第三节　区间估计

一、区间估计的基本概念

二、典型例题

三、小结

一、区间估计的基本概念

1. 置信区间的定义

设总体 X 的分布函数 $F(x;\theta)$ 含有一个未知参数 θ, 对于给定值 α $(0<\alpha<1)$, 若由样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 确定的两个统计量

$\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 和 $\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 满足

$$P\{\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)<\theta<\overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)\}=1-\alpha,$$

则称随机区间 $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ 是 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间, $\underline{\theta}$ 和 $\overline{\theta}$ 分别称为置信度为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间的置信下限和置信上限, $1-\alpha$ 为置信度.

关于定义的说明

被估计的参数θ虽然未知,但它是一个常数,没有随机性,而区间$(\underline{\theta},\overline{\theta})$是随机的.

因此定义中下表达式

$$P\{\underline{\theta}(X_1,X_2,\Lambda\ ,X_n)<\theta<\overline{\theta}(X_1,X_2,\Lambda\ ,X_n)\}=1-\alpha$$

的本质是:

随机区间$(\underline{\theta},\ \overline{\theta})$ 以 $1-\alpha$的概率包含着参数θ的真值,

而不能说参数θ以 $1-\alpha$的概率落入随机区间$(\underline{\theta},\ \overline{\theta})$.

另外定义中的表达式

$$P\{\underline{\theta}(X_1, X_2, \Lambda, X_n) < \theta < \overline{\theta}(X_1, X_2, \Lambda, X_n)\} = 1 - \alpha$$

还可以描述为：

若反复抽样多次(各次得到的样本容量相等,都是n)

