2023秋 ODE笔记

9.14 $y'=f(x,y)$

I $y'=f(x)$ 或 $y'=g(y)$

$\hookrightarrow dy=f(x)dx$

$\phi(x)=\int_{x_0}^{x}f(t)dt$ $y(x,C)=\phi(x)+C$ 给出了 $y'=f(x)$ 的通解.

(需要 f 满足局部可积)

$y'=g(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)}=dx \Rightarrow \int\frac{dy}{g(y)}=\int dx=x+C'$

$x(y,C)=\int_{y_0}^{y}\frac{d\xi}{g(\xi)}+C$ 为 $y'=g(y)$ 的通解

例: $y'=\sqrt{|y|}$

如果 $y=y(x)$ 是 $y>0$ 时的解. 那么 $y=-y(-x)$ 是 $y<0$ 时的解.

先考虑 $y>0$ 时情形 $\frac{dy}{dx}=\sqrt{y}$ $\frac{dy}{\sqrt{y}}=dx \Rightarrow x=2\sqrt{y}+C \Rightarrow y=\frac{(x+C)^2}{4}$

$y=-\frac{(-x+C)^2}{4}$ 是 $y<0$ 时的解. 且 $y\equiv0$ 是 $y=0$ 时的解.

三段解可以任意拼接. 得到的东西都是 $y'=\sqrt{|y|}$ 的解.

解的唯一性不能保证.

(1) 若 $y_0=0$. 解在 (x_0,y_0) 处无唯一性

(2) 若 $y_0\neq0$. 解在 (x_0,y_0) 局部唯一.

II $y'=f(x)g(y)$. $\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$ $\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx$

f,g 连续

$$\ln g(y)=\int f(x)dx+C$$

若在 (x_0,y_0) 处 $g(y_0)\neq0$. 则在 (x_0,y_0) 附近解唯一 (由隐函数定理)

(若 $g(y_0)=0$. 若 $\exists\alpha>0$ s.t. $\int_{y_0}^{y_0+\alpha}\frac{d\xi}{g(\xi)}$, $\int_{y_0-\alpha}^{y_0}\frac{d\xi}{g(\xi)}$ 发散. 则

从 $y=y_0$ 这条线一侧出发的解, 不会跑到另一侧.)

但即使解存在唯一, 但在 x-y 平面上经过不同点的解, 它们的差异可以非常大.

9.19 Ⅲ $y'=f(x)g(y)$ 与变换群

1. $y'=f(ax+by+c)$

$u=ax+by+c$. $u'=a+by'=a+bf(u)$ 可分离变量

2. 变换群

设D为某方向场的定义域. $g:D\to D$ 为一微分同胚, 且D上方向场在g下不变.

e.g. $y'=f(\frac{y}{x})$

$y'=f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$ 若 $\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}=0$ 则$\exists\lambda$ s.t. $a=\lambda\alpha$. $b=\lambda\beta$. $y'=f\left(\lambda+\frac{c'}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$ $=g(\alpha x+\beta y+\gamma)\to 1.$

若 $\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}\neq 0$ 则 $\exists$唯一(x_0,y_0) s.t. $\begin{cases} ax_0+by_0+c=0 \\ \alpha x_0+\beta y_0+\gamma=0 \end{cases}$ 令 $\begin{cases} \bar{x}=x-x_0 \\ \bar{y}=y-y_0 \end{cases}$

则 $\bar{y}'(\bar{x})=y'(\bar{x}+x_0)=f\left(\frac{a+b\frac{\bar{y}}{\bar{x}}}{\alpha+\beta\frac{\bar{y}}{\bar{x}}}\right)=g\left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right)$

一阶线性ODE 具有形式 $y'+g(x)y=h(x)$ (1)

记 $L: C'\to C$ 则L为线性算子

$\phi\mapsto\phi'+g\cdot\phi$

若 $h=0$. 则称(1)齐次, 否则称(1)非齐次.

当 $h=0$ 时. 积分因子 $e^{\int g(x)dx}$ (找积分因子也是构造出来的)

$$y'e^{\int g(x)dx}+g(x)y\,e^{\int g(x)dx}=0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\,ye^{\int g(x)dx}=0.$$

$$y\,e^{\int_{x_0}^{x}g(x)dx}=y_0 \Rightarrow y=y_0e^{-\int_{x_0}^{x}g(x)dx}$$

若 $h\neq 0$. 也可用积分因子同乘方程两边

$$y'e^{\int g(x)dx}+g(x)y\,e^{\int g(x)dx}=h(x)\,e^{\int g(x)dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(y(x)\cdot e^{\int g(x)dx}\right)=h(x)\,e^{\int g(x)dx}$$

两边积分. $y(x)\,e^{\int_{x_0}^{x}g(s)ds}=\int_{x_0}^{x}h(s)e^{\int_{x_0}^{s}g(t)dt}ds+y_0$

$$y(x)=e^{-\int_{x_0}^{x}g(s)ds}\left[\int_{x_0}^{x}h(s)e^{\int_{x_0}^{s}g(t)dt}ds+y_0\right]$$

一些可化为一阶ODE的重要例子.

1. Bernoulli方程

$$y' + g(x)y + h(x)y^{\alpha} = 0. \quad (\alpha \neq 1) \qquad (1)$$

先寻找 $y>0$ 的解. 两边同乘 $(1-\alpha)y^{-\alpha}$. 得

$$(1-\alpha)y^{-\alpha}y' + g(x)(1-\alpha)y^{-\alpha}y + h(x)(1-\alpha) = 0.$$

$$(y^{1-\alpha})' + (1-\alpha)g(x)y^{1-\alpha} + (1-\alpha)h(x) = 0.$$

令 $z = y^{1-\alpha}$ 则

$$z' + (1-\alpha)g(x)z + (1-\alpha)h(x) = 0 \quad \text{是一阶线性ODE} \qquad (2)$$

唯一性

2. Ricatti方程

$$y' + g(x)y + h(x)y^2 = k(x) \qquad (3)$$

若 y、ϕ 均为方程(3)的解. 则 $(y-\phi)' + g(x)(y-\phi) + h(x)(y^2-\phi^2) = 0$.

记 $u = y-\phi$. 则

$$u' + g(x)u + h(x)u(u+2\phi) = 0$$

$$u' + (g(x) + 2h(x)\phi(x))u + h(x)u^2 = 0$$

为Bernoulli方程. 可以解

Ricatti方程与二阶线性方程

Picard迭代　初值问题 $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ (f,在 $[x_0-a, x_0+a] \times [y_0-b, y_0+b]$ 上连续).

在 $I=[x_0-h, x_0+h]$ 上有且仅有一个解. 其中 $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$

$M = \sup_{(x,y)\in[x_0-a,x_0+a]\times[y_0-b,y_0+b]} \{|f(x,y)|\}$

Pf: 构造Picard序列 : $y_0(x) = y_0$

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_n(x))\,dx$$

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1}) + y_0$$

以下用归纳法证明 $|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \le \frac{M}{L} \frac{(L|x-x_0|)^{n+1}}{(n+1)!}$

(1) $n=0$ 时. $|y_1(x) - y_0(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\,dt\right| \le M|x-x_0|$ ✓

(2) if　n时.已成立

(3)　n时: $|y_{n+1}(x) - y_n(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} \big(f(t, y_n(t)) - f(t, y_{n-1}(t))\big)\,dt\right|$

$$\le \int_{x_0}^{x} L \frac{M}{L} \frac{(L|t-x_0|)^n}{n!}\,dt$$

$$= \frac{M}{L} \frac{1}{n!} \frac{L^{n+1}}{n+1} (x-x_0)^{n+1} = \frac{M}{L} \frac{(L|x-x_0|)^{n+1}}{(n+1)!}$$

故由数学归纳法知不等式成立.

故 $\left|\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - y_{k-1}) + y_0\right| \le \sum_{k=1}^{\infty} |y_k - y_{k-1}| + |y_0|$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M}{L} \frac{(L(x-x_0))^k}{k!} + |y_0|$$

$$= |y_0| + \frac{M}{L} \left(e^{L(x-x_0)} - 1\right) \quad \text{收敛}$$

故 $y_n(x)$ 一致收敛. 设收敛于 $\varphi(x)$.

故 $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\,dt\right) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,dt$

9.21 ODE 适定性

"简单的泛函分析内容" $(X, \|\cdot\|)$ 赋范线性空间

无穷维线性空间 ① $D \subset \mathbb{R}^n$ 紧. $C(D)$ 例 $\|f\| = \sup_{x \in D} |f(x)|$ $f \in C(D)$

$\|f\| = \max_{x \in D} |f(x)|\, p(x)$, $0 < \alpha \le p(x) \le \beta < \infty$

② $C^1(\Omega)$ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 有界, Ω 开, $\|f\|_{C^1} = \max_{x \in \bar{\Omega}} (|f(x)| + |f'(x)|)$

9.28 Banach 空间中的压缩映射原理

D闭. $T(D) \subset D$ $\exists q \in (0,1)$ s.t. $\|Tx - Ty\| \le q\|x-y\|$ $\forall x, y \in D$

则T在D中存在唯一不动点 $\bar{x}$ $T\bar{x} = \bar{x}$

$x_{n+1} = Tx_n$. 且 $\|x_n - \bar{x}\| \le \frac{1}{1-q}\|x_{n+1} - x_n\| \le \frac{q^n}{1-q}\|x_1 - x_0\|$

若仅有 $\|Tx - Ty\| \le \|x-y\|$
则~~唯~~无唯一性
存在性用
Brouwer 不动点定理

Pf: 首先. $\forall x_0 \in D$. 取 $\{x_n\}$. 则 $\|x_{n+1} - x_n\| \le q\|x_n - x_{n-1}\| \le \cdots \le q^n \|x_1 - x_0\|$

~~x=y~~ 且 $\forall x, y \in D$ $\|x-y\| \le \|x - Tx\| + \|Tx - Ty\| + \|Ty - y\|$

$\le \|x - Tx\| + q\|x-y\| + \|Ty - y\|$

$\|x-y\| \le \frac{1}{1-q}(\|x - Tx\| + \|Ty - y\|)$

存在唯一性数分中已证 $\|x_n - \bar{x}\| \le \frac{1}{1-q}(\|x_n - Tx_n\| + \|T\bar{x} - \bar{x}\|) \le \frac{q^n}{1-q}\|x_1 - x_0\|$

考虑初值问题 $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ $x \in [x_0, x_0+a]$ 令 $J = [x_0, x_0+a]$, $S = J \times \mathbb{R}$

Lipschitz条件: f在S上连续, $|f(x,y) - f(x,y')| \le L|y - y'|$. $\forall (x,y)\ (x,y') \in S$

Cauchy-Lipschitz 定理1:

考虑积分方程 $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$

将微分方程转化成积分方程
"微分算子无界. 积分算子有界"

考虑映射 $T: C(J) \to C(J)$ $(C(J) \subset S)$

$(Ty)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$ 寻求初值问题的解等价于找 $Ty = y$. 不动点.

$\forall y, z \in C(J)$ $|(Ty)(x) - (Tz)(x)| \le La\|y - z\|_0$ $\Rightarrow \|Ty - Tz\|_0 \le La\|y - z\|_0$

关于 La 与 1 比大小的讨论：

① $aL<1$. 由压缩映射原理 有唯一解

② $aL\geq 1$. 取 $a_0=\frac{2}{3}\frac{1}{L}$ 则在 $[x_0, x_0+a_0]$ $[x_0+a_0, x_0+2a_0]$. 上均存在唯一解. 可走到 $[x_0, x_0+a]$

rmk: 1). "Picard迭代"

2) 左行解：函数镜像后变为右行

10.7 解的延拓

在上面的证明中要求 $S=J_x\times\mathbb{R}$. 但若只有 $S=J_x\times J_y$ 如 $J_y=[a,b]$ 做不到 $\mathbb{R}$, f在S上连续. 也能在附近一小段保证解的存在唯一性.

