吉林大学 JILIN UNIVERSITY

本科生毕业论文（设计）

中文题目 差分隐私下求解近似最小割问题的算法设计

英文题目 **Finding approximate minimum cut in differential privacy**

学生姓名 周宇恒

学　　号 **55210916**

学　　院 计算机科学与技术学院

专　　业 理科试验班 (计算机，唐敖庆班)

指导教师 **XXX**

2025 年 5 月

吉林大学学士学位论文（设计）承诺书

本人郑重承诺：所呈交的学士学位毕业论文（设计），是本人在指导教师的指导下，独立进行实验、设计、调研等工作基础上取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文（设计）不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写的作品成果。对本人实验或设计中做出重要贡献的个人或集体，均已在文中以明确的方式注明。本人完全意识到本承诺书的法律结果由本人承担。

承诺人：

2023 年 5 月 29 日

差分隐私下求解近似最小割问题的算法设计

摘　要

本文聚焦差分隐私框架下的近似最小割问题展开系统性研究，提出一种高效的算法。研究以仙人掌图表示法为切入点，首先剖析仙人掌结构与最小割的内在联系，进而指出表示法的非唯一性问题，并创新性地设计标准化处理算法。该算法通过分离 p 割与 t 割、压缩冗余节点等策略，在确保了输出结果唯一性的同时，维持算法的高效性。此外，本文深入研究边相邻图定义下最小割数量的敏感度，严格证明了其上界，为后续差分隐私算法的噪声添加机制提供理论依据。

基于上述理论成果，本文提出了三种满足 (ε,δ)-差分隐私的近似最小割计算算法：1. 对原图进行隐私化处理，然后用差分隐私发布的最小割值筛选出近似最小割；2. 差分隐私地发布最小割的割值与数量，利用 k 优选择机制获取近似最小割；3. 基于算法 2，融合指数机制与 Karger 收缩算法，显著降低加性误差。其中，最优算法以 $O(\frac{n\log n}{})$ 的加性误差输出具有数量保证的近似最小割，实现了隐私保护和结果可用性的平衡。本研究推进了差分隐私与图算法的交叉融合，为平衡效率、可用性与隐私保护的算法设计提供了新的技术路径。未来可进一步研究最小割数量的特性，探索更高效的隐私保护策略以降低算法加性误差。

关键词：

差分隐私, 最小割问题, 仙人掌图表示法

Finding approximate minimum cut in differential privacy

Author: Zhou Yuheng

Supervisor: XXX

Abstract

This paper design a differentially private (DP) algorithm for computing the approximate minimum cuts of a weighted graph. The research first analyzes the relationship between cactus representation and minimum cuts, identifies the non-uniqueness issue, and innovatively designs a standardization algorithm. This algorithm employs techniques such as separating p-cuts and t-cuts, compressing redundant nodes, thereby ensuring the uniqueness of the output while maintaining high computational efficiency. Additionally, the paper explores the sensitivity of the minimum cut count and rigorously proves its upper bound. This finding provides a theoretical basis for the laplace mechanism in subsequent differential privacy algorithms.

Based on the above results, this paper introduces three differentially private algorithms for approximating the minimum cuts of weighted graphs: The first algorithm privatizes the graph and finds approximate minimum cuts in the resulting synthetic graph; The second algorithm differentially privately releases the minimum cut value and the minimum cut count, and identifies approximate minimum cuts through top-k selection mechanism; Building on the second algorithm, the third one combines the exponential mechanism with Karger's contraction algorithm. These three algorithms are (ε, δ)-DP, and achieve an optimal additive error of $O(\frac{n \log n}{\varepsilon})$. This study strikes a balance between privacy protection and accuracy. Future work could further analyse the sensitivity of minimum cut count, and explore a more efficient machanism to reduce the additive error.

Keywords:

Differential Privacy, Minimum Cut Problem, Cactus Representation

目 录

第 1 章　绪论

1.1　研究背景与意义

随着人工智能的高速发展，数据的重要性愈发凸显，在部分领域的研究中，常涉及隐私数据的使用。以临床医学与人工智能交叉研究为例，若科研人员希望构建基于患者身体指标的抑郁症诊断模型，实现抑郁症早期精准识别。则模型可能需要诸如年龄、睡眠质量、激素水平、基因序列等数据。因此，为提升模型诊断能力，收集患者的敏感信息难以避免。此外，随着学术交流合作的不断深入，其它研究者可能申请获取数据用于分析验证，这使得隐私保护面临巨大挑战。数据收集方有责任保障患者的信息安全。所以，如何量化隐私泄露的风险、选择有效的隐私保护方法，已成为亟待解决的重要课题。

隐去隐私标识信息是一种常见的隐私保护手段。例如，在公开数据集时，通常会对姓名、生日、电话号码等可识别个人身份的信息进行隐藏处理。然而，这种保护方法存在固有缺陷。攻击者可借助辅助数据集并结合推理分析技术，重新建立匿名数据与具体个体之间的映射关系。例如，若攻击者持有包含姓名与基因对应关系的辅助数据集，就能通过基因信息比对，实现对目标个体的精确识别。上述攻击方式被称为关联分析攻击，已经有研究表明，此类攻击在实际场景中屡见不鲜。[1]

差分隐私作为一种基于严格数学证明的隐私保护模型，对应对上述挑战提供了有效解决方案。该模型通过量化算法的隐私保护程度，来要求算法添加精心设计的噪声，以确保单个数据对输出结果的影响不显著，从而在保证算法可用性的同时，实现对个体隐私的可靠保护。[2]

差分隐私与传统密码学均以隐私保护为目标，但两者侧重点存在差异。传统密码学聚焦于防范输出结果以外的隐私泄露风险，而差分隐私则是基于输出内容本身包含隐私信息的假设，通过优化信息发布机制来降低隐私泄露概率。

在一个包含 n 个点、m 条边的加权无向图 $G=(V,E)$ 中，割指顶点的二划分 $(X,V\backslash X)$，其权重定义为跨越该划分的边权总和。对于给定顶点对 $s,t\in V$，$s-t$ 最小割是满足 $s\in X,t\in V\backslash X$ 条件下的权重最小的割 $(X,V\backslash X)$，即实现 s 与 t 分离的最小权重割集。根据最大流最小割定理，$s-t$ 最小割问题与 $s-t$ 最大流问题存在对偶关系，两者在数值上相等。[3] 类似地，全局最小割问题旨在求解图中权值最小的割集，全局最小割的割值能够有效衡量图的连通性，是图论研究中的经典基础问题。

差分隐私通过量化指标精确衡量隐私的保护程度，这对算法设计提出了新的

约束：当两个输入近乎相同时，算法的计算过程也应当保持高度相似。以最小割算法为例，若两个输入图仅存在一条边的差异，其输出的最小割结果的概率变化需被限制在极接近 1 的常系数范围内。

设计满足差分隐私的最小割算法，不仅能够拓展算法在实际场景中的应用范围，还有助于加深对差分隐私框架下算法设计方法论的研究。此类算法的核心设计难点在于，如何在严格遵循差分隐私限制的同时，有效控制因添加噪声引入的误差，并同时确保算法输出结果的可用性。

1.2 研究现状

在过去的几十年间，人们提出了众多算法来解决最小割问题。

1993 年，Karger 等人提出了一种基于边收缩的随机算法，用于求解最小割问题，其时间复杂度为 $O(n^4 \log n)$。该研究同时证明，图中不同的最小割的数量上限为 $\frac{n(n-1)}{2}$。[4] 该算法构造简洁，易于理解。算法证明了在随机选择边收缩时，指定最小割有一定概率在算法终止时得以保留，通过重复执行算法，即可以高概率找到一个最小割。1996 年，Karger 等人对算法进行了改进，通过将多次独立重复执行的过程整合为树的分支结构，提升了算法效率，得到时间复杂度 $O(n^2 \log^3 n)$ 的最小割求解随机算法。[5] 此外，由于每个最小割的计算在该收缩算法中是同时进行的，因此算法在以高概率找到一个最小割的同时，也能以高概率找到所有的最小割。

2000 年，Karger 提出了一种基于树包装的随机算法，同样是用于求解最小割问题，其时间复杂度为 $O(m \log^3 n)$。[6] 这个算法同样适用于求解所有的最小割，且解决这一变体问题的时间复杂度为 $O(n^2 \log n)$。树包装是一个生成树的集合，其中图的每条边被各生成树包含的权重总和不超过其自身边权。Karger 等人定义了割与生成树 k 关联，当且仅当割的边集与生成树边集的并集大小不超过 k。通过树包装，可以构建一个规模为 $O(\log n)$ 的生成树集合，使得每个最小割都至少与集合中 $\frac{1}{3}$ 的生成树存在 2 关联。基于这个特性，通过枚举与这些生成树 2 关联的所有割，并计算其割值，即可获取全部最小割。目前，Karger 的树包装算法仍是求解最小割问题的最优随机算法。

2021 年，Li 提出了一种针对 Karger 算法去随机化的确定性算法，其时间复杂度为 $O(m^{1+o(1)})$。[7] 该算法是目前求解最小割问题的最优确定性算法。

1976 年，Dinitz 等人提出仙人掌图表示法（cactus representation），这个数据结构以一个稀疏化图的形式表示了所有的最小割。[8][9] 前文提到的最小割算法虽也能计算所有最小割，但直接存储规模为 $O(n^2)$ 的最小割集代价过高，因此最小割仅以中间结果的形式暂时存储，导致算法可扩展性受限。而仙人掌图表示法创新性

地用一个规模为 $O(n)$ 的图实现全部最小割的表示。具体而言，仙人掌图表示法由为图 G 建立的仙人掌图 Γ 和映射 $\varphi : V_G \to V_\Gamma$ 构成；给定的仙人掌图和映射满足，任意 G 中的最小割 $(X, V\backslash X)$ 对应的 Γ 中的点集 $\varphi(X)$ 与 $\varphi(V\backslash X)$ 一定可被至少一个 Γ 中的最小割分隔。Dinitz 等人也通过仙人掌图表示法，证明了图最小割的数量不超过 $\frac{n(n-1)}{2}$，这也是该结论最早的证明。