每个样本值确定一个区间$(\underline{\theta}, \overline{\theta})$,

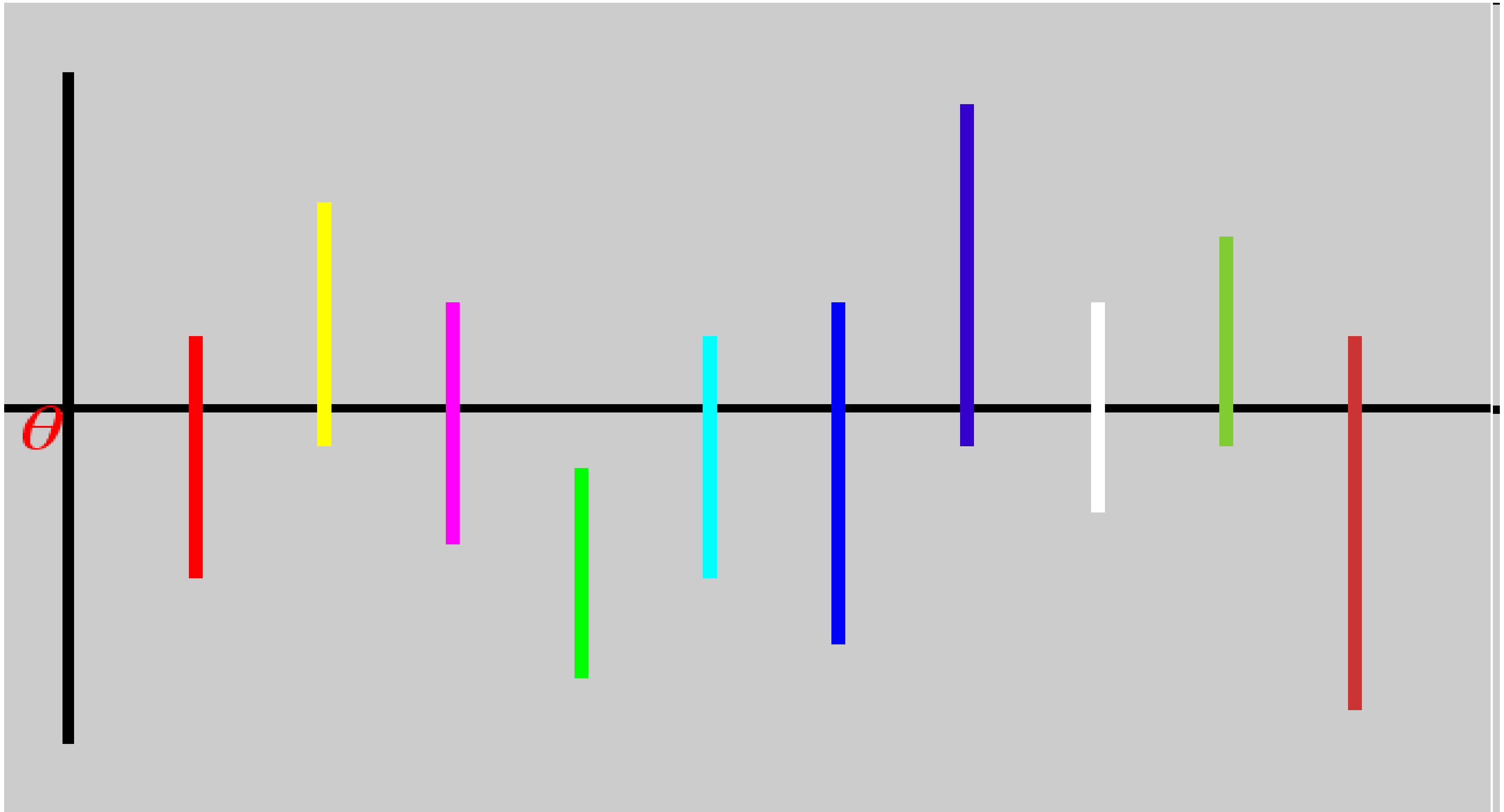
每个这样的区间或包含 θ 的真值或不包含 θ 的真值,

按**伯努利大数定理**, 在这样多的区间中,

包含θ真值的约占$100(1-\alpha)\%$, 不包含的约占$100\alpha\%$.

例如　若 $\alpha = 0.01$, 反复抽样 1000 次,

则得到的 1000 个区间中不包含 θ 真值的约为10个.



2. 求置信区间的一般步骤(共3步)

(1) 寻求一个样本 X_1, X_2, Λ, X_n 的函数：

$$Z = Z(X_1, X_2, \Lambda, X_n; \theta)$$

其中仅包含待估参数 θ, 并且 Z 的分布已知且不依赖于任何未知参数 (包括 θ).

(2) 对于给定的置信度 $1-\alpha$, 定出两个常数 a, b, 使 $P\{a < Z(X_1, X_2, \Lambda, X_n; \theta) < b\} = 1-\alpha$.

注： a,b可以任意找，只要满足区间概率要求即可，一般找对称的。

(3) 若能从 $a < Z(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta) < b$ 得到等价的不等式 $\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}$, 其中 $\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, $\overline{\theta} = \overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 都是统计量, 那么 $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ 就是 θ 的一个置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间.

步骤（3）实质是：由满足

$P\{a < Z(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta) < b\} = 1-\alpha$ 的不等式，来解出关于未知参数θ的不等式

$\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n) < \theta < \overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