办法是将 $f(x,y)$ 延拓至 $\hat{f}(x,y)$. $\hat{f}$在 $J_x\times\mathbb{R}$ 上. 但舍弃解超出 S 的部分

这里提到了几种延拓解的定理. 列举如下

对于 $x\in[\xi,\xi+a]$. $y'=f(x,y)$ 且 $y(\xi)=\eta$.

1. $R=[\xi,\xi+a]\times[\eta-b,\eta+b]$. $f\in C(R)$ 且 f在R中对y满足Lipschitz条件. 则初值问题在 $[\xi,\xi+\alpha]$ 上有唯一解. 其中 $\alpha=\min\{a,\frac{b}{A}\}$. $A=\max_R|f|$.

(a) 局部Lipschitz 可保证局部解且唯一

2. (b) 对开集D. $f\in C(D)$ ~~且满足局部Lipschitz条件.~~

$\Phi=\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ $(A\neq\emptyset)$ 是一些函数. φ_α定义在J_α上. 且 $\xi\in J_\alpha$, φ_α在J_α上是解

且满足 $\forall x\in J_\alpha\cap J_\beta$ $(\alpha,\beta\in A)$ $\varphi_\alpha(x)=\varphi_\beta(x)$. 则若 $J=\bigcup_{\alpha\in A}J_\alpha$.

J上存在 解 φ 且 $\varphi|_{J_\alpha}=\varphi_\alpha$ 对 $\forall\alpha\in A$ 成立.

$D\subset\mathbb{R}^2$, $f\in C(D)$

3. (a) 若 φ 是 $y'=f(x,y)$ 在 $[\xi,b)$ 上的解. 且 φ 的图像被包含在D中一个紧集中. 则φ可延拓至$[\xi,b]$

(b) 若 φ是$[\xi,b]$上的一个解. ψ是$[b,c]$上一个解. 且 $\varphi(b)=\psi(b)$

则 $u(x)=\begin{cases}\varphi(x) & \xi\leq x\leq b\\ \psi(x) & b<x\leq c\end{cases}$ 是 $[\xi,c]$ 上的解.

(rmk: 其实在~~证明~~此页最上面已用了此定理).

∘4. $f\in C(D)$ 且在D中关于 y 满足局部Lipschitz条件. D是开集.

则对 $\forall(\xi,\eta)\in D$. 初值问题 $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(\xi)=\eta \end{cases}$ 有一个解 φ. 且唯一.
"极大"
即任意过 (ξ,η) 的解都是 φ 的限制. 在某个区间上

• Peano 存在性定理: $f(x,y)$ 在D上连续且有界. $(\xi,\eta)\in D$. 则至少存在一个过 (ξ,η) 的解

除定义 $z_\alpha(x)=\begin{cases} \eta & x\le\xi \\ \eta+\int_\xi^x f(t,z_\alpha(t-\alpha))\,dt & x\in J \end{cases}$ $\langle J=[\xi,\xi+a]$. $S=J\times\mathbb{R}$

由 f 是有界的. $\{z_\alpha(x)\}$ 是等度连续的且有界 $(|f|\le C\Rightarrow|z_\alpha'(x)|\le C)$.

由 Ascoli-Arzela 定理. $\{z_{\frac{1}{n}}(x)\}$ 有~~收~~一致收敛子列. 收敛到 $y(x)$

不妨 $z_k(x)\rightrightarrows y(x)$. (只是个记号)

$|z_k(t-\alpha_k)-y(t)|\le|z_k(t-\alpha_k)-z_k(t)|+|z_k(t)-y(t)|$
$\le C\alpha_k+|z_k(t)-y(t)|\to0.$

故 $z_k(t-\alpha_k)$ 也一致收敛于 $y(t)$.

$f(t,z_k(t-\alpha_k))$ 也一致收敛于 $f(t,y(t))$

由 $z_k(x)=\eta+\int_\xi^x f(t,z_k(t-\alpha_k))\,dt$. 及一致收敛保证极限与积分可换

两边同时对k取极限. 得到 $y(x)=\eta+\int_\xi^x f(t,y(t))\,dt$.

即 $y(x)$ 是原方程的解

(且有"极大解")

(rmk: 这是存在性证明. 不是构造性证明) GTM 182 P83 给出构造性证明

- Gronwall 不等式　$\varphi(t) \le \alpha + \beta\int_0^t \varphi(s)\,ds = \psi(t)$　$\alpha>0$, ~~其中~~ $\beta>0$.

$$\Rightarrow \varphi(t) \le \alpha e^{\beta t}$$

Pf: $\psi'(t) = \beta\varphi(t) \le \beta\psi(t)$.

$$\psi' - \beta\psi \le 0.$$

$$\left(e^{-\beta t}\psi(t)\right)' \le 0 \quad \Rightarrow e^{-\beta t}\psi(t) \le \psi(0) \le \alpha$$

$$\varphi(t) \le \psi(t) \le \alpha e^{\beta t}$$

若有 Lipschitz 条件, 则可用上述不等式证明唯一性: [习题]

设 $y_1(x)$ $y_2(x)$ 是两个解. 记 $\psi(x) = \frac{1}{2}|y_1(x)-y_2(x)|^2$

$$= \frac{1}{2}\left|\int_0^x f(t,y_1(t))\,dt - \int_0^x f(t,y_2(t))\,dt\right|^2$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\int_0^x |f(t,y_1(t)) - f(t,y_2(t))|\,dt\right)^2$$

$$\le \frac{1}{2}a\int_0^x |f(t,y_1(t)) - f(t,y_2(t))|^2\,dt.$$

$$\le aL^2\int_0^x \frac{1}{2}|y_1(t)-y_2(t)|^2\,dt. = aL^2\int_0^x \psi(t)\,dt$$

由 Gronwall 不等式. $\psi(x) \le 0 \Rightarrow y_1(x) = y_2(x)$.

- Euler 折线

一系列逼近解 u_α 如下构造: $x_i = \xi + \alpha i$　$u_\alpha(x_0)=\eta$　~~对 $\xi = x_0 \le x \le x_1$　$u_\alpha(x) = \eta + (x-x_0)f(\xi,\eta)$~~

在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上. u_α 是过 $(x_i, u_\alpha(x_i))$、斜率为 $f(x_i, u_\alpha(x_i))$ 的直线.

- Volterra 积分方程 解的存在性　g 在 $J=[0,a]$ 上连续. k 对 $0\le t\le x\le a$, $\xi\in\mathbb{R}$ 连续.

$y(x) = g(x) + \int_0^x k(x,t,y(t))\,dt$　且 $|k| \le L(1+|\xi|)$

在 J 上至少存在一个连续解.

: 记 $C = \max\limits_{x\in J}|g(x)|$　$\rho(x)$ 为初值问题 $\begin{cases}\rho(0)=C\\ \rho' = L(1+\rho)\end{cases}$ 的解.

$$D = \{v\in C(J) \mid |v(x)| \le \rho(x),\ \forall x\in J\}$$

考虑映射 $T: C(J) \to C(J)$

$$u(x) \mapsto g(x) + \int_0^x k(x,t,u(t))\,dt \qquad \text{则 } T(D) \subset D$$

由 Schauder 不动点定理 (Banach 空间中闭凸集到自身的连续紧映射必有不动点)

T 有不动点. $y(x)$. 即为原方程的解

10.26 ◦ 比较定理

φ,ψ 在 $[\xi,\xi+a]$ 上可微且满足 $J_0=[x_0,x_0+a]$. $P\varphi=\varphi'-f(x,\varphi)$

1) $\varphi(x)<\psi(x)$ 对 $\forall x\in(\xi,\xi+\delta)$

2) $P\varphi<P\psi$ 于 J_0

对左行解有类似物.

则 $\varphi(x)<\psi(x)$ 对 $\forall x\in J_0$

$\varphi\leq\psi$ 当 $x<x_0$

∵否则(对此推理,此处未记,在GTM182 P89上) $\exists\, x_0\in(\xi,\xi+a]$ s.t. $\varphi(x_0)=\psi(x_0)$ 且 $\varphi'(x_0)\geq\psi'(x_0)$

而 $\varphi'(x_0)-f(x_0,\varphi(x_0))<\psi'(x_0)-f(x_0,\psi(x_0))$ 故 $0\leq\varphi'(x_0)-\psi'(x_0)<f(x_0,\varphi(x_0))-f(x_0,\psi(x_0))=0$. 矛盾!

故必有 $\varphi(x)<\psi(x)$. $\forall x\in \overset{\frown}{J_0}$.

◦对称地若 φ,ψ 在 $[\xi-a,\xi)$ 上可微.且 1) $\varphi(x)<\psi$ 对 $\forall x\in(\xi-\delta,\xi)$

2) $P\varphi>P\psi$ 于 J_0 则 $\varphi(x)<\psi(x)$ 对 $\forall x\in J_0$

◦ 上解与下解 (都不是方程的解)

设 $D\subset\mathbb{R}^2$. $f:D\to\mathbb{R}$ 连续. 考虑 $\begin{cases}y'=f(x,y)\\y(x_0)=y_0\end{cases}$ (1) $x\in[x_0,x_0+a]=J$.

分别称 v. w 为 (1) 的下解、上解. 若 v. w 在 J 上可微. 且

$\begin{cases}v'<f(x,v)\\v(x_0)\leq y_0\end{cases}$ $x\in J$ $\begin{cases}w'>f(x,w)\\w(x_0)\geq y_0\end{cases}$ $x\in J$

v, w 的图像包含于 D

○ 最大解与最小解（都是方程的解）

若初值问题 $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(\xi)=\eta \end{cases}$ $(\xi,\eta)\in D$ （f为D上连续函数）有两个解 $y_*(x)$ 与 $y^*(x)$，

它们满足

则该初值问题的解 $y(x)$ 满足 $y_*(x)\le y(x)\le y^*(x)$

二 首先假设 $f(x,y)$ 在 $J\times\mathbb{R}=[\xi,\xi+a]\times\mathbb{R}$ 上连续且有界。

$y(x)$ 是题中方程的一个解；$w=w_n(x)$ 是 $\begin{cases} w(\xi)=\eta+\frac{1}{n} \\ w'(x)=f(x,w(x))+\frac{1}{n} \end{cases}$ 的一个解。

则 $\exists\delta>0$，在 $[\xi,\xi+\delta)$ 内，$y(x)<w_{n+1}(x)<w_n(x)$

$Py=0<\frac{1}{n+1}=Pw_{n+1}<\frac{1}{n}=Pw_n$

故，由比较定理，$y<w_{n+1}<w_n$ 在 J 上。

故 $\{w_n\}_n$ 单调减且有下界，定义 $y^*(x)=\lim\limits_{n\to\infty}w_n(x)\ge y(x)$。

由等度连续性，这也是一致收敛的，故 $y^*(x)$ 也连续

故，由 $w_n(x)=\eta+\frac{1}{n}+\int_\xi^x\left(f(x,w_n(t))+\frac{1}{n}\right)dt$，极限与积分可交换

$$y^*(x)=\lim_{n\to\infty}w_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\eta+\frac{1}{n}+\int_\xi^x\left(f(x,w_n(t))+\frac{1}{n}\right)dt\right)=\eta+\int_\xi^x f(x,y^*(t))dt$$

即 $y^*(x)$ 是解。

同理可以构造 $y_*(x)$ 及证明 $y_*(x)\le y(x)$，$y_*(x)$ 是解。

rmk: 1. f 连续，初值问题解唯一 $\Leftrightarrow$ $y_*(x)=y^*(x)$

2. 若解不唯一，则解填满了 $y_*(x)$ 与 $y^*(x)$ 之间的区域（即过其中任意一点存在一个解）

二 对 $x_0\in[\xi,\xi+a]$，$\zeta_0\in$ 考虑 $[y_*(x_0),y^*(x_0)]$ 考虑过 (x_0,ζ_0) 的一个解 $\zeta(x)$（此时暂不考虑过 (ξ,η)）
（由Peano存在性定理保证）

我们的目标是证明它会过 (ξ,η)。

由于 y^* 与 y_* 在 (ξ,η) 处相搬，故 $\zeta(x)$ 往左走时必会碰到 y_* 或 y^*。

$x_1=\inf\{b\mid\forall x\in(b,x_0],\ y_*(x)<\zeta(x)<y^*(x)\}$ 若 $\zeta(x_1)=y^*(x_1)$

并定义 $\zeta(x)=y^*(x)$ $\forall x\in[\xi,x_1]$，则 $\zeta(x)$ 是原方程过 (x_0,ζ_0) 的一个解。

隐式微分方程 $F(x,y,y')=0$.

