# 第十一次作业——双星（习题4.7）

## 摘要

本次作业使用Eular-Cromer方法求解双星系统的运动方程，并给出在不同质量比下双星的运动轨迹。

## 背景介绍

1. 天体的运动

著名的牛顿万有引力定律

F\_G=(GM\_1M\_2)/r^2

（其中G是万有引力常数，M\_1和M\_2分别是两个相互作用的天体的质量）是描述天体运动的重要依据。假设天体1只受此力作用，其运动方程为

dv\_x(t)/dt=-(GM\_2x(t))/r^3

dx(t)/dt=v\_x(t)

dv\_y(t)/dt=-(GM\_2y(t))/r^3

dy(t)/dt=v\_y(t)

这里的x(t)以及y(t)是天体1的坐标，r为1，2间的距离。

2. 天文单位

在天文学计算中我们一般采用天文单位。在距离方面，地球到太阳的平均距离为一个天文单位，写作1AU（1AU~=1.5×10^11米）。在时间方面，天文学中通常以年计时。

3. Eular-Cromer方法

在第四次作业中，我们曾介绍并使用欧拉法解常微分方程，Eular-Cromer方法与欧拉法类似。二者的不同之处在于迭代的方法，此处我们简举一例说明：

解常微分方程d^2y(t)/dt^2=f(t)时，欧拉法的迭代公式为

z(t+dt)=z(t)+f(t)dt

y(t+dt)=y(t)+z(t)dt

而Eular-Cromer方法的迭代公式是

z(t+dt)=z(t)+f(t)dt

y(t+dt)=y(t)+z(t+dt)dt

也就是说，Eular-Cromer方法使用t+dt时刻，而不是t时刻的dy/dt进行迭代。

## 正文

使用天文单位改写天体的运动方程，并且使用Eular-Cromer法解双星运动的方程组，得到的迭代公式为

对于天体1：

v\_x1(t+dt)=v\_x1(t)-(4π^2 (x\_1(t)-x\_2(t)) m\_2dt)/r^3

x\_1(t+dt)=x(t)+v\_x1(t+dt)dt

v\_y1(t+dt)=v\_y1(t)-(4π^2 (y\_1(t)-y\_2(t)) m\_2dt)/r^3

y\_1(t+dt)=y\_1(t)+v\_y1(t+dt)dt

对于天体2：

v\_x2(t+dt)=v\_x2(t)-(4π^2 (x\_2(t)-x\_1(t)) m\_1dt)/r^3

x\_2(t+dt)=x(t)+v\_x2(t+dt)dt

v\_y2(t+dt)=v\_y2(t)-(4π^2 (y\_2(t)-y\_1(t)) m\_1dt)/r^3

y\_2(t+dt)=y\_2(t)+v\_y2(t+dt)dt

这里的角标“1，2”表示天体的编号，m为天体质量与太阳质量的比值。实际计算中，我们将m\_1固定为1（也就是将天体1“设为太阳”），选取m\_2=0.25, 0.5, 0.75, 1，在0-5年时间段中解微分方程组，得到双星系统的运动轨迹。我们选定的初值条件为

(x\_1(0),y\_1(0))=(-0.5,0)

(x\_2(0),y\_2(0))=(0.5,0)

(v\_x1(0),v\_y1(0))=(0,- π)

(v\_x2(0),v\_y2(0))=(0, π)

结果展示与下图中，需要指出的是，我们采用静止坐标系而不是质心系。