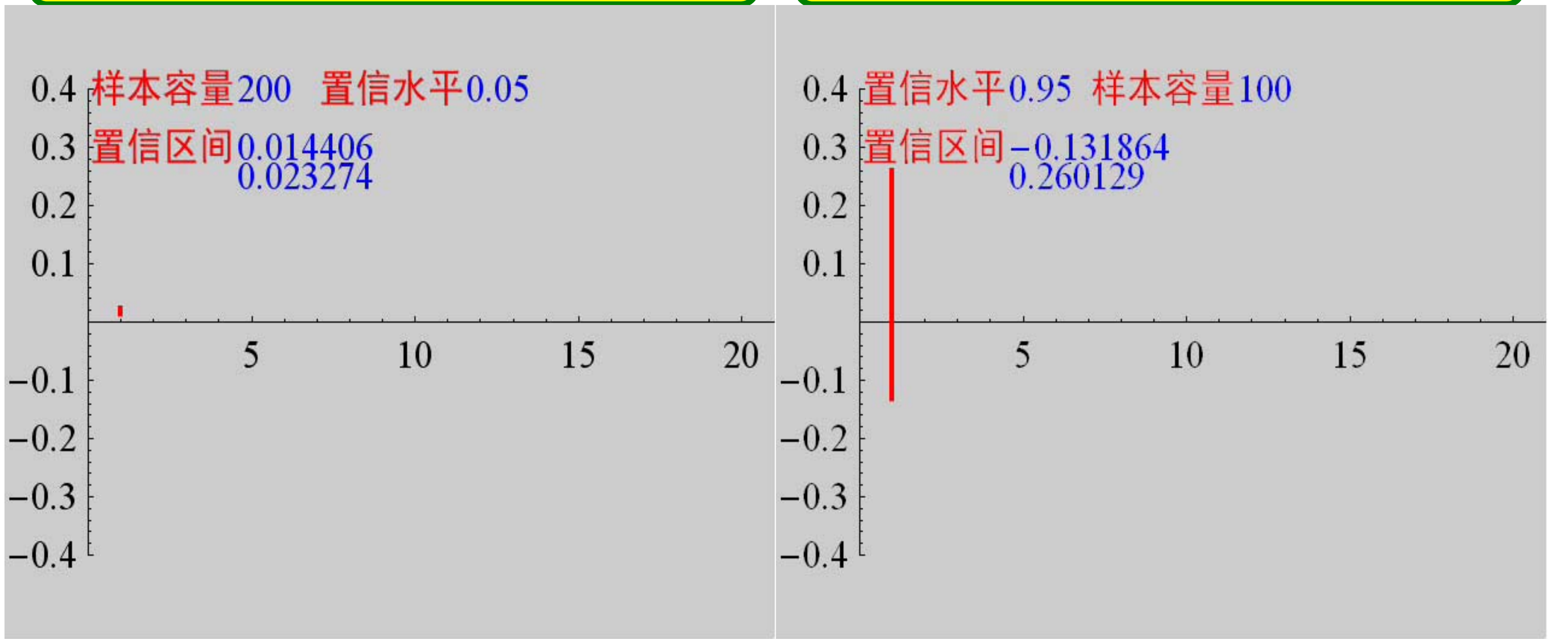
从而得到其上下限。

样本容量 n 固定，置信水平 $1-\alpha$ 增大，置信区间长度增大，可信程度增大，区间估计精度降低.

置信水平 $1-\alpha$ 固定，样本容量 n 增大，置信区间长度减小，可信程度不变，区间估计精度提高.

单击图形播放/暂停　ESC键退出

单击图形播放/暂停　ESC键退出



二、典型例题

例1 设总体 X 在 $[0,\theta]$ 上服从均匀分布，其中 θ $(\theta > 0)$ 未知，(X_1, X_2, Λ, X_n) 是来自总体X的样本，给定 α，求 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

解 令 $X_h = \max\{X_1, X_2, \Lambda, X_n\}$，

由上节例4可知，$\dfrac{n+1}{n}X_h$ 是 θ 的无偏估计，

因为 X_h 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0 \le x \le \theta, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

考察包括待估参数θ的随机变量 $Z=\frac{X_h}{\theta}$,

其概率密度为 $g(z)=\begin{cases} nz^{n-1}, & 0\le z\le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

对于给定的α,可定出两个常数$a,b(0<a<b\le 1)$,

满足条件 $P\left\{a<\frac{X_h}{\theta}<b\right\}=1-\alpha$,

即 $1-\alpha=\int_a^b nz^{n-1}\mathrm{dz}=b^n-a^n$,

$\Rightarrow P\left\{\frac{X_h}{b}<\theta<\frac{X_h}{a}\right\}=1-\alpha$, $\left(\frac{X_h}{b},\frac{X_h}{a}\right)$为置信区间.