对方程 $F(x,y,p)=0$. 对 $F(x_0,y_0,p_0)=0$ 若在 (x_0,y_0,p_0) 附近(某个邻域内)唯有唯一的形式 $p=f(x,y)$.
则称 (x_0,y_0,p_0) regular.

否则. 称 (x_0,y_0,p_0) singular

一. ∵若 $F(x_0,y_0,p_0)=0$ 且 $\frac{\partial F}{\partial p}(x_0,y_0,p_0)\neq 0$. 则由隐函数定理知在 (x_0,y_0,p_0) 处正则.

rmk: singular $\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial p}(x_0,y_0,p_0)=0$

$\not\Leftarrow$

。用 $p=y'$ 作为参数: 则 $\dot y(p)=p\cdot \dot x(p)$

[用p作为参数的必要条件为p不能为常数!!!]

∟若 $x=g(p)$ 则 $y(p)=C+\int p\,\dot g(p)\,dp$

∟若 $y=g(p)$ 则 $x(p)=C+\int \frac{\dot g(p)}{p}\,dp$

Clairaut 微分方程 $y=xy'+g(y')$

$\Rightarrow y(p)=x(p)\cdot p+g(p)$

对p微分: $\dot y(p)=\dot x(p)\cdot p+x(p)+\dot g(p)=p\cdot \dot x(p)$

$\Rightarrow x(p)+\dot g(p)=0.$ $\Rightarrow \begin{cases} x(p)=-\dot g(p) \\ y(p)=-p\dot g(p)+g(p)\end{cases}$ (1) 是其一个解.

注意. $y(x)=Cx+g(C)$ (2) 也是它的解! 而它不能写成上式的形式 因为 $p\equiv C$ 此参数不会变动
不能作为参数.

可以发现: $p=C$ 时 $(x(C),y(C))$ 满足(1)和(2) 且(1)在此处斜率为 C.

故(2)为(1)的一族切线 称(1)为(2)这族线的 envelope("包络")

如果想要(1)决定原微分方程的一个解, 得满足什么条件?

若 $g\in C^2(J)$. 则 $x,y\in C^1(J)$

进一步若 $\ddot g\neq 0$ 则 $\dot x\neq 0$ 即(1)可以显式地表成 $y=\phi(x)$

$\phi(x(p))=y(p)=C-\int p\,\ddot g(p)\,dp$

D'Alembert 微分方程 $y = x f(y') + g(y')$

$$y(p) = x(p) f(p) + g(p)$$

对 p 微分 $\dot y(p) = \dot x(p) f(p) + x(p) \dot f(p) + \dot g(p) = p \dot x(p)$

$$\Rightarrow \dot x(p) = \frac{x(p)\dot f(p) + \dot g(p)}{p - f(p)} = A(p)\, x(p) + B(p)$$ 是一阶线性齐次ode

并且注意到直线解 $y = cx + d$ 需满足 $\begin{cases} f(c) = c \\ d = g(c) \end{cases}$

11.2 ~~Osgood~~ 解方程 $F(x,y,\dot y)=0$.

Osgood 定理 设 $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \in C^2$ 若 $y=y(x)$ 满足

$$\begin{cases} f(x,y,C)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial c}(x,y,C)=0 \end{cases} \text{ 且 } \begin{cases} \left(\det\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial c} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial c} \end{bmatrix} \neq 0\right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial c^2} \neq 0. \end{cases} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,c) \neq 0$$

奇解 $F(x,y,\frac{dy}{dx})=0$. 有特解 $\Gamma: y=\varphi(x)$. 若 $\forall Q\in\Gamma$. Q 的任何邻域内有另外一个解与 Γ 在 Q 点相切则称 Γ 为奇解.

Γ 为奇解必要条件: 若 $F(x,y,p) \in C$ 且 $\frac{\partial F}{\partial y}$ $\frac{\partial F}{\partial p} \in C$.

则若 $\Gamma: y=\varphi(x)$ 为奇解, 必有 $\begin{cases} F(x,\varphi(x),\varphi'(x))=0 \\ \frac{\partial F}{\partial p}(x,\varphi(x),\varphi'(x))=0. \end{cases}$

充分条件: 若 $F(x,y,p)\in C^2$ 且满足必要条件的判别式.

若还有 $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x),\varphi'(x)) \neq 0 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}(x,\varphi(x),\varphi'(x)) \neq 0 \end{cases}$ 则 Γ 是奇解. → 考虑 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y^2 = 0$.

→ 考虑

包络: 曲线族 $V(x,y,C)=0$ 的包络 Γ. $\in C^1$ " $\forall Q\in\Gamma$. 曲线族中有与 Γ 切于 Q 点的曲线. 且在 Q 的任意邻域内与 Γ 不相同.

D'Alembert 降阶法

对于 $\vec{y}' = A(t)\vec{y}$ 如果已经知道一个解 $\vec{x}(t)$.

则可以设剩下的解具有形式 $\vec{y}(t) = \phi(t)\vec{x}(t) + \vec{z}(t)$ 其中 $\vec{y}(t), \vec{x}(t), \vec{z}(t)$ 是n阶列向量、$\phi(t)$ 是一阶标量

并且 $\vec{z}(t)$ 具有形式 $\vec{z}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{bmatrix}$

$$\vec{y}'(t) = \phi'(t)\vec{x}(t) + \phi(t)\vec{x}'(t) + \vec{z}'(t) = A(t)\vec{y}(t) = A(t)\phi(t)\vec{x}(t) + A(t)\vec{z}(t)$$

$$= \phi'(t)\vec{x}(t) + \phi(t)A(t)\vec{x}(t) + \vec{z}'(t)$$

$$\phi'(t)\vec{x}(t) + \vec{z}'(t) = A(t)\vec{z}(t)$$

$$\vec{z}'(t) = A(t)\vec{z}(t) - \phi'(t)\vec{x}(t)$$

即

$$\begin{bmatrix} 0 \\ z_2'(t) \\ \vdots \\ z_n'(t) \end{bmatrix} = A(t)\begin{bmatrix} 0 \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{bmatrix} - \phi'(t)\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 0 = a_{12}(t)z_2(t) + \cdots + a_{1n}(t)z_n(t) - \phi'(t)x_1(t)$$

$$z_k'(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}(t)z_i(t) - \phi'(t)x_k(t) \qquad 2 \le k \le n$$

$$= \sum_{i=2}^{n} a_{ki}(t)z_i(t) - \frac{a_{12}(t)z_2(t) + \cdots + a_{1n}(t)z_n(t)}{x_1(t)}x_k(t)$$

$$= \sum_{i=2}^{n}\left(a_{ki}(t) - \frac{x_k(t)}{x_1(t)}a_{1i}(t)\right)z_i(t)$$

这便是个 $n-1$ 阶的齐次线性方程.

若 $\begin{bmatrix} z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{bmatrix}$ 是其一个解. 那么 $\phi(t) = \int \frac{1}{x_1(t)}\left(a_{12}(t)z_2(t) + \cdots + a_{1n}(t)z_n(t)\right)$

故. 也得到了一个新的 $\vec{y}(t)$ 作为原方程的解

且. 若 $Z(t)$ 是其基解矩阵 则 $Y(t) = \left[\vec{x}(t), \phi(t)\vec{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ Z(t) \end{bmatrix}\right]$ 是原方程基解矩阵

常数变易法.

对于非齐次......方程 $\vec{y}' = A(t)\vec{y} + \vec{b}(t)$

若 $Y(t)$ 是 $\vec{y}' = A(t)\vec{y}$ 的基解矩阵.

$\vec{y}' = A(t)\vec{y}$ 的所有解都形如 $Y(t)\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ 其中 $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ 可以是 $\mathbb{R}^n$ 中任意向量

~~特别地. 若 $\vec{z} = \vec{v}(t)$ 是 $\vec{y}' = A(t)\vec{y} + \vec{b}(t)$ 的一个特解.~~

~~则 $Y(t)\vec{v}(t)$ 也是齐次方程的解. 即 $(Y(t)\vec{v}(t))' = A(t)Y(t)\vec{v}(t)$~~

~~$= Y'(t)\vec{v}(t) + Y(t)\vec{v}'(t)$~~

~~$= Y'(t)\vec{v}(t) + Y(t)(A(t)\vec{v}(t) + \vec{b}(t))$~~

故 $Y'(t) = A(t)Y(t)$

由 $Y(t)$ 是满秩的. 故可以期望 $\vec{z}(t) = Y(t)\vec{v}(t)$ 是 $\vec{y}' = A(t)\vec{y} + \vec{b}(t)$ 的一个特解

$\vec{z}'(t) = Y'(t)\vec{v}(t) + Y(t)\vec{v}'(t) \qquad = A(t)Y(t)\vec{v}(t) + \vec{b}(t)$

$= A(t)Y(t)\vec{v}(t) + Y(t)\vec{v}'(t)$

$\Rightarrow Y(t)\vec{v}'(t) = \vec{b}(t)$

$\vec{v}'(t) = Y^{-1}(t)\vec{b}(t)$

$\vec{v}(t) = \vec{v}(\tau) + \int_\tau^t Y^{-1}(s)\vec{b}(s)\,ds$ 若有 $\vec{z}(\tau) = 0$ 则 $\vec{v}(\tau) = 0$ ~~若有 $\vec{z}(\tau) = 0$~~

$\vec{z}(t) = Y(t)\left(\int_\tau^t Y^{-1}(s)\vec{b}(s)\,ds\right)$

Thm: 对 $\begin{cases} \vec{y}' = A(t)\vec{y} + \vec{b}(t) \\ \vec{y}(\tau) = \vec{\eta} \end{cases}$ 有特解 $\vec{y}(t) = X(t)\vec{\eta} + X(t)\int_\tau^t X^{-1}(s)\vec{b}(s)\,ds$

$X(t)$ 是齐次方程的基解矩阵且 $X(\tau) = I_n$.

rmk: 若 $Y(t)$ 是基解矩阵 则 $Y(t) = X(t)Y(\tau) \Rightarrow Y^{-1}(t) = Y^{-1}(\tau)X^{-1}(t)$

普通.