2009 年，Karger 基于树包装最小割算法，提出了一个构造仙人掌图表示法的随机算法，时间复杂度为 $O(m \log^4 n)$。[10] 该算法首先固定一根节点，并计算所有点与边的极小最小割，然后算法通过点的次极小最小割生成一棵树，最后通过边的极小最小割对树进行连边，形成仙人掌图，完成构造。2024 年，He 等人将仙人掌图表示法构建算法进行优化，得到了时间复杂度为 $O(m \log^3 n)$ 的随机算法，同时，通过算法去随机化处理，进一步得到了时间复杂度 $O(m\text{polylog}(n))$ 的确定性算法。[11]

近年来，差分隐私下的最小割算法研究取得进展。2010 年，Gupta 等人提出一种基于拉普拉斯机制的差分隐私最小割算法。[12] 该算法实现了 ε-差分隐私，其近似最小割与真实最小割的割值误差界为 $O(\ln n/\varepsilon)$。此外，他们还设计出满足 (ε, δ)-差分隐私的多项式时间复杂度算法，为输出一个最小割的差分隐私算法提供了高效解决方案。

Gomory-Hu 树是一种与仙人掌图表示相似的重要结构，近年来其结构性质及构造算法的隐私化研究取得重大突破。Gomory-Hu 树用树存储了全点对的 $s-t$ 最小割值，具体来说，图中 $s-t$ 最小割值等于 Gomory-Hu 树上 s 与 t 之间路径边权的最小值。2021 年，Li 等人提出了一个时间复杂度为 $\tilde{O}(m + n^{3/2}\epsilon^{-2})$ 的随机算法，用以构建 $(1+\epsilon)$-近似 Gomory-Hu 树。[13] 该算法基于其先前提出的最小隔离割方法。[14] 2024 年，Aamand 等人对算法进行了隐私化改造，得到了一个构建 Gomory-Hu 树的 ε-差分隐私的随机算法，树表示的最小割与真实值相比的加性误差为 $\tilde{O}(m/\varepsilon)$。[13]

2024 年，Liu 等人提出了一个面向图的隐私化算法，该算法能以 (ε, δ)-差分隐私地发布一个合成图，并保证合成图上最小割的值与其在原图中的真实割值的加性误差为 $\tilde{O}(\frac{\sqrt{nm}}{\epsilon})$。[20]

1.3 研究内容与组织架构

差分隐私的概念从提出至今已有二十年左右的发展历程，其中差分隐私图算法在近几年被广泛关注与研究。由于最小割不唯一，因此最小割问题有两个计算目标：求一个最小割和求所有最小割构成的割集。无论是 1993 年的 Karger 收缩算法还是 2021 年的 Li 确定性算法都能对这两个计算目标进行求解。然而，2010 年

Gupta 等人提出的差分隐私最小割算法仅能输出一个最小割。

所以，本文重点研究图结构与其所有最小割的性质关联，从仙人掌表示、最小割数量的敏感度出发，结合拉普拉斯机制，指数机制，k 优选择机制这三个差分隐私算法和 Karger 最小割求解算法，来进行新算法的设计。

围绕上述内容，本文共分为六章，具体组织如下：

- 第一章阐明研究的背景与意义，综述领域内的研究现状，提出核心问题与创新点。
- 第二章给出图论与差分隐私的形式化表示体系，回顾重要算法和定理。
- 第三章分析了仙人掌图表示的结构与 p 割、t 割的关联，并提出了同一个图 G 对应的仙人掌图表示非唯一性问题，最后通过构造算法定义了标准形式，并给出了一个高效的仙人掌图表示标准化算法。
- 第四章分析了最小割数量的敏感度，并基于仙人掌图表示建立了精细的敏感度分析框架，并完成敏感度上界的分析。
- 第五章渐进地提出了三个求解最小割的算法，第一个算法基于隐私化图算法和割值筛选法，第二个算法基于差分隐私最小割数量和隐私化 k 优选择机制，第三个算法在第二个算法的基础上，用指数机制和 Karger 算法进行了优化，实现了较低加法误差下的差分隐私近似最小割求解。
- 第六章总结了本文的主要创新，并对未来的优化方向进行了设想。

第 2 章　符号表示与理论基础

2.1　图与最小割

设无向图 $G=(V,E)$ 包含 n 个点与 m 条边，其中 V 为顶点集，E 为边集。

图中连接顶点 u 和 v 的边记作 (u,v)；若图带权，则以 w 来表示边权，即边 $(u,v)\in E$ 的权值为 $w(u,v)$。

对于图中的两个顶点子集 $V_1,V_2\subseteq V$，定义连接二者的边集为

$$E(V_1,V_2)=\{(v_1,v_2)\in E|v_1\in V_1,v_2\in V_2\}$$

当 $V_2=V\backslash V_1$ 时，$E(V_1,V_2)$ 简记为 $E(V_1)$。相应的，连接二者的边集的边权和为

$$w(V_1,V_2)=\sum_{v_1\in V_1,v_2,\in V_2}w(v_1,v_2)$$

当 $V_2=V\backslash V_1$ 时，$w(V_1,V_2)$ 简记为 $w(V_1)$。

如无特殊说明，本文中图为有限连通图，且允许图存在重边，但不允许存在自环。

下面给出图的最小割及相关定义。

定义 2.1.1. 给定图 $G=(V,E)$，割 $R=(V_1,V_2)$ 是将顶点集划分成两个不相交的非空子集 V_1 和 V_2，即满足 $V_1\neq\emptyset,V_2\neq\emptyset,V_1\cap V_2=\emptyset,V_1\cup V_2=V$。

由于划分得到的点集没有先后顺序，因此 (V_1,V_2) 和 (V_2,V_1) 表示的是同一个割，且只需要给出 V 的非空真子集 V_1 即可唯一确定一个割。这个割可以简化表示为 $\Delta(V_1)=R(V_1,V\backslash V_1)$。不难证明，$\Delta(V_1)=\Delta(V_2)$ 当且仅当 $V_1=V_2$ 或 $V_1=V\backslash V_2$。

定义 2.1.2. 给定图 $G=(V,E)$ 及割 $R=(V_1,V_2)$，割 R 的边集为 $E(V_1,V_2)$，对应简化表示下割 $\Delta(V_1)$ 的边集为 $E(V_1)$。

定义 2.1.3. 给定图 $G=(V,E)$ 及割 $R=(V_1,V_2)$，割的容量（又称割值）为割的边集的边权和，其大小等于 $w(V_1,V_2)$，对应简化表示下割 $\Delta(V_1)$ 的割值为 $w(V_1)$。

定义 2.1.4 (点的度数). 给定图 $G=(V,E)$，顶点 v 的度数定义为

$$\deg(v)=|\{e\in E|v\in e\}|$$

定义 2.1.5. 给定图 $G=(V,E)$，一个最小割 $R=(V_1,V_2)$ 满足 R 是图 G 所有可能的割中容量最小的割。

我们用 R_G^* 表示图 G 的最小割集，$r_G^* \in R_G^*$ 表示一个最小割，$\Phi_G = w(r_G^*)$ 表示图 G 的最小割的割值。此外，我们用 $M_G = |R_G^*|$ 表示图 G 的最小割数量。

最小割并不唯一。例如，当图为一条边权均相同的链时，每一条边都对应一个最小割。

定义 2.1.6. 给定图 $G=(V,E)$，α 乘法近似，β 加法近似最小割 R 满足 $w(R) \leq \alpha \cdot \Phi_G + \beta$。

在描述近似最小割时，若 $\alpha = 1$，则无需考虑该乘法参数，若 $\beta = 0$，则无需考虑该加法参数。

定义 2.1.7 ($S-T$ 最小割)**.** 给定图 $G=(V,E)$ 和图上互不相交的两个非空点集 $S,T \subset V$，$S-T$ 最小割是满足 $S \subseteq V_1, T \subseteq V_2$ 的割 (V_1,V_2) 中权值最小的割。

记 $S-T$ 最小割的割值为 $\Phi(S,T)$。当 S 和 T 均为只包含一个点的集合时，可以得到 $s-t$ 最小割的定义。

2.2 最小割数量的估计

最小割可以由 Karger 的树包装算法快速求得。

定理 2.2.1 (最小割算法)**.** [6] 存在一个随机算法，能在 $O(m\log^3 n)$ 的时间复杂度内以高概率找到一个最小割。

Karger 的收缩算法也是一个高效的求解最小割的随机算法，通过这个算法可以对最小割的数量进行估计。此外，Karger 的收缩算法还能较好的解决近似最小割的求解问题。

定义 2.2.1 (点收缩)**.** 给定图 $G=(V,E)$ 和点集的一个子集 $X \subseteq V$，点收缩收缩过程为，在图 G 中新建一个点 x，对于点 $y \in V \backslash X$，其向 x 连一条边权为 $\sum_{x' \in X} w(y,x')$ 的边（若边权为 0 则不连边），并将 X 及与其相连的边全部删除。

定义 2.2.2 (边收缩)**.** 给定图 $G=(V,E)$ 和图上的一条边 $(u,v) \in E$，边 (u,v) 的收缩定义为对 $\{u,v\}$ 这一点集执行点收缩。

Karger 的收缩算法的思路如下：以均匀分布随机选择图的一条边，并对这条边进行边收缩，重复该步骤直到图中的顶点数量等于一个预先设定的参数 k 为止。算法执行完时，如果一个割的割边集中没有边被收缩，那么我们说这个割是有效的。

定理 2.2.2. *[4]* 一个给定的最小割，在算法进行到图被收缩至 k 个顶点时，有效的概率是 $\Omega((n/k)^{-2})$。

当 $k=2$ 时，给定的最小割仍然有效的概率为 $\Omega((n/2)^{-2})$，且由于 $k=2$，算法终止时有且仅有一个割有效。由概率分布的累计不能超过 1，可以得到一个最小割数量的上界。

定理 2.2.3. 给定图 $G=(V,E)$，图中最小割数量至多为 n^2。

定理2.2.2也可以推广到近似最小割的情况。

定理 2.2.4. *[4]* 一个给定的 α 乘法近似最小割，在算法进行到图被收缩至 $k(k \geq \lfloor 2\alpha \rfloor)$ 个顶点时，有效的概率是 $\Omega((n/k)^{-2\alpha})$。