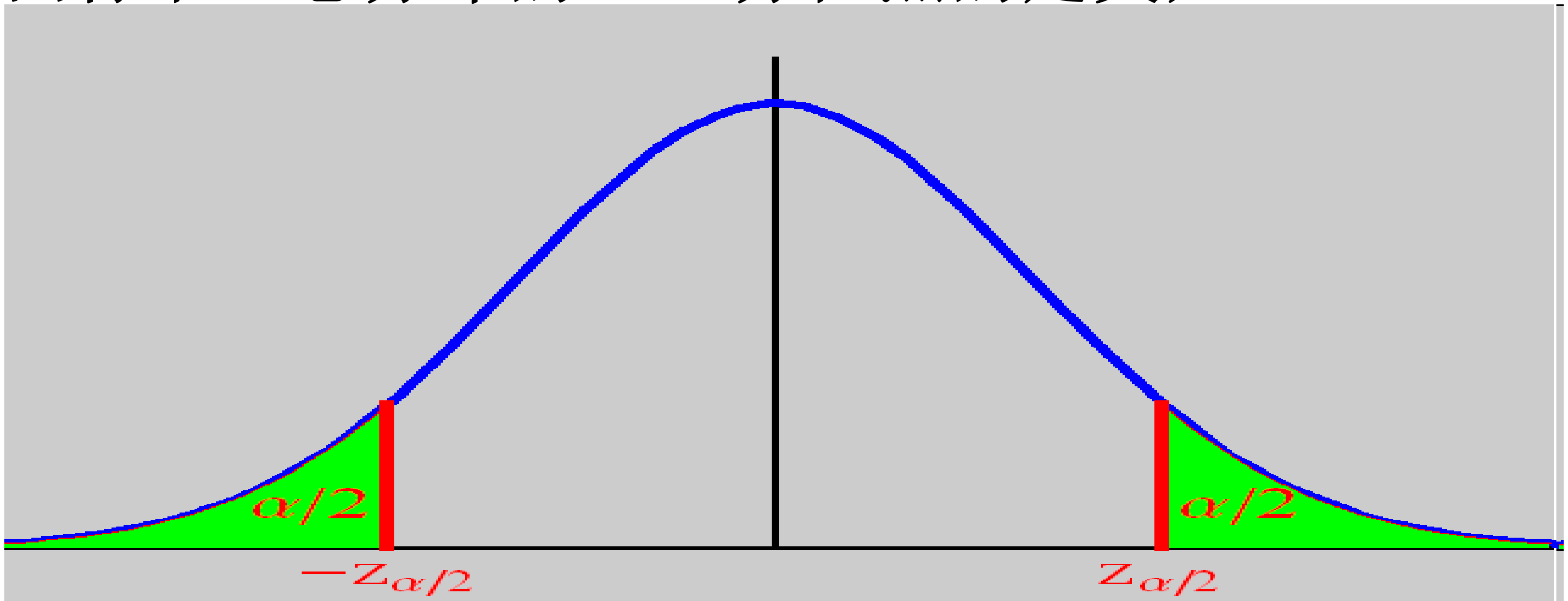
例2 设 $X_1, X_2, \Lambda\ , X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本,其中 σ^2 为已知, μ 为未知,求 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

解 因为 $\overline{X}$ 是 μ 的无偏估计,

且 $U = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$,

$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ 是不依赖于任何未知参数的,

由标准正态分布的上 α 分位点的定义知



$$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha,$$

即 $$P\left\{\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}<\mu<\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha,$$

于是得 μ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\ \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right).$$

这样的置信区间常写成 $\left(\overline{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right).$

其置信区间的长度为 $2\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}$.

注意：置信水平为$1-\alpha$的置信区间是不唯一的.

如果在例2中取 $n=16,\ \sigma=1,\ \alpha=0.05,$

查表可得 $z_{\alpha/2}=z_{0.025}=1.96,$

得一个置信水平为0.95的置信区间$\left(\overline{X}\pm\frac{1}{\sqrt{16}}\times 1.96\right).$

由一个样本值算得样本均值的观察值 $\overline{x}=5.20,$

则置信区间为(5.20 ± 0.49), 即 $(4.71,\ 5.69).$

在例2中如果给定 $\alpha = 0.05,$

则又有 $P\left\{-z_{0.04} < \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{0.01}\right\} = 0.95,$

即 $P\{\overline{X} - \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.01} < \mu < \overline{X} + \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.04}\} = 0.95,$

故 $\left(\overline{X} - \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.01},\ \overline{X} + \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.04}\right)$也是$\mu$的置信水平为0.95的置信区间.

