：有限元方法及应用

姓名：周宇

学号：B2302S0113

任课教师：王琥

目录

1 均匀薄板应力分析	3
1.1 问题描述	3
2 均匀薄板有限元分析的过程	3
2.1 模型绘制与网格划分	3
2.2 单元刚度矩阵的建立与整体刚度矩阵装配	4
2.3 外载转化至节点	4
2.4 求解节点位移	5
2.5 应力分布求解	6

1 均匀薄板应力分析

1.1 问题描述

解决图 1 所示的平面应力问题。中心孔半径为 a 的均匀薄板承受单轴应力。 $a=0.5\text{ m}$ ， $h=3\text{ m}$ ， $w=6\text{ m}$ ， $E=10\times 10^6\text{ Pa}$ ，泊松比 $\mu=0.3$ 。计算应力分布。

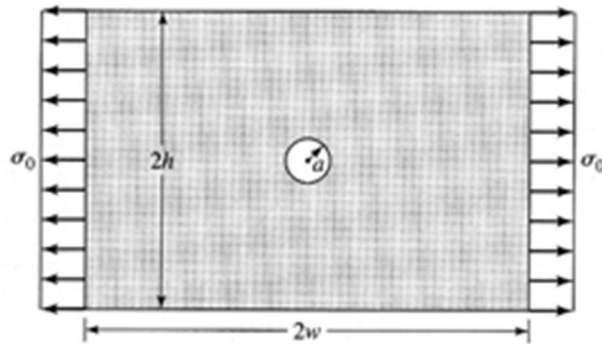


图 1 均匀薄板模型

2 均匀薄板有限元分析的过程

2.1 模型绘制与网格划分

模型绘制可以使用 Matlab 自带的矩形和圆工具，对于网格的划分，以一种较为简单的方式进行，效果如图 2 所示，我全部使用三角形单元，对于中间的圆形孔洞，圆形的网格划分在程序上存在一定难度，我用方形空洞代替。

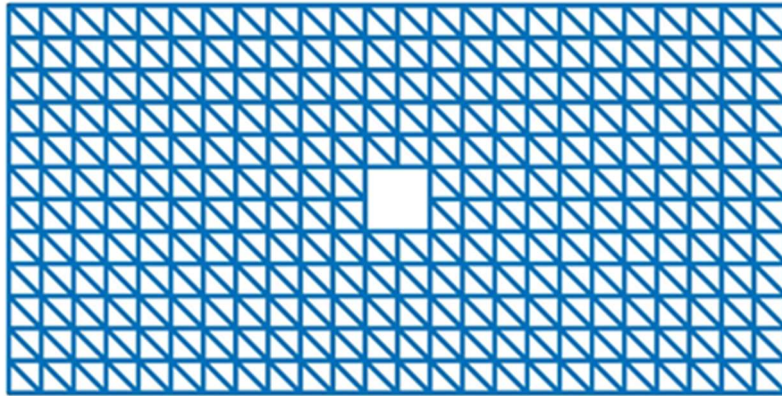


图 2 均匀薄板网格划分

2.2 单元刚度矩阵的建立与整体刚度矩阵装配

得到单元信息和节点信息之后，建立每一个单元对应的刚度矩阵，对于三角形单元来说，其核心利用到的公式如下：

$$[i \ j \ k \ N + i \ N + j \ N + k] \quad \text{公式 1} \leftarrow$$

下面我们将公式转化为代码语言，通过矩阵的索引准确的找到每个三角形单元对应的节点坐标，再通过矩阵乘法则可以得到每个单元的刚度矩阵。

为了利于后续的装配，我们将每个单元的刚度矩阵赋值到一个‘小装配矩阵’，此矩阵含义为把一个矩阵按照公式 1 规则装配到一个的方阵中。

2.3 外载转化至节点

板子两侧受到均布外载，我们需要将其转化到节点上，主要利用对形函数的积分上，其核心如公式 2

$$\{f^{(p)}\} = [N]^T \{p_x\} t$$

公式 2

其中

$$[N]^T = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ N_2 & 0 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_1 \\ 0 & N_2 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix}$$