$\vec{y}(t) = Y(t)Y^{-1}(\tau)\vec{\eta} + Y(t)Y^{-1}(\tau)\int_\tau^t Y^{-1}(s)Y(\tau)\vec{b}(s)\,ds$

若 $A(t)=A$ 为常数矩阵

$y'=Ay$ 的解为 $Y(t)=e^{tA}$ $P^{-1}AP=J$ 为 A 的Jordan标准形

$$Y(t)=e^{tPJP^{-1}}=P e^{tJ} P^{-1}$$

故 $P e^{tJ}$ 也为基解矩阵. 问题转化为求 A 的Jordan标准形

n阶线性微分方程

$$Lu:=u^{(n)}+a_{n-1}(t)u^{(n-1)}+\cdots+a_0(t)u=b(t).$$

它等价于

$$\begin{cases} y_1'=y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1}'=y_n \\ y_n'=-(a_0y_1+\cdots+a_{n-1}y_n)+b(t) \end{cases}$$

这具有形式 $\vec{y}\,'=A(t)\vec{y}+\vec{b}(t)$

$$\vec{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u \\ u' \\ \vdots \\ u^{(n-2)} \\ u^{(n-1)} \end{bmatrix}, \quad \vec{b}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \\ & & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

方程组的解的适应性蕴含了高阶方程的解的适定性.

先考虑齐次的情况：$Lu=0$.

存在 n 个线性无关的解 $(u_1(t), u_2(t), \cdots, u_n(t))$　对于解 $u(t)$, $\vec{y}(t)=\begin{bmatrix} u(t) \\ u'(t) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$ 是方程组的解.

故方程组基解矩阵的 Wronski 行列式

$$W(t)=\begin{vmatrix} u_1 & \cdots & u_n \\ u_1' & \cdots & u_n' \\ \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-1)} & \cdots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$W'(t)=-a_{n-1}W(t)$$

$$W(t)=W(\tau)e^{-\int_\tau^t a_{n-1}(s)ds}$$

- D'Alembert 降阶法

若 $v(t)$ 是一个特解：$Lv=0$.

且 $u(t)=v(t)w(t)$

$$Lu=\sum_{i=0}^{n}a_i\sum_{j=0}^{i}C_i^j\,w^{(j)}v^{(i-j)}=\sum_{j=0}^{n}w^{(j)}\sum_{i=j}^{n}C_i^j\,a_i(t)v^{(i-j)}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}w^{(j)}\sum_{i=j}^{n}C_i^j a_i(t)v^{(i-j)}+\underbrace{\sum_{i=0}^{n}C_i^0 a_i(t)v^{(i)}}_{=Lv=0}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}w^{(j)}b_j(t)$$

$$b_j(t)=\sum_{i=j}^{n}C_i^j a_i(t)v^{(i-j)}$$

故 $Lu=0 \Leftrightarrow L^*w=\sum_{j=1}^{n}b_j(t)w^{(j)}=0$. 这是 w' 的 $n-1$ 阶微分方程

若 $w_1 \cdots w_{n-1}$ 是其一组基解

则 $v, vw_1, vw_2, \cdots, vw_{n-1}$ 是原方程一组基解

$Lu = u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + a_1 u' + a_0 u = b(t)$

对于非齐次的情况 $Lw = b(t)$

它的解具有形式 $w = w^* + u$. 其中 w^* 是某个特解. u 是齐次部分的解

获得一个特解的办法. 仍是常数变易法

若 $y_1(t), y_2(t), \cdots y_n(t)$ 是齐次部分解空间的一组基. $y^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) y^{(i)}(t) = 0$.

设非齐次方程的一个特解 $y_p(t)$ 具有形式 $= \sum_{i=1}^{n} c_i(t) y_i(t)$ 且 c_i 满足 $\sum_{i=1}^{n} c_i'(t) y_i^{(j)}(t) = 0$, $j \neq n-1$ (1)

则 $y_p^{(j)} = \sum_{i=1}^{n} c_i(t) y_i^{(j)}(t)$ $j \neq n$ (2)

$y_p^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} c_i(t) y_i^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i'(t) y_i^{(n-1)}(t)$ (3)

故 $Ly_p = \sum_{i=1}^{n} c_i(t) y_i^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i'(t) y_i^{(n-1)}(t) + \sum_{j=1}^{n-1} a_j(t) \sum_{i=1}^{n} c_i(t) y_i^{(j)}(t) = b(t)$

$= \sum_{i=1}^{n} c_i'(t) y_i^{(n-1)}(t)$ (4)

结合(1), (4). $\begin{bmatrix} y_1(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}$

故 $\begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{bmatrix} = Y^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{bmatrix}$ $\Rightarrow c_i'(t) = \frac{W_i(t)}{W(t)}$

其中 $W(t) = \det(Y(t)) =$

$W_i(t) = \det[$将 $Y(t)$ 的第 i 列换为 $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{bmatrix}]$

若 $a_i(t)\equiv a_i$ 均为常数.

$\vec{y}\,' = A\vec{y}$. $y = e^{tA}$

特征值满足 $|A-\lambda I_n| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & & & & \\ 0 & -\lambda & 1 & & & \\ \vdots & & -\lambda & 1 & & \\ & & & \ddots & 1 & 0 \\ & & & & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1}-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_0-\lambda a_1-\lambda^2 a_2-\cdots-\lambda^{n-1}a_{n-1}-\lambda^n & \cdots & & -a_{n-2}-\lambda a_{n-1}-\lambda^2 & -a_{n-1}-\lambda \end{vmatrix}$

$$= (-1)^{n-1}(-a_0-a_1\lambda-a_2\lambda^2-\cdots-a_{n-1}\lambda^{n-1}-\lambda^n)$$
$$= (-1)^n(\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0) = P(\lambda).$$

若 λ 是 $P(\lambda)=0$ 的 k 重根. 则原 n 阶微分方程对应 k 个解 $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \cdots, t^{k-1}e^{\lambda t}$

若 $\lambda=\mu+i\nu$ 为 $P(\lambda)=0$ 的复根. (k 重)

则 $t^q e^{\mu t}\cos\nu t$, $t^q e^{\mu t}\sin\nu t$ $(0\le q\le k-1)$ 是原 n 阶微分方程的 $2k$ 个解

证明: $L(t^q e^{\lambda t}) = \sum_{i=0}^{n} a_i (t^q e^{\lambda t})^{(i)} = t^q e^{\lambda t}(-1)^n P(\lambda) + q t^{q-1}e^{\lambda t}(-1)^n P'(\lambda) + \frac{q(q-1)}{2} t^{q-2}e^{\lambda t}(-1)^n P''(\lambda)$
$+\cdots + q!\, e^{\lambda t}(-1)^n P^{(q)}(\lambda) = 0.$

$$L(t^q e^{\mu t}\cos\nu t + i\,t^q e^{\mu t}\sin\nu t) = L(t^q e^{\mu t+i\nu t}) = L(t^q e^{\lambda t}) = 0$$

$$= L(t^q e^{\mu t}\cos\nu t) + i\,L(t^q e^{\mu t}\sin\nu t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L(t^q e^{\mu t}\cos\nu t) = 0 \\ L(t^q e^{\mu t}\sin\nu t) = 0. \end{cases}$$

定理：微分方程 $F(x,y,\frac{dy}{dx})=0$ 有通积分 $U(x,y,C)=0$，

曲线族 $U(x,y,C)=0$ 有包络 $\Gamma: y=\varphi(x)$，则 Γ 为原微分方程的奇解

包络的必要条件 $\Gamma:(f(c),g(c))\in C'$ 满足 $\begin{cases} V(f(c),g(c),c)=0 \\ \frac{\partial V}{\partial c}(f(c),g(c),c)=0 \end{cases}$

充分条件：满足 $\mathcal{J}$ 及 $\begin{cases} (f'(c),g'(c))\neq(0,0) \\ \left(\frac{\partial V}{\partial x}(f(c),g(c),c),\ \frac{\partial V}{\partial y}(f(c),g(c),c)\right)\neq(0,0) \end{cases}$

No.

Date

解2阶微分方程

$u'' + a_1(t)u' + a_0(t)u = 0.$

换元 $(y_1 = u)$

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -a_1(t)y_2 - a_0(t)y_1 \end{cases} \qquad y' = A(t)y$$

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

若已知一个解 $v(t)$.

$u(t) = v(t)w(t)$

$$\begin{aligned} Lu &= \underline{v''(t)w(t)} + 2v'(t)w'(t) + v(t)w''(t) + a_1(t)\left(\underline{v'(t)w(t)} + v(t)w'(t)\right) + \underline{a_0(t)v(t)w(t)} \\ &= \left(v''(t) + a_1(t)v'(t) + a_0(t)v(t)\right)w(t) + 2v'(t)w'(t) + v(t)w''(t) + a_1(t)v(t)w'(t) \\ &= v(t)w''(t) + \left(2v'(t) + a_1(t)v(t)\right)w'(t) \end{aligned}$$

考虑一阶方程 $(w' = f)$

$$f'(t) + \left(2\frac{v'(t)}{v(t)} + a_1(t)\right)f(t) = 0.$$

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = -2\frac{v'(t)}{v(t)} - a_1(t)$$

$$\ln f(t) = -2\ln v(t) - \int a_1(t)$$

$$w' = f(t) = \frac{1}{v(t)^2} \cdot e^{-\int a_1(s)ds}$$

$$w(t) = \int \frac{1}{v(t)^2} e^{-\int a_1(s)ds} dt$$

$$u(t) = v(t)\int \frac{1}{v(r)^2} e^{-\int a_1(s)ds} dr \qquad \text{是另个解.}$$

KOKUYO

No.

Date

非齐次2阶：$u''+a_1(t)u'+a_0(t)u=b(t)$. 齐次部分解空间为 $y_1(t)$, $y_2(t)$.

设其特解具有形式 $z(t)=c_1(t)y_1(t)+c_2(t)y_2(t)$.

且满足 $c_1'(t)y_1(t)+c_2'(t)y_2(t)=0$.

故 $z'(t)=c_1(t)y_1'(t)+c_2(t)y_2'(t)$

$$z''(t)=c_1'(t)y_1'(t)+c_2'(t)y_2'(t)+c_1(t)y_1''(t)+c_2(t)y_2''(t)$$

代回 $z''+a_1z'+a_0z=b$，得.

$$c_1'(t)y_1'(t)+c_2'(t)y_2'(t)=b(t)$$

故
$$\begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ b(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{bmatrix}=\frac{1}{W(t)}\begin{bmatrix} y_2'(t) & -y_2(t) \\ -y_1'(t) & y_1(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ b(t) \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{W(t)}\begin{bmatrix} -y_2(t)b(t) \\ y_1(t)b(t) \end{bmatrix}$$

$c_1'(t)=-\frac{1}{W(t)}y_2(t)b(t)$ $\qquad c_1(t)=-\int\frac{y_2(t)b(t)}{W(t)}dt$

$c_2'(t)=\frac{1}{W(t)}y_1(t)b(t)$ $\qquad c_2(t)=\int\frac{y_1(t)b(t)}{W(t)}dt$

$$z(t)=-y_1(t)\int_0^t\frac{y_2(s)b(s)}{W(s)}ds.+y_2(t)\int_0^t\frac{y_1(s)b(s)}{W(s)}ds.$$

常系数2阶齐次微分方程：$Lu=u''+2au'+bu=0$.