定理 2.2.5. *[15]* 给定图 $G=(V,E)$，图中 α 乘法近似最小割的数量至多为 $n^{2\alpha}$。

2.3 仙人掌图表示法

仙人掌图表示法是最早由 Dinitz 等人提出的结构图，该结构图保留了原图所有的最小割信息，且结构图是仙人掌图。

定义 2.3.1. 图 G 为仙人掌图当且仅当，对于任意边 $e \in V_G$ 都满足 e 至多属于一个简单环。

定理 2.3.1 (仙人掌图表示法). *[8]* 给定带权图 G，存在一个仙人掌图 Γ 和映射 $\varphi : V_G \to V_\Gamma$，满足：

- 对于点 $v_1, v_2 \in V_G$，$\varphi(v_1)=\varphi(v_2)$ 当且仅当图 G 不存在最小割 $R=(V_1,V_2)$ 使得 $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$；
- 对于图 G 的任意一个最小割 $R=(V_1,V_2)$，都满足 $(\varphi(V_1), V_\Gamma \backslash \varphi(V_1))$ 是图 Γ 的一个最小割。

2.4 差分隐私

差分隐私是一种针对敏感输入数据集计算的隐私定义，它聚焦于对个体隐私的保护。通俗来说，差分隐私要求在两个几乎相同的输入数据下，算法的计算过程应当同样保持几乎一致。当输入数据仅改变一个个体或者说一个元素时，任何输出结果的概率增幅不能超过一个很小的常数 e^{ε}。图论算法中，输入的元素单位为边，而边权可以视作叠加边的数量，因此，图的差分隐私算法需要考察两个仅相差一条边的图的输出情况。接下来，我们给出差分隐私在图论中的形式化定义。

定义 2.4.1 (边相邻). 称图 G, G' 边相邻当且仅当满足以下条件：

- 顶点集相等：$V_G = V_{G'}$；
- 存在唯一边 $(u,v) \in V^2$，使得 $|w(u,v) - w_{G'}(u,v)| = 1$；
- 对于任意其余边 $(u',v') \in V^2 \backslash \{(u,v)\}$，满足 $w(u,v) = w_{G'}(u,v)$。

定义 2.4.2 (差分隐私). *[16]* 图算法 A 是 (ε, δ) 差分隐私的，当且仅当对于任意的边相邻的图输入 G, G' 和输出值域的子集 O，有

$$\mathbb{P}[A(G) \in O] \leq e^{\varepsilon}\mathbb{P}[A(G') \in O] + \delta$$

特别地，如果 $\delta = 0$，算法满足 ε 差分隐私。

当 $\delta = 0$ 时，差分隐私也被称为纯差分隐私。当 $\delta \neq 0$ 时，差分隐私也被称为近似差分隐私。近似差分隐私不能严格限定概率增幅，但是当 δ 设定为一个极小的值时，仍然是一个有效的结果。

定理 2.4.1 (基本组合). *[17] [18]* 设 $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_t > 0$ 且 $\delta_1, \ldots, \delta_t > 0$。若运行 t 个算法，其中第 i 个算法是 $(\varepsilon_i, \delta_i)$ 差分隐私的，那么整个算法是 $(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_t, \delta_1 + \ldots + \delta_t)$ 差分隐私的。

基本组合定理表明，一个差分隐私序列仍然具备差分隐私性。这使得在设计算法时，可以将目标拆解成若干个差分隐私步骤，从而降低了设计难度。

定义 2.4.3 (拉普拉斯分布). 如果随机变量的概率密度函数分布为

$$f(x|\mu, b) = \frac{1}{2b} exp\left(-\frac{|x-\mu|}{b}\right)$$

那么它就是拉普拉斯分布。

拉普拉斯分布的函数关于 $x = \mu$ 轴对称，且对称轴的两侧分别是一个指数分布。拉普拉斯分布的期望为 μ，方差为 $2b^2$。特别的，当 $\mu = 0$ 时，我们记该分布为 Lap(b)。

定理 2.4.2 (拉普拉斯机制). *[19]* 给定一个将图 G 映射到 $\mathbb{R}^d$ 的函数 f，其满足对于任意两个边相邻图 G 和 G'，有 $\|f(G) - f(G')\|_1 \leq \Delta$，则发布加入独立同分布随机噪声 $X_i \sim Lap(\Delta/\varepsilon)$ 的结果

$$f(G) + (X_1, \ldots, X_d)$$

满足 ε 差分隐私。

定理 2.4.3 (差分隐私图). [20] 令 $\varepsilon \in \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right)$ 和 $0 < \delta < \frac{1}{2}$ 为差分隐私参数。对于任意有 n 个点和 m 条边（$m \geq n$）的带权图 G，存在一个 (ε, δ)-差分隐私算法，能以至少 $1 - o(1)$ 的概率输出一个合成图 $\hat{G}$，满足对于合成图中任意不相交的点集 $S, T \subseteq V_G$，都有

$$|w_G(S,T) - w_{\hat{G}}(S,T)| = O\left(\frac{\sqrt{nm}}{\varepsilon}\log^3\left(\frac{n}{\delta}\right)\right)$$

拉普拉斯机制给出了一种差分隐私的方法，同时说明了敏感度 Δ 与误差之间的关联。定理中噪声拉普拉斯函数的系数表明，敏感度越大，噪声的标准差也随之线性变大。

定义 2.4.4 (k 优选择问题). 给定 m 个数构成的序列 $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$，k 优选择问题要求输出值前 k 小的数的下标 $i_1, i_2, \ldots, _k$ 以及每个数的值。当 $k = 1$ 时，问题也被称为最优选择问题。

在差分隐私下，k 优选择问题的两个输入 $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ 和 $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_m)$ 相邻当且仅当 $\|x - x'\|_\infty \leq 1$。

定理 2.4.4 (指数机制). [21] 对于最优选择问题，按分布

$$Pr[y = i] = \frac{exp(-\frac{\varepsilon}{2}x_i)}{\sum_{j\in[m]} exp(-\frac{\varepsilon}{2}x_j)}$$

输出下标 y，则能以高概率得到一个 $O(\frac{2\log m}{\varepsilon})$ 近似的最小值，且算法是 ε-差分隐私的。

对指数机制进行扩展，可以得到 k 优选择机制。

定理 2.4.5 (k 优选择机制). [22] 令 $\varepsilon \leq 0.2$ 和 $\delta < 0.05$ 为差分隐私参数。对于任意 $m \geq 2$，存在一个 (ε, δ)-差分隐私算法，能输出一组 k 优选择问题的答案下标，且以高概率输出每个数的 $O(\frac{\sqrt{k\log(m/\delta)}}{\varepsilon})$ 近似值。

第 3 章　仙人掌图表示法标准化算法

仙人掌图表示法保留了原图所有的最小割信息，因此如果能差分隐私地输出图的仙人掌图表示法，那么也就完成了差分隐私下近似最小割的求解。然而，Dinitz 的论文[8] 中提供的仙人掌图表示法定义存在一定局限性，为隐私化带来了障碍。本章将从仙人掌图表示法的定义出发，给出一个仙人掌图表示法的标准化算法，为差分隐私下的最小割问题的分析提供理论基础。

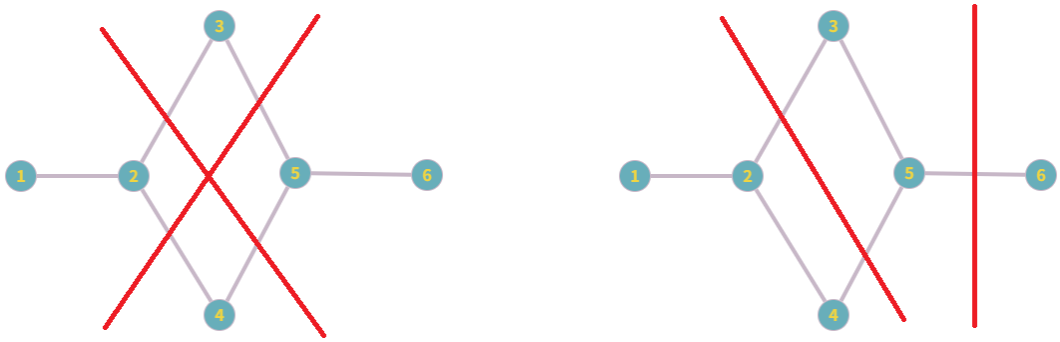
3.1　Dinitz 仙人掌图表示法简述

根据定义2.3.1，给定任意带权图 G，存在仙人掌图 Γ 和映射 φ 作为其仙人掌图表示法。首先，我们给出最小割在仙人掌图表示法中的表示形式。

定义 3.1.1 (割的平行与相交). 设 $R = (X, Y)$ 和 $R' = (X', Y')$ 是图中的不同割，它们的相对位置存在两种可能情况：

- 集合 $X \cap X'$、$X \cap Y'$、$Y \cap X'$、$Y \cap Y'$ 均非空；
- 这些集合中存在空集。

在第一种情况下，割 R 和 R' 被称为相交的一对割，在第二种情况下，它们被称为平行的一对割。



(a) 相交的一对割　　(b) 平行的一对割

图 3-1　割的平行与相交例

图3-1给出了割相交和平行的两个例子，其中的红色直线代表一个割。

定义 3.1.2 (最小割图). 给定图 G 和其最小割集 $R*(G)$，最小割图按如下方式生成：

- 对于每个最小割 $r*(G) \in R*(G)$，在最小割图中新建一个与之相对应的点。

- 若两个最小割 $r_1 * (G), r_2 * (G)$ 相交，则在最小割图中对应的点之间连一条边。

引理 3.1.1 (割的次模性). *[23]* 给定图 $G = (V, E)$ 和图的两个割 $\Delta(X), \Delta(Y)$，有

$$w(X) + w(Y) \geq w(X \cup Y) + w(X \cap Y)$$

引理 3.1.2 (次模性推论). 给定图 G 和图中两个相交的割 $\Delta(X), \Delta(Y)$，则有如下结论：

- $w(X \cap Y) = \Phi_G$
- $w(X \cap Y, X \cap (V \backslash Y)) = \frac{\Phi_G}{2}$
- $w(X \cap Y, (V \backslash X) \cap (V \backslash Y)) = 0$