2.4 求解节点位移

通过最小范数求得的结果较为准确，如表 1 展示的是四种方法得到的结果（前 301 个节点 x 方向位移）。

表 1 节点位移

Lsqminnorm(K,F)	Inv(K)*F	Pinv(K)*F	K\F
-6.1616E-04	-4.9019E-04	-6.1616E-04	-5.7071E-04
-6.1704E-04	-4.8256E-04	-6.1704E-04	-5.7158E-04
-6.1815E-04	-4.7112E-04	-6.1815E-04	-5.7268E-04
-6.1943E-04	-4.7684E-04	-6.1943E-04	-5.7395E-04
-6.2066E-04	-4.6921E-04	-6.2066E-04	-5.7517E-04
-6.2161E-04	-4.6539E-04	-6.2161E-04	-5.7611E-04
-6.2209E-04	-4.5013E-04	-6.2209E-04	-5.7657E-04
-6.2204E-04	-4.5013E-04	-6.2204E-04	-5.7651E-04
-6.2154E-04	-4.5013E-04	-6.2154E-04	-5.7601E-04
-6.2078E-04	-4.2343E-04	-6.2078E-04	-5.7524E-04
-6.1998E-04	-4.3869E-04	-6.1998E-04	-5.7443E-04
-6.1936E-04	-4.2343E-04	-6.1936E-04	-5.7380E-04
-6.1902E-04	-4.1962E-04	-6.1902E-04	-5.7345E-04
-5.6615E-04	-4.4250E-04	-5.6615E-04	-5.2070E-04
-5.6702E-04	-4.3297E-04	-5.6702E-04	-5.2156E-04
-5.6821E-04	-4.2725E-04	-5.6821E-04	-5.2274E-04
-5.6960E-04	-4.2343E-04	-5.6960E-04	-5.2411E-04
-5.7094E-04	-4.1962E-04	-5.7094E-04	-5.2545E-04
-5.7196E-04	-4.0817E-04	-5.7196E-04	-5.2646E-04
-5.7246E-04	-4.0817E-04	-5.7246E-04	-5.2695E-04
-5.7237E-04	-3.9673E-04	-5.7237E-04	-5.2685E-04
-5.7179E-04	-3.8910E-04	-5.7179E-04	-5.2626E-04
-5.7093E-04	-3.7384E-04	-5.7093E-04	-5.2538E-04

2.5 应力分布求解

得到每个三角形位移之后，需要求解每个单元的应力情况，这里采用公式进行计算，求出的应力就是三角形单元任意一点的应力。最后，得到的应力分布图如下图 5、6 所示。通过图像可以看出，Matlab 和 Ansys 的应力分布图变化趋势几乎一致。

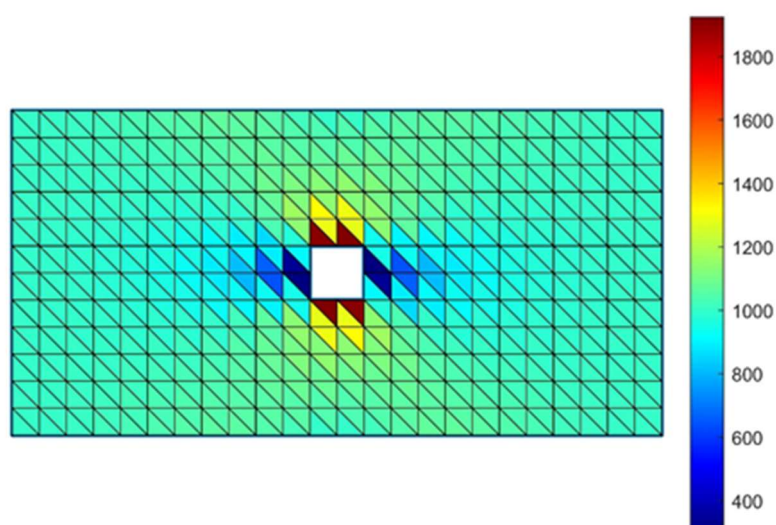


图 3 Matlab 应力分布图

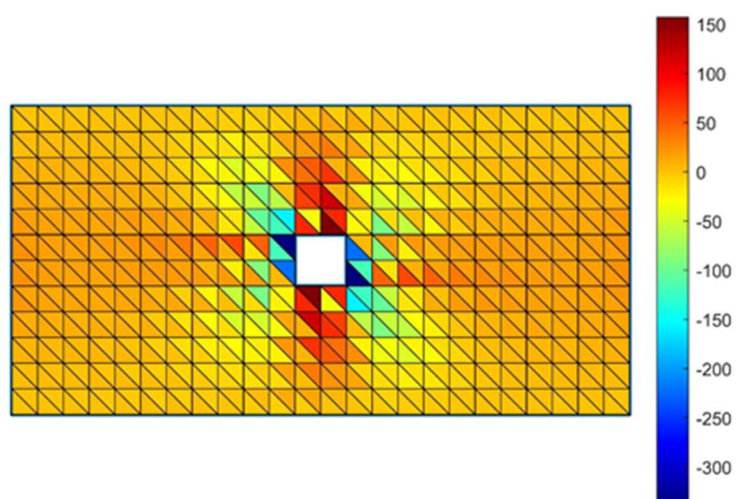


图 4 Ansys 应力分布图