$P(\lambda)=\lambda^2+2a\lambda+b=0$. 有两个根 $\lambda=-a+\sqrt{a^2-b}$，$\mu=-a-\sqrt{a^2-b}$

$a^2-b>0$ 时，方程的两个解 $u_1=e^{(-a+\sqrt{a^2-b})t}$，$u_2=e^{(-a-\sqrt{a^2-b})t}$

$a^2=b$ 时 方程的两个解 $u_1=e^{-at}$，$u_2=te^{-at}$

$a^2<b$ 时，方程的两个解 $u_1=e^{-at}\cos(\sqrt{b-a^2}\,t)$，$u_2=e^{-at}\sin(\sqrt{b-a^2}\,t)$

No.

Date

解2元线性方程组

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}' = A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}, \quad A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}, \quad D=\det A\neq 0.$$

$$p(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{bmatrix} = \lambda^2-tr(A)\lambda+D. \quad 记S=tr(A)$$

两个根为 $\lambda=\frac{1}{2}\left(S+\sqrt{S^2-4D}\right)$ $\mu=\frac{1}{2}\left(S-\sqrt{S^2-4D}\right)$

A的标准形有如下三种情况:

$$\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}\alpha & w\\ -w & \alpha\end{bmatrix}$$

$\cos\theta$ $\sin\theta$

A有两个特征向量(λ与μ可以相等)

$$\begin{cases}A\vec{a}=\lambda\vec{a}\\ A\vec{b}=\mu\vec{b}\end{cases}$$

$$Y(t)=k(\vec{a},\vec{b})\begin{bmatrix}e^{\lambda t} & \\ & e^{\mu t}\end{bmatrix} = \left(ke^{\lambda t}\vec{a},\ ke^{\mu t}\vec{b}\right)$$

A只有一个特征向量

$$\begin{cases}A\vec{a}=\lambda\vec{a}\\ A\vec{b}=\vec{a}+\lambda\vec{b}\end{cases}$$

$$Y(t)=k(\vec{a},\vec{b})\begin{bmatrix}e^{\lambda t} & te^{\lambda t}\\ 0 & e^{\lambda t}\end{bmatrix} = \left[ke^{\lambda t}\vec{a},\ kte^{\lambda t}\vec{a}+ke^{\lambda t}\vec{b}\right]$$

$\lambda=\alpha+iw$ $\mu=\alpha-iw$. (不妨设 $w>0$).

$$\begin{cases}A\vec{a}=\alpha\vec{a}-w\vec{b}\\ A\vec{b}=w\vec{a}+\alpha\vec{b}\end{cases}$$

$$Y(t)=k(\vec{a},\vec{b})\, e^{t\cos\theta}\begin{bmatrix}\cos(t\sin\theta) & \sin(t\sin\theta)\\ -\sin(t\sin\theta) & \cos(t\sin\theta)\end{bmatrix}$$

在相差一个可逆矩阵的意义下(也就是相差个仿射变换的意义下).通解为

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1e^{\lambda t}\\ c_2e^{\mu t}\end{bmatrix} \qquad \left(\frac{x}{c_1}\right)^{\mu}=\left(\frac{y}{c_2}\right)^{\lambda} \qquad y=C\cdot x^{\frac{\mu}{\lambda}}$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1e^{\lambda t}+c_2te^{\lambda t}\\ c_2e^{\lambda t}\end{bmatrix} \qquad \frac{x}{y}=\frac{c_1}{c_2}+\frac{1}{\lambda}\ln\frac{y}{c_2}$$

换元

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot r=\frac{1}{r}(x\dot x+y\dot y)=\alpha r\\ \dot\theta=\left(\arctan\frac{y}{x}\right)'=-w\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}r=ke^{\alpha t}\\ \theta=-wt\end{cases}$$

$$\Rightarrow r=ke^{\alpha\cdot\frac{\theta}{-w}}=ke^{-\frac{\alpha}{w}\theta}$$

No.

Date

边值问题

边值问题的解不一定存在 也不一定唯一

我们考虑2阶微分方程 $u''+a_1(x)u'+a_0(x)u=g(x)$ 边值 $u(a)=\eta_1$, $u(b)=\eta_2$

或 $u'(a)=\eta_1$, $u'(b)=\eta_2$

或 $\alpha_1 u(a)+\alpha_2 u'(a)=\eta_1$, $\beta_1 u(b)+\beta_2 u'(b)=\eta_2$

等等…

令 $p(x)=e^{\int a_1(x)\,dx}$ $p(x)(u''+a_1u'+a_0u)$ 可化为下述形式 $=(pu')'+pa_0u$

考虑 $Lu=(p(x)u')'+q(x)u=g(x)$ in $J=[a,b]$ → 它也等价于 $y_1=u$, $y_2=pu'$

$$\begin{cases} y_1'=\dfrac{y_2}{p} \\ y_2'=-qy_1+g\end{cases}$$

边值 $\begin{cases}R_1u=\alpha_1u(a)+\alpha_2p(a)u'(a)=\eta_1\\R_2u=\beta_1u(b)+\beta_2p(b)u'(b)=\eta_2\end{cases}$

- Lagrange 恒等式 $vLu-uLv=v[(pu')'+qu]-u[(pv')'+qv]$

$$=v(pu')'-u(pv')'=v(pu')'+v'pu'-v'pu'-u(pv')'$$
$$=(vpu'-upv')'=(p(u'v-v'u))'$$

若 $R_1u=R_2u=R_1v=R_2v=0$. 则 $u'v-v'u=0$ ($x=a$ 及 b 时). 则 $\int_a^b(vLu-uLv)\,dx=0$

故 $\langle Lu,v\rangle=\langle u,Lv\rangle$

- 边值问题，类似地，其齐次部分的解也是线性的

$$\begin{cases}Lu=0 \text{ in } J\\ R_1u=R_2u=0\end{cases}$$

此处的意思为：如果有一个解，那么没有第二个解

- Thm. $u_1(x)$, $u_2(x)$ 是齐次部分的一组基解 [注意，不一定是齐次边值问题的解！]. $Lu=g$ 有唯一解 ⟺ 齐次部分只有零解 ⟺ $\det\begin{bmatrix}R_1u_1 & R_1u_2\\ R_2u_1 & R_2u_2\end{bmatrix}\neq 0$.

: 设 v^* 是一个特解. 则通解有形式 $v=v^*+c_1u_1+c_2u_2$. $c_1,c_2\in\mathbb{R}$. c_1,c_2 有限制:

$R_1v=R_1v^*+c_1R_1u_1+c_2R_1u_2=\eta_1$
$R_2v=R_2v^*+c_1R_2u_1+c_2R_2u_2=\eta_2$
$\Rightarrow \begin{cases}c_1R_1u_1+c_2R_1u_2=0\\ c_1R_2u_1+c_2R_2u_2=0\end{cases}$

~~"⇒" 由解是唯一的. $v=v^*$. 故必然要推出 $c_1=c_2=0$ 故 $\det\begin{pmatrix}R_1u_1 & R_1u_2\\ R_2u_1 & R_2u_2\end{pmatrix}\neq 0$.~~

"⇐" 若 $\det\begin{pmatrix}R_1u_1 & R_2u_2\\ R_2u_1 & R_2u_2\end{pmatrix}\neq 0$. 则 $c_1=c_2=0$ 解是唯一的. (不超过一个)

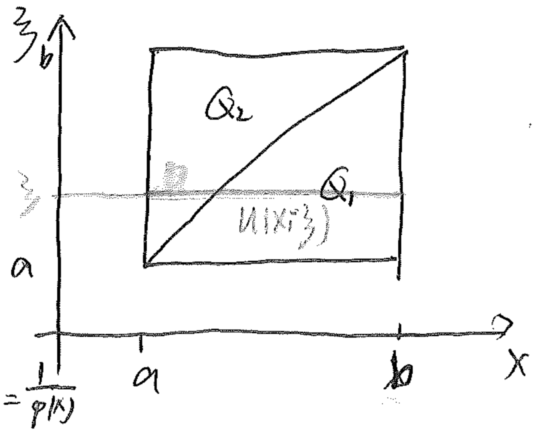
"⇒" 若 $\det\begin{pmatrix}R_1u_1 & R_2u_2\\ R_2u_1 & R_2u_2\end{pmatrix}=0$. 则 $\exists\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}\neq 0$. 满足 $\begin{cases}c_1R_1u_1+c_2R_1u_2=0\\ c_1R_2u_1+c_2R_2u_2=0\end{cases}$

故若 v^* 是解. $v\neq v^*$ 也是解. 解多于一个. 矛盾.

Fundamental Solutions 基解

$\gamma(x,\xi)$ 称作 $Lu=0$ 的基解. 如果它定义在 $Q=J\times J$ 上 $(J=[a,b])$

且满足



(1) $\gamma(x,\xi)$ 在 Q 上连续

(2) $\frac{\partial \gamma}{\partial x}$ $\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2}$ 存在. 并且在 Q_1, Q_2 上连续

(3) 关于x的函数 $\gamma(\cdot,\xi)$ 满足 $L\gamma=0$ 对 $x\neq\xi$. $x\in J$.

(4). 在 $x=\xi$ 处. 满足 $\frac{\partial \gamma}{\partial x}(x+,x)-\frac{\partial \gamma}{\partial x}(x-,x)=\frac{1}{p(x)}$

lemma: 在条件(S)下. 基解存在. 但 不唯一.

条件(S): $Lu=(p(x)u')'+q(x)u=g(x)$ in $J=[a,b]$

$R_1u=\alpha_1 u(a)+\alpha_2 p(a)u'(a)=\eta_1$

$R_2u=\beta_1 u(b)+\beta_2 p(b)u'(b)=\eta_2$

满足 $\begin{cases} p\in C^1(J). \quad q,\ g\in C^0(J). \quad p,q,g \text{ 都是实值的.} \\ p(x)>0 \text{ in } J \\ \alpha_1^2+\alpha_2^2>0 \\ \beta_1^2+\beta_2^2>0 \end{cases}$

构造: 令 $u(x;\xi)$ 为初值问题 $\begin{cases} Lu=0 \\ u(\xi)=0 \\ u'(\xi)=\frac{1}{p(\xi)} \end{cases}$ 的解.

令 $\gamma(x,\xi)=\begin{cases} 0 & a\le x\le\xi\le b \\ u(x;\xi) & a\le\xi\le x\le b \end{cases}$ 可以验证 γ 满足基解的条件.

特别地. 若 $\gamma(x,\xi)$ 是基解. $\gamma_1(x,\xi)=\gamma(x,\xi)+g(x)h(\xi)$ 也是基解

($g\in C^2$. $h\in C$ 是两个另外任意函数)

No.
Date

Thm: 满足条件(5)且有基解 $\gamma(x,\xi)$. 则 $V(x)=\int_a^b \gamma(x,\xi)g(\xi)\,d\xi$
是 $Lv=g(x)$ 的一个特解

$$V'(x)=\int_a^b \frac{\partial\gamma}{\partial x}(x,\xi)\,g(\xi)\,d\xi$$

$$V''(x)=\int_a^b \frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}(x,\xi)\,g(\xi)\,d\xi+\frac{g(x)}{p(x)}$$

$$Lv=p'(x)V'(x)+p(x)V''(x)+q(x)V(x)=p'(x)\int_a^b\frac{\partial\gamma}{\partial x}(x,\xi)g(\xi)\,d\xi+p(x)\int_a^b\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}(x,\xi)g(\xi)\,d\xi$$
$$+g(x)+q(x)\int_a^b\gamma(x,\xi)g(\xi)\,d\xi$$

$$=g(x)+\int_a^b L\gamma(\cdot,\xi)\,g(\xi)\,d\xi=g(x)$$

- Green 函数 $\Gamma(x,\xi)$ 满足

(1) $\Gamma(x,\xi)$ 是 $Lu=0$ 的基解

(2) $R_1\Gamma=R_2\Gamma=0$. 对 $\forall\xi\in(a,b)$

假设 $\begin{cases}Lu=0\\R_1u=R_2u=0\end{cases}$ 只有平凡解. 则 Green 函数的存在性证明如下

考虑 $\begin{cases}Lu=0\\u(a)=\lambda_1\\p(a)u'(a)=\mu_1\end{cases}$ 其中 $(\lambda_1,\mu_1)\neq(0,0)$ 且 $\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\mu_1=0$. 的解 $u_1(x)$

及 $\begin{cases}Lu=0\\u(b)=\lambda_2\\p(b)u'(b)=\mu_2\end{cases}$ 其中 $(\lambda_2,\mu_2)\neq(0,0)$ 且 $\beta_1\lambda_2+\beta_2\mu_2=0$ 的解 $u_2(x)$.