证明 根据割的次模性，我们可以得到

$$2\Phi_G \leq w(X \cup Y) + w(X \cap Y) \leq w(X) + w(Y) = 2\Phi_G$$

因此，$w(X \cup Y) = w(X \cap Y) = \Phi_G$，第一条结论得证。

根据第一条结论的对称性，$w(X \cap Y) = w(X \cap (V \backslash Y)) = \Phi_G$；由于 $\Delta(Y)$ 是最小割，所以 $w(Y) = \Phi_G$。根据 w 的定义，有

$$w(X \cap Y) + w(X \cap (V \backslash Y)) = w(Y) + 2w(X \cap Y, X \cap (V \backslash Y))$$

因此，$w(X \cap Y, X \cap (V \backslash Y)) = \frac{\Phi_G}{2}$，第二条结论得证。

根据第二条结论的对称性 $w(X \cap Y, X \cap (V \backslash Y)) + w(X \cap Y, (V \backslash X) \cap Y) = \frac{\Phi_G}{2}$。根据 w 的定义，有

$$w(X \cap Y, X \cap (V \backslash Y)) + w(X \cap Y, (V \backslash X) \cap Y) + w(X \cap Y, (V \backslash X) \cap (V \backslash Y)) = w(X \cap Y) = \Phi_G$$

因此，$w(X \cap Y, (V \backslash X) \cap (V \backslash Y)) = 0$，第三条结论得证。 □

定义 3.1.3 (p 割与 t 割). 如果图 G 的一个最小割 R 与其他任何最小割都平行，我们就称它为 p 割；否则，称它为 t 割。

图3-2给出了图中的所有 p 割（用蓝色直线表示）和 t 割（用红色直线表示）。

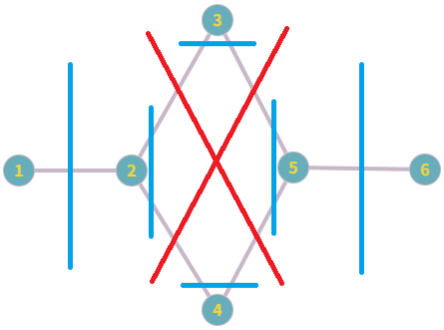


图 3-2 p 割和 t 割例

定义 3.1.4 (处于两个 p 割之间的点和割). 给定两个 p 割 $R=(X,Y)$ 和 $R'=(X',Y')$，不妨假设 $X\cap Y'=\emptyset$。我们称点 v 处于 R 和 R' 之间当且仅当 $v\in X'\cap Y$。我们称割 $R''=(X'',Y'')$ 处于 R 和 R' 之间当且仅当 $X\subset X''$ 且 $Y'\subset Y''$。

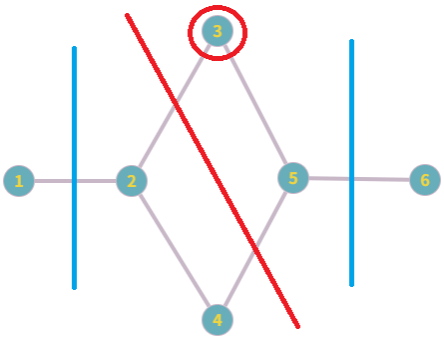


图 3-3 处于两个 p 割之间的点和割例

图3-3中红色点以及红色代表的割处于两个蓝色直线表示的 p 割之间。

定义 3.1.5 (相邻的 p 割). 给定两个 p 割 R 和 R'，我们称它们相邻当且仅当不存在处于它们之间的 p 割。

对于一个 p 割 $R=(X,V\backslash X)$，我们记 $S(X)$ 为所有与 R 相邻且分隔开 X 中顶点的割的集合。

定义 3.1.6 (p 束). 给定一个 p 割集合 S，我们称其为 p 束当且仅当存在一个 p 割 $R=(X,V\backslash X)$ 满足 $S=S(X)\cup\{R\}$。特别的，当 S 中仅包含一个 p 割 $R=(X,V\backslash X)$ 时，该 p 束为叶 p 束，我们用 X_S 表示，该 p 束由 R 的 X_S 一侧得到。

图的所有 p 束可以通过枚举所有 p 割以及其两侧得到，也就是说，图的 p 束集合是有限且唯一确定的。

定义 3.1.7 (p 束内部的顶点和 t 割)**.** 顶点 v 属于 p 束 S 当且仅当其在 S 中任意两个 p 割之间，S 此类顶点的集合记作 $V(S)$。t 割属于 p 束 S 当且仅当其在 S 中任意两个 p 割之间。特别的，对于叶 p 束 S，顶点 v 属于 S 当且仅当 $v \in X_S$。

这里需要特别说明的是，t 割不会属于任何叶 p 束，这是由割的次模性推论得到的。

定义 3.1.8 (相邻的 p 束)**.** 两个 p 束 S, S' 相邻当且仅当 $S \cap S'$ 非空。

当 S, S' 相邻时，$S \cap S'$ 中的元素 R 是唯一的，且 S, S' 分别位于 R 的两侧。

定理 3.1.3 (树表示法)**.** *[8]* 给定带权图 G，存在一个棵树 Λ 和映射 $\phi : V_G \to V_\Lambda$，满足：

- 对于点 $v_1, v_2 \in V_G$，$\phi(v_1) = \phi(v_2)$ 当且仅当图 G 不存在 p 割 $R = (V_1, V_2)$ 使得 $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$；
- 图 G 的最小割 $R = (V_1, V_2)$ 与图 Λ 的最小割 $(\phi(V_1), V_\Lambda \backslash \phi(V_1))$ 一一对应。

定理 3.1.4 (树表示法的性质)**.** *[8]* 图 G 的树表示法 Λ 有以下两个性质*:*

- Λ 上每一条边的边权都等于最小割的割值。
- Λ 中的点与 p 束一一对应，边与 p 束的相邻关系一一对应。

引理 3.1.5 (树表示法的唯一性)**.** 给定带权图 G，其树表示法 (Λ, ϕ) 唯一。

证明 使用反证法，不妨假设图 G 有两个不相同的树表示法 (Λ, ϕ) 和 (Λ', ϕ')。首先，根据定理3.1.3的第一条性质，若存在 $v_1, v_2 \in V_G$ 满足 $\phi(v_1) = \phi(v_2)$ 但 $\phi(v_1) \neq \phi(v_2)$，则将两点分隔开的 p 割的存在性出现矛盾。因此 $\phi = \phi'$。

图 G 的 p 束集合有限且唯一确定，而根据定理3.1.4可得 Λ 中的点与 G 的 p 束一一对应，且边与 p 束的相邻关系一一对应，因此 Λ 与 Λ' 相同。综上，(Λ, ϕ) 和 (Λ', ϕ') 是同一个树表示法。 □

定义 3.1.9 (原子)**.** 给定图 $G = (V, E)$ 和 G 中割的集合 $\mathcal{C}$。$\mathcal{C}$ 的原子是一个 V 的划分 P 的所有划分块，其中 P 满足

- 对于任意割 $(X, V \backslash X) \in \mathcal{C}$ 以及任意原子 $A \in P$，满足 $A \subseteq X$ 或 $A \subseteq V \backslash X$。
- P 是满足条件的最粗划分，也就是说对于任何满足条件的划分 P'，都有 $P' \preceq P$。

通俗来讲，一组割会将图的点集划分成若干个划分块，每个划分块就是一个原子。

定理 3.1.6 (最小割和 p 割对应的原子集等价)**.** [8] 给定图 G，由所有最小割构成的割集得到的原子集和由所有 p 割构成的割集得到的原子集等价。

定义 3.1.10 (p 束结构图 G_S)**.** 定义 G_S 为图 G 中 p 束 S 的结构图，其生成方式如下：

- 将 G_S 初始化为 G。
- 枚举 S 中的 p 割 R，并对被该割与 S 分隔开的点集执行点收缩（同时记收缩得到的点为 x_R）。

定义 3.1.11 ($\hat{c}$ 环)**.** 所有边的权重都为 $\hat{c}/2$ 的环被称为 $\hat{c}$ 环。

定理 3.1.7 (含 t 割的 p 束的结构图为环)**.** [8] 如果一个 p 束 S 存在内部的 t 割，那么图 G_S 是以顶点 x_R（$R \in S$）构成的 $\hat{\Phi_G}$ 环。

定理3.1.7说明了当 p 束 S 内存在 t 割的情况，其核心结论主要有两点。第一个结论是当 S 内存在 t 割时，则 $V(S) = \emptyset$，这是由 $\hat{\Phi_G}$ 环仅由 x_R 即 S 外部的顶点构成这一结果得到的；第二个结论是 S 内的 t 割恰好是将环分成两部分的割（需满足每一部分至少有两个点），且这些 t 割在最小割图中恰好构成一个联通块。

通过上述定义与定理可以发现，仙人掌图表示法用非环边表示 p 割，用环边二元组表示 t 割。

3.2 仙人掌图表示法的不唯一性

考虑仙人掌图表示法中映射 φ 的逆映射 φ^{-1}，该逆映射是从 V_Γ 到 $\mathcal{P}(V_G)$ 的映射，通俗的说，Γ 中的点对应着 G 中的 0 个、1 个或多个点。首先，我们形式化的定义仙人掌图表示法的等价性。

定义 3.2.1. 给定点集 V，仙人掌图表示法由仙人掌图 Γ 和映射 $\varphi : V \to V_\Gamma$ 构成，其对应的割集为

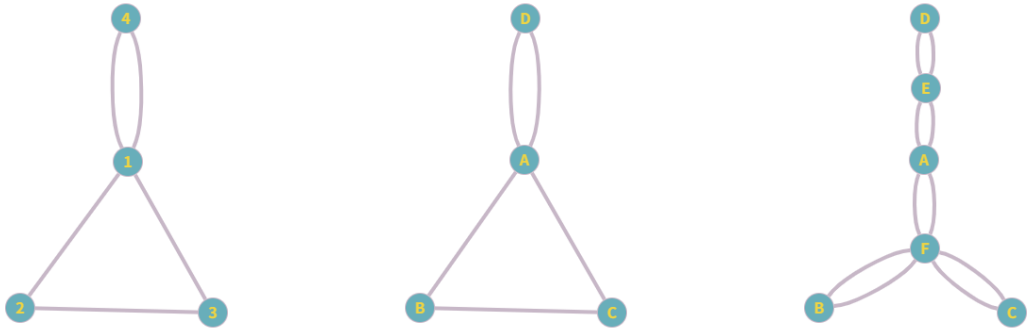
$$CutSet(\Gamma, \varphi) = \{(X, Y) \in R^*_\Gamma | (\bigcup_{x \in X} \varphi^{-1}(x), \bigcup_{y \in Y} \varphi^{-1}(y))\}$$