其置信区间的长度为$\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}(z_{0.04} + z_{0.01})$.

比较两个置信区间的长度

$$L_1 = 2 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.025} = 3.92 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

$$L_2 = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}(z_{0.04} + z_{0.01}) = 4.08 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

显然 $L_1 < L_2$. **置信区间短表示估计的精度高.**

说明: 对于概率密度的图形是单峰且关于纵坐标轴对称的情况, 易证取a和b关于原点对称时,能使置信区间长度最小.

例3 设某工件的长度 X 服从正态分布 $N(\mu,16)$, 今抽9件测量其长度, 得数据如下(单位:mm):

142, 138, 150, 165, 156, 148, 132, 135, 160.

试求参数 μ 的置信水平为 95% 的置信区间.

解 根据例2得μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\ \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right),$$

由 $n=9, \sigma=4, \alpha=0.05, z_{0.025}=1.96, \bar{x}=147.333$ 知,

μ的置信度为0.95的置信区间为 $(144.720,\ 149.946)$.

二、σ^2未知时μ的置信区间

这时可用t统计量，因为$t=\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{s}\sim t(n-1)$，因此$t$可以用来作为枢轴量。可得到$\mu$的$1-\alpha$置信区间为：

$$\left[\bar{x}-t_{\alpha/2}(n-1)s/\sqrt{n},\ \ \bar{x}+t_{\alpha/2}(n-1)s/\sqrt{n}\right]$$

此处 $s^2=\frac{1}{n-1}\sum(x_i-\bar{x})^2$ 是σ^2的无偏估计。

例4 设$x_1, x_2, \ldots, x_{10}$是来自$N(\mu, \sigma^2)$的样本，则μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left[\overline{x}-t_{\alpha/2}(9)\, s\big/\sqrt{10},\quad \overline{x}+t_{\alpha/2}(9)\, s\big/\sqrt{10}\right]$$

其中，$\overline{x}$,s 分别为样本均值和样本标准差。

若取α=0.10，则$t_{0..05}(9)$=1.8331，上式化为：

$$\left[\overline{x}-0.5797s,\quad \overline{x}+0.5797s\right]$$

例5

- 课本p.196　例1

三、小结

点估计不能反映估计的精度, 故而本节引入了区间估计.

置信区间是一个随机区间$(\underline{\theta}, \overline{\theta})$, 它覆盖未知参数具有预先给定的概率(置信水平), 即对于任意的$\theta \in \Theta$, 有 $P\{\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}\} \geq 1-\alpha$.

求置信区间的一般步骤(分三步).

例　设$x_1, x_2, \ldots, x_{10}$是来自$N(\mu,\sigma^2)$的样本，则μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left[\overline{x}-t_{1-\alpha/2}(9)\,s\big/\sqrt{10},\quad \overline{x}+t_{1-\alpha/2}(9)\,s\big/\sqrt{10}\right]$$