若 $u_1(x)$ 与 $u_2(x)$ 线性相关. 即 $u_1(x)=\gamma u_2(x)$ 则 $Ru_1=\gamma Ru_2=0$. u_1是 $\begin{cases}Lu=0\\R_1u=R_2u=0\end{cases}$ 的非平凡解 矛盾

由 $u_1Lu_2-u_2Lu_1=\left[p(x)(u_1'u_2-u_2'u_1)\right]'=0$.

知 $p(x)(u_1'u_2-u_2'u_1)=C$. 根据 Wronskian, $C\neq0$.

$$\Gamma(x,\xi)=\frac{1}{C}\begin{cases}u_1(\xi)u_2(x) & \text{in } Q_1\\ u_1(x)u_2(\xi) & \text{in } Q_2\end{cases}$$

KOKUYO

No.

Date

Thm. 在条件(5)下，若 $\begin{cases} Lu=0 \\ R_1u=R_2u=0 \end{cases}$ 只有平凡解，则 Green 函数存在且唯一。

它由前述给出，进一步它还是对称的：$\Gamma(x,\xi)=\Gamma(\xi,x)$

并且 $\begin{cases} Lv=g(x) \\ R_1v=R_2v=0 \end{cases}$ 的解存在且唯一 $v(x)=\int_a^b \Gamma(x,\xi)g(\xi)d\xi$

(插入 Lagrange 恒等式 $vLu-uLv=[p(x)(u'v-v'u)]'$

$\int_a^b (vLu-uLv)dx=0$ if $R_iu=R_iv=0$)

。易验证 $v(x)=\int_a^b \Gamma(x,\xi)g(\xi)d\xi$ 是解。

若 Green 函数不唯一，$\Gamma_1(x,\xi)$ 也是 Green 函数，考虑 $w(x)=\int_a^b \Gamma_1(x,\xi)h(\xi)d\xi$

则 $\int_a^b (vLw-wLv)dx=0$.

即 $\int_a^b (vh-wg)dx=0$. $\int_a^b\int_a^b \Gamma(x,\xi)g(\xi)h(x)d\xi dx=\int_a^b\int_a^b \Gamma_1(x,\xi)h(\xi)g(x)d\xi dx$

$$=\int_a^b\int_a^b \Gamma(\xi,x)g(\xi)h(x)d\xi dx$$

$$=\int_a^b\int_a^b \Gamma(x,\xi)g(x)h(\xi)dxd\xi$$

$$\int_a^b\int_a^b (\Gamma(x,\xi)-\Gamma_1(x,\xi))g(x)h(\xi)dxd\xi=0$$

由于h是任意的，$\Rightarrow \Gamma(x,\xi)-\Gamma_1(x,\xi)=0$. 即证到 Green 函数的唯一性

而 $u_1(x)$, $u_2(x)$ 是 $Lu=0$ 的一组基解 $\det\begin{bmatrix} R_1u_1 & R_1u_2 \\ R_2u_1 & R_2u_2 \end{bmatrix}=-(R_1u_2)(R_2u_1)\neq 0$

(因∵只有平凡解)

由定理知，$Lv=g$ ~~只有~~ 的解若存在必唯一，于是 $v(x)=\int_a^b \Gamma(x,\xi)g(\xi)d\xi$ 是唯一解

No.

Date

○ 一般情况：(非齐次)
$$\begin{cases} Lu = g(x) \\ R_1 u = \gamma_1 \\ R_2 u = \gamma_2 \end{cases}$$
设 u 具有形式 $u = v + \varphi$ 其中 $\varphi \in C^2[J]$ 且满足 $\begin{cases} R_1\varphi = \gamma_1 \\ R_2\varphi = \gamma_2 \end{cases}$

故 v 满足 $\begin{cases} Lv = h = g - L\varphi \\ R_1 v = R_2 v = 0 \end{cases}$ 可以解出 v

○ ~~非齐~~(非线性) $\begin{cases} Lu = f(x,u) \\ R_1 u = 0 = R_2 u \end{cases}$ $f \in C'(J \times \mathbb{R})$

这转化为积分方程 $u(x) = \int_a^b \Gamma(x,\xi) f(\xi, u(\xi))\, d\xi$ 问题

(存在及唯一性定理)

假设 $f(x,y)$ 在 $[0,1]\times\mathbb{R}$ 上连续并且满足 Lipschitz 条件

$$|f(x,y) - f(x,\xi)| \le L|y-\xi| \quad \text{并且有 } L < \pi^2$$

那么边值问题 $u'' = f(x,u)$ $(0 \le x \le 1)$. $u(0) = u(1) = 0$ 有唯一解.

$$\Gamma(x,\xi) = \begin{cases} \xi(1-x) & 0 \le \xi \le x \le 1 \\ x(1-\xi) & 1 \ge \xi > x \ge 0 \end{cases}$$
是 $u'' = 0$ 且边值问题 $u(0)=u(1)=0$ 的 Green 函数.

定义算子 T: $(Tu)(x) = \int_0^1 \Gamma(x,\xi) f(\xi, u(\xi))\, d\xi$. 则要找的是 T 的不动点 $Tu = u$.

$$|Tu_1(x) - Tu_2(x)| = \left|\int_0^1 \Gamma(x,\xi) f(\xi, u_1(\xi))\, d\xi - \int_0^1 \Gamma(x,\xi) f(\xi, u_2(\xi))\, d\xi\right|$$
$$= \left|\int_0^1 \Gamma(x,\xi)\left(f(\xi, u_1(\xi)) - f(\xi, u_2(\xi))\right) d\xi\right|$$
$$\le \int_0^1 |\Gamma(x,\xi)| \cdot L\, |u_1(\xi) - u_2(\xi)|\, d\xi. \qquad \int_0^1 |\Gamma(x,\xi)|\, d\xi = \frac{(1-x)x}{2} \le \frac{1}{8}$$

若采用最大值范数. 则 $\|Tu_1 - Tu_2\| \le \cancel{\int_0^1 |\Gamma(x,\xi)|\, d\xi} \; \frac{1}{8} L \|u_1 - u_2\|$ 若 $L < 8$. 则满足压缩条件
从而不动点唯一

若采用 $\|u\|^* = \sup_{0<x<1} \frac{|u(x)|}{\sin \pi x} < \infty$. 可将 "$L<8$" 做到更好: "$L < \pi^2$",

并且 $L = \pi^2$ 时 若 $f(x,u) = -\pi^2 u$. $u = C\sin\pi x$ $C \in \mathbb{R}$ 均为解
有无穷多解. 故 "$L<\pi^2$" 是最好的

1.1* 定义在函数空间 $B^* = \{u(x) \mid \sup_{0<x<1} \frac{|u(x)|}{\sin\pi x} < \infty\}$ ~~$u(x) \in C^2([0,1])$ 上~~

特别地. 若 $u(x)$ 是所求边值问题的解 $u(0) = u(1) = 0$ 则 $\lim_{x\to 0} \frac{u(x)}{\sin\pi x} = \lim_{x\to 0} \frac{u'(x)}{\pi\cos\pi x} = \frac{u'(0)}{\pi} \in \mathbb{R}$

$\lim_{x\to 1} \frac{u(x)}{\sin\pi x} = \lim_{x\to 1} \frac{u'(x)}{\pi\cos\pi x} = -u'(1) \in \mathbb{R}$ 且 $\frac{u(x)}{\sin\pi x}$ 在 $(0,1)$ 上连续 端点有界 故有界. $\therefore u \in B^*$.

KOKUYO

No.

Date

下证$(B^*, \|\cdot\|^*)$是一个Banach空间：

若$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$是其中一个Cauchy列，则$\|u_n-u_m\|^* = \sup\limits_{0<x<1}\left|\dfrac{u_n(x)-u_m(x)}{\sin\pi x}\right| < \varepsilon$ for 足够大 n, m

$$|u_n(x)-u_m(x)| < \left|\frac{u_n(x)-u_m(x)}{\sin\pi x}\right| < \varepsilon \ (\forall x)$$ 故$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$一致收敛，设极限为u_0

记$g_n(x) = \dfrac{u_n(x)}{\sin\pi x}$ 则$|g_n(x)-g_m(x)|<\varepsilon \ (\forall x)$ for sufficiently large m & n.

thus $\{g_n(x)\}$ converges uniformly to, say, $g_0(x)$. $g_0(x) = \dfrac{u_0(x)}{\sin\pi x}$

对$\varepsilon=1$. $\exists N$ s.t. $\forall n>N$ $|g_n(x)-g_N(x)|<1$ letting $n\to\infty$. we get

$$|g_0(x)-g_N(x)| \le 1$$

since $g_N(x)$ is Bounded, say, by M.

We have $|g_0(x)| \le M+1 < +\infty$ thus $u_0(x)\in B^*$

$(B^*, \|\cdot\|^*)$ is a Banach space.

对$u, v\in B^*$

$$|f(\xi,u(\xi))-f(\xi,v(\xi))| \le L\,|u(\xi)-v(\xi)| \le L\,\|u-v\|^*\sin\pi\xi$$

$$|(Tu-Tv)(x)| = \left|\int_0^1 \Gamma(x,\xi)\big(f(\xi,u(\xi))-f(\xi,v(\xi))\big)\,d\xi\right|$$

$$\le \int_0^1 |\Gamma(x,\xi)|\,|f(\xi,u(\xi))-f(\xi,v(\xi))|\,d\xi$$

$$\le L\,\|u-v\|^*\int_0^1 |\Gamma(x,\xi)|\sin\pi\xi\,d\xi$$

记$w(x)=\int_0^1 |\Gamma(x,\xi)|\sin\pi\xi\,d\xi$. 故由$\Gamma(x,\xi)\le 0$且$\int_0^1 \Gamma(x,\xi)g(\xi)\,d\xi$是$\begin{cases}Lu=g(x)\\ Bu=0, Ru=0\end{cases}$的解

故$w''(x) = -\sin\pi x$, $w(0)=w(1)=0$ $\Rightarrow$ $w(x)=\dfrac{\sin\pi x}{\pi^2}$

即 $|(Tu-Tv)(x)| \le L\,\|u-v\|^*\dfrac{\sin\pi x}{\pi^2}$

$\|Tu-Tv\|^* = \dfrac{|(Tu-Tv)(x)|}{\sin\pi x} \le \dfrac{L}{\pi^2}\|u-v\|^*$ 故对$L<\pi^2$时是压缩映射.