两个仙人掌图表示法 $(\Gamma, \varphi), (\Gamma', \varphi')$ 等价当且仅当 $CutSet(\Gamma, \varphi) = CutSet(\Gamma', \varphi')$。

这个定义从侧面表明，一个仙人掌图表示法对应了原图的一个割集。但是，一个原图的割集可能对应多个仙人掌图表示法。

引理 3.2.1. 图的仙人掌图表示法不具有唯一性。

证明 想要证明这一点，我们只需要给出一个图 G 以及其两个不相同的仙人掌图表示法 $(\Gamma, \varphi), (\Gamma', \varphi')$。



(a) 图 G (b) 图 Γ (c) 图 Γ'

图 3-4 同一个图的两种仙人掌图表示法

我们给出了一个 $n = 4$ 的例子，G, Γ, Γ' 的结构如图所示，且映射满足

$$\varphi = \varphi' = \{(1, A), (2, B), (3, C), (4, D)\}$$

在这个例子中，原图的最小割有 $(\{1, 4\}, \{2, 3\}), (\{1, 2, 4\}, \{3\}), (\{1, 3, 4\}, \{2\}), (\{1, 2, 3\}, \{4\})$。仙人掌图表示法 (Γ, φ) 使用了与图 G 相同的结构，因此其最小割与原图的最小割一一对应。仙人掌图表示法 (Γ', φ') 进行了两个改动：第一个改动是通过加入节点 F，使 A, B, C 构成的三元环变成三个二元环，三元环所表示的最小割分别转而由这三个二元环所表示，所以该改动不影响割集以割 $(\{1, 3, 4\}, \{2\})$ 为例，其由 Γ 中的三元环边 $(A, B), (B, C)$ 共同表示，而到了 Γ' 中，其转而由两条 (B, F) 边构成的二元环表示；第二个改动是在 A 和 D 之间加入 E，这使得 Γ' 中的最小割数量增加，即 $(\{A, B, C, F\}, \{D\})$ 扩展成了 $(\{A, B, C, F\}, \{D, E\})$ 和 $(\{A, B, C, E, F\}, \{D\})$ 两个最小割，然而由于 $\varphi^{-1}(E) = \emptyset$，因此这两个 Γ' 中的割对应 G 的同一个割，改动不影响割集。综上，$(\Gamma, \varphi), (\Gamma', \varphi')$ 都是 G 的仙人掌图表示法，图的仙人掌图表示法不具有唯一性。 □

虽然图的仙人掌图表示法不具有唯一性，但其仙人掌图表示法相互等价，这是由表示的最小割集的唯一性得出的。因此，如果在仙人掌图表示法的生成算法中加入仙人掌图表示法的标准化算法 ALG_{std}，将输出的仙人掌图表示法转化为其等价类的标准元，那么就可以确保算法输出的唯一性。

特别的，仙人掌图表示法的标准化在差分隐私下尤为重要。对于最小割集相同的边相邻图，算法得到的仙人掌图表示法可能因边集的差异而不同，而在标准化处理后，输出将正确地被判定为相同。

3.3 标准化仙人掌图表示法

本节中，仙人掌图表示法的标准化共分为两部分。第一步是通过给出构造方法定义仙人掌图表示法的标准元。第二步是给出将现有仙人掌图表示法转化为其标准元的高效算法。

根据引理3.1.5，树表示法 Λ 可以表示所有 p 割且方法唯一。根据定理3.1.7，p 束的结构图可以表示该 p 束的所有 t 割且方法唯一。因此，如果将树表示法和每个 p 束的结构图进行合成得到的图也是唯一的，且恰好能表示所有的最小割，我们将这个图设置为该仙人掌图表示法的标准元。算法1给出了 ALG_{gen} 的具体实现。我们称 $ALG_gen(G)$ 为图 G 的标准仙人掌图表示法。

算法 1 图 G 的仙人掌图表示法构造算法 ALG_{gen}

输入：图 G
输出：仙人掌图表示法 (Γ, φ)
1: 计算图 G 的 p 割，t 割。
2: 计算图 G 中的所有 p 束。
3: 为每个 p 束 S 新建一个 Γ 中的点 v_S，并更新 S 内的点到 v_S 的映射 φ。
4: 若两个 p 束 S, S' 相邻，则为其在 Γ 中的点 $v_S, v_{S'}$ 连一条边，得到图 G 的树表示法。
5: 若 p 束 S 中有 t 割，则将 v_S 替换为 G_S，原本连向 v_S 的代表 p 割 R 的边重新连向 G_S 中的点 x_R。
6: **return** (Γ, φ)

定理 3.3.1. *给定图 G, G'，其仙人掌图表示法分别为 (Γ, φ) 和 (Γ', φ')。若 (Γ, φ) 和 (Γ', φ') 等价，则 $ALG_{gen}(G) = ALG_{gen}(G')$*

证明 (Γ, φ) 和 (Γ', φ') 等价，则根据定义3.2.1，有 $CutSet(\Gamma, \varphi) = CutSet(\Gamma', \varphi')$。由仙人掌图表示法的定义，$CutSet(\Gamma, \varphi)$ 和 $CutSet(\Gamma', \varphi')$ 分别对应 Γ 的最小割集和 Γ' 的最小割集。$ALG_{gen}(G)$ 的仅与 G 的最小割集有关，因此 $ALG_{gen}(G) = ALG_{gen}(G')$。

□

算法 $ALG_{gen}(G)$ 给出了仙人掌图表示法的标准元，但难以直接用于仙人掌图表示法构造算法中。因为算法没有提供一个高效的计算方法，而朴素的 p 割，t 割，p 束计算需要较高复杂度，继而成为算法的效率瓶颈。

我们发现，如果我们首先利用现有工作生成一个仙人掌图表示法，然后使用仙人掌图表示法标准化算法 ALG_{std}，将仙人掌图表示法转化为其等价类内的标准元，那么就能同时实现高效和标准化。与此同时，ALG_{std} 可以通过输入仙人掌图表示法本身的性质，来得到一个较好的复杂度。

算法 2 仙人掌图表示法标准化算法 ALG_{std}

输入：仙人掌图表示法 (Γ, φ)
输出：仙人掌图表示法 (Γ', φ')
设仙人掌图表示法 (Γ, φ) 的最小割的割值为 c
对于所有二元环，将环上的两条边合并为一条边。 ▷ 二元环表示 p 割
for Γ 中的简单环 C **do**
    for C 中的节点 k **do**
        在 Γ 中新建顶点 k', k'' 来替换 k
        令 $\varphi^{-1}(k'') = \varphi^{-1}(k), \varphi^{-1}(k') = \emptyset$
        在 k', k'' 之间连一条边权为 c 的边
        for 与 k 相连的边 e **do**
            if e 是环 C 上的边 **then**
                将 e 的 k 一端替换成 k'
            else if e 是环 C 上的边 **then**
                将 e 的 k 一端替换成 k''
            end if
        end for
    end for
end for
对 Γ 中的所有三元环执行点收缩。 ▷ 三元环只表示 p 割
for Γ 中度数为 2 的点 v **do**
    找到与 v 相连的边 $(v, u_1), (v, u_2)$
    if 若 v 不处于任何一个简单环上且 $\varphi^{-1}(v) = \emptyset$ **then**
        删除点 v 以及与其相连的边
        加入边 (u_1, u_2)
    end if
end for
return (Γ', φ')

回顾引理3.2.1中的例子，仙人掌图表示法主要需要解决的是三元环和链两种情况。算法2给出了 ALG_{std} 的具体实现。

定理 3.3.2. 给定图 G 和其仙人掌图表示法 (Γ, φ)，则 $ALG_{std}((\Gamma, \varphi)) = ALG_{gen}(G)$

证明 首先，我们分析仙人掌图表示中，单个环表示的最小割的数量和类型。根据定理3.1.7

首先，我们需要证明 $ALG_{std}((\Gamma, \varphi))$ 算法得到的环与 $ALG_{gen}(G)$ 的环一一对应。在仙人掌图表示中，非环边代表的最小割一定是 p 割，环中代表的最小割可能有 p 割也可能有 t 割。根据算法1可知，$ALG_{gen}(G)$ 的环仅用于表示 t 割。对于

一个 $ALG_{gen}(G)$ 里的简单环 C，若其表示的 t 割在最小割图中恰好构成一个连通块，因此这些割在 (Γ,φ) 中一定由一个相同的环 C' 表示。对于一个仙人掌图表示 (Γ,φ) 中的环 C'，环上相邻的两条边可以表示一个 p 割，这些 p 割在算法中通过 (k',k'') 这条非环边重新表示了；若环 C' 不表示任何 t 割，那么其一定是一个二元环或三元环，在算法中被消除。综上，$ALG_{std}((\Gamma,\varphi))$ 算法得到的环与 $ALG_{gen}(G)$ 的环一一对应。

接下来，我们证明将所有环缩成点后，$ALG_{std}((\Gamma,\varphi))$ 的树结构和 $ALG_{gen}(G)$ 的树结构相同。(Γ,φ) 的 p 割由非环边和环共同表示，而在处理环的过程中，所有环表示的 p 割转而以 (k',k'') 的形式表示。因此，处理完环之后，(Γ,φ) 的树结构和 $ALG_{gen}(G)$ 都能表示所有 p 割。(Γ,φ) 的树结构表示了所有 p 割，但不一定是树表示法，因为树表示法的边与 p 割一一对应，但是树结构可以存在多条边对应同一个 p 割。由于代表同一个 p 割的两条边之间的树上路径的点 v 都满足 $\varphi^{-1}=\emptyset$，因此，ALG_{std} 通过收缩这样的点，就可将树结构转化为树表示法。根据定理3.1.3，树表示法具有唯一性。综上，$ALG_{std}((\Gamma,\varphi))$ 的树结构和 $ALG_{gen}(G)$ 的树结构相同。

最终，结合以上两个结果，可以得出 $ALG_{std}((\Gamma,\varphi))=ALG_{gen}(G)$。 □

第 4 章　最小割数量的敏感度分析

4.1　最小割数量的敏感度

在求解近似最小割的过程中，需要尽可能找到多的解，然而差分隐私的算法要求一条边的存在与否对输出的影响不能过大。因此，需要首先对最小割数量进行敏感性进行定量分析，才能设计出恰当的噪声添加值。