其中，$\overline{x}$，s 分别为样本均值和样本标准差。这里用它来说明置信区间的含义。

若取α =0.10，则$t_{0..95}(9)$=1.8331，上式化为

$$\left[\overline{x}-0.5797s,\quad \overline{x}+0.5797s\right]$$

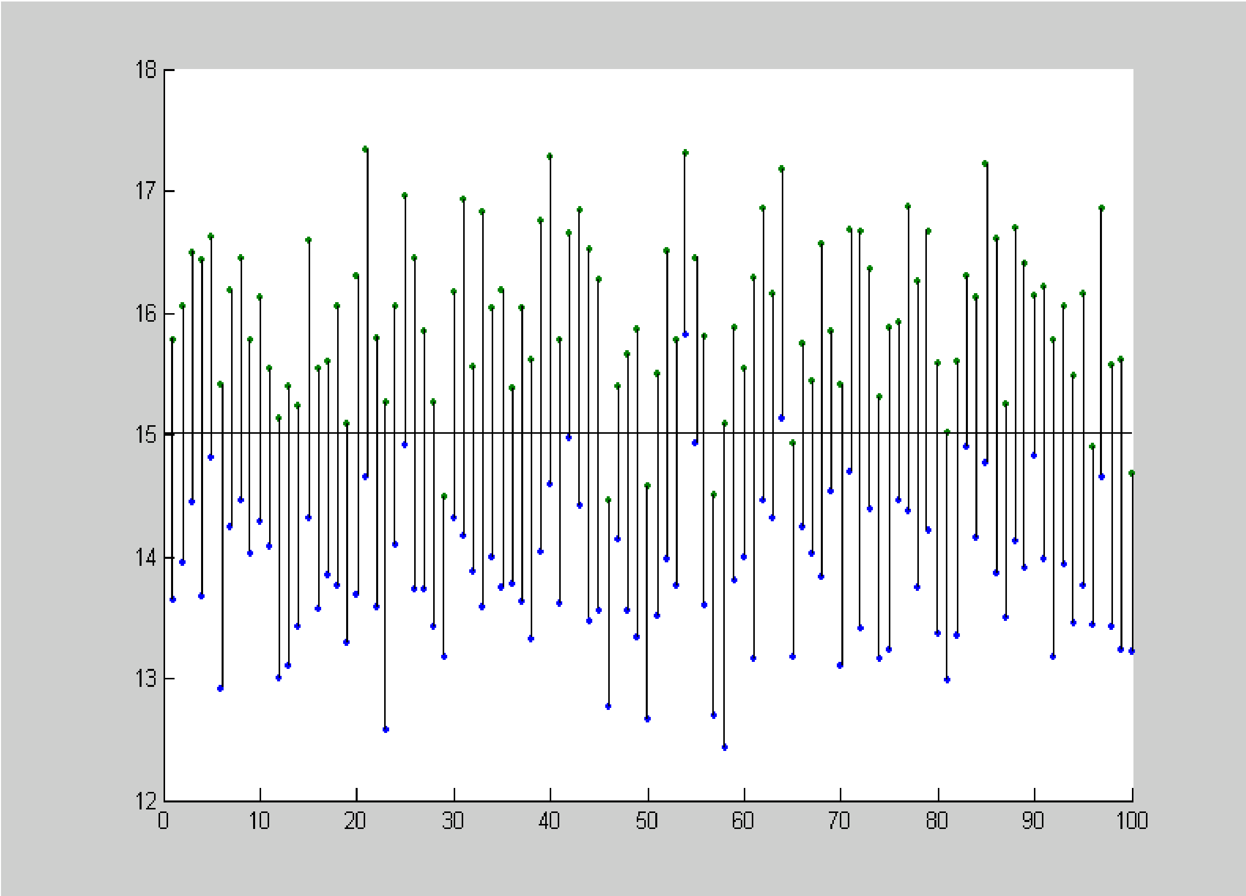
现假定μ =15,σ^2 =4，则我们可以用随机模拟方法由N(15,4)产生一个容量为10的样本，如下即是这样一个样本：14.85 13.01 13.50 14.93 16.97 13.80 17.9533 13.37 16.29 12.38

由该样本可以算得 $\overline{x} = 14.7053, s = 1.8438$

从而得到μ 的一个区间估计为

$$[14.7053-0.5797\times1.8438,\quad 14.7053+0.5797\times1.8438]=[13.6427,\quad 15.7679]$$