Campus

11.14 解的稳定性

1. (Gronwall-Bellman) u, p, q 为 $J=[x_0-a, x_0+a]$ 上非负连续函数，满足

$$u(x) \le p(x) + \left|\int_{x_0}^{x} q(t)u(t)\,dt\right| \qquad x\in J$$

则 $u(x) \le p(x) + \left|\int_{x_0}^{x} p(t)q(t)e^{\left|\int_t^x q(s)ds\right|}dt\right|$

Pf: 设 $r(x) = \int_{x_0}^{x} q(t)u(t)\,dt$ 考虑 $x\in[x_0, x_0+a]$，则 $r'(x)=q(x)u(x)$. 题中条件为 $u(x)\le p(x)+r(x)$.

故 $r'(x)=q(x)u(x)\le q(x)\big(p(x)+r(x)\big)=q(x)p(x)+q(x)r(x)$

$\left(r(x)e^{-\int_{x_0}^{x}q(t)}\right)'=\big(r'(x)-r(x)q(x)\big)e^{-\int_{x_0}^{x}q(t)} \le q(x)p(x)e^{-\int_{x_0}^{x}q(t)}$

$r(x)e^{-\int_{x_0}^{x}q(t)dt} \le r(x_0)+\int_{x_0}^{x}q(t)p(t)e^{-\int_{x_0}^{t}q(s)ds}dt = \int_{x_0}^{x}q(t)p(t)e^{-\int_{x_0}^{t}q(s)ds}dt$

$r(x)\le\int_{x_0}^{x}q(t)p(t)e^{\int_t^x q(s)ds}dt$ 代回即得.

1.1 推论：若还有 $p(x)$ 在 $[x_0, x_0+a]$ 上单增，在 $[x_0-a, x_0]$ 上单减，则 $u(x)\le p(x)e^{\left|\int_{x_0}^{x}q(t)dt\right|}$

只考虑 $x\in[x_0, x_0+a]$

$u(x)\le p(x)+\int_{x_0}^{x}p(t)q(t)e^{\int_t^x q(s)ds}dt \le p(x)+p(x)\int_{x_0}^{x}q(t)e^{\int_t^x q(s)ds}dt = p(x)\left(1-\int_{x_0}^{x}\frac{d}{dt}\left(e^{\int_t^x q(s)ds}\right)dt\right)=p(x)e^{\int_{x_0}^{x}q(t)dt}$

1.2 推论：若 $p(x)=C_0+C_1|x-x_0|$. $q(x)=C_2$ $(C_i\ge 0)$ 则 $u(x)\le\left(C_0+\frac{C_1}{C_2}\right)e^{C_2|x-x_0|}-\frac{C_1}{C_2}$

$u(x)\le C_0+C_1(x-x_0)+\int_{x_0}^{x}C_2[C_0+C_1(t-x_0)]e^{C_2(x-t)}dt=\left(C_0+\frac{C_1}{C_2}\right)e^{C_2(x-x_0)}-\frac{C_1}{C_2}$

Thm (连续依赖性) $D\subset\mathbb{R}^2$ 为开区域. (x_0, y_0) $(x_1, y_1)\in D$. $f, g: D\to\mathbb{R}$ 满足 bounded, continous

且 f 在 D 中关于 y 满足 Lipschitz 条件

设 $y(x)$, $z(x)$ 分别为初值问题 $\begin{cases}y'=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$ $\begin{cases}y'=f(x,y)+g(x,y)\\ y(x_1)=y_1\end{cases}$ 的解

且 $y(x)$, $z(x)$ 在公共区间 J 有定义. 则

$$|y(x)-z(x)|\le\left(|y_0-y_1|+(\|f\|_0+\|g\|_0)|x_1-x_0|+\frac{\|g\|_0}{L}\right)e^{L|x-x_0|}-\frac{\|g\|_0}{L}$$

Pf: 考虑 $y(x)-z(x)$ 并由上述推论即得.

$|y(x)-z(x)|=|y(x)-y(x_0)-(z(x)-z(x_1))+y(x_0)-z(x_1)|\le\int_{x_0}^{x}\overset{C_2}{L}|y(t)-z(t)|dt+\overset{C_1}{\|g\|_0}|x-x_0|+\overbrace{(\|f\|_0+\|g\|_0)|x_0-x_1|+|y_0-y_1|}^{C_0}$

故 $|y(x)-z(x)|\le\left[(\|f\|_0+\|g\|_0)|x_0-x_1|+|y_0-y_1|+\frac{\|g\|_0}{L}\right]e^{L|x-x_0|}-\frac{\|g\|_0}{L}$

~~记 $y(x, x_0, y_0)$ 为方程 $\begin{cases}y'=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$ 的解.~~

~~Thm (可微性). D open. f bounded, continous. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ bounded, continous in D~~

~~则 $\begin{cases}y'=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$ 的解在包含 x_0 的区间 J 上存在，且 $y(x, x_0, y_0)$ 关于 y_0 可微~~

~~且满足 $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial y_0}=\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial y_0}$, $\frac{\partial y}{\partial y_0}(x_0)=1$ (这是个变分方程)~~

2

开 $D\subset\mathbb{R}^2$. $(x_0,y_0)\in D$ $f: D\to\mathbb{R}$. 连续有界. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ 在 D 上连续可微且有界 L

Thm (可微性 I 关于初值的可微性).

$y(x,x_0,y_0)$ 是 $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ 的解 存在于 J 上, $J\ni x_0$ 且关于 y_0 可微. 且在 x_0 处值为 $z(x)$

且 $z(x)\left(=\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}\right)$ 为 $\begin{cases} z'=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x,x_0,y_0))z \\ z(x_0)=1. \end{cases}$ 的解

称为原初值问题的变分方程

: 设 $(x_0,y_1)\in D$. $y(x,x_0,y_1)$ 存在于 J_1 上. $y(x,x_0,y_0)$ 存在于 J_0 上. 则对 $\forall x\in J_2=J_0\cap J_1$

$|y(x,x_0,y_1)-y(x,x_0,y_0)|\le |y_0-y_1|e^{L|x-x_0|}$ 当 $y_1\to y_0$ 时. $y(x,x_0,y_1)$ 在 J_2 上一致收敛于 $y(x,x_0,y_0)$

$\forall x\in J_2$. $y(x,x_0,y_0)-y(x,x_0,y_1)-z(x)(y_0-y_1)$

$\cancel{=\int_{x_0}^x\left(f(t,y(t,x_0,y_0))-f(t,y(t,x_0,y_1))\right)dt+y_0-y_1-\frac{\partial y}{\partial y_0}(x,x_0,y_0)(y_0-y_1)}$

$\cancel{=\int_{x_0}^x\frac{\partial f}{\partial y}(t,y(t,x_0,y_0))\left[y(t,x_0,y_0)-y(t,x_0,y_1)\right]dt+o(|y(t,x_0,y_0)-y(t,x_0,y_1)|^2)+y_0-y_1}$

$-\frac{\partial y(x,y_0,y_0)}{\partial y}(y_0-y_1)$

$\cancel{|y(x,x_0,y_0)-y(x,x_0,y_1)-z(x)(y_0-y_1)|\le\int_{x_0}^x L|y(t,x_0,y_0)-y(t,x_0,y_1)|dt}$

~~因为~~ $\cancel{y(x,x_0,y_0)=y_0}$. ~~故~~ $\cancel{\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}=1}$.

$\cancel{\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial x}=y'(x,x_0,y_0)=f(x,y(x,x_0,y_0))}$

$\cancel{\frac{\partial}{\partial y_0}\left(\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y_0}(f(x,y(x,x_0,y_0)))=\frac{\partial}{\partial y}f(x,y(x,x_0,y_0))\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}}$

$\cancel{=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}=z'(x)=\frac{\partial}{\partial y}f(x,y(x,x_0,y_0))z(x)}$

$$|y(x,x_0,y_0)-y(x,x_0,y_1)-z(x)(y_0-y_1)|$$

$$=\left|\int_{x_0}^x f(t,y(t,x_0,y_0))-f(t,y(t,x_0,y_1))\,dt+y_0-y_1-\left[\int_{x_0}^x\left(\frac{\partial}{\partial y}f(t,y(t,x_0,y_0))z(t)\right)dt+1\right](y_0-y_1)\right|$$

$$\le\left|\int_{x_0}^x\frac{\partial f}{\partial y}(t,y(t,x_0,y_0))\left[y(t,x_0,y_0)-y(t,x_0,y_1)-z(t)(y_0-y_1)\right]dt\right|+\int_{x_0}^x o\left((y(t,x_0,y_0)-y(t,x_0,y_1))^2\right)dt$$

$$\le L\int_{x_0}^x|y(t,x_0,y_0)-y(t,x_0,y_1)-z(t)(y_0-y_1)|\,dt+o(|y_0-y_1|^2e^{2L|x-x_0|})$$

由 Gronwall 不等式. $|y(t,x_0,y_0)-y(t,x_0,y_1)-z(t)(y_0-y_1)|\le o(|y_0-y_1|^2e^{2L|x-x_0|})e^{L|x-x_0|}$

故 $\lim_{y_1\to y_0}\left|\frac{y(t,x_0,y_0)-y(t,x_0,y_1)}{y_0-y_1}-z(t)\right|\le\lim_{y_1\to y_0}o(|y_1-y_0|)e^{3L|x-x_0|}=0$

即 $\frac{\partial y(t,x_0,y_0)}{\partial y_0}=z(t)$

12.5

Thm $f: D\to\mathbb{R}^n$ 连续. 关于 y 局部 Lipschitz. D 是 $S=[a,b]\times\mathbb{R}^n$ 中的开集.
M 为所有满足 $y'=f(t,y)$ 且存在于 $[a,b]$ 上的解. 将 a 处的值映到对应 b 处的值
$M_a=\{y(a)\mid y\in M\}$. $M_b=\{y(b)\mid y\in M\}$. 则 Poincare 映射 $P: M_a\to M_b$ 是一个微分同胚

$$\begin{cases} y'=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}\qquad \begin{cases} y'=f(x,y)+g(x,y)\\ y(x_1)=y_1\end{cases}$$

$y(x)$ $\qquad$ $z(x)$ $\qquad$ f,g 连续有界. f 关于 y Lipschitz

$$\big(y(x)-z(x)\big)'=f(x,y(x))-f(x,z(x))-g(x,z(x))$$

$$\cancel{\left|\big(y(x)-z(x)\big)-\big(y(x_0)-z(x_0)\big)\right|=\left|\int_{x_0}^{x}\big(y(x)-z(x)\big)'\,dx\right|=\int_{x_0}^{x_1}g(x,y)\,dx}$$

$$\cancel{=\left|\int_{x_0}^{x}f(x,y(x))-f(x,z(x))-g(x,z(x))\,dx\right|}$$

$$\cancel{\le\int_{x_0}^{x}L|y(x)-z(x)|\,dx+\int_{x_0}^{x}g(x,z(x))\,dx}$$

$$\cancel{|y(x)-z(x)|\le|y(x_0)-z(x_0)|+}$$

$$|y(x)-z(x)|\le\left|y(x)-y(x_0)-\big(z(x)-z(x_1)\big)\right|+|y(x_0)-z(x_1)|$$

$$=\left|\int_{x_0}^{x}f(t,y(t))\,dt-\int_{x_1}^{x}\big(f(t,z(t))+g(t,z(t))\big)\,dt\right|+|y_0-y_1|$$

$$=\left|\int_{x_0}^{x}\big(f(t,y(t))-f(t,z(t))\big)\,dt-\int_{x_1}^{x_0}f(t,z(t))\,dt-\int_{x_1}^{x}g(t,z(t))\,dt\right|+|y_0-y_1|$$

$$\le\int_{x_0}^{x}L|y(t)-z(t)|\,dt+\|f\|_0|x_0-x_1|+\|g\|_0|x-x_1|+|y_0-y_1|$$

$$\le\int_{x_0}^{x}L|y(t)-z(t)|\,dt+\|f\|_0|x_0-x_1|+\|g\|_0|x-x_0|+\|g\|_0|x_0-x_1|+|y_0-y_1|$$

$$=\int_{x_0}^{x}L|y(t)-z(t)|\,dt+\|g\|_0|x-x_0|+\big(\|f\|_0+\|g\|_0\big)|x_0-x_1|+|y_0-y_1|$$