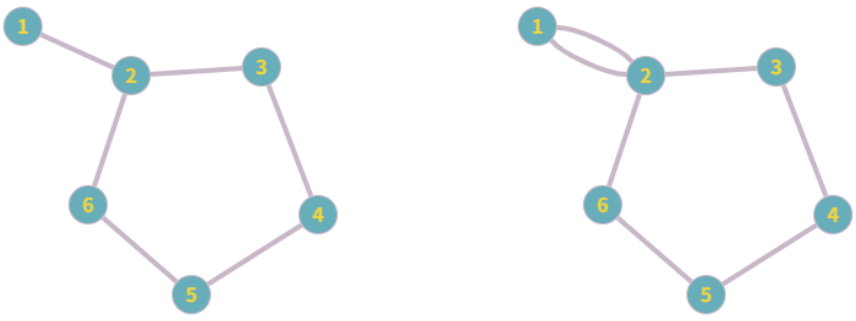
假设现在有两个边相邻的图 G, G'，其中 G' 由在 G 中加入一条边权为 1 的边 (u, v) 得到。不妨假设最小割数量计算函数的输入与输出都以适当的二进制形式进行编码，可以得到最小割数量的敏感度为 $d = |M_G - M_{G'}|$。

我们知道，对于任意图 G，最小割数量满足 $1 \leq M_G \leq n^2$，因此 $0 \leq d \leq n^2$。

引理 4.1.1. *对于任意 $n \geq 3$，存在图 G, G' 的构造方法，使得最小割数量的敏感度为 $\Omega(n^2)$。*

证明 我们不妨将点集中的点编号，用 v_1 至 v_n 表示。下面给出构造方法：图 G 由如下方法生成，连接 v_1 与 v_2，v_2 与 v_n，并对于所有整数 $2 \leq i < n$，连接 v_i 和 v_{i+1}；图 G' 由图 G 的基础上，增加一条连接 v_1 和 v_2 的边得到。

这里的连边均为 1，因此图 G 的最小割值为 1，唯一的方案是 $(\{v_1\}, V \backslash v_1)$，因此 $M_G = 1$。图 G' 的最小割值为 2，此时对于任意 $2 \leq i \leq j \leq n$，$(\{v_i, \ldots, v_j\}, V \backslash \{v_i, \ldots, v_j\})$ 都是一个最小割，因此 $M_{G'} = \frac{n^2-n}{2}$。在这种构造方法下，$d = \Omega(n^2)$。 □



(a) 图 G　　(b) 图 G'

图 4-1　$n = 6$ 时的构造示例

图4-1给出了一种 $n = 6$ 时的构造示例。引理表明，边相邻图的最小割数量的敏感度在一些情况下特别高，高敏感度意味着需要添加较大噪声，进而使得差分隐私下发布的最小割数量可用性较低。因此在设计算法时，需要引入一些额外的约束条件。

4.2 约束条件下的敏感度

给定图 G，在加入一条单位边后，最小割的割值可能增加，也可能保持不变。引理4.1.1指出，若图有一个割值为 x 的割和较多割值为 $x+1$ 的割，那么加边导致最小割的割值提高 1 后，会使最小割的数量出现较大的增幅。因此，为了得到可用的结果，可以加入边相邻图的最小割值相同这一额外限制条件，也就是说，图 G, G' 满足 $\Phi_G = \Phi_{G'}$。在本章的后文中，如未特殊说明，图 G, G' 将默认满足这一性质。

标准仙人掌图表示法包含了图所有最小割的信息，因此其结构参数有助于对问题分析的精细性。所以，对于一个图 G 以及其标准仙人掌图表示法 (Γ, φ)，我们引入以下参数来描述图的结构：

- α_g：标准仙人掌图表示法的点数，即 $|V_\Gamma|$。
- α_p：标准仙人掌图表示中所有点 v 对应的 $|\varphi^{-1}(v)|$ 的最大值
- α_c：标准仙人掌图表示中环的数量。
- α_r：标准仙人掌图表示中环长度的最大值。
- α_d：标准仙人掌图表示中树结构的直径，也就是所有图上简单路径中，非环边数量的最大值。

在 G 中加入一条边权为 1 的边 (u, v) 得到 G'，接下来我们分析这条边 (u, v) 在标准仙人掌图表示法 (Γ, φ) 中的位置与最小割数量变化量的关系。首先，若 $\varphi(u) = \varphi(v)$，那么说明 u, v 之间不被任何最小割分隔开，在仙人掌图表示法中它们已经被视为连通性很高的两个点，因此加入边 (u, v) 对最小割数量没有任何影响。

若 $\varphi(u) \neq \varphi(v)$，我们不妨令 $U = \varphi(u)$,$V = \varphi(V)$。根据标准仙人掌图表示法的构造过程可知，其表示最小割的结构主要有树表示和每个 p 束对应的结构环两部分。树表示中 U 到 V 路径上的所有 p 割都将不再是最小割，路径上所有 p 束对应的结构环代表的 t 割都会变少。具体来说，对于一个 p 束 S 的结构环 G_S，令 $U \in x_{R'}, V \in x_{R''}$，所有将 $x_{R'}$ 与 $x_{R''}$ 分开的 t 割都将不再是最小割。

接下来对环上的情况进行定量分析。令 $f(x)$ 为长度为 x 的环表示的 t 割数量，则

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x(x-3)}{2} & x \geq 3 \\ 0 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

假设结构环 G_S 的环长为 l，$x_{R'}$ 与 $x_{R''}$ 在环上的距离为 t（满足 $t \le l-t$），那么最小割的减少量为

$$g(l,t) = f(l) - f(t) - f(l-t) - [t \ge 3] - [l-t \ge 3]$$

令 $G(l) = \max_{t=1}^{l-1} g(l,t)$，我们不妨对 l,t 的值进行讨论来得到该函数的取值：当 $1 \le l \le 3$ 时，环上不包含 t 割，因此 $G(l)=0$；当 $l=4$ 时，取 $t=2$ 为极值，$G(4)=2$；当 $l \ge 5$ 时，由于 $l-t \ge t$，且 f 为单调函数因此我们只需要讨论 $t=2, t \ge 3$ 这两种情况。

- 当 $t=2$ 时，$g(l,2) = f(l) - f(l-2) - 1 = 2l-6$；
- 当 $t \ge 3$ 时，$g(l,t) = f(l) - f(t) - f(l-t) - 2 = -(t-\frac{l}{2})^2 + \frac{l^2}{4} - 2$。

当 $l=5$ 时，$t \le 2$，因此 $G(5) = g(5,2) = 4$。当 $l \ge 6$ 时，$g(l,t)$ 的极小值在 $t = \lfloor \frac{l}{2} \rfloor$ 时取到，此时 $g(l,t) \ge g(l,2)$。综上，可以得到

$$G(l) = \max\{0, \lfloor \frac{l^2}{4} - 2 \rfloor\}$$

除此之外，可以发现，加入 (u,v) 使最小割的割值增加一的情况只有在 $\varphi(u) \ne \varphi(v)$，标准仙人掌图表示法中的树表示是一条链，且 $\varphi(u), \varphi(v)$ 分别是链的两个端点时出现。

接下来，我们给出最小割数量变化范围的表达式。

定理 4.2.1. *给定边相邻图 G, G'，其中 G' 由在 G 中加入一条边权为 1 的边 (u,v) 得到。那么有*

$$M_G - \min\{\alpha_d, \alpha_c, \frac{\alpha_g}{\alpha_r}\} \cdot \max\{0, \lfloor \frac{\alpha_r^2}{4} - 2 \rfloor\} - \alpha_d \le M_{G'} \le M_G$$

最小割数量的变化还可以由 M_G 本身的值进行估计。对于一个长度 $l \ge 4$ 的环 G_S，其表示的 t 割有 $f(l) = \frac{l(l-3)}{2}$ 个，边 (u,v) 经过它是会使其最小割数量减少至多 $G(l) = \lfloor \frac{l^2}{4} - 2 \rfloor$。此外不难证明，该 p 束 S 连接的不涉及 $x_{R'}, x_{R''}$ 的至少 $l-2$ 条边对应的 p 割在加边后仍然为最小割。因此，与该 p 束 S 相关的最小割的数量为 $\frac{l^2-l-4}{2}$，减少量至多为 $\lfloor \frac{l^2}{4} - 2 \rfloor$。

定理 4.2.2. *对于任意加边 (u,v)，存在一种最小割分配方案，满足每个最小割至多分配至一个 p 束中，使得每个 p 束 S 损失的最小割数量不超过其分配量与 $|G_S|$ 和的一半。*

证明 按上文方法分配最小割后，p 束 S 分配到的最小割数量为 $\frac{l^2-l-4}{2}$，$G_S=l$ 其损失的最小割数量为 $\lfloor\frac{l^2}{4}-2\rfloor$。有

$$\frac{l^2-l-4}{2}+l=\frac{l^2+l-4}{2}\geq\frac{l^2}{2}-4\geq 2\lfloor\frac{l^2}{4}-2\rfloor$$

□

因此我们可以给出基于 M_G 的估计。

定理 4.2.3. *给定边相邻图 G,G'，其中 G' 由在 G 中加入一条边权为 1 的边 (u,v) 得到。那么有*

$$\frac{M_G}{2}-1.5n\leq M_{G'}\leq M_G$$

该定理给出了最小割数量敏感度的上界 $\frac{M_G}{2}+1.5n$。接下来将给出一个构造来说明这个上界可以近似的达到，该构造下的最小割数量的敏感度与定理中最坏情况下的敏感度仅相差一个常乘法系数，图 G 构造方法如下：将 $(1-\alpha)n$ 的点用边权 c 连成一条链，设链的两端分别为 v_1,v_2；将 $\alpha n\geq 4$ 的点用边权 $\frac{c}{2}$ 连成一个环，设环的一个对角线连接的两个点为 v_3,v_4；最后将 v_2,v_3 用边权为 c 的边相连，完成构造。