该区间包含μ 的真值--15。现重复这样的方法100次，可以得到100个样本，也就得到100个区 间，我们将这100个区间画在图6.4.1上。



由图6.5.1 可以看出，这100个区间中有91个包含参数真值15，另外9个不包含参数真值。

图6.4.1 μ 的置信水平为0.90的置信区间

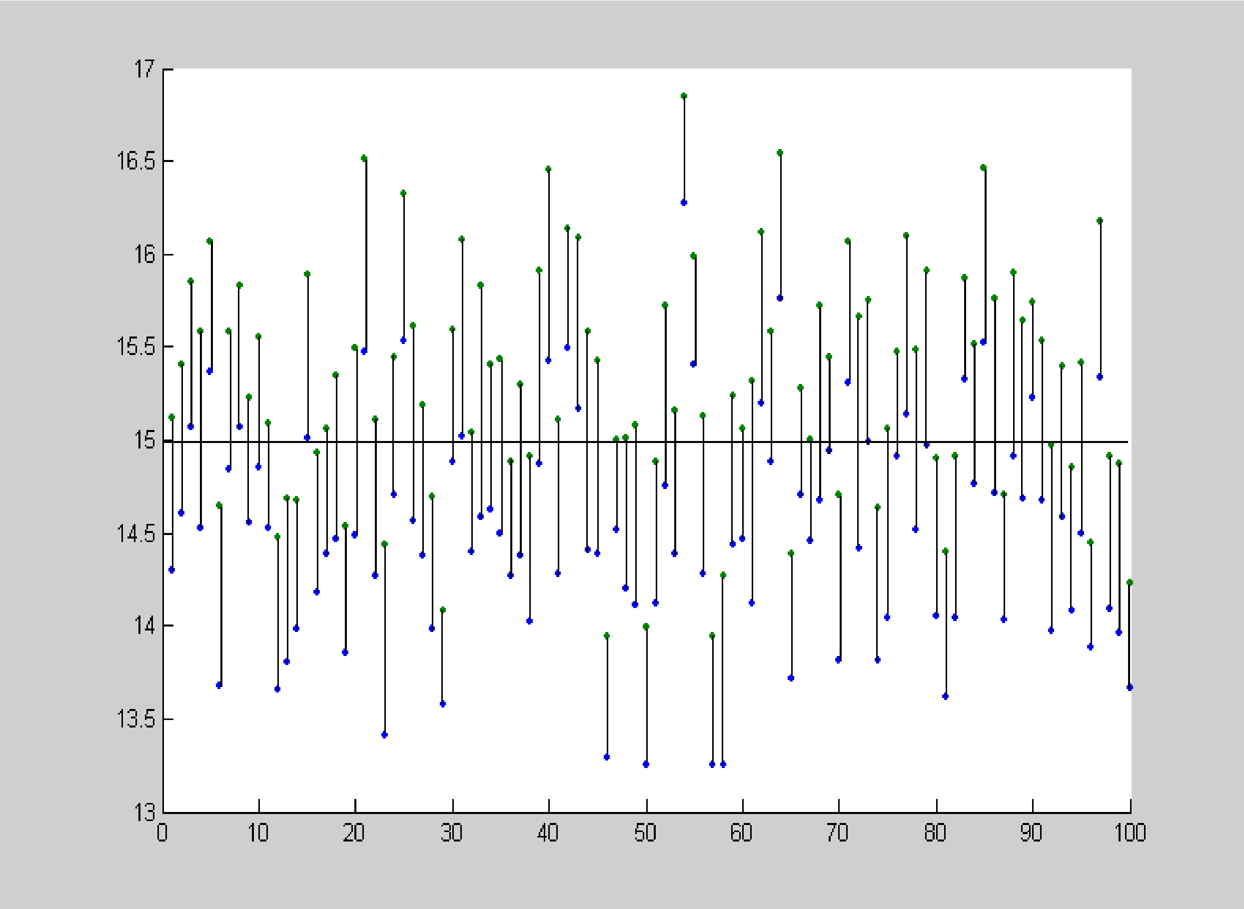


图6.4.2 μ的置信水平为0.50的置信区间

取α=0.50，我们也可以给出100个这样的区间，见图6.4.2。可以看出，这100个区间中有50个包含参数真值15，另外50个不包含参数真值。