非负连续

- $u(x) \le p(x) + \left| \int_{x_0}^{x} q(t)u(t)\,dt \right| \Rightarrow u(x) \le p(x) + \left| \int_{x_0}^{x} p(t)q(t)\, e^{\left|\int_t^x q(s)ds\right|} dt \right|$

- $u(x) \le p(x) + \left| \int_{x_0}^{x} q(t)u(t)\,dt \right|$, $q(x)$ $\bigvee_{x_0}$ $\Rightarrow u(x) \le p(x)\, e^{\left|\int_{x_0}^{x} q(t)dt\right|}$

- $u(x) \le (C_0 + C_1|x-x_0|) + \left| \int_{x_0}^{x} C_2 u(t)\,dt \right| \Rightarrow u(x) \le \left(C_0 + \frac{C_1}{C_2}\right) e^{C_2|x-x_0|} - \frac{C_1}{C_2}$

- $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ $y(x)$ $\quad \begin{cases} y' = f(x,y) + g(x,y) \\ y(x_1) = y_1 \end{cases}$ $z(x)$ $\quad |y(x) - z(x)| \le \left(|y_0 - y_1| + (\|f\|_0 + \|g\|_0)|x_1 - x_0| + \frac{\|g\|_0}{L} \right) e^{L|x-x_0|} - \frac{\|g\|}{L}$

5/7

Thm（可微性 II 关于初值的可微性）

$y(x,x_0,y_0)$ 关于 x_0 也是可微的.

~~由~~ 考虑初值问题 $\begin{cases} z'(x) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y(x,x_0,y_0)) \cdot z(x) \\ z(x_0) = -f(x_0,y_0) \end{cases}$

显然，这个方程存在唯一解 $z = z(x)$. 下证 $z(x) = \frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}$

∴ 设 $(x_1, y_0) \in D$ $y(x, x_1, y_0)$ 为所考虑的Cauchy问题过 (x_1, y_0) 的解.

设 $y(x, x_0, y_0)$ 与 $y(x, x_1, y_0)$ 的解区间分别为 J_0 和 J_1 对 $\forall x \in J_2 = J_0 \cap J_1$

则由Gronwall不等式. $\left| y(x,x_0,y_0) - y(x,x_1,y_0) \right| \le M |x_1 - x_0| e^{L|x-x_0|}$

故当 $x_1 \to x_0$ 时. 丈 $y(x,x_1,y_0)$ 在 J 上闭一致收敛于 $y(x,x_0,y_0)$

下面考虑 $y(x,x_0,y_0) - y(x,x_1,y_0) - z(x)(x_0 - x_1)$

$$= \int_{x_0}^{x} f(t, y(t,x_0,y_0)) - f(t, y(t,x_1,y_0)) - \frac{\partial}{\partial y} f(t, y(t,x_0,y_0)) z(t)(x_0-x_1)\, dt$$

$$+ \; y_0 - \int_{x_1}^{x_0} f(t, y(t,x_1,y_0))\, dt - y_0 - (-f(x_0,y_0)(x_0-x_1))$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial f(t, y(t,x_0,y_0))}{\partial y} \left[y(t,x_0,y_0) - y(t,x_1,y_0) - z(t)(x_0-x_1) \right] dt$$

$$- \int_{x_1}^{x_0} \left(f(t, y(t,x_1,y_0)) - f(x_0,y_0) \right) dt + o(|y(t,x_0,y_0) - y(t,x_1,y_0)|)$$

故 $$\left| y(x,x_0,y_0) - y(x,x_1,y_0) - z(x)(x_0-x_1) \right| \le L \int_{x_0}^{x} \left| y(t,x_0,y_0) - y(t,x_1,y_0) - z(t)(x_0-x_1) \right| dt$$

$$+ \left| \int_{x_1}^{x_0} \left| f(t, y(t,x_1,y_0)) - f(x_0,y_0) \right| dt \right|$$

$$+ o(|x_1 - x_0|) M e^{L|x-x_0|}$$

由Gronwall不等式. $\left| y(x,x_0,y_0) - y(x,x_1,y_0) - z(x)(x_0-x_1) \right| \le \left(o(|x_1-x_0|) M e^{La} + \int_{x_1}^{x_0} f(\cdots) - f(x_0,y_0) \right)$

$\overline{\lim_{x_1 \to x_0}} \left| \frac{y(x,x_0,y_0) - y(x,x_1,y_0)}{x_0 - x_1} - z(x) \right| \le \overline{\lim_{x_1\to x_0}} \left(o(1) + \frac{\int_{x_1}^{x_0} f(\cdots) - f(x_0,y_0)\, dt}{x_1 - x_0} \right) e^{L|x-x_0|} e^{L|x-x_0|} = 0$

6

解对参数的连续依赖性与可微性

Thm. $D\subset\mathbb{R}^3$. $(x_0,y_0,\lambda_0)\in D$ $f=f(x,y,\lambda):D\to\mathbb{R}$.

若 (1) f 有界连续 (2) $\frac{\partial f(x,y,\lambda)}{\partial y}$, $\frac{\partial f(x,y,\lambda)}{\partial \lambda}$ 存在. 且在 D 上有界连续

则: 1. $\exists h,\varepsilon>0$ s.t. $\forall\lambda\in[\lambda_0-\varepsilon,\lambda_0+\varepsilon]$

方程 $\begin{cases} y'=f(x,y,\lambda) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ 的解 $y(x,\lambda)$ 在 $[x_0-h,x_0+h]$ 上存在

2. $\forall\lambda_1,\lambda_2\in[\lambda_0-\varepsilon,\lambda_0+\varepsilon]$ $x\in[x_0-h,x_0+h]$ 有

$$|y(x,\lambda_1)-y(x,\lambda_2)|\le\frac{\|\frac{\partial f}{\partial\lambda}\|_0}{\|\frac{\partial f}{\partial y}\|_0}\left(e^{\|\frac{\partial f}{\partial\lambda}\|_0|x-x_0|}-1\right)\cdot|\lambda_1-\lambda_2|$$

3. $y(x,\lambda)$ 关于 λ 可微. 且 $z(x,\lambda)=\frac{\partial y(x,\lambda)}{\partial\lambda}$ 满足

$$\begin{cases} z'(x,\lambda)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x,\lambda),\lambda)\,z(x,\lambda)+\frac{\partial f}{\partial\lambda}(x,y(x,\lambda),\lambda) \\ z(x_0,\lambda)=0. \end{cases}$$

证 1. 由 C-L 定理, 实际上存在且唯一.

2. $y(x,\lambda_1)-y(x,\lambda_2)=\int_{x_0}^{x}f(t,y(t,\lambda_1),\lambda_1)-f(t,y(t,\lambda_2),\lambda_2)\,dt$

$=\int_{x_0}^{x}f(t,y(t,\lambda_1),\lambda_1)-f(t,y(t,\lambda_1),\lambda_2)+f(t,y(t,\lambda_1),\lambda_2)-f(t,y(t,\lambda_2),\lambda_2)\,dt$

$=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f}{\partial\lambda}f(t,y(t,\lambda_1),\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2)+\frac{\partial f}{\partial y}(t,y(t,\lambda_2),\lambda_2)[y(t,\lambda_1)-y(t,\lambda_2)]\,dt$

$+o(\lambda_1-\lambda_2)+o(y(t,\lambda_1)-y(t,\lambda_2))$

$|y(x,\lambda_1)-y(x,\lambda_2)|\le\|\frac{\partial f}{\partial\lambda}\|_0|\lambda_1-\lambda_2||x-x_0|+\int_{x_0}^{x}(\|\frac{\partial f}{\partial y}\|_0+o(1))|y(t,\lambda_1)-y(t,\lambda_2)|\,dt$

$+o(\lambda_1-\lambda_2)$

$$\Rightarrow|y(x,\lambda_1)-y(x,\lambda_2)|\le\left(\frac{\|\frac{\partial f}{\partial\lambda}\|_0|\lambda_1-\lambda_2|}{\|\frac{\partial f}{\partial y}\|_0+o(1)}+o(|\lambda_1-\lambda_2|)\right)e^{(\|\frac{\partial f}{\partial y}\|_0+o(1))|x-x_0|}-\frac{\|\frac{\partial f}{\partial\lambda}\|_0|\lambda_1-\lambda_2|}{\|\frac{\partial f}{\partial y}\|_0+o(1)}$$

$\Rightarrow|y(x,\lambda_1)-y(x,\lambda_2)|\le$ 将所有 $o(1)$ 扔掉即得

3. $\left|y(x,\lambda_1)-y(x,\lambda_2)-z(x,\lambda)(\lambda_1-\lambda_2)\right|$

$$\leq \int_{x_0}^{x}\left\|\frac{\partial f}{\partial y}\right\|_0 \left|y(t,\lambda_1)-y(t,\lambda_2)-z(t,\lambda)(\lambda_1-\lambda_2)\right|dt + o(|\lambda_1-\lambda_2|)+o(|y(t,\lambda_1)-y(t,\lambda_2)|)$$

$$=\int_{x_0}^{x}\left\|\frac{\partial f}{\partial y}\right\|_0 \left|y(t,\lambda_1)-y(t,\lambda_2)-z(t,\lambda)(\lambda_1-\lambda_2)\right|dt + o(|\lambda_1-\lambda_2|)\cdot A$$

A与模 ~~某~~ 是常数

由Gronwall不等式: $\left|y(x,\lambda_1)-y(x,\lambda_2)-z(x,\lambda)(\lambda_1-\lambda_2)\right| \leq o(|\lambda_1-\lambda_2|)\, e^{\|\frac{\partial f}{\partial y}\|_0 |x-x_0|}$

$$\left|\frac{y(x,\lambda_1)-y(x,\lambda_2)}{|\lambda_1-\lambda_2|}-z(x,\lambda)\right| \leq o(1)\cdot e^{\|\frac{\partial f}{\partial y}\|_0\cdot h}$$

故 $\dfrac{\partial y}{\partial \lambda}=z(x,\lambda)$

No.

Date

Liouville公式 $W(t)=W(0)e^{\int_0^t tr(A(t))dt}$

非自治的化为自治的

$$\begin{cases}\dot{x}_1=f_1(x_1\dots x_n;t)\\ \vdots\\ \dot{x}_n=f_n(x_1\dots x_n;t)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dot{x}_1=f_1(x_1\cdots x_n,x_{n+1})\\ \vdots\\ \dot{x}_n=f_n(x_1\cdots x_n,x_{n+1})\\ \dot{x}_{n+1}=1\end{cases}$$

带参数的化为不带参数的

$$\begin{cases}\dot{x}(t,\lambda)=f(x,\lambda)\\ x(0,\lambda)=x_0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dot{x}(t)=f(x,y)\\ \dot{y}(t)=0.\\ x(0)=x_0\\ y(0)=\lambda\end{cases}$$

Campus