首先，$M_G=n+\frac{\alpha n(\alpha n-3)}{2}$。敏感度最高的加边是 (v_1,v_4)，敏感度 $M_G-M_{G'}=\lfloor\frac{\alpha^2n^2}{4}\rfloor+(1-\alpha)n$。不失一般性地取 $\alpha=\frac{1}{2}$，可得 $M_G=\frac{n(n+2)}{8}$，$M_G-M_{G'}=\lfloor\frac{n^2}{16}\rfloor+\frac{1}{2}n$。此时有

$$\frac{M_G}{2}+\frac{3}{2}n=\frac{n^2}{16}+\frac{13}{8}n\leq 4(M_G-M_{G'})$$

4.3 平均敏感度

前面的分析表明，在最坏情况下，最小割数量的敏感度较高。这一小节将通过平均敏感度分析造成高敏感度的情况的频次。

在平均敏感性的通常定义中，其边相邻的图以删边的形式给出。[24] 然而在前文描述边相邻图时，由于删边会较大的改变仙人掌表示的结构，因此用加边的形式描述了 G,G' 间的关系。这一部分将沿用加边的方法来定义平均敏感度。通过删边形式的平均敏感度，可以估计一个图算法在规模较大的子图上的输出和完整图上的输出差异，改为加边形式会弱化这一功能。加边形式的平均敏感度能对应前文的分析，并给出最小割数量变化值的期望。

定义 4.3.1. *图算法 A 的平均敏感度为*

$$\mathbb{E}_{e\in V^2,\Phi(G)=\Phi((V,E\cup\{e\}))}[d_{Ham}(A(G),A((V,E\cup\{e\})))]$$

考虑这样一种 G 的构造，生成一个规模为 $\frac{1}{3}n$ 的图 G_t，使得 G_t 在加入边 (u,v) 时得到该规模下最高的敏感度 $W(\frac{1}{3}n)$，接下来将 $\frac{1}{3}n$ 个点与 u 用极大的边权相连，将 $\frac{1}{3}n$ 个点与 v 用极大的边权相连。此时最小割数量函数 M 的平均敏感度满足

$$\mathbb{E}_{e\in V^2,\Phi(G)=\Phi(G+e)}[d_{Ham}(M(G),M(G+e))] \geq \frac{\frac{1}{3}n(\frac{1}{3}n-1)}{n(n-1)}W(\frac{1}{3}n)$$

最高敏感度 W 是一个 n 的不超过二次的一个多项式。综上，存在一个常数 β 使得在该构造下

$$\mathbb{E}_{e\in V^2,\Phi(G)=\Phi(G+e)}[d_{Ham}(M(G),M(G+e))] \geq \beta W(n)$$

分析表明，在最坏情况下，导致高敏感度的加边出现频率的期望较高。

第 5 章　差分隐私下近似最小割求解算法

本章将给出差分隐私下近似最小割求解算法的具体设计。算法应当是差分隐私的，且需要控制近似最小割与真实最小割的加法误差，我们还希望算法能尽可能多的给出近似最小割的解，此外，算法的运行效率也应当被考虑在内。

5.1　基于差分隐私图的算法设计

定理2.4.3给出了一种基于拉普拉斯机制的算法，对于一个输入 G，其可以以高概率 (ε,δ)-差分隐私的输出一个合成图 $\hat{G}$，满足对于合成图中任意不相交的点集 $S,T\subseteq V_G$，满足

$$|w_G(S,T)-w_{\hat{G}}(S,T)|=O\left(\frac{\sqrt{nm}}{\varepsilon}\log^3\left(\frac{n}{\delta}\right)\right)$$

这意味着对于任意一个最小割 R,其在合成图 $\hat{G}$ 中的割值都为 $\Phi_G+O\left(\frac{\sqrt{nm}}{\varepsilon}\log^3\left(\frac{n}{\delta}\right)\right)$。也就是说，合成图 $\hat{G}$ 保证近似最小割在进行隐私处理后仍然拥有一个较小的割值。

算法需要差分隐私的发布一个最小割的割值，来辅助地找到合成图 $\hat{G}$ 中的所有近似最小割。具体来说，首先可以调用定理2.2.1中的最小割算法来求出 Φ_G。加入一条边对任意割的割值改动不超过 1，因此最小割的割值的敏感度为 1。根据定理2.4.2中的拉普拉斯机制，我们可以 ε-差分隐私的发布 $\hat{\Phi}_G=\Phi_G+X$，其中 $X\sim Lap(1/\varepsilon)$。

拉普拉斯分布 $Lap(1/\varepsilon)$ 的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{\varepsilon}{2}e^{-\varepsilon|x|}$$

绝对值的概率密度函数为

$$f(x)=\varepsilon e^{-\varepsilon x},(x\geq 0)$$

绝对值的累计分布函数为

$$P(|X|\leq t)=1-e^{-\varepsilon x},(t\geq 0)$$

因此,有至少 $1-\alpha$ 的概率 $|X|\leq\frac{1}{\varepsilon}\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)$。也就是说,有高概率 $\hat{\Phi}(G)=\Phi(G)+O(\frac{1}{\varepsilon})$。

接下来，将 β 定为一个极大的常数，并枚举 V_G 的所有子集 X，并判断 $\Delta(X)$ 在合成图 $\hat{G}$ 中的割值是否满足 $w_{\hat{G}}(X)\leq\hat{\Phi}_G+\beta\frac{\sqrt{nm}}{\varepsilon}\log^3\left(\frac{n}{\delta}\right)$，满足条件的 $\Delta(X)$ 被视为近似最小割。最后，输出所有近似最小割，若这样的近似最小割超过 n^2 个，

则输出 $w_{\hat{G}}(X)$ 值前 n^2 小的近似最小割。

使用定理2.4.1并为每个算法的 ϵ 和 δ 赋合适的值，可以得出，运行以上几个算法是 (ε,δ)-差分隐私的，且能以高概率输出至少 M_G 个 $O\left(\frac{\sqrt{nm}}{\varepsilon}\log^3\left(\frac{n}{\delta}\right)\right)$ 近似的最小割。

5.2 基于 k 优选择机制的算法设计

k 优选择机制2.4.5可以差分隐私的在 m 个值中取 k 个最小值。因此，如果我们可以差分隐私的获取最小割的数量 $\hat{M}_G$，并用 k 优选择机制在所有 2^n 个割中选择权值前 $\hat{M}_G$ 小的割，那么这 $\hat{M}_G$ 个割就是差分隐私下的近似最小割。

根据定理4.2.3，$0 \le M_G - M_{G'} \le \frac{M_G}{2} + 1.5n$。我们不妨令 $a = \log_2(M_G + 3n)$，其敏感度为 1。接下来，使用拉普拉斯机制差分隐私的输出 a 的值 $\hat{a}$，并令差分隐私的最小割数量为 $\hat{M}_G = min\{max\{0, 2^{\hat{a}} - 3n\}, n^2\}$。

基于如上方法，我们可以得到 $\hat{M}_G$ 个割以及每个割的 $O(\frac{n\sqrt{n\log(1/\delta)}}{\varepsilon})$ 近似值。与上一节类似的，我们可以将 β 定为一个极大的常数，并对这 $\hat{M}_G$ 个割判断其割值是否小于 $\hat{\Phi}_G + \beta\frac{n\sqrt{n\log(1/\delta)}}{\varepsilon}$，满足条件的割视为近似最小割。

相比于基于差分隐私图的算法，该算法加入了对最小割数量的估计，从而避免了近似最小割过多时输出割数量与最小割数量差异较大的问题。然而最小割数量本身的敏感度较高，因此在 M_G 较小的时候误差较大。

对于图 G 的 M_G 个最小割中的每个割，其在 k 优选择机制中的的割值为 $\Phi_G + O(\frac{\sqrt{kn\log(1/\delta)}}{\varepsilon})$。因此，当 $\hat{M}_G \le M_G$ 时，k 优选择机制得到的割一定全都为近似最小割。这使得用二分法求解 $\hat{M}_G$ 成为了一种方案，令 M_G^{min} 是使得 k 优选择机制得到的割不全为近似最小割的最小取值，则 M_G^{min} 可以通过 $O(\log n)$ 次 k 优选择机制得到。其中 $M_G \le M_G^{min} - 1$，因此不妨取 $\hat{G} = M_G^{min} - 1$，这样可以保证输出的近似最小割数量至少为最小割的数量。根据基本组合定理，近似参数将变为 $O(\frac{n\sqrt{n\log(\log n/\delta)}\log n}{\varepsilon})$。

5.3 加法近似参数的优化

当 $m = \Theta O(n^2)$ 时，基于差分隐私图的算法和基于 k 优选择机制的算法的加法近似参数都为 $\tilde{O}(\frac{n\sqrt{n}}{\varepsilon})$。本节将给出一个融合指数机制和 Karger 收缩算法的方法，用以降低加法近似参数。

在 k 优选择机制中，算法从 m 个数中选择了 k 个最小值，其加法近似参数 $O(\frac{\sqrt{k\log(m/\delta)}}{\varepsilon})$ 同时由 m, k 决定。而受到最小割数量的限制，在最坏情况下，k 的取值为 $\Omega(n^2)$。因此要想优化加法近似参数，需要从降低 m 入手。

在之前的算法中，由于图中所有割都是潜在的 k 小割，因此 $m = 2^n$。如果

能将潜在 k 小割的范围缩小，就可以有效降低 m 的值。当 α 为一常数时，Karger 收缩算法可以在多项式复杂度内找到所有 α 乘法近似最小割。具体来说，根据定理2.2.4，一个给定的 α 乘法近似最小割在收缩至 $\lfloor 2\alpha \rfloor$ 割顶点时，其有效的概率为 $\Omega(n^{-2\alpha})$。因此，执行 $n^{2\alpha+1}$ 次 Karger 收缩算法，则该 α 乘法近似最小割以高概率在至少一次算法执行中有效。因此，以高概率所有 α 乘法近似最小割都被找到。

设改进后算法的加法近似参数为 β。若能保证对于图 G 的所有最小割，在调用 k 优选择机制时割值仍然小于 $\Phi_G + \beta$，那么忽略割值超过 $\Phi_G + \beta$ 的割将对找到这些最小割不产生影响。

Karger 收缩算法可以找到割值不超过 $\alpha\Phi_G$ 的所有割，而算法需要找割值不超过 $\Phi_G + \beta$ 的最小割，两者并不一致。观察得 $\alpha = 1 + \frac{\beta}{\Phi_G}$，为了保证算法复杂度，$\alpha$ 的值必须为常数，因此需要将 G 进行一定处理来保证 $\beta\Phi_G$ 存在一个常数上界。

处理的目标是提高最小割的割值，这可以通过在图 $G = (V, E)$ 中加边来实现。由于这一过程应当是差分隐私的，因此需要用指数分布来选择加边的边集。首先给定参数 T，我们按如下方法构造一个边集 H：

- 将图 G 的 n 割顶点按任意顺序排列成一个环。
- 对环上任意相邻两点，在 H 中加入 $T/2$ 条连接这两个点的边权为 1 的边。

接下来，令 $H_0 \subset H_1, \ldots, \subset H_{|H|}$ 为任意大小严格递增的边集序列，且 $H_{|H|} = H$。对于每个下标 $i \in [1, |H|]$，令其权值为 $|\Phi_{(V,E\cup H_i)} - T|$。使用指数机制选择下标 i，则有高概率得到一个解，满足

$$Pr[|\Phi_{(V,E\cup H_i)} - T| > t_{min} + \frac{2\ln(nT)}{\varepsilon} + \frac{2t}{\varepsilon}] \leq \exp(-t)$$

容易证明，$t_{min} = 0$。令 $T = \frac{20\ln n}{\varepsilon}$，令 $t = 2\ln n$。整理，记

$$t_{range} = t_{min} + \frac{2\ln(nT)}{\varepsilon} + \frac{2t}{\varepsilon} = \frac{6\ln n + 2\ln T}{\varepsilon} = \frac{6\ln n + 2\ln(20\ln n) - 2\ln\varepsilon}{\varepsilon}$$

当 $\varepsilon \in [\frac{1}{n}, \frac{1}{2}]$,$n \geq 200$ 时，有 $t_{range} \leq \frac{10\ln n}{\varepsilon}$。

记 $\hat{G} = (V, E \cup H_i)$，则以 $1 - \frac{1}{n^2}$ 的概率满足

$$10\ln n/\varepsilon < \Phi_{\hat{G}} < \Phi_G + 30\ln n/\varepsilon$$

在上述生成 $\hat{G}$ 的过程中，加入边的数量为 $O(\frac{n\ln n}{\varepsilon})$，且有 $1 \leq \frac{\Phi_G}{\Phi_{\hat{G}}} \leq 4$。因此，只需要在 $\hat{G}$ 中运行 n^9 次 Karger 收缩算法，就能以高概率找到 G 的所有最小割。

根据定理2.2.5，α 乘法近似最小割的数量至多为 $n^{2\alpha}$，所以找到割的数量是 $O(n^8)$ 的。即 $m = O(n^8)$，得到 k 优选择机制的加法近似参数为 $O(\frac{n\sqrt{\log(n^8/\delta)}}{\varepsilon})$。算法的总加法近似参数因为加边操作而限制为 $O(\frac{n\ln n}{\varepsilon})$。

由于对最小割数量的估计方法并不优，所以在这个算法使用阈值筛选的方式找到最小割。算法定 k 的值为 n^2，并按如上步骤找到权值 k 小的割。接下来，差分隐私的发布最小割的值 $\hat{\Phi}_G$，然后将 β 定为一个极大的常数，并对这 n^2 个割分别判断其割值是否小于 $\hat{\Phi}_G + \beta\frac{n\ln n}{\varepsilon}$，若是则将其作为输出。

定理 5.3.1. 给定 $\varepsilon \in [\frac{1}{n}, \frac{1}{2}]$ 和 δ 作为隐私参数。对于给定任意 $n \geq 200$ 的图 G，存在一个 (ϵ, δ)-差分隐私算法，能够至少输出 M_G 个与最小割的割值 $O(\frac{n\ln n}{\varepsilon})$ 近似的割。

第 6 章　总结与展望

6.1　工作总结

最小割问题不仅在理论计算机领域有着重要的学术研究价值，同时在通信网络、芯片电路、系统设计、生物信息等领域也有着广泛的应用价值。差分隐私使算法在更多数据敏感的场景得到应用成为了可能。本论文的主要工作为：

- 定义了标准仙人掌图表示法，并给出了一个高效的标准化个仙人掌图表示法的算法。
- 定量分析了最小割数量的敏感度。
- 给出了一个加性误差为 $O(\frac{n\log n}{\varepsilon})$ 的差分隐私近似最小割算法。

6.2　研究展望

未来工作可从以下方向展开：

- 在理解仙人掌图表示法的基础上分析多边形图表示法，以分析近似最小割本身的性质。
- 设计能差分隐私的输出仙人掌图表示的算法。
- 对本文中的算法进行进一步改进，以获取更优的加性误差结果。

参考文献

[1] NARAYANAN A, HUEY J, FELTEN E W. A precautionary approach to big data privacy[J]. Data protection on the move: Current developments in ICT and privacy/data protection, 2016 : 357 – 385.

[2] VADHAN S. The complexity of differential privacy[J]. Tutorials on the Foundations of Cryptography: Dedicated to Oded Goldreich, 2017 : 347 – 450.

[3] FORD JR L R, FULKERSON D R. Maximal flow through a network[J]. Canadian journal of Mathematics, 1956, 8 : 399 – 404.

[4] KARGER D R. Global Min-cuts in RNC, and Other Ramifications of a Simple Min-Cut Algorithm.[C] // Soda : Vol 93. 1993 : 21 – 30.

[5] KARGER D R, STEIN C. A new approach to the minimum cut problem[J]. Journal of the ACM (JACM), 1996, 43(4) : 601 – 640.

[6] KARGER D R. Minimum cuts in near-linear time[J]. Journal of the ACM (JACM), 2000, 47(1) : 46 – 76.

[7] LI J. Deterministic mincut in almost-linear time[C] // Proceedings of the 53rd Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing. 2021 : 384 – 395.

[8] DINITZ E A, KARZANOV A V, LOMONOSOV M V. On the structure of the system of minimum edge cuts of a graph[J]. Issledovaniya po Diskretnoi Optimizatsii, 1976 : 290 – 306.

[9] FLEINER T, FRANK A. A quick proof for the cactus representation of mincuts[J]. EGRES Quick Proof, 2009, 3 : 2009.

[10] KARGER D R, PANIGRAHI D. A near-linear time algorithm for constructing a cactus representation of minimum cuts[C] // Proceedings of the Twentieth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms. 2009 : 246 – 255.

[11] HE Z, HUANG S-E, SARANURAK T. Cactus representation of minimum cuts: Derandomize and speed up[C] // Proceedings of the 2024 Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA). 2024 : 1503 – 1541.

[12] GUPTA A, LIGETT K, MCSHERRY F, et al. Differentially private combinatorial optimization[C] // Proceedings of the twenty-first annual ACM-SIAM symposium on Discrete Algorithms. 2010 : 1106 – 1125.

[13] LI J, PANIGRAHI D. Approximate gomory–hu tree is faster than n–1 max-flows[C] // Proceedings of the 53rd Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing. 2021 : 1738 – 1748.

[14] LI J, PANIGRAHI D. Deterministic min-cut in poly-logarithmic max-flows[C] // 2020 IEEE 61st Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS). 2020 : 85 – 92.

[15] KARGER D R. Random sampling in cut, flow, and network design problems[C] // Proceedings of the twenty-sixth annual ACM symposium on Theory of computing. 1994 : 648 – 657.

[16] DWORK C. Differential privacy[C] // International colloquium on automata, languages, and programming. 2006 : 1 – 12.

[17] DWORK C, MCSHERRY F, NISSIM K, et al. Calibrating noise to sensitivity in private data analysis[C] // Theory of Cryptography: Third Theory of Cryptography Conference, TCC 2006, New York, NY, USA, March 4-7, 2006. Proceedings 3. 2006 : 265 – 284.

[18] DWORK C, LEI J. Differential privacy and robust statistics[C] // Proceedings of the forty-first annual ACM symposium on Theory of computing. 2009 : 371 – 380.

[19] DWORK C, ROTH A, OTHERS. The algorithmic foundations of differential privacy[J]. Foundations and Trends® in Theoretical Computer Science, 2014, 9(3–4) : 211 – 407.

[20] LIU J, UPADHYAY J, ZOU Z. Optimal bounds on private graph approximation[C] // Proceedings of the 2024 Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA). 2024 : 1019 – 1049.

[21] MCSHERRY F, TALWAR K. Mechanism design via differential privacy[C] // 48th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS'07). 2007 : 94 – 103.

[22] QIAO G, SU W, ZHANG L. Oneshot differentially private top-k selection[C] // International Conference on Machine Learning. 2021 : 8672 – 8681.

[23] CUNNINGHAM W H. Minimum cuts, modular functions, and matroid polyhedra[J]. Networks, 1985, 15(2) : 205 – 215.

[24] VARMA N, YOSHIDA Y. Average sensitivity of graph algorithms[J]. SIAM Journal on Computing, 2023, 52(4) : 1039 – 1081.

致 谢

“人比山高，脚比路长”，入学时的校歌仿佛还萦绕在耳畔，大学的四年却在转眼间已然步入尾声。此时此刻，这篇毕业论文也即将完成，我想对这一路来给予我鼓励和支持的所有人表达深深的感谢。

首先，我要向我的导师 XXX 老师表达我诚挚的感谢。在论文材料提交等过程中，老师尽其所能地给予我帮助，使相关工作得以顺利完成。此外，这四年里，老师也在竞赛方面给予我支持和鼓励，在生活中关心我的成长，让我倍感师恩难忘。

同时，我也要特别感谢我的校外导师 XXX 老师。选题时，老师鼓励我自主调研，挖掘选题可能；设计算法时，老师用其丰富的学术经验给予我改进的建议；写作时，老师给予我耐心的指导，令我受益匪浅。

感谢计算机科学与技术学院的老师们以及其他任课老师，是老师们鞭辟入里的教学，让我在专业知识储备方面有了巨大的提升，为我的论文写作打下坚实的基础。

感谢我的同学们，大学的四年里，我们共同学习，共同成长，共同进步，共同克服重重困难，成为了彼此成长路上的坚定支持者。

最后我要感谢我的家人，是你们的理解、支持与付出，让我能够全身心的投入知识的海洋中。未来，我将继续砥砺前行，以坚毅与勇气踏上新的征程。